

От автора бестселлера «Теория игр»

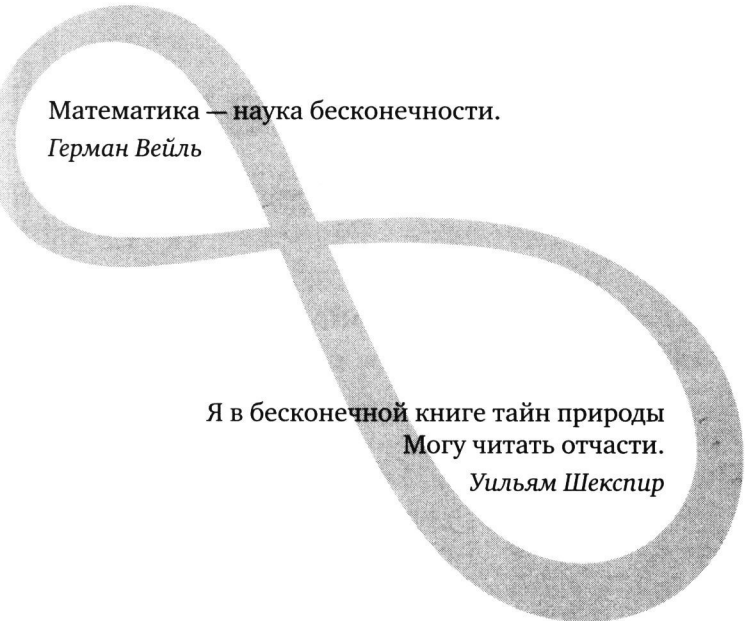
ХАИМ ШАПИРА

УДИВИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

КАК
ТЕОРИЯ
ЧИСЕЛ

И ТЕОРИЯ
МНОЖЕСТВ
ПОРОЖДАЮТ

ПАРАДОКСЫ
БЕСКОНЕЧНОСТИ



Математика — наука бесконечности.

Герман Вейль

Я в бесконечной книге тайн природы
Могу читать отчасти.

Уильям Шекспир

ХАИМ ШАПИРА

УДИВИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

КАК ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ
И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ
ПОРОЖДАЮТ
ПАРАДОКСЫ
БЕСКОНЕЧНОСТИ



УДК 510.22+511
ББК 22.12+22.13

Ш23

Haim Shapira

EIGHT LESSONS ON INFINITY

A Mathematical Adventure

Перевод с английского *Дмитрия Прокофьева*

Текст печатается по изданию:

Шапира Х. Восемь этюдов о бесконечности: Математическое приключение. М.: КоЛибри, Азбука-Аттикус, 2021.

Шапира Х.

- Ш23 Удивительная математика : Как теория чисел и теория множеств порождают парадоксы бесконечности / Хаим Шапира ; [пер. с англ. Д. А. Прокофьева]. — М. : КоЛибри, Азбука-Аттикус, 2024. — 336 с.: ил.

ISBN 978-5-389-26822-7

У книги о бесконечности не может быть конца; бесконечность — это нескончаемая история, утверждает автор нескольких международных бестселлеров, блестящий математик и философ, профессор Тель-Авивского университета Хаим Шапира. В сопровождении величайших математических умов всех эпох с их гениальными гипотезами, теоремами и доказательствами вы отправитесь в увлекательное математическое путешествие, в ходе которого вас ждет множество открытий, чудесная дружба с цифрами и великолепная пища для ума.

«Почему столь многие люди чураются замысловатости и красоты, которые можно найти в мире чисел и их связях друг с другом? Возможно, главная причина заключается в неприступности математики и тех трудностях, с которыми сталкиваются желающие познать ее. Действительно, математика весьма сложна, и, чтобы разобраться в ее хитросплетениях, необходимо затратить время и приложить умственные усилия — но и за особо изысканными жемчужинами иногда приходится нырять до самых недоступных глубин. Для меня важно, чтобы эту книгу мог с удовольствием читать любой человек, достаточно любознательный и стремящийся время от времени поработать головой». (*Хаим Шапира*)

ISBN 978-5-389-26822-7

© Haim Shapira, 2019

© Прокофьев Д. А., перевод на русский язык, 2021

© Издание на русском языке, оформление.

ООО «Издательская группа «Азбука-Аттикус», 2024

КоЛибри®

*Посвящается вам,
Даниела, Таль и Инбаль*

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	9
Разминка. Краткое введение в размышления	14
1. Чудесный мир чисел: Пифагор	45
2. Рамануджан и камешки Пифагора	70
3. Тайная жизнь простых чисел	105
4. Великое открытие Пифагора	150
5. Черепаха, Ахиллес и стрела: апории Зенона	165
6. Царство бесконечности Георга Кантора: теория множеств	196
7. Гранд-отель «Бесконечность» имени Гильберта	221
8. Кардинальные числа и укрощение бесконечности	247
Заключение	324
Выражение благодарности	326
Примечания	327
Дополнительная литература	333
Об авторе	334

ПРЕДИСЛОВИЕ

Если бы мне пришлось начать вновь свое обучение, то я последовал бы совету Платона и принялся бы сперва за математику.*

Галилео Галилей

Английский биолог и популяризатор науки Ричард Докинз заметил однажды, что никто и никогда не признается с гордостью в невежестве и необразованности по части литературы, но неосведомленность в точных науках, ярче всего воплощающаяся в абсолютном незнании математики, вовсе не считается чем-то постыдным. Докинз заметил это обстоятельство не первым: он и сам указывает, что это утверждение давно превратилось в клише.

Это, разумеется, истинная правда. Никто не станет хвалиться, что никогда не читал книг, не видел ни одного произведения искусства, никогда — ни разу в жизни — не был растроган музыкой. Если провести опрос, я совершенно уверен, что не най-

* «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки». День первый. (Пер. С. Н. Долгова.) Здесь и далее цит. по: Галилей Г. Избранные произведения: В 2 т. М.: Наука, 1964. Т. 2.

дется ни одного образованного взрослого человека, никогда не слыхавшего о Шекспире, Рембрандте или Бахе. По всей вероятности, участники такого опроса знали бы и имена великих математиков Пифагора, Исаака Ньютона и Альберта Эйнштейна. Но многие ли слышали о Леонарде Эйлере, Сринивасе Рамануджане или Георге Канторе?

Возможно, в этот самый момент вы тоже спрашиваете себя: «Что? Кто это такие? Их имена ни о чем мне не говорят».

Это великие математики. Величайшие математики!

Я всерьез увлекаюсь музыкой, литературой и изобразительным искусством, но искренне считаю, что математические формулы Рамануджана — такое же чудо, как музыкальные построения Баха, а открытия Кантора, касающиеся бесконечности, кажутся мне не менее поразительными, чем произведения Шекспира.

И раз уж мы сравниваем гениев художественного творчества с гениями математики, я хотел бы отметить, что Кантор был специалистом по творчеству Шекспира, а Эйнштейн — прекрасным пианистом и скрипачом. Такое встречается очень часто, и я знаю много математиков, чрезвычайно хорошо знающих литературу, искусство и музыку.

Более того, немецкий математик Карл Вейерштрасс сказал как-то, что математик, в котором

нет ничего от поэта, не может быть хорошим математиком. Однако создается впечатление, что этот принцип не действует в обратном направлении: многие из тех, кто работает в области литературы, музыки или изобразительного искусства, по-видимому, испытывают неприязнь к математике.

В чем тут дело? Почему столь многие люди, какими бы образованными они ни были, чужаются замысловатости и красоты, которые можно найти в мире чисел и их связях друг с другом?

Возможно, главная причина заключается в неприступности математики и тех трудностях, с которыми сталкиваются желающие познать ее. Действительно, математика весьма сложна, и, чтобы разобраться в ее хитросплетениях, необходимо затратить время и приложить умственные усилия — но и за особо изысканными жемчужинами иногда приходится нырять до самых недоступных глубин.

Мысль написать эту книгу явилась мне однажды, когда я перебирал свою математическую библиотеку. Я заметил, что мои сочинения по большей части относятся к одной из двух категорий:

1. Математические книги, написанные для неспециалистов. Некоторые из них совершенно замечательны, но они в большей степени посвящены рассказам о математике, чем самой математике.

2. Математические книги, написанные для математиков. В этой категории тоже есть множество превосходных работ, но прочесть (и понять) их могут только математики.

Поэтому я решил написать книгу, которая относилась бы еще к одной, третьей категории. Я расскажу читателю-неспециалисту просто и ясно о двух математических теориях, которые считаю самыми завораживающими, — теории чисел и теории множеств, и каждая из них имеет отношение к бесконечности. Вместе с этим я предложу стратегии математического мышления, позволяющие читателю испытать свои способности к решению поистине увлекательных математических задач.

Для меня важно, чтобы эту книгу мог с удовольствием читать любой человек, достаточно любознательный и стремящийся время от времени поработать головой. Поэтому я воздержался от использования любых устрашающих математических символов (нигде в этой книге вы не найдете никаких $\nabla f(x_1, \dots, x_n)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\iiint$ или $\lim_{x \rightarrow \infty}$). Применяются только базовые математические операции (сложение, вычитание, умножение и деление, плюс несколько операций посложнее, вроде возведения в степень и извлечения корня). Кроме того, я как мог старался сделать текст занимательным: на самом деле никто не любит задач о трех трубах,

которые наполняют бассейн, и еще двух, которые (по никому не известным причинам) одновременно с этим пытаются его осушить.

Комментарии к книге, ответы на вопросы и вопросы о вопросах можно присылать по адресу shapirapiano@gmail.com. Желаю вам увлекательного путешествия!

Разминка

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В РАЗМЫШЛЕНИЯ

Размышления: разговор души с самой собой.

Платон

Если вы не поленились и прочитали предисловие, вы уже знаете, что у меня есть довольно солидная коллекция книг по математике. Одно из моих любимых занятий — возиться с интересными задачами. Ну, для меня-то это естественно. Я этому и учился. Но чтобы увидеть красоту и изящество математики, необязательно заканчивать математический факультет. Если вам хватает терпения немного подумать, вы найдете тысячи интересных — и иногда весьма знаменитых — математических задач и парадоксов, которыми уже много веков восхищается стар и млад. Стоит приложить немного усилий, и почти кто угодно сможет испытать тот восторг, в который приводит способность решать головоломки, кажущиеся на первый взгляд чрезвычайно сложными.

В этом разделе я представлю скромный набор математических задач из числа моих любимых,

от довольно простых до весьма глубоких и даже предположительно неразрешимых (а если вы их все-таки решите, вас ждет премия). Я хочу познакомить вас, мой уважаемый читатель, хотя бы с немногими образцами интереснейших размышлений, которые вы можете найти в поразительном мире математики.

Великое маленькое исследование — открытая проблема

Много лет назад я прочитал удостоенную Пулитцеровской премии книгу Дугласа Р. Хофштадтера «Гёдель, Эшер, Бах». Сам автор называет ее «метафорической фугой о разумах и машинах в духе Льюиса Кэрролла». Она рассказывает о самых разнообразных предметах из царств математики, музыки, симметрии, искусственного интеллекта и логики и содержит множество математических загадок. Я хотел бы познакомить вас с одной из них.

Возьмем любое число — точнее, любое целое или натуральное число. Ахилл (он же Ахиллес — тот самый, у которого были проблемы с пяткой), также ставший одним из персонажей книги Хофштадтера, задумал число 15. Вы, разумеется, можете выбрать любое число по своему вкусу.

Теперь сделаем вот что: если это число четное, разделим его на 2. Если оно нечетное, умножим

его на 3 и прибавим 1. Будем повторять эту процедуру снова и снова, пока не получим (если получим) число 1. Посмотрим, как это работает:

Поскольку 15 — число нечетное, умножим его на 3 и прибавим 1.

$$15 \times 3 + 1 \text{ дает } 46.$$

46 — число четное: разделим его на 2 и получим 23. Поскольку это число нечетное, умножим его на 3 и прибавим 1.

$$23 \times 3 + 1 = 70$$

Продолжим этот процесс:

$$70/2 = 35;$$

$$35 \times 3 + 1 = 106;$$

$$106/2 = 53;$$

$$53 \times 3 + 1 = 160;$$

$$160/2 = 80;$$

$$80/2 = 40;$$

$$40/2 = 20;$$

$$20/2 = 10;$$

$$10/2 = 5;$$

$$5 \times 3 + 1 = 16;$$

$$16/2 = 8;$$

$$8/2 = 4;$$

$$4/2 = 2, \text{ и наконец } 2/2 = 1.$$

Процесс дошел до конца.

Спрашивается, правда ли, что эта процедура рано или поздно приводит к 1 для любого исходного числа?

Попробуйте подставить в нее пару других чисел. Для некоторых из них этот процесс может оказаться чрезвычайно долгим, и вам, возможно, понадобится очень большой лист бумаги. Если вы попытаетесь запустить этот процесс на компьютере, имейте в виду — вычисления могут затянуться.

Хофштадтер предложил Ахиллесу попробовать число 27. Вы можете последовать его примеру. Я дам вам пару минут... или, может быть, часов.

Сдаетесь? Если начать с 27, кажется, что процесс все продолжается и продолжается и дает нескончаемую цепочку вычислений. В какой-то момент вы можете решить, что она и впрямь никогда не закончится. На самом деле требуемое в этом случае число шагов равно 111.

В своей книге Хофштадтер предостерегает Ахиллеса относительно попыток найти ответ на заданный выше вопрос (действительно ли из любого числа можно получить 1?) и рассказывает, что эта задача известна под названием «гипотеза Коллатца» (напомню на всякий случай, что «гипотеза» значит «догадка» или, точнее, «предложение возможной новой теоремы, которую еще нужно доказать»). Она утверждает, что, с какого бы числа мы ни начали описанный выше процесс, он рано или поздно приведет к 1. Эта гипотеза названа в честь немецкого математика Лотара Коллатца (1910–1990), впервые

описавшего ее в 1937 г. Тем не менее у нее есть и другие названия: в частности, ее называют гипотезой Улама (по имени польского математика Станислава Улама) или задачей Какутани (по имени японского математика Сидзуо Какутани). Иногда говорят просто о гипотезе $3n + 1$, что вполне логично.

Когда я впервые узнал о гипотезе $3n + 1$, я был слишком молод, чтобы осознать, насколько сложна и глубока эта задача. Я предполагал, что мне понадобится всего несколько дней, чтобы придумать критерий, определяющий, для каких чисел эта процедура дает на последнем шаге 1. Мне казалось даже, что я сумею доказать истинность гипотезы — что любое число в конце концов приводит к 1. Возможно, занимаясь этим, я даже смогу открыть распределение числа шагов, необходимого для каждого конкретного числа (например, когда мы подставили число 15, количество шагов оказалось равным 17). Я не мог понять только одного: как так получилось, что никто до сих пор не сумел решить эту задачу.

Во всяком случае, так я думал...

По-видимому, существует веская причина, по которой эта задача все еще считается «открытой проблемой».

Хотя успеха я не добился, это меня не слишком расстроило. Я нахожу трудные вопросы очень привлекательными. Они заставляют размышлять.

На самом деле я даже больше люблю задачи, которые не могу решить (или по меньшей мере не могу решить без труда), чем те, которые решаются в момент и без особых интеллектуальных усилий. Разумеется, это не значит, что я оказываюсь на вершине блаженства, когда не могу справиться с какой-нибудь проблемой — несомненно, решение непростой задачи, доставшееся ценой большого труда, доставляет гораздо больше удовольствия.

Вернемся, однако, к нашей гипотезе. Посмотрите, что тут происходит. Мы столкнулись с математической задачей, в которой используются только базовые арифметические операции — сложение, умножение и деление, — и тем не менее *никто на свете не знает, как ее решить!*

Как такое может быть? Можно было бы предположить, что задача, которую можно сформулировать таким простым образом, должна иметь простое решение. Не тут-то было! На простой вопрос не всегда есть простой ответ. В математике есть множество вопросов, которые можно задать маленькому ребенку, и он легко поймет, в чем состоит задача, но ответов на них до сих пор не нашли даже самые гениальные взрослые.

Если рассмотреть достаточное количество примеров задачи Коллатца, можно заметить одно обстоятельство: последние числа, появляющиеся

в этом процессе, представляют собой последовательно уменьшающиеся степени 2. Например, если начать с 15, то последние пять чисел последовательности — это 16, 8, 4, 2 и, наконец, 1.

Это явление можно сформулировать в виде правила, сказав, что если процесс доходит до числа вида 2^n , то он гарантированно сойдется к 1 в точности через n делений на 2. Это наблюдение позволяет перефразировать гипотезу $3n + 1$ следующим образом: приходит ли на каком-то этапе процесс, начатый с любого произвольного числа, к степени 2?

Принцип замены исходной задачи на другую называется приведением или упрощением. Этот метод — полезный математический инструмент; в некотором смысле он открывает более естественный путь к решению математических задач. Еще одна, похожая, стратегия решения задач — это рассуждения в обратном порядке (от конца к началу). Этот прием, возможно, знаком вам по лабиринтам. Когда разрабатываешь маршрут по лабиринту, иногда бывает удобнее начать от выхода и прокладывать путь к исходной точке. В некотором глубоком смысле можно сказать, что в том же состоит и метод приведения математической задачи.

Венгерский математик Пал Эрдёш (1913–1996) любил предлагать денежные призы за успешное

решение интересовавших его открытых математических проблем. Призы эти начинались с 25 долларов, а доказательство гипотезы Коллатца стоило в его прейскуранте целых 500 долларов — то есть попадало в категорию весьма дорогих задач, хотя сам Эрдёш говорил, что мир математики, возможно, не готов к таким сложным и запутанным задачам, как гипотеза $3n + 1$. Эрдёша уже нет с нами, но можно не беспокоиться: выплату призов взял на себя его коллега Рон Грэм. Если вам удастся решить эту задачу, вы можете получить приз одним из двух способов: либо в виде чека, который сам Эрдёш выписал перед смертью (его можно только вставить в рамку: срок действия этого чека давно истек), либо реальными деньгами (выбор между грехом гордыни и грехом сребролюбия).

К слову, а также потому, что я хотел бы поделиться этим интересным фактом, самое большое число, когда-либо использованное в математическом доказательстве, названо в честь этого же самого Рона Грэма. Число это настолько велико, что его невозможно записать в стандартной математической нотации.

Мудрость — это знать, что не знаешь того, чего не знаешь, и знаешь то, что знаешь. Глупость — это думать, что знаешь то, чего не знаешь, или не знаешь того, что знаешь.

Китайская пословица

ЧИСЛО ЭРДЁША

Пал Эрдёш был математиком исключительно плодовитым. Его превосходную биографию можно найти в книге Пола Хофмана «Человек, который любил только числа» (The Man Who Loved Only Numbers, 1998). Он написал более 1400 научных статей. Эрдёш был страстным поборником командной работы и сотрудничества, и за годы его научной деятельности вместе с ним над его статьями работали целых 511 математиков. Любому математику, который когда-либо писал статью в соавторстве с самим Эрдёшем, присваивается престижное число Эрдёша, равное 1. Те, кто сотрудничал с его соавторами, но не с самим Эрдёшем, получают число Эрдёша, равное 2. Аналогичным образом по мере все большего удаления присваиваются числа Эрдёша, равные 3, 4 и так далее. Общее правило таково: если вы сотрудничаете с человеком, наименьшее число Эрдёша которого равно k , то ваше число Эрдёша равно $k + 1$. Сам Эрдёш был единственным человеком с числом Эрдёша, равным 0. На противоположном конце спектра находятся те, кто никогда не писал статей с Эрдёшем и никогда не писал статей ни с кем из имеющих конечное число Эрдёша: их число Эрдёша равно бесконечности (∞). «Бесконечное число Эрдёша» звучит весьма престижно — может быть, даже престижнее, чем, скажем, «число Эрдёша 7», — но многие из вас, наверное, удивятся, узнав, что ваше собственное число Эрдёша (как и у большей части человечества) как раз и равно

бесконечности. Я сам не пишу статей, но однажды принимал участие в совместной работе над статьей с математиком, число Эрдёша которого равнялось 3, так что я, даже не стремясь к тому, стал гордым обладателем числа Эрдёша, равного 4.

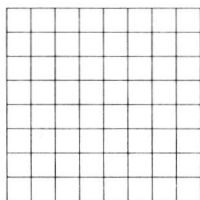
Это напоминает популярную салонную игру «Шесть шагов до Кевина Бейкона». Знаменитый голливудский актер Кевин Бейкон заявил однажды, что все до единого актеры в Голливуде либо снимались с ним вместе (Бейкон-1), либо снимались с кем-нибудь, с кем снимался и он (Бейкон-2), либо с кем-нибудь, кто снимался с кем-нибудь, кто... (Бейкон-3, 4 и т. д.). В целом, утверждал он, «число Бейкона» почти всех актеров и актрис Голливуда не превышает 6. Например, у Элвиса Пресли оно равно 2. Связь между ними вы можете восстановить самостоятельно¹. Кажется, что мир действительно тесен: в нем есть люди, у которых есть и число Эрдёша, и число Бейкона. Например, у Рона Грэма число Эрдёша равно 1, а число Бейкона — 2. А у знаменитой израильской актрисы Натали Портман число Эрдёша равно 5, а число Бейкона — 1 (этого вы не ожидали, правда?).

Вернемся наконец к доказательству гипотезы Коллатца. Его не существует, и, по правде говоря, я знаю множество способов заработать 500 долларов, гораздо более простых, чем возня с этой задачей.

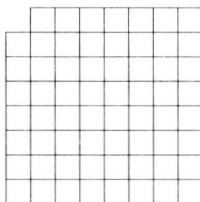
Загадка шахматной доски

Я несколько сомневался, говорить ли о следующей загадке. На самом деле она очень проста. Тем не менее после бурного спора с самим собой я решил все-таки рассказать о ней, потому что она весьма знаменита, причем и сама загадка, и ее решение замечательно красивы.

Рассмотрим сетку размером 8×8 ячеек.



Очевидно, всю эту сетку легко покрыть 32 костяшками домино размером 1×2 ячейки. А теперь уберем две клетки, расположенные в противоположных углах.



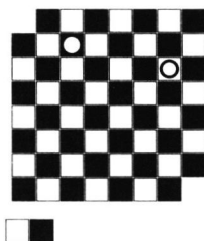
Можно ли покрыть получившуюся сетку всего 31 костяшкой?

Мои друзья (все они не математики, но по большей части люди весьма умные) в большин-

стве своем уверены, что можно, — нужно только сообразить, как именно их следует расположить.

Но правильный ответ на этот вопрос — «нет». Что бы мы ни делали, 31 костяшка домино не может покрыть сетку с удаленными противоположными угловыми клетками.

Почему это так, немедленно становится ясно, если взять вместо такой незакрашенной сетки черно-белую шахматную доску.



Как видно на рисунке, каждая костяшка домино может закрыть одну черную клетку и одну белую; поэтому 31 костяшка может закрыть в точности 31 белую клетку и 31 черную. Поскольку две клетки, удаленные с доски, одного и того же цвета — белые, — в обрезанной доске осталось 30 белых клеток и 32 черные. Много лет назад, когда я учился на математическом факультете в Тель-Авиве, я вел для «интересующейся наукой молодежи» курс под названием «Парадоксы, загадки и числа». Я давал эту задачу молодым слушателям

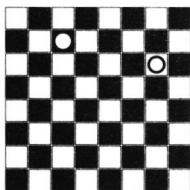
своего курса. Каждый раз происходила одна любопытная вещь. Многие ученики решительно не соглашались с доказательством, которое показывает, что 31 костяшка домино не может покрыть доску с удаленными противоположными угловыми клетками. Интересно отметить, что в их число входили и ученики, казалось бы, вполне понимавшие объяснение этого доказательства; тем не менее они упорно раскладывали костяшки домино так и эдак, стараясь покрыть эту самую доску с обрезанными углами. Я даже не пытался убедить их в бессмысленности этого занятия — каждый должен учиться на собственных ошибках.

История учит нас, что люди и народы ведут себя мудро после того, как они исчерпают все остальные возможности.

Абба Эвен

Головоломка

Докажите, что, если из шахматной доски удалить любые две клетки разных цветов, все оставшиеся клетки всегда можно покрыть 31 костяшкой домино.

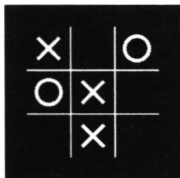


Бесконечные крестики-нолики

Когда я учился в начальной школе в Литве, в своем родном Вильнюсе, одним из самых значительных моих достижений было обретение виртуозного умения играть на уроках в стратегические игры с карандашом и бумагой и не попадаться учителям. Моей любимой игрой был бесконечный вариант крестиков-ноликов. Эта игра не раз спасала меня от скуки на занятиях, на которых меня заставляли сидеть.

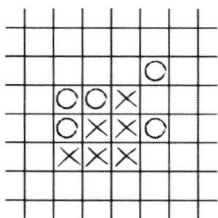
Позвольте объяснить вам правила игры.

Вы, несомненно, знакомы с обычными крестиками-ноликами, в которые играют на поле размером 3×3 клетки. Эта игра подходит для детей лет до шести. После этого возраста каждая партия должна неизменно заканчиваться вничью, если только один из игроков не заснет в процессе игры (что, бесспорно, возможно, учитывая, насколько эта игра скучна).

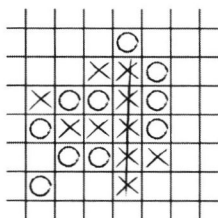


В бесконечном варианте играют на бесконечном поле, и каждый игрок стремится выстроить ряд из пяти крестиков или ноликов. Как и в исход-

ном варианте, ряд может быть горизонтальным, вертикальным или диагональным. Игроки по очереди ставят на поле крестики и нолики, и первый, выстроивший ряд из пяти своих символов, считается победителем.



а)



б)

а) У ноликов нет хода, который позволил бы заблокировать две «открытые» тройки крестиков; нолики проигрывают

б) Пример еще одной партии, которую только что выиграли крестики

В начальной школе, когда я «открыл» эту игру, я думал, что сам ее и изобрел, но впоследствии узнал, что это не так: существует игра под названием «гомоку», очень похожая на бесконечные крестики-нолики. Она особенно популярна в Японии и Вьетнаме. Слово *го* означает по-японски «пять».

Вы наверняка слышали об игре *го*. Однако, хотя в *гомоку* часто играют на такой же доске, какую используют для этой прославленной великой игры, между ними нет никакой связи. *Го* — древняя

китайская игра, которая даже упоминается в «Аналектах»^{*} Конфуция. Поскольку она попала на Запад через Японию, мы используем ее японское название, но, как я уже сказал, го — это не гомоку^{**2}.

Несмотря на тот опыт, который я накопил, играя на уроках — а иногда и на переменах (хотя на переменах играть не так интересно — потому что это не запрещено!), я не мог понять, всегда ли игрок, начинающий первым (то есть играющий крестиками), выигрывает, если он применяет правильную стратегию, независимо от того, как играет его противник, или же партия всегда заканчивается вничью (точнее, не может закончиться никогда), если оба ее участника играют правильно. Интуиция подсказывала мне, что должна существовать какая-то стратегия, обеспечивающая победу игроку, делающему первый ход в партии.

По совести, я должен признаться, что не играл в эту игру уже несколько десятков лет. Я вспомнил о ней, когда писал эту книгу. Но вопросы

^{*} Китайское название — «Лунь юй», первая из четырех книг конфуцианского канона. В русских переводах называется также «Беседы и суждения». — *Здесь и далее, если не указано иное, постраничные примеч. перев.*

^{**} Более того, даже кажущееся сходство названий этих игр случайно. *Го моку* означает по-японски «пять камней». Название же игры *го* происходит от слов *и-го*, японского перевода китайского названия *вэй-ци*, которое традиционно переводится на русский как «облавные шашки».

о стратегических аспектах игры и о существовании некой выигрышной стратегии занимают меня до сих пор. Я даже готов поспорить, что такая выигрышная стратегия существует. Когда я буду старше и у меня будет больше свободного времени, я собираюсь всерьез заняться поисками этой стратегии, но, пока эти мои планы относятся к отдаленному будущему, вы вполне можете попытаться найти ее раньше меня и избавить меня от этой работы.

Монах и его задача³: взгляд с обеих сторон

Однажды ранним утром, на самом восходе солнца, старый буддийский монах начал подниматься по крутому и извилистому горному склону к монастырю, стоявшему на вершине. Монах взбирался по узкой, извивающейся тропе — единственному пути в монастырь. Подъем был поистине изнурительным.

Он шел то быстрее, то медленнее, время от времени останавливаясь передохнуть, бормоча мантры, а иногда задерживаясь, чтобы немного поесть или попить воды. До монастыря на вершине он добрался в тот самый момент, когда солнце начало садиться. Старый монах провел в монастыре несколько дней, уча молодых монахов о сострада-

нии, о Четырех благородных истинах, о шуньяте (пустотности), об иллюзорности самосознания, о сансаре и страдании, о карме и спокойствии, о Благородном восьмеричном пути, об учении Нагарджуны и о желании избавиться от желаний.

Когда же монах закончил свои поучения, пришло время спуститься с горы и вернуться в свою деревню. Он начал спускаться в то же время, когда начинал подниматься — с появлением первых солнечных лучей, — и шел в точности по тому же пути, что и раньше. Спускался старый монах, разумеется, гораздо быстрее, чем поднимался. Когда он дошел до конца спуска, ему в голову пришло, что на тропе, несомненно, есть такая точка, которую он проходил на подъеме и на спуске в точности в одно и то же время суток.

Головоломка

Как монах пришел к этому выводу? Если вы еще не нашли ответа на этот вопрос за десять секунд размышлений, вот вам вполне очевидная подсказка:

Пусть два монаха отправляются в путь на рассвете, причем один из них поднимается от подножия горы, а второй спускается с ее вершины. В какой-то точке они неизбежно встретятся.

Математика тенниса: бесконечность — это сколько?

Версия первая

В 1953 г. английский математик Джон И. Литлвуд (1885–1977) предложил следующий парадокс, известный теперь под названием «парадокс Росса — Литлвуда».

Перед входом в огромную пустую комнату выложен бесконечный ряд теннисных мячей, пронумерованных по порядку: 1, 2, 3, 4... Близится полночь. За тридцать секунд до 0:00 в комнату вносят мячи 1 и 2 и мяч номер 1 немедленно выносят из нее. За пятнадцать секунд (четверть минуты) до 0:00 в комнату вносят мячи 3 и 4, а мяч номер 2 выносят. За одну восьмую минуты до 0:00 в комнату вносят мячи 5 и 6, а мяч номер 3 выносят — и так далее. На языке математики мы бы сказали, что за $(\frac{1}{2})^n$ минуты до 0:00 в комнату вносят мячи $2n - 1$ и $2n$, а мяч номер n из нее выносят.

Спрашивается, сколько мячей будет в комнате ровно в 0:00?

Те, кто пытается ответить на этот вопрос, замечают, что возможных ответов существует два, и у обоих почти что поровну сторонников: бесконечно много или ни одного. Как такое может быть? Рассмотрим логические обоснования обоих ответов.

Бесконечно много. В конце процесса в комнате будет бесконечно много мячей, потому что на

каждом из бесконечного количества этапов в ней прибавляется по одному мячу (два заносят в комнату, но один из нее выносят). Математики формулируют это утверждение так: для любого n можно точно определить момент, в который число мячей равно $n + 1$. Следовательно, в 0:00 в комнате окажется бесконечно много мячей.

Ни одного. В 0:00 в комнате не будет ни одного мяча, потому что для любого мяча можно точно указать момент, в который его выносят из комнаты. Мяч номер 1 выносят, когда часы показывают полминуты до полуночи, мяч номер 2 — за четверть минуты до полуночи и так далее. Говоря математическим языком, n -й мяч выносят из комнаты в точности за $\frac{1}{2}$ в n -й степени минуты до полуночи.

Если бы на эту тему проводился опрос, за какой ответ проголосовали бы вы?

Здесь важно понимать — хотя согласиться с этой мыслью может быть немного трудно, — что количество моментов, остающихся до полуночи, бесконечно, потому что оставшийся промежуток всегда можно разделить на два.

Я бы сказал, что правильный ответ — «бесконечно много», и даже рискнул бы утверждать, что те, кто выбирает второй ответ, вероятно, не могут отрешиться от схемы конечных рассуждений. Их стремление узнать, сколько мячей окажется в комнате «в конце» процесса, похоже на стремление

узнать, какие числа находятся «в конце» последовательности натуральных чисел, то есть «в конце» ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., 12 367, 12 368...

Все мы знаем и понимаем, что множество натуральных чисел бесконечно, и никто на свете не может сказать, какие числа находятся «в конце» их ряда, просто потому, что у этого ряда нет никакого конца.

Интересно отметить, что Блаженный Августин (354–430) полагал, что Бог видит и знает все бесконечное количество натуральных чисел и их свойства и тем самым каким-то образом превращает их в конечное множество (но это, разумеется, лишь точка зрения Блаженного Августина).

Вот две другие вариации парадокса Росса — Литлвуда.

Версия вторая

У нас снова есть бесконечный ряд теннисных мячей с номерами 1, 2, 3, 4... выложенный перед входом в огромную пустую комнату. За полминуты до полуночи в комнату вносят мячи 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 и выбрасывают из нее мяч номер 1. За четверть минуты до полуночи в комнату вносят мячи 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 и 20 и выбрасывают из нее мяч номер 2 — и так далее.

Вопрос, разумеется, остается тем же: сколько мячей будет в комнате ровно в полночь?

В этом случае на каждом этапе в комнату добавляют 10 мячей, а убирают только один, то есть в ней становится на девять мячей больше. Поскольку эта процедура повторяется бесконечное число раз, кажется совершенно ясным, что в полночь в комнате будет бесконечно много мячей (можно даже сказать, девять раз по бесконечно много!).

Головоломка

Можете ли вы сказать, *какие именно* мячи будут в комнате? То есть номер(а) мячей, которые останутся в комнате.

Версия третья

Перед огромной пустой комнатой по-прежнему выложен все тот же ряд теннисных мячей с номерами 1, 2, 3, 4... За полминуты до полуночи в комнату вносят мячи 1 и 2, причем мяч 2 сразу же из нее выкидывают. За четверть минуты до полуночи в комнату вносят мячи 3 и 4, причем мяч 4 сразу же из нее выкидывают. И так далее. Тот же вопрос: сколько мячей будет в комнате в полночь?

Внезапно все становится кристально ясно.

Поскольку мы выкидываем все мячи с четными номерами, в полночь в комнате будет бесконечно много мячей, и у всех у них будут нечетные номера. Так что мы знаем, какие именно мячи останутся в комнате в полночь: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15...

Разумеется, количество нечетных чисел бесконечно, и все они будут в комнате. Четные числа также образуют бесконечное множество, но они окажутся снаружи.

Еще одна головоломка

Можно ли сказать, что множества нечетных чисел и четных чисел меньше, чем множество *всех* натуральных (то есть целых положительных) чисел?

На первый взгляд можно решить, что это утверждение должно быть справедливым. Казалось бы, логично считать, что, например, множество четных чисел должно быть в два раза меньше множества всех натуральных чисел (в которое входят числа как четные, так и нечетные).

Однако посмотрим на этот вопрос вот с какой стороны: каждому натуральному числу можно сопоставить натуральное число.

1	2	3	4	...
2	4	6	8	...

Теперь мы начинаем осознавать эту умопомрачительную концепцию: хотя в множестве четных чисел пропущено каждое второе число (по сравнению с множеством всех натуральных чисел), количество элементов обоих множеств все равно одинаково. Говорят, что это множества одинаковой

мощности. В этой книге мы еще поговорим о концепции мощности множества гораздо подробнее.

А это, по сути, подводит нас к вопросу еще более глубокому: можно ли вообще сравнивать бесконечные множества чисел и спрашивать, какое из них больше? Имеют ли слова «больше» и «меньше», «крупнее» и «мельче» вообще хоть какой-нибудь смысл, когда речь идет о бесконечных величинах?

Читайте дальше!

Концепция бесконечности сложна и глубока и иногда действительно кажется невообразимой. Имеет смысл вспомнить, что говорил на эту тему Галилей:

[Это] относится к числу затруднений, происходящих вследствие того, что, рассуждая нашим ограниченным разумом о бесконечном, мы приписываем последнему свойства, известные нам по вещам конечным и ограниченным. Между тем это неправильно, так как такие свойства, как большая или меньшая величина и равенство, неприменимы к бесконечному, относительно которого нельзя сказать, что одна бесконечность больше или меньше другой или равна ей.*

Несмотря на всю симпатию и все уважение, которые я питаю к Галилео Галилею, я придержи-

* «Две новые науки». День первый.

ваюсь более оптимистических взглядов. В оставшейся части этой книги мы будем довольно плотно иметь дело с бесконечностью, хотя и останемся, увы, существами до боли конечными. Как сказал Паскаль:

Человек — всего лишь тростник, слабейшее из творений природы, но он — тростник мыслящий.*

А теперь еще разок

Если вы по-прежнему не уверены в том, что (во всех этих версиях) в полночь в комнате будет бесконечно много мячей, мне остается только пустить в дело тяжелую артиллерию и предложить вам следующую, последнюю версию этого парадокса: предположим, что мячи не пронумерованы; все они — самые обычные белые теннисные мячики.

Наличие или отсутствие нумерации не должно никак повлиять на количество мячей, оказавшихся в комнате к полуночи.

Теперь все должно быть кристально ясно. Если итоговое число мячей на каждом шаге увеличивается, а количество таких шагов до 0:00 бесконечно, то в полночь должно получиться бесконечное число мячей.

* Здесь и далее цит. по: Паскаль Б. Мысли / Пер. с фр. Ю. А. Гинзбург. М.: Изд-во имени Сабашниковых, 1995.

Теперь мы можем ответить и на вопрос о том, какие именно мячи будут в комнате.

В ней будет бесконечно много... белых мячей!⁴

Последняя версия принципиально отличается от всех предыдущих тем, что в ней нет правила, определяющего, какие именно мячи выбрасываются из комнаты. Когда у мячей есть номера, это дает нам возможность предлагать правила. Но теперь все мячи одинаковы, и мы вынуждены выбирать, какие из них выбросить, случайным образом.

Первое апреля, или Логика в доме старшего брата

Знаменитый логик, фокусник и математик Рэймонд Смаллиан (1919–2017) (он, к слову сказать, был еще и концертным пианистом: его исполнение Баха можно послушать на YouTube) рассказывал, как он впервые столкнулся с концепцией логики. Это случилось однажды 1 апреля, когда Рэймонд был еще маленьким мальчиком. Накануне вечером старший брат будущего логика пообещал, что разыграет его (как обычно и делают первого апреля), и заверил, что Рэймонд не сумеет избежать розыгрыша, как бы он ни пытался.

Рэймонд воспринял эту угрозу очень серьезно и решил, что не доставит брату такого удовольствия и не позволит себя разыграть. Подумав немного, он решил, что лучшим способом уберечься

от первоапрельского розыгрыша будет засесть в своей комнате и не выходить из нее весь день.

Умно́, не правда ли?

Рэймонд пошел в свою комнату, закрыл дверь и сидел там, изнывая от скуки, час за часом... до самой полуночи. Потом он гордо вышел из комнаты и торжествующе объявил брату, что его план провалился. Брат ответил: «А вот и нет! Я тебя разыграл! Ты думал, что я тебя разыграю, а я тебя так и не разыграл, значит, я тебя разыграл! Ха-ха-ха!»

До самой смерти Рэймонд Смаллиан не был уверен, что же все-таки произошло: удалось или не удалось брату его разыграть. А вы как думаете?

Шоколад и яд

Эта весьма простая игра больше всего известна под названием Chomp*. Вариант этой игры на плитке шоколада изобрел ныне покойный американский математик Дэвид Гейл, а название Chomp придумал Мартин Гарднер. Играют в нее на разграфленной на клетки доске по следующим правилам.

* Звукоподражательное слово, передающее чавканье. Дело в том, что в эту игру можно играть на разделенной на дольки плитке шоколада: игрок, делающий очередной ход, отламывает и съедает те «клетки», которые он занимает по правилам игры. В русском варианте (Гарднер М. Математические новеллы / Пер. с англ. Ю.А. Данилова. М.: Мир, 1974) игра называется «Щелк!».

Игрок, делающий первый ход, помечает одну из клеток крестиком.

		×		
Яд				

После этого все клетки, расположенные выше и правее помеченной, также помечаются крестиками (и выходят из игры). Ниже исходный крестик выделен жирным шрифтом:

		×	×	×
		×	×	×
		×	×	×
Яд				

Теперь второй игрок должен пометить любую из оставшихся пустыми клеток ноликом. После этого все пустые клетки, расположенные правее и выше помеченной, также помечаются ноликами (исходный нолик выделен жирным шрифтом):

		×	×	×
		×	×	×
		×	×	×
			○	○
Яд			○	○

Затем первый игрок ставит следующий крестик, второй игрок ставит следующий нолик, и так продолжается до тех пор, пока один из них не будет вынужден съесть отравленную дольку и умереть (разумеется, метафорически).

Осторожно: эта игра затягивает!

Можете попробовать поиграть в нее на доске размером 7×4 (7 строк и 4 столбца или наоборот).

Если в эту игру играют на доске с равным количеством строк и столбцов, существует стратегия, при помощи которой первый игрок всегда побеждает. Можете ли вы ее найти? Подумайте минуты три.

Решение

Первый игрок должен выбрать клетку, расположенную по диагонали над ядом.

	×	×	×	×
	×	×	×	×
	×	×	×	×
	×	×	×	×
Яд				

После этого все ответные ходы первого игрока должны быть симметричны ходам второго:

○	×	×	×	×
○*	×	×	×	×
	×	×	×	×
	×	×	×	×
Яд			× **	×

* Первый ход соперника

** Ответный ход первого игрока

Теперь должно быть ясно, как выиграть эту партию.

Ситуация становится гораздо более сложной, когда игра идет на доске, количества строк и столбцов на которой не равны; однако и в этом случае можно доказать, что для начинающего партию игрока существует выигрышная стратегия. К сожалению, доказательство не уточняет, в чем именно эта стратегия заключается. Математики называют такие доказательства «неконструктивными доказательствами существования».

И наконец, выполним упражнение.

Найдите выигрышную стратегию для первого игрока в игре на прямоугольной доске размером $2 \times N$ (2 строки, N столбцов).

Подсказка: Чтобы получить симметричную позицию, как на квадратной доске, нужно прийти к положению, в котором незанятой останется только клетка с ядом или еще две клетки — одна над ядом и одна справа от него.

А теперь, когда вы (я надеюсь) решили эту задачу, что, по-вашему, произойдет, если на доске будут две строки и бесконечное количество столбцов? Кто выиграет теперь? *Бесконечность* — злостный нарушитель правил!

ЧУДЕСНЫЙ МИР ЧИСЕЛ: ПИФАГОР

Человек и легенда

Я впервые услышал о Пифагоре, когда учился в 4 классе и записался в математический кружок — на внешкольные занятия, предназначенные для тех странных детей, которые любят проводить свое свободное время, изучая необычные геометрические фигуры и завязывая отношения с числами, в которых скрываются загадочные секреты. Мне нравилось даже произносить само это имя: Пифагор. Мне сразу же показалось, что человек с таким необычайно звучащим именем и сам должен быть личностью необыкновенной. И я не ошибся. Многие считают Пифагора (ок. 570 — ок. 495 г. до н. э.) одним из самых интересных философов досократовской эпохи. Еще «отец истории» Геродот (ок. 485 — ок. 425 г. до н. э.) называл Пифагора одним из величайших философов Древней Греции. Даже Гераклит (ок. 535 — ок. 475 г. до н. э.), философ чрезвычайно спесивый, сетовавший на глупость всего челове-

ства (за исключением, разумеется, самого себя), признавал, что Пифагор свое дело знает.

Найти какие-либо достоверные факты о жизни Пифагора нелегко, главным образом потому, что источники, рассказывающие о нем, написаны по большей части уже после его смерти. Сам Пифагор, по-видимому, писал мало — если вообще что-то писал. Однако Диоген Лаэртский¹, автор книги «О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов» (сборника биографий всех великих греков), называет три работы, написанные Пифагором: «О воспитании», «О государстве» и «О природе». Однако так считает практически он один: другие историки в большинстве своем утверждают, что эти книги написаны не Пифагором.

Кстати говоря, многие великие люди так никогда и не удосужились приложить перо к пергаменту: взять хотя бы Сократа, Будду и Иисуса. Жаль только, что никто не сделал для Пифагора то же, что Платон сделал для Сократа, записав его диалоги.

Из всех биографий Пифагора я больше всего люблю две. Одну написал философ-неоплатоник и математик Порфирий (ок. 234 — ок. 305), а вторую — Диоген Лаэртский. Биографии эти лихорадочно хаотичны, изумительно неточны и переполнены противоречиями, что делает их в высшей степени интересными и оставляет огромный простор воображению.

