Майкл Брукс

Искусство большего

Как математика создала цивилизацию

CoRpus

ЭЛЕМЕНТЫ 2.0

Книга для тех,
кто любит математику, и тех,
кто всегда ее ненавидел

Книжные проекты Дмитрия Зимина

ЭЛЕМЕНТЫ 2.0

MICHAEL BROOKS

THE ART OF MORE

HOW MATHEMATICS CREATED CIVILIZATION

МАЙКЛ БРУКС

ИСКУССТВО БОЛЬШЕГО

КАК МАТЕМАТИКА СОЗДАЛА ЦИВИЛИЗАЦИЮ

перевод с английского
Заура Мамедьярова

издательство **АСТ**
Москва

УДК 51(091)
ББК 22.1г
Б89

Издание осуществлено при поддержке "Книжных проектов Дмитрия Зимина"

This edition is published by arrangement with PEW Literary Agency Limited and Synopsis Literary Agency

Художественное оформление и макет Андрея Бондаренко

Брукс, Майкл.

Б89 Искусство большего. Как математика создала цивилизацию / Майкл Брукс; пер. с англ. З. Мамедьярова. — Москва : Издательство АСТ : CORPUS, 2024. — 368 с. — (Элементы 2.0).

ISBN 978-5-17-148081-3

От подсчета налогов до математического анализа, от архитектурных расчетов до выведения спутников на орбиту Земли — математика всегда определяла развитие человечества, от древних царств и до сегодняшнего дня. Но как шло это развитие? Сколько великих умов посвятили всю жизнь математике? Как именно математика и достижения гениев прошлого позволяли банкам наращивать свой капитал, а военачальникам — выигрывать битвы и целые войны? Майкл Брукс приглашает читателя в увлекательное путешествие по страницам истории этой удивительной науки.

УДК 51(091)
ББК 22.1г

ISBN 978-5-17-148081-3

Книжные проекты Дмитрия Зимина

Эта книга издана в рамках программы
“Книжные проекты Дмитрия Зимина”
и продолжает серию
“Библиотека фонда «Династия»”.
Дмитрий Борисович Зимин —
основатель компании “Вымпелком” (*Beeline*),
фонда некоммерческих программ “Династия”
и фонда “Московское время”.

Программа “Книжные проекты Дмитрия Зимина”
объединяет три проекта, хорошо знакомых
читательской аудитории:
издание научно-популярных
книг “Библиотека фонда «Династия»”,
издательское направление фонда “Московское время”
и премию в области русскоязычной
научно-популярной литературы
“Просветитель”.

Подробную информацию
о “Книжных проектах Дмитрия Зимина”
вы найдете на сайте
ZIMINBOOKPROJECTS.RU

Содержание

От автора

Здесь рады всем — и тем, кто любит математику, и тем, кто всегда ее ненавидел, и тем, кто просто хочет лучше в ней разобраться. У всех свои взаимоотношения с этим предметом, и мне с самого начала хотелось сделать эту книгу доступной для каждого. В связи с этим я старался писать как можно понятнее, но решил, что порой читателю не будет лишним и приложить немного усилий, чтобы действительно разобраться в вопросе. Это значит, что здесь есть и кое-что из настоящей математики: графики, уравнения и расчеты, которые я постараюсь вам разъяснить. Но если вы к такому не готовы и не хотите напрягаться — просто пропускайте эти фрагменты. Жизнь и так слишком коротка.

Введение
Почему умение работать с цифрами — величайшее достижение человечества

В июне 1992 года американский исследователь Питер Гордон посетил деревушку из нескольких хижин, покрытых пальмовыми листьями, на берегу реки Маиси в бразильской Амазонии[1]. Там он встретился с Дэниелом Эвереттом — христианским миссионером, который жил вдали от цивилизации среди народа пирахан. Эверетт рассказал Гордону, что пирахан довольно небрежны в отношении чисел: по сути, они не утруждают себя счетом. Заинтригованный, Гордон приехал разузнать, как такое возможно.

Он решил провести эксперимент с использованием пальчиковых батареек, которые привез с собой. Выкладывая по несколько батареек в линию, он просил пирахан выложить рядом еще одну линию с таким же числом батареек. С линиями из одной, двух и трех батареек они справлялись без труда. Повторить линию из четырех, пяти или шести батареек им было уже сложно. Когда количество батареек возрастало до десяти, задача становилась практически невыполнимой. Аналогичная проблема возникала, когда пирахан просили воспроизвести символы, нарисованные на бумаге. Один-два символа они копировали с легкостью, но больше шести повторить не мог никто. Гордон пришел к выводу, что пирахан вообще не умели работать с цифрами — возможно, потому что у них не было в этом нужды. При их образе жизни мозг просто не находил причин формировать концепцию чисел.

Большинству из нас удивительно, что люди вполне могут обходиться без чисел. Дело в том, что мы сами не отдаем себе отчет в том, насколько глубоко числа укоренились в нашей повседневной жизни. Однако, если не заострять на этом внимание, мы даже не задумываемся о том, что числа лежат в основе нашего образа жизни, наших институтов и нашей инфраструктуры. О чем бы ни зашла речь — о бизнесе, жилье, медицине, политике, войне, сельском хозяйстве, искусстве, путешествиях, науке, технологиях, — почти все аспекты нашего существования зиждятся на математическом фундаменте. И это удивляет лишь сильнее, если осознать, что математики могло и не быть.

От природы мы ничуть не больше других видов способны работать с цифрами[2]. Люди рождаются лишь с тем, что называется “примерным арифметическим мышлением”[3]. Это значит, что в изначальном состоянии человеческий мозг не утруждает себя подсчетами, когда количество единиц чего-либо превышает три. Увидев четыре яблока, ребенок автоматически сочтет, что их “много” или “больше”. От природы мы ведем счет так: “1, 2, 3, больше”. Мозг крыс, шимпанзе, птиц и обезьян также применяет примерную систему счисления. Если вознаградить крысу, когда она пять раз нажмет на рычаг, то она будет время от времени возвращаться к аппарату и нажимать на рычаг примерно пять раз, надеясь снова получить лакомство. Людям удалось обучить шимпанзе выполнять более сложные задачи с числами — например, запоминать последовательности чисел, — и порой шимпанзе справляются с ними лучше, чем неподготовленные взрослые люди. Но в процессе обучения без вознаграждений не обойтись: шимпанзе не станут заниматься математикой в свое удовольствие. Вы тоже пришли к цифрам не сами: вы научились считать под давлением социума. Любопытно, что такое давление проистекает из глубоко укоренившейся в культуре мудрости, которая гласит, что математика — вещь нужная.

Живший в эпоху Тюдоров математик и мистик Джон Ди называл математику "странным соседством сверхъестественного, нетленного, философского, простого и неделимого с естественным, бренным, здравым, сложным и делимым"[4]. Казалось бы, это чепуха, но математика действительно сверхъестественна, поскольку мы применяем ее, чтобы выйти за границы естественного. Развитие математики позволяет нам изучать и разбирать природные закономерности и симметрии и, подобно богам, перестраивать их под собственные нужды. Благодаря математике мы меняем окружающий мир, чтобы нам, людям, жилось лучше. Сперва мы научились считать до четырех, а в итоге обнаружили, что создали цивилизации. Постигая искусство "большего", наш мозг учится работать со сложными абстракциями. Он осваивается в мире, где числа применимы не только к вещам, требующим счета, но также к фигурам, точкам, линиям и углам, — иными словами, в сфере геометрии. Это наделяет нас способностью воссоздавать — на бумаге, на деревянной сфере или просто в голове — такой огромный и сложный объект, как Земля, и учиться ориентироваться на нем. Мы также можем воссоздавать числа — знакомые и незнакомые нам — в качестве символов и манипулировать ими, чтобы управлять миром и перестраивать его, делая поразительные успехи в упорядочивании, оптимизации и транспортировке. Это, если вы еще не поняли, алгебра. Мы можем даже проводить расчеты, чтобы прогнозировать, какое будущее наступит под действием происходящих вокруг изменений. Эта сфера называется математическим анализом, и она позволяет нам достигать множества целей, от формирования рыночного капитализма до полетов на Луну.

Мы осваиваем эту математику — по крайней мере, как предполагается — на ранних этапах жизни. В школе нас уверяют, что математика — важнейший навык, без которого не обойтись, если мы хотим добиться успеха. И мы покорно, хотя частенько и неохотно, открываем для себя математические инструменты и учимся ими пользоваться. Некоторым это нравится, но большинству — нет. В какой-то момент почти все опускают руки.

Мало кто после этого продолжает изучать математику. В последующие годы обретенные в муках навыки притупляются, и лишь самые базовые из них остаются в нашем распоряжении. Без помощи технологий — например, калькулятора в мобильном телефоне, без которого сегодня не разделишь на компанию ни один ресторанный счет, — мы умело складываем и вычитаем лишь относительно небольшие числа, да еще, возможно, немного умеем умножать и делить. Остальное улетучивается. Порой у нас даже развивается "математическая фобия", когда мы всеми силами стараемся не допускать столкновения с цифрами. А иногда мы просто приходим к выводу, что математика не поддается нашему пониманию, и утверждаем, что это "не наше".

Если вы сейчас узнали себя, я надеюсь, что вы перемените мнение, прочитав эту книгу. Математика — выдающееся достижение, которое доступно всем, как бы хорошо (или плохо) люди ни владели цифрами. Тысячелетия применения математики человеческим мозгом значительно облегчают нам сегодня жизнь, и мы все имеем право приобщаться к этой науке, каким бы ни был уровень нашего образования. Разве у вас не должно быть возможности увидеть, что математический анализ Ньютона красив, как Тадж-Махал, и понять, почему вавилонская алгебра не менее прекрасна, чем вавилонские Висячие сады? В полной мере понимая математику, мы можем не только сравнить ее с традиционными красотами, но и узнать, как мы создали вещи, которые считаем красивыми. Куда бы ни упал наш взгляд — на искусство или на архитектуру, на картину Вермеера или на величественный собор Святой Софии в Стамбуле, — мы обнаружим, что в основе всего этого лежит математика. Она влияет не только на эстетические сферы нашей жизни, ведь с математикой неразрывно связана и сама история человечества. Колумб не приплыл бы в Америку, если бы люди не знали, какими свойствами обладают треугольники, а современный корпоративный мир показывает, какие возможности открывает работа с числами. Математика дала нам зубило, которое определило очертания эпохи Возрождения, и оружие, обеспечившее нам целые столетия военных успехов. Математика — переводчик, который позволил людям, говорящим на разных языках, наладить взаимовыгодную торговлю, и топливо, которое доставило нас на Луну. Она — искра, которая электрифицировала мир в начале XX века, и сила, которая стояла за каждым правителем древнего мира. Неудивительно, что 4 тысячи лет назад царя Шульги, властителя Ура, почитали именно за способности к математике.

В школе я не узнал ничего из этого. Я научился сдавать экзамены по математике и время от времени применял свои навыки, чтобы рассчитать ускорение машины или силу, необходимую, чтобы вывести ракету на орбиту. Но я не узнал, чем мы как вид обязаны математике и как вообще мы ее изобрели. Но еще не вечер. Мы еще можем отыскать в математике и радость, и смысл, даже если прошел не один десяток лет с тех пор, как мы потеряли надежду изучить ее тонкости.

Я помню, когда и где достиг своего математического потолка: был октябрь 1987 года, и я сидел в аудитории Сассекского университета на юге Англии, только поступив на физический факультет. Не помню точно, какой была тема, но эта лекция была первой из курса по изучению продвинутых математических техник. Мне было очень тяжело, а предмет не входил в число обязательных, поэтому я просто ушел с занятия. У каждого из вас найдется своя подобная история, но в какой-то момент все мы вышли из кабинета математики в последний раз. К счастью, дверь за нами не закрылась полностью. Давайте войдем в нее снова.

Глава 1
Арифметика
История цивилизации

В процессе эволюции у людей не возникло непреодолимого желания считать. Но стоило нам изобрести числа и арифметику, как мы попали в зависимость от них. Числа позволили людям осуществлять управление, взимать налоги и торговать друг с другом, что открыло им возможность жить в больших взаимозависимых сообществах. В конце концов арифметика и ее производные — дроби, отрицательные числа и понятие нуля — стали движущей силой экономического и политического успеха: те, кто умеет обращаться с числами, определяют будущее рабочих, стран и всей планеты. А началось все с интеллектуального скачка к числу 4.

В первой половине XV века банк Медичи был гордостью Флоренции на зависть всей Европе[1]. Его успех объяснялся просто: Джованни Бенчи, управлявший банком, педантично вел бухгалтерию и всегда все делал по правилам. Он каждый год проверял бухгалтерские ведомости всех филиалов банка, оценивал финансовое положение должников и определял вероятность неисполнения платежных обязательств. Если бы вы управляли одним из филиалов банка и Бенчи обнаружил бы, что у вас не сходится баланс, он вызвал бы вас к себе и разорвал на куски. А потом, в 1455 году, Бенчи умер, и все развалилось.

Сотрудники банка Медичи вдруг освободились от пристального контроля Бенчи и стали предлагать вкладчикам слишком щедрый доход, все равно как если бы современный банк обещал 10 % дохода с любых инвестиций. Чтобы обеспечивать гарантированные процентные платежи, банк начал проводить нездоровую политику кредитования. Он предлагал ссуды под непомерные проценты, и европейские короли и аристократы, которые нуждались в средствах для ведения войн, соглашались на условия Медичи, не собираясь выплачивать долги. У банка не было возможности принудить кредиторов к возврату ссуд, и деньги утекали. Тем временем совладельцы банка ориентировались на баланс, раздутый за счет кредитов, которые никто не планировал возвращать, и пускали несуществующую прибыль на личные расходы. Они жили на широкую ногу, ни в чем себя не ограничивая, и наличность в банке таяла. В 1478 году банк Медичи оказался на грани банкротства. Разоренный Лоренцо Медичи, правнук основателя банка, попытался поправить свое положение, присвоив себе деньги вкладчиков. Разгневанные флорентийцы в 1494 году штурмовали дворец Медичи и сожгли все банковские книги. В этом пламени сгорело и вековое господство европейской культурной, политической и финансовой столицы.

В следующий раз история продемонстрировала колоссальную силу бухгалтерского учета в период Великой французской революции. Взрыв случился, когда со своего поста был смещен счетовод Жак Неккер, который пытался наладить разрушенную финансовую систему Франции и сократить гигантский объем государственного долга. В процессе он изобличил расточительность французского королевского двора. В конце концов деятельность Неккера стала вызывать недовольство со стороны правящих классов, которые теряли деньги в результате его реформ. Неккер был смещен с поста министра финансов, но приобрел множество верных и опасных сторонников.

Историк Франсуа Минье описывает момент, который дал толчок к революции: импульсивный Камиль Демулен стоит на столе, держа в руке пистолет[2]. "Граждане! Нельзя терять ни минуты!" — восклицает молодой бунтарь. Отставка Неккера, говорит Демулен, оскорбляет каждого патриота Франции и каждого ставит под угрозу. "Остается лишь одно — взяться за оружие!" Услышав этот призыв, толпа устремляется на улицы. На плечах у людей — бюсты смещенного министра. "Ни один кризис не обходится без лидера, имя которого становится знаменем его сторонников, и пока народ боролся со двором, таким лидером был Неккер".

Кампанию Неккера мы вряд ли сразу сочли бы революционной: он просто хотел свести баланс. Неккер отметил, что английский парламент обнародует свои доходы и расходы и финансы Англии в порядке, несмотря на крупные ссуды на ведение заграничных войн. Он считал, что Франция должна стремиться к такой же прозрачности. Сведенный баланс, говорил Неккер, есть основа этического, преуспевающего, счастливого и могущественного правительства. В связи с этим он пытался заменить множество французских финансовых реестров одним, который контролировал бы сам. Его идея не получила поддержки у тех, кто стоял у власти, но оказалась чрезвычайно популярной среди тех, кто влияния не имел. В результате, как выразился историк Джейкоб Солл, "французская революция началась отчасти как борьба за подотчетность правительства и точность цифр"[3].

Зарубежным финансовым системам завидовала не только Франция. Столпы экономики США — налоговые поступления, доллар, Центральный банк — были в общих чертах скопированы с голландских и английских банковских практик. В то время в Америке банков не было, и страна тонула в долгах. Банки, как Александр Гамильтон отметил в 1781 году, были "лучшим из двигателей, изобретенных для развития торговли"[4]. Гамильтон утверждал, что свобода от британского правления придет тогда, когда Америка разберется в бухгалтерских ведомостях и станет вести их самостоятельно. "Только порядком в финансах — и возвратом доверия общества, — а не победами в битвах мы сумеем наконец достичь своей цели, — сказал он. — Своей способностью мобилизовать огромные силы для ведения множества славных и успешных войн Великобритания обязана огромной кредитной базе, сформированной на этом фундаменте. Только этим она и угрожает нашей независимости".

Став первым министром финансов США, Гамильтон принял все необходимые меры и вытащил молодое государство из пучины банкротства. Уже к 1803 году финансовое чутье Гамильтона позволило США выпустить достаточное количество государственных облигаций, чтобы купить у Франции Луизиану и увеличить площадь страны вдвое. Возможно, вам мюзикл "Гамильтон" нравится как ода одному из отцов-основателей США, но историки экономики видят в нем хвалу бережливости. А математики — свидетельство того, какую силу дает умение работать с числами.

Учимся считать

Не стоит принимать математику как должное. Современный человек — *Homo sapiens*, "человек разумный", — существует около 300 тысяч лет, а самым древним из найденных рукотворных артефактов не менее 100 тысяч лет. Но самому раннему надежному свидетельству о том, что человек научился считать, лишь около 20 тысяч лет. Длинные насечки на кости Ишанго, обнаруженной в одноименном местечке на территории современной Демократической Республики Конго, сгруппированы в три колонки, каждая из которых поделена на отрезки. Хотя мы ничего не можем сказать наверняка, логично предположить, что одна насечка — это "один". Две насечки — два. И так далее. В совокупности насечки напоминают систему счисления для расчета лунных циклов[5].

Насечки на кости были созданы относительно недавно, и это наталкивает на мысль, что человек довольно поздно научился считать и что этот навык не является неизбежным следствием развития интеллекта. Мозг у вас в голове, по сути, не отличается от мозга первого *Homo sapiens*, и кажется, что на протяжении большей части истории нашего вида человек разумный вообще не связывался с цифрами.

Однако как только мы освоили счет, преимущества стали очевидны. Именно поэтому вы, вероятно, даже не помните, как учились считать. Умение считать настолько ценится в большинстве человеческих культур, что обучение ему начинается еще до того, как у ребенка в голове откладываются первые долговременные воспоминания. И я готов поспорить, что вы учились считать на пальцах[6].

Впервые я всерьез задумался о счете на пальцах — не считая того неловкого момента, когда понял, что считаю на пальцах у всех на глазах, в супермаркете, пока пытался вспомнить, сколько гостей придет на ужин, — когда посмотрел бунтарский военный фильм Квентина Тарантино "Бесславные ублюдки". В одной из сцен фильма британец притворяется немцем в подпольном баре. Он жестом просит бармена принести три стакана и поднимает для этого указательный, средний и безымянный пальцы. Немецкий офицер, сидящий с ним за одним столом, сразу раскусывает собутыльника. "Вы только что себя выдали, капитан", — говорит он.

Немцы показывают "один" большим пальцем, поэтому немец заказал бы три стакана, подняв большой, указательный и средний пальцы[7]. Азиаты считают на пальцах иначе. Моя подруга Сонали, выросшая в Индии, училась считать по отдельным фалангам. Торговцы из индийского штата Махараштра используют иную систему[8]. Они начинают с большого пальца, как немцы, но когда доходят до пяти, поднимают большой палец другой руки (обычно правой), чтобы обозначить, что одна "пятерка" уже собрана. Дальше они снова сжимают левый кулак и поднимают большой палец, показывая "шесть".

Представьте, что заключаете сделку с торговцем из Махараштры. Сначала вы, наверное, придете в замешательство, но вскоре поймете, сколько нужно заплатить, даже не прибегая к помощи языка. Умение считать на пальцах позволяет нам осуществлять торговлю, не имея общего письменного или разговорного языка. Достаточно, чтобы обе стороны понимали, о какой валюте идет речь, и знали числа от единицы до сотен и тысяч.

Именно поэтому освоение счета на пальцах было основополагающим элементом образования почти для всех членов древних обществ. Даже самые изолированные общества осуществляли обмен с путешествующими торговцами, которые далеко не всегда говорили с ними на одном языке. В сочинениях, созданных в V и IV веках до нашей эры, Аристофан упоминает, что счет на пальцах широко распространен в Древней Греции и Персии. Древнеримский ритор Квинтилиан отмечает, что стыдно должно быть тому законнику, который плохо владеет счетом на пальцах. Ацтеки изображали людей, показывающих числа пальцами, а в средневековой Европе счет на пальцах был настолько вездесущ, что в прославленный учебник математики "Сумма арифметики, геометрии, отношений и пропорций", написанный в 1494 году Лукой Пачоли, вошло полное иллюстрированное руководство, позволяющее овладеть этим искусством. Даже в конце XVIII века немецкий путешественник Карстен Нибур описывал, как торговцы на азиатских рынках тайно договариваются о ценах, особым образом хватая друг друга за пальцы. Чтобы не посвящать никого в свои дела, они прятали руки в широких рукавах или скрывали их под отрезом ткани, наброшенным на запястья.

Поскольку способы обозначения чисел в разных культурах всегда различались, при обучении будущим дельцам приходилось уделять большое внимание жестам. Чтобы осваивать их было легче, поэты и учителя создавали подсказки в стихах и прозе. Вот, например, одна из древнего арабского мира: "Халид взял с собой 90 дирхамов, а когда вернулся, у него осталась лишь треть". Хотя нам это мало о чем говорит, арабы показывали 90, полностью согнув указательный палец у основания большого. Треть от 90 — это 30, и здесь знаком было гораздо более широкое кольцо, образуемое при соприкосновении кончиков большого и указательного пальцев. В подсказке содержался намек на то, что Халида анально изнасиловали и ограбили. Подозреваю, что теперь вы на всю жизнь запомните, как в древности показывали 90 и 30 на пальцах.