О Пифагоре существует множество легенд. Кое-кто верил, что он сын бога Аполлона. Рассказывали, что его видели в одно и то же время в четырех разных местах. Отметим, однако, что у Диогена в конце жизнеописания Пифагора есть сенсационное заявление, что на самом деле людей по имени Пифагор было четверо*. В таком случае одновременное наблюдение четырех «Пифагоров» в четырех разных местах не кажется невероятным. Некоторые клялись, что Пифагор был двух с половиной метров ростом. Другие утверждали, что Пифагор был превосходным кулачным бойцом, ни разу не проигравшим поединка, а отдыхая между боями, он любил играть на лире, распевая стихи из поэм Гомера и Гесиода. Были даже такие, кто заявлял, что пение Пифагора исцеляет недуги. Интересно отметить, что и Порфирий, и Диоген рассказывают одну и ту же историю: якобы однажды, когда философ прогуливался вдоль реки, река приветствовала его словами: «Здравствуй, Пифагор...»

Отметим также и «скромность» Пифагора:

Есть боги, есть люди, а есть Пифагор².

По словам Диогена Лаэртского (если мы ему верим), сам Пифагор никогда не упускал возможно-

* А сразу после этого Пифагор добавляет: «Говорят, что был и еще один Пифагор, ваятель ...; и другой, скверный ритор; и третий, врач ...; и четвертый, сочинитель “Истории дорян”...» Итого получается восемь.

сти еще более сгустить ту необычайную загадочность, которая окружала его образ. Например, он любил рассказывать о своих «прошлых жизнях», с гордостью демонстрируя, что помнит их до мельчайших подробностей. Так, он вспоминал, что был великим воином Евфорбом и участвовал в Троянской войне. Говорил он и о нескольких менее зрелищных предыдущих жизнях — например, он был успешным купцом, служил при царском дворе, был животным и даже листом на дереве. Откуда Пифагор все это знал? Однажды он повстречал Гермеса, посланца и глашатая греческих богов, и произвел на него, по словам самого Пифагора, такое впечатление, что тот предложил нашему герою любой дар, какого он только пожелает, кроме дара бессмертия. Пифагор решил попросить способность помнить все свои прошлые перерождения. Просите — и дастся вам!*

Философ-монотеист и поэт Ксенофан (ок. 570 — ок. 475 г. до н. э.) рассказывает, что однажды Пифагор увидел, как некто бьет собаку, и потребовал немедленно прекратить избиение — потому что в собаку вселилась душа его недавно умершего друга. Я надеюсь, что тот человек послушал его, потому что в рассказах о том, что Пифагор был выдающимся кулачным бойцом, возможно, и была доля правды.

* Мф. 7: 7.

Пифагор любил розыгрыши. Однажды он исчез довольно надолго. Потом снова появился в городе исхудавшим до предела — кожа да кости. Он объяснял всем, что был в стране мертвых, и не только рассказывал истории о том, что он «видел» среди усопших, но и рассуждал о событиях, случившихся с еще живыми за время его отсутствия. Как ему это удалось? Очень просто. Все это время он прятался в доме своей матери, придерживаясь диеты, которая подошла бы современной топ-модели. Мать держала его в курсе текущих событий, а что до происшествий в мире мертвых — тут он, разумеется, мог рассказывать все, что взбредет ему в голову. Кто бы мог проверить его сведения?

Несмотря на все вышеизложенное, у нас есть несколько бесспорных фактов о Пифагоре. Вот они.

Пифагор родился приблизительно в 570 г. до н. э. на острове Самос. Когда ему было сорок лет, Поликрат стал «тираном Самоса»*, и Пифагор бежал с острова, чтобы не оставаться под его властью. Он обосновался в городе Кротоне на юге Италии и основал там Пифагорейский союз. В нем

* Стоит отметить, что слово «тиран» употреблено здесь не в современном, а в исходном смысле: так назывался любой (не только жестокий и незаконный) единоличный правитель, захвативший, а не унаследовавший, власть. Чтобы подчеркнуть это различие, в русских переводах классических текстов иногда используется написание «тиранн».

было три отделения — политическое, математическое и теистическое. Утверждается, что в момент наивысшего расцвета в союзе состояло около 300 членов.

В некоторых из более поздних биографий Пифагора подчеркивается то огромное воздействие, которое он оказал на жизнь в Кротоне. Рассказывают, что Пифагор убедил жителей Кротона отказаться от мздоимства. Он превратил их в совершенных аскетов, преданных братской любви и стремившихся к знанию, справедливости и смыслу. Пифагор был прославленным оратором — несмотря на то что часто говорил из-за занавеса, так, чтобы никто не видел его лица. Этот изящный прием, несомненно, еще более усиливал окружавшую его таинственность: надо бы и мне использовать его, когда я разговариваю со своими студентами.

Прежде чем обосноваться в Кротоне, Пифагор совершил несколько путешествий в поисках фундаментальных знаний. Он побывал в Египте, Финикии, Аравии, Иудее и Вавилоне (который входил тогда в состав Персидской империи). Египтяне научили его геометрии, халдеи — астрономии, а маги — то есть зороастрийцы — преподали ему принципы религии и практические правила добродетельной жизни. Возможно, он даже добрался до Индии (в то время путешествия в Индию были не так популярны, как сейчас). Однако не вполне

ясно, с какими именно замечательными людьми он там встретился и какие именно жемчужины мудрости оттуда вынес.

Существует множество версий относительно смерти Пифагора. Как вы, возможно, догадываетесь, они по большей части весьма драматичны. Я же предлагаю вам самую прозаическую из этих версий: Пифагор умер от естественных причин в возрасте 90 лет.

О музыке и числах

В то время как Пифагор и его ученики исследовали законы Вселенной, они изучали и законы музыки. Вы, конечно, помните, что Пифагор обожал распевать песни Гомера и Гесиода («Величайшие хиты Древней Греции»), бренча на своей лире. Пифагор полагал, что музыка оказывает огромное влияние на душу и может вызывать чрезвычайно сильные эмоции. Если вы в этом сомневаетесь, прочтите «Крейцерову сонату» Льва Толстого. Сейчас нам ясно, что открытое Пифагором наличие у музыкальных гамм численной основы сильнейшим образом повлияло на пифагорейцев. Можно привести множество разных примеров проявления этой численной основы. Например, Пифагор установил, что длины струн двух нот, отстоящих друг от друга в точности на одну октаву (например, от до — до — до), соотносятся как 1:2. Струны двух

нот, отстоящих на квинту (например, до — соль), находятся в соотношении длин 2:3, а струны двух нот, отстоящих на кварту (например, до — фа) — в соотношении 3:4.

Музыка есть удовольствие, которое человеческий разум испытывает от счета, не сознавая, что он считает.

Готфрид Лейбниц

Открытие Пифагора — что музыку можно преобразовывать в математические выражения — было важным шагом на его пути к сенсационному выводу, что и весь мир в целом так или иначе основан на числах. Более того, Аристотель отмечает в «Метафизике», что пифагорейцы первыми стали изучать математику и пришли к заключению, что законы математики управляют законами всего сущего.

Какие научные законы гарантируют, что должны существовать научные законы?

Мартин Гарднер

Математика управляет и изобразительным искусством. Перспектива основана на геометрии и пропорциональности (размеры предметов, изображенных на двумерной поверхности, уменьшаются пропорционально увеличению расстояния от зрителя), а принципы композиции основываются на свойствах геометрических фигур.

Геометрия есть основа всей живописи.

Альбрехт Дюрер

Но Пифагор пошел на шаг дальше. Он также использовал язык геометрии для определения хорошего и дурного, правильного и неправильного. Например, вместо терминов «хороший» и «дурной» он употреблял слова «прямой» и «искривленный» (по-гречески, разумеется). Мы и сейчас иногда называем нечестное «кривым», а ложь «кривдой». Прямая линия казалась ему благородной, искривленная — неблаговидной. Возможно, отголоски этой концепции до сих пор можно найти в выражении «прямой человек», так как никакой связи между осанкой человека и его искренностью или добросовестностью, разумеется, нет.

Начало прекрасной дружбы — дружественные числа

Аристотель сказал однажды, что истинные друзья — это два тела с одной общей душой. А как определял дружбу Пифагор? Тут нас ожидает сюрприз.

По словам ученого-неоплатоника Ямвлиха (ок. 245 — ок. 325), автора еще одной биографии Пифагора, пифагорейское определение дружбы выражается двумя числами — 284 и 220.

Что?! Почему?!

Чтобы понять, откуда взялась эта идея, сложите все делители числа 220 (числа, на которые 220 делится без остатка), а затем сложите все делители числа 284. Сами эти числа включать в суммы не нужно.

Делители 220 — 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 и 110, а их сумма равна 284.

Делители 284 — 1, 2, 4, 71 и 142, а их сумма равна (чему бы вы думали?) 220!

Пифагорейцы считали, что близкие друзья подобны паре чисел, сумма делителей каждого из которых равна второму числу. В математике такую пару чисел называют дружественными числами.

Другие пары дружественных чисел можно найти при помощи компьютера. Помимо пары (220, 284) есть еще (1184 и 1210), (2620 и 2924), (5020 и 5564) и (6232 и 6368). Кроме этих пяти, других таких пар среди чисел до 10 000 нет. Если вам совсем нечего делать, попробуйте проверить, действительно ли эти пары — пары дружественных чисел. Другими словами, сложите собственные делители каждого числа (без самого этого числа) и посмотрите, равна ли их сумма второму числу пары.

Если хотите, вы можете взяться и за еще более трудную задачу — попытаться найти другие пары дружественных чисел. Для этого вы, вероятно, захотите прибегнуть к помощи компьютера, но имейте в виду, что в 1636 г. французский матема-

тик-любитель Пьер Ферма установил, что числа 17 296 и 18 416 образуют пару дружественных чисел, а два года спустя знаменитый французский философ и математик Рене Декарт открыл еще одну такую пару — 9 363 584 и 9 437 056.

ДЕКАРТ, БЕСКОНЕЧНОСТЬ И БОГ

На Декарта произвела глубокое впечатление концепция «бесконечности». В книге «Рассуждения о первой философии» он даже использует эту концепцию для «доказательства» существования Бога. Рассуждает он при этом приблизительно следующим образом:

«Поскольку сам я — существо конечное, я, очевидно, не могу изобрести концепцию бесконечности, так как по-настоящему охватить в своих мыслях понятие бесконечности может лишь нечто, само бесконечное. Следовательно, создателем концепции бесконечности может быть только Бог. Поскольку я могу осознать бесконечного Бога, а Бог — единственный, кто мог создать эту идею, значит, справедливо утверждение, что Бог существует!»

В XVII в. компьютеров не было — не говоря уже об интернете и социальных сетях, — что делает достижения Ферма и Декарта еще более поразительными. Как же они открыли эти огромные дружественные числа? Читайте дальше. По мнению

некоторых историков математики, Декарт добился этого не вполне самостоятельно. На самом деле ту пару дружественных чисел, которую он опубликовал, нашел еще в XVI в. персидский математик Бакир Язди! Хорошо известно, что арабские математики знали довольно много пар дружественных чисел задолго до того, как их заново обнаружили математики Запада.

Более того, еще в IX столетии иракский математик, астроном и врач Сабит ибн Курра (826–901) сформулировал достаточное условие³ дружественности двух чисел⁴. Много веков спустя Декарт и Ферма нашли его формулу и использовали ее для своих «открытий».

Интересно отметить, что вторая по порядку возрастания пара дружественных чисел (1184 и 1210) не была открыта до 1866 г. Ее открыл итальянский мальчик по имени Б. Николо И. Паганини (не знаменитый скрипач и композитор!). Непонятно, как все до единого математики со времен Пифагора умудрились не заметить эту прекрасную пару. Одной из причин этого может быть то обстоятельство, что к ней неприменим критерий, который разработал Сабит ибн Курра. Но может быть, дело просто в том, что «если ищешь ничто, то ничего и не найдешь».

К 2007 г. было открыто около 12 000 000 пар дружественных чисел. Как это ни странно, мы, по-видимому, живем в очень дружелюбном мире.

Числа женские и числа мужские

У Пифагора было много разных концепций относительно чисел: в частности, он верил, что у чисел бывают женские и мужские черты. Например, нечетные числа можно считать числами женского пола, а четные — мужского. Заметим теперь, что во все упомянутые до сих пор пары дружественных чисел входят только мужские (четные) числа.

Это, естественно, заставляет спросить: существуют ли и пары дружественных женских чисел? Оказывается, существуют. Вот несколько таких примеров: (11 285 и 14 595), (67 095 и 71 145) и (522 405 и 525 915).

А это подводит нас к самому главному вопросу: возможна ли «дружба» между числом мужским и числом женским? Другими словами, может ли быть так, чтобы суммы делителей нечетного и четного числа были равны этим числам?

На время написания этой книги никто еще не нашел ответа на этот вопрос. С одной стороны, до сих пор не найдено ни одной такой пары; с другой — невозможность ее существования тоже пока что никем не доказана.

На этом я временно оставляю Пифагора (я еще вернусь к нему в этой главе), потому что разговор о дружественных числах навел меня на мысль о некоторых других антропоморфных характеристиках чисел, о которых интересно сделать несколько отступлений.

Самовлюбленные числа

У меня нет почти ничего общего с самим собой.

Франц Кафка

Я вполне уверен, что существуют такие люди, про которых можно сказать, что у них установились глубокие дружеские отношения с самими собой. Но давайте попытаемся мыслить так, как мог мыслить Пифагор, и поинтересуемся не ими, а числами: существуют ли такие числа, суммы собственных⁵ делителей которых равны самим этим числам?

Числа, обладающие этим свойством, называют совершенными числами. Сразу (то есть, разумеется, после некоторого размышления) становится ясно, что первые два совершенных числа — это 6 и 28. Здесь я сделаю небольшую паузу, чтобы мой умудренный читатель смог самостоятельно убедиться в том, что 6 и 28 — действительно совершенные числа.

Ответ: $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Что касается числа 6, вот что писал в книге «О граде Божьем» (De Civitate Dei) Блаженный Августин Иппонийский (354–430): «Не потому ше-

стеричное число совершенно, что Бог создал все дела Свои в шесть дней, а потому Он и создал Свои дела в шесть дней, что шестеричное число совершенно».

Следующее после 28 совершенное число — 496, а следующее за ним — 8128. Русский писатель Лев Толстой любил хвастаться, что родился в «почти совершенном» году — 1828-м. Вот если бы он родился 28 июня, тогда ему действительно было бы чем гордиться (не говоря уже о том, что число $6,28$ к тому же близко к 2π)^{*}.

Возможно, вы заметили в этой последовательности — 6, 28, 496, 8128... — некую закономерность. Любители выдвигать гипотезы могут сделать следующее предположение: последняя цифра совершенного числа бывает поочередно равна 6 и 8.

Однако эта гипотеза оказывается ошибочной. Пятое совершенное число равно 33 550 336, то есть вписывается в эту тенденцию. Но уже шестое — 8 589 869 056 — тоже заканчивается на шестерку и тем самым нарушает закономерность. Может быть, гипотезу можно слегка подправить и предположить, что все совершенные числа заканчиваются либо на 6, либо на 8.

^{*} Имеется в виду американский формат записи дат, в котором месяц идет перед числом и 28 июня записывается в виде «6.28».

Посмотрим на первые *девять* совершенных чисел:

6

28

496

8128

33 550 336

8 589 869 056

137 438 691 328

2 305 843 008 139 952 128

2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176

В последнем из них 37 знаков (а сумма всех его собственных делителей равна самому этому числу!).

В десятом числе 54 знака, а в одиннадцатом — 65, и заканчивается оно цифрами 8128, то есть в точности четвертым совершенным числом. Кстати говоря, найдены совершенные числа с миллионом (!) знаков. Не стесняйтесь — выдвигайте свои гипотезы.

Головоломка для сильных учеников

Докажите, что любое *четное* совершенное число заканчивается либо на 6, либо на 8. В этом вам могут помочь приведенные ниже равенства.

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

$$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 1^3 + 3^3.$$

$$496 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 31 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3.$$

$$8128 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 127 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 15^3.$$

Более того, французский математик Эдуард Люка (1842–1891) доказал даже, что любое четное совершенное число должно заканчиваться на 16, 28, 36, 56, 76 или 96. Как ему это удалось? Не без труда!

Пока что мы видели только семь совершенных чисел, и все они четные. Естественно, хочется спросить: а бывают ли нечетные совершенные числа?

В конце XIX в. британский математик Джеймс Сильвестр писал, что открытие нечетного совершенного числа было бы настоящим чудом. Даже теперь многие математики склонны полагать, что ответ на этот вопрос должен быть отрицательным. Тем не менее доказать это пока что никто не смог. Вот вам еще одна «открытая проблема» — и еще одна возможность добиться славы и успеха!

Нет ответа и на другой интересный вопрос: бесконечно ли множество совершенных чисел? Можно ли продолжать находить совершенные числа, как бы далеко мы ни продвигались по мно-

жеству натуральных чисел? Или же где-то существует самое большое совершенное число?

Эта задача еще не решена и тесно связана с числами Мерсенна, к которым мы еще вернемся.

Сколько весит число? Числа совершенные, «толстые» и «тонкие»

Раз уж мы живем в эпоху диет, можно сказать, что натуральные числа делятся на три категории: совершенные, «толстые» и «тонкие». У «толстого» числа сумма собственных делителей больше самого числа, а сумма собственных делителей «тонкого» числа (вы, наверное, уже догадались...) меньше самого этого числа*. Например, 12 — число упитанное, потому что сумма его делителей (1, 2, 3, 4 и 6) равна 16. А вот 10 — число худощавое, так как $1 + 2 + 5 = 8$.

А как обстоит дело с женскими числами? То есть нечетными? Бывает ли и у них лишний вес? Существуют ли такие нечетные числа, суммы собственных делителей которых больше самих этих чисел? Если немного поэкспериментировать, может показаться, что сложение собственных делителей нечетного числа всегда дает значение, *меньшее* самого числа (проверьте несколько чисел

* Такие числа чаще называют соответственно избыточными и недостаточными.

и убедитесь в этом сами). Если брать только числа меньше 900, можно прийти к убеждению, что нечетные числа никогда не бывают «толстыми». Но пусть это вас не обманывает! Исследование конечного количества чисел, каким бы большим оно ни было, не означает, что следующее число не окажется исключением из правила. На самом деле нечетные числа бывают «толстыми»: сумма собственных делителей 945 (сложите 1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 27, 35, 45, 63, 105, 135, 189 и 315) равна... 975. Таким образом, мы открыли число 945 — наименьшее «толстое» нечетное число. И все же избыточный вес встречается у нечетных чисел довольно редко.

Мы еще вернемся в этой книге к теме совершенных чисел.

Интересные и скучные люди, интересные и скучные числа

Попытки создания «окончательных» списков иногда приводят к возникновению парадоксов следующего типа: из самого определения немедленно следует, что объект, задаваемый этим определением, должен быть исключен из списка. Что это значит?

Представим себе, что мы составляем два списка. Один из них — это список имен *всех* интересных людей на свете в порядке их интересности.

Второй — список всех остальных. Он тоже будет упорядоченным: от самого скучного человека на свете до «слегка» неинтересного.

Вот как выглядят верхние части обоих списков.

Интересные люди: Пифагор, Леонардо да Винчи, Клеопатра, Моцарт, Эйнштейн, Мэрилин Монро, Сократ, Мессалина, Байрон, Наполеон, Будда, Жанна д'Арк, Александр Македонский...

Неинтересные люди: Реджинальд Зевокк, Брунгильда Дремотная, Якоб Снотвор, Владимир Сиестин, Билл Занудинг, Найлз Коматоз, Бернард Нуичтович, Карл Спячкин, Гарри Тоскливер, Тим Тупп...

Однако не все так просто. Вот, например, Реджинальд Зевокк. Если верить нашему списку, он *самый скучный* человек на свете. Но сам этот факт делает его человеком интересным. Ну в самом деле представьте себе титул *САМОГО* скучного человека в мире! Поэтому мы должны перенести его в список интересных людей. Разумеется, он не попадет даже близко к вершине этого списка, но тем не менее должен оказаться в нем, причем, вероятно, на каком-нибудь вполне достойном месте.

А теперь посмотрите, что происходит дальше. Поскольку мы убрали Реджинальда из скучного списка, теперь *самым скучным* человеком на свете стала Брунгильда Дремотная. Но это, в свою оче-

редь, делает несколько интересной *ее*, что означает, что и *ее* следует перенести в первый список. Если мы продолжим этот процесс, мы неизбежно придем к выводу, что в мире вообще нет — и никогда не было — ни одного неинтересного человека. Я уверен, что вы давно уже обнаружили ошибку этого рассуждения.

В мире математики существует своя популярная версия парадокса скучных людей: в ней речь идет о множестве натуральных чисел, которые *невозможно* описать, используя *менее* 1000 слов. Отметим, что количество слов конечно (например, двадцатое издание «Оксфордского словаря английского языка» содержит ровно 171 476 слов), а в нашем распоряжении ограниченное число слов (1000), следовательно, и количество таких чисел конечно. Тем не менее существует наименьшее натуральное число, которое невозможно описать, используя менее 1000 слов. Обозначим его n и определим его следующим образом: «Наименьшее число, описание которого требует не менее одной тысячи слов».

Но что это?! Мы только что описали число n десятью словами (убедитесь сами), а следовательно, число n попадает в список чисел, которые можно описать, используя менее 1000 слов, что противоречит нашему определению этого числа.

Число n и Реджинальд Зевокк оказываются в этих двух парадоксах в одном и том же положении. Оба они определены как элементы некоторого списка, но затем их приходится исключать из этого списка в силу самого этого определения.

В чем проблема с этими двумя парадоксами? Математики терпеть не могут парадоксов и всегда ищут какое-нибудь объяснение, которое помогло бы им сохранить душевное спокойствие. Однако в этих случаях необходимо отметить, что мы использовали нематематическое свойство «можно описать», так и не дав его смыслу точного определения.

Это подводит нас к следующей теме нашего разговора.

Бывают ли вообще скучные числа?

Можно ли сказать, что некоторые числа более или менее интересны, чем другие?

Пифагор считал, что скучных чисел вообще не существует, что любое и каждое число чем-нибудь да интересно, что каждое число имеет по меньшей мере одно свойство, делающее его уникальным, или таит в себе нечто красивое или особенное.

А поскольку Пифагор придавал числам огромное значение, он стремился не только понять их с математической точки зрения, но и разглядеть в каждом из них красоту, загадку или тайну.

Какие именно характеристики числа делают его особенным или привлекательным? Это, по-моему, вопрос вкуса. «Привлекательна» ли принадлежность к совершенным числам? На мой взгляд, привлекательна. Мне также кажутся интересными пары дружественных чисел — эти числа по-настоящему умеют дружить. Было бы желание, а красоту можно найти в чем угодно — недаром говорят, что красота в глазу смотрящего.

Посмотрим, например, на число 64. В том факте, что 64 — квадрат 8 ($8^2 = 64$), нет ничего особенно выдающегося: многие другие числа тоже являются полными квадратами. Но число 64 может быть выражено и следующим образом: $64 = 2^6 = 4^3$.

Это уже гораздо интереснее. Оказывается (и это очень легко проверить), 64 — первое число (не считая 1), которое является не только квадратом (то есть второй степенью некоторого числа), но и третьей и шестой степенями.

Так что же, можем ли мы назвать 64 особенным числом? Поможет ли делу тот факт, что ему равно число клеток на шахматной доске? А еще в Камасутре описаны 64 позиции, а в «И цзин», китайской «Книге перемен», — 64 гексаграммы. Делает ли это число 64 хоть сколько-нибудь более выдающимся? Не знаю — решайте сами. А еще вы можете попробовать найти другие свойства, которые делают число 64 уникальным.

Предположим, нечто интересное есть в любом числе, и рассмотрим число 65, идущее сразу после 64. Можно ли найти что-нибудь замечательное в нем?

Разумеется, можно! Это число — второе в множестве натуральных чисел (после 50), выражаемое двумя разными суммами двух квадратов: $65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$. Кроме того, его еще можно выразить суммой двух кубов! $65 = 1^3 + 4^3$. Более того, 65 — первое число, которое может быть выражено как суммой двух квадратов (причем двумя разными способами!), так и суммой двух кубов. Поразительно!

Сам Пифагор считал самым интересным число 36. Он полагал, что это идеальный возраст для мужчины (было ли у него какое-нибудь мнение об идеальном возрасте для женщины, я не знаю).

Математические свойства числа 36 впечатляли Пифагора, потому что:

$$36 = (1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3.$$

Когда я был моложе, я был согласен с Пифагором (и относительно вариантов выражения числа 36, и в том, что 36 лет — очень приятный возраст), но теперь я придерживаюсь более оптимистической точки зрения и считаю «идеальным

возрастом» — как для мужчин, так и для женщин — 100 лет:

$$100 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3.$$

Те равенства, о которых мы только что говорили, далеко не случайны. Возможно, вы уже догадались, что квадрат суммы любого количества последовательных чисел равен сумме кубов всех этих чисел:

$$(1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Мы обнаружили некоторые весьма интересные свойства некоторых чисел. Но наверняка существуют какие-то числа, в которых нет ничего по-настоящему уникального. Однако, если применить к числам парадокс «самого скучного человека на свете», то, может быть, число, не имеющее никаких особенных свойств, можно считать «интересным» именно этой особенностью.

РАМАНУДЖАН И КАМЕШКИ ПИФАГОРА

I. Человек, познавший бесконечность

ПУТЕШЕСТВИЕ В ИНДИЮ: ХАРДИ
ЗНАКОМИТСЯ С РАМАНУДЖАНОМ



Сриниваса Рамануджан был математическим гением. Он родился в 1887 г. в Ироду, в индийской провинции Мадрас, и уже в детстве проявил необычайные математические способности.

Однако там, где он жил, ему было не у кого учиться, и даже не было никого, кто смог бы посоветовать, чему учиться. Можно сказать, что

Рамануджан был самоучкой. Хотя он не получил никакого формального образования, он добился беспрецедентных достижений в нескольких математических дисциплинах. Главной областью его работы была теория чисел, и, подобно Пифагору, Рамануджан поддерживал с числами близкие личные отношения.

В 1913 г. Рамануджан отправил несколько своих математических результатов (равенств, или тождеств) трем известным британским математикам, но лишь один из них, Годфри Гарольд Харди, сумел понять, насколько блестящим человеком был автор этих результатов. Хотя эти результаты во многом были подобны неотшлифованным алмазам, они все равно были прекрасны. Харди приложил все усилия, чтобы перевезти Рамануджана в Лондон, а затем, во время Первой мировой войны, — в Кембридж. Впоследствии Рамануджан стал первым индийцем, избранным членом кембриджского Тринити-колледжа.

Ниже представлены два из тех самых результатов (равенств), которые так поразили Харди. Когда я впервые увидел эти равенства, я был третьекурсником математического факультета, и они были настолько прекрасны, что я сразу же подумал о музыке. Они казались мне нотами прекрасной симфонии. Эти равенства кажутся очень сложными, и они действительно сложны, но вам необязательно понимать их. Вам даже необязательно рассматривать их как математические выражения. Просто посмотрите на великолепную красоту, заключенную в этих численных узорах.

ПЕРВАЯ СИМФОНИЯ РАМАНУДЖАНА

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi}.$$

$$1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1 \times 5}{4 \times 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1 \times 5 \times 9}{4 \times 8 \times 12}\right)^4 + \dots = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

$$\int_0^\infty \frac{1 + \frac{x^2}{(b+1)^2}}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \times \frac{1 + \frac{x^2}{(b+2)^2}}{1 + \frac{x^2}{(a+1)^2}} \times \dots dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma(b+1) \Gamma(b-a+1)}{\Gamma(a) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(b-a + \frac{1}{2}\right)}.$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\dots} = \frac{\pi}{2(1+r+r^2+r^6+r^{10}+\dots)}.$$

Какое великолепие!

Формула не имеет для меня смысла, если она не выражает мысли божества.

Рамануджан

Хотя можно просто любоваться эстетическими аспектами математических формул Рамануджана, нам, возможно, захочется проявить некоторый педантизм и проверить, действительно ли его результаты верны.

Посмотрим на первое равенство.

У нас есть бесконечный ряд слагаемых, разделенных поочередно плюсами и минусами. Первое слагаемое — единица, но каждое следующее после

него — произведение целого числа и дроби. Целое число каждый раз увеличивается на 4. Числитель дроби равен степени произведения нечетных чисел, а ее знаменатель — степени произведения четных чисел, причем количество множителей каждый раз увеличивается на единицу. Рамануджан утверждает, что чем больше в этой формуле сомножителей, тем ближе ее результат становится к двойке, деленной на π (отношение длины окружности к ее диаметру)! При бесконечном числе сомножителей результат будет в точности равен отношению двойки к π .

Откуда взялось это равенство? У Рамануджана были тысячи (!) таких формул (точнее, почти 3900). Вы, вероятно, не поверите, но те, что приведены выше, относятся к числу самых простых из них!

Чтобы быть до конца честным, я должен сказать, что некоторые из формул Рамануджана не были стопроцентно точными, но я твердо придерживаюсь того мнения, что из ошибок великого человека можно узнать гораздо больше, чем из истинных утверждений посредственности.

Харди и Рамануджан

Харди и Рамануджан разительно отличались характерами. Харди был атеистом (и считал Бога своим злейшим врагом) и отличался исключи-

тельным педантизмом во всем, что касается математики: он хотел видеть доказательство каждой формулы. Рамануджан же был человеком во всех отношениях глубоко религиозным, а в отношении математики больше полагался на интуицию. Он не только видел в своих уравнениях и тождествах проявление божества, но и не любил рассказывать, как именно он к ним пришел, опасаясь, что его могут признать сумасшедшим. Это напоминает мне одну сцену из фильма «Амадей» Милоша Формана: Сальери читает ноты Gran Partita* Моцарта и приходит к уверенности, что ее продиктовал Моцарту сам Бог. Потом Сальери разглагольствует о том, почему Бог не выбрал его самого, чтобы продиктовать ему столь возвышенное сочинение. Видимо, некоторые считают, что гений может даваться только Богом.

Следующее равенство, на мой взгляд, — самая странная из формул Рамануджана:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12.$$

Что???

Она кажется совершенно неверной! Бесконечная сумма, которая стоит в левой части, должна быть равна бесконечности; из нее никак не мо-

* Серенада № 10 си-бемоль мажор для духовых, KV361 (370A).

жет получиться отрицательного числа! Но, можете быть уверены, Рамануджан понимал, что он делает, и эта запись отнюдь не бессмысленна: он работал с очень важной дзета-функцией Римана — Эйлера (это функция комплексного переменного, рассмотрение которой выходит за рамки этой книги). Рамануджан писал в письме к Харди: «Согласно моей теории, сумма бесконечного числа членов ряда $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$. Если я скажу Вам об этом, Вы сразу же ответите, что мне прямая дорога в сумасшедший дом».

Несмотря на всю строгость Харди в вопросах, касавшихся математики (во всем остальном он пользовался репутацией человека исключительно мягкосердечного), он не мог устоять перед очарованием прекрасных уравнений индийского гения.

Формулы Рамануджана должны быть верными, потому что, если бы они не были верными, ни у кого не хватило бы воображения их выдумать.

Г.Г. Харди

Харди показал работы Рамануджана одному из своих коллег, с которым он часто работал вместе, Джону Литлвуду (мы уже встречались с ним раньше, когда говорили о парадоксе с теннисными мячами). Литлвуд тоже был поражен явной гениальностью Рамануджана. Он говорил,

что не знает математиков, которых можно было бы сравнить с Рамануджаном: он превосходил всех их.

Чтобы проиллюстрировать, до какой степени Харди и Литлвуд с течением времени стали считаться лидерами современных математических исследований в Англии, я могу сообщить, что один из моих превосходных коллег сказал однажды в шутку: «В наше время есть всего три по-настоящему великих английских математика: Харди, Литлвуд и Харди — Литлвуд»¹.

Харальд Бор

Харди был просто замечательным математиком. Но когда Пал Эрдёш (которого мы тоже уже встречали) спросил Харди, что, по его мнению, было его величайшим вкладом в математику, Харди ответил: «Открытие Рамануджана».

К этому я добавлю только одно: у Харди была привычка классифицировать математиков по шкале от 0 до 100. Самому себе он поставил 25, своему коллеге Литлвуду — 30, а великому немецкому математику Давиду Гильберту (в честь которого названа целая область математики — «гильбертовы пространства») — 85. Рамануджану он поставил высочайшую оценку из возможных — ровно 100!

Еще о Харди и математическом мышлении

Одна из моих любимых книг — «Апология математики» Харди. Он рассуждает в ней об эстетике математики и дает нам редкую возможность увидеть изнутри методы мышления тех, кто занимается этой наукой. Харди любил чистую (теоретическую) математику и как-то хвастался даже, что ничто из того, что он сделал, не имеет практического применения. В этом, однако, он сильно ошибался. Например, всякому, кто хоть немного занимался популяционной генетикой, знаком закон Харди — Вайнберга. Кроме того, Харди считал, что не имеет практического значения и теория чисел, которую он страстно любил. Сегодня теория чисел тесно связана с шифрами и кодами. Харди думал даже, что у теории относительности тоже не может быть никакого практического применения. Действительно, очень трудно — может быть, даже невозможно — предсказать, какие из математических открытий окажутся практически полезными, а какие послужат «только лишь» для поддержания славы человеческого разума, очень трудно — может быть, даже невозможно.

В своей книге Харди описывает самым увлекательным образом, что в математике он находит прекрасным, а что — нет. Впоследствии мы еще поговорим об этом.

ПРЕМИЯ РАМАНУДЖАНА

Со здоровьем у Рамануджана дела обстояли далеко не так блестяще, как с математикой. В 1920 г., вскоре после возвращения в Индию, он умер в возрасте всего 32 лет.

Начиная с 2005 г. за открытия, сделанные на основе его работ, ежегодно присуждается премия имени Рамануджана, учрежденная университетом SASTRA*. Ее могут получить только математики не старше 32 лет — того возраста, в котором сам Рамануджан расстался не только с жизнью, но и с числами, которые он так любил.

В 2009 г. (в котором было подготовлено первое издание этой книги) премию получила немецкий математик Катрин Брингман. Последняя на момент написания этого текста премия была присуждена украинскому математику Марине Вязовской, которая решает задачи в 8- и 24-мерном пространствах!

Вернемся, однако, к интересным числам, о которых мы говорили в предыдущей главе.

Такси № 1729

Однажды Харди навещал болевшего Рамануджана. Харди упомянул, что приехал в такси, на котором

* Shanmugha Arts, Science, Technology & Research Academy — университет, расположенный близ индийского города Кумбаконама, родины Рамануджана.

стоял номер 1729. «Какое необычайно скучное число!» — воскликнул Харди. «Ничего подобного! — пылко возразил Рамануджан. — На самом деле 1729 — число *чрезвычайно* интересное! Неужели вы не понимаете, что это самое малое число, которое можно выразить в виде суммы кубов двух положительных целых чисел *двумя* разными способами? Первый — 1 в кубе плюс 12 в кубе. Второй — сумма 10 в кубе и 9 в кубе». Вот как это можно записать:

$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3.$$

Когда я рассказываю эту историю своим друзьям, их обычно поражает тот факт, что кто-то сумел моментально вычислить, что число 1729 можно представить в виде суммы двух кубических чисел. Меня же, честно говоря, поражает тот факт, что Рамануджан знал, что 1729 — *наименьшее* число, обладающее этим свойством. Откуда он мог это знать? Понятия не имею!

Разумеется, мы говорим здесь только о положительных числах. Если бы можно было использовать и отрицательные, мы могли бы найти величину, меньшую 1729. Например, $91 = 6^3 + (-5)^3 = 4^3 + 3^3$.

Любое целое положительное число было одним из личных друзей Рамануджана.

Джон Литлвуд

Я хотел бы отметить, что у числа 1729 есть еще несколько интересных свойств. Больше всего мне нравится то из них, которое обнаружил японский математик и писатель Масахико Фудзивара (р. 1943)². Он показал, что 1729 — одно из всего лишь трех чисел, обладающих следующим свойством: сумма его цифр, умноженная на число, симметричное этой сумме, дает исходное число.

$$1 + 7 + 2 + 9 = 19.$$

$$19 \times 91 = 1729.$$

Головоломка

Найдите другие два числа (этим свойством также обладает число 1, но этот ответ слишком очевиден и потому не считается). Подсказка: одно из этих чисел двузначное, и его не слишком трудно найти. Второе число четырехзначное³.

Капрекар раскрывает тайны числа 6174

Индийский математик Даттарая Рамчандра Капрекар родился в 1905 г. Он закончил Мумбайский университет* и посвятил себя преподавательской работе. Он проработал школьным учителем несколько десятилетий, но так никогда и не изучал высшую математику. Он внес вклад в развитие

* В то время Бомбейский.

нескольких разных областей — в том числе магических квадратов, периодических десятичных дробей и целых чисел с особыми свойствами. Он открыл несколько замечательных свойств чисел, но при жизни так и не получил признания. Лишь совсем недавно его вклад в теорию чисел был оценен по достоинству: в знак запоздалого признания его именем была названа постоянная.

Постоянная Капрекара

В 1949 г. Капрекар установил, что число 6174 можно считать пределом последовательности следующих операций. Возьмем любое четырехзначное число, *не все* цифры которого одинаковы. Переставим его цифры так, чтобы получить наименьшее и наибольшее из возможных чисел. Вычтем меньшее число из большего. Если их разность равна 6174, процесс завершен. Если нет, повторим те же действия. В конце концов всегда получается 6174.

Попробуем проделать это с номером года, в котором я начал писать эту книгу, — 2009. Наибольшее число, которое можно образовать из этих четырех цифр, — 9200, а наименьшее — 0029. Вычтем 29 из 9200 и получим 9171.

Повторим эту процедуру: $9711 - 1179 = 8532$.

Продолжим: $8532 - 2358 = 6174$. Наши поиски завершены: в конце пути нас с самого начала поджидало число 6174.

На математическом языке 6174 называется «неподвижной точкой», что означает следующее: если мы подставим в этот процесс само это число, мы снова вернемся к нему же. Проверим: $7641 - 1467 = 6174$. Действительно, дальше дороги нет; путешествие подошло к концу.

А что, если немного схитрить? Получится ли этот же фокус с числом, в котором есть три одинаковые цифры? Скажем, с числом 1112? Давайте попробуем.

$$2111 - 1112 = 999$$

Поскольку мы работаем с четырехзначными числами, запишем результат в виде 0999.

$$9990 - 0999 = 8991$$

$$9981 - 1899 = 8082$$

$$8820 - 0288 = 8532$$

$$8532 - 2358 = 6174$$

Вот мы и на месте.

Если кому-нибудь из вас остро требуется трудотерапия, можете попробовать проделать это с какими-нибудь другими числами.

Теперь у нас появилась превосходная возможность поставить свой собственный маленький математический эксперимент. Что получится, если использовать не четырехзначные, а трехзначные числа?

Попробуем, например, взять число 169.

$$961 - 169 = 792$$

Кстати, $169 = 13^2$, а $961 = 31^2$. Но не будем отвлекаться.

$$972 - 279 = 693$$

$$963 - 369 = 594$$

$$954 - 459 = 495$$

Мы пришли к неподвижной точке (проверьте, что это так!). Неужели мы открыли постоянную Капрекара для трехзначных чисел? Именно это мы и сделали! Если вы увлекаетесь алгеброй, вам не составит особого труда доказать это утверждение.

Перейдем к двухзначным числам. С ними-то все должно быть совсем легко, правда?

Начнем с одного из моих любимых чисел — 17.

$71 - 17 = 54$, $54 - 45 = 9$, $90 - 9 = 81$, $81 - 18 = 63$,
 $63 - 36 = 27$, $72 - 27 = 45$, $54 - 45 = \dots$ Минуточку!
Здесь мы уже были! Что происходит? На самом деле мы пришли к точке периодичности. Для двухзначных чисел неподвижной точки не существует.

Головоломка

А что получается с пятизначными числами? А с шестизначными?

Числа Капрекара

Капрекар обнаружил, что некоторые числа обладают одним необычным свойством: если возвести такое число в квадрат, то получившееся число можно разбить на две части, сумма которых будет равна исходному числу. Эта концепция станет яснее, если привести несколько примеров:

$$9^2 = 81;$$

$$1 + 8 = 9;$$

$$45^2 = 2025;$$

$$20 + 25 = 45;$$

$$999^2 = 998\,001;$$

$$998 + 001 = 999;$$

$$2728^2 = 7\,441\,984;$$

$$744 + 1984 = 2728;$$

$$818\,181^2 = 669\,420\,148\,761; \quad 669\,420 + 148\,761 = 818\,181.$$

Числа 9, 45, 999, 818 181 — и многие другие — относятся к сообществу «чисел Капрекара». Вы можете запустить на своем компьютере простую программу, которая познакомит вас со многими другими представителями этого сообщества.

Головоломка

Докажите, что числа 9, 99, 999 и 9999 — это числа Капрекара.

Древняя индийская задача

Найдите следующее число в последовательности:
1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49...

Подумайте несколько минут. Если вы не сможете решить эту задачу, ответ можно найти в примечаниях в конце книги⁴.

Интересная особенность этой задачи заключается в том, что ее обычно бывает трудно решить почтенным математикам, потому что они углубляются в поиски сложных идей. Легче всего эта задача дается умным детям.

Капрекар заметил, что некоторые числа можно получить сложением меньшего числа с суммой его цифр, а для других чисел это оказывается невозможным. Например, число 40 можно получить этим методом, взяв 29 ($2 + 9 = 11$, $29 + 11 = 40$). Но число 20 таким образом получить невозможно, с какого бы числа мы ни начинали (проверьте, так ли это).

Капрекар сформулировал критерий, по которому можно определить, какие числа невозможно получить при помощи этого метода*. Я не хочу лишать вас удовольствия самостоятельно воссоздать этот критерий. Дам лишь небольшой совет: найдите первое число, удовлетворяющее этому критерию, и попытайтесь вывести общее правило.

А теперь вернемся к нашему великому герою — Пифагору.

* В русской терминологии такие числа (например, число 20) называются *самопорожденными*, в отличие от *порожденных* чисел (например, числа 40; число 29 называется его *генератором*).

II. Пифагор на пляже

Представьте себе, что вы учитесь не в школе, а ходите на уроки на пляж. Здорово, правда? Именно так поступали пифагорейцы. Пифагор любил изображать числа шариками или камешками, выложенными на песке. По-разному располагая эти камешки, он придумал несколько математических формул и концепций.

Посмотрим на некоторые примеры.

Сумма последовательных нечетных чисел

Каждый, кто помнит хоть что-то из школьного курса, вероятно, может вспомнить и следующий закон: сумма n первых последовательных нечетных чисел, начиная с 1, всегда равна квадрату n .

Проиллюстрируем это утверждение:

$$1 + 3 = 4 = 2^2;$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2;$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

и так далее.

Те, кто продолжал углубленно изучать математику в старших классах, вероятно, знают, что этот закон можно доказать при помощи концепции, которая называется математической индукцией.

Математическая индукция — это совершенно поразительный инструмент для доказательства утверждений. Что особенно замечательно, он по-

звolyет получить доказательство для бесконечного множества элементов исходя из доказательства для конечного их числа. Я приведу пример, объясняющий, как работает индукция. Предположим, мы хотим доказать, что следующее равенство справедливо для всех натуральных чисел:

$$1 + 3 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = n^2.$$

Доказательство состоит из двух частей. В первой части мы доказываем справедливость так называемого *индукционного перехода*, то есть несколько странного утверждения, которое гласит: «Если это равенство истинно для n , то оно истинно и для $n + 1$ ».

Во второй части нужно доказать так называемую *базу индукции*, то есть убедиться, что это равенство истинно для $n = 1$.

Вот и всё! Этим мы доказываем справедливость этого утверждения для всех натуральных чисел.

Все это может показаться сомнительным, но позвольте мне объяснить. Представьте себе, что доказательство для n — это костяшка домино. Если вы когда-нибудь выстраивали ряд костяшек домино, вы знаете, что их ставят так, что, когда некая определенная костяшка падает, она толкает соседнюю, та толкает следующую и так далее — пока не упадут все костяшки. В доказательстве по индукции

мы точно так же выстраиваем свои «утверждения» в ряд: если мы доказали утверждение для любого элемента n , это «толкает» утверждение для элемента $n + 1$. Но, как и в случае костяшек домино, чтобы запустить цепную реакцию падения, нужно подтолкнуть первую костяшку — или, если использовать терминологию математической индукции, доказать базу индукции. Итак, мы совершаем индукционный переход — то есть предполагаем, что истинно следующее равенство:

$$1 + 3 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2.$$

Теперь докажем, что оно справедливо и для $n + 1$, рассуждая следующим образом.

Левая часть равенства имеет вид:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2(n + 1) - 3) + (2(n + 1) - 1) &= \\ &= 1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1). \end{aligned}$$

В правой же части должно быть $(n + 1)^2$. Поскольку мы предполагаем, что наше равенство выполняется для n , мы можем утверждать, что:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) &= \\ &= n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2. \end{aligned}$$

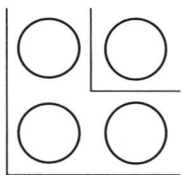
Этим завершается доказательство гипотезы индукции. Осталось только толкнуть первую ко-

стяжку. Для базы индукции, то есть при $n = 1$, утверждение, несомненно, справедливо, так как $1 = 1^2$.

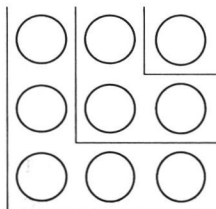
Теперь костяшки доказательства начинают падать одна за другой: утверждение для $n = 2$ вытекает из утверждения для $n = 1$, утверждение для $n = 3$ — из утверждения для $n = 2$ и так далее.

Однако Пифагор придумал способ получше этого. Тот же закон становится совершенно очевидным, если расположить камешки определенным образом.

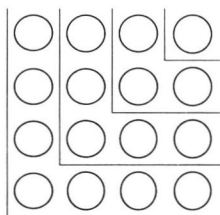
Один шарик и три шарика легко расставить в форме квадрата размером 2×2 клетки:



Один шарик, три шарика и еще пять шариков дают правильный квадрат размером 3×3 :



Если же добавить к ним следующее нечетное число, 7, точно так же получится квадрат размером 4×4 клетки:



Великий еврейский философ Барух Спиноза различал три вида знания:

1. Вера.
2. Исследование (экспериментирование).
3. Понимание.

Я объясню, о чем идет речь. Если вы сообщаете мне что-то — например что сумма последовательности нечетных чисел равна полному квадрату, — я могу поверить, что вы знаете, о чем говорите. Это первый уровень знания. Однако вполне может быть, что то, что вы мне рассказали, неверно.

Если я не поленюсь проверить эту информацию — то есть рассмотрю несколько примеров и смогу убедиться, что для них это правило выполняется, — я перейду на второй уровень знания. На нем утверждение несколько более достоверно, потому что я видел, что оно действительно справед-

ливо в некоторых случаях, но считать его абсолютно истинным нельзя. Профессор Бено Арбель (1939–2013) показал мне однажды замечательный пример, в котором многократные проверки не позволяют убедиться в истинности утверждения, даже когда их число необычайно велико. Возьмем выражение $991n^2 + 1$. Существует ли такое значение n , при котором это выражение дает полный квадрат? Можно подставить множество разных значений n , а потом перебрать кучу других значений n , и все время будет казаться, что это выражение никогда не дает полного квадрата. Но это не так, потому что при $n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,238\,767$ получается именно полный квадрат! Даже если мы проживем миллиард лет и потратим все это время на подстановки и вычисления, вряд ли мы обнаружим это число.

А это подводит нас к третьему уровню: только если понять, почему нечто происходит, — например разложив камни квадратом, — можно исключить всякую возможность ошибки.

*Скажи мне — и я забуду. Научи меня — и я запомню.
Дай мне сделать — и я пойму.*

Китайская мудрость

Подход Пифагора нравится мне тем, что он дает знание третьего рода. Я понимаю, почему выражения верны, на более глубоком уровне. Я не могу

проверить все бесконечное количество случаев применения формулы, но, если я получу глубокое понимание происходящего, я пойму, почему эта формула истинна.

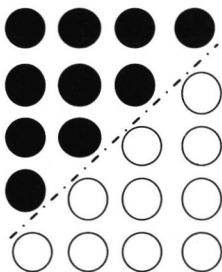
Однажды мне попала в библиотеке книга русского математика Якова Успенского (1883–1947) под названием «Теория уравнений» (Theory of Equations, 1948). Он работал в Стэнфордском университете под именем Джеймс Успенский. Успенский доказал множество разнообразных формул тем же путем, каким доказывал Пифагор, — то есть при помощи иллюстраций.

Начну с весьма простого примера.

Если сложить все числа от 1 до n , результат будет равен

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Следующий чертеж объясняет, почему эта формула действует для случая $n = 4$.



Сумма чисел от 1 до 4 равна половине площади прямоугольника; другими словами, $\frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$.

Ну хорошо, для $n = 4$ все просто. А что происходит с более крупными числами?

Существует хитрый способ вычисления суммы последовательных чисел от 1 до, скажем, 100. Этот способ тесно связан с историей, главный герой которой — маленький мальчик. Разные страны и народы спорят о том, кто именно был этим мальчиком. Русские утверждают, что это был математик Николай Лобачевский, «Коперник геометрии», и было ему тогда семь лет. Евреи говорят, что это был Барух Спиноза, но возраст называют такой же. Немцы называют героем этого повествования выдающегося математика — на самом деле одного из величайших во всей истории математики — К. Ф. Гаусса (в честь которого, что неудивительно, названа колоколообразная кривая — гауссиана) в шестилетнем возрасте. Немало и таких родителей, которые утверждают, что это произошло с их собственным ребенком.

Поскольку мы только что познакомились на страницах этой книги со Спинозой, я выберу его.

Так вот, однажды маленький Барух сидел на уроке и очень, очень скучал. Но беда была не только в том, что ему было скучно, а еще и в том, что из-за этого он шалил и мешал учителю вести урок. Учитель решил дать мальчику какую-нибудь задачу, которая займет его на долгое время, и велел Баруху

сложить все числа от 1 до 100. «Этого ему хватит по меньшей мере до конца урока», — решил учитель.

Но его ожиданиям не суждено было сбыться. Не успел учитель повернуться к доске, как Барух сказал: «Учитель, ответ — 5050».

Мы можем предположить, что Барух еще не был знаком с приведенной выше формулой (он был слишком мал). Как же ему удалось так быстро сосчитать эту сумму?

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = ?$$

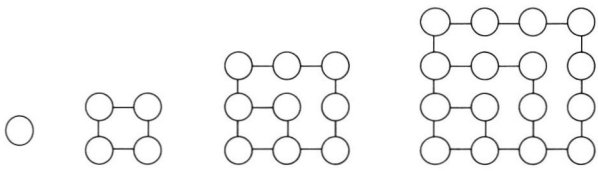
Ответ оказывается очень простым и к тому же очень изящным. Барух не стал складывать все числа по порядку: он заметил, что можно сложить первое число с последним ($1 + 100 = 101$), второе — с предпоследним ($2 + 99 = 101$), третье — с третьим с конца ($3 + 98 = 101$) и так далее, вплоть до $50 + 51 = 101$, и получить пятьдесят пар, сумма членов каждой из которых равна 101. После этого ему оставалось только умножить 50 на 101, а это очень легко сделать: $50 \times 100 = 5000$ плюс еще один раз 50, итого 5050.

Умно́, не правда ли? Если подумать об этом несколько секунд, можно понять, что метод маленького Баруха аналогичен Пифагоровой идее раскладывания камешков.

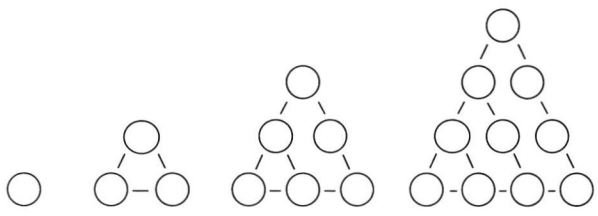
Привычка Пифагора преподавать с использованием камешков также объясняет, почему мы

называем некоторые числа «квадратными», «треугольными», «кубическими» и так далее. Он просто давал этим числам названия, соответствующие их геометрическим представлениям.

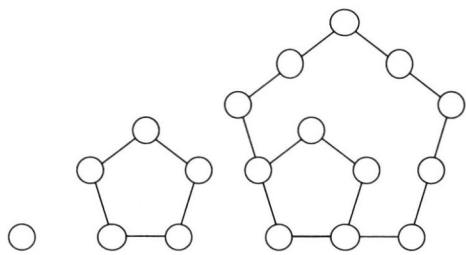
Например, как можно видеть из иллюстрации, числа 1, 4, 9, 16, 25... — «квадратные»:



Числа 1, 3, 6, 10, 15... — «треугольные»:



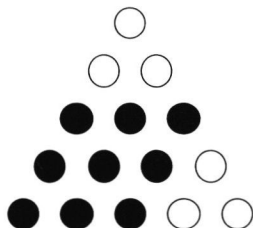
А числа 1, 5, 12... — пятиугольные.



Вернемся к треугольным числам.

Теория: любое треугольное число от 3 и выше может быть выражено в виде суммы полного квадрата и двух треугольных чисел.

Доказательство: хватит и иллюстрации.



И действительно, $15 = 9 + 3 + 3 = 3^2 + 3 + 3$.

Ч. т. д.

Маленькое примечание: эту же теорему, разумеется, можно доказать и обычным способом, но это доказательство немного сложнее и немного труднее для понимания. Иллюстрация гораздо нагляднее.

А как обстоит дело с суммой квадратов последовательных чисел?

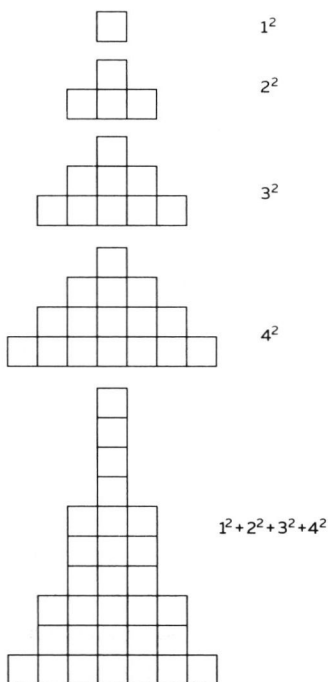
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots = ?$$

Те, кто по-настоящему любил в школе задачи на индукцию, возможно, даже помнят следующую формулу (символ $\cdot$ обозначает в ней операцию умножения):

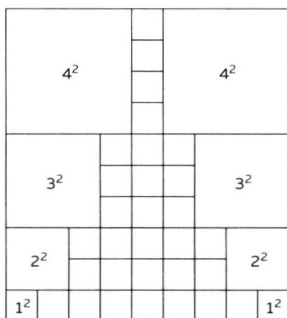
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Это равенство было известно уже китайскому математику Ян Хуэю, жившему в XIII в.

Какая логика лежит в его основе? Чтобы понять ее, нам придется обратиться за помощью к пифагорейцам. Я продемонстрирую концепцию для $n = 4$. Концепция для общего случая следует в точности тому же принципу.



Теперь осталось только собрать следующую фигуру:



и мы получим:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{4 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 4 + 1)}{6}$$

или

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Если вам нравится заниматься математикой методом «камешков на пляже», вам, возможно, придется по вкусу и следующее интересное развлечение: найдите похожие формулы в своем учебнике по математике, соберите внушительную кучу камешков и отправляйтесь на пляж. Только не забудьте запастись кремом от загара — эти упражнения иногда занимают довольно много времени. Вместе с тем можно развлекаться и иначе: взять ту же кучу ка-

мешков и придумывать собственные формулы. Но кроме этого есть, конечно, и самое главное развлечение — пойти на пляж и не делать там ничего!

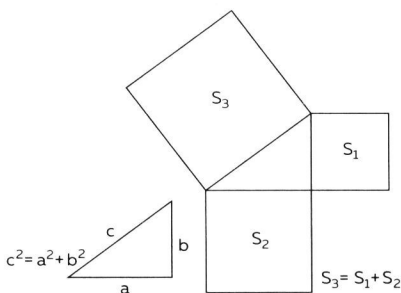
Без математики невозможно проникнуть вглубь философии. Без философии невозможно проникнуть вглубь математики. Без них обеих невозможно проникнуть вглубь чего бы то ни было.

Лейбниц

Теорема Пифагора

Можно ли говорить о Пифагоре и не упомянуть о прославленной теореме, носящей его имя? Разумеется, нельзя. Поэтому я закончу эту главу несколькими историями о теореме Пифагора.

Итак, теорема гласит, что в любом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов двух других сторон.



Интересно отметить, что эту теорему знали еще древние египтяне, которые даже использовали пи-

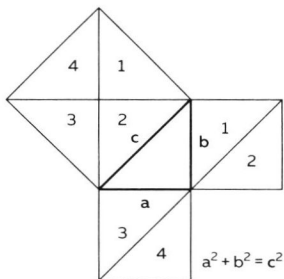
фагоровы треугольники со сторонами 3–4–5 для построения прямых углов.

Разумеется, всякий, кто учился в школе, способен дать формулировку этой знаменитой теоремы, но многие ли из вас действительно знают почему она справедлива и как ее доказать?

Рассказывают, что, когда философ Томас Гоббс (1588–1679) случайно увидел теорему Пифагора в книге «отца геометрии» Евклида, он был так поражен, что решительно отказался поверить, что это утверждение может быть истинным. В то время Гоббсу было около 40, и до этого момента он не особенно интересовался математикой. Гоббс прочитал доказательство (что совсем не мало для человека, не отличавшегося страстью к геометрическим фигурам) и влюбился в геометрию.

Что же — если Гоббс не желал поверить в истинность теоремы, мне не остается ничего другого, как доказать ее. Собственно говоря, ее доказательств существуют сотни, начиная с самого первого, так поразившего Гоббса в изложении Евклида, и до доказательств с использованием дифференциалов.

Я покажу вам три доказательства, которые мне особенно нравятся, но до этого хочу представить вам доказательство для случая равнобедренного прямоугольного треугольника. Это доказательство настолько просто, что для его изложения хватит и чертежа.

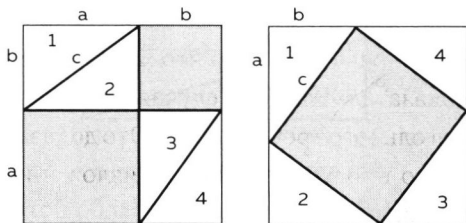


Доказательство № 1 — изящество простоты

Это доказательство я выбрал потому, что оно — одно из самых простых.

Возьмем квадрат со стороной $a + b$ и построим в нем четыре одинаковых прямоугольных треугольника, как показано в левой части представленного ниже чертежа. Теперь расположим те же треугольники по-другому, как показано в правой части. Площадь заштрихованных участков на обоих чертежах должна быть одинаковой, так как она в обоих случаях равна суммарной площади квадрата за вычетом площади четырех треугольников.

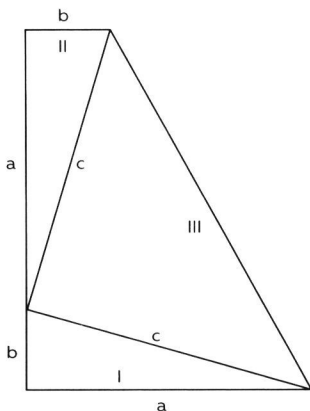
Следовательно, $a^2 + b^2 = c^2$.



Доказательство № 2 — доказательство Гарфилда

Если вы думаете, что автором доказательства теоремы Пифагора был ленивый кот Гарфилд*, вы ошибаетесь. Это доказательство принадлежит двадцатому президенту Соединенных Штатов Джеймсу А. Гарфилду. Однако, если вы думаете, что между котом Гарфилдом и президентом Гарфилдом нет никакой связи, вы опять ошибаетесь! Создатель кота Гарфилда художник Джим Дэвис назвал его в честь своего дедушки, а дедушку называли в честь президента Гарфилда.

Вот это доказательство. Посмотрите на трапецию, изображенную на следующем чертеже:



* Герой одноименного комикса.

Площадь трапеции равна произведению ее высоты $(a + b)$ на среднее арифметическое длин ее оснований $\frac{a+b}{2}$. Вместе с тем трапеция состоит из трех треугольников — I, II и III, — а площадь каждого из треугольников I и II равна $\frac{a \times b}{2}$. Исходя из того, что сумма углов треугольника равна 180° , легко доказать, что треугольник III прямоугольный. Отсюда вытекает, что площадь треугольника III равна $\frac{c^2}{2}$. Следовательно,

$$(a + b) \cdot \frac{a + b}{2} = \frac{a \times b}{2} + \frac{a \times b}{2} + \frac{c^2}{2}.$$

Раскрыв скобки в левой части и упростив, получаем в результате $a^2 + b^2 = c^2$.

Ч. т. д.

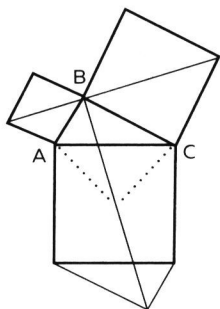
Браво, двадцатый президент Соединенных Штатов!

Доказательство № 3 — Пифагор и Леонардо

На этот раз автором доказательства был не кто иной, как Леонардо да Винчи. Джорджо Вазари (1511–1574) пишет в «Жизнеописаниях наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих» (1550), книге о великих художниках, что Леонардо изучал математику всего несколько месяцев, но и за такое короткое время сумел стать специалистом в этой области. Точно так же Леонардо не по-

свящал много времени изучению музыки, и тем не менее подобно Пифагору любил петь, аккомпанируя себе на лютне. Есть много других предметов, которыми Леонардо занимался лишь недолгое время и тем не менее освоил настолько, что научился применять их даже лучше, чем те, кто затратил на их изучение много времени и сил.

Уверен, что никто не удивится, если я скажу, что основную идею доказательства да Винчи легко можно понять из чертежа.



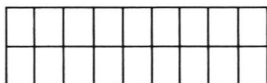
Как Леонардо да Винчи пришел к этому чертежу? Где именно таится в нем доказательство? Я дам вам время немного поупражнять мозг, размышляя над этой задачей.

ТАЙНАЯ ЖИЗНЬ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

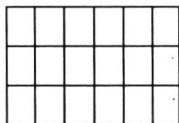
«Эврика» Евклида

В предыдущей главе, в которой мы познакомились с Пифагором, нам встретились треугольные числа, квадратные числа и даже пятиугольные числа. Однако мы совсем не говорили о числах прямоугольных. Почему же?

Эти числа не столь интересны потому, что встречаются они слишком часто. Любое число, которое делится без остатка на другое, меньшее, число, можно представить в виде прямоугольника. Вот, например, всего лишь два представления одного такого числа:



$$18 = 9 \times 2$$



$$18 = 6 \times 3$$

Гораздо интереснее искать числа, которые *нельзя* представить в виде прямоугольника; точнее говоря, числа, которые делятся только на единицу и само на себя. Например, число 17.

Не существует никакого способа составить из клеток прямоугольник, отличающийся от показанного ниже.



$$17 = 17 \times 1$$

Число называется простым, если у него есть ровно два разных делителя — единица и само это число. Числа, не являющиеся простыми, называют составными. Вот несколько первых простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47... Их список продолжается и дальше. Если вы внимательно прочитаете определение простого числа, вы поймете, почему в этот список не входит число 1.

Простые числа — это кирпичики, из которых строится вся популяция чисел, так как любое составное число может быть представлено одним, и только одним, способом в виде произведения простых чисел, причем любое простое число может входить в это произведение более одного раза.

$$\text{Например: } 72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2.$$

Тем, кто не считает себя членом сообщества математиков, тот факт, что любое число может быть представлено в виде одного, и только одного, произведения простых сомножителей, кажется совершенно очевидным. Однако для математиков этот факт не вполне ясен: им приходится его доказывать. Не следует, однако, обвинять математиков в излишней педантичности; в прошлом было такое множество положений, которые казались «совершенно очевидными», а потом оказались — и это было доказано — ложными, что математики категорически решили, что любое и каждое утверждение должно быть подтверждено доказательством. Можно предположить, что сложение множества нулей непременно дает нуль, но, как вы увидите далее в этой книге, сумма нулей не всегда бывает равна нулю, а если уж нельзя доверять нулям, то кому вообще можно доверять?

Но я отвлекся. Вернемся к теме простых чисел.

Первое, что мы можем спросить, завязывая с простыми числами отношения, которые мы собираемся заботливо развивать, это: «Сколько всего существует простых чисел?»

Ответ на этот вопрос первым нашел греческий математик Евклид, отец теоретической геометрии. С Евклидом знаком любой, кто изучал геометрию, — где бы и когда это ни происходило. Все мы заучивали постулаты (аксиомы) Евклида:

что через любые две точки можно провести одну, и только одну, прямую или что две параллельные прямые никогда не пересекаются. Собственно говоря, классическая геометрия носит его имя — она называется евклидовой геометрией. И, хотя Евклид разрабатывал свою геометрию более 2000 лет назад, ее до сих пор преподают *в точности* так, как он ее записал. Можно ли представить себе, чтобы биологию, или химию, или физику преподавали, используя только знания, полученные более 2000 — или даже 200 — лет назад?

Евклидова геометрия оказала сильнейшее влияние на лучшие умы человеческой цивилизации, одним из которых был величайший из философов, Барух Спиноза. Евклидовы методы построения геометрии на основе аксиом и базовых концепций настолько впечатлили Спинозу, что он применил этот подход в главной своей работе, «Этике». Разумеется, Спиноза не говорит в своей книге о точках и прямых. Он рассуждает о концепции Бога и о месте человека в мироздании. Но для представления своих доводов он использует чисто евклидовские методы: Спиноза излагает основополагающие концепции, формулирует конкретные аксиомы, а затем использует их для доказательства теорем. Более того, главное произведение Спинозы называется в латинском оригинале *Ethica ordine geometrico demonstrata* (хотя эту

книгу часто называют просто «Этикой»; точный перевод латинского названия — «Этика, доказанная в геометрическом порядке»).

Но вернемся к Евклиду. Прежде чем мы посмотрим его ответ на вопрос «сколько существует простых чисел?», давайте немного подумаем самостоятельно.

Прежде всего нам необходимо определить, конечно или бесконечно количество простых чисел.

Если их количество конечно, то каково самое большое простое число?

Если же простых чисел бесконечно много, можно ли это доказать?

Можно ли представить себе, что некое действительно огромное, необычайно большое число не делится нацело ни на что, кроме единицы и самого себя, и, следовательно, считается простым числом?

Существует ли формула, которую можно использовать для получения всех простых чисел?

ТЕОРЕМА ЕВКЛИДА

Существует бесконечно много простых чисел.

Я приведу два доказательства этой теоремы. Одно из них кратко и подчеркивает красоту вели-

кой идеи Евклида. Второе доказательство, по сути, сводится к тому же, но оно длиннее и помогает подробно объяснить более краткое доказательство.

Короткое доказательство

Предположим, что ряд $2, 3, 5, 7, 11, \dots, P$ — это полный список простых чисел вплоть до некоторого простого числа P .

Образуем новое число S , такое, что $S = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \dots \times P) + 1$.

Число либо S является простым, либо делится на одно или несколько из простых чисел, *больших*, чем P . В любом из этих случаев число P не может быть самым большим простым числом. Следовательно, количество простых чисел должно быть бесконечным.

Ч. т. д.

Убедило ли вас это доказательство? Если да, вы можете пропустить следующее; если нет, — читайте дальше!

Длинное доказательство

Здесь мы тоже предположим существование в списке простых чисел самого большого числа, а потом докажем, что такое положение невозможно, что докажет, что простые числа бесконечны. Доказательство этого типа, в котором сначала выдвигают некоторое предположение,

а затем доказывают, что такое положение вещей невозможно, математики называют «доказательством от противного». Хотя эта простая, но изящная концепция кажется математикам совершенно естественной, многим, впервые столкнувшимся с ее идеей, бывает несколько трудно с ней примириться.

Если количество простых чисел конечно, то должна существовать возможность найти самое большое простое число, которое мы обозначим P . Выпишем все простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., P .

Теперь образуем еще одно число: $S = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times \dots \times P) + 1$. Другими словами, число S равно произведению всех простых чисел из нашего списка плюс 1.

На что же делится число S ?

Оно не может делиться на два, так как выражение в скобках равно четному числу (поскольку 2 — один из сомножителей этого выражения). Прибавление единицы делает S нечетным числом.

Кроме того, S не может делиться на 3. Это можно утверждать по такой же причине: число, стоящее в скобках, делится на 3 (потому что 3 — один из сомножителей этого выражения); следовательно, при прибавлении единицы получается число, не делящееся на 3 (собственно говоря, при делении S на любое простое число из списка получается остаток, равный 1).

Число S также не может делиться на 4, поскольку оно не делится на 2. Вообще, любое число, делящееся на некий делитель, также делится и на его простые сомножители. Например, любое число, делящееся на 6, делится также на 2 и на 3.

Продолжая в том же духе, мы поймем, немного поразмыслив, что число S не может делиться ни на 5, ни на 6, ни на 7, ни на какое бы то ни было другое число до числа P включительно, которое, как мы предполагаем, является самым большим простым числом. Это оставляет нам две возможности:

1. Либо S — простое число, большее P .
2. Либо S делится на некое простое число, не входящее в наш список, то есть на простое число, большее P (поскольку мы уже видели, что оно не делится ни на одно из простых чисел, меньших или равных P).

Какой бы вариант мы ни выбрали, мы в любом случае приходим к противоречию с нашим исходным утверждением, а именно, что число P — самое большое простое число. Если же предположение о том, что P — самое большое простое число, приводит к противоречию, значит, самого большого простого числа не существует.

Ч. т. д.

Кстати, если вам интересно, используемое во многих языках вместо «ч. т. д.» сокращение *QED* происходит от латинских слов *Quod Erat Demonstrandum*, то есть «что и нужно было продемонстрировать»: каждый математик гордо выписывает это радостное обозначение в конце своего рассуждения, когда ему наконец удастся довести до завершения какое-нибудь длинное и сложное доказательство.

Спиноза часто использовал это латинское сокращение. Интересно отметить, что сам Евклид применял греческое сокращение *ΟΕΔ*, внешне похожее на латинское и означающее *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* — «что и нужно было показать».

Важное примечание: доказательство Евклида не особенно конструктивно. Иначе говоря, оно не дает простого рецепта получения новых простых чисел. Число S , как мы уже указывали, вполне может не быть простым числом: оно также может быть числом составным, *делящимся* на простое число, большее P .

Вот иллюстрация этого утверждения.

Предположим, что число 3 — самое большое из существующих простых чисел (разумеется, это предположение абсолютно ложно). Образует число S , равное $(2 \times 3) + 1 = 7$, и 7 действительно оказывается простым числом. То же верно и для $S = (2 \times 3 \times 5) + 1$, для $S = (2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1$ и для $S = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) + 1$.

Но после этого мы получаем пример осуществления второго варианта:

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 = 30031 = 59 \times 509.$$

Другими словами, $(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1$ есть составное число, делящееся на простые числа 59 и 509, которые оба больше числа 13, которое временно выступало в роли «самого большого простого числа». Видим, что никакого противоречия в доказательстве Евклида нет — оно безупречно.

Интересно отметить, что довольно многим впервые столкнувшимся с доказательством Евклида кажется, что, если бы им его не показали, они вполне смогли бы открыть его самостоятельно. «Подумаешь, перемножить простые числа и прибавить единицу. Что тут сложного? Я бы и сам до этого додумался за пару минут, не больше!» В большинстве случаев это иллюзия. Простота этого доказательства лишь подчеркивает его красоту и гениальность.

Я встречал выдающихся математиков, убежденных, что предложенное Евклидом доказательство бесконечности простых чисел — одна из самых прекрасных теорем во всей истории математики. Будь и я выдающимся математиком, я бы тоже, несомненно, присоединил мой голос к их хору.

Числа Мерсенна и Книга рекордов Гиннесса

Тот факт, что количество простых чисел бесконечно, означает, что мы никогда не сможем составить полный список всех простых чисел. Всегда будет оставаться следующее простое число, большее, чем самое большое число в нашем списке.

Число, носящее почетный титул «самого большого простого числа, открытого до 2018 г.», равно $2^{77\,232\,917} - 1$ *. Я не советовал бы вам пытаться сосчитать это число и выписать его в тетради: в ней просто не хватит для этого страниц. Если учесть, что количество атомов во Вселенной меньше, чем 2^{320} , наверное, можно составить некоторое представление о том, насколько огромно число $2^{77\,232\,917} - 1$. В нем 23 249 425 знаков — почти на миллион (!) больше, чем в числе, которое считалось самым большим простым числом до него: то было открыто в январе 2016 г., и его значение — $2^{74\,207\,281} - 1$ (в этом числе «только лишь» 22 338 618 знаков). При этом число 2^{320} всего-то 96-значное. Все относительно!

Кстати говоря, доказательство того, что это чудовищное число относится к простым числам, было получено не живым математиком из плоти и крови, а

* В декабре 2018 г. было найдено еще большее простое число Мерсенна, равное $2^{82\,589\,933} - 1$. В десятичной записи оно содержит 24 862 068 цифр. К моменту выхода настоящего издания вполне могут устареть и эти сведения.

сетевым вычислительным проектом под названием GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search — «Большой интернет-поиск простых чисел Мерсенна»).

Что же такое «число Мерсенна»? Возможно, правильнее было бы спросить иначе: кто такой Мерсенн? Числа вида $2^n - 1$ называют числами Мерсенна в честь французского философа, богослова, музыковеда и математика Марена Мерсенна (1588–1648). Если вам кажется, что перечень его титулов недостаточно впечатляющ, позвольте мне добавить еще один: Мерсенн был первым человеком, измерившим скорость звука.

Все ли числа Мерсенна простые? Вовсе нет.

Например, $2^4 - 1 = 15$ — не простое число ($15 = 3 \times 5$).

Те, кто еще не забыл уроки старших классов (или, скажем, все еще учится в школе), вероятно, знают, что число Мерсенна не относится к простым, если простым числом не является его степенной показатель. Дело в том, что в этом случае такое число всегда можно разложить на два сомножителя. Механизм, лежащий в основе этого правила, любезно вызвалось проиллюстрировать на собственном примере число $2^6 - 1$:

$$2^6 - 1 = 2^{2 \times 3} - 1 = (2^2 - 1) (2^4 + 2^2 + 1) = 3 \times 21^*.$$

* Или, если использовать формулу разности квадратов, $2^{3 \times 2} - 1 = (2^3 - 1) (2^3 + 1) = 7 \times 9$.

Другими словами, если степенной показатель — составное число, то соответствующее число Мерсенна всегда можно разложить на множители, что доказывает, что и оно будет числом составным. Для его разложения есть общая формула:

$$2^{n \cdot m} - 1 = (2^n - 1) (1 + 2^n + 2^{2n} + \dots + 2^{(m-1) \cdot n}).$$

Если эта формула не кажется вам особенно интересной, не беспокойтесь. Собственно говоря, сама формула не столь важна. Важен тот факт, что если в степенном показателе стоит *не* простое число, то и число Мерсенна с этим показателем не будет простым. Но если составной показатель гарантирует составное число Мерсенна, дальше, несомненно, естественно задать следующий вопрос: «Гарантирует ли простой показатель, что число Мерсенна будет простым?»

Попробуем проверить.

$2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^5 - 1$ и $2^7 - 1$ — числа простые (соответственно 3, 7, 31 и 127). Пока что все хорошо. Следующее простое число после 7 — это 11, но $2^{11} - 1$ — это *не* простое число: $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$.

Как ни печально, наличие простого числа в степенном показателе не гарантирует, что соответствующее число Мерсенна тоже будет простым числом. Будь это так, мы бы располагали простым способом находить все новые и новые простые

числа. Например, можно было бы взять то колоссальное простое число, о котором мы говорили несколькими строчками выше, использовать его в качестве степенного показателя 2, вычесть единицу и получить новое — и еще более колоссальное — простое число. В его показателе стояло бы число, содержащее более 20 миллионов цифр. Подумайте только, каким ужасающе огромным было бы это число — оно выходило бы за пределы воображения простых смертных. Простое ли это число на самом деле? Я этого не знаю и не думаю, что когда-нибудь узнаю.

Мерсенн исследовал эти числа, носящие теперь его имя, в работе, опубликованной в 1644 г. Она вышла под величественным заголовком «Физико-математические размышления» (Cogitata Physico-Mathematica). Мерсенн проверил все простые степенные показатели до 257 и заключил, что числа вида $2^P - 1$ должны быть простыми при $P = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$. Правильный перечень немного отличается от этого и выглядит так: $P = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$.

Судите сами, можно ли считать процент точных попаданий Мерсенна впечатляющим.

Числа Мерсенна и совершенные числа

Помните совершенные числа, с которыми мы познакомились в разделе, посвященном Пифагору?

Если вы уже забыли про них, напомним, что совершенным называется число, сумма собственных делителей которого равна самому числу. Еще Евклид знал, что, если $2^p - 1$ — простое число, то его умножение на 2^{p-1} всегда дает совершенное число. Разумеется, Евклид не называл такие числа числами Мерсенна. В его время не только еще не родился сам Мерсенн, но даже не познакомились родители прародителей его прародителей.

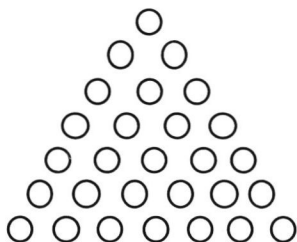
Приведем несколько примеров. $2^3 - 1$ — простое число (7); следовательно, $(2^3 - 1) \times 2^2 = 28$ — число совершенное. Аналогичным образом, $2^5 - 1$ — простое число (31); следовательно, $(2^5 - 1) \times 2^4 = 496$ — число совершенное. Воспользовавшись любезной помощью наибольшего из известных на сегодня простых чисел, мы теперь можем построить и самое большое из известных совершенных чисел: $(2^{77\,232\,917} - 1) \times 2^{77\,232\,916}$.

Я не советовал бы вам пытаться сосчитать это число и проверить справедливость этого утверждения. Могу вас заверить, что сумма всех делителей этого чудовищного числа действительно равна самому числу. Говоря словами великого немецкого философа Иммануила Канта, мне пришлось устранить знание, чтобы дать место вере.

Ну хорошо. Теперь настало время отвлечься от мировых рекордов и заняться разработкой некоторых из пресловутых умственных мускулов.

Головоломки для тех, кто изучал математику

- 1) Докажите, что, если $2^p - 1$ — простое число, то число $(2^p - 1) \times 2^{p-1}$ должно быть совершенным.
- 2) 28 — треугольное число.



Являются ли все совершенные четные числа треугольными?

Знаменитый швейцарский математик Леонард Эйлер (с которым мы вскоре познакомимся) доказал, что верно и обратное. Другими словами, любое четное совершенное число имеет форму $(2^p - 1) \times 2^{p-1}$, где p и $2^p - 1$ — простые числа. Попробуйте свои силы и докажите это утверждение — или же найдите доказательство Эйлера¹.

Поиски чудотворной формулы

Ну ладно, мы поняли, что простых чисел существует бесконечное количество. После этого логично было спросить, есть ли в их появлении какой-либо порядок. Существует ли формула, дающая только про-

стые числа? Существует ли формула, дающая все простые числа? Как могла бы выглядеть формула количества простых чисел до некоторого числа n ?

Не успели мы расстаться с великим швейцарским математиком Леонардом Эйлером (1707–1783), как снова встречаемся с ним.

В 1772 г. Эйлер выяснил, что выражение $n^2 + n + 41$ (напомним, что любое выражение вида $ax^2 + bx + c$ называется квадратным многочленом) дает простые числа при условии, что n меньше 40. Например, для $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ мы получаем, соответственно, следующие значения: 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83. Отметим, что разности между этими значениями равны 2, 4, 6, 10, 12.

Совершенно очевидно, что формула Эйлера не может выдавать простые числа бесконечно. Всякий, кто помнит хотя бы крохи математических законов, которые проходят в восьмом классе, поймет, что при $n = 41$ результат не будет простым числом, так как в этом случае все три слагаемые формулы делятся на 41, из чего следует, что и их сумма должна делиться на 41.

А если подумать еще немного, мы поймем, что эта формула не может давать простого числа и при $n = 40$. Запишем ее в таком виде:

$$\begin{aligned} 40^2 + 40 + 41 &= 40(40 + 1) + 41 = \\ &= 40 \cdot 41 + 41 = 41(40 + 1) = 41^2. \end{aligned}$$

Получившееся значение — не только не простое число: это еще и полный квадрат, 1681.

Отметим, что число 1681 обладает одним весьма интересным свойством: это единственное четырехзначное число, которое не только само является полным квадратом, но и состоит из двух частей, 16 и 81, каждая из которых тоже само является полным квадратом (если не учитывать тривиальные случаи чисел вроде 1600).

Примечание. До сих пор не доказано, что какой-либо квадратный многочлен вида $ax^2 + bx + c$ генерирует бесконечное количество простых чисел.

Теорема Дирихле

Когда я слушал в Тель-Авивском университете курс теории чисел, лектор, профессор Григорий Фрейдман, показал нам доказательство следующей теоремы:

Арифметическая прогрессия $an + b$ содержит бесконечное количество простых чисел, если a и b — взаимно простые числа, то есть не имеют общих делителей, больших, чем 1.

Доказательство теоремы Дирихле, названной по имени Густава Лежёна Дирихле (1805–1859), исключительно красиво, но нашему лектору понадобилось для его объяснения четыре занятия, и оно заходит в области математики, лежащие далеко за пределами темы этой книги. Поскольку я обещал использовать только основные арифметические операции, я объясню, причем как можно проще, лишь утверждение этой теоремы.

Выберем два взаимно простых числа (то есть два числа, не имеющих общих делителей), например $a = 3$ и $b = 4$. Следует помнить, что *сами* эти числа могут и не быть простыми; они лишь должны быть взаимно простыми по отношению друг к другу. Итак, формула нашей прогрессии имеет вид $3n + 4$. Вычислим несколько последовательных членов прогрессии, начиная с $n = 1$.

Мы получим такую последовательность чисел: 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31...

Вы, вероятно, уже заметили, что не все числа в этой последовательности простые. Но теорема Дирихле и не утверждает, что все они должны быть простыми числами. Теорема Дирихле гласит, что в последовательности *появится* бесконечное количество простых чисел — как и в любой последовательности, для которой a и b — взаимно простые числа. Разумеется, ясно, что в этих же последовательностях появится и бесконечное количество

составных чисел. Например, в последовательности $3n + 4$ результат, несомненно, будет составным числом каждый раз, когда число n кратно 4.

Кстати говоря, фамилия Лежён Дирихле имеет интересную историю. Семья Дирихле происходила из деревушки Ришлет, расположенной вблизи бельгийского города Льежа. Поэтому его прозвали «юнцом из Ришлет» — *le jeune de Richelette**.

Царство составных чисел

Много лет назад меня назначили преподавателем очень особой программы в рамках Математической школы при Тель-Авивском университете. Профессор Бено Арбель отвечал за выявление старшеклассников с исключительными способностями к математике, а я должен был понемногу учить их и готовить к исследовательской работе параллельно с их школьными занятиями. Основной целью этой программы было дать им возможность получить бакалаврскую или даже магистерскую степень еще до окончания старшей школы или вскоре после него. Я часто давал им решать

* По более распространенной версии так называли его деда, а сам Дирихле, родившийся в немецком городе Дюрене, унаследовал это прозвище уже в качестве фамилии.

задачи, которые выбирал из своей личной коллекции Международных математических олимпиад, потому что считаю, что лучше всего развивают именно трудные задачи. Одной из задач, которые я задавал на разминочном этапе, была следующая.

Задача

Выпишите 100 последовательных чисел, среди которых не будет ни одного простого числа.

К этому моменту вы, вероятно, уже знаете, что я собираюсь написать дальше. Если вы думаете, что я напишу «попытайтесь немного подумать, прежде чем читать дальше», вы совершенно правы.

Маленькая подсказка

Это непростое упражнение. Первым делом вы, несомненно, подумали, что такая сплошная последовательность чисел должна начинаться с весьма большого числа, — мы уже знаем, что среди малых значений не найдется ста последовательных чисел, среди которых не было бы ни одного простого.

Продолжайте думать.

Пока вы думаете, я воспользуюсь этой возможностью, чтобы познакомить вас (или возобновить ваше знакомство) с одним очень важным обозначением, которое упрощает запись и размышления. Разумеется, то, что я ввожу это обозначение именно сейчас, не случайно: оно помо-

жет нам решить эту задачу. Речь идет о символе факториала, который обозначается восклицательным знаком (!). Запись $n!$ обозначает в математике произведение всех чисел от 1 до n , то есть $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n-1) \times n$.

Например, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$. Однажды один из моих учеников пропустил занятие, на котором я вводил факториалы. Когда он увидел обозначение $5!$, он назвал его «пять ух!». Сразу же очевидно, что $5!$ делится на все числа, входящие в произведение. Другими словами, $n!$ делится на все числа от 1 до n .

Добросовестности ради отмечу, что $0!$ принимают равным 1, чтобы не вносить противоречий в основную формулу определения факториала: $n! = (n-1)! \times n$.

А теперь попробуем еще раз взяться за нашу задачу.

У вас появились какие-нибудь идеи? Если нет, читайте дальше.

Большая подсказка

Я надеюсь, что за то время, которое мы провели за разговором о факториалах, вы приблизились к решению. Нет никаких сомнений, что факториалы играют в нем какую-то роль. Но какую?

С какого числа следует начать? Может быть, с $100!$? Нет, этот вариант не годится. Ведь следую-

щее число, $100! + 1$, вполне может оказаться простым, не так ли?

А вот если... Вы уже видите решение?

Огромная подсказка

Может быть, начать с $100! + 2$? Такая идея кажется более привлекательной. Это число делится на 2, поскольку на 2 делятся и $100!$, и 2; следовательно, оно не может быть простым. Мы на верном пути.

Следующее число, $100! + 3$, точно так же делится на 3, и, если продолжать в том же духе... $100! + 100$ делится на 100. К сожалению, мы никак не можем немедленно установить, составное ли число $100! + 101$.

Решение было так близко. Но увы, между $100! + 2$ и $100! + 100$ всего 99 чисел. Как жаль! Такая прекрасная идея отправляется в помойку.

Минуточку! В помойку? Ни в коем случае! Ее всего лишь нужно немножко подправить.

Решение

Мы можем начать свою последовательность чисел с $101! + 2$ и закончить ее на $101! + 101$. Тогда мы получим непрерывную последовательность из 100 идущих друг за другом чисел, и все они, вне всякого сомнения, — числа составные.

Очевидно, теперь мы можем найти последовательность чисел любой длины, в которой

не будет ни одного простого числа. Например, чтобы получить набор из 1000 последовательных составных чисел, нужно просто начать эту последовательность с $1001! + 2$. Из этого, разумеется, следует, что среди *по-настоящему* больших чисел простые числа будут встречаться все реже и реже².

Еще о частоте простых чисел

По мере увеличения чисел средняя разность двух последовательных простых чисел тоже становится больше. Однако существует теорема, которая устанавливает верхний предел редкости появления простых чисел среди чисел натуральных. Она утверждает, что отношение $\frac{P_{i+1} - P_i}{P_i}$, где P_i — значение i -го простого числа, приближается к нулю по мере приближения i к бесконечности.

Я переведу это утверждение с математического жаргона на язык понятный и нематематикам. Теорема эта означает, что отношение длины промежутка между простыми числами к самим простым числам становится меньше с увеличением i . Ниже приведен список значений начиная с $i = 1$. Чтобы было яснее, уточню, что в первой строке i равно 1; следовательно, P_i — это первое простое число, то есть 2, а P_{i+1} — второе простое число, то есть 3. Во второй строке $i = 2$, а простые числа — $P_2 = 3$ и $P_3 = 5$ и так далее.

$$(3-2)/2 = 1/2$$

$$(5-3)/3 = 2/3$$

$$(7-5)/5 = 2/5$$

$$(11-7)/7 = 4/7$$

$$(13-11)/11 = 2/11$$

.

.

.

$$(103-101)/101 = 2/101$$

.

.

.

$$(433-431)/431 = 2/431$$

.

.

.

$$(3539-3533)/3533 = 6/3533$$

.

.

.

Как вы видите, значение выражения $\frac{P_{i+1}-P_i}{P_i}$ имеет тенденцию становиться все меньше и меньше по мере увеличения i (значение этого выражения не уменьшается монотонно; оно лишь проявляет общее снижение с ростом P), потому что при больших простых числах его числитель становится *много* меньше знаменателя. Это означает, что *разность* последовательных простых

чисел (чисел, стоящих в числителе) растет медленнее, чем значения самих этих чисел, что и приводит к уменьшению отношения. Хотя в первых строках списка есть некоторая нестабильность, если рассмотреть общую тенденцию, можно увидеть, что промежутки между простыми числами становятся все меньше по сравнению с самими этими числами.

Прямая дорога к докторской степени

Несмотря на многолетние исследования, аспектов простых чисел, которых мы *не* понимаем, все еще гораздо больше, чем понятных нам.

Вот лишь некоторые из (множества) задач, которые, насколько мне известно, до настоящего времени никто не решил. Может быть, вы захотите попытаться найти их решение. Могу вам гарантировать, что, если вы решите даже одну из них, вы немедленно получите докторскую степень по математике и прославитесь. А если вы еще учитесь в школе или университете, решение этих задач принесет вам полное освобождение от всех дальнейших уроков или лекций. Таковы хорошие новости.

Плохие же новости по-настоящему плохи. В том, что никому до сих пор не удалось решить эти задачи, нет ничего случайного. Они исключительно сложны! Трудно представить себе, сколько

усилий математики потратили на попытки их решить. «Бесплатных завтраков не бывает», — говорят нам наши экономисты. Я бы еще добавил к этому, что «не бывает и роскошных банкетов, которые обходились бы дешево».

Близнецы, тройняшки, кузены и сексуальные простые числа

Два простых числа считают близнецами, если их разность равна 2. Например, пары (3, 5), (5, 7), (11, 13), ..., (431, 433)... — это пары чисел-близнецов.

Бесконечно ли количество простых чисел-близнецов?

Из одного того, что количество простых чисел бесконечно, не следует, что ответ на этот вопрос должен быть утвердительным.

Триплеты простых чисел: мини-опрос

Перед вами триплет простых чисел³: (3, 5, 7). Докажите, что это единственная возможная «тройка близнецов».