Причина столь широкого распространения счета на пальцах во многом совпадает с причиной, по которой люди прекрасно научились работать с числами, как только осознали их ценность. Она такова: в первые пять лет жизни мозг человека посредством игры, экспериментов и стимуляции формирует так называемый пальцевой гнозис. Это способность воспринимать и ощущать каждый палец по отдельности. Через некоторое время в мозге создается внутренний образ пальцев, и этот образ помогает человеку приступить к работе с числами[9]. Прелесть пальцев в том, что их можно видеть и ощущать, и ими можно двигать. Они собраны в две группы по пять единиц, каждую из которых можно привести в разное положение при сгибании. Если бы вам нужно было изобрести инструмент, чтобы присвоить понятие “сколько?” к группе объектов перед вами, вам сложно было бы придумать что-то лучше своих пальцев.

При сканировании мозга мы видим, что, когда большинство из нас решает математические задачи — например, вычитая одно число из другого, — в дело вступает область мозга, которая работает с данными, получаемыми от пальцев. Если числа велики, активность в этой области становится более очевидной. Любопытно, что, если вам особенно хорошо дается вычитание, активность оказывается не такой высокой: иными словами, связи в вашем мозге едва напрягаются. Но стоит также отметить, что если в детстве вас не подталкивали использовать пальцы в играх — особенно в считалках, например “Раз-два-три-четыре-пять, вышел зайчик погулять”, — вы, возможно, так и не “освоили” числа[10]. Вы представляете их иначе, чем другие люди. Это одна из причин, по которым кое-кому не дается математика.

Может показаться, что, освоив счет на пальцах, человек готов сделать следующий шаг и начать записывать числа. Но, раз мы могли и не начать работать с числами, мы уж точно могли и не начать их записывать. В конце концов, когда торговля осуществлялась на месте, о цене договаривались лично, а товары передавались незамедлительно, записывать транзакции не было необходимости. Что же подтолкнуло нас к записи чисел? Записывая числа, мы могли прогнозировать небесные явления, которые, возможно, имели религиозное значение, — скажем, новолуния и солнечные затмения. А еще мы могли производить учет запасов и уплаченных цен, а также фиксировать обязательства, связанные с будущими покупками и продажами. Вероятно, числа начали записывать в рамках религиозных практик, но в итоге это также позволило нам вывести на новый уровень торговлю. Как бы то ни было, запись чисел привела нас прямо к сегодняшнему процветанию.

Учетная революция

Мы точно не знаем, кто из людей раньше всех стал записывать числа. Вполне возможно, что кость Ишанго была создана значительно позднее начала математического путешествия человечества. Но две вещи мы знаем наверняка. Во-первых, существовало множество вариантов записи чисел, от костей с засечками до инкских узелков, вавилонской клинописи на глине, египетских чернил на папирусе и даже до электрического напряжения в микросхемах, изобретенных в XX веке. Во-вторых, новая способность к осуществлению финансового учета оказалась революционной. Ведение бухгалтерии, возможно, кажется вам просто неприятной обязанностью, которую вы с радостью перекладываете на чужие плечи, но после ее изобретения человеческая культура кардинально изменилась.

Самые ранние свидетельства коммерческого счета датируются примерно 4 тысячами лет назад, когда месопотамские торговцы начали записывать договоренности о продаже овец. Каждой договоренности соответствовал глиняный шарик. Шарики запечатывались в полую сферу, на которой отмечалось их количество, а затем сферу обжигали, чтобы запись невозможно было изменить. Это была страховка на случай, если людей подведет память или если они намеренно попытаются нарушить договоренности.

Со временем на смену этой системе пришла более простая: засечки на обожженной глиняной табличке. Теперь нетрудно было увидеть, какими были договоренности и что именно было куплено, продано и оплачено. К тому моменту люди уже стали понимать, что работа с числами не только дает преимущества в торговле: она дает власть.

В 2074 году до нашей эры царь Шульги, правивший Уром, который находился на юге современного Ирака, создал, по выражению историков, “первое математическое государство”[11]. Шульги начал с военной реформы, за которой последовала административная. В соответствии с ними писцам Ура было поручено вести сложную перепись всего, чем богато царство. Надзиратели, контролировавшие рабочий класс Ура, оставили записи о количестве отработанных часов, болезнях, отсутствиях на рабочем месте и производительности труда заимствованных и предоставленных в аренду рабов. Если они не могли показать, что каждый из подотчетных им работников за месяц отработал 30 дней (вне зависимости от продолжительности месяца), то государство взимало с них плату за недоработки. Если писец-надзиратель умирал, не выплатив долг, обязательства переходили к его родственникам. Система отчетности царя Шульги была основана на неожиданном принципе: она должна была максимально облегчить выявление попыток обмануть государство. Оказывается, аудит — истинная колыбель цивилизации.

Если Ур был первым математическим государством, то Шульги стал первым богом-математиком. Он провозгласил себя богом на двадцать третьем году царства. После этого его подданным полагалось почитать его и восхвалять его качества, в особенности его мастерское умение работать с цифрами. До нас дошли тексты гимнов с хвалами Шульги, и одним из его божественных атрибутов, очевидно, была прекрасная математическая подготовка в "доме табличек", где он научился складывать, вычитать, считать и вести учет.

Преимущества математики как основы царства Шульги были так велики, что в следующем поколении математика стала в этом государстве величайшим из ремесел и важнейшим элементом подготовки писцов. К началу 2-го тысячелетия до нашей эры квалифицированный писец должен был уметь читать и писать по-шумерски и по-вавилонски, а также иметь музыкальные и математические навыки. Нужная писцам математика не сводилась к простому бухгалтерскому тасованию цифр, а предполагала осуществление чрезвычайно сложных — и как будто бы бесполезных — вычислений. По сути, писцам нужно было решать такие, например, задачи: "Я сложил периметр, диаметр и площадь круга и получил 115" — каков его радиус?[12] Это была математика ради математики, которая считалась одной из "добродетелей". Только владея математикой, образованный писец мог считать себя мастером *nam-lú-ulu*, или, в переводе с шумерского, "искусства быть человеком". Иными словами, в систему образования математика попала через учебную программу гуманитарных наук.

В таком случае не приходится удивляться тому, что мы обнаружили не один десяток тысяч древних глиняных табличек, на которых были не только расчеты. Многие из них использовались как вспомогательные математические инструменты: таблицы умножения и деления, списки квадратов чисел (произведений, получаемых при умножении числа на само себя) и обратного — квадратных корней. У нас имеются глиняные записи о том, как работать с дробями и решать алгебраические задачи, а также как использовать такие геометрические инструменты, как приблизительное значение числа пи и квадратный корень из 2. В последующих главах мы поговорим о важности этих инструментов и техник, а пока достаточно лишь сказать, что в те времена, когда зародилось то, что мы называем цивилизацией, числа были краеугольным камнем общества.

Искусство счета наделило нас исключительной силой. Шульги понимал, насколько полезна математика, и благодаря этому — по крайней мере, отчасти — его царство достигло беспрецедентного могущества. Он завершил начатое при его отце строительство Великого зиккурата в Уре, проложил разветвленную дорожную сеть и обеспечил расширение торговли с арабскими и индийскими сообществами. Все это стало возможным не потому, что математику изобрели, а потому, что ей нашли *применение* — в политических целях. И вскоре эта стратегия оправдала себя в других местах.

Возможно, мы уделяем слишком много внимания математической смекалке шумеров и вавилонян просто потому, что их привычка к записи повседневной жизни на глиняных табличках обеспечила нас множеством доступных артефактов. Общества, которые опирались на устную традицию, плохо представлены в нашем рассказе о том, как математика вплеталась в ткань любой цивилизации. Взять, к примеру, народ аканов из Западной Африки. В доколониальный период они пользовались сложной математической системой при взвешивании золота, используемого в торговле. В ней было два компонента: один — для работы с арабской и португальской системами весов, а второй — для работы с голландскими и английскими мерами. Ученые, которые сумели ее воссоздать, изучив артефакты, хранящиеся в музеях по всему свету, полагают, что ее стоит внести в список Всемирного наследия ЮНЕСКО за одну только головокружительную сложность[13].

Неудивительно, что капитаны невольничьих судов, заключавшие сделки с африканскими работорговцами, называли тех "мастерами арифметики"[14]. В одном источнике говорится: "У торговца может быть рабов десять на продажу, и за каждого из них он просит десять разных вещей. Он мгновенно в уме переводит их цену в слитки, монеты, унции в зависимости от того, какое платежное средство более распространено в той части страны, где он проживает, и тотчас подбивает баланс". Тот факт, что инструкции по применению этой системы расчетов передавались из уст в уста, производит еще более глубокое впечатление, но также значит, что как раз работорговля и подрывала ее использование. Невозможно установить, сколько великих математических умов было перевезено в Европу, в Северную и Южную Америку и на Карибские острова, где им больше не нашлось применения. В результате богатые африканские математические традиции так и не были оценены по достоинству — за исключением разве что тех, которые получили распространение в Древнем Египте.

Польза дробей

Если оценивать названия книг, то "Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей" — это отпад. По названию можно подумать, что это книга из сырого подвала какой-нибудь лавки колдовских товаров, в которой объясняется, как призывать духов для осуществления всяческих козней. Но это не так. На самом деле это древнеегипетский учебник математики.

На Западе он более известен как папирус Ринда — по фамилии шотландского юриста, который около 1858 года приобрел его в Фивах. Большая часть рукописи (длина всего документа составляет 5,5 метра) хранится в Британском музее в Лондоне. Остаток — в Бруклинском музее в Нью-Йорке. Она была создана древнеегипетским писцом Ахмесом около 3,5 тысячи лет назад. Ахмес (имя которого значит "рожденный на луне") скопировал тысячелетний текст с описанием математических приемов, применявшихся древнеегипетскими жрецами.

Древнеегипетское царство зависело от расчетов, связанных с ежегодным разливом Нила. Инженеры снимали показания глубиномеров и сообщали об изменениях уровня воды. Жрецы-астрономы вели календари, чтобы египтяне могли подготовиться ко дню гелиакического восхода Сириуса — моменту, когда звезда оказывалась достаточно далеко от Солнца относительно Земли, чтобы снова появиться на земном небосводе. В этот день заканчивалась подготовка к очистке каналов и ремонту стоков.

Благодаря расчетам египтяне прекрасно справлялись с тем, чтобы направлять разливающиеся воды Нила в каналы и на сельскохозяйственные угодья, где плодородные наносы оседали на земле. Как только вода уходила в землю или возвращалась по каналам обратно в основное русло реки, начинался новый земледельческий сезон, но сначала происходили разделы и перераспределения угодий.

При разливе вода смывала все границы и межевые отметки, поэтому писцам приходилось записывать, сколько земли домохозяйства обрабатывали в прошлом году. После этого администраторы выделяли им эквивалентный участок только что удобренной земли, площадь которого определяли с помощью действий, которые мы сегодня сочли бы примитивной арифметикой. Они, вероятно, были довольно примитивны и для древних египтян, но явно считались достаточно важными, поскольку писцы регулярно копировали ветшающие документы с описанием процесса.

Значительная часть папируса Ринда, по сути, представляет собой введение в науку о дробях. Возможно, вы удивитесь, узнав, что дроби изобрели не чтобы пытать школьников, а чтобы управлять экономикой. Цивилизации, которой нужно было знать, сколько зерна содержится в цилиндрическом хранилище, и выполнять волю правительства при разделе земли, распределении продовольствия и оплате труда, целых чисел — тех, что нам уже знакомы, — было недостаточно.

С помощью целых чисел наш мозг соотносит объекты окружающей среды с абстрактными понятиями "единицы", "двойки" и так далее, и именно ими мы оперируем, когда считаем на пальцах (которые, если нам повезло, существуют также в виртуальной форме у нас в голове). Дроби — дело другое. Это способ делить целые числа, сравнивая одно с другим. И возни с ними немало: идея о том, что целые числа делятся на части, — ужасающий скачок вперед для мозга, который не был приспособлен в рамках эволюции представлять такие вещи.

Если в школе дроби вам никак не давались, вы совсем не одиноки. Хорошую компанию вам, например, составил бы Леонардо да Винчи. Несмотря на свои великие достижения в искусстве, инженерии и астрономии, он совершенно не умел работать с дробями[15]. Его записи показывают, что он ошибался всякий раз, когда ему приходилось перемножать их или делить. Так, он просто не мог поверить, что частное при делении на дробь величиной меньше единицы (например, на 2/3) оказывается больше делимого[16].

Да Винчи, несомненно, пришлось бы туго в вашей школе. По программе американские школьники должны овладеть дробями к 12–13 годам и научиться, например, расставлять по возрастанию дроби 1/2, 5/9 и 2/7. А вам такое по плечу? Большинству 12- и 13-летних школьников это не под силу.

Вот другой пример: какое из чисел — 1, 2, 19 или 21 — ближе к сумме 12/13 и 7/8? Три четверти 12- и 13-летних американских школьников дают неверный ответ[17]. Самая распространенная ошибка — складывать числители и знаменатели (верхние и нижние числа) по отдельности, то есть обращаться с ними как с натуральными числами. Удивляться здесь нечему, ведь именно этому вас и учили до сих пор. Вместо этого вам нужно либо давать этим числам приблизительную оценку (и 12/13, и 7/8 близки к 1, поэтому их сумма будет близка к 2), либо приводить дроби к общему знаменателю и затем складывать друг с другом скорректированные числители. Стоит задуматься об этом, как дроби сразу кажутся чем-то жутким и беспощадным. Мы уже знаем, что умение работать с натуральными числами далось человечеству большими стараниями, но в случае с дробями все эти навыки приходится отправлять на помойку[18].

Сколько бы сложностей с ними ни возникало, цивилизация за цивилизацией понимала, что дроби стоят того, чтобы над ними попотеть. Вавилоняне осознали это первыми, около 2000 года до нашей эры, а за ними последовали древние египтяне, индусы, греки и китайцы. А это значит, если я не ошибся в расчетах, что вид, который живет на Земле уже 300 тысяч лет, применяет дроби (по очень грубой оценке) на протяжении лишь последней сотой части своего существования. Если вы еще не убедились в том, что даже в базовой математике нет ничего естественного и безусловного, то вот вам доказательство.

Дело в том, что ведение учета невозможно без двух других математических инноваций: отрицательных чисел и понятия нуля. И хотя сегодня они общеприняты и кажутся простыми, обе идеи поначалу вызывали споры, а потому сегодняшнее положение они смогли занять лишь через несколько сотен лет после своего появления.

Необходимость в отрицательных числах

Странно понимать, что мы тысячелетиями производили вычитание, хотя никто не мог ответить на вопрос “Сколько будет 1 минус 2?”. Но виноват в этом опять же наш мозг. Мы просто не можем представить себе минус одно яблоко, поэтому нам нечего и надеяться на врожденное понимание отрицательных чисел. Они стали еще одним огромным скачком, еще одной концепцией, которую человеку пришлось создать с нуля. Однако, как и дроби, отрицательные числа оказались слишком полезными, чтобы их не изобрести.

История у отрицательных чисел получилась весьма запутанной. Трактат "Артхашастра", составленный древнеиндийским учителем Каутильей, вероятно, около 300 года до нашей эры, свидетельствует, что бухгалтерское дело в Индии было в то время уже достаточно развито: индусам были знакомы понятия активов, долга, выручки, расходов и доходов, и есть основания предположить, что индийские счетоводы, возможно, уже тогда обозначали долги отрицательными числами. В сочинении "Математика в девяти книгах" китайский математик Чжан Цан проводил расчеты с отрицательными числами. Мы точно не знаем, когда оно было написано — вероятнее всего, между 200 годом до нашей эры и 50 годом нашей эры, — но в нем говорится, что красные палочки обозначают положительные числа, а черные палочки соответствуют отрицательным числам. Однако, несмотря на применение отрицательных чисел в арифметике, Чжан Цан не мог смириться с тем, что их можно получать и при таких операциях, как решение уравнений. Судя по всему, в его представлении они были чисто практическим инструментом коммерции и торговли.

В 628 году нашей эры индийский математик Брахмагупта также предлагал выражать долг отрицательными числами. Он даже представил правила умножения (произведение) и деления (частное) при работе с положительными числами (достатками) и отрицательными числами (долгами):

> Произведение или частное двух достатков — один достаток.
> Произведение или частное двух долгов — один достаток.
> Произведение или частное одного долга и одного достатка — долг.
> Произведение или частное одного достатка и одного долга — долг.

Выражаясь современным языком, мы сказали бы:

При умножении или делении двух положительных чисел получается положительное число.
При умножении или делении двух отрицательных чисел получается положительное число.
При умножении или делении отрицательного числа на положительное число получается отрицательное число.
При умножении или делении положительного числа на отрицательное число получается отрицательное число.

Возможно, эти правила знакомы вам в другой формулировке: "Минус на минус дает плюс, а плюс на минус дает минус".

Очевидно, к этому моменту индийские счетоводы уже свободно обращались с отрицательными числами. Но в западном мире прогресс шел гораздо медленнее. Проблема была в том, что Запад унаследовал математику от древних греков, а те обожали целые числа. Они могли делить их, получая дроби, но, какими бы маленькими ни становились числа, они никогда не оказывались отрицательными.

Первое осторожное упоминание отрицательных чисел в западном мире было сделано в "Книге абака", написанной в 1202 году. Вам, возможно, знакомо имя ее автора — Фибоначчи. На самом деле его звали иначе, а это прозвище ему придумал биограф несколько столетий спустя. Но Леонардо Пизанский действительно был сыном Гильермо Боначчи (отсюда и "фи" — сын — Боначчи), и прозвище так прочно прикрепилось к нему, что сейчас именно оно считается одним из величайших имен в математике.

На заре своей карьеры Фибоначчи служил на итальянской таможне и работал в Алжире. Сопровождая отца в поездках в такие страны, как Сирия и Египет, он рано познакомился с математикой, выходящей за итальянскую традицию, и узнал множество операций и идей, которые казались радикальными, революционными, а иногда просто полезными. В “Книге абака” содержится немало математических изобретений, задач, решений и курьезов, включая правила (основанные на темпе бесконтрольного увеличения популяции кроликов) составления числовой последовательности, которая теперь носит имя Фибоначчи[19]. Но также в книге рассматривалось использование отрицательных чисел как общепризнанного математического инструмента. В качестве примера Фибоначчи предложил задачу, в которой четыре человека в заданных пропорциях делят деньги из кошелька:

> есть четыре человека; у первого с кошельком вдвое больше второго и третьего, у второго с кошельком втрое больше третьего и четвертого, у третьего с кошельком вчетверо больше четвертого и первого. У четвертого с кошельком впятеро больше первого и второго…

Обозначив четырех мужчин буквами от A до D, а кошелек — буквой P, получим такую “систему уравнений”:

$$
\begin{aligned}
A + P &= 2\,(B + C)\\
B + P &= 3\,(C + D)\\
C + P &= 4\,(D + A)\\
D + P &= 5\,(A + D)
\end{aligned}
$$

Эти уравнения устанавливают числовые отношения между всеми неизвестными, и Фибоначчи утверждает, что задача имеет целый ряд решений, но минимальные значения таковы: “У второго — 4, у третьего — 1, у четвертого — 4, в кошельке — 11, а дебет первого — 1”. Любопытно, что здесь появляется понятие “дебет”. Фибоначчи подчеркивает, что “задача не имеет решения, если не допустить, что у первого человека может быть дебет”, и показывает, что наличие дебета предполагает осуществление арифметических действий с отрицательными числами.

Хотя, написав книгу, Фибоначчи сумел распространить некоторые математические идеи в европейской среде, с отрицательными числами у него почти ничего не вышло. Запад не принимал их еще несколько сотен лет. Так, французский математик Блез Паскаль полагал, что, если вычесть 4 из 0, получится 0, — и презрительно отзывался обо всех, кто считал иначе. В своих "Мыслях" он сказал: "Я знаю людей, которые не могут понять, что если от нуля отнять четыре, останется ноль"[20]. И это в середине XVII века, в эпоху микроскопов, телескопов, законов Ньютона и электричества. Даже в период научных открытий и появления технологических инноваций некоторые из лучших западных умов не желали признавать существование отрицательных чисел.

Ситуация начала меняться, лишь когда Джон Валлис, Савильский профессор геометрии Оксфордского университета, понял, что людям думается проще, когда они могут представить картину происходящего. В 1685 году он опубликовал "Трактат по алгебре", в котором выстроил числа в ряд и позволил им уйти в отрицательную область. Он отметил, что в абстрактной форме осознать это сложно. Но если представить какую-нибудь физическую величину, например расстояние, все сразу станет понятно. Разумеется, он выразился несколько иначе. Вот его слова:

> Нельзя, однако, сказать, что гипотеза (об отрицательных числах) бесполезна или абсурдна, если правильно ее трактовать. Хотя в чисто алгебраической записи она добавляет величину, которая меньше нуля, в физическом приложении она обозначает величину столь же реальную, как если бы знаком ее был +, только трактуемую в противоположном смысле[21].

Иными словами, это положительное число наоборот. По сути, так бы сказали и мы. В качестве "физического приложения" он измеряет расстояние по прямой от заданной точки, а затем обратно — и дальше. Он спрашивает, как далеко от стартовой позиции окажется человек, если отойдет на 5 ярдов от точки A, а затем вернется на 8 ярдов назад. Он получает ответ –3, который, несомненно, дали бы и вы.

Числовая прямая Джона Валлиса

Любопытно читать длинное объяснение, сопровождающее утверждение Валлиса. “Получается, что он прошел на три ярда меньше, чем ничего”, — говорит он и пускается в рассуждения, всячески разжевывая свою мысль. Если сегодня для ответа достаточно было бы поставить галочку в нужной клетке детского задачника, то Валлис прикладывает немало усилий, чтобы разложить все по полочкам, и еще на целых 17 строк расписывает значимость ответа –3. Он явно понимал, насколько радикальна его мысль.

Сегодня знак минуса кажется нам лишь камешком в гигантской пирамиде математических инструментов. Мы настолько привыкли к нему и так хорошо понимаем его смысл, что теперь нам сложно увидеть в нем принципиальную инновацию. Признание существования отрицательных чисел не только дало нам способ подсчитывать долги, но и позволило простым и естественным образом математически описывать множество различных явлений. К примеру, физические силы: работая с положительными и отрицательными числами, мы можем прогнозировать дальность полета артиллерийских снарядов с учетом гравитации. Мы также можем возводить крепкие, устойчивые архитектурные сооружения, в которых будут сбалансированы все силы и нагрузки. Всякий раз, когда друг другу противостоят две вещи — космический корабль и сила тяготения, доход и расход, ветер в парусах и сопротивление океана, которое судну приходится преодолевать, рассекая волны, — отрицательные числа упрощают расчеты.