Простые кузены

Пары простых чисел, разность которых равна 4, — например (3, 7), (7, 11), (19, 23), ..., (223, 227), — называют двоюродными простыми числами или кузенами. Бесконечно ли количество таких пар?

Сексуальные простые числа

Пары простых чисел, отличающихся на 6, называются по-английски *sexu primes*^{*}, то есть «сексуальными простыми числами». Ну и представления о сексуальности у этих математиков! Вот некоторые из победителей на конкурсе самых сексуальных пар: (5, 11), (7, 13), (11, 17), (17, 23), (23, 29), ..., (191, 197)...

Вы только посмотрите, какое тут царит распутство! Партнер числа 5, число 11, состоит в связи еще и с 17, а то заигрывает с 23, а оно изменяет ему с 29. Но число 29 хранит верность 23. Сколько тут сюжетных возможностей для поистине кошмарного любовного романа!

Конечно или бесконечно количество простых чисел-близнецов, простых кузенов или сексуальных пар, никто не знает.

Примечание для математиков: сходимость обратных значений простых чисел

Рассмотрим следующий ряд, состоящий только из простых чисел-близнецов:

$$(1/3 + 1/5) + (1/5 + 1/7) + (1/11 + 1/13) + \\ + \dots + (1/857 + 1/859) \dots$$

^{*} По совпадению латинского слова *sex* (шесть) со словом «секс» в современных языках. Заметим, что в латыни это слово, по-видимому, не имело никакого отношения к полу (*sexus*).

В 1915 г. норвежский математик Вигго Брун доказал теорему, которая стала знаменитой и носит теперь его имя. В этой теореме Брун показал, что приведенный выше ряд сходится, и его сумма равна приблизительно 1,9 (1,90216...).

Если бы этот ряд расходился, мы бы точно знали, что количество пар чисел-близнецов бесконечно. Однако тот факт, что он сходится, абсолютно ничего не говорит нам о конечности или бесконечности количества пар близнецов.

Если бы мы могли доказать, что сумма этого ряда не может быть выражена дробью — такие числа называются иррациональными, — это также решило бы задачу, так как означало бы, что существует бесконечно много пар простых чисел-близнецов (сумма конечного количества рациональных чисел всегда равна рациональному числу). Однако эта сумма рациональна, что опять же не проливает света на вопрос о бесконечности (или конечности) чисел-близнецов. Вскоре я расскажу нематематикам о рациональных и иррациональных числах.

Ряд для двоюродных простых чисел выглядит так:

$$(1/7 + 1/11) + (1/13 + 1/17) + (1/19 + 1/23) + \dots$$

Он сходится к сумме, приблизительно равной 1,197 (1,1970449...).

Устойчивые простые числа

Простое число называют устойчивым, если любая перестановка составляющих его цифр также дает простое число*. Например, простое число 199 стабильно, потому что числа 919 и 991 также являются простыми. 13 — тоже устойчивое простое число, так как оба числа 13 и 31 относятся к простым. Если запустить компьютерную программу по поиску устойчивых простых чисел, обнаружится, что после сравнительно небольшого количества чисел (последнее из которых — 991) устойчивыми, по-видимому, могут быть только простые числа, состоящие из одних лишь повторяющихся единиц. Первое из них — число 1 111 111 111 111 111 111.

И вот вам еще одна открытая проблема: существуют ли устойчивые простые числа, большие 991, но состоящие не только из единиц? Небольшая подсказка: устойчивое простое число может содержать только цифры 1, 3, 7 и 9. Вполне очевидно, что, если в числе содержится цифра 5, то одна из перестановок его цифр даст составное число.

Палиндромы

Палиндром — это текст, который читается одинаково в обе стороны. *I prefer pi*** — пример фразы-

* Такие числа также называют перестановочными, анаграмматическими или абсолютными простыми числами.

** Я предпочитаю π (англ.).

палиндрома. А есть ли палиндромы среди простых чисел? Есть. На самом деле их немало: 919, 101, 14741 — и множество других превосходных примеров (самое большое из доказанных простых чисел-палиндромов содержит почти полмиллиона знаков). Однако все еще не ясно, конечно или бесконечно их количество. Почему бы вам не наточить карандаши, не включить компьютер и не посмотреть, не сможете ли вы выяснить чего-нибудь по этому поводу.

Гипотеза Лежандра

Французский математик XVIII в. Адриен-Мари Лежандр (1752–1833) выдвинул гипотезу, что между n^2 и $(n + 1)^2$ всегда есть по меньшей мере одно простое число.

Рассмотрим случай $n = 2$. Между $2^2 = 4$ и $3^2 = 9$ мы находим простые числа 5 и 7. Многие математики интуитивно верят в справедливость этой гипотезы, но, как мы уже говорили, когда имеешь дело с математикой, нельзя полагаться на одну лишь интуицию.

Выше, в разделе под названием «Царство составных чисел», мы узнали, что можно найти сплошную последовательность составных чисел (в которой не будет ни одного простого числа) произвольной длины. Один из студентов, которых я учил, решил, что это обстоятельство противоре-

чит гипотезе Лежандра и, таким образом, доказывает ее ложность. Он ошибался. Последовательности составных чисел нельзя образовывать где попало. Как вы, должно быть, помните, последовательность из 100 чисел, которую мы рассматриваем, начиналась лишь со $100!$. А $100!$ — огромное число⁴, и в той области, в которой находится связанная с ним последовательность, промежутки между квадратами двух последовательных чисел тоже весьма велики, так что в них теоретически может найтись место по меньшей мере для одного простого числа. Заметим, что промежуток (то есть разность) между квадратом $100!$ и квадратом $(100! + 1)$ составляет:

$$\begin{aligned}(100! + 1)^2 - 100!^2 &= (100!^2 + 2 \times 100! + 1) - 100!^2 = \\ &= 2 \times 100! + 1.\end{aligned}$$

То есть и этот промежуток поистине колоссален!

На момент написания этой книги никто не доказал истинности или ложности гипотезы Лежандра.

ЖЕНЩИНЫ В МИРЕ МАТЕМАТИКИ

Те математики, с которыми мы знакомимся до сих пор, были по большей части мужчины. Разве в истории не было заметных женщин-математиков? Были. И еще какие!

На этом месте я ненадолго отвлекусь от простых чисел, чтобы рассказать вам о некоторых из известных женщин-математиков. Можно сказать, что двумя из величайших женщин, занимавшихся математикой, были русская математик Софья Ковалевская (1850–1891) и немецкая математик еврейского происхождения Эмми Нётер (1882–1935), преданная поклонница Эйнштейна.

Невозможно быть математиком, не будучи в душе поэтом.

Софья Ковалевская

Однако история женщин в математике началась гораздо раньше.

В ДРЕВНЕМ МИРЕ

Утверждается, что Феано из Кротона, жена Пифагора, была математиком и физиком, а также занималась медициной и психологией — то есть была настоящей женщиной Возрождения задолго до самого Возрождения. Дамо, дочь этого же первого исследователя чисел, тоже интересовалась математикой, была членом пифагорейской секты и, вероятно, внесла свой вклад по меньшей мере в некоторые из доктрин, которые приписывают ее отцу.

Самой знаменитой женщиной-математиком Древнего мира была, вне всякого сомнения, Гипатия Александрийская (родившаяся во второй половине IV в.). Ее отец, математик и философ Теон, решил вырастить из нее «совершенного человека»

и попытался сделать так, чтобы она усвоила все знания, накопленные человечеством к этому времени. Он передал ей всё, что знал сам, а кроме того, отправлял ее учиться в Афины и в Рим. Большинство ее биографов отмечают, что математическими талантами она превосходила отца.

Гипатия была женщиной поистине разносторонне одаренной. Будучи в Александрии, она изучала философию Платона и Аристотеля. При жизни она прославилась и в качестве астронома и написала книгу под внушительным названием «Астрономический канон», представлявшую собой набор таблиц, которые описывали движение небесных тел. Гипатия славилась и замечательной красотой, но, если верить ее биографам, так и не вышла замуж.

Гипатия была язычницей, и это не нравилось ее соседям-христианам. В 415 г. группа особенно фанатичных и буйных монахов обвинила Гипатию в религиозной крамоле. Напав на нее на городской площади, они жестоко пытали ее, а затем убили.

История Гипатии была столь драматичной, что появление биографического фильма о ней было лишь вопросом времени. За это дело взялся испанский режиссер Алехандро Аменабар, который и снял в 2009 г. фильм «Агора». Разумеется, в фильме не обошлось и без любовной истории.

СОФИ ЖЕРМЕН

Это подводит нас к фигуре Софи Жермен, которая была связана с миром простых чисел и мириадой его задач.

Софи Жермен родилась в Париже в 1776 г. (а умерла в 1831-м). Саймон Сингх писал в 1997 г. в книге «Великая теорема Ферма»^{*}, что в возрасте 13 лет Софи прочитала, что Архимед отказался оставить свою математическую работу даже под угрозой смерти, в результате чего и погиб от руки римского воина. Эта история произвела на Софи сильное впечатление: она решила, что математика должна быть предметом чрезвычайно интересным, раз изучение ее тайн способно увлекать до такой степени. Несомненно, ее так же сильно поразило бы известие о том, что Бертран Рассел трижды передумывал покончить с собой, чтобы узнать еще немного о математике.

Хотя Софи никогда официально не училась математике и не получила никакого ученого звания, она внесла значительный вклад в изучение математики, особенно в сферах дифференциальной геометрии и теории чисел. Одним из наиболее важных ее достижений в области теории чисел было уменьшение числа возможных решений уравнения Ферма. Софи Жермен победила в математическом конкурсе, организованном Французской академией наук, и стала первой женщиной, которой было позволено участвовать в семинарах академии. Ее именем названы улица и школа в Париже, не говоря уже о кратере на Венере: на этой планете есть кратер Жермен.

^{*} Русский перевод Ю. А. Данилова вышел в 2000 г. в издательстве МЦМНО.

Простые числа Софи Жермен

Вернемся теперь к простым числам и открытым проблемам.

Простое число p называется *числом Софи Жермен*, если $2p + 1$ — также простое число⁵. Вот несколько примеров простых чисел Жермен: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89... Например, число 5 входит в этот список, потому что $2 \times 5 + 1 = 11$, а 11 — простое число. А вот число 7 в него не входит, потому что $2 \times 7 + 1 = 15$ (а 15 — число составное).

Умудренный читатель, наверное, уже может догадаться, какую задачу до сих пор никому не удалось решить: бесконечно ли количество простых чисел Жермен? Да, на этот вопрос ответа нет. Однако можно придумать и несколько других интересных задач.

Подумайте, не торопитесь.

Цепочки Каннингема

Рассмотрим последовательность чисел 2, 5, 11, 23, 47. Число 2 — простое число Жермен. Умножив его на 2 и прибавив единицу, мы получим простое число 5, которое также относится к простым числам Жермен и приводит нас к 11, которое также относится к простым числам Жермен и приводит нас к 23, которое также относится к простым числам Жермен и приводит нас к 47. Тут, однако, эта

цепочка заканчивается, потому что $2 \times 47 + 1 = 95$, а это число составное. Таким образом, эта последовательность состоит из четырех чисел Жермен и еще одного простого числа.

Такого рода последовательности простых чисел Жермен называются цепочками Каннингема по имени британского военного и математика Алана Дж. Каннингема (1842–1928).

Вот еще несколько задач:

- Существуют ли более длинные цепочки? На самом деле да. Мой домашний компьютер совершенно обессилел, но сумел выдать следующий скромный пример цепочки из шести чисел: 89, 179, 359, 719, 1439, 2879.
- Существуют ли цепочки любой длины?
- Что будет, если заменить $2p + 1$ на $2p - 1$?
- Имеет ли смысл исследовать выражения $4p + 1$ или $4p - 1$?

Ха! Задавать-то сложные вопросы легко!

Загадка Гольдбаха, или Кто хочет стать миллионером?

В 1742 г. произошло несколько важных событий. Иоганн Себастьян Бах сочинил «Вариации Гольдберга» (нет почти ни одного настоящего математика, который бы не боготворил это произ-

ведение), поэт Эдуард Юнг написал «Ночные размышления о жизни, смерти и бессмертии», в Перу восстали индейцы. А 7 июня этого года почти никому не известный прусский математик Христиан Гольдбах написал письмо великому швейцарскому математику (с которым мы сталкиваемся снова и снова) Леонарду Эйлеру.

Эйлер и по нынешний день остается самым плодовитым математиком в истории — его наследие составляет около 80 томов трудов в разных областях математики. Наивысшим достижением Гольдбаха была служба учителем русского царя Петра II (внука Петра Великого). Хотя один из них был из Пруссии, а другой — из Швейцарии, и Эйлер, и Гольдбах работали в Санкт-Петербургской академии наук, основанной Петром Великим.

В письме к Эйлеру Гольдбах выдвинул гипотезу, известную теперь под названием «гипотеза Гольдбаха». Она представляет собой одну из самых старых и самых известных открытых проблем теории чисел, да и всей математики. Эта гипотеза утверждает, что любое четное целое число начиная с 4 может быть представлено в виде суммы двух простых чисел (так звучит современная формулировка гипотезы). Например, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$... Большие четные числа часто можно записать в виде суммы двух простых чисел не одним,

а несколькими способами. Например, $40 = 3 + 37 = 11 + 29 = 17 + 23$.

Рассмотрим число 1742, то есть номер года, в котором была выдвинута эта гипотеза. Попробуем, например, такой вариант: $1742 = 13 + 1729$.

Заметили ли вы, кстати говоря, что 1729 — это тот самый номер такси, на котором Харди приехал навестить больного Рамануджана? Так вот, сложение 1729 с несчастливым числом 13 дает 1742. Есть только одна крупная неувязка: 1729 (как вы уже должны знать) — число составное: $1729 = 19 \times 91$. Разумеется, мы с легкостью можем найти другие решения, например, $1742 = 19 + 1723$ или $1742 = 43 + 1699$... Проверьте, простые ли все эти числа! Вы также можете предложить свои собственные варианты разложения 1742 на два простых слагаемых.

При всем уважении к многочисленным открытым проблемам, касающимся простых чисел, о которых мы говорили до этого, гипотеза Гольдбаха, несомненно, самая знаменитая из них. Гипотеза о простых числах-близнецах занимает лишь второе место. Все же остальные задачи далеко отстают от этих двух по части известности и интереса, который они вызывают.

В 2000 г. была опубликована книга греческого математика-вундеркинда Апостолоса Доксиадиса «Дядя Петрос и проблема Гольдбаха». Издатель

Тоби Фабер предложил приз миллион долларов любому, кто решит задачу Гольдбаха в течение двух лет после выхода книги*. Это был настоящий шедевр маркетинга — максимальная шумиха при минимальном риске, — и действительно, претендентов на этот приз не нашлось. Так что теперь тому, кто решит эту задачу, придется удовольствоваться гораздо более скромным (хотя и гораздо более почетным) призом, который назначил Пал Эрдёш.

Решение задачи Гольдбаха, когда и если оно наконец будет найдено, может появиться с двух разных сторон: либо будет открыто четное число, которое невозможно представить в виде суммы двух простых чисел (что называется опровержением, или контрпримером), либо кто-нибудь обоснует причину, по которой все четные числа можно представить таким образом. Пока что было исследовано огромное множество четных чисел (до 10^{18}), и все они могут быть записаны в виде суммы двух простых чисел. Тем не менее это ничего не значит. Даже если мы про-

* Речь идет об английском издании. На греческом этот роман был опубликован в 1992 г.; в 2000-м вышел — и стал мировым бестселлером — английский перевод, выполненный самим автором, который также внес в него значительные изменения. Русский перевод М. Б. Левина был опубликован в 2002 г. издательством АСТ.

верим все до единого четные числа вплоть до $1\,000\,000\,000\,000\,000!$ (а это квадриллион *факториал*!) и выясним, что все они до единого могут быть представлены в виде суммы двух простых чисел, вполне может оказаться, что следующее же четное число, $1\,000\,000\,000\,000\,000! + 2$, станет первым исключением из действовавшего в наших результатах правила и опровергнет гипотезу.

Вариация Гольдбаха

В книге «Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда» Дуглас Хофштадтер предлагает рассмотреть следующую вариацию гипотезы Гольдбаха: можно ли представить любое четное число в виде *разности* двух простых чисел? Интересно, нельзя ли назвать эту гипотезу «вариацией Гольдбаха — Гольдберга»?

Начнем с начала: $2 = 5 - 3$, $4 = 7 - 3$, $6 = 11 - 5$, $8 = 11 - 3$. Разумеется, для некоторых чисел существует несколько вариантов: $10 = (41 - 31) = (29 - 19) = (23 - 13) = (17 - 7) = (13 - 3)$.

Несмотря на ярко выраженное сходство этих двух задач, между ними есть фундаментальное различие. Рассматривая исходный вариант гипотезы Гольдбаха, мы можем запустить для любого четного числа компьютерную программу, которая проверит, дает ли это значение сумма двух про-

стых чисел, причем сделает это за конечное время. Даже если такое число очень велико, мы можем быть уверены, что к какому-то моменту программа завершит работу — даже если мы сами до этого момента и не доживем. Во втором же варианте нет никакой гарантии, что компьютер когда-либо закончит свои вычисления. Возьмем произвольное число — скажем, 2010. Абсолютно невозможно определить заранее, когда компьютер закончит вычисления (и закончит ли их когда-либо), потому что, даже если мы проверим все до единого простые числа, скажем, до 12 345 678 910 и не найдем пары простых чисел, разность которых равна 2010, это не значит, что мы не найдем такой пары в будущем. Я использовал здесь число 2010 только для иллюстрации этой идеи. На самом деле компьютеру не составит особого труда выяснить, что число 2010 может быть выражено в виде разности двух простых чисел, например $2017 - 7$, $2029 - 19$, $2039 - 29$ и других. Во всяком случае, эта задача радикально отличается от проверки возможности выражения числа 2010 в виде суммы двух простых чисел (что, как вы уже знаете, возможно: самый простой из нескольких существующих вариантов — $2003 + 7$).

Различие состоит в следующем: при поиске ответа в отношении суммы существует конечное число возможностей: нужно лишь проверить

все простые числа, меньшие самого искомого числа. В случае 2010 необходимо исследовать только лишь все простые числа до 2007 (самого большого простого числа до 2010). Даже если бы мы взяли не 2010, а 2010!, это число все равно было бы конечным, и программа в конце концов пришла бы к тому или иному выводу, проработав в течение конечного времени (более долгого, чем кажется, но тем не менее конечного).

Когда же мы ищем ответ в отношении разности, количество чисел, больших заданного числа, бесконечно. Следовательно, количество разностей, которые, возможно, придется проверить, не ограничено, и может случиться так, что этот процесс не завершится никогда.

Харди хвалит Ферма

Пьер де Ферма (1607–1665) открыл одно интересное обстоятельство, связанное с простыми числами; оно называется «рождественской теоремой Ферма»*. Он показал, что любое простое число вида $4n + 1$ (например, 5, 13, 17, 29...) есть сумма

* Это название связано с тем, что Ферма впервые сформулировал эту теорему в письме к Мерсенну от 25 декабря 1640 г. Однако доказательства теоремы он не привел; ее первое доказательство было получено Эйлером и изложено им в письмах к Гольдбаху в 1747 и 1749 гг.

двух квадратов, а любое простое число вида $4n - 1$ (например, 3, 7, 11, 19...) не может быть представлено в виде суммы двух квадратов. Каждое простое число, кроме 2, — либо число вида $4n + 1$, либо число вида $4n - 1$ (докажите это утверждение самостоятельно). Например, 41 — простое число вида $4n + 1$ ($4 \times 10 + 1$), и его можно представить в виде суммы двух квадратов ($5^2 + 4^2$). А вот 19 — простое число второго вида ($4 \times 5 - 1$), и его невозможно представить в виде суммы двух квадратов. Хотя показать, что, например, число 19 не является суммой двух квадратов, легко, доказать рождественскую теорему Ферма в общем случае не так-то просто.

В книге «Апология математика» Г. Г. Харди приходит к заключению, что упомянутое открытие Ферма — пример «изящной математики» и красивейшая из математических теорем наравне с евклидовым доказательством бесконечности простых чисел.

Что же, раз мы заговорили о «заключениях», нам пора заключить этот раздел о тайной жизни простых чисел и отправиться в (безграничный) мир бесконечности.

Математика, если взглянуть на нее с правильной точки зрения, обладает не только истиной, но и совершенной красотой — красотой холодной и суровой, как красота скульптуры, не потакающей

нашим слабостям, лишенной роскошных приманок живописи или музыки, и все же безукоризненно чистой и способной на строгое совершенство, доступное лишь величайшему искусству*.

Бертран Рассел

* Из эссе «Изучение математики» (The Study of Mathematics, 1919).

ВЕЛИКОЕ ОТКРЫТИЕ ПИФАГОРА

Математическая теория бесконечности, как и почти все остальное в западной цивилизации, уходит корнями в Древнюю Грецию. Интересно отметить, что греческое слово *ἄπειρον* (*апейрон*), обозначающее бесконечность, имеет два значения. Одно из них — нечто неограниченное; второе имеет скорее отрицательный смысл — «нечто неопределенное». Понятие бесконечности впервые ввел в философию Анаксимандр, философ и астроном, ученик Фалеса и учитель Пифагора, живший в VI в. до н. э. В космологии Анаксимандра бесконечность считалась одной из основ мироздания, своего рода неограниченным, неопределенным материалом, который служит основой всего сущего. Некоторые из исследователей досократовской философии видят в Анаксимандре первого метафизика, который включил в греческую философию абстрактную концепцию бога.

Какое бы значение слова «апейрон» мы ни взяли, в мире Пифагора ему не было места. Как вы, разумеется, помните, Пифагор был убежден, что мир со-

стоит из чисел, и все в нем может быть сведено к представлению, построенному при помощи натуральных, то есть положительных целых, чисел. По сути дела, натуральные числа были атомами Пифагора.

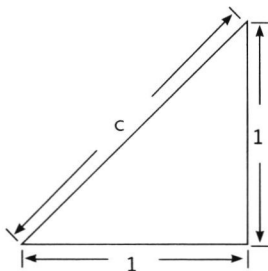
И ошибочность этого убеждения открыл не кто иной, как сам Пифагор.

Иррациональное число!!!

Есть некая ирония в том, что препятствие на пути рассуждений Пифагора о том, что все на свете в конечном счете может быть выражено при помощи чисел, явилось, каким бы невероятным это ни показалось, именно из геометрии — когда сам Пифагор обнаружил, что соотношение между стороной квадрата и его диагональю невозможно выразить отношением натуральных чисел.

Сейчас объясню.

Начнем с квадрата, стороны которого имеют единичную длину. Обозначим длину его диагонали c :



Вот что говорит теорема, прославившая Пифагора: квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон.

В приложении к нашему чертежу это означает, что $1^2 + 1^2 = c^2$, а следовательно, $c = \sqrt{2}$.

Отметим, что $\sqrt{2}$ — всего лишь символ, обозначающий число, которое, будучи умножено само на себя, дает число 2. Теоретически мы могли бы нарисовать цветок и сказать, что он обозначает число, квадрат которого равен 2. Очевидно, не существует такого целого числа, квадрат которого был бы равен 2 (поскольку 1 в квадрате равно 1, 2 в квадрате равно 4, а других целых чисел между 1 и 2 нет).

Но может ли существовать некая дробь a/b , такая, что при возведении ее в квадрат получается 2? Здесь я напомним вам, что числа вида a/b , где a — целое число (которое может быть и нулем), а b — натуральное (то есть положительное целое) число, называются рациональными числами. Пифагор, несомненно, был бы очень рад, если бы такая дробь существовала, потому что это отлично согласовывалось бы с его философским воззрением, что все на свете может быть представлено натуральными числами.

Однако Пифагора ожидали чрезвычайно неприятные новости!

Сейчас мы докажем, что $\sqrt{2}$ никак не может быть выражен дробью вида a/b , где оба числа a и b — натуральные. Другими словами, мы докажем, что $\sqrt{2}$ — число не рациональное.

Для этого мы воспользуемся методом доказательства от противного, с которым мы уже встречались в этой книге. Другими словами, сначала мы предположим, что утверждение, которое мы хотим доказать, ложно, то есть что существуют такие два числа a и b , что $a/b = \sqrt{2}$. Затем мы покажем, что логические следствия из этого предположения приводят к противоречию.

Начнем наше доказательство с предположения, что a/b — приведенная дробь*, то есть дробь, записанная с наименьшим возможным знаменателем (так, например, дроби $21/14$ и $15/10$ могут быть сведены к дроби $3/2$). Чтобы доказать, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число, достаточно показать, что не существует приведенной дроби, равной квадратному корню из 2. Такое дополнительное предположение относительно этой дроби пригодится нам для доказательства. Это предположение допустимо, потому что записать в приведенном виде можно любую дробь; следовательно, если не существует *приведенной* дроби, равной $\sqrt{2}$, то это озна-

* Еще такую дробь называют несократимой. — *Примеч. ред.*

чает, что не существует и вообще никакой дроби, которая была бы равна $\sqrt{2}$.

Итак, возьмем приведенную дробь a/b и предположим, что $a/b = \sqrt{2}$. Небольшое преобразование дает нам $\sqrt{2} \cdot b = a$, а после возведения обеих частей этого равенства в квадрат мы получим $2b^2 = a^2$. Из этого явно следует, что a^2 — четное число, что означает, что и число a должно быть четным. Следовательно, в предыдущем равенстве мы можем произвести подстановку $a = 2k$ и получим:

$$2b^2 = (2k)^2;$$

$$2b^2 = 4k^2;$$

$$b^2 = 2k^2.$$

Мы видим, что b^2 — четное число, что означает, что и число b должно быть четным.

Однако если оба числа a и b — четные, дробь a/b не может быть приведенной, потому что и числитель, и знаменатель можно разделить на 2. Следовательно, мы получили противоречие с предыдущим предположением о том, что мы начали с приведенной дроби. Другими словами, мы только что доказали, что $\sqrt{2}$ не может быть отношением двух целых чисел. Вывод: $\sqrt{2}$ должен быть числом иррациональным.

Ч. т. д.

Но каково значение того утверждения, которое мы только что доказали?

С точки зрения геометрии оно означает следующее: мы легко можем построить прямоугольный треугольник с катетами единичной длины и столь же легко построить его гипотенузу, но не можем точно определить длину этой гипотенузы относительно длин двух других сторон треугольника за конечное число шагов.

Столь простая геометрическая концепция — гипотенуза треугольника — опровергает основополагающий принцип философии Пифагора, который утверждает, что всё образовано из *натуральных* чисел. Легко вообразить, что вместе с радостью открытия Пифагор ощутил сильнейшее разочарование.

Мы можем пойти и другим путем — использовать калькулятор. Введите $\sqrt{2}$ и посмотрите, что из этого получится. Я получил число 1,4142136. Попробуйте умножить это число в столбик само на себя. Если это число — *точное* значение квадратного корня из 2, то результат его умножения само на себя должен быть *точно* равен 2. Но это не так! Если хотите, проверьте сами. Дело в том, что мы не получаем ровно 2, потому что калькулятор выдает лишь *приближенное* значение $\sqrt{2}$. Даже если купить самый лучший, самый совершенный калькулятор, выдающий больше десятичных знаков после запятой, результат все равно будет лишь

приближением к $\sqrt{2}$, но никогда — *точным* значением $\sqrt{2}$.

Взяв вместо калькулятора компьютер, я получаю следующий результат:

1,41421356237309504880168872420969807.

Если вам нужно невероятно скучное занятие на дождливый вечер, попробуйте самостоятельно умножить это число само на себя и проверить, получится ли 2. Не получится. Вы снова получите некий результат, близкий к 2, но не равный 2.

А теперь объяснения

Вот удобный способ понять, что такое иррациональное число: когда мы пишем, что $\sqrt{2}$ равен 1,4142135... очень трудно объяснить, что обозначает это многоточие в конце. Иррациональность числа подразумевает, что 1) его десятичное представление бесконечно, и 2) в нем никогда не возникают какие бы то ни было повторяющиеся структуры.

Если число десятичных знаков после запятой конечно, такое число явно рационально — то есть вполне может быть выражено в виде дроби a/b . Например, $0,174271 = 174271 / 1\,000\,000$.

Число, имеющее бесконечное десятичное представление с повторяющейся структурой также рационально, хотя понять это может быть

немного труднее. Например, рассмотрим число $r = 0,123123123123\dots$. В этом числе имеется простая повторяющаяся структура, и легко доказать, что это число рационально, то есть может быть представлено в виде a/b .

Умножим число r на 1000 (число 1000 было выбрано в связи с длиной повторяющейся структуры) и вычтем из результата r :

$$\begin{aligned} 1000r - r &= 999r = \\ &= 123,123123123\dots - 0,123123123\dots = 123. \end{aligned}$$

Следовательно, $r = 123/999$, что можно сократить до $41/333$, а это явное отношение двух целых чисел, и, если вы разделите в столбик 41 на 333, вы сможете убедиться, что эта дробь действительно равна $0,123123123\dots$

Однако проделать тот же фокус с $\sqrt{2}$ нельзя, потому что десятичное представление этого числа бесконечно и не повторяется. Мы можем найти дроби, очень близкие к $\sqrt{2}$, — например $577/408$. Они дают весьма хорошее приближение, но и только — всего лишь *приближение*. Интересно отметить, что сам Пифагор отказывался считать $\sqrt{2}$ числом. Многие упрекали — и до сих пор упрекают — его за это; на мой взгляд, безосновательно.

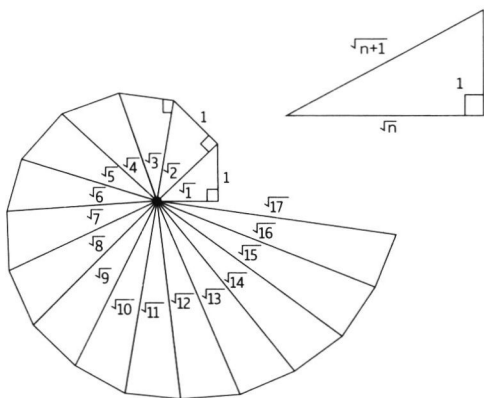
Важно помнить, что $\sqrt{2}$ — всего лишь символ числа, которое при умножении само на себя дает 2.

Как я уже говорил, можно было выбрать символом этого числа не $\sqrt{2}$, а цветок, и сказать, что этот цветок обозначает число, при возведении которого в квадрат получается 2. Отличается ли общепринятый математический символ от цветка? Может быть, нам следовало бы начать использовать в математике побольше цветов — тогда она стала бы гораздо более веселой.

Единственное различие между общепринятым символом и нашим цветком состоит в том, что цветок менее удобно использовать. На самом деле нас вообще не интересуют символы: мы хотим записать число, квадрат которого равен 2. Но оказывается, что сделать этого мы не можем: сколько бы цифр после запятой мы не выписали, их никогда не будет достаточно. Нам нужно выписать бесконечно много цифр, а этого не случится никогда.

Феодор (465–398 до н. э.), родившийся лет через тридцать после смерти Пифагора и бывший личным учителем математики у Платона, доказал, что квадратные корни из 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 и 17 также равны иррациональным числам. Платон восхищался Феодором и даже упомянул его открытие иррациональности квадратных корней в диалоге «Теэтет»¹. Мнения о том, почему он остановился на 17, разнятся. В диалоге Теэтет просто говорит Сократу, что Феодор остановился

на этом числе. Популярная версия утверждает, что Феодор строил из треугольников спиральную конструкцию, которая носит сегодня его имя. Если вы продолжите это построение, то сразу же увидите, почему его последовательность прекратилась именно на этом числе. Вот спираль Феодора:



Головоломка

Докажите, что квадратный корень из 3 — иррациональное число.

Попробуйте доказать, что квадратный корень из любого целого числа может быть только либо целым, либо иррациональным числом. Другими словами, квадратный корень из любого целого числа, кроме полного квадрата — 4, 9, 16, 25 и так далее, — всегда иррационален.

Ну хорошо. Когда Пифагор решил, что на свете не существует числа, квадрат которого равен 2, он слегка преувеличивал. На свете *есть* число, квадрат которого равен 2, и число это иррационально. Сегодня математики умеют обращаться с такими числами без особых затруднений — даже несмотря на то, что мы не можем записать их полностью. Честь основания математической теории иррациональных чисел в первую очередь следует приписать трем математикам — Рихарду Дедекинду (1831–1916), Карлу Вейерштрассу (1815–1897) и Георгу Кантору (1845–1918). Не следует полагать, что работать с такими числами легко и просто. Подумайте, например, как сложить $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ — притом что оба эти числа имеют бесконечное десятичное представление.

В самом деле, как сложить 1,414213562373095 04880168872420969807... и 1,7320508075688772 9352744634150587236...?

Фундаментальные правила сложения, которым нас научили еще в школе, гласят, что начинать надо со сложения самых правых цифр. Но здесь мы не можем найти самые правые цифры — десятичное представление этих чисел бесконечно! Что же делать? Я же говорил вам, что не следует насмехаться над Пифагором из-за того, что он не желал считать иррациональные числа числами.

Многие считают сделанное Пифагором открытие иррациональных чисел самым важным открытием во всей истории математики².

Легенда утверждает, что Пифагор велел своим ученикам хранить его открытие иррациональности длины диагонали квадрата относительно длин его сторон в секрете. Однако один из них, Гиппас, нарушил данное ему обещание (неизвестно, по каким причинам — научным или политическим) и разгласил эту тайну. Далее легенда рассказывает, что Гиппас был изгнан из сообщества пифагорейцев, а кое-кто утверждает даже, что его утопили в море (он попросту не вернулся из одного из своих плаваний вокруг греческих островов). По другой версии, иррациональные числа открыл именно Гиппас, а Пифагор не имел к этому открытию никакого отношения.

Более чем через две тысячи лет после смерти Пифагора Кантор показал, что «почти» все вещественные числа иррациональны. В число таких чисел входят и два из самых важных чисел в математике — число Эйлера e и отношение длины окружности к ее диаметру, число π .

Комментарий и пять упражнений

Я обещал, что буду использовать в этой книге только четыре базовые математические операции. Но кому

нужен такой «закон», который нельзя нарушить хотя бы один раз? Вот сейчас мы его и нарушим.

Числа, доказать иррациональность которых легче всего, порождаются операцией логарифмирования³. Например, рассмотрим $\log_2 3$, то есть логарифм 3 по основанию 2. Докажем его иррациональность. Для начала предположим, что этому числу равно отношение m/n :

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}.$$

Исходя из определения логарифма и законов операций со степенями, из этого следует, что $2^{m/n} = 3$, а $(2^{m/n})^n = 3^n$, а следовательно, $2^m = 3^n$.

Однако никакая степень 2 не может быть равна какой бы то ни было степени 3*: 2 в любой степени всегда дает четное число, а 3 в любой степени — нечетное. Значит, мы пришли к противоречию. Другими словами, не существует таких чисел m и n , для которых

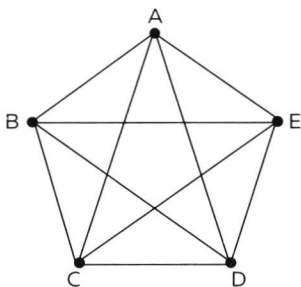
$$\log_2 3 = \frac{m}{n},$$

что означает, что m/n не может быть рациональным. Следовательно, $\log_2 3$ — иррациональное число.

* Напомним, что речь идет о степенях, являющихся натуральными числами. — *Примеч. ред.*

Пять головоломок

1. Докажите, что золотое сечение⁴ ϕ^* — иррациональное число.
2. Символом секты пифагорейцев была пентаграмма, вписанная в пятиугольник.



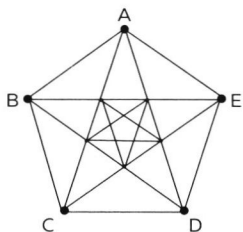
Докажите, что отношение длины диагонали правильного пятиугольника к длине одной из его сторон иррационально. Покажите также, что это отношение равно не *произвольному* иррациональному числу, а числу ϕ (см. предыдущую задачу). Другими словами, отношение любой диагонали этой фигуры к любой ее стороне равно золотому сечению!

$$\frac{AC}{AB} = \phi$$

* В русской математической литературе это число чаще обозначают прописной буквой Φ , а строчной буквой ϕ — число, обратное ему, т. е. $1/\Phi$.

Как же повезло Пифагору, что он так и не узнал, что эти нахальные иррациональные числа, которые он не желал считать равноправными членами семейства чисел, скрывались даже в его собственной эмблеме!

Пифагорейский символ можно дополнить следующим образом:



И такие «дополнения» можно продолжать до бесконечности!

1. Рационально ли число $0,07007000700007\dots$?
2. Рационально ли число $0,123456789101112\dots$?
3. А как насчет числа $0,01123581321345589144\dots$, образованного из членов последовательности Фибоначчи — 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... (эта последовательность начинается с 0 и 1, после чего каждый следующий член равен сумме двух предыдущих)?

ЧЕРЕПАХА, АХИЛЛЕС И СТРЕЛА: АПОРИИ ЗЕНОНА

Страх бесконечности, присущий древним грекам, замечательно выражается в знаменитых апориях* Зенона Элейского, родившегося около 490 г. до н. э. Он в основном работал в Греции** около 450 г. до н. э. О жизни Зенона известно мало. По-видимому, он провел большую ее часть на родине, в городе Элее, хотя Платон рассказывает нам в диалоге «Парменид» об интереснейшей встрече в Афинах, на которой присутствовали Зенон, Парменид и молодой Сократ.

* Апория (греч. ἀπορία) — вымышленная, логически непротиворечивая ситуация, которая не может существовать в реальности. Построения Зенона принято называть по-русски именно апориями, а не парадоксами.

** Уточним, что речь идет не о Греции в современных границах, а о всем комплексе городов и колоний греческой культуры, которые существовали в Античности в разных районах Средиземноморья, от Малой Азии до Прованса. В частности, город Элея находился в нынешней Кампании на юге Италии, километрах в ста от Неаполя.

Первоисточник Зенона не сохранился, и исследователи по большей части ссылаются на Аристотеля, который пересказывает апории Зенона в своей «Физике».

Зенон создавал свои апории на основе философии своего учителя и друга Парменида. Поэтому, прежде чем мы перейдем собственно к апориям Зенона, давайте узнаем кое-что о Пармениде и его необычной философии.

Взгляды Парменида на жизнь

Парменид, учитель и друг Зенона (Платон намекал даже, что Зенон с Парменидом были любовниками*), считается явлением исключительным не только в греческой философии, но и во всей истории западной философии. Единственная известная работа Парменида «О природе», написанная в форме поэмы, дошла до нас лишь в отрывках. Парменид описывает два взгляда на реальность: «путь истины» и «путь чувств». Говоря о «пути истины», он объясняет, что реальность безвременна, однородна, бесконечно плотна и неизменна. Говоря о «пути чувств», он объясняет мир кажущегося и мнений, ложный и обманчивый. Жизненная философия Парменида состояла в том, что мир чувств — всего лишь иллюзия,

* Об этом пишет и Диоген Лаэртский (IX, 5).

а истинная Вселенная, которую можно познать только путем строгих размышлений, безмолвна и неподвижна. Он утверждал, что истинная Вселенная находится сейчас точно в том же состоянии, в котором она находилась секунду назад, год назад, миллиард лет назад, — и пребудет в нем же вовеки.

Что??? Это утверждение кажется несусветным даже для греческого философа.

Вот в чем заключалась суть его философии и каким образом он к ней пришел.

Парменид искал истины столь очевидной, что любые сомнения относительно ее справедливости были бы невозможны. Он хотел положить такую несомненную истину в основу всей своей философии. В математике такая истина называется аксиомой. Проведя много дней в утомительных размышлениях, Парменид заснул, и во сне ему явилась Афина — богиня мудрости, дочь Зевса и покровительница города Афин, — которая и помогла ему найти то, что он искал: *То, что есть, есть, а того, чего нет, нет.*

То есть Парменид утверждает, что существующее есть, а несуществующего нет. Это утверждение кажется очевидным и неопасным. Вы уверены? Тогда читайте дальше.

Вооружившись этой аксиомой, Парменид сформулировал несколько новых истин (на языке ма-

тематики они называются теоремами). Сперва он предложил **Первую теорему Парменида**:

Существующее (то, что есть) не могло быть
создано и не может исчезнуть.

Эта теорема доказывается почти мгновенно. В математике мы называем этот метод (как уже было упомянуто в другом месте) «доказательством от противного»: мы предполагаем, что справедливо обратное утверждение — что «то, что существует» когда-то было создано, — и проверяем, приводит ли это к логическому противоречию. Если приводит, это означает, что исходное предположение было неверным.

Если «то, что существует» было создано, оно должно было быть создано из чего-то, либо из того «что есть», либо из того «чего нет». Ничто не может быть создано из того «чего нет», потому что там ничего нет. Но, если «то, что существует» было создано из чего-то «что есть», это значит, что «то, что существует» уже существовало. Следовательно, «то, что существует» никогда не было создано.

Ч. т. д.

Предлагаю хитроумному читателю самостоятельно доказать аналогичным образом, что «то, что существует», никогда не может исчезнуть.

Затем философ доказал свою **Вторую теорему Парменида**:

Все существующее равномерно
и бесконечно плотно.

Доказательство этого утверждения тоже поразительно просто. То, что существует, должно быть бесконечно плотным, потому что, если это не так, значит, оно содержит по меньшей мере некоторое количество «того, что не существует». Но «того, что не существует» не существует. Мнение Парменида, что «того, чего нет» нет, многократно истолковывалось в смысле отрицания пустоты. Пустота — это «то, чего нет», а следовательно, ее не существует.

Аналогичным образом все то, что существует, должно быть равномерное плотным, потому что, если есть нечто, что существует и обладает меньшей плотностью, это значит, что в нем больше «того, что не существует». Но «того, что не существует» не существует!

Опять же ч. т. д.

Вам уже кажется, что происходит нечто странное? То ли еще будет!

Великая теорема Парменида: Движение есть иллюзия

Доказательство этого утверждения совершенно очевидно: если все бесконечно плотно, как может быть возможно движение?

Тот факт, что мало кто отрицает существование движения, Парменида совершенно не заботил. Его

не интересовал мир чувств и мнений, в котором существует возможность ошибки. В его мире истины (мире аксиом и теорем) все неподвижно, ничто не создается и ничто не исчезает.

Апория № 1. Дихотомия, или Иллюзия движения

Вернемся к Зенону. В той единственной книге, которую он, по-видимому, написал, он пытался защищать философию своего наставника. В частности, он хотел подкрепить утверждение Парменида относительно невозможности движения — утверждение, за которое Парменида больше всего критиковали, если не сказать высмеивали. И действительно, верить, что движения не существует, — занятие очень странное.

Защищая своего учителя, Зенон изложил свои знаменитые апории, которые увлекают бесчисленных математиков и философов вот уже более двух тысяч лет. В число тех, кто всерьез размышлял над ними, пытаясь понять, входят Аристотель, Маймонид, Декарт, Лейбниц, Спиноза, Бергсон, Рассел, Льюис Кэрролл, Кафка, Сартр, Гегель и Ленин (который прочитал об апориях в книге Гегеля и написал в своих «Философских тетрадах», что они совсем неплохи) — а также многие, многие другие.

Что же это за апории?

Первая апория называется «Дихотомия», и в ней Зенон демонстрирует невозможность движения при помощи чрезвычайно рационального и логичного объяснения.

Посмотрите на приведенный ниже чертеж. Зенон утверждает, что, чтобы попасть из точки A в точку B , необходимо пройти расположенную посередине между ними точку C .



Но, чтобы попасть из C в B , необходимо сначала пройти половину расстояния между ними и добраться до точки D . Однако и попав в эту точку, особо радоваться не следует, так как, чтобы добраться из нее до точки B , теперь необходимо сначала преодолеть половину оставшегося расстояния и попасть в точку E . И так далее и так далее.

Вот рассуждение Зенона: «Невозможно пройти бесконечное число точек за конечное время. Следовательно, попасть из точки A в точку B вообще невозможно». Наконец-то мы понимаем, как решить задачу, в которой спрашивается «сколько времени понадобится поезду, чтобы прибыть в одну точку, после того, как он выйдет из другой точки?». Правильный ответ — этот поезд никогда никуда не придет. А поскольку точки A и B выбраны совершенно

произвольно, отсюда следует, что переместиться из любого места в любое другое также невозможно. Следовательно, невозможно и движение.

Во множестве книг излагается разрешение этого противоречия. Рассуждение движется (Зенон резко возражал бы против использования слова «движется») более или менее по следующему пути: предположим, что время, необходимое для преодоления определенного расстояния, пропорционально его величине. Тогда мы можем доказать, что Зенон был неправ, потому что все бесконечные «половинные расстояния» (которые становятся все меньше и меньше) можно преодолеть за конечное время. Например, если предположить, что перемещение из точки A в точку C занимает в точности одну единицу времени — скажем, минуту, — то перемещение из точки C в точку D займет полминуты (поскольку это расстояние равно половине предыдущего), из точки D в точку E — четверть минуты и так далее. Обозначим суммарное время, требуемое для перемещения из A в B , буквой S :

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Разделив обе части на 2, получим:

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Вычтем второе равенство из первого:

$$S - \frac{1}{2}S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}S = 1, \text{ а } S = 2.$$

Другими словами, преодоление бесконечного числа серединных точек между A и B займет ровно две минуты.

Честно говоря, этот ответ не так уж и удивителен. Мы начали с предположения, что одну минуту занимает перемещение от A до C , то есть ровно на половину суммарного расстояния; поэтому никого не должно удивлять, что все это расстояние преодолевается за две минуты.

Зенон, несомненно, возражал бы против такого решения самым энергичным образом, потому что мы получили его, предположив именно то, что нужно было доказать. Когда мы сказали «если предположить, что перемещение из точки A в точку C занимает одну минуту», мы уже предположили, что движение возможно и из точки A можно переместиться в точку C . Однако именно это положение и нужно доказать, и, следовательно, наши рассуждения образуют так называемый порочный круг.

Зенон, вероятно, пояснил бы свою точку зрения, сказав что-нибудь вроде: «Как и на каком основании вы *предполагаете*, что из точки A можно попасть в точку C ? Мне совершенно очевидно, что вы совершаете гигантскую ошибку. Ясно, как солнце летним днем на прекрасном греческом острове, что, прежде чем попасть из точки A в точку C , необходимо преодолеть половину расстояния между ними и достичь точки X . После этого нужно преодолеть половину оставшегося расстояния до C и добраться до точки Y и так далее и так далее.

Вы, разумеется, понимаете, что за конечное время невозможно пройти бесконечное число серединных точек. Следовательно, в противоречии с тем, что вы только что сказали, невозможно и переместиться из точки A в точку C . Я надеюсь, вы сознаете, что так же невозможно и переместиться из точки A в точку X , потому что и в этом случае нужно сначала преодолеть половину расстояния — и все такое прочее. На самом деле из какой бы то ни было точки вообще невозможно переместиться в какую бы то ни было другую точку. Другими словами, невозможно даже начать какое бы то ни было движение».

Похоже, Зенон победил в этом споре? Не так ли?

Как вы думаете?

Апория № 2. Пята Ахиллеса и крадущаяся черепаха

Вторая апория Зенона, кажется, наиболее знаменита. В ней утверждается, что если Ахиллес, прославленный легконогий герой Троянской войны, побежит наперегонки с черепахой, не отличающейся особой стремительностью, что свойственно всем черепахам, причем у черепахи будет на старте хоть какая-нибудь фора (даже самая микроскопическая), то Ахиллес никогда не сумеет догнать черепаху. Вам это кажется нелогичным? Дадим слово любимому ученику Парменида — пусть он сам изложит свои доводы.

Зенон объясняет это так: «Как только Ахиллес добежит до той точки, с которой начала гонку черепаха, он обнаружит, что той уже там нет. Черепаха действительно уползла недалеко, но это несущественно: Ахиллес все равно остается позади».

Затем нужно всего лишь повторять то же рассуждение снова и снова. Каждый раз, когда Ахиллес добирается до той точки, в которой раньше была черепаха, он видит, что черепаха уползла еще дальше. Черепаха движется вперед с черепашьей скоростью, но Ахиллесу так и не удастся ее догнать.

Мне кажется, тут имеет смысл задержаться на секунду (или даже две) и обдумать доводы Зенона.

Предположим, что состязание проводится на дистанции 100 метров. Предположим также, что

скорость Ахиллеса равна 10 метрам в секунду (в конце концов, он же знаменитый спортсмен и воин, не так ли?), а черепаха ползет вперед со скоростью 1 метр в секунду (что не так уж и плохо для черепахи). Чтобы состязание было более справедливым, черепахе дается фора 10 метров.

Вполне ясно, что Ахиллес победит в этом забеге, причем без труда. Наш герой пролетит эти 100 метров за поразительно короткое время — всего 10 секунд. Черепахе нужно преодолеть лишь 90 метров, но, поскольку на прохождение каждого метра у нее уходит целая секунда, в конце дистанции она окажется лишь через 90 секунд. Итак, Ахиллес первым приходит к финишу, получает лавровый венок, кланяется собравшимся болельщикам и чрезвычайно терпеливо ждет, пока финиширует его соперник. Черепаха, истекающая потом и чуть не валяющаяся с ног, прибывает через целых 80 секунд после финиша Ахиллеса.

Все это кажется абсолютно очевидным. Но Зенон смотрел на эту историю совершенно по-иному. Вот рассуждения Зенона.

Как только Ахиллес добегают до 10-метровой отметки, с которой стартовала черепаха, он обнаруживает, что черепахи там уже нет, потому что ей удалось уковылять на один метр вперед, и теперь она находится на 11-метровой отметке. Расстояние между соперниками сократилось от 10 метров

до всего лишь одного, но черепаха по-прежнему впереди.

Когда Ахиллес оказывается на 11-метровой отметке, он снова видит, что и там черепаха его не ждет. За то время, пока Ахиллес бежал от 10-метровой отметки до 11-метровой, черепаха продвинулась вперед еще на 10 сантиметров. Черепаха «бежит» со скоростью, равной одной десятой скорости Ахиллеса; поэтому за то время, за которое Ахиллес покрывает расстояние x , черепаха преодолевает расстояние, равное $x/10$.

Вот таблица, иллюстрирующая продвижение наших двух «спортсменов»:

Черепаха	Ахиллес
10	0
11	10
11,1	11
11,11	11,1
11,111	11,11

Из этой таблицы мы видим, что расстояние между Ахиллесом и черепахой постоянно уменьшается, но черепаха все время сохраняет некоторое преимущество. Более того, как мы видим, Ахиллес не только никогда не сможет догнать черепаху, но и никогда не доберется до 12-метровой отметки. «Что за чушь! — скажете вы. — Всего через две секунды после начала забега Ахиллес окажется

в 20 метрах от старта и, несомненно, будет бежать впереди черепахи». Это кажется абсолютно очевидным. Тем не менее дадим Зенону возможность объясниться.

АПОЛОГИЯ ЗЕНОНА

Послушайте, я боюсь, что вы совершенно не поняли того, что я тут пытался объяснить. Я предложил вам весьма убедительное рассуждение, доказывающее, что Ахиллес никогда не сможет догнать черепаху, если этому пресмыкающемуся дадут на старте забега хоть малейшую фору. Вы что, хотите сказать мне, что через две секунды Ахиллес окажется в 20 метрах от линии старта и будет опережать черепаху, которая будет находиться всего в 12 метрах от старта, на 8 метров?

Во-первых, я не просил никаких объяснений. Я только предложил вам найти ошибку в моем рассуждении. Вы же занялись совершенно не этим.

Во-вторых, хотя вы вели себя не лучшим образом, я все же предлагаю объединить два рассуждения — мое и ваше. Единственный возможный вывод, не противоречащий всем утверждениям, высказанным до сих пор, состоит в том, что две секунды никогда не пройдут. И у меня есть неопровержимое доказательство этого положения.

Видите ли, чтобы эти две секунды прошли, сначала должна пройти половина этого времени, то есть одна секунда. Но еще до этого должна

пройти половина секунды, а до того — половина этой половины (другими словами, четверть секунды), а еще раньше — половина этого времени и так далее и так далее...

Совершенно невозможно, чтобы прошло бесконечное число половинных промежутков времени. Следовательно, время вообще не проходит, что означает, что его и не существует. Вы просто чересчур погружены в обманчивый мир чувств.

Хотя я и не верю в чтение — ибо это еще одна распространенная иллюзия чувственного мира, — некогда я тем не менее прочитал несколько строк, которые содержат почти разумное утверждение:

*Время не проходит —
проходим мы. Да, мы.
Мы не тратим времени —
время тратит нас.*

А раз уж мы заговорили о книгах, вот человек, который написал немало книг, а прочел их еще больше, чем написал, и дает моей благородной точке зрения блестящее обоснование.

Это Бертран Рассел, английский философ и математик (да, я понимаю, что он будет жить через две тысячи лет после того, как время окончательно потратит меня, и все же...).

Рассел считается одним из величайших мыслителей XX столетия, и у него был свой вариант моей знаменитой апории об Ахиллесе и черепахе (к слову сказать, время потратило и Рассела). Рассел изложил свою вариацию моей апории в ста-

тье «Математика и метафизики»*, в которой он также удостоил меня звания «отца философии бесконечности» — каковое звание я, разумеется, нахожу весьма впечатляющим, несмотря на свою привычку сомневаться во всем, в том числе и в собственной способности сомневаться.

Кое-кто утверждает, что версия Рассела более замысловата, чем моя, и ее не так легко опровергнуть. Мне не кажется, что сравнивать эти версии честно — Рассел придумал свою, стоя на моих плечах. Когда ребенок стоит на отцовских плечах, он не становится выше отца. Зато мне кажется, что опровергнуть ее не просто нелегко, а невозможно (как, впрочем, и мою).

Вот что говорит Рассел: «Допустим, черепаха начинает забег с некоторого положения, находящегося перед Ахиллесом. В любой момент черепаха оказывается в некой определенной точке, и Ахиллес оказывается в некой определенной точке, причем ни один из них не бывает в одной и той же точке дважды на протяжении всего забега. Черепаха побывает в таком же количестве точек, что и Ахиллес, потому что оба они в каждый конкретный момент находятся в неких конкретных точках, а в другой момент — в других точках. Однако, поскольку черепаха начинает забег с форой, для того, чтобы Ахиллес обогнал черепаху, необходимо выполнение следующего условия: те точки, в которых побывает черепаха,

* Mathematics and the Metaphysicians // *Mysticism and Logic, and Other Essays*. N.Y.: Longmans, Green and Co., 1918.

должны составлять лишь часть тех точек, в которых побывает Ахиллес».

А теперь сосредоточьтесь и слушайте внимательно. Версию Рассела можно опровергнуть, только если отказаться от аксиомы, которая утверждает, что часть всегда меньше целого: Ахиллес побывал лишь в *некоторых* из точек, в которых побывала черепаха. Готовы ли вы отбросить эту аксиому? Рассел отмечает, что всякий, кто верит в ее истинность, должен согласиться, что Ахиллес, даже если он бежит в десять, в тысячу, да хоть бы и в миллион раз быстрее черепахи, никогда ее не догонит, если у черепахи была фора в метр или в сантиметр или в миллиметр.

Что же тут такое происходит? Вы следите за моими рассуждениями? Я могу показать вам, что на пути, который проходят оба бегуна — и черепаха, и Ахиллес, — существует бесконечное множество точек. Может быть, когда мы говорим о бесконечном, привычные нам правила перестают действовать?

Кстати говоря, если вы помните мою первую апорию, все эти рассуждения вообще не имеют смысла. Ахиллес и черепаха не могут даже начать свой забег: движение-то невозможно. Я позволяю вам делать столь странные предположения только из вежливости. Ха! Они даже не смогут уйти со старта! Да и вам не удастся даже выстрелить из стартового пистолета. Чтобы нажать на спусковой крючок, ваш палец должен сначала преодолеть половину расстояния, затем половину оставшегося, затем... ну, вы помните это рассуждение.

Как-то раз я опоздал на встречу со своим великим учителем и наставником Парменидом. Я объяснил ему, что опоздал, потому что по пути к месту нашей встречи в таверне «Елена Прекрасная» мне нужно было преодолеть бесконечное число половинных расстояний. Нас обоих поразило тот факт, что я вообще сумел туда добраться и мы смогли вести эту беседу.

По правде говоря, не знаю, зачем я вообще пытаюсь обосновать перед вами свои рассуждения. Как сказал однажды китайский философ Лао-цзы, «Тот, кто мудр, не спорит; тот, кто спорит, не мудр»^{*}. Я мудр, так что пойду-ка я отсюда (если смогу).

Апория № 3. Полет стрелы — покой и движение

В третьей апории Зенон «доказывает», что, поскольку мгновение невозможно разделить на части, стрела, выпущенная из лука, находится в каждое мгновение в состоянии покоя (так как, если бы в любое произвольное мгновение стрела находилась в движении, причиной этого было бы то, что мгновение *можно* разделить на части).

Если же предположить, что время состоит из мгновений и в любое конкретное мгновение

^{*} «Дао дэ цзин», гл. 81.

стрела неподвижна, то придется заключить, что стрела никогда не находится в движении и, следовательно, — тут Зенон снова собирается поразить нас своими стрелами, приготовьтесь! — не сможет пролететь никакого расстояния.

Какое бы мгновение мы ни выбрали, стрела находится в нем в покое. Как же из этих состояний покоя может составиться движение? Если в каждое мгновение стрела пролетает расстояние, равное нулю, как же эти нули складываются в положительное число, что «позволяет» стреле лететь?

Всё совсем не просто!

Эта апория до сих пор не имеет решения — то есть такого решения, с которым были бы согласны все члены сообществ физиков и математиков.

Грациозная походка Галь Гадот

Рассмотрим другой вариант этой апории. Представим себе, что по бульвару Ротшильда в Тель-Авиве идет чудо-женщина Галь Гадот. Никого ни в малейшей степени не удивит, если я скажу, что за красавицей следует огромная толпа людей, фотографирующих ее со всех возможных ракурсов. Соцсети внезапно заполняются сотнями ее фотографий, и на каждой из них эта прелестная женщина находится в некотором статическом положении, то есть в состоянии покоя. Такова природа фотографии: она захватывает конкретное

мгновение и сохраняет его навечно. Если в кадре что-нибудь движется, лучше поменять старый фотоаппарат на модель поновее или почитать в инструкции, как установить более короткую выдержку. Поскольку Галь можно фотографировать каждое мгновение, из этого следует, что в течение всей своей прогулки по бульвару она остается в состоянии покоя. Приходится спросить: «Если она все время находится в покое, когда же она идет? Как из всех этих состояний покоя получается движение?» То есть мы снова приходим к тому же самому вопросу. И ответ на него снова не вполне ясен.

Занимаемся апориями Зенона

ВОСПОМИНАНИЯ ИЗ ДЕТСТВА – ЗЕНОН НА УРОКЕ ГЕОМЕТРИИ (ДОПОСТСОКРАТИЧЕСКИЙ ДИАЛОГ)

Учительница Зилия. Как вы помните, дети, через любые две точки проходит только одна прямая.

Зенон. Ни через какие две точки не проходит никакая прямая, потому что перемещение из одной точки в другую невозможно. Я уже несколько раз это объяснял. Кроме того, я не понимаю, почему вы отвергаете мое блестящее реше-

ние задачи о корабле, отплывающем из Мегары в Афины: несмотря на небольшое расстояние, корабль этот дойдет до места назначения через бесконечное время. То есть не дойдет. Вы просто не способны мыслить вне рамок стандартной учебной программы.

Зилия. Зенон, ты постоянно споришь о самых простых и очевидных вещах и всюду вносишь ненужные усложнения.

Зенон. Не бывает ничего простого и ясного.

Зилия. О чем ты говоришь на этот раз?

Зенон. На прошлом уроке вы учили нас, что прямая состоит из бесконечного множества точек, так?

Зилия. Именно так.

Зенон. А еще вы сказали, что длина точки равна нулю, не правда ли?

Зилия. Разумеется. Потому что, если бы она была какой-нибудь другой, то точку можно было бы разделить на части, что противоречит нашей основополагающей предпосылке. Если бы у точки была длина, она была бы не точкой, а отрезком прямой. Кроме того, у точки не может быть никакой длины, потому что между любыми двумя точками всегда есть еще одна точка — на самом деле даже несколько дополнительных точек. Если бы точка имела длину большую нуля, а расстояние между двумя точками было меньше этой длины, то первую точку было бы невозможно разместить между двумя другими. А это полностью противоречит всей фундаментальной логике геометрии.

Зенон. Хорошо. Напрасно вы так старались. Я согласен с вами, что длина точки равна нулю. Но теперь я хочу задать один маленький вопрос: как отрезок длиной, скажем, 17 см может состоять из точек нулевой длины? Мы выучили еще в первом классе, что сумма любого количества нулей всегда равна нулю. Повторю свой вопрос: как множество точек, имеющих нулевую длину, может образовывать отрезок длиной 17 см? Жду разъяснений и ответов.

Зилия. Мне нужно будет немного подумать. Я отвечу тебе на следующем уроке.

Зенон. Не спешите, я подожду. Вот еще одна похожая задача, которая может помочь вам в поисках ответа. Квадрат состоит из бесконечного количества линий, каждая из которых имеет нулевую площадь. Как может быть, что этим линиям удастся заполнить квадрат, имеющий положительную площадь? Может быть, вам следует пойти обсудить этот вопрос с Зилотисом, учителем физики. Спросите его на языке, который он понимает: «Как может быть, что стрела, пролетающая за время $t = 0$ расстояние $s = 0$, может перемещаться из одного места в другое? Разве неверно, что в любой произвольный момент она преодолевает расстояние, равное нулю? Можно сфотографировать стрелу — да, я знаю, что фотография еще не изобретена, — и увидеть, что в любой конкретный момент она находится в состоянии покоя. Возможно, время не состоит из моментов? Возможно, если взять достаточное количество нулей, их сумма может не быть равной нулю?» Ну ладно, я пойду проверять свою теорию при помощи пращи.

(Звенит звонок. Все ученики радостно выбегают из класса на школьный двор. Учительница быстро скрывается в учительской, чтобы выпить капельку узо и слегка расслабиться. Только Зенон остается в классе, размышляя о стрелах, о пращах и о черепахах, ползущих быстрее прославленных легконогих героев. Ему ясно, что он все равно не сможет выйти из класса, потому что для этого ему нужно сначала пройти половину расстояния...)

Французский философ еврейского происхождения Анри-Луи Бергсон (1859–1941) оказал огромное влияние на философскую мысль первой половины XX в. Он был убежден, что человеческий разум не может и никогда не сможет осознать апории Зенона. По мнению Бергсона, единственное, что можно сделать, — это сформулировать практический подход для сосуществования с ними.

Однако другие французы относились к Зенону и его апориям с меньшей терпимостью. Например, выдающийся математик, физик-теоретик и философ науки Анри Пуанкаре (1854–1912) заявил следующее:

Зенон был идиотом, и только идиоты могут заниматься его апориями.

Англичанин Бертран Рассел не был согласен с французами. В книге «Основания математики»^{*} (1910–1913) Рассел называл апории Зенона «неизмеримо тонкими и глубокими».

ГИПОТЕЗА ПУАНКАРЕ И ОТКАЗ ПЕРЕЛЬМАНА

Гипотеза Пуанкаре — одна из семи открытых математических проблем, которые Математический институт Клэя внес в 2000 г. в список «Задач тысячелетия». На момент написания этой книги это единственная решенная задача из тех семи.

Эту задачу решил блестящий российский математик еврейского происхождения Григорий Перельман (р. 1966). За доказательство гипотезы Пуанкаре Перельмана должны были наградить медалью Филдса и «Премией тысячелетия» Института Клэя, составляющей миллион долларов. Я говорю «должны были наградить», потому что Перельман отказался от обеих премий. «Деньги и слава меня не интересуют. Важна только точность доказательства», — объяснил Перельман¹.

Он даже не опубликовал статьи со своим доказательством. О нем написали другие математики.

^{*} Этот трехтомный труд был написан Расселом в соавторстве с Альфредом Н. Уайтхедом. Полный русский перевод вышел в 2005–2006 гг. в изд-ве Самарского ун-та.

Перельман вообще известен отказами от премий и наград. В свое время он отказался и от престижной премии Европейского математического общества, заявив, что те, кто присуждает эту премию, не способны понять и оценить его работы.

В 2003 г., когда ему было всего 37 лет, Перельман отошел от исследовательской работы в математике. Сейчас он нигде не работает и живет с матерью в Санкт-Петербурге.

Великие математики — от Зенона до Ньютона, от Галуа до Перельмана — по большей части бывают совершенно непохожими на обычных людей. Возможно, именно это отчасти и делает их великими математиками.

Но нам пора вернуться к теме нашей беседы.

В гостях у сказки — дисквалификация Ахиллеса

После того как Ахиллесу так и не удалось обогнать черепаху, он решил начать интенсивные тренировки. Он явился на олимпийский стадион и разметил себе беговую дорожку, которая начиналась в точке *A* и заканчивалась в точке *B*. Однако боги — которых было бесконечное количество — решили помешать Ахиллесу добиться цели. Первый бог решил не позволить Ахиллесу пробежать половину дистанции, второй бог ре-

шил не позволить Ахиллесу пробежать четверть дистанции, третий бог — одну восьмую... и так далее.

Головоломка

В предположении, что эти боги могут сделать все, что захотят, докажите, что Ахиллес не сможет даже начать бежать к точке *B*.

Продолжение головоломки

Если вы пришли к выводу, что Ахиллес вообще не сможет сдвинуться с места, почему это так? Пока Ахиллес стоит на линии старта, ни один из богов ему не мешает. Так что или кто останавливает нашего (почти) непобедимого воина?²

Забег стаккато

Представьте себе, что в состязание Ахиллеса с черепахой вносится небольшое изменение. Каждый раз, когда Ахиллес добирается до точки, в которой раньше была черепаха, оба бегуна останавливаются и отдыхают минуту (черепахе такой отдых очень нужен). В этом случае Ахиллес догонит черепаху через бесконечное число минут — то есть никогда ее не догонит. Сколько же вариаций у этой темы!

Смерть героя

Назавтра после забега стапкато чрезвычайно обескураженный Ахиллес решил все же продолжать тренироваться. Он решил начать тренировку в два часа дня. Без одной минуты два Ахиллес явился на стадион. Однако у героя Троянской войны никогда ничего не выходит просто. Бесконечных олимпийских богов привел в ярость шум, поднятый воином, как раз когда они готовились к своей божественной послеполуденной сиесте, и они решили разделаться с ним, поразив его в пятку отравленной стрелой. Первый бог решил выстрелить в Ахиллеса через полминуты *после* двух часов, а второй бог решил убить его в другое время — через четверть минуты *после* двух. Третий бог предпочел запланировать это злодеяние на одну восьмую минуты *после* двух... ну и так далее.

К двум часам и одной минуте здоровье Ахиллеса оказывается, мягко говоря, подорвано: он лежит мертвый, а из его пятки торчит бесконечное количество отравленных стрел. Однако никого из богов нельзя обвинить в его смерти. У каждого из них есть превосходное оправдание, причем одно и то же: «Когда я выпустил свою стрелу в Ахиллеса, он уже был мертв, так как в его пятку попало бесконечное количество стрел. Я признаю, что стрелять в труп — дело неблагоприятное, но это вовсе не значит, что меня можно обвинить в убийстве».

Вопрос: кто же убил Ахиллеса? И когда?

Математик в космосе

Вы, вероятно, уже заметили, что, как только мы начинаем задевать концепции вроде нуля и бесконечности, многие из «нормальных» законов перестают работать. Я расскажу вам об одном знаменитом мысленном эксперименте под названием «Космический корабль».

Попытайтесь представить себе, что произойдет с космическим кораблем, который летит по следующим правилам: первые полчаса он летит со скоростью 2 километра в час (то есть очень медленно по меркам космических кораблей). На следующую четверть часа его скорость несколько возрастает — до 4 километров в час. В течение следующей одной восьмой часа он летит со скоростью 8 километров в час — и так далее. Где этот космический корабль окажется через час?

Расчет несложен. За первые полчаса, пока корабль летит со скоростью 2 километра в час, он пролетит один километр. За следующие четверть часа, летя со скоростью 4 километра в час, он тоже пролетит один километр. И так далее и так далее: еще километр, и еще километр, и еще один. Легко видеть, что расстояние, которое преодолевает космический корабль, равно $1 + 1 + 1 + \dots$ Однако число единиц, которые нужно сложить, бесконечно, и, следовательно, бесконечна и итоговая сумма. Так где же наш космический корабль? По-видимому, нигде,

потому что он должен оказаться на бесконечном расстоянии от точки запуска. Если бы космический корабль находился в какой-либо определенной точке, она была бы расположена на определенном расстоянии от точки запуска, но этого быть не может, так как корабль улетел на бесконечное расстояние. Где же он? Неизвестно. Поиски космического корабля продолжаются до сих пор.

Бесконечность нельзя найти ни в одной точке бесконечной прямой.

Георг Гегель

Словесные вычисления

Докажите, не проводя никаких вычислений (то есть на словах), что:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \frac{16}{243} + \dots + \dots = 1.$$

БИОГРАФИЯ ТРИСТРАМА ШЕНДИ (ПАМЯТИ АХИЛЛЕСА)

Одна из самых безумных, самых странных историй, какие я когда-либо читал, — это девяти томный роман родившегося в Ирландии английского писателя XVIII в. Лоренса Стерна «Жизнь и мнения Тристрама Шенди, джентльмена», опубликованный в 1759–1766 гг.

Как можно догадаться по названию, герой этой книги решил рассказать нам историю своей жизни и поделиться своими мыслями и мнениями. Но ее содержание не вполне соответствует ожиданиям читателя.

В книге девять томов, и одна из ее абсурдных идей состоит в том, что ни одно из событий в жизни главного героя не может быть рассказано просто: должны быть изложены все мельчайшие обстоятельства, связанные с таким событием даже самым отдаленным образом. Только в третьем томе (!) рассказчик добирается до момента своего рождения.

Тристрам сетует, что на рассказ об единственном дне своей жизни ему требуется целый год. Бертран Рассел как-то отметил*, что если бы этот джентльмен прожил бесконечно много дней, он вполне смог бы рассказать всю историю своей жизни. В самом деле? С одной стороны, до каждого из дней его жизни в конце концов дошла бы очередь в повествовании. О 10 000-м дне своей жизни он рассказал бы на 10 000-м ее году. С другой стороны, каждый проходящий день увеличивает разрыв между жизнью прожитой и жизнью описанной еще на один год. Получается своего рода состязание Ахиллеса с черепахой, в котором Ахиллес пробегает целый год, а черепаха — всего лишь день. Но, поскольку в распоряжении черепахи имеется бесконечное время, она рано или поздно добирается до всех тех мест, в которых побывал Ахиллес.

* В частности, в уже упомянутых работах «Математика и метафизики» и «Основания математики».

БЕСКОНЕЧНОСТЬ И ДАЛЕЕ: НЕСКОНЧАЕМОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ



С незапамятных времен бесконечное волновало человека более чем какой-либо другой вопрос. По-видимому, не существует другой идеи, которая вдохновляла бы, но и тревожила бы человеческий разум сильнее, чем концепция бесконечности; но именно по этой причине она и нуждается в разъяснении более чем какая бы то ни было другая концепция.

Эти слова взяты из статьи «О бесконечном» (Über das Unendliche)* великого математика XX в. Давида Гильберта (1862–1943).

Внимательно изучив первую часть той книги, которую вы держите в руках, вы можете заметить, что главная ее героиня — «бесконечность»: царство чисел есть царство бесконечное; и многие, а может быть, и большинство из ее загадок и секретов связаны, прямо или косвенно, с концепцией бесконечности.

Математика — наука бесконечности.

Герман Вейль

* Mathematische Annalen 95 (1926). P. 161–190. Доклад, прочитанный в июне 1925 г. на съезде математиков, организованном Вестфальским математическим обществом в Мюнстере в память Вейерштрасса.

ЦАРСТВО БЕСКОНЕЧНОСТИ ГЕОРГА КАНТОРА: ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Любовь с третьего урока

Предметом, который больше всего увлекал меня на первом курсе математического факультета университета, была теория множеств. Это название не кажется особенно привлекательным и даже приблизительно не описывало того, что изучалось в этом курсе. Начало не предвещало ничего хорошего: поразительно скучные определения, аксиомы и соотношения. Но уже через два занятия я понял, что этот курс на самом деле должен называться теорией бесконечных множеств, потому что речь в нем идет именно о бесконечном, с демонстративным пренебрежением к завету Галилео Галилея, призывавшего этим не заниматься. Кроме того, обсуждение бесконечности не было затемнено какими-либо метафизическими или теологическими соображениями — а я уже был знаком с такими взгля-

дами, и некоторые из них — например антиномии Канта, концепции Николая Кузанского или мировоззрение Джордано Бруно (на которого Николай Кузанский оказал большое влияние) — меня весьма вдохновляли. Но теперь все было совсем по-другому, и я чувствовал, что передо мной разворачивается нечто не похожее ни на что из того, что я знал раньше. У меня было предчувствие, что мне откроется нечто чудесное.

В лекциях по теории множеств и ее главному герою, бесконечности, в высшей степени увлекательных и интригующих, которые читал мой ныне покойный учитель Мордехай Эпштейн (я чрезвычайно благодарен ему), эта тема раскрывалась в очень точной, чисто математической манере. Внезапно я узнал, что можно сравнивать разные виды бесконечности: что бывают бесконечности бóльшие и бесконечности меньшие; более того, существует *бесконечный* спектр бесконечностей! Я был заморожен.

Кто же был тот удивительный человек, настолько близко знакомый с бесконечностью, что он умел распознавать и различать разные ее виды? Этим человеком был Георг Кантор, и теорию множеств, которую он разработал, часто называют в его честь канторовой теорией множеств.

Георг Кантор — человек, видевший бесконечность

Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор родился в 1845 г. в Санкт-Петербурге. Его научная карьера началась в 1862 г. в Цюрихском университете. Год спустя, когда по смерти отца ему досталось весьма солидное наследство, Кантор перевелся в Берлинский университет, где изучал математику, физику и философию. Лето 1866 г. Кантор провел в Гёттингенском университете, который был в то время главным математическим центром (и оставался таковым вплоть до Второй мировой войны). В 1867 г. Кантор получил в Берлинском университете докторскую степень за работу по теории чисел. Некоторое время он преподавал в этом же городе в школе для девочек, а затем начал работать в Университете города Галле, где и оставался до последних лет жизни. В 1872 г. Кантор познакомился с Рихардом Дедекиндом, и это знакомство положило начало их личной и профессиональной дружбе.

В 1874 г. в жизни Кантора произошли два важных события. Первое — он женился, и этот брак впоследствии дал миру шестерых детей. Вторым событием была публикация его революционной статьи о бесконечных множествах под названием «Об одном свойстве совокупности всех вещественных алгебраических чисел» (Über eine Eigenschaft

des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen)*. Ее название не очень-то понятно, и мне кажется, что даже перевод с немецкого не слишком помогает вам осознать, о чем эта статья. Тем не менее нет никаких сомнений, что именно она положила начало изучению теории множеств и в течение 25 лет оставалась краеугольным камнем этой дисциплины.

В этой статье была впервые высказана мысль о том, что может существовать более одного типа бесконечности. Она была опубликована несмотря на острую критику Леопольда Кронекера (1823–1891), бывшего учителя Кантора и чрезвычайно влиятельного в свое время математика. Кантор не нравился Кронекеру ни с личной, ни с профессиональной точки зрения. Дело дошло даже до прямых оскорблений: Кронекер называл его «математическим шарлатаном» и «растлителем молодежи» (тут невозможно не вспомнить, что так же некогда называли и Сократа — в этом можно было увидеть благое предзнаменование).

Я не знаю, чего в теории Кантора больше — философии или богословия, — но уверен, что математики в ней нет.

Леопольд Кронекер

* J. reine und angew. Math. 77 (1874). P. 258–262.

Понятия не имею, почему Кронекер вздумал обвинять Кантора в том, что тот ввел в обсуждение математики богословие, учитывая, что самое знаменитое высказывание Кронекера как раз и касается высших существ:

Бог создал целые числа, все остальное — дело рук человеческих.

Кронекер был не единственным критиком Кантора. Французский математик Пуанкаре, который, если вы помните, высмеивал апории Зенона и всех тех, кто ими занимается, тоже был ярым противником идей Кантора. Пуанкаре считал мысли Кантора болезнью, заражающей настоящую математику. Шведский же математик Магнус Густав Миттаг-Леффлер (1846–1927) ценил идеи Кантора, но полагал, что они опередили свое время и должны быть обнародованы веком позже. На это Кантор ответил, что, по его мнению, призывать ждать целых сто лет значило бы «требовать слишком многого». Кантор очень остро переживал критику, направленную против него самого и его теории. В 1884 г. он перенес первый приступ сильной депрессии.

Существует «городская легенда», утверждающая, что именно из-за Миттаг-Леффлера не существует Нобелевской премии по математике.

Ее рассказывают по-разному: то ли Нобель был влюблен в жену Миттаг-Леффлера, то ли любовница Нобеля изменила ему с Миттаг-Леффлером, то ли Магнус Густав был просто неприятен Альфреду Нобелю по личным причинам.

Для борьбы с этим эмоциональным кризисом Кантор использовал совершенно уникальный метод, по-видимому, подходивший такому особенному человеку, каким был он: он решил временно оставить математические исследования и сосредоточился вместо этого на литературе Елизаветинской эпохи. Он потратил на работу в этой области много времени и сил и пытался обосновать гипотезу, утверждающую, что работы, которые приписываются Уильяму Шекспиру, на самом деле написал Френсис Бекон. В 1896 и 1897 гг. Кантор даже написал две статьи на эту тему.

*Я в бесконечной книге тайн природы
Могу читать отчасти*.*

Уильям Шекспир

Работа над Шекспиром помогла Кантору оправиться, и он вернулся к своему истинному призванию — теме бесконечности. В 1891 г. он опубликовал

* «Антоний и Клеопатра», акт I, сцена 2. Пер. Д. Л. Михаловского.

вал статью, в которой предложил восхитительно изящную концепцию, которая называется теперь диагональным методом Кантора (мы вскоре рассмотрим этот метод).

Однако эмоциональное расстройство не оставляло Кантора. В 1899 г. его положили в больницу. В том же году внезапно умер его младший сын, депрессия Кантора стала хронической, и у него почти полностью исчез интерес к математике и бесконечности. В 1903 г. он снова был госпитализирован.

Год спустя произошло событие, которое, как считает биограф Кантора, профессор истории Джозеф У. Даубен, настолько потрясло Кантора, что заставило его усомниться в существовании Бога. Здесь следует отметить, что Кантор верил: теория бесконечности дарована ему Богом, а его задача — передать ее простым смертным. Ниже кратко описано то, что с ним случилось¹.

В конце 90-х гг. XIX в. Георг Кантор и немецкий математик Феликс Клейн взялись за организацию Международного конгресса математиков (International Congress of Mathematicians, ICM). Клейн даже сочинил лозунг в духе Карла Маркса: «Математики всех стран, соединяйтесь!» Эти конгрессы и сейчас остаются важнейшими математическими событиями мирового масштаба: на церемонии их открытия происходит награждение

престижными математическими премиями — медалью Филдса и премией Гаусса.

Первый конгресс состоялся в 1897 г. в Цюрихе. Второй прошёл в 1900 г. в Париже; он известен тем, что именно на нем Давид Гильберт представил 23 открытые проблемы (первая проблема в этом списке касалась континуум-гипотезы, которую Кантор сформулировал еще в 1878 г.; мы вскоре поговорим о ней).

Но мы говорим о третьем конгрессе, который состоялся в 1904 г. в Гейдельберге. Кантор сидел в зале вместе со своими дочерьми. На сцену вышел венгерский математик Дьюла Кёниг, который заявил, что в теории Кантора содержатся фундаментальные ошибки. Кантора глубоко потрясло то унижение, которому он подвергся на глазах у коллег и собственных дочерей. На самом деле Кёниг пренебрег важнейшим правилом математики — точностью; уже на следующий день математик Эрнст Цермело², один из отцов — основателей теории множеств, доказал, что Кёниг был неправ и нес вздор. Но это ничуть не облегчило эмоционального состояния Кантора.

В 1913 г. Кантор оставил работу в университете; во время Первой мировой войны он жил в ужасающей бедности. Умер он в 1918 г. в санатории в Галле.

В начале XX в. еще существовали острые разногласия относительно значения теории Кантора

и ее справедливости. Тем не менее в 1904 г. Кантор был награжден медалью Сильвестра, высшей наградой для математиков, которую присуждает Лондонское королевское общество. Она названа так в честь английского математика Джеймса Джозефа Сильвестра. По иронии судьбы предыдущим лауреатом этой награды был непримиримый соперник Кантора Анри Пуанкаре*.

Математика — это музыка логики.

Джеймс Джозеф Сильвестр

В число наиболее пылких поклонников Кантора входили Бертран Рассел (1872–1970)³ и Давид Гильберт, который назвал теорию множеств Кантора «величайшим произведением математического гения и человеческой мысли».

Никто не изгонит нас из того рая, который создал для нас Кантор.

Давид Гильберт

Рай Кантора — это рай для дураков. Его теория смехотворна и совершенно бессмысленна.

Людвиг Витгенштейн

Очевидно, даже величайшие философы иногда несут чушь.

* Пуанкаре, получивший медаль Сильвестра в 1901 г., был, собственно, первым ее лауреатом.

Апология Кантора

Моя теория прочна как скала; любая стрела, выпущенная в нее, быстро вернется к своему лучнику. Почему я в этом уверен? Потому что я изучал ее со всех сторон на протяжении многих лет; потому что я исследовал все возражения, которые когда-либо выдвигались против бесконечных чисел; а прежде всего потому, что я проследил, так сказать, ее корни до исходной и несомненной первопричины всего сотворенного.

Георг Кантор

Сегодня значение теории множеств Кантора очевидно всем тем, кто имеет дело с высшей математикой. Современные варианты теории множеств, развившиеся в результате его первопроходческих исследований, служат теперь основой значительного числа математических теорий, разработанных в XX в.

Пора и нам познакомиться с теорией множеств Георга Фердинанда Людвига Филиппа Кантора.

Введение в теорию множеств. Что такое множество?

В этом и следующих разделах мы попытаемся понять центральные идеи канторовой теории множеств. Начнем с самого фундаментального понятия — множества. Что такое «множество»?

Вот интуитивное определение, которое служило математикам на самой заре эпохи теории множеств:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА

Любой набор объектов.

Это определение кажется слишком общим. В нем даже нет требования, чтобы у объектов, составляющих множество, было нечто общее. Поэтому неудивительно, что со временем это определение породило немало проблем.

Как можно определить множество? Один из способов сводится к перечислению всех входящих в него объектов. Например, $A = \{\text{Густав Малер, Густав Климт, Гюстав Эйфель, Густав Холст, Густаво Дудамель, Гюстав Доре, Густаво Бокколи, Гюстав Курбе, ураган «Густав», Густав V Шведский}\}$. В этом множестве ровно десять элементов, и у всех этих элементов есть одно общее свойство — наличие слова «Густав» в той или иной форме.

Но общих черт может и не быть. Вот другой пример совершенно добропорядочного множества: $B = \{1729, a, 4, \{4\}, \text{Пушкин, Пушкаш, \$, множество}\}$. Это попросту множество из восьми,

по-видимому, случайных объектов, перечисленных выше.

Важно иметь возможность сказать, является или не является тот или иной объект элементом определенного множества. Шведский математик Магнус Густав Миттаг-Леффлер *не входит* в множество А, хотя в его имени и есть слово «Густав», потому что он не определен как элемент этого множества. А вот знак доллара входит в множество В, потому что он *включен* в список элементов этого множества.

Этот метод — то есть перечисление всех элементов — оказывается не слишком подходящим для определения, скажем, множества всех четных чисел. Поэтому при определении множества можно применять другой прием — использовать многоточие. Тогда мы сможем определить множество четных чисел: $E = \{2, 4, 6, 8...\}$. Однако «правило», обозначенное многоточием, не всегда бывает ясным и общепонятным. Посмотрите, например, на следующее множество: $T = \{1, 3, 6, 10, 15...\}$. Это множество треугольных чисел (дополнительную подсказку дает буква, выбранная для обозначения этого множества). Но это может быть очевидно не всем. Впрочем, даже те, кто не знаком с концепцией треугольных чисел, могут догадаться, как продолжить этот ряд.

Но так бывает не всегда. Вот еще один пример:
 $F = \{1, 3, 9, 33, 153 \dots\}$. Какие значения должны
стоять на месте многоточия? Вы догадались?

Вот ответ:

$$1! = 1;$$

$$1! + 2! = 3;$$

$$1! + 2! + 3! = 9;$$

$$1! + 2! + 3! + 4! = 33;$$

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153.$$

Следовательно, следующее число будет

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! = 873$$

и так далее.

Множество также можно определить, задав
общее свойство, определяющее его элементы.
Например, «множество всех бывших и действующих
игроков НБА», «множество всех атомов во
Вселенной», «множество простых чисел», «мно-
жество счастливых людей», «множество всех
четных чисел, которые невозможно представить
в виде суммы двух простых чисел», «множество
чисел, больших самих себя», «множество бор-
цов сумо, которые весят более 250 килограм-
мов», «множество всех фильмов, поставленных
Андреем Тарковским», «множество всех стихо-
творений, написанных Арсением Тарковским»
(поэт Арсений Тарковский был отцом великого
русского кинорежиссера Андрея Тарковского)
и так далее.

Как, вероятно, уже поняло большинство читателей, множество обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита — А, В, С, D...

Символ $\in$ означает принадлежность к множеству. Например, если мы обозначим буквой F множество всех фильмов, поставленных Феллини, то можно написать «Амаркорд» $\in$ F. Если этот символ перечеркнут, он означает, что данный элемент не принадлежит к множеству. Например, «Аватар» $\notin$ F.

В теории множеств Кантора любой объект либо принадлежит, либо не принадлежит к определенному множеству. Но задумайтесь на мгновение о множестве, скажем, высоких людей: определить принадлежность к этому множеству будет не так-то легко. В 1965 г. американский математик и информатик еврейского происхождения* Лоттфи А. Заде (1921–2017) предложил более гибкий подход к множествам, который он назвал теорией нечетких множеств. Основополагающая концепция теории нечетких множеств состоит в том, что каждому объекту можно присвоить вероятность принадлежности к любому конкретному множеству, которая может составлять от 0 (точно не принадлежит) до 1 (точно принадле-

* По материнской линии: его отец был иранским азербайджанцем.

жит). Например, у Наполеона и Дэнни Де Вито вероятность принадлежности к множеству высоких людей равна 0*, а у Леброна Джеймса эта вероятность равна 1, в то время как автор этой книги может принадлежать к множеству высоких людей с вероятностью около 0,07.

Я впервые познакомился с теорией нечетких множеств, когда мне попалась книга Барта Коско «Нечеткое мышление» (Fuzzy Thinking, Hyperion, 1993). Эта книга полюбилась мне с первой же строчки: «Однажды я узнал, что наука неверна». Главная мысль этой книги, которую автор блестяще защищает на протяжении всех ее 300 страниц, состоит в том, что в мире нет ничего черного и белого. На самом деле все существует в разных оттенках серого. Всё может быть абсолютно определено только в классической математике, но классическая математика не способна достоверно описать мир.

Вот слова человека, выразившего эту же идею гораздо лучше, чем удастся мне:

* Относительно роста Наполеона до сих пор существуют разногласия. По одним сведениям, он составлял 157 см (что приблизительно соответствовало среднему мужскому росту во Франции того времени), по другим — около 170 см. Во всяком случае Наполеон, видимо, не был заметно ниже многих своих современников. Рост Дэнни Де Вито составляет 147 см.

Законы математики, имеющие отношение к реальности, не несомненны; если же они несомненны, они не имеют отношения к реальности. Математика, описывающая реальность, не несомненна, а когда математика несомненна, она не описывает реальности.

Альберт Эйнштейн

Вернемся, однако, к канторовой теории множеств.

Сколько элементов содержится в множестве всех четных чисел, которые не могут быть выражены в виде суммы двух простых чисел? Я надеюсь, что вы помните гипотезу Гольдбаха, которая утверждает, что таких чисел не существует. Другими словами, в этом множестве нет ни одного элемента. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается вот так: $\emptyset$.

Можно сказать, что множество всех четных чисел, которые не могут быть выражены в виде суммы двух простых чисел, с очень высокой вероятностью может быть пустым множеством, но абсолютной уверенности в том, что это действительно так, у нас нет. А вот множество чисел, которые больше самих себя, и множество ежей, говорящих на идиш, совершенно точно пусты.

Ну хорошо; может быть, и можно проявлять некоторую гибкость относительно того, входит ли

тот или иной элемент в то или иное множество, — как это делается в теории нечетких множеств, — но до сих пор мы не встречали ничего особенно необычного, что не позволило бы нам определить множество как некий набор элементов. Более того, я должен отметить, что подобное же определение дал концепции множества и сам Кантор.

Однако в мире математики нет почти ничего действительно простого и самоочевидного — есть только кажущееся таковым на первый взгляд.

«Очевидно» — самое опасное слово в математике.

Э. Т. Белл

Оказывается, в таком интуитивном определении множества — как некоего набора элементов — есть несколько скрытых проблем. В качестве примера я расскажу о неприятности, которая случилась с немецким математиком, логиком и философом Готлобом Фреге (1848–1925).

В 1902 г. Фреге собирался опубликовать второй том своей монументальной работы под названием «Основные законы арифметики» (*Grundgesetze der Arithmetik*), в которой он показывал, как можно воссоздать правильную арифметику исходя из заложенного Кантором основания теории множеств и используя только наивное определение множества по Кантору. Но 16 июня Фреге почувствовал, что весь его труд грозит развалиться на части: он

получил от Бертрана Рассела письмо, в котором тот изложил сформулированный им парадокс, ставший с тех пор чрезвычайно знаменитым. Он известен как *«парадокс Рассела»* или *«антиномия Рассела»*.

Брить или не брить — парадокс Рассела

Парадокс Рассела существует во многих вариантах, но наиболее известен в формулировке так называемого «парадокса брадобрея».