Однако, несмотря на силу отрицательных чисел, одни они не могли подарить нам современный мир. Возможно, вы заметили, что на числовой прямой Валлиса нет чисел — есть лишь отрезки, отмеченные буквами A, B, C и D. Буквы соответствуют тому, что мы обозначили бы числами 0, 5, 3 и −3, и Валлис неспроста решил отказаться от них. Еще один важнейший математический инструмент — ноль — пока не получил признания.

Значимое ничто

История нуля восходит к моменту, когда царь Шульги ввел в своем математическом государстве “позиционную систему счисления”. Мы очень быстро усваиваем, что, записывая число, такое как 1234, мы можем присваивать отдельным цифрам разные значения в зависимости от того, какую позицию они занимают. Низшую позицию здесь занимает цифра 4, которая обозначает четыре элемента, например четыре яблока. Если выражаться математическим языком, наша система имеет основание 10 и называется десятичной, поскольку мы группируем числа в десятки, и потому цифра в следующей позиции обозначает три десятка, то есть 30. Двигаясь дальше влево, мы получаем результат умножения предыдущей позиции на десять, то есть десять десятков, или сотню. В числе 1234 их две. Наконец, остается одна группа из десяти сотен, то есть тысяча. В итоге получается число 1234.

Позиционная система счисления царя Шульги была шестидесятеричной, а не десятичной. Сложно сказать, почему именно такая техника записи чисел обрела в древности такую популярность. Одни историки математики видят причину в том, что число 60 дает целые частные при делении на любое из целых чисел с 1 до 6 (и еще на шесть чисел). Благодаря этому с ним легко работать, особенно при делении товаров, цен и мер. Другие предполагают, что удобство шестидесятеричной системы объясняется примерным числом дней в году. Какой бы ни была причина, эта система оставила наследие: именно в ближневосточных царствах, которые в итоге образовали Вавилон, круг разделили на 360 градусов, градус и час — на 60 минут, а минуту — на 60 секунд.

Вавилонская шестидесятеричная система похожа на нашу десятичную: например, число 34 в ней записывается тремя символами, обозначающими десятки, и четырьмя символами, обозначающими единицы. Но условных знаков в ней хватает лишь для записи чисел до 59, поэтому десятичное число 424 000 в шестидесятеричной системе состояло бы из сорока единиц, 46 групп по шестьдесят, 57 групп по шестьдесят на шестьдесят (60^2) и 1 группы по шестьдесят на шестьдесят на шестьдесят (60^3).

Такая запись (как и наша) удобна, пока в числе нет отсутствующих “групп”. Но как же записать в десятичной системе число 4005, в котором нет ни сотен, ни десятков? Нам нужно было найти способ обозначать “отсутствие” при записи числа. Так мы и начали использовать знак, который сегодня называем нулем.

Нулем он был не всегда. В этой истории много белых пятен, но, судя по всему, в Вавилоне пустая позиция обозначалась наклонным клинописным символом  (хотя даже это оспаривается)[22]. Майя и инки также обозначали пустую позицию абстрактным символом или глифом. Ни один из этих символов, однако, не был знакомым нам нулем, который, как считается, пришел к нам из Индии, где точкой — *шуньей* — обозначалась пустота. Самый ранний из известных нам документов, в которых этой круглой заглушкой обозначаются пустые позиции, — манускрипт Бакхшали, индийский текст, написанный на 70 листах бересты. Он датируется 224–383 годами нашей эры и, возможно, служил учебным пособием для буддийских монахов. Но шунья не сразу стала математическим нулем. В написанном в 628 году трактате Брахмагупты, где признается существование отрицательных чисел, также впервые используется ноль — в этом случае индийская шунья, — который обозначает не просто пробел. Он входит в числовую последовательность и сам по себе считается величиной, которая подчиняется тем же законам арифметики, что и другие величины. Брахмагупта объясняет, как ноль взаимодействует с другими числами, как положительными, так и отрицательными:

> Долг минус ноль — это долг.
> Достаток минус ноль — это достаток.
> Ноль минус ноль — это ноль.
> Ноль минус долг — это достаток.
> Ноль минус достаток — это долг.
> При умножении нуля на долг или достаток получается ноль.
> При умножении нуля на ноль получается ноль.

Запад с нулем познакомил персидский математик и астроном X века Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми. В своих книгах он использовал цифры, которые теперь называются арабскими или индо-арабскими, и включал в их число ноль, подчеркивая его значимость для позиционной системы счисления. Он называл его “сифр”, что в переводе значит “пустой”. В латыни это слово превратилось в *zephyrum*, и от него итальянцы образовали слово *zero*, то есть “ноль”.

Но аль-Хорезми использовал ноль не только для записи чисел. Как и Брахмагупта, он применял его в качестве алгебраического инструмента, тем самым закрепляя его значимость при проведении манипуляций с числами, и называл его “десятой цифрой с форме круга”. Аль-Хорезми явно считал ноль одной из цифр, и ноль играет ключевую роль в его “Краткой книге о восполнении и противопоставлении". Именно от его арабского названия — "Китаб аль-джебр ва-ль-мукабала" — произошло слово "алгебра", а слово "алгоритм" стало производным от имени автора: аль-Хорезми, несомненно, оказался весьма влиятелен. Он считал, что пользоваться его трактатом сможет кто угодно, ведь в нем содержались числовые инструменты, применимые "при дележе наследств, составлении завещаний, разделе имущества и судебных делах, в торговле и всевозможных сделках, а также при измерении земель, проведении каналов, строительстве и прочих разновидностях подобных дел"*. Однако, несмотря на широкий спектр возможных применений, западные умы не спешили принимать концепцию нуля.

Сегодня ноль кажется нам настолько очевидным и знакомым инструментом, что сложно представить себе системы счисления, которые обходились бы без него. Когда в X веке французский монах Герберт Орильякский прибыл в Испанию, чтобы изучить исламскую математику, он познакомился с нулем, но оставил его без внимания. Герберт оценил математические идеи аль-Хорезми и распространил многие из них среди европейских купцов. И все же ноль он в Европу не принес, а предпочел вместо этого научить людей искусству счета на абаке.

Даже через двести лет после путешествия Герберта ноль все еще не принимали: считается, что английский историк Вильям Мальмсберийский называл его "опасным сарацинским колдовством"[23]. И даже когда Фибоначчи продемонстрировал европейцам силу нуля, он все же поостерегся включать его в числовой ряд. В "Книге абака" Фибоначчи пишет: "Индийских цифр девять: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. С помощью этих девяти цифр и знака 0… можно записать любое число". Он называет ноль "знаком", и это свидетельствует, что он, в отличие от аль-Хорезми, пока не решался включить его в число цифр.

* Перевод цитируется по изданию: Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми. *Математические трактаты*. Ташкент: Издательство "Фан" Узбекской ССР, 1983.

Сложно сказать, почему именно. Отчасти из-за неприятия идеи о том, что отсутствие чего-либо можно рассматривать аналогично присутствию. В математической философии Древней Греции отрицательным числам не находилось места среди священных целых положительных чисел, и точно так же она не терпела попытки превратить ничто в какую-то сущность, заслуживающую внимания. Аристотель в своем трактате “Физика” отметил, что невозможно осуществлять осмысленное деление на ноль, а следовательно, ноль нельзя считать числом[24]. Но важнее, пожалуй, то, что нулю не находилось места на абаке — главном счетном инструменте образованной публики в средневековой Европе.

Абак не всегда был таким, каким мы представляем его сейчас: с бусинами или камушками, нанизанными на нитки. Считается, что его название произошло от древних ближневосточных слов “пыль” и “доска”, и можно предположить, что изначально на плоской поверхности рассыпали пыль, на которой затем писали пальцем или раскладывали камни, а после этого стирали написанное и начинали счет заново.

Устройство абака позволяет обходиться без нуля. Видя ровные ряды камней или отметок, человек мгновенно получает позиционную информацию, не нуждаясь в специальном знаке для обозначения пустого разряда. Освоив все алгоритмы работы с абаком, он, конечно, уже не захочет разбираться в новомодном способе записи чисел.

Раньше умение считать на абаке было весьма востребованным навыком. В нем было даже нечто соблазнительное. При работе над “Рассказом мельника”, который входит в сборник “Кентерберийские рассказы”, Джеффри Чосер постарался сделать главного героя беззастенчивым (во всех смыслах) интеллектуалом. У Душки Николаса были астролябия для проведения астрономических измерений и греческий учебник, которым он руководствовался при работе. Чосер отмечает, что у изголовья его кровати стояли счеты с приведенными в порядок костяшками: он всегда был готов приступить к расчетам. По сути, он был занудой. При этом он сумел наставить рога богатому, но заурядному плотнику, у которого снимал комнату, и по меркам современной культуры это весьма неожиданный поворот. Но в “Рассказе мельника” Чосер делает Николаса неотразимым в глазах прекрасной молодой жены плотника.

Ученые предполагают, что в Николасе воплотились все черты, которые ценил близкий друг Чосера король Ричард II. Чосер написал “Кентерберийские рассказы”, когда входил в ближний круг короля и, что более интересно в нашем случае, служил главным таможенным контролером в лондонском порту. Счеты появились в рассказе неспроста: в 1380-х ими владели лишь образованные люди, в число которых входил и Чосер.

Сегодня в мире используются разные счетные доски: китайский суаньпань, японский соробан, русские счеты и так далее. Во многих регионах младших школьников по-прежнему учат с их помощью визуализировать основные арифметические действия, и есть свидетельства тому, что работа со счетной доской перестраивает мозг человека[25]. Лучшие современные счетоводы — главным образом школьники из Восточной Азии — так умело используют счеты, что многим из них сам инструмент уже не нужен. Они переставляют костяшки в уме, подобно тому, как опытный шахматист разыгрывает партию в голове, не используя ни доску, ни фигуры. Опытные счетоводы не только складывают и вычитают на счетах, но и извлекают с их помощью квадратные корни. Однако, несмотря на чудеса абака, уже многие века мы обходимся без него — главным образом потому, что ноль указал нам на его несовершенства. Математическая запись, в которой есть необходимое количество нулей, позволяет нам работать с числами любой величины и проводить расчеты любой сложности.

Насколько нам известно, впервые на Западе ноль и арабские цифры ввели в официальный обиход в 1305 году на предприятии Галлерани в Пизе[26]. Римские цифры, однако, остались в моде и все следующее столетие господствовали в сфере счетоводства: купцы и банкиры не слишком любят перемены. Но постепенно люди стали понимать, что римские цифры и другие системы без нуля усложняют арифметику. Появление арабских цифр позволило проводить письменные расчеты, поддающиеся проверке. Записывая числа с помощью цифр от 1 до 9 с добавлением 0, мы получили возможность разрабатывать алгоритмы — рецепты для расчетов, — облегчающие умножение и деление огромных чисел. Со временем необходимость в счетах исчезла, и уже к 1500 году администраторы банка Медичи ввели четкое правило: в их банковских книгах должны были использоваться только арабские цифры[27]. Медленно, но верно их влияние росло. Через несколько сотен лет арабские цифры, включая ноль, обойтись без которого так и не удалось, захватили весь мир.

Не случайно это совпало с беспрецедентным ускорением развития человеческого общества. Когда в наш инструментарий вошли ноль и отрицательные числа, мы получили возможность вести учет чисел, которые хлынули к нам в эпоху международной торговли и процветания, и свидетельствами тому стали банк Медичи, Великая французская революция и блестящие финансовые нововведения Александра Гамильтона.

Бухгалтерский учет

Ускорение, как ни странно, началось после перехода к двойной записи. В простейшей форме это способ вести бухгалтерию безошибочно. Каждая транзакция записывается на двух отдельных счетах, чтобы можно было сверять их друг с другом. Основы этого метода прекрасно изложены в опубликованной в 1494 году "Сумме" Луки Пачоли, о которой мы упоминали, когда рассматривали знаки для счета на пальцах:

“Из всякой статьи, составленной тобою в Журнале, всегда следует сделать две в Главной книге; одну в «Дать» и другую в «Иметь». Должник всегда обозначается словом «на», а веритель — «от»... Тот и другой образуют отдельные статьи, причем статья должника помещается по левой, а верителя — по правой стороне”[28].

Первыми такую систему, вероятно, применили корейские купцы. Согласно документам, хранящимся в банке “Дэхан Чеонил”, они использовали так называемый четырехсторонний кэсонский метод ведения учета при торговле с Китаем и Аравией в XI веке. На четырех сторонах записывались имя получателя, имя отправителя, количество полученного товара или денег и количество переданного товара или денег. Все транзакции обязательно записывались дважды.

К несчастью, непосредственных подтверждений этому нет: документы банка “Дэхан Чеонил”, по сути, не слишком отличаются от записанных баек, а самые старые из сохранившихся корейских торговых записей относятся к середине XIX века. Но у нас есть созданный в XV веке текст, в котором описывается метод двойной записи. Хорватский математик Бенко Котрульевич (Бенедетто Котрульи), родившийся в Дубровнике в 1416 году, в 1458 году написал трактат “О торговле и совершенном купце”[29]. Котрульевич предлагает систему, в которой каждая транзакция упоминается в книге дважды. Купив мерную рейку, в одной колонке надлежало записать ее цену в качестве кредита, а уплаченную сумму внести в другую колонку в качестве дебета.

Впрочем, Европа пользовалась этой системой и до публикации книги Котрульевича. Об этом нам говорит целый ряд примеров, включая некоторые финансовые документы венецианского купца Джакомо Бадоера[30]. Его учетные книги, составленные с применением метода двойной записи (или чего-то подобного), относятся к периоду 1436–1439 годов, полностью написаны арабскими цифрами с нулями и документируют его транзакции в Константинополе. Оттуда он экспортировал специи, шерсть, рабов и другие товары в Венецию, где его брат занимался импортом и продажами.

Бадоер был лишь одним из сотен, если не тысяч, предпринимателей, которые работали в финансовом центре, сформировавшемся в XV веке на севере Италии. Именно там пересекались торговые пути между Востоком и Западом, там останавливались крестоносцы на пути в Иерусалим и обратно, и там в торговых операциях приходилось пользоваться множеством валют. Внедрение системы, позволяющей отслеживать все числа — и включающей концепцию долга, выражаемую отрицательными числами, — не могло не подстегнуть развитие предпринимательства.

Двойная запись не только стимулировала торговлю, но и изменила принципы роста и работы предприятий. В основе этого метода лежит бухгалтерское уравнение *Активы = Обязательства + Собственный капитал*. Иными словами, состояние предприятия оценивается по сумме его долгов и текущих активов, которые пересчитываются после каждой транзакции. Это позволяет любому, кто связан с предприятием, сразу понимать, какова его стоимость. Следовательно, если вы решаете, стоит ли ссуживать компании деньги или предоставлять в аренду имущество, вы можете сразу понять, с чем имеете дело, оценив задолженности, операционные издержки, активы, ссуды и чистый капитал. Не нужно больше ни верить владельцу на слово, ни полагаться на репутацию семьи. Если баланс сходится и увиденное вас устраивает, можно проводить транзакцию. То же относится и к покупке бизнеса. Поскольку бухгалтерия с применением двойной записи основана на принципе, в соответствии с которым бизнес существует независимо от владельца, владелец может в любой момент назначить за него цену и продать свое дело. Сложно даже представить себе, насколько революционной была эта идея, когда система впервые получила широкое распространение. Больше не было нужды ни сохранять дело в семье, ни придерживаться выбранного курса: можно было открыть фирму и считать ее своим свободным капиталом. Если вам хотелось открыть еще одно дело в дополнение к первому, учетные книги могли служить доказательством вашей предпринимательской хватки и даже предоставляться в качестве гарантии при получении ссуды.

Точный бухгалтерский учет подтолкнул и развитие других отраслей, таких как морское страхование. Мореходство было рискованным делом, ведь пираты только и ждали удобной возможности украсть ценный груз, а силы природы грозили пустить его ко дну. Благодаря точному учету всего, что находилось на борту, было проще оценивать риски и страховать плавания. Более ценными стали и сами корабли, а системы учета собственности и исполнения налоговых обязательств позволили оберегать их от захвата монархами, которые часто охотились за активами для пополнения пустеющей военной казны. Торговые классы согласились вносить в королевскую казну все причитающиеся налоги и оформлять все нужные документы, а взамен попросили гарантии того, что монарх не сможет присваивать никакие частные активы. На суше то же произошло с сельскохозяйственными угодьями: возможность обозначать, подтверждать и передавать право собственности создала рынок земли и труда, необходимого, чтобы сделать ее прибыльной, а также положила конец самовольному переделу земли правящими классами.

Шли столетия, и открытость и доступность цифр при ведении двойной записи подстегнули развитие капитализма. Одним из главных поборников двойной записи был миллиардер Джон Рокфеллер, владелец компании *Standard Oil*: на заре своей карьеры он работал бухгалтером и часто объяснял свой успех привычкой к строгому контролю и глубоким пониманием балансовых таблиц[31]. Однажды Рокфеллер признался, что он отточил свои деловые навыки, внимательно изучая бухгалтерские книги своего первого работодателя, на которого работал несколько лет. Бухгалтерское дело приносило ему такую радость, что он каждый год устраивал праздник

26 сентября — в день, когда в 1855 году устроился на первую работу помощником бухгалтера.

Другим примером того, насколько важно точно вести бухгалтерию, служит Джозайя Веджвуд, сколотивший состояние на производстве керамики. В 1772 году он провел глубокий и комплексный анализ счетов своего предприятия, которые велись по методу двойной записи, использовал их, чтобы улучшить положение, и добился впечатляющих результатов[32]. Цифры в книгах позволили Веджвуду выявить растущие затраты и задержки по платежам, которые вредили его растущему предприятию. Он внедрил ряд мер — в том числе первым попытался перейти к массовому производству — и таким образом максимизировал свою прибыль. И хотя это принесло ему исключительное богатство, деньги Веджвуда не просто текли к нему в карман. Он направлял средства на социальные нужды, в частности на кампанию за отмену рабства. Кроме того, Веджвуд внес великий вклад в науку: благодаря его состоянию подающий надежды натуралист смог отправиться в кругосветное путешествие на корабле "Бигль". Контроль над числами — а следовательно, над прибылью, — который обеспечила бухгалтерия с двойной записью, спонсировал разработку теории эволюции путем естественного отбора, предложенной Чарльзом Дарвином. Кто бы мог подумать, что благодаря изобретению цифр человек сможет узнать, откуда он появился!

Наконец, стоит отметить, что бухгалтерское дело увлекало и Карла Маркса. Изучая истоки капитализма, Маркс попросил своего друга Фридриха Энгельса, семья которого владела хлопкопрядильной фабрикой на севере Англии, предоставить ему "пример итальянской бухгалтерии с пояснениями"[33]. Именно анализируя счета предприятия Энгельсов, Маркс пришел к такому же, как Рокфеллер, мнению: контроль над производственными расходами и их оптимизация, ставшие возможными благодаря знаниям, полученным при ведении бухгалтерских книг, являются важнейшими элементами капиталистического предприятия. Стоит ли говорить, что Маркс не был от этого вывода в восторге. Он считал капитализм инструментом, который позволяет небольшому числу людей — собственникам средств производства — накапливать богатство. И за это богатство приходилось платить: капиталистическое производство могло развиваться "лишь таким путем, что оно [подрывало] в то же самое время источники всякого богатства: землю и рабочего"*, отмечал Маркс. При этом Маркс винил в расцвете капитализма исключительно систему двойной записи. Он понимал, что тот, кто контролирует цифры, контролирует всех и вся.

Утверждение Маркса, что капитализм истощит землю, по которой мы ходим, оказалось до странности пророческим. В последние годы высказываются мнения, что экологический кризис — катастрофическое изменение климата, беспрецедентные темпы вымирания, ускоряющееся обезлесение и значительное снижение плодородия почв (среди прочего) — также стал следствием перехода к бухгалтерии с применением двойной записи. Мы одержимы силой чисел и потому ценим лишь то, что можем записать цифрами в таблице. Это привело к тому, что мы обесцениваем активы, которые не можем представить в форме чисел, поддающихся манипуляциям, и принимаем меры, не соответствующие стоящим перед ними задачам. В итоге мы сводим экономику государств к одному случайно определенному числу — валовому внутреннему продукту, — которое, по крайней мере по мнению экономистов консервативного толка, нужно во что бы то ни стало увеличивать. Мы управляем мировой экономикой посредством институтов, которые подчиняются цифрам, то есть банков, практически имеющих карт-бланш на регулирование экономик целых стран. При этом мы не учитываем ценность наших почв, лесов, природы — особенно насекомых — и таких транснациональных активов, как полярные

* Перевод под редакцией И. И. Скворцова-Степанова.

льды. Есть мнение, что мы таким образом лишь приближаем экологический коллапс[34].

Нельзя, однако, сказать, что корпорации — зло, да и банки сами по себе не так уж плохи. Напротив, без банковских услуг у многих из нас не было бы дома и нам не довелось бы жить в относительной роскоши. Неудивительно, что лишь немногие из нас когда-либо задумывались о жизни вне капиталистической системы. Но в ней есть и минусы. Да, числа и сопутствующие им инструменты позволяют вести бухгалтерский учет. Да, бухгалтерский учет позволяет проводить проверки и предоставлять отчетность. Но без честного аудита он также позволяет осуществлять воображаемые транзакции, искать возможности для повышения прибыли и находить способы реализовывать их даже в отсутствие необходимых средств. Проблема в том, что порой эти воображаемые деньги оказываются востребованными — и банки лопаются.

Мы не усвоили урок краха банка Медичи, и на протяжении последних четырех столетий влияние и значимость людей, которые контролируют наши цифры, только росли. Во время финансового кризиса 2007 года на балансе у каждого из лопающихся банков было столько активов — денег, собственности и долговых обязательств, — что совокупные чистые активы даже нескольких из них превышали активы стран, в которых они работали. С экономической точки зрения, если бы правительства позволили им лопнуть, эти банки лишили бы огромное количество людей средств к существованию, обанкротили бы огромное количество важнейших для экономики компаний и разрушили бы огромное количество надежд своих стран на экономический рост. В связи с этим их пришлось признать "системообразующими" и спасать непомерной ценой, погружая весь мир в хаос.

Этот хаос показывает, какую власть получили над нами числа с тех пор, как мы изобрели их. И сразу становится понятно, как счетовод дал толчок к началу Великой французской революции, как американская борьба за независимость была связана с банковской системой и почему смерть одного-единственного бухгалтера привела к финансовому кризису в средневековой Европе.