В маленькой удаленной английской деревушке жил-был Эдвард, профессиональный брадобрей, известный своим крайним педантизмом. Несколько лет назад, когда он только открыл свою парикмахерскую под вывеской «Эдвард Руки-ножницы», он провозгласил следующее правило: он будет брить всех жителей деревни, которые не бреются сами, и только их.

В первый день все шло хорошо. В деревне были те, кто брился самостоятельно, и те, кто приходил к Эдварду ради того гладкого бритья, на которое были способны только его искусные руки. На второй день Эдвард начал замечать на своих щеках и подбородке пробивающуюся щетину, которая его вовсе не красила. Однако за мгновение до того, как он взялся за бритву, дотошный брадобрей осознал, что правило, которое он же сам и ввел, поставило его в затруднительное положение.

В соответствии с этим правилом он должен был брить только тех жителей деревни, которые не брились сами. Можно ли ему побрить самого себя? Брить или не брить? Вот в чем вопрос.

Тщательно обдумайте то, что тут происходит. Если он побреется, то нарушит свое собственное правило, потому что тем самым побреет человека, который бреется самостоятельно; но, если он не побреется, то станет жителем деревни, не бреющимся самостоятельно, а такого человека он должен побрить.

Парадокс Рассела порождается принципом так называемого «порочного круга». Из этого принципа следует, что множеству лучше не содержать элементов, которые могут быть описаны при помощи определения самого этого множества (если только вы не хотите попасть в такую парадоксальную ситуацию).

Интереснейший анализ этого парадокса приводится в книге Рэймонда Смаллиана «Алиса в стране смекалки» (1982)*. Там этот парадокс объясняет Алисе Шалтай-Болтай. Смаллиан приходит к следующему выводу: парадокс брадоброя эквивалентен утверждению «Я знаю человека низкорослого и в то же время высокого».

* Нам известны два перевода этой книги на русский язык: «Алиса в стране смекалки» (Пер. Ю. А. Данилова. М.: Мир, 1987) и «Приключения Алисы в стране головоломок» (Пер. Е. А. Трофимовой. М.: Просвещение, 2008).

Вот другой вариант парадокса Рассела. Библиотекарь решает составить два каталога своей библиотеки: один из них желтый и называется «Желтый каталог книг, в которых упоминаются они сами», а второй — «Синий каталог книг, в которых не упоминаются они сами».

Библиотекарь рассматривает одну за другой все книги библиотеки и вносит их названия либо в желтый каталог, либо в синий. Последний получается очень большим, а первый — весьма тонким, поскольку в большинстве книг они сами не упоминаются. Наконец библиотекарь доходит до двух последних книг, которые нужно каталогизировать: это сами желтый и синий каталоги.

Желтый каталог можно внести в него самого (потому что тогда в нем будет упоминаться он сам, так что все будет в порядке). Но что, спрашивается, делать с синим каталогом, в котором должны быть перечислены книги, *не* содержащие упоминания о самих себе? Если его внести в самого себя, то в синем каталоге будет упоминаться он сам, а следовательно, его там быть не должно. Однако если вписать его в желтый каталог, то в синем каталоге не будет упоминаться он сам... следовательно, его не должно быть в желтом каталоге, который предназначен для книг, содержащих упоминания о самих себе. Мы явно зашли в тупик. Что бы мы ни делали с синим каталогом, мы в любом случае нарушаем правило.

Я не хочу состоять в клубе, в члены которого принимают таких, как я.

Граучо Маркс

Два типа множеств

Вернемся к нашей теме. Есть два типа множеств. Множества первого типа называют обычными множествами: это множества, не содержащие в качестве элемента самих себя. Например, к этому типу относится *множество* всех кроликов, потому что множество всех кроликов — не кролик и, следовательно, не является элементом самого себя.

А вот множество всех «не-кроликов» — это множество второго типа, к которому относятся множества, содержащие самих себя. Множество «не-кроликов» — тоже не кролик. Аналогичным образом «множество всех объектов, которые можно описать при помощи ровно одиннадцати слов» — тоже множество второго типа. Необычное свойство этих множеств заключается в том, что они сами обладают свойствами, которых требует определение их элементов. Проще говоря, они содержат сами себя в качестве элементов. Представьте себе, например, множество всех идей, которые можно вообразить. Это множество содержит в качестве одного из своих элементов и само себя: очевидно, множество всех

идей, которые можно помыслить, — тоже идея. Этот второй тип множеств принято обозначать буквой R , в честь Рассела. Другими словами, любое множество, которое может содержать само себя в качестве элемента, называется сейчас множеством типа R^* . Любое множество может быть только обычным или расселовским, что означает, что никакое конкретное множество, предположительно, не может быть в одно и то же время множеством обычным и множеством расселовским.

Но так ли это на самом деле?

Рассмотрим *множество всех обычных множеств*. Назовем это множество M . И тут нас ожидает сюрприз: множество M — не обычное множество, но и не расселовское. Сейчас объясню.

Если бы M было обычным множеством, тогда его следовало бы включить в качестве элемента в множество обычных множеств, то есть в множество M . Но тогда M будет элементом M , а значит, M не может быть стандартным множеством, потому что оно содержит само себя и, следовательно, относится к расселовским множествам. Мы пришли к противоречию.

Вместе с тем, если M — расселовское множество, значит, оно *не* принадлежит к «множеству

* Или расселовским множеством.

обычных множеств». Но это и есть множество M ! Снова получается противоречие.

Как можно видеть из всего этого, исходное «интуитивное» определение множества, которое Кантор сформулировал на естественном языке в так называемой «наивной теории множеств», может приводить к неразрешимым парадоксам. Поэтому теперь используются другие методы определения множеств.

Из всего этого можно сделать следующие выводы:

1. Неограниченное применение интуитивного определения понятия множества может порождать нежелательные парадоксы.
2. Не следует устанавливать такие правила, которые люди не могут выполнять.
3. Множество всех «не-кроликов» слишком велико, чтобы его можно было обсуждать.

ДВА ОТСТУПЛЕНИЯ: СОВСЕМ КОРОТКОЕ И ЧУТЬ ПОДЛИННЕЕ

1. Поскольку я нежно люблю Италию, я никак не могу не упомянуть, что итальянский математик Чезаре Бурали-Форти (1861–1931) открыл нечто похожее на парадокс Рассела еще раньше его, в 1897 г. Он занимался исследованиями теории множеств и изучал

концепцию так называемого «множества всех порядковых чисел».

2. Французский философ Жан Буридан также представил — еще в XIV в. — парадокс, очень похожий на парадокс бородбрея по Расселу. В главе VIII книги «Софизмы» (*Sophismata*), называющейся «Неразрешимое» (*Insolubilia*), Буридан рассказывает следующую историю:

Платон встречал своих учеников у некоего моста и не позволял никому перейти на другую сторону без его разрешения. Однажды к мосту пришел Сократ, который потребовал, чтобы Платон его пропустил. Платону не понравился тон, которым разговаривал с ним его учитель; он ответил: «Если первое утверждение, которое ты выскажешь, будет истинным, я тебя пропущу; если же первое утверждение, которое ты выскажешь, будет ложным, я брошу тебя в бурную воду». Сократ немного подумал и сказал: «Ты бросишь меня в воду».

Посмотрим, что тут происходит. Если Платон бросит Сократа в воду, значит, Сократ говорил правду и Платону не следовало бросать его в воду — он должен был пропустить Сократа через мост. А если Платон позволит Сократу спокойно перейти мост, значит, Сократ солгал, а следовательно, Платону следовало отправить его на встречу с бурным течением реки.

Вот и все, что я хотел сказать о Буридане.

Кстати говоря, почти точно такой же парадокс встречается в главе LI второго тома «Дон Кихота», где описано губернаторство Санчо Пансы на острове Баратария. Возможно, вы захотите немного отдохнуть от математики и прочитать эту замечательную главу. Вам понравится.

ГРАНД-ОТЕЛЬ «БЕСКОНЕЧНОСТЬ» ИМЕНИ ГИЛЬБЕРТА

На планете Проксима-Инфинитас, которая расположена на расстоянии тысяч световых лет от Земли и любого другого места, находится одно из чудес современной архитектуры. На этой планете построена гостиница, созданная на основе концепций математика Давида Гильберта. Гостиница названа его именем и входит в сеть роскошных отелей «Давид Гильберт». Каждый из этажей гостиницы состоит из одного номера, в котором размещается один-единственный постоялец. Число номеров в гостинице бесконечно, но, несмотря на бесконечное количество номеров, гостиница имеет всего один метр в высоту. Строители — ООО «Зе-нон» — построили гостиницу следующим образом: высота первого этажа составляет полметра, высота второго — четверть метра, третьего — одну восьмую метра и так далее — до бесконечности. Попробуйте представить себе, как эта гостиница

выглядит с высоты птичьего полета. Размеры номеров не беспокоят постояльцев гостиницы, потому что в ней останавливаются натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6... Каждое число живет на этаже, номер которого равен этому числу. Гостиница всегда полностью заселена. В число ее сотрудников, которые живут на первом этаже соседнего здания, входят администратор Омега, портье Эпсилон и две горничные, сестры Сигма и Лямбда (Сигма обслуживает нечетные номера, а Лямбда — четные).

Однажды в гостиницу приехал 0, который спросил портье, найдется ли для него номер. Эпсилон ответил, что очень сожалеет, но гостиница совершенно заполнена, и он ничем не может ему помочь. «Чтобы получить номер в нашей гостинице, его нужно бронировать заранее. Не зря же наша гостиница пятизвездочная!»

К счастью для приезжего, в этот момент появилась администратор. Омега сделала портье выговор и объяснила ему, что, если бы гостиница была конечной, тогда действительно было бы нельзя ничего поделать. Но гостиница бесконечна, и проблему можно решить, причем очень просто.

Омега объявила по громкой связи: «Дорогие постояльцы! Убедительно просим каждого из вас переселиться этажом выше». Все числа выполнили инструкции Омegi. Число 1 переехало на второй этаж, число 2 — на третий, число 3 — на четвертый и так

далее. Первый этаж остался свободным, и 0 может отныне считать себя постояльцем гостиницы.

— Пожалуйста, запомните, что я сделала, — сказала администратор пораженному Эпсилону. — Я надеюсь, что теперь вы и сами сумеете разместить любое конечное число новых постояльцев.

— Разумеется, — ответил портье. — Если в гостинице появятся тысяча новых жильцов, я просто попрошу каждого из наших долговременных постояльцев переселиться в номер, на тысячу больший того, в котором он живет сейчас, и тогда освободится нужное число номеров.

Удовлетворенная этим ответом, Омега вернулась к другим занятиям, но тут ее отвлек телефонный звонок. Подняв трубку, она услышала рассерженный голос числа 13.

— Я хочу пожаловаться на непомерные расценки, — сказала 13. — 1000 КШ (космических шекелей) в сутки — это грабеж среди бела дня! Особенно учитывая, что, даже если вы брали бы с нас всего лишь по половине КШ, ваши доходы не изменились бы: ваша прибыль в любом случае бесконечна.

— Мне очень жаль, но я не могу так сильно снизить расценки, — отвечала администратор. — Одно лишь ежедневное обслуживание каждого номера обходится в 20 КШ, не говоря уже о зарплатах Эпсилона, Сигмы и Лямбды!

— Это не проблема, — продолжало 13. — Даже если ваши расходы на каждый номер составляют 500 КШ в день и вы платите своему персоналу по 70 КШ в секунду, вы все равно можете брать с каждого постояльца по пол-КШ за сутки, да еще и забирать себе по миллиарду КШ в день на мелкие расходы.

— Как это? — спросила Омега.

— Очень просто. Хотя ваши расходы бесконечны, бесконечны и ваши доходы. Вы можете в любой момент отложить из своих доходов миллиард КШ, и доходы все равно останутся бесконечными и будут уравнивать расходы. У одного моего богатого друга есть купюра, номинал которой — бесконечное количество КШ. Однажды я видел, как он купил газету и расплатился этой купюрой. Знаете, сколько ему дали сдачи? Ему просто вернули ту же купюру! Потому что газета стоила 2 КШ, а бесконечность минус два — это все равно бесконечность. Так всегда и бывает. Богатым все достается бесплатно. Но вернемся к нашей проблеме. Даже если вы снизите плату за номер до одной тысячной КШ, ничто на самом деле не изменится. Хватит даже и одной триллионной.

— Хмм... — пробормотала Омега. — В ваших словах есть своя логика. Интересная идея... Обещаю вам, что подумаю об этом. Кстати, будь у меня купюра номиналом в бесконечное число КШ, я бы

тут же бросила бы работу. В самом деле, сколько бы я ни заработала, это ничего не добавило бы к уже бесконечному состоянию.

Мечты Омеги о возможности отдыха от работы прервало сообщение, появившееся на экране ее компьютера. В нем говорилось:

*Гостинице Гильберта
с планеты Альфа-Отрицательная*

Все наши постояльцы, отрицательные целые числа $-1, -2, -3 \dots$ хотят приехать к вам на одну неделю. Будем признательны, если вы сумеете разместить их в своей гостинице.

С уважением,
Ваш верный друг,
-17

Теперь речь шла о размещении бесконечного числа ожидающихся новых постояльцев, так что предыдущее решение — с перемещением жильцов на конечное количество номеров — уже не работало. Нельзя же попросить их переселиться на бесконечное число этажей выше! Это заняло бы бесконечное время, и к тому же никто не знал бы, на сколько именно ему следует подняться и где остановиться.

«Может быть, мы все-таки сможем подняться на бесконечное число этажей за конечное время? — подумала про себя Омега. — Предположим, что первый этаж можно миновать за полминуты, второй — за четверть минуты, третий — за одну восьмую минуты и так далее... Вот оно! Я придумала

способ переехать на бесконечное число этажей всего за минуту! Но куда будут переезжать числа? В какие номера? Нет, так ничего не выйдет. Нужно придумать что-то другое».

Администратор попыталась изобрести другое решение, но так ничего и не добилась. В конце концов она решила обсудить эту проблему с портье, Эпсилоном. Может быть, совместными усилиями им удастся найти какое-нибудь решение? Но и это не помогло.

Не видя другого выхода, Омега решила обратиться за помощью к Сигме и Лямбде. До поступления на работу в гостиницу обе они прослушали спецкурсы по алгебраической топологии и функциональному анализу.

— Поселить их здесь совсем не трудно, — заявили сестры. — Когда мы проходили теорию множеств, эта задача была первым упражнением, которое нам задали. Вот как она решается. Числа 0 и 1 останутся там, где они живут сейчас, на первом и втором этажах. Все остальные числа переедут в номера, соответствующие их удвоенным значениям. То есть число 2 переселится в номер 4, число 3 — в номер 6, число 4 будет наслаждаться уютом номера 8 и так далее и так далее. Тогда все нечетные номера (3, 5, 7, 9...) освободятся, и у нас получится бесконечное количество незанятых номеров. Мы сможем разместить всех постояльцев.

Омега пришла в такой восторг от предложения изобретательных сестер, что повесила в холле гостиницы следующее объявление:

Пустых номеров нет.
Гостиница полностью занята.
Есть свободные номера.
У нас всегда найдется место.

Так все и случилось. Когда приехали отрицательные числа, все удалось как нельзя лучше. Их расселили по номерам без каких бы то ни было затруднений, и гостиница стала выглядеть следующим образом:

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Жилец	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	...

Сейчас я объясню новое распределение номеров. 0 остался в номере 1, в котором он и жил до приезда отрицательных чисел. Все остальные положительные целые числа оказались в номерах, соответствующих их удвоенным значениям. Например, число 3 поселилось в номере 6, а число 111 — в номере 222.

Каждому отрицательному числу достался номер, соответствующий значению постояльца,

умноженному на (-2) плюс 1. Таким образом, число -1 оказалось в номере 3, а число -17 — в номере $(-17) \times (-2) + 1 = 35$.

Следующая неделя была спокойной и для гостиницы, и для ее постояльцев.

Когда отрицательные числа выехали из гостиницы, 0 решил уехать вместе с ними. После их отъезда Омега, к удивлению своему, обнаружила, что натуральные числа, некогда полностью занимавшие гостиницу, теперь заполняют только половину ее: занятыми остались только четные номера. Собственно говоря, теперь она могла сократить расходы, уволив Сигму, которая отвечала за обслуживание нечетных номеров, оказавшихся теперь совершенно пустыми. Правда, Сигма помогла ей решить проблему с размещением отрицательных чисел, не говоря уже о том, что Омеге казалось неправильным разлучать сестер. Однако факт оставался фактом: так или иначе, хотя в гостинице оставалось точно такое же количество постояльцев, которое раньше занимало ее полностью, ее заполненность упала до 50 процентов!

«Тут происходит что-то странное, — подумала Омега. — Что же случится, — задумалась она, постепенно начиная беспокоиться, — если число 1 переселится в номер 10, число 2 — в номер 20, число 3 — в номер 30 и так далее? Заполненность

гостиницы упадет до 10 процентов, хотя из нее не выедет ни один из постоянных жильцов! Все натуральные числа по-прежнему будут на месте, и тем не менее уровень заполненности будет таким низким, что меня, того и гляди, уволят!»

Все еще обдумывая эту ужасную мысль, она вспомнила, что через две недели в гостинице должна пройти важная конференция под названием «Положительная рациональность в эпоху рациональной положительности», и все ее участники — то есть все положительные рациональные числа — должны будут провести в гостинице три положительно рациональных дня.

«Мы без труда найдем место для всех, — сказала себе Омега. — Гостиница стоит полупустой, и в ней имеется бесконечное количество свободных номеров».

Однако спокойствие Омеги было недолгим. Внезапно на нее нахлынули тревожные мысли. Омега осознала, что рациональные числа со знаменателем 2 могут полностью занять гостиницу, если дробь $1/2$ поселится в номере 1, дробь $2/2$ — в номере 2, дробь $3/2$ — в номере 3 и так далее. Но в то же время точно таким же образом могут занять всю гостиницу и рациональные числа со знаменателями, равными 3, 4 или любым другим числом: $1/3$ — в номере 1, $2/3$ — в номере 2, $3/3$ — в номере 3... Другими словами, на конференцию

приедет бесконечное количество бесконечных множеств, и любое из них может занять всю гостиницу целиком. Не говоря уже о том, что даже до их прибытия гостиницу уже занимает бесконечное количество натуральных чисел (1, 2, 3, 4...).

Администратор попыталась рассмотреть другие возможные варианты: например поселить 1 в номере 1, 2 — в номере 1001, 3 — в номере 2001..., а затем предоставить числу $1/2$ номер 2, числу $2/2$ — номер 1002, числу $3/2$ — номер 2003 и так далее. Однако она быстро поняла, что и этот план не дает решения проблемы (объясните, почему этот вариант не работает).

Поскольку Омеге было неловко еще раз беспокоить Лямбду и Сигму — в их профессиональные обязанности входила уборка номеров, а не советы по стратегическим вопросам, — она решила (поскольку у нее не было особого выбора) обратиться за помощью к главному математику системы Апейрон (в которой находится планета Проксима-Инфинитас) профессору Финкельштейну-Островскому-Канторовичу.

Пожилой, но энергичный профессор заявил, что проблема только кажется сложной, но на самом деле это не так:

— Благодаря человеку по имени Евклид, который жил когда-то на очень отдаленной маленькой голубой планете под названием Земля, эту задачу

можно решить сравнительно легко, — сказал профессор с тройной фамилией.

— Что же сделал этот Евклид? — спросила администратор гостиницы.

— Он доказал, что количество простых чисел бесконечно, — ответил профессор.

— И как это поможет нам найти номера для всех постояльцев? — спросила Омега, явно сомневавшаяся в наличии какой бы то ни было связи между бесконечной природой простых чисел и возможностью организовать размещение всех участников конференции.

— Я объясню как можно проще, — пообещал Финкельштейн-Островский-Канторович. — Тот факт, что простых чисел существует бесконечно много, позволяет нам получить весьма простое решение задачи размещения всех рациональных чисел. Вот план наших действий. Мы будем распределять их по номерам, соответствующим простым числам, возведенным в последовательные степени, а именно:

Первое простое число — 2. Мы поселим число 1 в номере 2, а число 2 — в номере 2^2 , число 3 получит номер 2^3 , число 4 будет жить в номере 2^4 ... и так далее. Следующее простое число — 3, — продолжал профессор. — Поэтому дробь $1/2$ поселится в номере 3, $2/2$ — в номере 3^2 , $3/2$ — в номере 3^3 , $4/2$ — в номере 3^4 и так далее.

— Но ведь $2/2$ равно 1, а число 1 уже живет в номере 1, — задумалась администратор гостиницы.

— В этом нет никакой проблемы, даже наоборот. Числу 1 достанется множество номеров, и оно выберет, в каком из них жить, — ответил профессор.

Теперь мы подходим к третьему простому числу, которое равно 5. Значит, числу $1/3$ достанется номер 5. — Именно в этот момент администратор поняла, почему простые числа непременно нужно возводить в степени: дело в том, что номер 4 уже занят числом 2.

— $2/3$ поселится в номере 5^2 , — продолжал профессор, — дроби $3/3$ будет выделен номер 5^3 ... вы ведь уже поняли логику моего метода. Затем мы переходим к 7, четвертому простому числу. Идея остается той же. $1/4$ получает номер 7, $2/4$ — номер 7^2 , $3/4$ сможет вселиться в номер 7^3 и так далее и так далее — снова и снова и снова. Эта схема расселения очень интересна, — добавил профессор. — Хотя имеется бесконечное число бесконечных групп постояльцев, и каждая из этих групп сама по себе способна целиком заполнить гостиницу, мы сумели разместить всех их. Причем... у нас по-прежнему остается бесконечное количество свободных номеров!

— Что?! — Администратор гостиницы не поверила своим ушам.

— Все номера, не соответствующие простым числам или степеням простых чисел, — например 1, 6, 10, 12, 14, 15, 18... — остаются совершенно пустыми.

Администратор, лишь мгновением раньше бывшая в восторге от того блестящего метода, который предложил для решения проблемы расселения профессор, снова впала в полнейшее отчаяние. Перед ней снова возникла проблема уровня заполненности гостиницы. Хороший администратор гостиницы просто не может позволить себе иметь бесконечно много (!) незанятых номеров. Что подумают хозяева гостиницы?

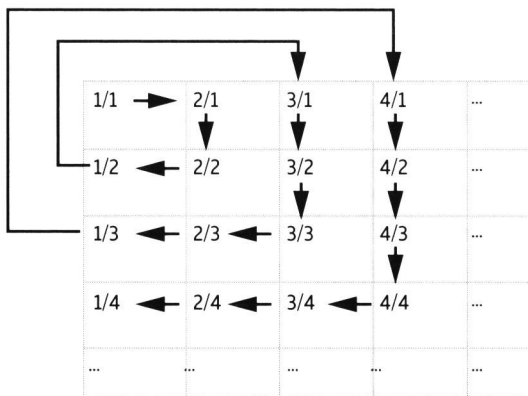
— Послушайте, — сказала Омега профессору, — одни только натуральные числа могут заполнить всю гостиницу, и так оно раньше и было. А теперь вы предлагаете какую-то безумную схему, по которой натуральные числа вместе с бесконечным количеством других бесконечных множеств, каждое из которых тоже могло бы заселить всю гостиницу, создают мне уровень заполненности гораздо ниже 100 процентов. По-моему, в этом нет никакой логики. Я, конечно, не специалист, но нет ли какого-нибудь способа, который позволил бы мне отчитаться начальству о значительно более высокой заполненности гостиницы?

— Что же, я думал, что решение будет гораздо более эффективным, если останется бесконечное

число незанятых номеров. Но если вас интересует только уровень заполненности, я могу предложить другой вариант, в котором все номера будут заполнены на 100 процентов.

— Пожалуйста, расскажите мне о нем! — взмолилась Омега.

— Прежде чем я объясню это решение, нам нужно провести небольшую подготовку. Поставим в соответствие каждому рациональному числу пару чисел. Первым из них будет его числитель, а вторым — знаменатель. Например, числу $3/4$ будет соответствовать пара чисел (3, 4). Каждое натуральное число n мы будем записывать в виде дроби $n/1$; тогда ему будет соответствовать пара (n, 1). Например, числу 7 соответствует пара (7, 1). Теперь расположим все эти числа следующим образом:



Отмечу для любителей алгебры, что в общем случае мы выделяем числу n/m номер $n^2 - m + 1$, если $n \geq m$, и номер $(m - 1)^2 + n$, если $n < m$.

Например, у числа $3/2$ числитель больше знаменателя; следовательно, ему должен быть предоставлен номер $3^2 - 2 + 1$, то есть номер 8. Можете убедиться сами: если начать с пары (1, 1) и следовать по стрелкам (см. приведенный выше чертеж), то клетка с парой (3, 2) будет восьмой на этом пути.

Администратор была вне себя от счастья. Она даже запустила новую рекламную кампанию под лозунгом «**Мы бесконечно рады всем!**».

Профессор Финкельштейн-Островский-Канторович отметил, что существует огромное количество разных способов расселения в гостинице рациональных чисел:

— Вот один из этих способов. Определим для каждой дроби n/m «высоту», равную сумме числителя и знаменателя этой дроби. Другими словами, пусть высота h дроби n/m равна $n + m$. Наименьшая такая высота равна 2, причем есть только одна дробь с такой высотой — а именно $1/1$. Есть два рациональных числа, высота которых равна 3; это числа $1/2$ и $2/1$. У чисел $1/3$, $2/2$ и $3/1$ высота $h = 4$, а таких чисел, для которых $h = 5$, существует четыре: $1/4$, $2/3$, $3/2$, $4/1$. Таким образом, все рациональные числа можно расположить в порядке возрастания их высоты¹.

h	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	...
Число	1/1	1/2	2/1	1/3	2/2	3/1	1/4	2/3	3/2	4/1	1/5	...
Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Головоломка

Докажите, что по предложенной выше схеме расселения число n/m будет жить в номере, соответствующем выражению $\frac{1}{2} \cdot (n + m - 2)(n + m - 1) + n$.

Например, число $2/3$ ($n = 2$, $m = 3$) окажется в номере $\frac{1}{2} \cdot (2 + 3 - 2)(2 + 3 - 1) + 2 = 8$.

Подсказка: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Слава о гостинице, которая способна разместить любую группу постояльцев, широко разошлась. Не имело значения, какая приезжала группа, конечная или бесконечная; не имело значения, были ли уже в гостинице другие жильцы; даже не имело значения, были ли все номера в гостинице уже забронированы. Как только приезжала новая группа постояльцев, им всем можно было найти место.

Но однажды случилось нечто, чего Омега совершенно не ожидала. Утром этого дня по электронной почте пришло сообщение с дальней планеты Дельта-Континуум: в гостиницу собирались приехать все числа, расположенные между 0 и 1. Администратор гостиницы, разумеется,

знала, что между 0 и 1 заключено «довольно много» чисел, например $\sqrt[3]{3/2}$, $e^6 - \pi - \pi^5$, $1/2$, $3/156$, $e/47$, $(5 + 13\sqrt{2})/213$... Тем не менее она не предполагала, что расселение всех их вызовет какие-либо затруднения. Разве в гостинице уже не жило бесконечное количество бесконечных множеств? Что же может быть трудного в размещении всего одной-единственной бесконечной группы?

Но затруднения возникли, и все ее попытки их устранить не дали никакого результата. Ей ничего не оставалось, как снова обратиться за помощью к профессору Финкельштейну-Островскому-Канторовичу или Сигме и Лямбде. Омега решила позвонить профессору. К ее удивлению и разочарованию, заслуженный профессор не только не смог предложить решения, но и установил, что решения у этой задачи попросту *нет*.

— А если выселить из гостиницы все натуральные числа? Не поможет ли это? — все же не сдавалась Омега.

— Ничуть не поможет, — уверенно отвечал профессор.

— Как же может быть, что в бесконечной гостинице, тем более пустой, не хватит места для одной-единственной группы постояльцев? — по-прежнему не желала мириться с этой неприятной новостью Омега.

— Не упрямитесь, — сказал профессор. — Вместо того чтобы искать способы расселения этих чисел, позвольте, я докажу вам, что в бесконечной гостинице не найдется места не только для всех чисел между 0 и 1, но даже и для всех чисел, записанных с использованием только цифр 0 и 1.

— Вы серьезно? — спросила администратор.

— Профессор Финкельштейн-Островский-Канторович всегда серьезен, когда говорит о математике или музыке, — ответил он, говоря о себе в третьем лице.

— Ну хорошо. Тогда извольте объясниться. — И Омега приготовилась выслушать его объяснение.

Объяснение профессора Финкельштейна-Островского- Канторовича

— Прежде всего мы должны договориться, что записываем все числа в бесконечной нотации. Я хочу сказать, что вместо 0,101 мы будем писать 0,101000... Теперь начнем с предположения, что нам все же удалось решить эту задачу, и мы смогли найти в гостинице номера для всех чисел.

— Я полагаю, вы собираетесь показать мне доказательство от противного, не так ли? Как это типично для математиков! — сказала Омега.

— Вот как будет выглядеть распределение чисел по номерам: число A_1 будет в номере 1, число A_2 — в номере 2, число A_3 — в номере 3 и так далее. Кто же такие все эти «А»? Мы сможем узнать их, потому что под своими «новыми» именами они будут выглядеть следующим образом:

$$A_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} \dots$$

$$A_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} \dots$$

$$A_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35} \dots$$

$$A_4 = 0, a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} a_{45} \dots$$

$$A_5 = 0, a_{51} a_{52} a_{53} a_{54} a_{55} \dots$$

.....

Другими словами, a_{ik} — это k -я цифра после запятой в числе, которое будет жить в i -м номере. При этом следует помнить, что любая цифра, обозначенная a_{ik} , — это либо 0, либо 1. Приведу пример. Предположим, что число 0,111000110010... живет в номере 3. Следовательно, для этого числа $a_{31} = 1$, $a_{32} = 1$, $a_{33} = 1$, $a_{34} = 0$, $a_{35} = 0$... — дальше все очевидно. Так вот, — продолжал профессор, — я могу предъявить вам число, которое находится между 0 и 1, то есть входит в группу постояльцев, приехавших с Дельты-Континуума, но не относится к числам, живущим в гостинице. Этот факт докажет, что найти в гостинице место

для всех чисел, расположенных между 0 и 1, невозможно, потому что список, который мы составили, получился слишком общим.

Обозначим число, *не* живущее в гостинице, B . Разумеется, мы запишем его в виде $B = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$ где b_i может быть равно либо 0, либо 1, и образуем его так, чтобы никакое b_i не было равно a_{ii} (a_{ii} — это все числа, стоящие на диагонали составленного нами списка). Как мы это сделаем?

Идея чрезвычайно проста. Если $a_{ii} = 0$, то b_i должно быть равно 1. Если же $a_{ii} = 1$, то b_i должно быть равно 0.

Приведу пример. Допустим, мы как-то расположили все числа от 0 до 1, в записи которых используются только цифры 0 и 1. Они расположены совершенно в произвольном порядке, но предположим, что мы расставили их следующим образом:

$$A_1 = 0,010010001\dots$$

$$A_2 = 0,010101010\dots$$

$$A_3 = 0,110110110\dots$$

$$A_4 = 0,100110111\dots$$

$$A_5 = 0,011111110\dots$$

.....

Сформируем теперь число B . Цифру b_1 мы определим равной 1, потому что $a_{11} = 0$ (первая

цифра после запятой в числе A_1 равна 0); цифра b_2 должна быть равна 0, потому что $a_{22} = 1$ (a_{22} — это вторая цифра после запятой в числе A_2); цифра b_3 должна быть равна 1, потому что $a_{33} = 0$. И так далее.

— Но откуда вы знаете, что число B не живет в гостинице? — не смогла смолчать Омега.

— Это совершенно очевидно. Первая цифра после запятой в числе B , то есть b_1 , должна отличаться от первой цифры после запятой в числе A_1 (то есть от цифры a_{11}). Мы уверены в этом, потому что мы специально построили число B так, чтобы на этом месте стояла другая цифра. Отсюда очевидно, что число B не может быть равно числу A_1 , даже если бы все остальные его цифры в точности совпадали со всеми остальными цифрами числа A_1 .

Перейдем теперь ко второй цифре после запятой в числе B , то есть к цифре b_2 . Она должна отличаться от второй цифры после запятой в числе A_2 — по той же самой причине. Следовательно, каковы бы ни были другие цифры числа B , это число никак не может быть равно числу A_2 .

Продолжим аналогичные рассуждения для всех остальных цифр числа B — для всего их бесконечного количества. Результат будет тем же самым для каждой из них. В числе B всегда будет по меньшей мере одна цифра, отличающая его от чисел,

входящих в группу A_i . Следовательно, мы должны заключить, что число В не может быть равно никакому конкретному числу А. Другими словами, число В не является постояльцем гостиницы. Оно приехало с Дельты-Континуума вместе со всеми своими друзьями, но, в отличие от них, в гостинице не поселилось.

— Если это так, я внесу число В в самое начало списка, перед A_1 ! — Омега запрыгала на месте, чрезвычайно возбужденная идеей, которая только что пришла ей в голову. Надо сказать, что разговоры с Омегой не были трудными для профессора, но иногда раздражали его.

— Да вы попросту ничего не поняли из моего объяснения! Смотрите: даже если вы добавите число В в начало списка, я всегда смогу сформировать некое новое число — назовем его Y , — которого в списке не будет, точно так же, как я сформировал число В.

— Вы правы. Но я все равно не понимаю, как может быть, что кому-то из постояльцев не найдется места в бесконечной гостинице.

— Это значит, что, хотя количество номеров в вашей гостинице и бесконечно, количество постояльцев, которые хотят в ней поселиться, еще более бесконечно, — объяснил профессор.

— Что вы такое говорите? *Более бесконечно?* — спросила чрезвычайно взволнованная Омега. —

Объясните же мне, как бесконечное может быть более бесконечным, чем бесконечное!

Но престарелый профессор был совершенно обессилен своим долгим объяснением.

Интермедия

Дилемма конечного и бесконечного: От гугола до «Гугла»

Как сравнить размеры разных множеств? Больше ли количество капель воды в Атлантическом океане, чем число возможных позиций на шахматной доске? Больше ли число мелодий, которые можно сочинить, чем количество рациональных чисел между 0 и 1? Как узнать, что в одном множестве содержится меньше элементов, чем в другом, если речь идет о множествах, чрезвычайно больших или даже бесконечных? В каком случае можно сказать, что два множества имеют одинаковые размеры? Легко ли отличить очень большую группу от бесконечной? О проблемах, которые могут возникнуть, если мы примем чрезвычайно большое множество за множество бесконечное, знал еще Архимед. В трактате под названием «Псаммит» (то есть «Исчисление песчинок») великий сиракузянин решил найти верхний предел, ограничивающий число песчинок, имеющихся во Вселенной.

Некоторые люди полагают... что число песка по величине бесконечно; я говорю... о том [песке], который имеется во всех странах, как населенных, так и не населенных. Есть, однако, и такие, которые не считают его бесконечным, но тем не менее думают, что не существует такого имеющего название числа, которое было бы больше его количества^{}.*

Архимед

Архимед установил, что число песчинок во Вселенной ограничено сверху числом 10^{63} , и доказал таким образом ошибочность обоих предыдущих утверждений.

Через много лет после того, как Архимед завершил свои расчеты, а именно в 1938 г., английский астрофизик, астроном и математик сэр Артур Стэнли Эддингтон прочитал в кембриджском Тринити-колледже лекцию, в которой заявил:

Я полагаю, что во Вселенной существует 15 747 724 136 275 002 577 605 653 961 181 555 468 044 717 914 527 116 709 366231 425 076 185 631 031 296 протонов и такое же количество электронов.

Это огромное число известно теперь под названием «число Эддингтона». Выглядит оно весьма эффектно, но не имеет никакого отношения к бесконечности.

^{*} Цит. по: Архимед. Сочинения / Пер. с др.-греч. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1962.

Как писали в книге «Математика и воображение» (Mathematics and Imagination, 1940) математики Эдвард Казнер и Джеймс Ньюмен, необходимо понимать, что «очень много» и «бесконечность» — две совершенно разные концепции. Нет такой точки, в которой крупная звезда становится бесконечной. Мы можем записать сколь угодно большое число, и оно будет не ближе к бесконечности, чем числа 1 или 7.

Интересно отметить, что именно в упомянутой выше книге впервые появилось слово «гугол». Это название для числа, записывающегося в виде единицы, за которой следуют сто нулей, предложил племянник Казнера Милтон, которому было тогда девять лет. Кстати говоря, от искаженного написания слова «гугол» произошло и название Google.

Тот же необычный мальчик предложил и термин «гуголплекс» — название числа, образованного из единицы и очень многих нулей: «Гуголплекс должен состоять из 1, за которой пишут нули, пока не устанет рука». Сегодня гуголплексом называют число, гораздо более точно определенное: $10^{\text{гугол}}$. Даже не пытайтесь представить себе это число. Астроном и писатель Карл Саган (1934–1996) отмечал в своем телесериале «Космос: Личное путешествие», что записать гуголплекс невозможно в связи с одной очень серьезной проблемой: в наблюдаемой Вселенной не хватит места для всех его цифр.

Тем не менее даже гуголплекс бесконечно далек от бесконечности. На самом деле это число ничуть не ближе к бесконечности, чем 1 или 7, да и любое другое число, которое вы можете назвать.

Даже число, равное гуголплексу в степени гуголплекса остается определенно конечным. Я буду называть это число пухплексом в честь своего любимейшего друга, милого, пухлого медвежонка Винни-Пуха. Если даже гуголплекс превосходит всякое человеческое воображение, то что уж говорить о пухплексе? Вы можете придумывать сколь угодно большие числа и даже давать им названия по своему вкусу. Можно возвести пухплекс в степень пухплекса, а потом подумать о факториале получившегося числа — одна только попытка осознать размеры таких чисел вызывает у меня головную боль — и все равно эти числа будут конечными и останутся не менее далеки от бесконечности, чем число 7.

Вернемся же к разговору о бесконечности.

КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И УКРОЩЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ

О футболистах и манекенщицах (одно-однозначное соответствие)

Вернемся к вопросу о том, когда можно считать, что два множества имеют одинаковые размеры.

В случае конечных множеств никаких затруднений не возникает. По меньшей мере в принципе эту задачу можно решить методом подсчета: если в множестве A столько же элементов, сколько и в множестве B , можно сказать, что эти множества равного размера.

Трудности возникают, однако, когда речь заходит о бесконечных множествах. В этом случае подсчет их элементов невозможен. Как вы думаете, можно ли сравнить размеры двух групп без подсчета? Оказывается, можно.

Для начала попытаемся немного разобраться в ином подходе к сравнению конечных множеств. Представим себе модный клуб, в котором идет пол-

ным ходом ежегодная встреча топ-моделей и знаменитых футболистов. Праздник в самом разгаре, и многие футболисты, так же как и многие манекенщицы, самозабвенно пляшут на танцплощадке.

Можем ли мы определить, не считая, кого там больше — футболистов или манекенщиц, или же, может быть, и тех и других присутствует поровну?

У этой задачи есть одно чрезвычайно простое решение: нужно всего лишь включить какую-нибудь спокойную музыку и объявить, что каждый футболист должен пригласить на танец манекенщицу. После этого есть три варианта развития событий:

1. Танцуют все, что означает, что число футболистов равно числу манекенщиц.
2. Остаются футболисты, которые не смогли найти себе пары и стоят, печальные и одинокие, возле бара. В этом случае ясно, что футболистов оказалось больше, чем манекенщиц.
3. Не танцуют некоторые из манекенщиц: множество манекенщиц оказалось больше, чем множество футболистов.

Важно отметить, что этот метод сравнения не позволяет нам узнать точное число футболистов и манекенщиц. Однако хотели-то мы *сравнить* размеры этих двух групп, и именно это мы и сделали.

Этот метод сравнения работает и при сравнении бесконечных множеств, подсчет элементов которых невозможен.

Теперь нам пора познакомиться с двумя довольно скучными — но важными — концепциями.

Одно-однозначное, или инъективное, соответствие или отображение (1:1)

Соответствие между элементами множества А и множества В, при котором разные элементы множества А находятся в соответствии (образуют сочетания) с разными элементами множества В и наоборот, называется одно-однозначным отображением (или *инъекцией*). Для краткости соответствие такого типа обозначают 1:1.

Например, предположим, что у нас есть три футболиста — Роналду, Месси и Мбаппе — и четыре манекенщицы — Адриана, Жизель, Кейт и Нина. Если мы составим следующие пары футболистов и манекенщиц:

А	В
Роналду	Нина
Месси	Жизель
Мбаппе	Кейт

то получим одно-однозначное соответствие между двумя сформированными таким образом множествами, потому что любые два футболиста

(разные элементы множества A) попадают в пары с разными манекенщицами (разными элементами множества B). То обстоятельство, что Адриана осталась без пары, с точки зрения этого определения не имеет значения. Раз у каждого элемента множества A есть уникальная пара, соответствие можно считать одно-однозначным.

Кроме того, пары можно составить и следующим образом:

А	В
Роналду	Нина
Месси	Кейт
Мбаппе	Кейт

В этом случае соответствие не будет одно-однозначным, потому что два разных футболиста попали в пары с одной и той же манекенщицей, Кейт. В множестве A больше элементов, чем в множестве B .

Сюръективное соответствие

Когда существует такое соответствие элементов множества B элементам множества A , что для каждого элемента множества B имеется *по меньшей мере* один соответствующий элемент множества A , такое соответствие называют сюръективным. Обратите внимание, что на один и тот же элемент множества B могут отображаться несколько элементов множества A (в этом случае получившееся отобра-

жение не будет одно-однозначным). При таком соответствии говорят, что множество А сюръективно отображается на множество В.

Предположим, например, что у нас есть теперь пять футболистов — Роналду, Месси, Мбаппе, Кен и Неймар — и те же четыре манекенщицы — Адриана, Жизель, Кейт и Нина. Для них можно образовать следующее сюръективное соответствие:

А	В
Роналду	Нина
Месси	Жизель
Мбаппе	Кейт
Кен	Кейт
Неймар	Адриана

Это соответствие сюръективно, потому что каждый из элементов множества В (четырех манекенщиц) образует пару *по меньшей мере* с одним элементом множества А (футболистом). Заметим, что в этом случае два футболиста «отображаются на» одну из манекенщиц (Кейт). В то же время следующее соответствие *не будет* сюръективным:

А	В
Роналду	Кейт
Месси	Кейт
Мбаппе	Адриана
Кен	Нина
Неймар	Адриана
	Жизель

Почему? Потому что один из элементов множества В (Жизель) не образует пары ни с одним из элементов множества А. Обратите внимание, что на двух манекенщиц «отображаются» по два футболиста, в результате чего бедная Жизель остается в одиночестве.

Если между двумя множествами А и В существует и одно-однозначное, и сюръективное соответствие, это означает, что элементы этих множеств могут быть разбиты на «идеальные» пары — каждому индивидуальному элементу множества А может быть сопоставлен элемент множества В, а каждому элементу множества В может быть сопоставлен элемент множества А. Соответствие, которое является одновременно инъективным и сюръективным, называется биективным*.

Совершенно ясно, что, если оба множества А и В конечны, то существование между ними и одно-однозначного, и сюръективного соответствий возможно, только если оба множества содержат одинаковое количество элементов. Поясню: наличие одно-однозначного (инъективного) соответствия означает, что количество элементов множества В равно количеству элементов множества А или больше его, а наличие сюръективного соответствия предполагает, что большее или рав-

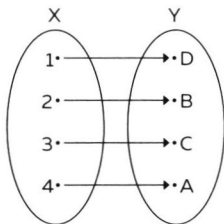
* Или взаимно-однозначным.

ное число элементов содержит множество А (поскольку каждый элемент множества В может быть связан с несколькими элементами множества А). В сочетании эти два условия означают, что, если А и В — конечные множества, то количество элементов в них должно быть одинаковым.

Можно продемонстрировать, что соответствие между множеством футболистов и множеством манекенщиц является одновременно одно-однозначным и сюръективным тогда, и только тогда, когда оба эти множества содержат одно и то же количество элементов, как в следующем примере (приведенном для тех, кто тоскует по прошлому):

А	В
Зидан	Клаудиа
Пеле	Синди
Марадона	Кейт
Бекхэм	Наоми
Мальдини	Линда

Вот еще один пример:



В нем также имеются одно-однозначное и сюръективное соответствие, и нам даже не пришлось привлекать футболистов или манекенщиц.

Теперь, прояснив все эти вопросы, вернемся к бесконечным множествам. Исходя из изложенного выше, кажется естественным дать следующее определение равенства количества элементов двух множеств (будь то конечных или бесконечных):

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОМОЩНОСТИ

Два множества A и B имеют равную мощность, если между элементами множества A и элементами множества B существует некоторое (любое) соответствие, одновременно одно-однозначное (инъективное) и сюръективное.

Что же это за «мощность»? Возможно, вы помните, что мы уже упоминали ее некоторое время назад. Смысл мощности конечных множеств вполне ясен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

В случае конечных множеств мощность — это просто вычурное обозначение «количества элементов множества». Например, множество

$A = \{17, 42, 1729, 1\,234\,321\}$ содержит четыре элемента; следовательно, его мощность (которую называют также кардинальным числом) равна 4. Это утверждение можно записать следующим образом: $\#A = 4^*$.