Но несмотря на все достижения бухгалтерского дела и его влияние, многие из нас предпочитают оценивать развитие цивилизации по более эффектным критериям. Так, часто показателями степени развитости общества считаются архитектура, живопись, скульптура и музыка. Но и здесь стоит упомянуть о странном совпадении. И бухгалтерское дело, и искусство пережили судьбоносное перерождение в одно и то же время и в одном месте: на севере Италии на заре эпохи Возрождения. Как мы видели, развитие отчетности можно связать с прогрессом в искусстве счета. Но наиболее известные красоты Ренессанса подарила нам другая математическая инновация. Чтобы изучить эту революцию, мы должны вернуться в Древнюю Грецию — на родину предмета, который в первые годы изучения математики казался мне совершенно банальным. Я никак не мог понять, зачем нам вообще геометрия. Скоро мы это узнаем.

Глава 2
Геометрия
История завоеваний и творений

Все началось с поиска совершенных форм и чисел, составляющих фундамент Вселенной, но геометрия недолго пребывала в абстрактных сферах. Стоит, например, постичь природу треугольника, как появляется возможность составлять карты неба и Земли и прокладывать путь в непостижимые дали. Если добавить к этому таинственные свойства круга, можно будет строить, рисовать и завоевывать все, что только хочется. История геометрии начинается с предрассудка, проходит сквозь эпоху безрассудной алчности и амбиций, а затем дарит нам величайшие произведения искусства — и позволяет носить весь мир в своем кармане.

Знакомо ли вам имя пресвитера Иоанна? Возможно, вы встречали упоминание о нем в комедии Шекспира "Много шума из ничего", где Бенедикт намекает на иллюзорность этого странного персонажа. "Не угодно ли вашему высочеству дать мне какое-нибудь поручение на край света? — говорит он. — Я готов за малейшим пустяком отправиться к антиподам, что бы вы ни придумали; хотите, принесу вам зубочистку с самой отдаленной окраины Азии, сбегаю за меркой с ноги пресвитера Иоанна, добуду волосок из бороды Великого Могола, отправлюсь послом к пигмеям? Все будет мне приятнее, чем перекинуться тремя словами с этой гарпией"*.

* Перевод Т. Щепкиной-Куперник.

Пресвитера Иоанна, не говоря уж о его ноге, никто и никогда не видел. Долгое время считалось, что он был царем и правил где-то в Африке, этакий средневековый король Артур[1]. Хотя никто не знал, где он живет — и существует ли он вообще, ведь легенды рассказывались веками, — короли, папы и императоры слали ему письма и просили его присоединиться к ним в борьбе с мусульманской угрозой. Дело в том, что в их представлении в царстве пресвитера Иоанна текли изумрудные реки, все было усыпано золотом, а жили там праведные христиане, которые превосходили в битве любого. Иными словами, пресвитер Иоанн был христианским правителем, которого все остальные христианские правители хотели заполучить в друзья. К несчастью, это было почти наверняка невозможно, поскольку они оказывались жертвами мистификации, которая владела умами на протяжении целых сотен лет.

В 1165 году византийский император Мануил I Комнин переслал одно письмо императору Священной Римской империи Фридриху Барбароссе. Сообщалось, что автором письма был пресвитер Иоанн ("пресвитер" — это звание священнослужителя), который рассказывал о своем царстве в Индии. В письме говорилось, что он был невероятно богатым потомком одного из трех волхвов, навестивших новорожденного Христа. Взволнованный Фридрих сразу написал ответ и отправил его с послом. Неизвестно, что случилось с этим посланием, но этот случай оказался лишь первым из множества разочарований, связанных с пресвитером Иоанном.

К началу XV века имя пресвитера Иоанна было у всех на устах. Так, в 1400 году король Англии Генрих IV написал письмо "пресвитеру Иоанну, царю Абиссинии", надеясь установить англо-абиссинские отношения. (Оговорюсь, пожалуй, что прошествие двух веков его не смутило, поскольку в первом письме пресвитер Иоанн сообщил, что владеет источниками вечной жизни.) В 1402 году флорентиец Антонио Бартоли прибыл в венецианский Дворец дожей и привлек всеобщее внимание. Бартоли привез с собой нескольких африканцев, а также жемчуг, леопардов, звериные шкуры и экзотические травы. Он назвался посланцем пресвитера Иоанна, властителя Индии, который хотел заключить союз с христианскими правителями Европы. Дож отправил его назад с дарами, включая серебряную чашу, фрагмент Животворящего Креста и 1000 дукатов, и послал к пресвитеру нескольких умелых ремесленников и оружейников.

По всей видимости, Бартоли бежал с добычей, поскольку больше о нем не было ни слуха ни духа. Тем не менее молва о богатствах пресвитера Иоанна и его желании увидеть, как христиане противостоят мусульманскому натиску, никак не стихала. В конце концов легенда дошла до Португалии, где нашла благодарного слушателя в лице принца Генриха — набожного, аскетичного, образованного третьего сына короля. Генрих почти сразу решил, что именно ему суждено наконец отыскать пресвитера Иоанна и привлечь его на сторону католиков, даже если для этого ему придется обойти всю Землю вдоль и поперек.

Историки не сходятся во мнениях насчет того, что именно предпринял Генрих (известен еще как Энрике Мореплаватель)[2]. Одни говорят, что он основал в Сагрише школу для обучения мореходов, судоводителей и корабельщиков. Другие считают, что он ограничился более общими, не столь формализованными мерами. Как бы то ни было, Генрих стремился задействовать все математические знания Южной Европы, чтобы покорить океаны и найти призрачное царство пресвитера Иоанна. Генрих привез в Португалию целый сонм специалистов, которые учили моряков корабельному делу, искусству навигации и картографии. Он сделал так много, что даже папский секретарь Поджо Брачолини отметил его достижения. "Как же славно быть единственным, кому достало отваги, решимости и целеустремленности, чтобы осмелиться сделать то, к чему никто прежде не подступался, — написал он в 1448 году. — Вы в одиночку [открыли] неведомые моря в невиданных странах, неведомые расы за пределами знакомого мира и дикие племена, живущие в самых дальних его уголках, куда не доходит солнце и куда еще никто не прокладывал путь".

Вас вряд ли удивит тот факт, что Генрих так и не нашел пресвитера Иоанна. Зато он подготовил почву для европейского завоевания мира. Как? Применив геометрию, которую все мы изучаем в школе: синусы, косинусы и тангенсы прямоугольных треугольников и отношения между длинами окружности и диаметрами кругов и сфер.

В руках Генриха геометрия стала способом картографировать территории, прокладывать пути и устанавливать господство над миром. Так, потерпев кораблекрушение у берегов Португалии, Христофор Колумб осел на новом месте и нашел прекрасное применение картам, знаниям и навыкам, доступным благодаря основанной Генрихом школе в Сагрише. Вы уже знаете, к чему это привело. В последующие столетия те же знания дали нам кое-что даже получше: золотые века искусства и архитектуры.

Тайная сила треугольников

Когда мне было восемь лет, я обожал легенду о короле Артуре. Помню, как я продирался сквозь эпопею Т. Х. Уайта "Король былого и грядущего" и представлял себя одним из рыцарей (чуть ли не каждый день выбирая себе нового героя). Я помню и комнату, где в том же возрасте меня впервые заставили заняться геометрией.

Слово "геометрия" в буквальном переводе значит "измерение Земли". Но в школе все, как правило, сводится к изучению двух- и трехмерных фигур и их свойств. Главным образом это треугольники и круги, но можно строить и другие фигуры, например квадраты, конусы, пирамиды и даже, если вы готовы к авантюре, додекаэдры. Можно также рассматривать графики, учиться делить пополам отрезки и углы и осваивать техники измерения расстояния между точками на прямой. Все перечисленное вызывало во мне сильнейшее чувство, противоположное обожанию. Геометрия казалась мне скучной. Я готов был признать, что в теореме Пифагора что-то есть. Но как только я познакомился с ней и узнал, что квадрат гипотенузы — самой длинной из сторон прямоугольного треугольника — равняется сумме квадратов катетов, я снова отключился и мыслями вернулся к королю Артуру и его Круглому столу, где все равны. *Такое* применение геометрических фигур мне было больше по душе.

Возможно, в восемь лет я проявил бы больше интереса, если бы мой учитель представил Пифагора как героя легенды, этакого греческого короля Артура. Оказывается, нет даже однозначных доказательств того, что человек, который сделал все, что приписывается Пифагору, вообще когда-либо существовал. Говорят, что он был апологетом вегетарианства, понял, что и утренняя, и вечерняя звезды — это Венера, осознал, что Земля имеет форму шара, и предположил, что планеты движутся по математическим законам. Однако нам почти ничего не известно о Пифагоре наверняка, поскольку ни одно из его сочинений не сохранилось[3]. Мы не знаем даже простых вещей — например, где он родился. Мы лишь *полагаем*, что он родился на острове Самос в Эгейском море и был сыном огранщика. Историки относительно уверены лишь в том, что кто-то в итоге основал школу его имени в городе Кротон в современной Калабрии.

Ее основатель был очарован числами. Члены этого кружка, связанные тайными клятвами, входили в школу через арку, на которой значилось: “Все есть число”. По мнению пифагорейцев, числа управляли космосом. Степень их одержимости иллюстрирует рассказ — возможно, также легендарный — о судьбе ученого, который нарушил клятву, данную сообществу.

Его история, как и все хорошие геометрические истории, начинается с прямоугольного треугольника. Длина двух его сторон равна 1. По теореме Пифагора, если возвести длины двух коротких сторон (A и B) в квадрат и сложить получившиеся числа, получится квадрат гипотенузы (C). Запишем это уравнение:

$$A^2 + B^2 = C^2$$

Поскольку и A, и B равны 1, вывод таков: если C^2 равно 2, то C — это число, которое при умножении на само себя дает 2, то есть квадратный корень из двух, или $\sqrt{2}$.

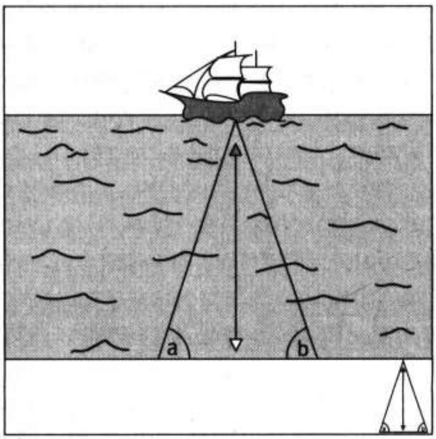
Мы не видим в этом ничего особенного. Но для пифагорейцев это было огромной проблемой. Они могли записывать числа, только если числа были целыми — 1, 2, 3 и так далее — или если они представляли собой отношение двух целых чисел. Вы точно сталкивались с математическими отношениями и их равенствами — пропорциями: например, при готовке мы в правильной пропорции смешиваем муку и масло, а еще не отступаем от пропорции, когда делаем сложные коктейли. Так, для "Манхэттена" нужны две части бурбона и одна часть сладкого вермута, а следовательно, пропорция здесь 2:1, и ее также можно выразить в виде дроби: 1/2 часть вермута при одной части бурбона. Пифагорейцы пытались найти пропорцию двух чисел, которая была бы числовым эквивалентом $\sqrt{2}$, и записать ее в виде дроби, такой как 1/3 или 5/6. Но у них ничего не получалось, несмотря на все старания.

Затем ситуация изменилась к худшему. Один из ученых Пифагорейской школы сумел доказать, что отчаянный поиск решения задачи о квадратном корне из 2 никогда не увенчается успехом. Оказывается, что $\sqrt{2}$ просто *невозможно* выразить отношением двух целых чисел, как ни пытайся. Дело в том, что сегодня мы назвали бы его "иррациональным" числом, то есть числом, которое невозможно записать в форме пропорции. Другой пример — число π (пи), да и вообще современная математика вообще богата на иррациональные числа, которые нередко играют в ней значимые роли.

Пифагорейцев так оскорбил этот выпад против универсальности целых чисел, что они решили держать существование иррациональных чисел в тайне. Однако, как гласит легенда, пифагореец Гиппас из Метапонта раскрыл этот секрет человеку, не входящему в их узкий круг. Когда его товарищи узнали о проступке Гиппаса, его сбросили за борт и оставили умирать посреди Адриатического моря. Мораль истории ясна: треугольники, по крайней мере прямоугольные, — это дело жизни и смерти.

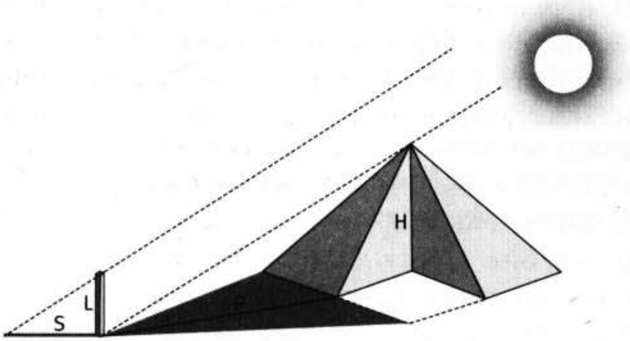
Хотя нам точно не известно, чем занимались Пифагор и члены его кружка, один человек, которого занимали треугольники, действительно существовал, и это Фалес Милетский. Фалес был очень умен и предприимчив и жил на территории западного побережья современной Турции. Он родился около 640 года до нашей эры и ныне считается отцом философии науки. В глазах современников, однако, он был прирожденным дельцом. Считается, что однажды, заметив, что урожай оливок обещает быть особенно обильным, Фалес заранее скупил все прессы для отжима оливкового масла. Потом он сдавал их в аренду фермерам, заламывая огромные цены. Если же они отказывались брать пресс в аренду, он выкупал у них оливки по минимальной цене. В итоге Фалес сколотил состояние, которое позволило ему отойти от дел в среднем возрасте. Остаток жизни он посвятил науке. Новое хобби Фалеса благотворно повлияло на философию, естественные науки и математику: он первым стал использовать поддающиеся проверке гипотезы и теории для объяснения законов природы и первым записал несколько ключевых положений геометрии, которые мы изучаем и сегодня.

Скорее всего, Фалес сформулировал эти положения, странствуя по Египту. За тысячи лет до этого геометры играли важнейшую роль при проектировании таких великих египетских сооружений, как пирамиды. Но Фалес дополнил египетскую геометрию практической демонстрацией работы различных принципов. Так, он показал, что в треугольнике, который сегодня называется равнобедренным, углы при основании равны. Для этого он перевернул точную копию такого треугольника, и копия осталась идентичной. Он также продемонстрировал, что, зная длину основания и величины углов по обе стороны от него, можно получить все необходимые сведения о треугольнике. Это полезная информация. Если вы хотите узнать, насколько далеко корабль ушел в море, постройте треугольник с вершиной возле корабля. Возьмите известную длину побережья за основание треугольника, встаньте на одном конце этого основания и измерьте угол между основанием и кораблем. Затем перейдите на другой конец основания и снова измерьте, под каким углом находится корабль. Теперь постройте — если хотите, нарисуйте на песке — треугольник поменьше, в котором углы при основании равны только что измеренным. Определите отношение его высоты к основанию и умножьте полученное число на расстояние, отмеренное на побережье при построении первого треугольника. У вас получится расстояние от берега до корабля.



С помощью подобных треугольников можно определять расстояние до корабля в море

Применив другой вариант этой техники, Фалес показал, что такие "подобные треугольники" содержат полезные пропорции. По легенде, он поразил египетского фараона Амасиса II, вычислив высоту пирамиды, зная лишь высоту шеста, помещенного на кончик тени этой пирамиды.



Фалес показал, как вычислить высоту пирамиды, измерив длины теней

Длина тени от пирамиды *P* и длина тени от шеста *S* относятся друг к другу так же, как высота пирамиды *H* и длина шеста *L*. Можно записать это следующим образом:

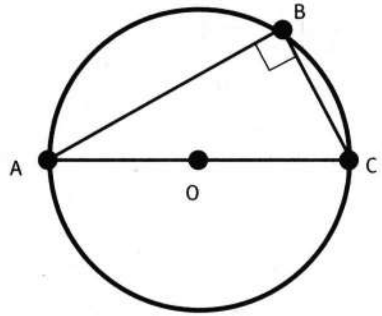
$$\frac{P}{S} = \frac{H}{L}$$

Перестроим эту формулу и получим:

$$H = \frac{PL}{S}$$

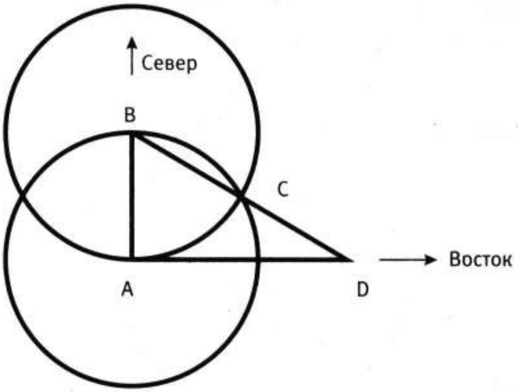
Следовательно, высота пирамиды равна произведению длины шеста и длины тени от пирамиды, деленному на длину тени от шеста. Мы увидим, что такие расчеты в итоге стали столпом средневековой навигации, называемым правилом трех: если при работе с подобными треугольниками вам известны три размера, можно вычислить четвертый, неизвестный, и мир окажется у ваших ног.

Свое излюбленное открытие в отношении треугольников Фалес совершил, когда построил один из них внутри окружности. Он показал, что если взять диаметр окружности (ее ширину в самой широкой части) в качестве основания, а вершину треугольника поместить на окружности (периметре круга), то полученный треугольник всегда будет прямоугольным. По легенде, выяснив это, Фалес пришел в такой восторг, что в знак благодарности за откровение принес богам в жертву вола.



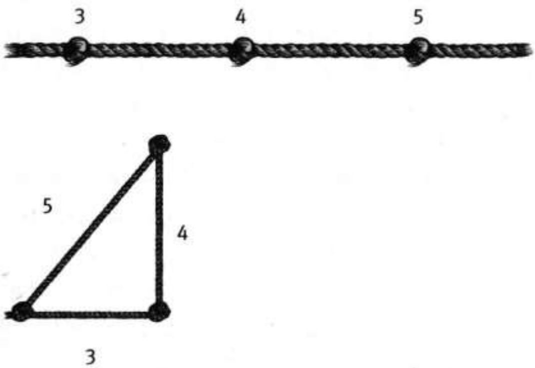
Прямоугольный треугольник,
вписанный в окружность

Предложенный Фалесом метод вписывания треугольника в полуокружность для построения прямого угла нашел применение в строительной сфере. Перед постройкой здания выбирается прямая — например, идеальная линия, идущая с севера на юг, которую можно провести, отметив, куда в полдень падает тень от высокой колонны, такой как египетский обелиск. Затем к колышку привязывается веревка, а колышек вбивается в землю в той точке прямой, где должен быть угол (A). С помощью другого конца веревки на земле очерчивается окружность. Далее строится еще одна окружность такого же радиуса с центром в точке B, где получившаяся окружность пересекает линию север — юг. Окружности пересекаются в точке C, и через точки B и C проводится прямая, которая продолжается до точки D на такое же расстояние, как BC, то есть CD = BC. Точки A, B и D соединяются, и получается прямоугольный треугольник, в котором сторона AD идет точно с востока на запад. Разве не прекрасный способ начать строительство храма Солнца?



Геометрический метод построения оси восток — запад на основе имеющейся оси север — юг

Хотя с методом Фалеса разберутся и восьмилетние дети, он был не первым из тех, что строители использовали для построения прямых углов. До нас дошли свидетельства того, что еще около 2000 года до нашей эры ученые, жившие на территории современного Ирака, применяли теорему, выведение которой мы ошибочно приписываем Пифагору. Краеугольным камнем строительства стало представление о наличии строгой математической связи между длинами сторон прямоугольного треугольника. Чтобы построить здание с идеально прямыми углами в основании, рабочие пользовались веревкой и колышками. Они делили веревку на 12 отрезков, а затем привязывали один ее конец к вбитому в землю колышку. Далее они отмеряли три отрезка и вбивали второй колышек в той точке, где должен был получиться прямой угол. После этого они поворачивали примерно на 90 градусов и отмеряли четыре отрезка веревки. В этом месте устанавливали третий колышек, после чего веревку протягивали обратно к первому колышку. Если ее длины не хватало, третий колышек переставляли, пока периметр не замыкался. Так у второго колышка получался идеальный прямой угол, поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$.



Веревка с узелками с относительными длинами 3, 4 и 5
была полезным строительным инструментом

Именно изучив свойства треугольников, окружностей и углов, мы смогли впервые оценить размер нашей планеты. В 240 году до нашей эры Эратосфен, заведовавший Александрийской библиотекой в Египте, произвел соответствующие расчеты и вычислил длину окружности Земли.

В древних источниках (написанных, стоит сказать, спустя несколько веков после смерти нашего героя) говорится, что Эратосфен услышал, будто бы в один день в году полуденное солнце освещает всю шахту глубокого колодца в городе Сиена (ныне Асуан) на юге Египта. Это был день летнего солнцестояния, когда солнце оказывалось в самой северной точке, а следовательно, прямо над городами, стоящими на широте, которую мы сегодня называем Северным тропиком, или тропиком Рака. Эратосфен решил, что, имея эти данные и проведя измерения в Александрии, он сможет вычислить, какая доля окружности Земли приходится на идущую (примерно) с севера на юг линию между Александрией и Сиеной. В нужный день он с помощью отвеса установил шест перпендикулярно земле. В полдень он измерил угол, который образовался между тенью от шеста и вертикалью. Он составил 7,2°. Поскольку сфера покрывает 360°, Эратосфен понял, что расстояние от Сиены до Александрии должно равняться 7/360 от всей длины окружности. Он знал, что расстояние между городами составляет 5000 стадиев, и применил правило трех, чтобы вычислить длину окружности. У него получилось около 250 тысяч стадиев.

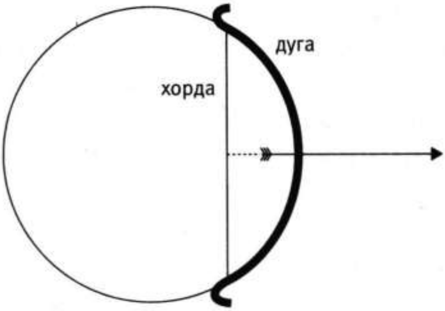
Мне хотелось бы сказать вам, в какой степени ответ Эратосфена соответствовал действительности. К несчастью, мы точно не знаем, как перевести стадии в современные единицы измерения, а потому не можем с уверенностью судить о точности его выводов. Но порядок величин точно верен. По текущим данным, окружность Земли на экваторе составляет около 40 тысяч километров. Эратосфен, вероятно, оценил ее в 40–46 тысяч километров. Неплохо для человека, которого прозвали “бетой”, или “второсортным”, поскольку, хотя он и добивался успехов во многих сферах, он никогда ни в чем не был первым.

И этим наш король второго места не ограничился. Он понял, что ось, относительно которой вращается Земля, что приводит к смене дня и ночи, не совсем параллельна оси ее орбиты вокруг Солнца. Поэтому на Земле и сменяются сезоны: поскольку ось наклонена, в определенные периоды в процессе обращения планеты вокруг Солнца северное полушарие получает больше света, чем шесть месяцев спустя. Изучив геометрию теней, чтобы оценить, каким может быть угол наклона оси, Эратосфен пришел к выводу, что он составляет $11/83 \times 180°$, или 23,85°. На самом деле — около 23,4°. Опять же, неплохо.

Синус, косинус и тангенс

Невозможно продолжать разговор о треугольниках, не познакомившись с этой ужасной троицей: синусом, косинусом и тангенсом. Мало кто из нас хорошо понимает, что скрывается за этими словами. Если не вдаваться в детали, это числа, связанные с длинами сторон прямоугольного треугольника. Сегодня мы чаще всего встречаемся с ними, нажимая на кнопки калькулятора. Еще совсем недавно они записывались в таблицах, которые собирались в брошюры: мой первый учитель геометрии в начале каждого урока раздавал ученикам такие брошюры — помню, обложка у них была красно-белая. Я также помню, что во всех этих синусах, косинусах и тангенсах лично я видел лишь инструмент решения бесполезных математических задач.

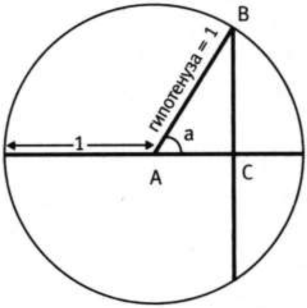
В чем вообще их смысл? Неясно, когда эти термины вошли в обиход, но вероятно, что вариации величин, которые они представляют, использовались многие тысячи лет. Помните египетского писца Ахмеса? В его папирусе содержится вопрос: "Если высота пирамиды составляет 250 локтей, а длина ее основания равна 360 локтям, каков ее секед?" Из решения, которое он предлагает, задействуя длины сторон прямоугольных треугольников, становится понятно, что "секед" соответствует нашему котангенсу, то есть противоположности тангенса. В этом случае это противоположность тангенса угла между основанием и гранью пирамиды. Впрочем, мы забежали вперед. Начнем с синуса.



Как синус получил свое название

Он получил свое название по ошибке. Все началось с описания прямой вертикальной линии, показанной на рисунке выше. Она называется хордой дуги, а дуга — это отрезок окружности, по форме напоминающий лук. На санскрите хорда обозначается тем же словом, что и тетива: *jiya*. В арабских переводах ее называли *jayb*, но в записи по традиции обходились без гласных, поэтому оставалось только *jb*. При переводе древних трактатов по геометрии на латынь это слово ошибочно приняли за *jaib*, то есть "пазуха", и потому использовали соответствующее латинское слово *sinus*.

Но что это такое? Синусы, а также косинусы и тангенсы — это просто отношения сторон треугольника (или



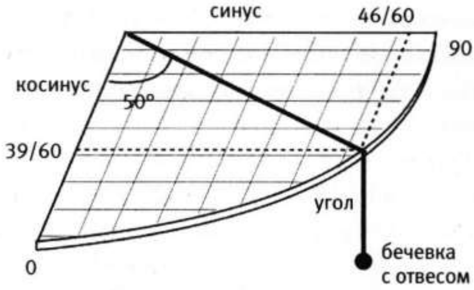
Откуда берутся синусы, косинусы и тангенсы результаты их сопоставления). Синус угла *a* — это отношение вертикальной стороны треугольника (BC) к радиусу окружности (или гипотенузе треугольника, AB на рисунке). Иными словами, синус угла — это длина противолежащей стороны, деленная на длину гипотенузы. Косинус угла *a* — это отношение основания треугольника AC к радиусу AB. Тангенс угла *a* — это отношение вертикальной стороны (BC) к основанию (AC). Теперь, узнав это, мы можем отправляться в путь.

Поиск пути

"Вся навигация сводится к правильному треугольнику", — сказал французский мореплаватель Гийом Дени в 1683 году[4]. Он имел в виду треугольник, который мы называем прямоугольным: по его словам, моряку достаточно изучить свойства этой фигуры. Эту истину установили много столетий назад, еще когда средиземноморские моряки начали использовать розы ветров. Роза ветров — это нанесенные на карту линии, соединяющие порты и другие примечательные места. Если карта верна, то угол наклона такой линии относительно севера позволяет проложить курс по компасу.

Моряки собирали розы ветров в портуланы — портовые книги, — которые широко использовались для навигации по Средиземному морю в XIII веке. Однако суда редко перемещались от порта к порту по прямой. Когда в ходе плавания они сбивались с курса — будь то из-за неблагоприятных ветров, из-за островов на пути или из-за встречи с пиратами, — математика треугольников, или тригонометрия, помогала морякам снова взять верный курс. Именно поэтому они всегда брали с собой либо таблицы синусов и косинусов, либо инструмент для их вычисления, например синусный квадрант.

Первое описание синусного квадранта было сделано в IX веке. Именно тогда аль-Хорезми, старший библиоте-

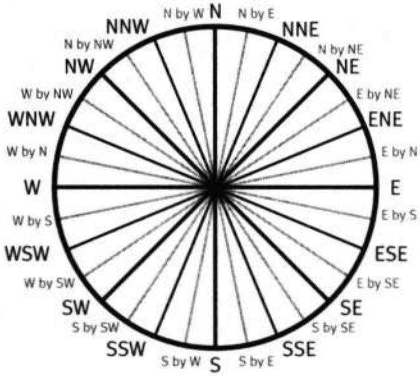


Синусный квадрант

карь Дома мудрости в Багдаде (и человек, который познакомил нас с нулем в предыдущей главе), расчертил четверть круга на квадраты и прикрепил бечевку к точке в начале координат. Другой конец бечевки доходил до изогнутого края, поделенного на 90 градусов. Вдоль двух прямых сторон инструмента была нанесена шкала, поделенная на 60 единиц: с помощью одной из сторон вычисляли синус угла, с помощью другой — его косинус.

Сегодня можно распечатать изображение синусного квадранта из интернета. Он поразительно прост в использовании: по сути, достаточно построить нужный угол с помощью бечевки и провести линию от края к шкале синусов или косинусов. Но будь вы моряком, которому нет дела до синусов и косинусов, на помощь вам пришла бы *toleta de marteloio* — тригонометрическая таблица, составленная специально для использования в мореходстве. По ней можно было определить, как скорректировать курс, если судно сошло с него из-за неблагоприятного ветра или по другой причине. Для этого достаточно было знать, сколько миль судно преодолело с отклонением от курса и насколько далеко от нужного курса оно идет. *Toleta* показывала, какое расстояние необходимо пройти по новому курсу, прежде чем судно вернется на изначальный курс.

При этом применялась другая диаграмма — роза румбов. Каждая ее четверть поделена на восемь румбов, соответствующих разным направлениям. В первой четверти, например, находятся румбы север-тень-восток, север-северо-восток, северо-восток-тень-север, северо-восток и так далее.



Роза ветров. Каждое из обозначенных на ней направлений — это румб

Давайте проверим, получится ли у нас рассуждать подобно моряку XIII века. Представьте, что вы хотите по морю дойти из Афин в Ираклион на Крите. Вам нужно преодолеть примерно 212 миль на юго-юго-восток, но ветер позволяет вам двигаться лишь в южном направлении. В ходе путешествия по Эгейскому морю вы сможете оценивать пройденное расстояние либо "счисляя координаты", для чего вам придется определять скорость путем наблюдения за волнами за бортом, либо бросая в воду деревяшки и засекая время, за которое они преодолевают известное расстояние от носа до кормы. Допустим, вы прошли 75 миль и ветер сменился: теперь вы можете взять курс на восток-юго-восток. Но сколько вам нужно будет пройти в этом направлении, чтобы вернуться на изначально запланированный курс?

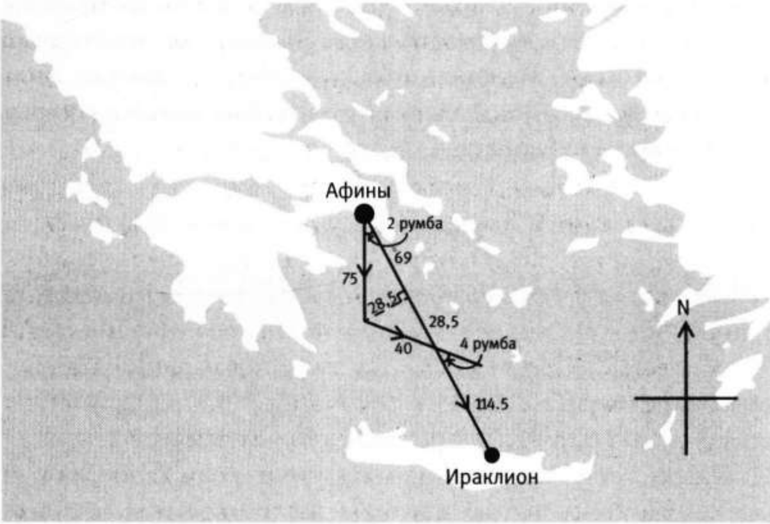
Как и сказал Дени, все сводится к прямоугольным треугольникам. С *toleta de marteloio* вам даже не придется заниматься тригонометрией. Если вы знаете, на сколько румбов от запланированного курса отстоял ваш изначальный курс и какое расстояние вы прошли, *toleta* покажет вам, сколько миль отделяет вас от нужного курса. Затем вы просто выбираете соответствующее количество румбов между изначально запланированным курсом и "обратным" курсом, который вы собираетесь взять, и узнаете, какое расстояние необходимо пройти по нему. Наконец, *toleta* показывает, сколько миль останется пройти по изначально запланированному курсу, когда вы на него вернетесь.

Toleta de marteloio

Разница в румбах	Отклонение от курса	Пройденный путь	Обратный курс	Пройденный путь
	На каждые 100 пройденных миль	На каждые 100 пройденных миль	На каждые 10 миль, пройденных с отклонением от курса	На каждые 10 миль, пройденных с отклонением от курса
1	20	98	51	50
2	38	92	26	24
3	55	83	18	15
4	71	71	14	10
5	83	53	12	6 1/2
6	92	38	11	4
7	98	20	10 1/5	2
8	100	0	10	0

Простая *toleta de marteloio*, помогающая морякам корректировать курс

Мы прошли 75 миль на юг, отклоняясь на два румба от идеального курса. С помощью *toleta* мы узнаем, что находимся в $75/100 \times 38 = 28{,}5$ мили в стороне от курса[5]. Мы пойдем обратно (на изначально запланированный курс), отклоняясь от идеального курса на 4 румба. Сколько миль нам нужно пройти в этом направлении? Ответ: 28,5 ÷ 10 × 14 = 40 миль. Так мы окажемся в точке, где сможем взять изначальный идеальный курс, чтобы преодолеть остаток расстояния до Ираклиона.



Прокладка маршрута из Афин в Ираклион с помощью румбов и *toleta de marteloio*

Итак, если теперь все хорошо, мы прошли 75 миль на юг, затем 40 миль на восток-юго-восток, после чего нам остается пройти 114,5 мили на юго-юго-восток. Если такой возможности нет, нам придется повторить процесс снова. Нам остается лишь следить за своими перемещениями по карте, остерегаться мелководий, где судно может сесть на мель, и стараться сделать так, чтобы путешествие не затянулось и на борту не исчерпались запасы продовольствия и пресной воды.

Составление карт

Эти тригонометрические трюки и таблицы занимали такое важное место в инструментарии мореходов, что стали прекрасным источником дохода для предприимчивых преподавателей, которые открывали школы для моряков или писали учебники. Самые ушлые занимались и тем, и другим: набирали учеников и обязывали каждого из них купить написанный учителем учебник. Французский математик Гийом Дени так умело монетизировал свое знание геометрии, что открыл школу навигации в Дьепе. У него учились новобранцы французского флота, независимые моряки и даже пираты. Королевская школа гидрографии Дени была лишь одним из многих подобных европейских институтов, работавших в XVI и XVII веках. Хотя за моряками закрепилась репутация безграмотных невежественных грубиянов, многие из них, несмотря на это, прекрасно разбирались в математике.

Впрочем, им стоило понимать, что их возможности были не безграничны. Геометрия плоских треугольников, подходящая для средиземноморских портуланов, не работала в более долгих путешествиях. Поскольку Земля имеет (приблизительно) сферическую форму, ее поверхность изгибается и треугольники меняются. Чтобы понять, как именно это происходит, прочертите на шкурке апельсина три прямые линии, формирующие треугольник, а затем почистите апельсин. Треугольник получился не совсем ровным, ведь так? Его стороны выгнулись, а если вычислить сумму трех его углов, она окажется больше 180°, характерных для плоского треугольника. Следовательно, если вы будете двигаться по океану, придерживаясь одного направления по компасу, на поверхности Земли ваш маршрут окажется вовсе не прямой линией. Вы будете перемещаться по так называемой локсодромии: спирали, которая закручивается вокруг земного шара, неизменно пересекая идущие с севера на юг меридианы под одинаковым углом.

Придерживаясь одного направления по компасу, вы будете огибать земной шар по локсодромии

Это значит, что даже если мне известно направление по компасу на Бристоль в Англии из Нью-Йорка в США, это не самый короткий морской путь от одного города к другому. Мне нужно выбрать кратчайшее расстояние между точками на сфере: окружности, на которой лежат обе точки и центр которой находится в центре земного шара. В навигации по поверхности Земли ее называют "большим кругом".

Теперь представьте, что мы планируем пройти по большому кругу от Нью-Йорка до Бристоля и запасаемся провиантом для этого плавания[6]. Чтобы определить, какое расстояние нам необходимо преодолеть, нам нужно представить сферический треугольник, в одном из углов которого находится Нью-Йорк, во втором — Бристоль, а в третьем — Северный полюс. Если нам известно, на какой широте находятся Нью-Йорк и Бристоль (то есть насколько они выше или ниже экватора), мы можем вычислить расстояние между ними с помощью стандартной тригонометрии. Но это долгий и трудоемкий процесс. Для этого необходимо представить целый ряд треугольников, часть из которых будет торчать из центра Земли и выходить за пределы ее поверхности. Нам также придется произвести на этих треугольниках серию сложных тригонометрических расчетов, в каждом из которых можно допустить ошибку, что в итоге не доведет нас до добра. Но есть и другой вариант — отправиться в школу навигации, где преподаватели обучат нас полезным приемам.

Сферическая форма Земли — главная проблема картографии. Геометры давно поняли, что земной рельеф невозможно прямо перенести на плоскую поверхность, такую как карта, не столкнувшись с различного рода искажениями. Многие тысячи лет картографы искали способ "проецировать" сферическую поверхность таким образом, чтобы минимизировать расхождения карт с реальностью. При проецировании над широтой и долготой производятся математические операции, чтобы при изображении рельефа на плоской поверхности углы и расстояния между различными точками обретали смысл. Эта математика подразумевает комбинацию геометрии сфер и тригонометрии (а ныне еще и математического анализа, к которому мы обратимся через пару глав).

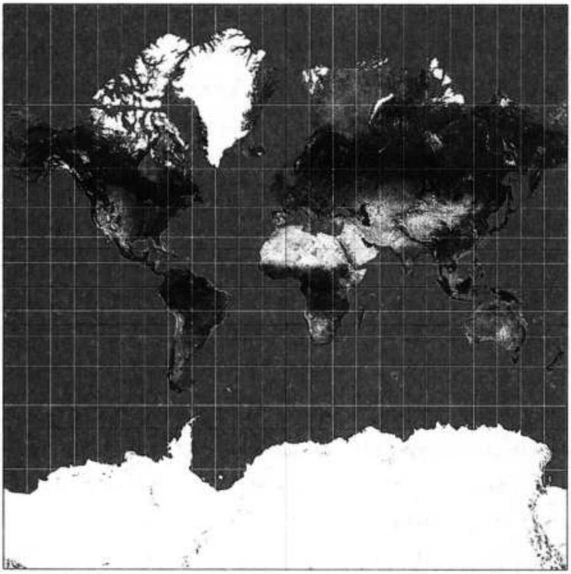
Создание первой из известных нам картографических проекций приписывается Агатодемону Александрийскому, который (как считается) жил во II веке нашей эры. Древнегреческий математик Птолемей, живший в Александрии примерно тогда же, опубликовал составленную в этой проекции карту в своей книге "География". Это проекция с линиями широт и долгот, которая в свое время была революционной, но прочерченные Агатодемоном параллели изогнуты, а меридианы не параллельны и расходятся лучами из самой северной точки.

Примерно в ту же эпоху картограф Марин Тирский предложил "равнопромежуточную проекцию" для составления карт местности. В этой проекции на плоскость широты пролегают горизонтально, а долготы — вертикально, и расстояния между всеми линиями равны. Этого — с небольшими изменениями и дополнениями — оказалось достаточно, чтобы мореплаватели более тысячи лет не испытывали проблем с навигацией.

Христофор Колумб тоже был картографом и славился составлением исключительно точных карт в своих плаваниях. К концу XV века испанский и португальский королевские дворы поняли, что того, кто сможет беспрепятственно плавать в Ост-Индию или в Америку, ждет огромное богатство. Для этого необходимо было создать такие геометрические построения, которые позволили бы картографам давать мореплавателям четкие инструкции. В дневнике Колумба от 1492 года, адресованном его покровителям, выражено его намерение осуществить нечто грандиозное:

> Я решил <… > составить новую морскую карту, на которой на надлежащих местах были бы показаны под их ветром все моря и земли моря-океана, и еще завести книгу и в ней помещать все подобным же образом в рисунках с пометками экваториальной широты и западной долготы. И настолько обременил я себя всем этим, что позабыл о сне; и многое испытал я в плаванье, выполняя предначертанное, и совершение всего потребовало великих трудов[7].

Однако в силу принципов сферической геометрии никакая плоская двумерная карта сферы не может быть совершенной. Возьмем, к примеру, карту мира, которая, наверное, знакома вам лучше всего: в ее основе лежит проекция Герарда Меркатора. Она появилась в 1569 году и получила широчайшее распространение, поскольку была очень удобна для моряков. Руководствуясь своим подходом к сферической тригонометрии, Меркатор на своей карте сохранил углы между двумя любыми точками точно такими же, как на сферической поверхности Земли, благодаря чему компасный азимут по карте стал совпадать с компасным азимутом при прокладке курса корабля. Не обошлось и без недостатков: континентальные массивы — а следовательно, и расстояния — далеко от экватора оказались существенно увеличены. Мир на самом деле не совсем такой, как на проекции Меркатора: так,



Проекция Меркатора
Strebe, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

Аляска на деле в пять раз меньше Бразилии, но у Меркатора их размеры кажутся примерно одинаковыми. Гренландия у него сравнима по размерам с Африкой, хотя Африка на самом деле в 14 раз больше. Но разве это важно, когда вы просто плаваете по морям и океанам, не заходя слишком далеко на север и на юг?

Сегодня карты, конечно, выглядят совсем иначе. Они стали "динамическими": их характеристики можно менять в зависимости от собственных нужд, как с GPS-картами в телефоне. Их польза в том, что корректность отображения мира на них может меняться на усмотрение пользователя. С точки зрения математики это весьма непросто: лучшие ученые NASA не один десяток лет не могли понять, какие математические хитрости нужно применить, чтобы этого добиться.

В конце концов с задачей справился Джон Парр Снайдер. Возможно, вы слышали прежде о Птолемее и Меркаторе, но я сильно удивлюсь, если вам знакомо имя Снайдера. И это печально, ведь, как отметили в *The New York Times*, он "вполне мог бы тягаться с любым другим великим картографом прошлого, включая Герарда Меркатора"[8]. Несомненно, было бы непросто найти человека, который оказал бы более непосредственное влияние на вашу жизнь благодаря своим способностям к геометрии.

Снайдер был настоящим чудаком — в лучшем смысле этого слова. В 1942 году, когда ему было всего шестнадцать, он завел первую записную книжку и стал собирать интересные факты из сфер географии, астрономии и математики[9]. Среди многого другого в его записях были сведения о треугольниках, а также мысли и догадки о геометрии плоских поверхностей и твердых тел. Эти размышления быстро пробудили в нем интерес к картографическим проекциям. Снайдера восхищало, как с помощью математических уравнений точки с поверхности земного шара преобразуются в точки на плоской поверхности и как математика влияет на геометрические взаимосвязи между ними. Однако он никогда не изучал этот предмет. В университете он специализировался на химической инженерии, которая сначала и стала его профессией. Лишь несколько десятилетий спустя, в 1970-х годах, он профессионально занялся картографией.

В 1972 году NASA запустило *Landsat 1* — первый спутник, созданный для изучения географии Земли. Посвященным было понятно, что с помощью этого спутника можно будет составить принципиально новую карту мира, и два года спустя руководитель картографического отдела Геологической службы США (USGS) опубликовал статью с описанием подходящей математической проекции. Олден Колвокорессис — для друзей просто Колво — представил карту, которая учитывала бы перемещения сканера спутника, орбиту спутника, вращение Земли и изменение угла наклона оси этого вращения в ходе 26-тысячелетнего цикла "прецессии". Чтобы избежать искажений, нужно было сделать карту в форме цилиндра, поверхность которого колебалась бы вдоль его длинной оси. Таким образом не возникало бы никаких катастрофических искажений при перенесении данных со спутника на карту. Эта идея казалась очень смелой. Вот только ни в NASA, ни в USGS не нашлось ни одного человека, способного провести необходимый геометрический анализ, чтобы сконструировать требуемую проекцию.