Однако в случае бесконечных множеств понятие «количества элементов множества» не очевидно и *не может быть* очевидно. Когда речь идет о бесконечных множествах, мы можем только *сравнивать* их мощности.

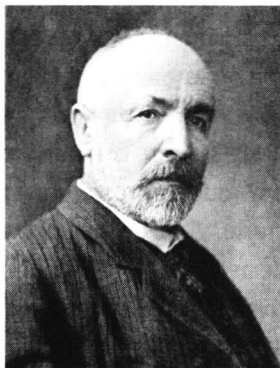
Парадокс Галилео Галилея

В начале XVII в. Галилео Галилей описал парадокс, который был назван его именем. В парадоксе Галилея речь идет об одно-однозначном и сюръективном соответствиях между множеством натуральных чисел $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ и множеством полных квадратов $\{1, 2, 4, 9, 16, \dots\}$. Из элементов этих множеств можно составить пары, как показано в приведенной ниже таблице. Должно быть очевидно, что для каждого элемента множества A существует один, и только один, соответствующий ему элемент множества B , и наоборот:

* В русской математической литературе чаще используется другое обозначение мощности: $|A|$. Есть и другие варианты: $\overline{A}$ или $\text{card}(A)$. Мы будем использовать символ $\#$, как это делает автор книги.

Множество А	Число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Множество В	Квадрат	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	...

Возникающий здесь парадокс состоит в том, что множество натуральных чисел и его собственное подмножество — то есть подмножество, не равное самому этому множеству*, в данном случае множество полных квадратов, — имеют одинаковую мощность (то есть между ними существует одно-однозначное и сюръективное соответствие). Как такое может быть, если натуральных чисел больше, чем квадратов, то есть в одном множестве должно быть больше элементов, чем в другом? Как же они могут быть равномоощными?!



Георг Кантор



Галилео Галилей

© Morphot Creation / Shutterstock.com

* А также не являющееся пустым множеством, но это сейчас не важно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАДОКСА

Положение или предположение, противоречащее общепринятому мнению; утверждение или ощущение, кажущееся противоречивым или идущим вразрез со здравым смыслом; нечто выглядящее или представленное абсурдным, но могущее быть истинным.

Как замечательно, что мы столкнулись с парадоксом! Теперь у нас есть надежда чего-нибудь добиться.

Нильс Бор

Как я согласен с Нильсом Бором! Парадоксы прекрасно помогают как следует встряхнуть процесс размышлений.

Галилей считал, что этот парадокс, о котором он писал в «Беседах о двух новых науках» (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali*, 1638), доказывает, что в разговоре о бесконечных множествах нельзя использовать прилагательные вроде «равный», «большой» или «меньший»; более того, как мы уже упоминали гораздо раньше в этой книге, существам с конечным разумом вообще лучше держаться подальше от всего того, что касается бесконечности.

Но что из того, что наш разум конечен? Почему это должно приковывать нас к одним лишь раз-

мышлениям о конечном? Кантор и Дедекинд попытались взять это кажущееся затруднение и превратить его в основание новой теории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДМНОЖЕСТВА

Множество A можно назвать подмножеством множества B , если *все* элементы множества A являются элементами B .

Например:

$A = \{\text{Густав Малер, Густав Холст, Густаво Дудамель}\}.$

$B = \{\text{Густав Малер, Густав Климт, Густав Холст, Густаво Дудамель, Гюстав Доре, Густаво Бокколи, Гюстав Курбе, ураган «Густав», Густав V Шведский}\}.$

Множество A является подмножеством множества B , потому что все элементы множества A содержатся и в B . Из этого определения также следует, что любое множество является подмножеством самого себя.

Вернемся к рассмотрению парадокса Галилея. Но сначала нам нужно запомнить еще пару определений. Итак:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННОГО ПОДМНОЖЕСТВА

Если множество A — подмножество множества B , но *не равно* множеству B^* , говорят, что A — собственное подмножество B . В предыдущем примере множество A является собственным подмножеством множества B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ КАНТОРА – ДЕДЕКИНДА

Множество называют бесконечным, если между ним и по меньшей мере одним из его собственных подмножеств есть как одно-однозначное (инъективное), так и сюръективное соответствие. Напомню кстати, что в случае конечных множеств собственное подмножество A не может иметь одно-однозначного соответствия с A !

Например, множество натуральных чисел бесконечно, потому что, как показал Галилей, оно эквивалентно одному из своих собственных подмножеств — множеству полных квадратов. Если мы хотим применить только что выученную замысловатую терминологию, можно сказать, что множество

* A также не является пустым множеством.

натуральных чисел и множество полных квадратов имеют равные кардинальные числа. Важно помнить следующее: в случае конечных множеств утверждение «часть всегда меньше целого» справедливо; в случае множеств бесконечных это не так. Мы уже видели более чем достаточно подтверждений этого обстоятельства: парадокс Галилея, предложенный Расселом вариант апории об Ахиллесе и черепахе из школы Зенона (см. выше раздел «Апология Зенона»), все чудеса бесконечной гостиницы Гильберта...

Головоломка: *Paradiso e inferno*

Некто осужден на вечные муки в аду. Другой человек проводит вечность в раю. На один день в году они меняются местами: несчастному грешнику позволяют насладиться восхитительной райской прохладой, а радостный обитатель рая пробует на вкус ужасы ада.

Рассуждая с точки зрения математики (то есть расчета кардинальных чисел), есть ли различия в том, как эти двое существуют после смерти?

Если вы считаете, что разница есть, объясните почему.

Если вы считаете, что разницы нет, ответьте на следующий вопрос: где предпочли бы провести вечность вы сами?

Парадокс Галилея — больше не парадокс; он попросту превратился в доказательство бесконечной

природы натуральных чисел. Разумеется, можно найти много других подмножеств, равномоощных множеству натуральных чисел (то есть имеющих такое же кардинальное число): множество простых чисел, множество четных чисел, множество натуральных чисел, делящихся на 101, множество чисел, точно равных факториалам, — $\{1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40\,320, 362\,880, 3\,628\,800, \dots\}$ — и так далее.

Мощность бесконечных множеств

Возьмем множество $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Оно по определению не бесконечно.

Почему? Потому что, если взять из него некое собственное подмножество E , мы не сможем найти между этими двумя множествами соответствия, которое было бы и одно-однозначным, и сюръективным. Другими словами, мы не сможем разбить все разные элементы множества D и разбить все разные элементы множества на пары.

Как уже было сказано выше, мощность конечного множества попросту равна числу содержащихся в нем элементов. Следовательно, можно написать $\#A = n$.

Но как определить мощность бесконечных множеств? Не можем же мы *подсчитать* элементы, содержащиеся в бесконечных множествах!

Есть ли вообще мощность у бесконечных множеств?

А если есть, то существуют ли некие мощности бесконечных множеств, большие, чем другие (посещение бесконечной гостиницы дает более чем достаточно оснований предположить, что такое может быть возможно)?

Существует ли «наименьшая» плотность бесконечного множества?

Существует ли «наибольшая» плотность бесконечного множества? «Бесконечна» ли плотность бесконечного множества? Если это так, как нам определить значение такой мощности?

Если вы хотите узнать ответы на эти и другие вопросы, оставайтесь с нами!

В отель Гильберта приезжают счетно-бесконечные множества



Любое конечное множество, очевидно, есть множество счетное. Если начать с первого элемента, перейти к следующему и так далее, то рано или поздно (даже если это множество содержит гуголплекс элементов) вы (или ваши потомки) дойдете до последнего элемента. Бесконечное множество называют «счетно-бесконечным», если оно имеет такую же мощность, как множество натуральных

чисел, то есть для него существует одно-однозначное и сюръективное соответствие с множеством натуральных чисел. Другими словами, его элементы можно расположить последовательно, из чего следует, что его элементы можно каким-то образом разместить в отеле Гильберта. Они счетны в том смысле, что мы можем расположить их так, чтобы у нас был первый элемент, затем второй, за ним — третий... и, хотя этот процесс никогда не завершится, мы все же пересчитываем эти элементы! Поэтому такие множества и называются «счетными».

Мы уже видели, что множество целых чисел и множество рациональных чисел можно расселить в бесконечной гостинице Гильберта без каких-либо затруднений. Это означает, что эти два множества, несомненно, относятся к множествам счетным.

Напомню, как именно размещались в гостинице рациональные числа. Как вы помните, мы расположили их в порядке возрастания «высоты», причем «высота» дроби a/b была определена равной $h = a + b$, а числа с одинаковой высотой располагались в порядке возрастания значения числителя (см. приведенную ниже таблицу). Вполне ясно, что у этих дробей, расположенных в таком порядке, есть инъективное соответствие с натуральными числами.

h	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	...
Рациональ- ное число	1/1	1/2	2/1	1/3	2/2	3/1	1/4	2/3	3/2	4/1	1/5	...
Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...



Давид Гильберт



Эмми Нётер

А вот напоминание о том, как можно разместить в самой шикарной математической гостинице во Вселенной целые числа:

Постоялец (Z)	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	...
Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

Выше мы обозначили мощность конечного множества символом $\#A$. Однако, поскольку завершить подсчет элементов бесконечного множества невозможно, для его мощности не может существовать никакого значения « n ». Следовательно, мощность счетно-бесконечного множе-

ства необходимо определить как-то иначе. Кантор обозначил ее символом $\aleph_0$ (алеф-нуль). Он состоит из буквы «алеф», взятой из еврейского алфавита, с подстрочным индексом 0¹. Если обозначить буквой N множество натуральных чисел, а буквой Z — множество целых чисел (как положительных, так и отрицательных, а также нуля), то для обоих этих множеств можно написать, что $\#N = \aleph_0$ и $\#Z = \aleph_0$.

Тот факт, что мощность счетно-бесконечного множества обозначается $\aleph_0$, намекает, что $\aleph_0$ — вероятно, наименьшая мощность бесконечного множества и что могут существовать и более высокие мощности бесконечных множеств (элементы которых мы все равно не можем пересчитать!). На самом деле так оно и есть.

Мини-головоломка

Докажите, что любое бесконечное множество содержит счетно-бесконечное множество.

Из этого упражнения, в частности, следует, что бесконечное множество *может* заполнить бесконечную гостиницу. Ключевое слово тут — «может».

Например, множество чисел, делящихся на 3, можно разместить в бесконечной гостинице так, что эти числа не займут все номера: нужно просто поселить каждое число в номере, соответствующем его значению.

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	...
Постоялец			3			6			9			12		

Остается бесконечное количество свободных номеров.

Но если каждое число, делящееся на 3, поселить в номере, соответствующем одной трети его значения, гостиница окажется полностью заселенной.

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	...
Постоялец	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	...	...

Это показывает нам, что множество чисел, делящихся на 3, — множество счетно-бесконечное (потому что, как можно видеть из таблицы, существует биекция между ним и множеством натуральных чисел).

Множество чисел, кратных гуголплексу, также бесконечно и также счетно, как и множество чисел, кратных пухплексу. Попробуйте представить себе, какое огромное количество чисел придется пройти, прежде чем мы доберемся до пухплекса! После этого нужно будет пройти еще столько же, чтобы достигнуть удвоенного пухплекса! Тем не менее мощность множества чисел, кратных пухплексу, равна мощности множества чисел, кратных 21, а также мощности множества четных чисел и множества натуральных чисел.

Мощность всех этих множеств — $\aleph_0$.

Хотите — верьте, хотите — нет!

*Наши бледные рассуждения скрывают от нас
бесконечное.*

Джим Моррисон, The Doors

Каникулы алгебраических чисел в отеле Гильберта

Наша экспедиция в гостиницу Гильберта показала, что не всякое множество может в ней разместиться, хотя гостиница и *бесконечна*. Количество элементов множества *всех* чисел, заключенных между 0 и 1, оказалось слишком большим, чтобы все они смогли поселиться в гостинице.

Множество этих чисел *несчетно-бесконечно*, так как между ним и множеством натуральных чисел нет одно-однозначного и сюръективного соответствия. Существуют ли другие множества чисел, бесконечные, но несчетные, то есть такие множества, которые невозможно разместить в бесконечной гостинице?

Интересный пример множества этого типа дает множество неалгебраических чисел, которые мы сейчас определим. Но сначала проясним, что такое алгебраическое число.

Вспомним, что рациональное число — это число q , которое может быть записано в виде отношения двух целых чисел $\frac{c}{d}$.

Можно дать другое, эквивалентное определение: число q — рациональное число тогда, и только тогда, когда оно является решением уравнения «первой степени», а именно уравнения вида

$$ax + b = 0,$$

где коэффициенты a и b — целые числа.

Ясно, что любое рациональное число $q = \frac{c}{d}$ удовлетворяет равенству $dq - c = 0$ и, следовательно, является решением уравнения первой степени $dx + (-c) = 0$. Например, число $\frac{19}{77}$ является решением уравнения

$$77x - 19 = 0.$$

Что же такое тогда алгебраическое число?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ЧИСЛА

Число считается алгебраическим, если оно является корнем (то есть решением) уравнения вида:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где все коэффициенты a_k — целые числа.

Число, не являющееся алгебраическим, называют «трансцендентным числом».

Левая часть приведенного выше уравнения называется многочленом (или полиномом) n -й степени, если n не равно 0.

Из этого определения немедленно следует, что все рациональные числа относятся к числам алгебраическим. Однако есть и иррациональные алгебраические числа². Вот несколько примеров:

$\sqrt{2}$ — алгебраическое число, так как является решением уравнения $x^2 - 2 = 0$.

Кубический корень из $3/2$ ($\sqrt[3]{3/2}$) — алгебраическое число, так как является решением уравнения $2x^3 - 3 = 0$.

$\sqrt{-1} = i$ — алгебраическое число (но не вещественное число), так как является решением уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Золотое сечение ϕ — алгебраическое число, так как является решением уравнения $x^2 - x - 1 = 0$.

Короче говоря, алгебраические числа «многочисленны», потому что «многочисленны» уравнения с многочленами вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

С учетом этого следующее утверждение может показаться несколько удивительным:

ТЕОРЕМА

Множество алгебраических чисел счетно.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Предположим, что a_n — положительное число. Если это не так, мы можем умножить все уравне-

ние на (-1) ; получившееся уравнение будет иметь те же корни.

Подобно тому, как мы разбирались с расселением рациональных чисел в гостинице, определим для каждого многочлена «высоту» H .

$$H = n + |a_n| + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|.$$

Символ $|m|$ обозначает абсолютное значение (или модуль) числа. Если число положительно, его абсолютное значение равно ему самому: $|37| = 37$. Если число отрицательно, абсолютное значение становится положительным: $|-234| = 234$.

Теперь мы можем выписать все уравнения (некоторые из которых не имеют решений) в порядке возрастания высоты.

Например, для $H = 1$ существует всего один многочлен, и он представляет собой просто 1, то есть не зависит от x , и дает уравнение $1 = 0$, не имеющее решений. Это уравнение не имеет смысла и не дает нам никаких алгебраических чисел.

Для $H = 2$ мы получаем два уравнения: $x = 0$ и $2 = 0$. Первое дает алгебраическое число 0, а второе снова оказывается бессмысленным и не имеет корней.

Для $H = 3$ получаются следующие уравнения: $3 = 0$, $x - 1 = 0$, $2x = 0$, $x + 1 = 0$, и наконец, $x^2 = 0$. Первое из этих уравнений не дает алгебраических

чисел, а из остальных мы получаем два новых алгебраических числа: 1 и -1 .

Я надеюсь, что основная идея понятна.

Дойдя до $H = 5$, мы встретимся с $\sqrt{2}$ (убедитесь в этом самостоятельно). Для каждого значения высоты существует конечное количество уравнений, и каждое уравнение имеет конечное число решений; следовательно, при каждом значении высоты мы добавляем конечное количество алгебраических чисел. Это доказывает, что множество алгебраических чисел — это на самом деле набор, состоящий из счетного числа конечных множеств. Следовательно, алгебраические числа легко можно разместить в бесконечной гостинице Гильберта. Это означает также, что множество алгебраических чисел счетно и его мощность — $\aleph_0$.

В это довольно трудно поверить, но мощность множества чисел, делящихся на пухплекс в степени пухплекса, равна мощности множества алгебраических чисел.

$\aleph$: бóльшая бесконечность — мощность континуума

Доказать, что множество счетно, совсем не трудно. Нужно всего лишь найти одно-однозначное и сюръективное соответствие с множеством натуральных чисел. Проблема сводится к следующему: чтобы доказать, что то или иное множество

счетно, достаточно показать, что его элементы могут быть расположены в некотором последовательном порядке, но, чтобы *доказать*, что множество несчетно, необходимо доказать, что не существует *абсолютно* никакого способа расположить его элементы последовательно. Это похоже на «задачу» доказательства, что в комнате есть по меньшей мере один муравей, в сравнении с задачей доказательства, что нигде в комнате ни одного муравья точно нет. Как только мы найдем хотя бы одного муравья, мы получим доказательство первого утверждения, но то, что мы не находим муравьев в данный момент, совершенно не означает, что какой-нибудь муравей не найдется позже.

Как я уже отмечал, в 1891 г. Георг Кантор предложил замысловатый метод, помогающий доказать невозможность подсчета количества разнообразных объектов, — он называется «диагональным методом Кантора». Мы уже встречались с этим методом, когда профессор Финкельштейн-Островский-Канторович доказывал, что в бесконечной гостинице невозможно разместить числа, заключенные между 0 и 1, десятичное представление которых содержит только цифры 0 и 1. При помощи того же самого метода можно доказать, что и множество *всех* чисел, заключенных между 0 и 1, несчетно (докажите это!). В этом нет ничего неожиданного, поскольку множество «чисел, заключенных между

0 и 1, десятичное представление которых содержит только цифры 0 и 1» — это собственное подмножество множества всех чисел, заключенных между 0 и 1. Кроме того, если вспомнить, что любое существующее число может быть записано в двоичной системе счисления с использованием только цифр 0 и 1, можно легко убедиться, что мощность этих двух множеств должна быть одинаковой (почему?).

Бесконечные множества чисел, которые невозможно расположить в последовательном порядке, называются — что и неудивительно — несчетными. Множество всех точек на числовой прямой, заключенных между 0 и 1, несчетно, и его мощность не равна $\aleph_0$. Следовательно, для обозначения мощности множества всех вещественных чисел (или любого отрезка прямой вещественных чисел) нужен новый символ! В качестве такого символа используют букву $\aleph^*$. Говорят, что $\aleph$ — мощность континуума. Однако следует отметить, что несчетные множества не всегда имеют мощность $\aleph$.

Слова, слова, слова

Поскольку концепция канторовой диагонали не только красива, но и важна, я объясню ее еще раз — теперь на примере доказательства, что мно-

* В русской математической литературе чаще используется малая готическая с. — *Примеч. ред.*

жество всех слов бесконечной длины, составленных с использованием только двух букв (a и b), невозможно подсчитать. Другими словами, такое множество несчетно.

Если вы уже поняли объяснение, которое профессор Финкельштейн-Островский-Канторович дал Омеге относительно чисел в десятичной системе счисления, у вас не должно вызвать затруднений и следующее изложение. Речь идет в точности о том же самом, только на другом примере. Если вы не вполне поняли первое объяснение, я надеюсь, что вы поймете его на этот раз.

Доказательство будет строиться от противного, то есть мы предположим, что справедлива противоположная гипотеза: все такие слова можно расположить в некой последовательности. Затем мы увидим, что это предположение приводит к противоречию, что означает, что наша исходная гипотеза была ложной.

Вот расположение слов:

A1	=	A	b	A	b	b	b	b	b	b	b	...	...	...
A2	=	A	b	B	a	a	b	b	a	a	b	...	...	...
A3	=	B	b	A	b	a	b	a	a	b	a	...	...	...
A4	=	A	a	A	a	b	b	b	b	a	a	...	...	...
A5	=	B	a	A	a	a	a	a	a	b	a	...	...	...
A6	=	A	a	A	a	b	a	a	a	a	a	...	...	...
A7	=	B	b	B	b	b	b	b	b	b	b	...	...	...
A8	=	A	a	B	b	a	a	a	a	b	a	...	...	...
A9	=	A	a	A	a	b	b	b	b	a	b	...	...	...
...														

Применяя диагональный метод Кантора, аналогично тому, как мы действовали с числами, заключенными между 0 и 1, образуем новое слово A_0 , которое не содержится где бы то ни было в представленном в таблице множестве, в каком бы порядке мы ни располагали слова. Внимательно посмотрите на таблицу и обратите внимание на подчеркнутые буквы, стоящие на диагонали. Новое слово A_0 будет построено следующим образом: его первая буква будет отличной от первой буквы слова A_1 (поскольку первая буква в A_1 — а, мы возьмем букву b); вторая буква будет отличной от второй буквы слова A_2 (раз это буква b, мы используем букву а); третья буква будет отличной от третьей буквы слова A_3 (на этот раз возьмем букву b) — и так далее.

Итак, наше новое слово $A_0 = \text{babbbbabbb}...$

Я предоставляю умудренному читателю самостоятельно убедиться, что слово A_0 никоим образом не может встретиться в исходном бесконечном списке (то есть совпасть с каким бы то ни было его словом), потому что оно не может не отличаться от любого слова A_i по меньшей мере буквой, стоящей на i -м месте.

К тому же, как уже выяснила Омега, добавление слова A_0 в список ничего не меняет, потому что мы всегда можем повторить ту же процедуру и построить еще одно слово, назовем его A_N , кото-

рое будет отличаться от всех без исключения слов, включенных в составленный нами бесконечный список. Итак, множество всех слов бесконечной длины, содержащих только буквы а и b, имеет мощность континуума.

Очевидно, множество всех слов бесконечной длины, составленных с использованием трех разных букв (а не только букв а и b) или четырех или пяти (или любого другого количества) разных букв, также должно иметь мощность несчетного множества, что само по себе не означает, что его мощность будет равна мощности континуума. Однако, поскольку мы можем построить между таким множеством и множеством чисел, составленных из 0 и 1, одно-однозначное и сюръективное отображение, мы видим, что его мощность действительно равна $\aleph$.

Еще одно (приятное) доказательство несчетности всех чисел на отрезке $[0,1]$

Предположим, что верна противоположная гипотеза: все точки отрезка $[0,1]$ можно пересчитать. Из этого следует, что все эти точки можно расположить в некотором последовательном порядке — $\{p_1, p_2, p_3, p_4, \dots\}$. Чтобы доказать (или опровергнуть) эту гипотезу, возьмем вокруг центральной точки p_1 отрезок длиной, скажем, $1/10$,

вокруг точки p_2 — отрезок длиной $1/100$, вокруг точки p_3 — отрезок длиной $1/1000$ и так далее. Поскольку все точки, содержащиеся на отрезке $[0,1]$, попадают по меньшей мере на один из этих отрезков (вспомним, что в множестве $\{p_1, p_2, p_3, p_4 \dots\}$ были перечислены все числа, расположенные между 0 и 1), мы получаем множество, покрывающее весь отрезок $[0,1]$. А также можно сложить длины всех этих отрезков. В соответствии с формулой для бесконечной геометрической прогрессии:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots = \frac{a_1}{(1-q)};$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10\,000} + \dots = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)} = \frac{1}{9}.$$

Нам удалось, так сказать, покрыть все точки отрезка числовой прямой $[0,1]$ интервалами, суммарная длина которых составляет всего лишь $1/9$. Но это, очевидно, невозможно, так как длина исходного отрезка числовой прямой равна 1.

Таким образом, мы пришли к противоречию.

Вывод: Составить последовательность из всех точек, находящихся между 0 и 1, невозможно. Другими словами, это множество несчетно.

Поскольку рациональные числа образуют счетное множество, все рациональные числа, содержащиеся на отрезке $[0,1]$, можно обработать определенным образом. Как? Окружая их отрезками так, чтобы суммарная длина этих отрезков не превышала $1/9$. Из этого следует, что рациональные числа в сумме составляют не более $1/9$ всех чисел, существующих между 0 и 1.

Однако этот верхний предел можно уточнить.

Предположим теперь, что рациональные числа, находящиеся на отрезке $[0,1]$, располагаются следующим образом: $\{q_1, q_2, q_3, q_4 \dots\}$. Возьмем вокруг точки q_1 интервал длиной $1/1000$, вокруг точки q_2 — интервал длиной $1/10\,000$, вокруг точки q_3 — интервал длиной $1/100\,000$ и так далее. Тогда суммарная длина всех таких интервалов будет равна

$$\frac{1/1000}{1-1/10} = \frac{1}{900}.$$

Очевидно, длину суммарного интервала, охватывающего все рациональные числа на отрезке $[0,1]$, можно уменьшать и дальше, получая эту суммарную длину сколь угодно малой. Множество, которое покрывается счетным объединением интервалов, суммарная длина которых меньше любого заранее определенного значения, называется множеством нулевой меры.

Все истинные положения легко понять после того, как они найдены; суть в том, чтобы их найти.*

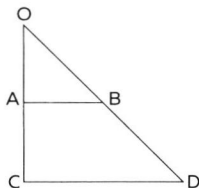
Галилео Галилей

Математика — самое прекрасное и самое могущественное произведение человеческого духа.

Стефан Банах

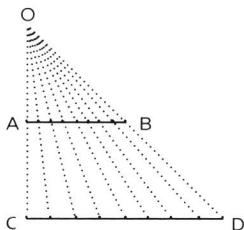
О радость! Никто не равнее других

Как я уже отмечал, мощность множества всех вещественных чисел — как рациональных, так и иррациональных, — расположенных между 0 и 1, обозначается символом $\aleph$ и называется мощностью континуума. В отрезке от 0 до 1 нет ничего особенного. Его длина равна единице, но мощность любого другого отрезка — тоже $\aleph$. Легко видеть, что любые два отрезка равномощны, то есть существует одно-однозначное и сюръективное соответствие между любым отрезком AB и множеством точек другого отрезка, CD . Наглядно представить такое соответствие поможет следующая подсказка:



* «Диалог о двух главнейших системах мира» (1632). День второй. Пер. С. Н. Долгова.

Подсказка не помогла? Тогда вот решение. Как показано на приведенном ниже чертеже, для каждой точки на отрезке АВ можно найти соответствующую ей точку на отрезке CD.



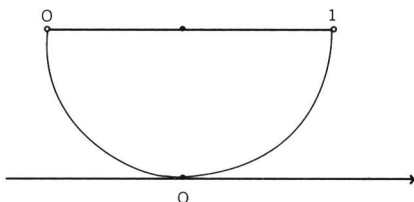
Ясно, что каждая конкретная точка более короткого отрезка, АВ, может быть соединена с разными точками отрезка CD. Получается одно-однозначное соответствие.

Так же ясно, что для каждой точки отрезка CD можно найти соответствующую ей точку отрезка АВ. Для этого нужно всего лишь провести прямую, соединяющую точку на отрезке CD с вершиной треугольника, и найти точку ее пересечения с отрезком АВ. Это дает сюръективное соответствие.

Поскольку нам удалось образовать пары из всех точек двух отрезков разной длины, значит, они должны иметь одинаковую мощность — следовательно, мощность континуума, то есть $\aleph$.

А вот утверждение, которое может показаться еще более странным. Можно (сходным образом)

доказать, что мощность любого отрезка прямой равна мощности бесконечного луча. Приведенный ниже чертеж иллюстрирует эту идею в самом общем виде. Если вы внимательно посмотрите на нее, то, я уверен, сообразите, как построить соответствие между конечным отрезком и бесконечным лучом.



Это означает, что и отрезок прямой длиной один миллиметр, и отрезок прямой длиной миллиард километров, и даже бесконечный отрезок прямой содержат равное «количество» точек. Этот результат может показаться менее удивительным, если вспомнить, что у точки на самом деле нет ни длины, ни площади, ни объема. Зенон спросил бы, как эти «бездлинные» точки могут образовывать прямую длиной 107 «чего-нибудь» или даже бесконечный луч.

Если отойти от простых прямых, лучей и отрезков, Кантор доказал также, что существует однозначное и сюръективное соответствие между точками отрезка прямой и точками квадрата или куба!

Что еще удивительнее и невероятнее, Кантор доказал существование одно-однозначного и сюръективного соответствия между бесконечной прямой и n -мерным пространством (для любого n !).

Открою вам секрет: это открытие оказалось чрезмерно радикальным даже для самого Кантора. Вот как он отзывался о нем: «Je le vois, mais je ne le crois pas!» — «Вижу, но не верю!»

Сменим тему

Возможно, вы помните, что, дав выше определение алгебраических чисел, я отметил, что числа, не относящиеся к алгебраическим, называются трансцендентными. Исходя из нашего открытия, что мощность множества вещественных чисел выше мощности множества чисел алгебраических, по-видимому, можно предсказать, что трансцендентные числа существуют, то есть что имеются числа, не являющиеся корнями выражений типа $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$.

Но где они? Хотя концепция трансцендентных чисел существует уже давно, вплоть до XIX в. никто не мог с уверенностью сказать, что «видел» такое число.

Доказательство существования таких чисел дал не Георг Кантор. Оно было получено в 1844 г. выдающимся французским математиком Жозефом

Лиувиллем. Однако Кантор развил результаты Лиувилля, показав, что трансцендентные числа составляют большинство всех чисел. Другими словами, числа в большинстве своем не только не рациональны; по большей части числа даже не относятся к алгебраическим.

ТЕОРЕМА

Множество трансцендентных чисел несчетно.

Доказательство. Множество всех вещественных чисел можно разбить на два непересекающихся множества — множество алгебраических чисел и множество трансцендентных чисел. Слово «непересекающиеся» означает, что ни один элемент не может принадлежать обоим множествам.

Обозначим множество алгебраических чисел буквой A , трансцендентных — буквой T , а вещественных — буквой R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Объединение двух множеств A и B , обозначаемое $A \cup B$, есть множество элементов, содержащихся в множестве A , в множестве B или в обоих множествах A и B .

Объединение множеств A и T есть множество всех вещественных чисел R . Следовательно, можно написать $R = A \cup T$.

А теперь приготовьтесь к поворотному моменту этой истории. Поскольку мощность R , множества всех вещественных чисел, равна A , можно предположить, что множество T должно быть несчетным (или меньше).

Утверждение о том, что множество трансцендентных чисел T должно быть несчетным, вытекает из того факта, что объединение двух счетных множеств всегда дает еще одно счетное множество.

Если бы оба множества A и T были счетными — то есть счетными были бы и множество алгебраических чисел, и множество трансцендентных чисел, — то их элементы можно было бы упорядочить: $A = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ и $T = (t_1, t_2, t_3, \dots)$. Следовательно, их объединение $T \cup A$ тоже было бы счетным, так как его элементы можно было бы упорядочить следующим образом:

$$T \cup A = (a_1, t_1, a_2, t_2, a_3, t_3, \dots).$$

Но, как мы знаем, множество R несчетно. Поскольку нам известно, что множество A счетно (см. раздел под названием «Каникулы алгебраических чисел в отеле Гильберта»), а $T \cup A = R$, множество T никак не может быть счетным.

Что же, если количество трансцендентных чисел так велико, что они образуют несчетное множество, казалось бы, найти пример трансцендентного числа должно быть совсем не трудно. Да что там, математики должны то и дело на них наткаться.

Но так ли это? На самом деле нет. Даже к нынешнему моменту выявлено очень немного трансцендентных чисел.

Давайте попробуем. Может быть, трансцендентно число $(\sqrt{2} + \phi)$? Ничего подобного. Это число оказывается алгебраическим: можете попытаться составить алгебраическое (полиномиальное) уравнение (с целыми коэффициентами), решением которого оно является. Собственно говоря, готов поспорить, что вы не сможете найти ни одного неалгебраического числа.

Что же получается? Мы доказали, что количество трансцендентных чисел не просто бесконечно, но и несчетно. Проблема состоит в том, что это доказательство существования, а не конструктивное доказательство. Другими словами, хотя это доказательство может убедить нас в существовании бесконечно многих трансцендентных чисел (что вытекает из мощности континуума), оно не дает ни малейшей подсказки относительно того, как найти хотя бы одно такое число.

Как мы уже сказали, в 1844 г. Лиувилль открыл одно трансцендентное число. Вот оно:

$$L = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!} = 0,1100110001000000000000000000001000...$$

Вам может быть не вполне ясно, что именно это за число; позвольте мне объяснить.

Число Лиувилля строится следующим образом:

Шаг 1. Вычисляем все факториалы: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120...$

Шаг 2. Составляем число, в котором после запятой встречаются только нули и единицы, причем 1 стоит на 1-м, 2-м, 6-м, 24-м, 120-м — и так далее — местах, а на всех остальных местах стоит 0.

Лиувилль доказал, что это число не является корнем какого бы то ни было алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.

Как вы можете вообразить, это доказательство не слишком просто, так что вам придется поверить мне (и Лиувиллю) на слово — это действительно так.

Посмотрите на следующее число: $3,14000100000000000000000005...$ сформированное сходным образом. Это число получено из десятичного представления числа π , в котором все цифры после запятой, кроме 1-й, 2-й, 6-й, 24-й, 120-й и так далее (их номера соответствуют $1!$, $2!$, $3!...$), заменены нулями. На упомянутых же местах стоят последовательные цифры числа π .

Поскольку $\pi = 3,141592653589793...$ на 24-м месте оказывается цифра 5, на 120-м месте — цифра 9, на 720-м — цифра 2 и так далее.

Математики могут доказать, что это число также трансцендентно (а вам снова придется поверить, что они знают свое дело).

А как обстоит дело с самим π ? Трансцендентно ли это число?

π: Я не рационально!

Вы не можете угадать, как я себя поведу...

Тот факт, что число π иррационально (то есть не существует такой дроби a/b , которая давала бы значение π), отметил — но не доказал — еще персидский математик, астроном и географ IX в. Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми (в латинской транскрипции его имя передавалось как *Algoritmi*, и от него произошло слово «алгоритм»). Он был заметной фигурой знаменитого «Дома мудрости» в Багдаде в эпоху наивысшего расцвета исламской культуры. Ему принадлежит множество чрезвычайно важных достижений в области алгебры; более того, само слово «алгебра» происходит от сочетания «аль-джебр», взятого из названия фундаментального труда по этой науке, который аль-Хорезми написал около 820 г.*.

* Этот труд назывался «Аль-китаб аль-мухтасар фи хисаб аль-джебр ва-аль-мукабала», что означает «Краткая книга восполнения и противопоставления».

Маймонид также верил в иррациональность π , но не доказал его. Строгое доказательство получил только в 1768 г. швейцарский математик (Эйлер был не единственным швейцарским математиком!) Иоганн Генрих Ламберт.

Доказательство иррациональности числа π сравнительно просто; доказать же, что π — число трансцендентное, оказалось чрезвычайно трудно. Прошло еще более 100 лет, прежде чем немецкий математик Фердинанд фон Линдеман доказал в 1882 г., что π трансцендентно, то есть не является корнем какого-либо многочлена с целочисленными коэффициентами.

За несколько лет до этого, в 1873 г., французский математик Шарль Эрмит (вы заметили, как много нам встречается французских математиков?) доказал трансцендентность e — числа Эйлера³. Доказательство трансцендентности числа (особенно числа π) — процесс долгий и сложный, и здесь мы не станем входить в его подробности. В общем, просто представьте себе, каким образом можно получить доказательство того, что существует число, не дающее нуля ни в каком уравнении вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$. Это отнюдь не простая задача!

Чтобы проиллюстрировать ее сложность, скажу только, что в настоящее время все еще неизвестно, к каким числам — алгебраическим или трансцен-

дентным — относится π в степени π (π^π). Давид Гильберт (который, напомним, является счастливым «владельцем» бесконечной гостиницы) задавался вопросом об алгебраичности или трансцендентности числа $2^{\sqrt{2}}$. Сегодня мы знаем, что это число трансцендентно. Собственно говоря, доказательство этого факта — часть общей теоремы, которая называется теоремой Гельфонда — Шнайдера, утверждающей, что число a^b трансцендентно, если a — любое алгебраическое число, не равное 0 или 1, а b — иррациональное алгебраическое число. При помощи этой теоремы мы можем заключить, что e в степени π (e^π) должно быть трансцендентным, так как, если вы помните, $e^\pi = e^{i\pi(-i)} = (-1)^{-i}$.

Почему? В этом случае число (-1) , стоящее на месте a , — это алгебраическое число, не равное ни 0, ни 1. На месте b стоит число, и это действительно число алгебраическое (i — корень уравнения $x^2 + 1 = 0$) и иррациональное.

Эту прекрасную теорему независимо друг от друга доказали в 1934 и 1935 гг. русский математик Александр Гельфонд и немецкий математик Теодор Шнайдер. Теорема Гельфонда — Шнайдера дала ответ на вторую часть седьмой проблемы из списка 23 нерешенных математических задач, который Гильберт представил в 1900 г. Международному конгрессу математиков, собравшемуся в Парижском университете — Сорбонне.

Таким образом, мы знаем, что оба числа $2^{\sqrt{2}}$ и $e^{\pi} = e^{i\pi(-i)} = (-1)^{-i}$ трансцендентны. С двумя числами мы разобрались, осталось бесконечное количество других.

Континуум-гипотеза и недостающая аксиома

Мы уже знаем, что мощность множества вещественных чисел больше мощности множества натуральных чисел. Но насколько она больше? И почему мы обозначаем ее $\aleph$? Почему бы не сказать, что кардинальное число множества вещественных чисел равно $\aleph_1$? Казалось бы, такое обозначение было бы естественным продолжением $\aleph_0$.

Как мы уже говорили, тот факт, что множество несчетно, не всегда означает, что его мощность равна $\aleph$. Отсюда возникает естественный вопрос: существуют ли множества чисел, мощность которых больше, чем $\aleph_0$, но меньше, чем $\aleph$? В 1877 г. именно этим вопросом задался Георг Кантор.

В математике умение поставить вопрос должно цениться выше, чем умение разрешить его.

Георг Кантор

Кантор считал, что множеств, мощность которых больше, чем $\aleph_0$, но меньше, чем $\aleph$, не существует. Другими словами, он предположил, что

мощность множества вещественных чисел есть $\aleph_1$. Эта гипотеза известна под названием «континуум-гипотеза».

КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗА (СН)*

Не существует множества с мощностью, строго промежуточной между мощностью множества целых чисел, $\aleph_0$, и мощностью множества вещественных чисел, $\aleph$.

В течение многих лет и несмотря на огромные усилия математики не могли ни доказать, ни опровергнуть эту гипотезу. В знаменитом Гильбертовом списке 23 наиболее важных открытых проблем в математике она стояла первой.

Чтобы понять то историческое событие, которое привело к решению проблемы СН, нам нужно сделать шаг назад и посмотреть, что происходило в то время в геометрии. Как вы помните, геометрия по большей части основывается на системе аксиом (они же постулаты), разработанной Евклидом более 2000 лет назад и до сих пор применимой в том, что можно назвать «базовой» геометрией. Несмотря на древность этой системы,

* Принятое обозначение (сокр. *англ.* Continuum Hypothesis).

существовала давняя открытая проблема, касающаяся пятого постулата Евклида, «аксиомы параллельности прямых». Этот постулат гласит: если на плоскости есть прямая m и точка A , не лежащая на этой прямой, то через эту точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной. По правде говоря, этот вариант пятого постулата Евклида предложил шотландский математик XVIII в. Джон Плейфер. В формулировке самого Евклида речь шла о сумме углов и не использовалось слово «параллельная». Вопрос заключался вот в чем: можно ли вывести пятый постулат из других аксиом? Другими словами, избыточна ли эта аксиома? Оказалось, что эта аксиома фундаментальна, то есть не может быть выведена исходя только из четырех других аксиом. Эта идея, вероятно, побудила математиков исследовать, как СН соотносится с аксиомами теории множеств, и рассуждения об аксиомах в конечном счете оказали влияние на теорию множеств.

С годами стало ясно, что вопросы о бесконечности должны быть очень близки к самым основам математики, и подходить к ним следует с чрезвычайной осторожностью.

В 1908 г. был создан набор аксиом, который называется системой Цермело — Френкеля (ZF). Мы уже знакомы с Цермело (это он защищал Кантора и сформулировал первую теорему теории

игр); Абрахам Галеви Френкель был израильским математиком, ставшим первым деканом Математического факультета Еврейского университета в Иерусалиме. Они сформулировали свою систему, чтобы создать для теории множеств — и математики в целом — надежную основу, которая дала бы математикам строгие методы для работы с бесконечными множествами и решения некоторых задач в этой области — например парадокса Рассела. Аксиомы ZF — это попросту в высшей степени элементарные утверждения о концепции множеств, которые, как мы верим (да, верим всем сердцем!), настолько самоочевидны, что не вызывают сомнений. Вот, например, «аксиома пустого множества»:

$$\exists A: \forall B (B \notin A)$$

В переводе на человеческий язык это означает «существует множество, не содержащее элементов»^{*}.

Предполагалось, что аксиоматическая система будет играть в теории множеств ту же роль, которую играет в геометрии система аксиом Евклида. Однако на деле вышло не совсем так.

^{*} Точнее говоря, это выражение читается так: «Существует такое A, что для любого B верно, что B не принадлежит A».

В 1938 г. австрийский логик, математик и философ Курт Гёдель доказал, что континуум-гипотезу невозможно *опровергнуть*, используя аксиоматическую систему Цермело — Френкеля для теории множеств. 25 лет спустя, в 1963 г., Пол Коэн (1934–2007), профессор математики из Стэнфордского университета, продемонстрировал невозможность *доказательства* континуум-гипотезы на основе аксиом Цермело — Френкеля. Коэн и Гёдель доказали, что континуум-гипотезу невозможно ни доказать, ни опровергнуть. В результате оказалось, что вопрос об истинности континуум-гипотезы не может быть решен исходя только из аксиом ZF. Так явилось на свет первое «неразрешимое» утверждение.

В старом Евклидовом мире действовала Аристотелева логика, предполагавшая лишь два варианта правильности утверждения: оно могло быть либо истинным (Т), либо ложным (F). Теперь у нас появился третий вариант: утверждение может быть неразрешимым (U)*.

Очевидно, можно спросить: не вызвана ли эта проблема с неразрешимыми утверждениями тем, что в системе Цермело — Френкеля не хватает каких-нибудь аксиом? Вполне может быть так, что

* Т — сокр. англ. *true* («истинный»), F — *false* («ложный»), U — *undecidable* («неразрешимый»).

существует еще одна «очевидно истинная» концепция, пока не открытая, добавление которой к системе ZF позволит доказать СН. Или, если рассматривать этот вопрос с еще более оптимистической точки зрения, можно ли усовершенствовать ZF какими-нибудь дополнительными аксиомами так, чтобы все утверждения стали разрешимыми в этой системе?

В 1931 г. Гёдель, которому было тогда всего 25 лет, выдвинул три теоремы — одну о полноте и две о неполноте, — которые рассматривают общий случай неразрешимых утверждений. Суть первой теоремы о неполноте сводится к тому, что в какой бы системе аксиом мы ни работали, если эта система достаточно развита, чтобы порождать натуральные числа, в ней всегда существуют неразрешимые утверждения⁴. Такое ограничение того, чего можно было бы ожидать от аксиоматической системы, было непредвиденным.

Эти три теоремы настолько потрясли математический мир, что споры о их сути продолжаются и по сей день. Эта интереснейшая тема, несомненно, заслуживает отдельного рассмотрения.

На протяжении более чем полувека математики, работающие в области аксиоматической теории множеств, пытались найти «недостающую аксиому» (или аксиомы). Успеха никто из них не

добился. Сейчас большинство специалистов в этой области считают, что никаких недостающих аксиом нет, и правильный подход к этому вопросу заключается в рассмотрении взаимосвязей между разными аксиомами. Можно, конечно, принять за аксиому саму континуум-гипотезу, но тут важно помнить, что аксиомы должны быть сформулированы так, чтобы в их справедливость было легко поверить, а в случае континуум-гипотезы это требование явно не выполняется.

В 2006 г. (за год до смерти) Пол Коэн прочитал интереснейшую лекцию о континуум-гипотезе на конференции в честь Гёделя, проходившей в Вене. Его лекцию (в шести частях) можно найти на YouTube по запросу: *Paul Cohen part 1 of 6, Centennial, Vienna*.

Тем временем в геометрии восстали из пепла некоторые интересные теории относительно невозможности обоснования пятого постулата при помощи евклидовой аксиоматической системы. В XIX в. были разработаны две другие геометрические системы, которые считаются неевклидовыми геометриями. Первая из них (гиперболическая геометрия*) предполагает, что через точку A , не лежащую на прямой m , можно провести более одной прямой, не пересекающей прямую m . Вторая (эл-

* Она же геометрия Лобачевского.

липтическая геометрия^{*)}) предполагает, что через точку A , не лежащую на прямой t , невозможно провести ни одну прямую, не пересекающую прямую t .

Подобно тому, как попытки обоснования пятого постулата в евклидовой геометрии привели к появлению в геометрии новых, неевклидовых теорий, обоснование континуум-гипотезы также дало толчок развитию неканторовой теории множеств, не предполагающей континуум-гипотезы. Честно говоря, неканторовых теорий существует много, потому что в последние годы математики, применяя предложенный Полом Коэном систематический метод «форсинга», доказали неразрешимость многих еще не решенных классических открытых проблем.