Снайдер услышал об этой проблеме в 1976 году, когда жена вручила ему на день рождения подарок для настоящего умника: билет на картографическую конференцию "Меняющийся мир геодезической науки", которая проходила в Колумбусе (штат Огайо). Колво выступил там и описал трудности, с которыми столкнулся. Снайдер заинтересовался. На протяжении пяти месяцев он ломал голову над этой задачей, превратив гостевую спальню в рабочий кабинет и не используя никаких технических средств помимо программируемого карманного калькулятора TI-56, выпущенного компанией *Texas Instruments*. USGS почти сразу предложила Снайдеру работу.

Проекция Снайдера называется космической косой проекцией Меркатора. По мнению одного специалиста, это "одна из самых сложных проекций, разработанных человеком". Среди прочего она предполагает применение 82 уравнений к каждой единице информации. В результате получается проекция Меркатора, построенная с движущейся наблюдательной точки и допускающая лишь минимальное искажение при изображении области, находящейся прямо под спутником. Нам очень сложно понять, как именно работает эта система, но любопытно отметить, что статья Снайдера с описанием лежащих в ее основе идей пестрит синусами, косинусами и тангенсами. Прошло несколько тысяч лет с тех пор, как мы постигли свойства треугольника, а они по-прежнему служат нам верой и правдой.

Космическая косая проекция Меркатора стала важнейшим шагом на пути к созданию спутниковых карт нашей планеты. Они жизненно необходимы для всех аспектов цивилизации XXI века, от проведения военных операций и осуществления навигации до прогнозирования погоды, защиты окружающей среды и мониторинга климата. Проекция Снайдера дала нам карты *Google* и *Apple*, спутниковую навигацию в автомобилях и все остальные технологии цифровой навигации. Наконец-то мы увидели Землю глазами бога. Мы добились этого за шестьсот лет — если вести отсчет от того момента, когда Генрих Мореплаватель приступил к упорным поискам пресвитера Иоанна.

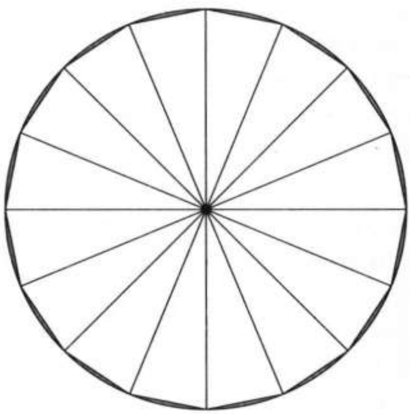
Пи и круг

Учитывая, сколько внимания я уделил треугольникам, мне не было бы прощения, если бы я лишь по касательной прошелся по свойствам кругов. Они тоже сыграли весьма важную роль в нашей истории.

Как и треугольники, круги всегда интересовали людей из практических соображений. Вычисляя площадь треугольников и прямоугольников, древние правители понимали, какой налог взимать с землевладельца, поскольку любое поле, какой бы формы оно ни было, можно грубо поделить на треугольники и прямоугольники. Благодаря этому становится проще определить общую площадь поля, и налоговый инспектор понимает, какой налог подлежит уплате в казну. Умение вычислять объем цилиндрических сосудов и силосных зернохранилищ (или даже конических горок специй) также важно для обложения налогом собранного урожая, а также купленных или произведенных товаров. А эти объемы не вычислить, не зная, какими свойствами обладает круг.

Первым делом необходимо получить достаточно точное значение отношения длины окружности к диаметру круга. Это отношение обозначается греческой буквой π (пи), и длина окружности круга равняется его диаметру, умноженному на π. Многие древние культуры не стремились к точности. Вавилоняне и первые китайские геометры приравнивали значение π к 3,0, а древние египтяне около 1500 года до нашей эры — к 3,16. Архимед вычислил число π, вписав в круг многоугольник и разделив его на треугольники, основаниями которых служили стороны многоугольника (а другими сторонами — радиусы круга). Если вычислить площадь каждого из этих равнобедренных треугольников, можно узнать площадь многоугольника. Чем больше треугольников вы построите, тем ближе площадь многоугольника станет к площади круга и тем точнее окажется полученное значение числа π. Площадь всех этих треугольников примерно соответствует площади круга, равной πr^2. Поскольку вам известен радиус круга, вы можете вычислить значение π. К 240 году до нашей эры, изучая свойства колес, Архимед поместил значение π в диапазоне от 3,140 до 3,142 (используя 96-угольник).

Около 450 года нашей эры китайский геометр Цзу Чунчжи построил 24576-угольник и получил значение π в диапазоне от 3,1415926 до 3,1415927. Сегодня мы знаем, что π рав-



Метод Архимеда для вычисления π
с помощью треугольников, вписанных в круг

няется 3,14159265358979..., и определили многие следующие триллионы его десятичных знаков.

Если бы на Землю высадились инопланетяне, их поразило бы, насколько мы неравнодушны к числу π. Ни одно другое число не изучалось нами с таким же рвением. О нем снимают художественные и документальные фильмы, ему посвящают песни, оно даже стало объектом искусства. Может, я слишком люблю треугольники, но мне сложно понять, что такого в числе π. Неужели дело в том, что у него нет конца, а цифры в нем располагаются без четкой закономерности? Это довольно любопытно, ведь у круга тоже нет конца, но *так* ли это отличается от бесконечного хвоста квадратного корня из 2, который дают нам треугольники?

Стоит признать, что число π действительно полезно. Оно всплывает буквально всюду — например, в математике, физике, финансах, архитектуре, искусстве, музыке и инженерии. Это объясняется тем, что без него не обходится ни одно математическое описание повторяющегося явления. Если вас интересует математика волн — где бы они ни распространялись, будь то в звуке, в воде, в электромагнитной среде, в биржевых данных или в любых других средах, — вы, по сути, имеете дело с явлением, свойства которого цикличны, а следовательно, вам нужно число π. Однако, поскольку мы рассматриваем влияние математики на нашу цивилизацию, не будем забывать о той сфере применения π, которую часто обходят вниманием: об архитектуре.

Строительство по цифрам

Если вы бывали в Софийском соборе в Стамбуле в современной Турции, вы, вероятно, были так очарованы его красотой, что даже не думали о математике, лежащей в основе этого сооружения. И зря, ведь собор спроектировали два математика: Исидор Милетский и Анфимий Тралльский[10].

Император Юстиниан обратился к Исидору и Анфимию, поскольку хотел возвести новый каменный храм на месте храма, разрушенного бунтовщиками. Десятки тысяч людей погибли в ходе восстания, поднявшегося в том числе из-за налогового гнета (из-за чего же еще бунтовать?). Юстиниану нужно было величественное сооружение, чтобы продемонстрировать, что власть в городе принадлежит ему.

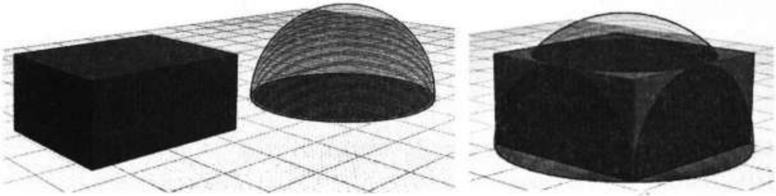
Спроектированный собор идеально подходил для этой задачи. Геометрически он представляет собой впечатляющее и сложное сочетание 82-метровой прямоугольной базилики с центральным кубическим объемом, который венчает купол высотой 56 метров. Таких грандиозных проектов прежде не воплощали. Софийский собор был возведен к 537 году нашей эры и оказался на тот момент крупнейшим зданием на планете. Он сразу стал гордостью Константино-

Собор Святой Софии

Изображение из открытого источника, получено в отделе плакатов и фотографий Библиотеки Конгресса США, Вашингтон, 20540 поля, и вскоре его признали одним из архитектурных чудес света. Как архитекторы добились таких впечатляющих результатов всего за шесть лет? Они использовали примерные значения π и квадратного корня из 2 и применяли геометрические хитрости Герона Александрийского.

Герон родился около 10 года нашей эры и зарекомендовал себя как прекрасный математик и изобретатель. Среди прочего он нашел способы качать воду и вычислять площадь треугольника, а также спроектировал паровой двигатель. Его справочник "Стереометрика" был, несомненно, хорошо знаком Исидору и Анфимию, которые преподавали в университетах Александрии и Константинополя. "Стереометрика" — это практическое руководство, в котором автор учит читателя работать с объемами и площадями различных архитектурных сооружений, чтобы составлять бюджет и планировать приобретение и доставку необходимых строительных материалов. Кроме того, в книге объясняется, как вести проект с начала и до самого конца.

В самых эффектных архитектурных сооружениях задействуются кривые, круги и сферическая геометрия. А это значит, что применяется и число π. Однако π — одно из иррациональных чисел, которых, как мы уже поняли, для древних греков не существовало. Они не могли его записать и уж точно не могли передать его каменщику. Неудивительно, что Герон предложил примерное значение π, лишь отметив, что "такие числа плохо поддаются измерению". Он принял его за 22/7, а затем привел примеры, в которых радиус или диаметр делились без остатка на 7, чтобы проще было сокращать знаменатель (нижнюю часть) дроби при расчете различных параметров свода или купола. Герон мастерски использовал геометрию, чтобы облегчить архитекторам жизнь. "Парусный" купол, как у Софийского собора, состоит из двух элементов. Сверху находится полусфера, поддерживаемая чуть более широким сводом, составленным из изогнутых треугольных секций. Герон поясняет, как произвести расчеты для таких сферических треугольников: нужно отнять четыре сферических секции от полусферы, вписав в нее половину куба. Благодаря этому несложно вычислить объем (а следовательно, и массу) и площадь поверхности купола (а следовательно, и требуемое количество штукатурки). Более того, в конце этого раздела своего руководства Герон предложил "стандартные решения" для строительства, в результате чего работа с цифрами, которую прорабам приходилось совершать в уме, свелась к минимуму.



Купол Софийского собора образован половиной куба, вырезанной из полусферы

Изначально считалось, что купол Софийского собора покоится на квадратном основании, длина стороны которого составляет 100 византийских футов — прекрасное круглое число. Мы точно не знаем, чему равнялся византийский фут, но современные измерения показывают, что длина стороны равна 31 метру, а это дает допустимый диапазон для византийского фута, если размер квадрата действительно был 100 на 100 футов. Однако если длина стороны квадрата составляет приятные 100 футов, то длина его диагонали — расстояния от одного угла квадрата до противоположного ему угла — покажет, что половина этого квадрата представляет собой увеличенную вариацию треугольника, который так досаждал пифагорейцам. Иными словами, придется смириться с тем, что диагональ такого квадрата кратна квадратному корню из 2. В результате диаметр купола, стоящего на этом основании, как в Софийском соборе, может оказаться равен 141,421356237... фута. У византийцев не было ни одного маркшейдерского инструмента, который позволил бы оперировать таким числом.

Давайте поставим себя на место Герона и приступим к расчетам параметров круга. Если мы хотим облегчить себе жизнь, будет гораздо логичнее приравнять диагональ, а следовательно, и диаметр купола к 140 футам. Число 140 делится на 7 и потому совместимо с примерным значением π, которое составляет 22/7.

Коль скоро диагональ должна была равняться 140 футам, Исидор и Анфимий должны были сообщить прорабу требуемую длину сторон квадрата, после чего тот смог бы приступить к строительству. Вероятно, для этого они применили пифагорейскую хитрость, называемую последовательностью длин сторон и диагоналей и дающую нам приблизительное значение $\sqrt{2}$.

Сначала возьмем квадрат со стороной 1 и условимся, что его диагональ равна 1. Разумеется, это *очень* грубая оценка. Чтобы уточнить ее, берем квадрат побольше и приблизительно оцениваем длину его диагонали. Сторона каждого следующего квадрата в последовательности равна сумме стороны и диагонали предыдущего квадрата (в этом случае — 2). Чтобы получить следующую диагональ, нужно прибавить предыдущую диагональ к предыдущей стороне, умноженной на 2 (получим 3).

Представьте отношение этой следующей диагонали к следующей стороне в виде дроби, и получится 3/2, или 1,5, что уже немного ближе к $\sqrt{2}$. По мере увеличения квадратов вы получите 7/5, 17/12, 41/29, 99/70 и так далее, и эти числа будут постепенно становиться все ближе к точному значению $\sqrt{2}$. Например, 99/70 — это 1,41428…, и это весьма неплохо (как мы помним, $\sqrt{2}$ равен 1,41421…).

Далее Исидору и Анфимию предстояло выбрать из этих дробей ту, с которой легче всего было бы работать и им самим, и их прорабу. Так у них появилась *S*, длина стороны квадрата с известной им диагональю. Этот треугольник подобен тому, стороны которого равны 1, 1 и $\sqrt{2}$, следовательно, 1 относится к $\sqrt{2}$ так же, как S относится к 140. Заменим $\sqrt{2}$ на 99/70 и получим равенство:

$$\frac{S}{140} = \frac{1}{99/70}$$

Решив его по правилу трех, мы получим значение S чуть меньше 99. В наших обстоятельствах длину стороны вполне можно округлить до 99 футов, и строителям Софийского собора не составит труда разметить соответствующий квадрат. Поскольку диагональ квадрата, на котором покоится купол, кратна π, возвести купол будет относительно просто.

Возможно, Исидору и Анфимию даже не пришлось производить все описанные расчеты. Вероятно, Герон просто составил таблицы, в которых можно было по диаметру купола узнать размеры остальных его элементов. Ни одна из них не сохранилась, но до нас дошли его книги, в которых он приводит подобные таблицы для других целей. Кроме того, он создавал чертежи в помощь архитекторам, и эти чертежи подозрительно напоминают купол и некоторые своды Софийского собора.

Скорее всего, Исидор и Анфимий пользовались его приемами. До нас дошло несколько текстов, в которых упоминаются (к несчастью, утраченные) комментарии Исидора к расчетам Герона о проектировании и строительстве сводов. Не стоит также забывать, что Герон гордо стоял на плечах других математиков, в частности Архимеда, ведь в мире существует и множество других примеров того, как на практике применялись древние геометрические пропорции. При постройке Даремского собора на северо-востоке Англии явно учитывалось примерное отношение стороны квадрата к его диагонали. Инженеры, проектировавшие Миланский собор в конце XIV века, обратились за помощью к математику Габриэлю Сторнолоко, чтобы обсудить, какой должна быть постройка — *ad quadratic* или *ad triangulum*, — то есть что предпочтительнее положить в ее основу, отношение диагонали к квадрату или отношение высоты к стороне равностороннего треугольника[11]. Сторнолоко выбрал треугольники — в сочетании с квадратами, прямоугольниками и шестиугольниками. Ученые не сходятся во мнении относительно того, как именно он вычислил отношение высоты равностороннего треугольника к его стороне, которое равно $\sqrt{3}/2:1$. Как и при постройке Софийского собора, ни один каменщик не смог бы произвести необходимые расчеты, но складывается впечатление, что Сторнолоко дал ремесленникам всего три конкретных размера: ширину нефа и четырех приделов; высоту треугольника, указывающего на высшую точку свода нефа; а также расстояние между осями опор нефа — и отношение 26/30. В других средневековых европейских постройках, например в соборах в Реймсе, Праге и Нюрнберге, использовалось отношение стороны к диагонали правильного пятиугольника[12], а значит, применялись известные приблизительные значения числа $(\sqrt{5} + 1)/2$. Вот так просто все и делалось, зачем изобретать велосипед? В конце концов, когда основные расчеты произведены, остальное труда не представляет.

Луч света

Софийский собор — признанное чудо древнего мира, одна из множества архитектурных жемчужин, построенных в незапамятные времена. Почему же картины, которые принято считать мировыми шедеврами, начали появляться лишь тысячу лет спустя, в XV и XVI веках? И почему эта революция в живописи совпала с покорением океанов и составлением европейцами первых карт мира? Случайно ли так произошло? Нет. И живописи, и картографии пошло на пользу возрождение математических знаний, утраченных за столетия религиозных войн.

В начале VII века исламские народы начали покорение Западной Азии и Северной Африки. К концу столетия они даже вторглись в Европу и обосновались в Испании и на Балканах. Но в XI веке терпение христиан лопнуло. Теперь им даже не позволялось посещать Иерусалим, святой город. В ответ на это в 1095 году папа Урбан II объявил Первый крестовый поход. За ним последовало еще семь походов, растянувшихся на двести лет, впрочем, назвать их успешными сложно. Контроль над Иерусалимом и окрестными землями оставался в руках у мусульман. В такой отчаянной ситуации вселяющие надежду истории о пресвитере Иоанне производили на европейцев особенно сильное впечатление. В итоге они не только подтолкнули развитие навигации на базе тригонометрии, но и позволили искусству вступить в золотой век.

В 1260-х годах английский монах-францисканец Роджер Бэкон обратился к христианам, надеясь призвать их к оружию[13]. Он предложил им отвоевать Иерусалим, обратившись к своим познаниям в геометрии. Например, можно было воскресить легендарные "горящие зеркала" древнего мира. По легенде, Архимед с помощью огромных вогнутых зеркал направил солнечные лучи на корабли противника, которые сразу вспыхнули, и крестоносцы, по мнению Бэкона, могли поступить аналогичным образом. Бэкон также предположил, что геометрия сумеет разжечь в христианах огонь посредством искусства, ведь образы, созданные по принципам прекрасной в своем естестве Господней геометрии, не могут не пробуждать страсть. "Я считаю, что человеку, посвятившему себя изучению мудрости Господней, вернее всего заняться исследованием геометрических фигур", — написал Бэкон в своем "Большом сочинении". Этот раздел он озаглавил "О пользе оптических чудес для обращения неверных".

У ученых есть теория, согласно которой Бэкон предлагал воскресить древнее искусство создания театральных декораций. Это позволило бы ставить вдохновляющие религиозные пьесы, чтобы настраивать европейских воинов против сарацинской угрозы. Бэкон писал, что "латиняне" обладали многими навыками, которые стоило бы перенять. Возможно, он имел в виду Витрувия, римского архитектора, жившего в I веке до нашей эры, и знал о мастерстве живописцев, которые создавали задники для театральных представлений:

> По установлении в определенном месте центра сведенные к нему линии должны естественно соответствовать взору глаз и распространению лучей, чтобы определенные образы от определенной вещи создавали на театральной декорации вид зданий и чтобы то, что изображено на прямых и плоских фасадах, казалось бы одно уходящим, другое выдающимся*.

Витрувий здесь говорит о том, что мы сегодня назвали бы перспективой. Этот термин происходит от латинского словосочетания "смотреть сквозь", поэтому мы могли бы также назвать это оптикой, или наукой о том, как свет проходит сквозь различные среды, как он отражается и преломляется. В древнем и средневековом мире слова "перспектива" и "оптика" были взаимозаменяемыми.

История оптики и перспективы восходит к настоящему гиганту геометрии — Евклиду. Около 300 года до нашей эры этот древнегреческий ученый написал знаковый учебник математики. Он назывался "Начала" и более тысячи лет оставался одним из самых продаваемых текстов — не считая Библии. Чуть менее популярной стала другая его книга — "Оптика". В ней Евклид описывает, как свет перемещается между объектами или сценами и человеческим глазом, по пути иногда проходя через линзы или отражаясь в зеркалах. Многие

* Перевод Ф. Петровского.

наблюдения Евклида покажутся вам знакомыми, даже само собой разумеющимися. Он, например, пишет, что свет перемещается по прямой, и потому из нескольких вы увидите тот объект, высота которого будет больше, поскольку луч света проходит по более высокой траектории.

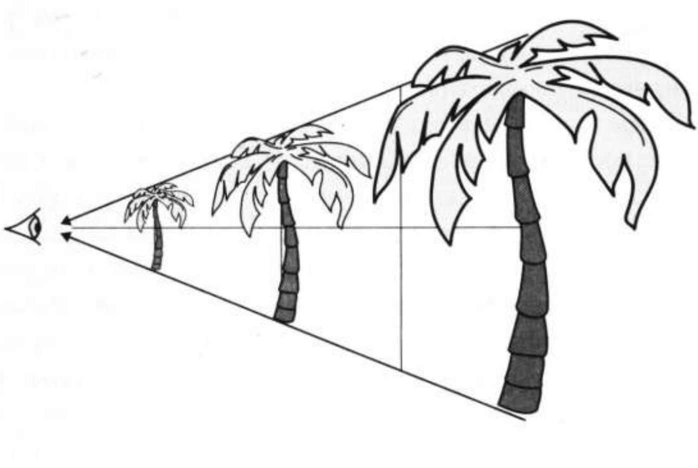
Евклид полагал, что лучи света расходятся из глаза, а не идут от наблюдаемого объекта. В его времена такое представление было широко распространено и полностью соответствовало геометрии его теории зрения. Его лучи формировали конус света, исходящий из глаза, и видимыми оказывались только объекты, попадающие в этот конус. По мере удаления от глаза "зрительные лучи" расходились в разные стороны, их плотность уменьшалась, и потому очертания далеких объектов расплывались.

По тем временам теория Евклида была вполне состоятельной, и в последующих текстах он сумел объяснить целый ряд явлений, таких как отражение в плоских, вогнутых и выпуклых зеркалах и создаваемые линзами оптические эффекты, например увеличение. Благодаря тому, что Евклид смог свести оптические явления к взаимодействию прямых, треугольников и кривых, он применил свои познания в геометрии, чтобы построить совершенно адекватную на первый взгляд теорию визуального восприятия.

Затем в дело вступил Птолемей. Около 165 года нашей эры он доработал труды Евклида. Главным отличием стала его мысль о том, что из глаза выходит не конус, а линия. Он провел геометрическую работу с треугольниками и окружностями и устранил из расчетов точного места формирования отраженного изображения — скажем, перед сферическим зеркалом или позади него — некоторые ошибки, допущенные Евклидом (и допустил собственные). В последующую тысячу лет в оптике доминировали геометрические представления Евклида и Птолемея.

Да, тысячу лет. Нам, пожалуй, сложно понять, как прогресс может идти так медленно, но суровая правда в том, что познания в области оптики находили мало применения. Люди с древности изготавливали простые линзы и зеркала, но низкое качество не позволяло использовать их, например, в качестве очков для чтения. Ситуация начала меняться лишь тогда, когда геометрию и оптику взяли на вооружение христиане.

Нельзя сказать, что геометрией и ее практическим применением интересовались только они. В период активных завоеваний мусульманские ученые заново открыли для себя труды Евклида, перевели его тексты и снабдили их собственными комментариями. Особенную популярность получил комментарий Ибн аль-Хайсама "Книга оптики" — семитомный учебник, написанный в 1011–1021 годах. В нем аль-Хайсам изложил ряд идей, например о том, что зрительные лучи формируют треугольник, состоящий из малых подобных треугольников. В таком случае геометрические проекции показывают, почему предметы становятся тем меньше, чем ближе зрительный луч подходит к глазу, и как крупные предметы получается разглядеть крошечным зрачком.



Треугольные "зрительные лучи" аль-Хайсама позволяют видеть крупные предметы маленьким зрачком

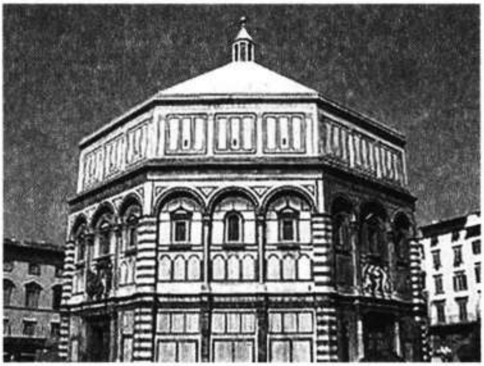
Дойдя в латинском переводе до Европы под названием "О перспективе", книга аль-Хайсама обрела большую популярность. Однако, несмотря на призыв Бэкона использовать оптику в качестве оружия и наличие множества ремесленников, способных изготавливать все более совершенные линзы и зеркала, в Европе того времени так и не произошел радикальный скачок в военном деле. Зато случилась революция в искусстве.

В перспективе

О рождении линейной перспективы написано столько книг, что не хватит и целого шкафа, поэтому мы лишь коснемся того, как на это повлияла геометрия. Удобной точкой отсчета послужит тот день, когда Филиппо Брунеллески встал в 1 метре 75 сантиметрах от центрального портала собора Санта-Мария-дель-Фиоре во Флоренции.

Хотя мы можем с точностью до сантиметра сказать, где было дело, мы точно не знаем, когда это случилось, и остается только предположить, что на дворе был 1425 год. К тому моменту Брунеллески уже стал знаменитым архитектором и проектировал купол собора. Со своей наблюдательной позиции внутри собора он смотрел на Флорентийский баптистерий, стоящий на другой стороне улицы. Баптистерий — восьмиугольное в плане здание, четкая геометрия которого подчеркивается его декором. Если верить биографу архитектора Антонио ди Туччо Манетти, Брунеллески написал его в идеальной перспективе[14]. Идеальной настолько, что, закончив, он самодовольно позволил присутствовавшим сравнить написанную на плите картину размером примерно 30 × 30 см с отражением настоящего баптистерия в зеркале, которое держали рядом с плитой.

Для этого Брунеллески просверлил в плите маленькое отверстие. "Отверстие было размером с чечевичное зернышко с лицевой стороны, расширялось конусообразно, как дамская



Флорентийский баптистерий
Christopher Kaetz, изображение из открытого источника, via Wikimedia Commons

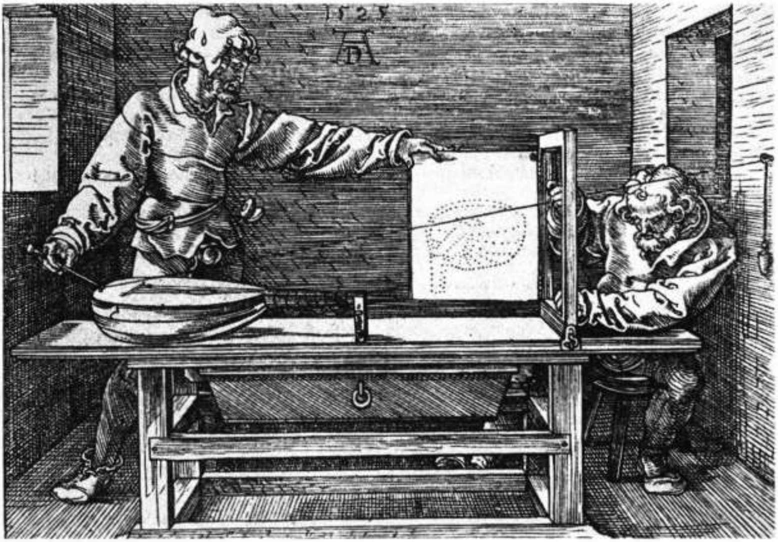
соломенная шляпка, и достигало диаметра дуката или чуть больше с обратной стороны", — сообщает Манетти. Брунеллески предлагал человеку заглянуть в отверстие, повернув картину задней стороной к себе и держа в вытянутой руке плоское зеркало. Человек видел отражение картины. Затем Брунеллески говорил ему опустить зеркало. Теперь сквозь просверленное отверстие человек смотрел на настоящий баптистерий. По словам Манетти, разница была минимальной.

Разумеется, Манетти писал это через много лет после того, как перспектива произвела революцию в живописи, и сложно сказать, не повлияли ли более поздние подвижки в технике и технологии на его свидетельство. Однако при создании картины Брунеллески почти наверняка опирался на отражение в зеркале. Оно давало ему двумерную проекцию трехмерного баптистерия, а потому ему не приходилось искать оптимальный способ показать, как человеческий глаз воспринимает свет, идущий от здания. В 1460-х годах Антонио Аверлино, упомянув о Брунеллески, написал, что "это, несомненно, было тонкой и прекрасной вещью — вывести правило из того, что показывает тебе зеркало"[15]. Далее Аверлино (писавший под псевдонимом Филарете) подробно объяснил, как с помощью зеркала строить правильную линейную перспективу: "Гляди в него — и с большей легкостью увидишь очертания предмета, который ближе к тебе, а тот же, что дальше, будет казаться тебе в сокращении".

Все правила, которые мы усваиваем, когда учимся рисовать, — что предметы вблизи кажутся больше предметов в отдалении, а параллельные прямые сходятся в далекой точке — можно изучить по отражению в зеркале. Как только это становится понятно, зеркало перестает быть нужным. Все сводится к геометрии — той, которую вывел Евклид. Изображая, скажем, сцену в храме, вы решаете, в какой точке находится наблюдатель, и зарисовываете геометрическое построение зрительных лучей, идущих от деталей сцены к его глазу. Затем вы помещаете плоскость — скажем, холст — туда, где будет изображение. Там, где зрительные лучи, идущие от деталей сцены, проходят сквозь холст, вы и помещаете эти детали на холсте. В 1435 году Леон Баттиста Альберти пошагово описал построение линейной перспективы в книге, которую посвятил Брунеллески[16].

Столетие спустя люди еще явно следовали его рекомендациям: на ксилографии Альбрехта Дюрера "Художник, рисующий лютню", созданной в 1525 году, показан такой же процесс, только вместо зрительных лучей используются тонкие нити. Это был единственный способ добиться реалистичного "перспективного сокращения" таких изогнутых поверхностей, как корпус лютни[17].

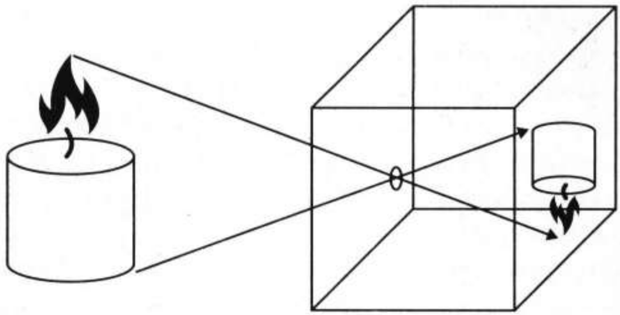
Впрочем, еще можно было прибегнуть к помощи камеры-обскуры. Геометрию этого инструмента первым описал один из архитекторов Софийского собора — Анфимий Тралльский. В 555 году он построил схему перемещения световых лучей, на которой показал, как лучи отражаются в зеркале и проходят сквозь маленькое отверстие. Но все устройство камеры-обскуры целиком первым описал аль-Хайсам. В своей "Книге оптики" он объясняет, что проис-



Альбрехт Дюрер. "Художник, рисующий лютню"
Albrecht Dürer, изображение из открытого источника, via Wikimedia Commons

ходит, когда свеча стоит перед "окном в темную камеру, где напротив этого окна находится белая стена или (также белое) непрозрачное тело". По сути, на стене появляется изображение свечи, которое умелый художник легко может превратить в картину, поместив на стену холст и работая прямо не сходя с места.

Линейная перспектива в живописи — построенная хоть с помощью геометрических набросков, хоть с помощью оптических инструментов — стала революционной технологией. Отныне изобретатели могли создавать реалистичные изображения своих творений, позволяя ремесленникам изготавливать по точным меркам их части (а иногда и указывать, что устройство не будет работать, пока никто еще даже не взялся за инструмент). Чтобы по достоинству оценить перспективные изображения, достаточно взглянуть на наброски



Камера-обскура аль-Хайсама

да Винчи. Но самое большое влияние перспектива сразу оказала на мир искусства: в эпоху Возрождения многие художники стали писать картины по новым правилам, создавая образы, максимально приближенные к жизни. Сложно сказать, в какой степени они опирались на математически построенные прямые, которыми расчерчивали холсты и плиты, а в какой — на проекции, полученные с помощью линз и зеркал. Художник Дэвид Хокни предположил, что неопределенность в этом вопросе вовсе не удивительна, ведь это были секреты мастерства. В конце концов, люди зарабатывали на жизнь благодаря своему умению пользоваться методами Брунеллески, поэтому художникам не было смысла раскрывать свои хитрости, подобно тому как современные фокусники не раскрывают свои. Впрочем, некоторых все же можно было уговорить. Например, в 1506 году Альбрехт Дюрер написал некому Пиркгеймеру, что собирается поехать в Болонью “ради секретов искусства перспективы, которым хочет научить [его] один человек”[18]. По всей видимости, Дюрер выложил за этот урок немалую сумму.

Сегодня мало кто готов платить за освоение перспективы — она хорошо изучена, и принципы Брунеллески изложены во множестве книг. По большей части благодаря системам автоматизированного проектирования (CAD) мы осуществляем конструирование, не прибегая к тригонометрии — ни сферической, ни любой другой. Насколько я знаю, сегодня геометрию по-прежнему используют лишь те, кто строит новые миры (конечно, не считая математиков). Вероятно, транспортиры еще время от времени достают дизайнеры визуальных эффектов, создающие компьютерную графику для голливудских фильмов. Кнопку синуса на калькуляторе периодически нажимают и программисты, разрабатывающие реалистичные физические механики видеоигр. Но для всех остальных геометрия осталась в прошлом.

Пожалуй, основная ценность геометрии сегодня состоит в построении связей между нейронами головного мозга, ведь именно эти связи позволяют нам мыслить абстрактно. Умение вообразить половину куба и накрыть ее полусферой, чтобы представить себе купол Софийского собора, может, и не несет особой пользы само по себе, однако этот навык помогает человеку решать многие другие задачи. Стыдно признать, но я им не владею. Точнее, не владел, пока не построил полукуб и полусферу в системе автоматизированного проектирования и не вложил их друг в друга в едином 3D-чертеже. Там я не только разглядел те части полусферы, которые отнимал от нее Герон, но и повертел получившуюся конструкцию, посмотрел на нее со всех сторон и — наконец-то — все *понял*. И потому у меня остается лишь один вопрос: как Герон и Евклид *поняли* геометрию?

У древних геометров было гораздо меньше возможностей для визуализации своих конструкций, чем у нас. И все-таки их мозг был словно создан для геометрии, в то время как мой для нее не предназначен. То же самое можно сказать и об Эратосфене. Я пытаюсь представить, что нахожусь за пределами Земли и смотрю на положение Солнца и Полярной звезды, на земную ось и смену дня и ночи при вращении земного шара. Я должен быть в состоянии увидеть, как в разное время суток меняются тени, позволяя измерить длину окружности Земли. Я должен быть в состоянии представить способ измерить наклон оси. И это должно позволить мне понять, как движение земной поверхности относительно звезд дает мне способ выяснить, в какой именно точке поверхности я нахожусь.

Большинство из нас с таким не справится — по крайней мере, если не прилагать огромных усилий. Почему? Подозреваю, потому что мы живем в технологическом обществе XXI века, где перечисленные геометрические явления встроены в программное обеспечение. У Герона, Евклида и Эратосфена не было ни миниатюрных моделей, ни систем визуализации. Им ничего не оставалось, кроме как учиться представлять все сложности геометрии в уме, желая воспользоваться ее преимуществами. Их достижения показывают, на что способен человеческий мозг, хотя сегодня, когда столь многое делается за нас, об этом легко забыть. Если мне захочется построить геометрическую структуру, я могу открыть систему автоматизированного проектирования. Если мне захочется узнать, в какой точке Земли я нахожусь или как добраться до нужного места, я могу открыть приложение на телефоне. Пилотов по-прежнему учат определять румбы и локсодромии — на случай если откажет система GPS, — но обычным людям эти древние знания не нужны. Я не могу отделаться от чувства, что в определенном отношении мы из-за этого многое теряем. Так, некоторые исследователи утверждают, что, порвав с геометрией, мы ограничили свои творческие способности[19]. Говорят, теперь нашему мозгу не хватает умений, которые были у людей, применявших геометрическое мышление. Но свидетельств этому не так уж много, и, возможно, это не имеет значения. Как бы то ни было, геометрия, бесспорно, сыграла огромную роль в развитии искусства и архитектуры, а также в географических исследованиях. Я пересмотрел свое первое впечатление от нее, которое получил в восьмилетнем возрасте, и теперь уверен, что каждый должен испытать радость геометрии, даже если она не приносит пользу и не меняет мозг.

Не уверен, что сказал бы то же и об алгебре. Томас Джефферсон однажды назвал изучение этого предмета “изысканной роскошью”[20], а английский писатель Сэмюэл Джонсон рекомендовал заниматься алгеброй, чтобы делать разум “менее мутным”. Другие, впрочем, не разделяли их энтузиазма. Даже столь подкованный в алгебре человек, как британский математик Майкл Атья, считал ее палкой о двух концах. Алгебра, по его мнению, отнимает у математика характерную для геометрии интуитивную связь с реальным миром и представляет собой математику, лишенную человечности. “Алгебра — это предложенная математику сделка с дьяволом, — сказал он однажды. — Дьявол говорит: я дам тебе мощный инструмент, который ответит на любые твои вопросы. Ты должен лишь отдать мне свою душу”[21].

Стоит ли алгебра того? Скоро узнаем.

Глава 3
Алгебра
История организации

Уметь считать — прекрасно, но что, если кое-что все же остается неучтенным? Научившись создавать и использовать такие математические инструменты, как квадратные уравнения, мы получили возможность находить недостающие числа и подчинять себе процессы, происходящие в природе. Простейшие вещи — понять, какой налог платить и как победить в битве, даже если вам противостоит всего лишь другой математик, — вскоре превратились в продвинутые алгоритмы для решения любых задач, от прогнозирования движения планет до снижения затрат на эксплуатацию автомобилей и обеспечение выживания человечества в холодной войне.

Во вторник, 17 апреля 1973 года, небольшая транспортная компания начала революцию в сфере, в которой революции никто не ожидал. На 14 малых самолетах она за одну ночь доставила 186 посылок в 25 городов[1]. Описать эту революцию просто: каждый из этих рейсов вылетел из Мемфиса в штате Теннесси.

Сначала работу этого "веерного" предприятия обеспечивали всего 389 сотрудников, и приносить прибыль оно стало лишь через два года. Сегодня в его штате 170 тысяч человек, а его годовой доход составляет 71 миллиард долларов. Это *FedEx*.

Успех *FedEx* объясняется тем, что основатель компании решил вести всю логистику из точки, являющейся самым удобным центром для доставки грузов по США. Как ему это удалось? Фредерик Смит, основатель и генеральный директор *FedEx*, почти наверняка взял карту США и нашел на ней аэропорт, расположение которого позволяло свести к минимуму среднее расстояние перемещения посылки. Учитывались и другие факторы: в этом аэропорту круглый год должна была стоять хорошая погода, чтобы он редко закрывался, а его руководство должно было согласиться немного изменить инфраструктуру под нужды предприятия Смита.

Оказывается, выбор Смита был не оптимальным. В 2014 году профессор математики Кент Моррисон разработал алгоритм, позволяющий произвести более систематический расчет, и использовал данные переписи населения, чтобы выяснить, где именно живут люди в США[2]. Он пришел к выводу, что оптимальная точка для логистического центра находится примерно в 110 километрах к юго-западу от Индианаполиса, в округе Грин в Индиане. До центра Смита в Мемфисе оттуда всего 500 километров. Любопытно, что конкурент *FedEx*, компания UPS, оказалась чуть ближе. UPS бесстыдно перешла на веерную систему вскоре после успеха *FedEx* и разместила свой логистический центр в Луисвилле (штат Кентукки), всего в 440 километрах от центра расселения американцев.

FedEx и UPS — классические логистические компании. Логистика — это маркировка, сортировка, группировка и транспортировка. Человеческая цивилизация построена на решении логистических задач, будь то хоть строительство пирамид в Древнем Египте, хоть пришедшее к Наполеону понимание того, что снабжение продовольствием — залог успешной армии, хоть современные задачи по обеспечению того, чтобы пилоты авиакомпаний, посылки с *Amazon* и пакеты данных, путешествующие по Всемирной паутине, оказывались ровно там, где должны быть в конкретный момент. Для всего этого необходимо то, что математики называют алгеброй. Следовательно, можно смело сказать, что эта книга — хоть в печатной, хоть в электронной версии — оказалась у вас в руках не без помощи алгебры. За доставку отвечает математика.

Решаем квадратное уравнение

Что вообще такое алгебра? Возможно, в вашем представлении — вполне обоснованном, если вспомнить, как алгебру обычно преподают, — это пугающий лабиринт уравнений, буквенная мешанина x, y, z, a, b и c, да еще и куча верхних индексов в придачу (^{2} и ^{3}, а может, даже ^{4}). Непосвященных такое, несомненно, обескураживает. Но алгебра — не синоним проблем. На самом деле это просто искусство выявления скрытой информации не основе имеющихся данных.

Слово "алгебра" произошло от арабского "аль-джебр" из названия написанной в IX веке книги Мухаммада аль-Хорезми (о ней упоминалось в первой главе — это "Краткая книга о восполнении и противопоставлении"). В ней собраны древнеегипетские, вавилонские, древнегреческие, древнекитайские и древнеиндийские методы определения неизвестных при наличии заданных величин. Аль-Хорезми дает нам инструкции — формулы, которые мы называем алгоритмами, — по решению простых алгебраических уравнений, таких как $ax^2 + bx = c$, и геометрические методы решения 14 разных типов "кубических" уравнений (где x возведен в третью степень).

Кстати, на тот момент в сочинениях аль-Хорезми еще не было ни переменных, ни степеней, ни уравнений как таковых. Изначально алгебра была "риторической" наукой, где задачи и их решения описывались хитросплетениями слов. Неизвестная величина обычно называлась *cossa*, или "вещь", и потому алгебру нередко именовали "коссическим искусством". Первые приверженцы этого искусства решали задачи такого типа:

> Двое мужчин вели волов по дороге, и первый сказал второму: "Дай мне двух волов, и тогда у меня будет столько же волов, сколько у тебя". Потом второй сказал: "Теперь ты дай

мне двух волов, и тогда у меня волов будет вдвое больше, чем у тебя". Сколько волов было всего и сколько их было у каждого из мужчин?

У меня есть кусок льняной ткани 60 футов длиной и 40 футов шириной. Я хочу разрезать его на меньшие фрагменты, по 6 футов в длину и 4 фута в ширину, чтобы каждого отреза хватило на пошив туники. Сколько туник получится из большого куска?

Около 800 года эти примеры собрал и опубликовал в сборнике "Задачи для развития молодого ума" Алкуин из Йорка[3]. Они не слишком отличаются от задач, которые мы решали на школьных уроках математики[4]. У нас, однако, было преимущество, ведь мы могли превратить их в уравнения, и теперь, прежде чем погружаться в глубины алгебры, нам стоит сделать паузу и осознать, как сильно это облегчало нам жизнь.

Идея отказаться от слов в алгебре появилась лишь в XVI веке. Она пришла в голову французскому чиновнику Франсуа Виету. Получив юридическое образование, Виет на протяжении большей части жизни служил при французском королевском дворе, всячески помогая монархам. Он занимал административный пост в Бретани, был тайным советником короля Генриха III и занимался дешифровкой писем при Генрихе IV. Его звездный час, пожалуй, настал тогда, когда король Испании обвинил французский двор в использовании черной магии. Как иначе, жаловался он папе римскому, Франция могла заранее узнать о военных планах Испании? Но здесь, конечно, обошлось без колдовства. Виет просто оказался умнее испанских шифровальщиков и смог прочесть их переписку, перехваченную французскими военными.

Возможно, именно такая гибкость ума и позволила Виету разглядеть, что риторическая алгебра станет проще, если ввести в нее символы. В своей алгебре он согласными обозначал известные величины, а гласными — неизвестные. У него получалось примерно так:

$$A \text{ cubus} + B \text{ quad. in } A, \text{ æquetur } B \text{ quad. in } Z,$$

а сегодня мы написали бы:

$$A^3 + B^2A = B^2Z$$

Его запись, признаться, тоже не была простой, но для начала и это было неплохо. Любопытно, что он использовал знак плюса (и знак минуса в других формулах), но знака равенства еще не ставил. Знак равенства в 1557 году ввел в обиход валлийский математик Роберт Рекорд, который предложил его в книге с забавным названием "Оселок остроумия, являющийся второй частью арифметики и содержащий извлечение корней, коссическую практику с правилом составления уравнений, а также иррациональные числа".

Раз уж мы коснулись вопроса об алгебраической записи, стоит отметить, что по сей день не угасают ожесточенные споры о том, как буква *x* стала символом неизвестной величины. По мнению историка культуры Терри Мура, дело в том, что в алгебре аль-Хорезми "неопределенная величина" называлась "шен"[5]. В испанском языке нет буквы "ш", и потому при переводе его трудов испанцы взяли самую близкую к ней букву *x*, которая дает испанский звук *ch*. Но в других источниках утверждается, что *x* нам подарил Рене Декарт, который применил буквы с разных концов алфавита в своей книге "Геометрия", опубликованной в 1637 году[6]. Он обозначил известные величины буквами *a*, *b* и *c*, а неизвестные — буквами *x*, *y* и *z*.

Если вас пугает алгебра со всеми ее загадочными символами, представьте, что перед вами способ представить геометрические фигуры в текстовой форме.