В прошлом можно было считать, что любое математическое утверждение может быть либо доказано, либо опровергнуто — если только над ним будут достаточно долго работать достаточно умные математики. Теоремы Гёделя доказали, что существуют утверждения не истинные и в то же время не ложные. Они, собственно говоря, неразрешимы.

Математику можно определить как область, в которой мы никогда не знаем, ни о чем мы говорим, ни истинно ли то, что мы говорим.

Бертран Рассел

^{*} Она же геометрия Римана.

Парадокс Ришара (о большинстве вещей нам сказать нечего)

Парадокс, о котором мы сейчас будем говорить, носит имя французского математика Жюля Ришара (1882–1956) и был опубликован в 1905 г. Ниже я даю словесное (а не формальное) описание этого парадокса.

Фраза «вещественное число, целая часть которого равна 42, а после запятой на нечетных местах стоят нули, а на четных местах — единицы» точно определяет число $42,0101010101\dots$ Аналогичным образом фраза «число, которое, будучи дважды умножено само на себя, дает число 7» точно определяет число $\sqrt[3]{7}$.

Ришар сказал: обозначим буквой E множество всех вещественных чисел, которые можно определить с использованием конечного количества слов. Такое множество, несомненно, будет счетным (поскольку мы можем расположить числа в порядке возрастания количества слов в определениях, а если определения содержат равное количество слов — в лексикографическом (алфавитном) порядке). Затем, применив диагональный метод Кантора, он построил число, которого не было в исходном множестве чисел. Тем не менее это число также можно определить, используя конечное количество слов. Таким образом, это число *не* входит в состав множества, но должно быть его элементом.

Получился парадокс.

Один из способов разрешения этого парадокса — отметить, что свойство «число, которое невозможно *определить* с использованием конечного количества слов» не является свойством, которое можно определить на математическом языке. Чтобы развить эту идею, рассмотрим тот же парадокс с другой точки зрения. Представим себе, что в словаре содержится всего пять слов, например: «бор», «вор», «мор», «сор» и «тор». Более чем вероятно, что при наличии такого ограничения мы не смогли бы говорить ни на какую тему, требующую слов, не входящих в эту пятерку. Например, мы не смогли бы обсуждать континуум-гипотезу и уж тем более разговаривать о возможных противоречиях между разными физическими теориями.

Любая система символической логики (в том числе и математика) содержит набор формул. Слово «формула» используется здесь не в сравнительно узком математическом смысле. Его следует понимать гораздо более широко: под формулой мы можем понимать символ, слово, выражение, фразу, определение — все то, что мы используем для выражения идей. Поскольку между множеством формул и множеством натуральных чисел существует одно-однозначное соответствие, ясно, что мощность множества формул равна $\aleph_0$. Если это так, как можно обсуждать вещественные числа? Мощность их множества больше $\aleph_0$. Из этого следует, что дол-

жны существовать вещественные числа, которые невозможно описать формулами.

В этом контексте интересно отметить, что американский математик и философ Чарльз Пирс, которого мы уже упоминали, также открыл, причем независимо от Кантора, что установить соответствие между числами натуральными и числами вещественными невозможно. Однако, в отличие от Кантора, Пирс не стал продолжать исследования в этом направлении. Вместо этого он решил, что вещественные числа не существуют в завершенном виде, и то, что мы можем сказать о них, не слишком важно.

О чем невозможно говорить, о том следует молчать^{}.*

Людвиг Витгенштейн

Вычислимые числа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Вещественное число называется вычислимым, если существует некоторый алгоритм, при помощи которого можно получить десятичное представление этого числа с любой заданной точностью.

^{*} Седьмое положение (и заключительная фраза) «Логико-философского трактата» (Logisch-philosophische Abhandlung, 1921). Цит. по: Витгенштейн Л. Философские работы. Часть I / Пер. М. С. Козловой и Ю. А. Асеева. М.: Гнозис, 1994.

Рациональные числа вычислимы, потому что их десятичное представление либо конечно, либо бесконечно, но периодически и получается при помощи старой доброй операции деления.

Число $0,232233222333222\dots$ также вычислимо, потому что можно легко найти его десятичное представление любой длины. Примечание: это число *не* рационально! Не хотите ли доказать это утверждение?

Алгебраические числа также вычислимы, потому что существуют разные методы решения любого уравнения вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ и определения его корней с любой точностью, какой только можно пожелать.

А кроме того, есть числа, не принадлежащие ни к одной из названных категорий, но все равно вычисляемые. Два из них — числа π и e .

Что такое π ?

Десятичное представление иррационального числа π бесконечно, никогда не повторяется и не имеет алгебраической формулы. Тем не менее и это число вычислимо.

Еще Архимед знал о существовании алгоритма, позволяющего получить десятичное представление π со всевозрастающей точностью. Этот алгоритм был основан на построении правильных многоугольников с n вершинами, вписанных

в окружность. По мере стремления n к бесконечности форма такого многоугольника стремится к окружности.

В 1593 г. французский математик Франсуа Виет нашел замечательную формулу для вычисления π при помощи набора вложенных радикалов⁵.

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$$

Помимо исключительной внутренней красоты этой формулы в ней есть еще один чрезвычайно важный элемент — стоящее в ее конце многоточие, которое означает «продолжать ту же процедуру до бесконечности». Трудно поверить, но это был первый случай, когда бесконечный процесс был явно обозначен в математической формуле.

Это напоминает мне одну историю о Людвиге Витгенштейне: он, как рассказывают, предлагал слушателям своих лекций вообразить человека, который бормотал на ходу: «...5, 1, 4, 1, запятая, 3 — всё!» Когда этого человека спросили, что это такое он делает, он ответил, что только что закончил перечисление десятичного представления числа π от конца к началу, чем занимался до этого целую вечность. Эта история кажется гораздо более абсурдной, чем рассказ о человеке, который решил сесть и записать десятичное представление

π от начала до конца — и будет заниматься этим вечно. Почему?

Но вернемся к числу π . Интересно отметить, что многие другие помимо Архимеда и Виета пытались вычислить десятичное представление числа π , и все эти попытки в конце концов приводили к нескончаемым столбцам или нескончаемым операциям умножения. Однако в 1656 г. английский математик Джон Валлис открыл следующую формулу:

$$\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \dots = \frac{\pi}{2}.$$

Если попарно перемножить последовательные сомножители, формулу можно записать в следующем виде:

$$\frac{4}{3} \times \frac{16}{15} \times \frac{36}{35} \times \frac{64}{63} \dots = \frac{\pi}{2}.$$

Это бесконечное равенство действительно дает все следующие и следующие цифры десятичного представления π .

Интересно отметить, что именно Джон Валлис впервые использовал в 1655 г. символ бесконечности ∞ (по правде говоря, в своей работе о вычислении площадей под названием «О конических сечениях» (De sectionibus conicis) он использовал выражение $1/\infty$).

В 1671 г. шотландский математик и астроном Джеймс Грегори предложил еще одну формулу для вычисления π в виде бесконечной суммы:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Какая красивая формула! Простая, изящная и эффектная.

Этот рассказ был бы, однако, неполным, если бы я не упомянул, что сегодня честь открытия приведенной выше формулы приписывают индийскому математику XIV в. Мадхаве, который, по-видимому, знал ее задолго до Грегори. Некоторые исследователи утверждают, что Мадхава не только знал эту формулу, но и нашел способ вычисления отклонения ее результатов от истинного значения π и даже разработал еще одну формулу для вычисления π , дающую гораздо более прямое приближение к значению этого числа, чем формула Грегори. Вот она:

$$\pi = \sqrt{12} \left(1 - \frac{1}{3,3} + \frac{1}{5,3^2} - \frac{1}{7,3^3} + \dots \right).$$

Честно говоря, тут я воспользовался случаем, чтобы показать вам некоторые особенно красивые формулы для вычисления значения π . Чтобы доказать, что π — вычислимое число, достаточно было бы показать всего лишь одну из них.

Что такое e ?

Число Эйлера e также не относится к алгебраическим числам, но, поскольку оно определено как предел некоторой последовательности, его значение также вычислимо, и, как и в случае числа π , есть несколько способов этого вычисления. Ниже я привожу несколько изящных и (сравнительно) простых примеров. Возможно, вы уже знакомы с первыми двумя.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Ибо в конечном счете что же он такое — человек во Вселенной? Небытие в сравнении с бесконечностью, все сущее в сравнении с небытием, нечто среднее между всем и ничем. Бесконечно далекий от понимания этих крайностей — конца мироздания и его начала...

Блез Паскаль

Невычислимые вещественные числа

А существуют ли числа вещественные, но невычислимые? Они не просто существуют — их очень много. Собственно говоря, поскольку, как мы от-

метили раньше, количество алгоритмов счетно, мощность множества вычислимых чисел должна быть равна $\aleph_0$. А поскольку мощность множества вещественных чисел равна $\aleph$, это означает, что должно существовать $\aleph$ вещественных чисел, которые не являются вычислимыми! Другими словами, невычислимы почти все вещественные числа. Для определения большинства вещественных чисел не существует алгоритмов. Можно ли говорить о невычислимых числах? Можете ли вы найти пример вещественного числа, которое было бы невычислимым?

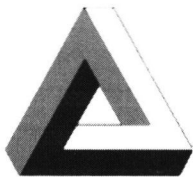
Некоторые математики утверждают, что во всем наборе вещественных чисел нет необходимости, и для всех практических целей вполне можно обойтись одними только вычислимыми числами.

Тем, кто хочет узнать больше (гораздо больше!) о вычислимых числах и их интереснейшей связи с концепциями Алана Тьюринга, я настоятельно рекомендую прочитать книгу «Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики» (1989)*, которую написал британский математик, философ и обладатель бесчисленных (можно ли сказать «бесконечных»?) наград и званий сэр Роджер Пенроуз.

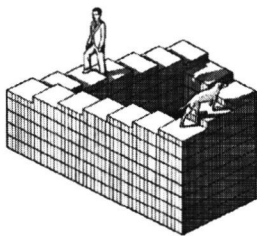
* В русском переводе эта книга была издана московским издательством «Едиториал УРСС» в 2003 г.

НЕВОЗМОЖНЫЕ ФИГУРЫ, ПРОДОЛЖАЮЩИЕСЯ ДО БЕСКОНЕЧНОСТИ

Сэр Роджер Пенроуз разработал в сотрудничестве со своим отцом, Лайонелом Пенроузом, несколько невозможных геометрических фигур и послал их голландскому художнику М. К. Эшеру (одному из героев книги «Гёдель, Эшер, Бах»), а тот использовал их в своих гравюрах. К числу наиболее знаменитых из этих фигур относятся две следующие⁶:



Треугольник Пенроуза



Лестница Пенроуза — нескончаемое
путешествие

Только представьте себе, как вы поднимаетесь по этой лестнице — все поднимаетесь и поднимаетесь и все же все время возвращаетесь в одну и ту

же точку. Эшер добавил череду вечно поднимающихся и вечно спускающихся монахов: все они оказываются в том же месте, с которого начали движение.

Ну что же, мы познакомились с несколькими интересными концепциями, но теперь нам пора вернуться к теории Кантора и узнать, что бесконечность бесконечна.

Бесконечность бесконечна

Существует ли множество чисел, мощность которого больше мощности множества вещественных чисел? Есть ли вообще «наибольшее» значение мощности?

Тот факт, что множества, имеющего наибольшую мощность, не существует, доказал сам Кантор. Собственно говоря, в этом случае доказательство Кантора было конструктивным, потому что он показал, что для любого данного множества всегда можно найти множество еще большей мощности и как это сделать. Такие множества называются показательными множествами, или булеанами.

Булеаны

Прежде чем мы перейдем к самой теореме, позначимся с одной новой концепцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БУЛЕАНА

Пусть дано множество A . Множество, состоящее из *всех подмножеств* A , называется булеаном A и обозначается $P(A)$.

Предположим, например, что $A = \{17, 42, 0\}$. Тогда булеан $P(A)$ будет построен следующим образом: $P(A) = \{\{\}, \{17\}, \{42\}, \{0\}, \{17, 42\}, \{17, 0\}, \{42, 0\}, \{17, 42, 0\}\}$.

Символ « $\{\}$ » обозначает пустое множество, которое считается подмножеством любого множества A . Возможно, вы помните, что ранее в этой книге мы использовали для обозначения пустого множества символ $\emptyset$. Оба эти символа — $\{\}$ и $\emptyset$ — обозначают одно и то же. Отметим, что множество A также считается подмножеством самого себя. Если подсчитать количество подмножеств, окажется, что в самом множестве A содержится три элемента, а в булеане A — восемь элементов.

Я уверен, что вам тут же пришло в голову равенство $2^3 = 8$. Случайна ли эта связь? Нет, не случайна.

МИНИ-ТЕОРЕМА

Если $\#A = n$, то $\#P(A) = 2^n$ (где $\#$ — количество элементов).

Доказательство того, что булеан множества, содержащего n элементов, содержит 2^n подмножеств, получено при поддержке Уильяма Шекспира и состоит в следующем: каждый элемент исходного множества должен решить, «быть или не быть» элементом каждого конкретного подмножества. Следовательно, поскольку у каждого элемента есть две возможности относительно каждого отдельного подмножества, суммарное число возможностей для n элементов равно 2^n .

Чтобы пояснить эту концепцию на конкретном примере, предположим, что мы набираем подмножество из элементов множества $A = \{17, 42, 0\}$. 17 и 0 «решают» стать элементами этого подмножества, а 42 отказывается. В сочетании эти решения дают подмножество $\{17, 0\}$. Решения каждого из элементов множества однозначно определяет состав каждого конкретного подмножества; следовательно, количество подмножеств равно количеству уникальных решений, то есть $2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$.

Ч. т. д.

ТЕОРЕМА КАНТОРА

Мощность любого множества A строго меньше, чем мощность $P(A)$.

Попросту говоря, теорема Кантора означает, что «количество» элементов множества A , то есть $\#A$, должно быть строго меньше, чем «количество» подмножеств в соответствующем булеане, $P(A)$. Другими словами, булеан любого множества должен иметь бо́льшую мощность, чем само это множество.

Теперь возьмем бесконечное множество, например счетное множество с мощностью $\aleph_0$ или континуальное множество с мощностью $\aleph$. Мощность их булеанов обозначается соответственно $2^{\aleph_0}$ и $2^{\aleph}$.

Две головоломки для математиков

1. Докажите теорему Кантора (подсказка: парадокс Рассела).
2. Поскольку мощность множества натуральных чисел равна $\aleph_0$, мощность множества его подмножеств должна быть $2^{\aleph_0}$. Докажите, что $2^{\aleph_0} = \aleph$. Другими словами, докажите, что мощность всех подмножеств множества натуральных чисел равна мощности континуума.

Парадокс Бурали-Форти

В 1897 г. итальянский математик Чезаре Бурали-Форти представил парадокс, который впоследствии стал называться его именем. Его можно описать следующим образом.

Рассмотрим множество всех множеств, то есть включающее в себя множество всех живущих ныне людей, множество всех людей, которые жили в прошлом, множество всех песен, которые можно сочинить, множество всех женщин, которых никогда не показывали на Fashion Channel*, множество всех женщин, которых зовут Гризельда, множество всех цветов, множество всех идей, о которых никто никогда не сможет подумать, множество всех сражений, в которых я не участвовал, множество всех вещественных чисел, множество всех кинофильмов, которые не поставил Тарковский, множество всех кинофильмов, которые можно или можно было посмотреть на сайте YouTube, множество всех функций, множество всех философов, которые никогда не страдали от депрессии, множество всех молекул, которые находятся в данный момент в подвале моего дома... Теперь прибавим к нему все подмножества всех множеств. Короче говоря, пусть в этом множестве множеств содержится все, о чем только можно помыслить.

Обозначим это множество множеств Ω .

Очевидно, мощность Ω должна быть больше, чем мощность любого другого множества, — по-

* World Fashion Channel — международный телеканал, вещающий о современных тенденциях в моде, красоте, путешествиях, технологиях и стиле жизни. — *Примеч. ред.*

тому что оно включает в себя всё на свете. Но теорема Кантора утверждает, что $\#P(\Omega) > \#(\Omega)$. То есть мощность $P(\Omega)$ больше, чем мощность Ω , множества всех множеств!

Кантора этот парадокс не особенно беспокоил, так как он считал, что множество всех множеств слишком велико, чтобы считать его множеством. Не должен удивлять и читателя этой книги, так как мы знаем в свете парадокса Рассела, что не всякий набор объектов образует правильное множество.

Арифметика кардинальных чисел

Надеюсь, теперь вам ясно, что термины «мощность» или «кардинальное число» — это просто обобщение концепции «количества элементов», применяемой для конечных множеств, на множества бесконечные. Количество элементов *конечных* множеств обозначается *натуральными кардинальными числами*, но интуитивно понятно, что кардинальные числа также определяют количество элементов в *бесконечных* множествах. Например, если мощность некоторого множества — $\aleph_0$, то в нем содержится такое же количество элементов, как и в множестве натуральных чисел.

На уроках математики мы заучили, что над конечными числами можно производить математи-

ческие операции — например сложение, деление и умножение. Такие же базовые операции можно определить и для множеств. В самом деле, когда мы складываем два натуральных числа, мы, по сути дела, «объединяем» их; эта операция аналогична объединению двух непересекающихся множеств (непересекающимися называются множества, не имеющие общих элементов). Если в одном множестве m элементов, а в другом — n элементов, то объединение этих двух множеств будет содержать $n + m$ элементов.

Приведем один простой пример:

Если $A = \{Q, W, E, R, T, Y\}$, а $B = \{17, 21\}$, то $A \cup B = \{Q, W, E, R, T, Y, 17, 21\}$.

В этом случае $\#A = 6$, а $\#B = 2$; следовательно, $\#A \cup B = 6 + 2 = 8$.

Операции с кардинальными числами работают точно так же. Например, чтобы вычислить сумму $\aleph_0 + \aleph_0$, нужно взять два непересекающихся множества, причем оба они должны быть счетными, и посмотреть, какую мощность будет иметь их объединение. Из приведенного примера мы увидим, что результат не зависит от того, какие именно множества мы выберем.

Например, возьмем $A = (1, 3, 5, 7, 9, 11\dots)$ и $B = (2, 4, 6, 8, 10\dots)$. Множества A и B не пересекаются, а мощность каждого из них, разумеется, равна $\aleph_0$.

Как вы видите, $A \cup B = N$, то есть их объединение дает множество всех натуральных чисел, мощность которого, как мы знаем, равна $\aleph_0$.

Итак, получается, что $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Собственно говоря, мы не открыли ничего нового: мы уже знали, что объединение двух счетных множеств также является счетным множеством.

Но тут нужна осторожность! Не следует увлекаться и думать, что к бесконечным значениям можно применять все правила обычной математики. Например, хотя $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, мы не можем вычесть из обеих частей этого равенства по $\aleph_0$, потому что тогда мы получили бы бессмысленное и, честно говоря, довольно нелепое выражение $\aleph_0 = 0$! Поэтому следует помнить, что обращение с бесконечными значениями требует некоторой осмотрительности.

Операцию умножения также можно описать в применении к множествам. Когда мы умножаем натуральное число n на m , эта операция на самом деле представляет собой обычное сложение n с самим собой, произведенное m раз, то есть $n + n + \dots + n = n \cdot m$. Преобразуем этот же принцип для множеств: если у нас есть два множества A и B , мы возьмем « B экземпляров» A в том смысле, что к каждому элементу b множества B мы прибавим экземпляр множества A . Например, если $A = \{Q, W, E, R, T\}$, а $B = \{17, 21, 33\}$, то произведением

этих множеств будет объединение экземпляра множества A для числа 17, экземпляра A для 21 и экземпляра A для 33. Это можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} A \times B = & \{ \langle Q, 17 \rangle, \langle W, 17 \rangle, \langle E, 17 \rangle, \langle R, 17 \rangle, \langle T, 17 \rangle \} \cup \\ & \cup \{ \langle Q, 21 \rangle, \langle W, 21 \rangle, \langle E, 21 \rangle, \langle R, 21 \rangle, \langle T, 21 \rangle \} \cup \\ & \cup \{ \langle Q, 33 \rangle, \langle W, 33 \rangle, \langle E, 33 \rangle, \langle R, 33 \rangle, \langle T, 33 \rangle \}. \end{aligned}$$

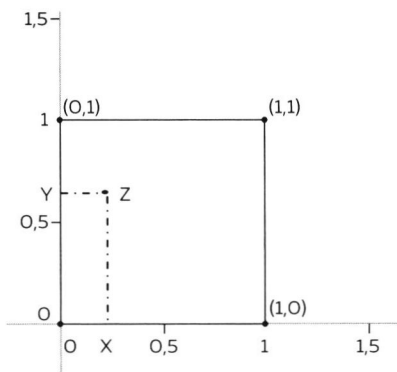
Множество $A \times B$ содержит 15 элементов, что точно соответствует произведению числа элементов множества A и числа элементов множества B . Но для случая бесконечных множеств мы теперь можем утверждать, что $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Опять же это всего лишь выражение того уже известного нам факта, что отель Гильберта может вместить счетное число счетных множеств.

Тем не менее, если поиграть немного с арифметическими операциями для бесконечных множеств, можно получить кое-какие небезынтересные результаты.

1. Из того, что $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, следует, что $\aleph_0 + n = \aleph_0$ для любого конечного числа n . Это связано с тем, что $\aleph_0 \leq \aleph_0 + n \leq \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
2. Если взять отрезок $[0,1]$, мощность которого равна $\aleph$, и прибавить его к отрезку $(1,2]$, мощность которого также равна $\aleph$,

мы получим отрезок $[0,2]$, мощность которого, как и мощность всех отрезков, равна $\aleph$. Таким образом, получаем $\aleph + \aleph = \aleph$. Обратите внимание на круглую скобку в начале обозначения отрезка $(1,2]$. Она означает, что точка «1» не включена в множество. Число 1 исключено из него, чтобы два множества были заведомо непересекающимися.

3. Мы показали, что бесконечный луч имеет мощность $\aleph$. Бесконечный луч можно представить в виде счетного объединения бесконечного количества множеств, образованных непересекающимися отрезками: $[0,1]$, $(1,2]$, $(2,3]$, $(3,4]$, $(4,5]$... Следовательно, $\aleph \cdot \aleph_0 = \aleph$.
4. Если существует кривая, заполняющая квадрат, из этого следует, что $\aleph \cdot \aleph = \aleph$. Чтобы убедиться в этом, представьте себе квадрат как сочетание горизонтальных отрезков прямых. Это означает, что квадрат — это, по сути, $\aleph$ экземпляров отрезка, то есть $\aleph$ экземпляров $\aleph$. Кривая же — это просто изогнутая прямая, так что ее мощность равна $\aleph$. То, что квадрат можно заполнить кривой, означает, что $\aleph \cdot \aleph = \aleph$. Отрезок прямой $[0,1]$ имеет такую же мощность, как и квадрат.



На самом деле совсем не трудно доказать, что отрезок прямой $[0,1]$ имеет такую же мощность, как квадрат, напрямую. Рассмотрим изображенный выше единичный квадрат.

Выберем произвольную точку внутри квадрата. Предположим, что эта точка имеет координаты $X = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ и $Y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$

Тогда на отрезке $[0,1]$ можно найти точку Z , такую, что $Z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$. Можете убедиться самостоятельно, что такое отображение будет одно-однозначным и сюръективным.

Вот небольшая сводка наших результатов:

$$\aleph = \aleph + n$$

$$\aleph = \aleph + \aleph_0$$

$$\aleph = \aleph + \aleph$$

$$\aleph = n \cdot \aleph$$

$$\aleph = \aleph_0 \cdot \aleph$$

$$\aleph = \aleph \cdot \aleph$$

$$\aleph = 2^{\aleph_0}$$

Другими словами, все перечисленные выше кардинальные числа равны друг другу!

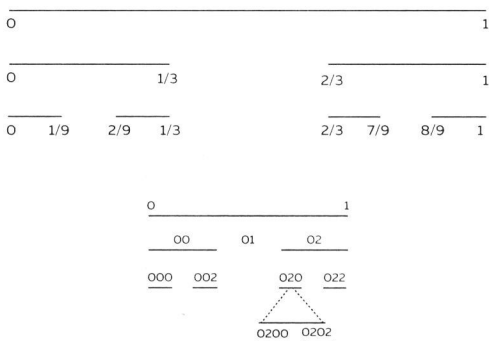
Что же все это означает? В мире бесконечности слагаемые, сомножители и равенства ведут себя совершенно по-другому.

Множество Кантора

Кроме того, Кантора интересовал следующий вопрос: существует ли пример множества с мощностью $\aleph$, не содержащего отрезка прямой? Такой пример существует и носит его имя: множество Кантора. Вот как оно строится:

Разделим отрезок прямой $[0,1]$ на три равные части и удалим средний отрезок, оставив только его конечные точки. У нас останутся отрезок $[0, \frac{1}{3}]$ и отрезок $[\frac{2}{3}, 1]$.

Произведем аналогичную операцию еще раз: разделим каждый из двух отрезков на три равные части и удалим средние участки, оставив их конечные точки. Будем повторять ту же процедуру (деление на три и удаление средних участков) для каждого из меньших отрезков, полученных после деления отрезков $[0, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$, снова и снова, до бесконечности.



Множество всех точек, образующихся во всех множествах после бесконечно многократного повторения этой процедуры, называется множеством Кантора. Например, элементом множества Кантора является 0. Это множество обладает многими интересными свойствами, относящимися не только к теории множеств, но и к топологии, измерениям и геометрии.

У множества Кантора есть и более точное описание. Поскольку каждый отрезок делится каждый раз на три части, удобно использовать для него троичное представление (то есть представление чисел, в котором используются только цифры 0, 1 и 2). Записывать числа в троичном представлении совсем не сложно.

Число a записывается в троичном представлении в виде $a = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$ где $a = c_1/3 + c_2/9 + c_3/27 + \dots$ Числа 3, 9, 27 играют ту же роль, что 10, 100,

1000 играют в более распространенном десятичном представлении.

Например:

$$0,3 = 3/10 = \underline{0,0220022002200220...}$$

$$0,5 = 5/10 = 1/2 = \underline{0,1111111...}$$

$$0,8 = 4/5 = \underline{0,2101210121012101...}$$

Подчеркивание цифр означает, что мы используем троичное представление.

Фома Аквинский (1224–1274) утверждал, что даже если пройдет бесконечное количество дней, ни один из них не будет удален от настоящего момента на бесконечное время. Точно так же для реальной бесконечной прямой справедливо, что расстояние между любыми двумя точками всегда будет конечным, и, как сказал Гегель, бесконечность нельзя найти нигде на бесконечной прямой.

Конкретное описание множества Кантора дается в следующем задании.

Простая головоломка

Покажите, что в троичном представлении всех точек множества Кантора не используется цифра 1.

Теперь легко видеть, что мощность множества Кантора равна $\aleph$, потому что в множество Кантора входят только те числа, в троичном представлении

которых используются только цифры 0 и 2. Тем не менее ясно, что это множество чисел имеет такую же мощность, что и множество чисел, которые можно записать с использованием только цифр 0 и 1. Запись чисел с использованием только цифр 0 и 1 — это попросту двоичный способ записи чисел, и таким образом можно записать все числа, заключенные между 0 и 1. Следовательно, мы приходим к выводу, что множество Кантора имеет ту же мощность, что и множество всех чисел отрезка $[0,1]$, а значит, его мощность равна $\aleph$.

Этот факт весьма удивителен, так как множество Кантора не имеет никакой длины. Действительно, сумма длин всех отрезков, которые мы удаляем, равна:

$$1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + 8 \cdot \frac{1}{81} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Таким образом, длина множества Кантора есть результат вычитания из 1 суммарной длины всех этих отрезков, то есть 1, а следовательно, длина множества Кантора равна 0.

Множество Кантора — действительно очень необычный объект. Оно содержит невычислимое количество точек — суммарная длина которых равна нулю! — которые находятся на множестве отрезков

прямой! Кроме того, множество Кантора считают первым фракталом. Но этой теме придется подождать другой книги.

ЕЩЕ НЕМНОГО О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ

Между прочим, число 1 можно записать в троичном представлении как $0,2222\dots$ а в десятичном — как $0,999999\dots$ Когда я пишу, что $1 = 0,999999\dots$ многие удивленно поднимают бровь (или даже обе). Они пытаются объяснить мне, что это неверно, что 1 хоть совсем ненамного, но все же больше, чем $0,999999\dots$

Чаще всего бывает почти невозможно убедить кого-нибудь в моей правоте. Но это не значит, что я не попытаюсь это сделать.

Попробуйте вычесть $0,9999\dots$ из 1. Что у вас получается? Если ваш результат хоть на сколько-нибудь отличается от нуля, значит, вы совершаете логическую ошибку.

Или же попробуем сделать вот что. Пусть $a = 0,999999\dots$ В таком случае $10a = 9,999999\dots$ Вычтя одно число из другого, получим $10a - a = 9,999999\dots - 0,999999\dots$ А это превосходным образом дает $9a = 9$, то есть $a = 1$.

Если уж и это вас не убедило, мне очень жаль.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

У книги о бесконечности не может быть конца; бесконечность — это нескончаемая история. Поэтому я не стану писать заключения, а дам вам одну очень красивую задачу, и вы сможете обдумывать ее столько, сколько захотите.

Взгляните на следующее равенство:

$1/9801 =$

0,00010203040506070809101112131415161718192021
2223242526272829303132333435363738394041424344
4546474849505152535455565758596061626364656667
6869707172737475767778798081828384858687888990
919293949596979900010203...979900010203...

Видите, что тут происходит?

Не видите?

Ну хорошо.

Вот вам то же самое, но в лучшем разрешении:

1/9801 =

0,00010203040506070809101112131415161718192021
2223242526272829303132333435363738394041424344
4546474849505152535455565758596061626364656667
6869707172737475767778798081828384858687888990
919293949596979900010203...979900010203040506... *ad*
*infinitum**.

Мы получили все двузначные числа, расположенные в правильном порядке (!) и повторяющиеся до бесконечности, кроме числа 98.

Головоломка

Почему отсутствует число 98?

Действительно ли отсутствует число 98?

Что получится, если рассмотреть 1/1089?

Что получится, если рассмотреть 1/998001?

А завершу я текст этой книги своим любимым словом:

ПОЧЕМУ?

* До бесконечности (лат.).

ВЫРАЖЕНИЕ БЛАГОДАРНОСТИ

Прежде всего я хотел бы поблагодарить Итана Ильфельда за веру в меня и в мои книги.

Я хотел бы воздать благодарность моей верной переводчице Линде Иехиэль.

Я хотел бы выразить особую признательность Алену Деккеру, никогда не перестававшему спорить со мной, за огромную помощь и терпение.

Я чрезвычайно благодарен Тому Бенаму, специалисту по теории множеств, за мудрое редактирование моей книги и множество блестящих идей.

Кроме того, я хотел бы поблагодарить ответственного за издание этой книги, Слава Тодорова, и выразить свою признательность всем сотрудникам издательства Watkins, работавшим над ней.

Наконец, но ни в коем случае не в последнюю очередь, я хотел бы поблагодарить своих агентов — Вики Сатлоу и Зива Льюиса.

ПРИМЕЧАНИЯ

Разминка

1. Для этого можно ввести в Google поисковый запрос «Elvis Presley Kevin Bacon». Элвис Пресли снимался в фильме «Смена привычки» (Change of Habit, 1969) с Эдвардом Аснером. Эдвард Аснер играл в фильме «Джон Ф. Кеннеди. Выстрелы в Далласе» (JFK, 1991), в котором снимался и Кевин Бейкон. Следовательно, у Аснера число Бейкона равно 1, а у Пресли (который никогда не играл в тех же фильмах, что и Бейкон) — 2.

2. Го — это абстрактная стратегическая настольная игра для двух игроков, задача которых — окружить большую территорию, чем противник. Эта игра требует стратегического и тактического мастерства и большой наблюдательности. Гомоку (которую называют также «гобан», или «пять в ряд») — тоже абстрактная стратегическая настольная игра, и в нее традиционно играют шашками («камнями») для го на доске для го размером 15×15 или 19×19 клеток. Однако задача участника этой игры — первым выстроить ряд из пяти шашек. В эту игру также можно играть с карандашом и бумагой.

3. Впервые я увидел эту задачу о восхождении монаха в книге Мартина Гарднера «Мои лучшие математические и логические головоломки» (My Best Mathematical and Logical Puzzles, 1994). Это чрезвычайно увлекательная маленькая книжка.

4. Многие математики с этим не согласятся. Они скажут, что мы говорим здесь о пределах сходимости и все зависит от того, с каким типом сходимости мы имеем дело. Читателям, не принадлежащим к числу математиков, может быть полезно найти в «Википедии» статью о концепции *Supertask* [«суперзадачи» — соответствующей статьи на русском языке в «Википедии» пока что нет. — *Примеч. перев.*]: это задача, требующая выполнения бесконечного числа операций за конечный временной промежуток. Мы еще встретимся с этой концепцией позднее, когда познакомимся с Зеноном, Ахиллесом и черепахой.

Глава 1

1. По иронии судьбы о жизни самого Диогена Лаэртского тоже почти ничего не известно; мы знаем только, что великий биограф жил «когда-то в третьем веке».

2. Цит. по «Истории западной философии» Бертрана Рассела.

3. Условие это очень сложно, так что я не буду подробно описывать его.

4. Кроме того, Сабит ибн Курра одним из первых распространил теорему Пифагора для прямоугольных треугольников на случай произвольного треугольника.

5. Слово «собственные» означает здесь, что в множество этих делителей не включается само делимое число.

Глава 2

1. Математик Харальд Бор был братом великого датского физика Нильса Бора. Кроме того, он играл в футбольной сборной Дании, завоевал в ее составе серебряную медаль Олимпийских игр 1908 г. Эта цитата позаимствована из его лекции «Оглядываясь назад» (Et tilbageblik // Mat. Tidsskr. A (1947). P. 1–27).

2. Фудзивара весьма известен в Японии своими популярными книгами по математике. Одна из этих книг посвящена красоте теорем, которые он делит на красивые и уродливые.

3. Первое число — 81. Второе... барабанная дробь! — 1458. Удалось ли вам его найти?

4. Ответ — 62. Каждое число последовательности равно сумме предыдущего числа и суммы цифр предыдущего числа. Например, после 16 идет 23, потому что $16 + (1 + 6) = 16 + 7 = 23$. Следовательно, ответ задачи: $49 + 13 = 62$.

Глава 3

1. Подсказка: Найдите наибольшую степень 2, на которую делится ваше число. Ее и следует взять в качестве $P - 1$.

2. Теорема о распределении простых чисел утверждает (более или менее) следующее: вероятность того, что число, близкое к n , окажется простым, пропорциональна натуральному логарифму n , деленному на n . Поскольку это отношение стремится к 0 при n , стремящемся к бесконечности, это гарантирует редкость появления простых чисел среди всех натуральных чисел.

3. Триплет простых чисел — это набор из трех простых чисел вида $(p, p + 2, p + 6)$ или $(p, p + 4, p + 6)$. Это самое тесное из возможных расположений трех про-

стых чисел, так как одно из любых трех последовательных нечетных чисел оказывается кратно трем и, следовательно, не является простым (за исключением самого числа 3) — кроме случаев (2, 3, 5) и (3, 5, 7).

4. Точнее, $100!$ равно 93 326 215 443 944 152 681 699 238 856 266 700 490 715 968 264 381 621 468 592 963 895 217 599 993 229 915 608 941 463 976 156 518 286 253 697 920 827 223 758 251 185 210 916 864 000 000 000 000 000 000 000.

5. Эти числа названы ее именем, потому что она использовала их в своих исследованиях Великой теоремы Ферма.

Глава 4

1. «Теэтет» — один из диалогов Платона, посвященных природе знания. Он был написан около 369 г. до н. э.

2. Помимо того, что Пифагор открыл иррациональные числа, он внес еще один важный вклад в развитие математической науки: он ввел концепцию «доказательства» в смысле, очень похожем на тот, что известен нам сейчас.

3. Если вы вдруг забыли, что такое логарифм, напомню, что логарифм — это функция, обратная показательной. То есть если $b^y = x$, то $\log_b x = y$. Другими словами, логарифм данного числа x — это степень, в которую нужно возвести другое данное число, основание b , чтобы получить число x . Например, $1000 = 10^3$; следовательно, $\log_{10} 1000 = 3$. Точно так же $\log_2 64 = 6$, поскольку $2^6 = 64$.

4. Две величины образуют золотое сечение, если их отношение равно отношению их суммы к большей из них (то есть если $a > b$ и $a/b = (a + b)/a$, то

величины a и b образуют золотое сечение). Золотое сечение обозначают буквой ϕ .

Глава 5

1. 23 марта 2010 г. благотворительная организация The Warm House («Теплый дом») опубликовала в интернете открытое письмо Перельману с просьбой пожертвовать эти деньги ей. Впоследствии Институт Клэя учредил на средства премии, присужденной Перельману, «кафедру Пуанкаре» — должность для молодых, перспективных математиков в парижском Институте Анри Пуанкаре.

2. Я нашел этот пример в книге «Бесконечность» (Infinity, 1964) Хосе Бенардета.

Глава 6

1. Тем, кого интересует биография Георга Кантора, настоятельно рекомендую превосходную книгу Даубена «Георг Кантор: Его математика и философия бесконечного» (*Dauben J. W. Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Harward University Press, 1979*).

2. Цермело также был автором важной шахматной теории, которую кое-кто считает первой теоремой в теории игр. Я рассказывал об этом в книге «Гладиаторы, пираты и игры на доверии» (Watkins, 2017). (Русское издание вышло в московском изд-ве «КоЛибри» в конце 2020 г. — *Примеч. ред.*)

3. Рассел также был удостоен медали Сильвестра (в 1934 г.). Кроме того, в 1958 г. он получил Нобелевскую премию по литературе. Насколько мне известно, Рассел — единственный человек, получивший обе эти престижные награды.

Глава 7

1. Числа с равной высотой располагаются в порядке возрастания числителя.

Глава 8

1. Когда-то я читал книгу по теории множеств на русском языке, изданную еще до перестройки, и в ней были еврейские буквы. Если вам кажется, что в этом нет ничего особенного, добавлю, что в советской истории был период, когда за изучение иврита могли посадить в тюрьму.

2. Для математиков: алгебраические числа замкнуты относительно операций умножения и сложения, то есть образуют «кольцо».

3. Постоянная Эйлера e играет «главную роль» в самом красивом на свете равенстве $e^{i\pi} + 1 = 0$. Это число, равное 2,17181828459045... встречается в математике очень часто. Оно служит основанием натуральных логарифмов, используется в натуральной показательной функции, в вычислении процентов и в других областях.

4. У такой системы должны быть и другие естественные свойства, которыми обладает система ZF.

5. Радикалом называют просто корень из любого числа.

6. Penrose L. S. & Penrose R. Impossible Objects: A Special Type of Visual Illusion // British Journal of Psychology. 49 (1958). P. 31–33.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Для тех, кто хотел бы изучить этот предмет поглубже, ниже приводится *очень краткий список* некоторых из тех книг, которые, по моему мнению, стоит прочитать.

Marcus du Sautoy. The Music of the Primes.

George Gamow. One Two Three... Infinity.

Martin Gardner. The Colossal Book of Short Puzzles and Problems.

Raymond Smullyan. Satan, Cantor and Infinity (Смаллиан Р. Сатана, Кантор и бесконечность, а также другие головоломки / Пер. с англ. П. И. Быстрова. М.: Лори, 2014).

Douglas Hofstadter. Gödel, Escher, Bach (Хофштадтер Д. Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда / Пер. с англ. М. А. Эскиной. Самара: Издательский дом «Бахрах-М», 2001).

G. H. Hardy. A Mathematician's Apology (Харди Г. Г. Апология математика / Пер. с англ. Ю. А. Данилова. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000).

ОБ АВТОРЕ

Хаим Шапира родился в 1962 г. в Литве. В 1977 г. он эмигрировал в Израиль, где получил первую докторскую степень по математической генетике за диссертацию по теории игр и вторую — за исследование математических и философских аспектов изучения бесконечности. Сейчас преподает математику, психологию, философию и литературоведение. Его перу принадлежат книги, ставшие бестселлерами. В своих сочинениях он пытается не склонить читателя к своей точке зрения, а побудить его мыслить самостоятельно. Хаим Шапира стал одним из наиболее популярных и востребованных лекторов в Израиле и говорит в своих выступлениях о творчестве и стратегическом мышлении, об экзистенциальной философии и философии в детской литературе, о счастье и оптимизме, о бессмыслице и безумии, о воображении и смысле смысла, а также о любви и дружбе. Кроме того, он превосходный пианист и заядлый коллекционер всего прекрасного.

Научно-популярное издание
Танымал ғылыми басылым

ШАПИРА ХАИМ

УДИВИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Как теория чисел и теория множеств
порождают парадоксы бесконечности

Редактор Н. Галактионова
Научный редактор М. Капустин
Художественный редактор М. Левыкин
Технический редактор Л. Синицына
Корректоры Т. Филиппова, Н. Соколова
Компьютерная верстка Т. Коровенковой

Подписано в печать / Баспаға қол қойылды 01.02.2024.
Формат 84 × 100 ¹/₃₂. Гарнитура «Charter». Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,38.
Тираж 3000 экз. G-SCI-35819-01-R. Заказ № 6487/24.

Изготовитель:
ООО «Издательская Группа
«Азбука-Аттикус» — обладатель
товарного знака КоЛибри
115093, Москва, вн. тер. г.
муниципальный округ Даниловский,
пер. Партийный, д. 1, к. 25
Тел. (495) 933-76-01,
факс (495) 933-76-19
E-mail: sales@atticus-group.ru

Филиал ООО «Издательская Группа
«Азбука-Аттикус»
в г. Санкт-Петербурге
191024, г. Санкт-Петербург,
ул. Херсонская, д. 12–14, лит. А
Тел. (812) 327-04-55
E-mail: trade@azbooka.spb.ru
www.azbooka.ru; www.atticus-group.ru

Отпечатано в России.

Өндіруші:
«Издательская Группа
«Азбука-Аттикус» ЖШҚ — КоЛибри
тауар белгісінің иесі
115093, Мәскеу, қ. іш. аум.
Даниловский муниципалдық округі,
Партийный т.ш., 1-үй, к. 25
Тел. (495) 933-76-01,
факс (495) 933-76-19
Эл. поштасы: sales@atticus-group.ru

Санкт-Петербург қаласындағы
«Азбука-Аттикус» Баспа Тобы»
ЖШҚ филиалы,
191024, Санкт-Петербург,
Херсон көшесі, 12–14-үй, лит. А
Тел. (812) 327-04-55
Эл. поштасы: trade@azbooka.spb.ru
www.azbooka.ru; www.atticus-group.ru

Ресейде басып шығарылған.

Техникалық реттеу туралы РФ заңнамасына сай басылымның сәйкестігін
растау туралы мәліметтерді мына адрес бойынша алуға болады:
<http://atticus-group.ru/certification/>.

Знак информационной продукции (Федеральный закон № 436-ФЗ от 29.12.2010 г.)

Ақпараттық өнім белгісі (29.12.2010 ж. № 436-ФЗ федералдық заң)



Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», 170546, Тверская область,
Промышленная зона Боровлево-1, комплекс № 3А, www.pareto-print.ru

ПО ВОПРОСАМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОБРАЩАЙТЕСЬ:

В Москве:

ООО «Издательская Группа «Азбука-Аттикус»

Тел. (495) 933-76-01, факс (495) 933-76-19

E-mail: sales@atticus-group.ru

В Санкт-Петербурге:

Филиал ООО «Издательская Группа «Азбука-Аттикус»

в г. Санкт-Петербурге

Тел. (812) 327-04-55

E-mail: trade@azbooka.spb.ru

www.azbooka.ru; www.atticus-group.ru

ТАРАТУ МӘСЕЛҒЕЛЕРІ БОЙЫНША ХАБАРЛАСЫҢЫЗ:

Мәскеуде:

«Издательская Группа «Азбука-Аттикус» ЖШҚ

Тел. (495) 933-76-01, факс (495) 933-76-19

Эл. поштасы: sales@atticus-group.ru

Санкт-Петербург:

Санкт-Петербург қаласындағы «Азбука-Аттикус»

Баспа Тобы» ЖШҚ филиалы

Тел. (812) 327-04-55

Эл. поштасы: trade@azbooka.spb.ru

www.azbooka.ru; www.atticus-group.ru

Хаим Шапира получил докторскую степень по математической генетике за диссертацию, посвященную **теории игр**, а вторую – за исследование математического и философского подхода к **бесконечности**. В этой книге нашли отражение идеи последнего диссертационного исследования ученого, которые восхищают и позволяют сказать: **математика удивительна**.

Некоторые парадоксы бесконечности, описанные в книге:

Апории Зенона

Гилбертовский отель «Бесконечность»

Парадокс Ахиллеса и Богов

Парадокс Рая и Ада

Парадокс Росса–Литлвуда о теннисных мячах

Парадокс Галилея

«Я расскажу просто и ясно о двух математических теориях, которые считаю самыми завораживающими, – теории чисел и теории множеств, и каждая из них имеет отношение к бесконечности. Вместе с этим я предложу стратегии математического мышления, позволяющие читателю испытать свои способности к решению поистине увлекательных математических задач».

Хаим Шапира