Продумывая структуру своей книги, я провел искусственную черту между алгеброй и геометрией. Хотя обычно мы изучаем эти науки по отдельности — в основном потому, что так проще составлять учебный план, — алгебра естественным образом вытекает из геометрии. Это, в сущности, и есть геометрия, которая отказывается от картинок, тем самым позволяя математике освободиться от оков и расцвести. Чтобы понять, как это происходит, давайте вернемся — в очередной раз — к древней практике налогообложения.

Как мы видели в главе о геометрии, налоги часто рассчитывались в зависимости от площади полей — вавилонское слово *eqlum*, "площадь", изначально и значило "поле"[7]. Неудивительно, что вавилонским чиновникам приходилось решать задачи наподобие вот этой, записанной на глиняной табличке YBC 6967 из Вавилонской коллекции Йельского университета:

> Площадь прямоугольника равна 60, а его длина больше ширины на 7. Какова его ширина?

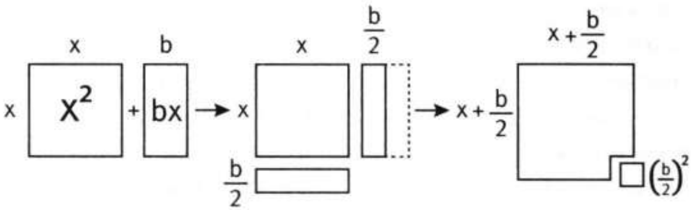
Попробуем решить эту задачу. Если взять ширину за x, то длина — это $x + 7$. Площадь прямоугольника равна произведению его длины и ширины, а значит, задается следующим равенством:

$$A = x\,(x + 7)$$

Скобки здесь показывают, что каждое из слагаемых внутри них нужно умножить на величину, стоящую снаружи, и тогда получится:

$$A = x^2 + 7x$$

Вавилоняне решали такие уравнения, производя последовательность действий, показывающих тесную связь между алгеброй и геометрией. Этот процесс называется "достраиванием квадрата".



Вавилонский метод "достраивания квадрата"
для решения квадратных уравнений

Чтобы решить уравнение вида $x^2 + bx$, сначала нужно было зарисовать его в виде геометрических фигур. x^2 — это квадрат со стороной x. bx — прямоугольник с длиной x и шириной b. Поделите этот прямоугольник надвое по длинной стороне и переместите одну половину в нижнюю часть квадрата, и у вас *почти* получится квадрат побольше. Чтобы достроить его, нужно просто добавить маленький квадратик со стороной $b/2$. Площадь этого квадратика — $(b/2)^2$. Получается, что изначальное уравнение эквивалентно равенству $(x + b/2)^2 — (b/2)^2$.

Сталкиваясь с уравнением вида

$$x^2 + bx = c$$

вавилоняне подставляли в него результат достраивания квадрата и получали:

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$$

Далее они работали с этим равенством и приводили его к формуле (хотя и не записывали формулу в современном представлении):

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \left(\frac{b}{2}\right)$$

Ответ: ширина равняется 5, а длина — 12. Но приглядитесь — разве эта формула вам не знакома? Если я чуть изменю изначальное равенство, чтобы получилось

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

то вы сможете решить его по формуле, усвоенной в школе, — формуле для решения квадратного уравнения:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Как видите, когда-то в школе вы узнали не что иное, как метод расчета налогов, которому уже 5000 лет. Впрочем, никто из нас не стал вавилонским сборщиком податей, так зачем же школьникам сегодня решать квадратные уравнения? Это справедливый вопрос, и спорят об этом даже сами учителя математики.

Кривые космоса

На отраслевой конференции, состоявшейся в 2003 году, заслуженный британский учитель математики Терри Блейден высказал мнение, что с квадратными уравнениями лучше знакомить только тех учеников, которым действительно нравится математика[8]. Он отметил, что большинству молодых людей для жизни вполне достаточно и базовой математической грамотности. Других учителей математики настолько возмутило его предложение, что один из них даже ответил ему с политической арены. Тони Макуолтер не один десяток лет преподавал математику, а затем был избран в парламент. “Квадратное уравнение, — заявил он в палате общин, — это не темная комната без мебели, где человеку приходится сидеть на корточках. Это дверь в комнату, полную беспрецедентных достижений человеческого разума. Если не войти в эту дверь — или если сказать, что за ней не найдется ничего интересного, — можно навсегда лишиться доступа к значительной части того, что мы привыкли считать человеческой мудростью"[9].

Правда ли это? Даже если квадратные уравнения и кажутся людям сложными, это не мешает им ценить человеческие знания и мудрость; в конце концов, мало кто из нас решал квадратные уравнения хоть раз после того, как сдал выпускной экзамен. Но людям, не связавшим свою жизнь с математикой, я все равно могу предельно честно сказать: освоив алгебру, вы развили свою способность к абстрактному мышлению и научились уделять внимание тому, о чем ваш мозг предпочел бы не думать. Тысячелетний опыт и ряд любопытных современных исследований показывают нам, что (как и в случае с геометрией) работа с абстрактными переменными и числовыми связями между ними действительно благотворно сказывается на нашем мышлении[10]. Алгебра делает человека изобретательным, плодовитым и усидчивым, прививает ему способность нестандартно мыслить и доводить логические рассуждения до конца. Хороший пример — немецкий физик Георг Кристоф Лихтенберг.

В 1786 году Лихтенберг написал своему другу Иоганну Бекману довольно непритязательное письмо[11]. "Однажды я предложил молодому англичанину, которого учил алгебре, одно упражнение", — написал Лихтенберг. По условиям задачи нужно было "найти лист бумаги, для которого все книжные форматы — ин-фолио, ин-кварто, ин-октаво, секстодецимо — были бы подобны друг другу".

Это напоминает работу с подобными треугольниками, только здесь предметом исследования становятся прямоугольники. Лихтенберг хочет узнать, как найти такое соотношение длины и ширины листа бумаги, которое позволяет уменьшить самый крупный формат, "ин-фолио", вдвое и получить формат "ин-кварто", затем уменьшить его вдвое до "ин-октаво" и так далее. Ответ ученика показался Лихтенбергу весьма любопытным, и он сравнил полученные размеры с форматом бумаги, лежащей в ящике его письменного стола. "Установив это отношение, я решил применить его к листу бумаги, воспользовавшись ножницами, — рассказывал он Бекману, — но с радостью обнаружил, что формат уже соответствует искомому. На такой бумаге я и пишу это письмо".

И здесь он перешел к делу. Лихтенберг поинтересовался, не знаком ли Бекман с кем-нибудь из производителей бумаги, — ему хотелось узнать, как именно они пришли к использованию такого формата, ведь это, по его словам, "вряд ли стало случайностью". Может, кто-то в бумажной промышленности уже произвел алгебраические расчеты?

Нам это не известно. Но письмо Лихтенберга, в котором описывается простое алгебраическое упражнение и неожиданное открытие того, что математическое решение, возможно, появилось естественным образом, легло в основу европейского стандарта форматов бумаги. В 1911 году лауреат Нобелевской премии по химии Вильгельм Оствальд призвал к использованию соотношения Лихтенберга в качестве международного стандарта в производстве бумаги[12]. В 1921 году такой стандарт был принят в Германии и быстро распространился по Европе. В 1975 году его утвердили в качестве официального формата документов ООН. Вероятно, вам он известен как серия форматов "А". Наверняка вы даже сегодня держали в руках листок формата А4, если только живете не в Северной Америке, которая так никогда и не ощутила необходимости перейти на соотношение Лихтенберга. Это соотношение — бесценный ресурс для всех, кому нужно сохранять пропорции, что при увеличении плаката, что при уменьшении чертежа бумажного самолетика.

Задача Лихтенберга о размерах бумаги прекрасно сформулирована на языке риторической алгебры. Ее решение мы уже встречали раньше: длина и ширина относятся друг к другу как $\sqrt{2}$ к 1. Площадь листа формата A0 составляет 1 м^2, а значит, его стороны равны 1,189 м и 0,841 м. Поверните его вертикально и разрежьте пополам по ширине, и у вас получатся два листа формата A1, длина каждого из которых равна ширине листа A0, а ширина — половине длины A0. Повторите операцию с каждым из листов — и получите четыре листа формата A2. У всех листов будет одинаковое соотношение длины и ширины. Разрежьте A2 пополам по ширине и получите… впрочем, вы уже догадались.

Алгебраическая формула, лежащая в основе этого стандарта, не слишком сложна. Если бы ученик Лихтенберга применял "символическую" алгебру и обозначил бы длину искомого листа за x, а ширину — за y, то ему нужно было приравнять отношение x к y к отношению y к половине x. Он мог бы записать следующее равенство:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x/2}$$

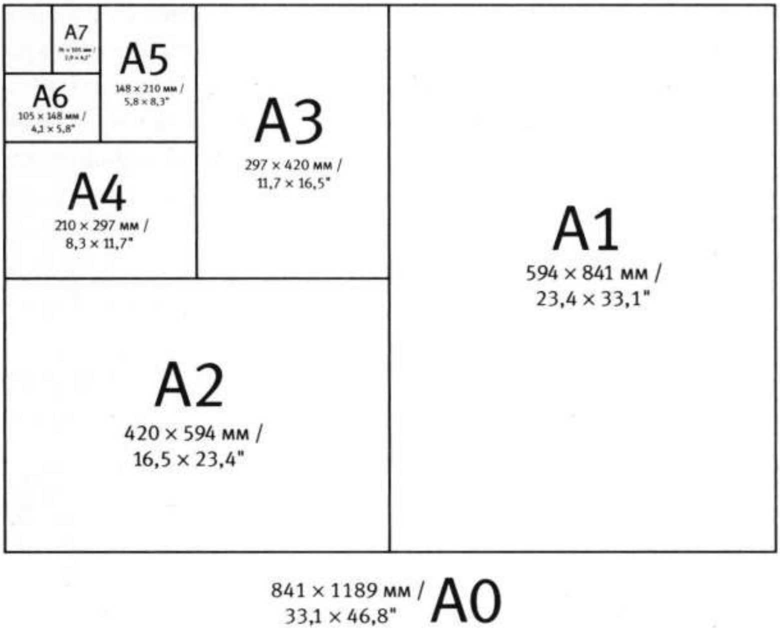
а затем перестроить его таким образом:

$$\frac{x^2}{y^2} = 2$$

что значит:

$$\frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

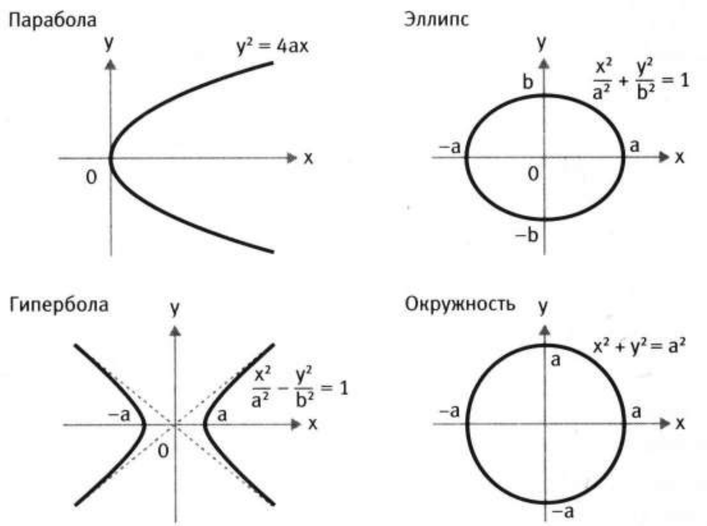
Макуолтер справедливо отметил, что алгебра определила наши интеллектуальные достижения, и форматы бумаги показывают одно из множества применений квадратных уравнений в реальном мире. Они также позволяют компаниям рассчитывать прибыль при запуске новых продуктов и принимать спутниковые сигналы при помощи параболической антенны. Но полезнее



Серия форматов бумаги “А”,
у которых одинаковое соотношение сторон

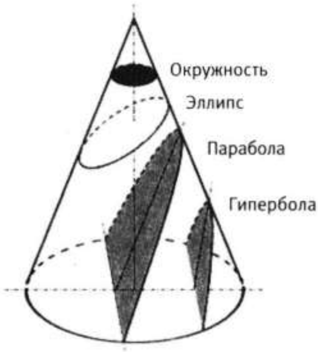
всего квадратные уравнения оказываются при описании природных процессов, например при анализе траекторий движения небесных тел. Чтобы понять почему, давайте посмотрим на кривые, которые задаются уравнениями второй степени.

Если мы представим любое такое уравнение на графике, рассчитав значения y для каждого значения x, у нас получится линия, которая каким-то образом изгибается и образует кривую. В совокупности эти кривые делятся на четыре класса: параболы, окружности, эллипсы и гиперболы. Если вы знаете, что искать, то одного взгляда на уравнение вам будет достаточно, чтобы понять, какую кривую оно даст. Если в квадрат возведен лишь один x или y, то получится парабола. Если в квадрате стоят и x, и y, а числа (называемые коэффициентами) перед ними одинаковы, то получится окружность. Эллипс даст уравнение, напоминающее то, что задает окружность, где коэффициенты при x и y будут положительными, но разными. Гипербола задается уравнением, где коэффициенты при x и y имеют разные знаки: один из них положителен, а другой отрицателен.



Кривые, задаваемые различными квадратными уравнениями

Различные коэффициенты (a и b на графике) определяют, насколько вытянутыми будут формы или насколько большой окажется окружность. В совокупности эти формы изначально называли коническими сечениями, поскольку они возникают там, где конус пересекает плоскость. Если можете, возьмите фонарик и включите его в темной комнате, чтобы создать световой конус. Если направить луч фонарика прямо вниз, в месте пересечения конуса с полом возникнет окружность. Это простейшее из конических сечений. Теперь направьте луч на стену под углом около 45°. В месте пересечения светового конуса со стеной появится вытянутая окружность — эллипс. Чтобы создать параболу, нужно посветить фонариком на стену под углом, равным углу наклона светового конуса. Снова изменив угол падения света на стену, вы получите половину гиперболы.



Как разрезать световой конус,
чтобы получить квадратичные кривые

Любопытно, что все эти математические формы встречаются в природе. Разумеется, вы и сами это знаете, ведь вы видели параболическую радугу и изображение эллиптической орбиты Земли в Солнечной системе. Тем не менее это важно: это значит, что мы должны быть в состоянии составить уравнения, описывающие природные явления на математическом языке. И это открывает дорогу к их глубокому пониманию.

В древности люди тщательно вели числовые записи, фиксируя частоту различных небесных явлений — комет, затмений, соединений и так далее, — и искали закономерности, чтобы рассчитать, когда наступит следующий значимый момент. Однако вплоть до начала XVII века (и даже в первые его годы) это было не более чем перемалывание чисел, и лишь затем появился Иоганн Кеплер. На основе данных Тихо Браге он установил, что планеты вращаются по эллиптическим орбитам, но у него никак не получалось понять почему. Древние греки утверждали, что небеса должны описываться окружностью, которую они считали совершенной формой, — и кто же мог объяснить, почему Вселенная полна тел, движущихся по эллиптическим орбитам? Теперь ответ на этот вопрос очевиден: любой, кто способен связать наблюдаемое движение планет с идеей о том, что на них воздействует одна сила. Например, Исаак Ньютон.

Благодаря прорывным математическим трудам Ньютона нам известно, что траектория тела, движущегося в одну сторону, но находящегося также под воздействием силы, направленной в другую сторону, напоминает одно из конических сечений. В зависимости от скорости тела и величины силы траектория будет либо круговой, как у наших спутников, либо эллиптической, как у планет, которые вращаются вокруг Солнца, либо параболической или гиперболической, как у некоторых комет, время от времени проносящихся мимо Земли. Уравнение движения — скажем, Ньютоново уравнение, описывающее силу притяжения, — также задает траекторию тела в динамике.

Впрочем, алгебру на Западе впервые применили не для изучения планетарных орбит. Неудивительно, что военные еще давным-давно задались вопросом, не может ли алгебра помочь с такими вещами, как расчет угла, под которым солдату следует установить пушку с учетом позиции противника. Ответ — да. Алгебра может справиться с этой задачей.

Искусство войны

Нередко ученые посыпают голову пеплом, узнавая о том, какое применение находят их труды в военной сфере. Пожалуй, самый известный пример — атомщик Роберт Оппенгеймер, который возглавлял Манхэттенский проект по разработке первой в мире атомной бомбы. Через три года после первого атомного взрыва он заявил, что “физики познали грех, и лишиться этого знания они никогда не смогут”[13]. В XVI веке о таком же чувстве стыда заявил математик Никколо Тарталья.

Тарталья — это прозвище, означающее "заика". Оно приклеилось к Никколо еще в детстве в Брешии, после того как город осадила французская армия. Они с матерью спрятались в часовне, но туда ворвались французы, и один солдат мечом рассек Никколо рот. Бедный мальчик чуть не лишился способности говорить, но оказался человеком невероятно сильной воли. Заика не только выжил (отчасти благодаря тому, что его мать самоотверженно вылизывала ему раны, чтобы в них не попала грязь), но и вырвался из нищеты, в которой жила его семья, сам освоил науки и стал уважаемым математиком.

В рамках своих исследований Тарталья решил "задачу артиллериста": определил, как угол наклона пушечного ствола влияет на дальность полета снаряда[14]. Из-за этого его замучила совесть. Он отметил, что такое применение алгебры "вредно", "разрушительно для рода человеческого", а также "предосудительно, оскорбительно и жестоко, а потому заслуживает тяжелой кары Господней и людской". И сжег все свои рукописи.

Но затем передумал.

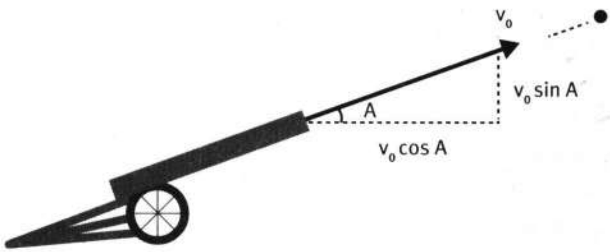
Когда османский султан Сулейман укрепил позиции и стал грозить всему христианству, нежелание Тартальи применять его новую артиллерийскую науку для убийства людей затмила его преданность своим христианским братьям и сестрам. "Учитывая, что волк собирается напасть на наше стадо, — написал он своему покровителю герцогу Урбинскому, — я считаю более недопустимым скрывать эти вещи". И он представил герцогу алгебру артиллерии.

Что же определяет траекторию артиллерийского снаряда? Допустим, пушка стоит в точке p на оси x и стреляет горизонтально по цели, находящейся в точке q. Снаряд вылетает из ствола со скоростью v. Не принимая в расчет сопротивление воздуха, скажем, что на него воздействует единственное ускорение, гравитация a, а значит, он полетит по одному из конических сечений — по параболе. По прошествии времени t он достигнет точки q, и это можно описать следующим уравнением:

$$q = p + vt + 1/2\, at^2$$

Иными словами, итоговое положение снаряда по оси x равняется сумме его начального положения, скорости, умноженной на время t (скорость, умноженная на время, — это просто расстояние), и половины ускорения, умноженного на время t в квадрате.

Впрочем, вам, вероятно, не захочется, чтобы пушка стреляла горизонтально. А когда вы поднимаете ее ствол на угол A, чтобы обеспечить определенную дальность стрельбы, вам приходится учитывать горизонтальный и вертикальный компоненты траектории полета снаряда. И так мы возвращаемся в сферу тригонометрии.



Определение дальности полета пушечного снаряда с помощью треугольников

Вертикальная скорость равняется v sin A (где v — начальная скорость). Эта вертикальная скорость падает до нуля, когда снаряд достигает максимальной высоты. Та же сила, которая замедляет его полет, — гравитация — теперь ускоряет его движение к земле, и снаряд начинает падать, а поскольку никаких новых сил на него не воздействует, падение занимает то же время, что и взлет. Горизонтальная скорость равняется v cos A и остается неизменной (как помните, мы не принимаем в расчет сопротивление воздуха). Алгебра позволяет нам вычислить время до столкновения снаряда с землей, а также преодоленное снарядом горизонтальное расстояние.

Если нам известно, на какое расстояние мы хотим послать снаряд, мы можем скорректировать угол A, чтобы обеспечить себе идеальную дальность стрельбы.

Работа Тартальи стала первым из множества применений алгебры в военной сфере. Еще одно — определение размера лагеря в зависимости от числа солдат, которых необходимо в нем разместить. Также алгебра позволяет рассчитать, какое денежное содержание и снабжение требуется для батальона. Из самых простых задач — оценка количества солдат, необходимых для прокладки траншеи определенной длины за заданное время. Или расчет количества пороха для оружия. В книге "Арифметический военный трактат, или Стратиотик", опубликованной в 1579 году, Леонард Диггес объясняет, как решать все перечисленные задачи с помощью алгебры[15]. Так, он отмечает, что если вам известно количество пороха, необходимое для оружия, которое вдвое меньше вашего, то нельзя просто увеличить количество пороха вдвое, чтобы получить достаточный уже вам объем. Нужно произвести расчеты на основе "чисел, полученных при кубическом умножении", поскольку "правило пропорции здесь просто не работает". Иными словами, если ружье вдвое больше, вам потребуется в 2^3 (то есть в 8) раз больше пороха, а не в 2 раза больше. Диггес также задает следующий вопрос о распределении вооружения:

> В распоряжении у сержанта-майора 60 знамен, у каждого знамени по 160 копейщиков и пехота с оружием ближнего боя. Генералы хотят, чтобы он сформировал одну большую роту и окружил ее семью шеренгами копейщиков. Сколько копейщиков и сколько алебардистов ему понадобится, чтобы сформировать наибольшую роту, и сколько шеренг должно быть в войске?

По тем временам этот вопрос был насущным: командующим нужно было понимать, как лучше всего распределять оружие между различными подразделениями пехоты, чтобы максимизировать их эффективность, при этом защищая пехотинцев от кавалерийских атак противника. На том этапе истории битвы в основном велись подразделениями, выстроенными в геометрические формации. Правильное построение было вопросом жизни и смерти для солдат, и часто от него зависели успехи государства. Чтобы решить задачу Диггеса, нужно прибегнуть к алгебраическому поиску неизвестной величины. Ответ на первый вопрос: 2520 копейщиков.

Примерно тогда же, когда Тарталья работал над алгеброй пушечного огня, математику превращали в оружие и совершенно другим способом. В те годы алгеброй владели немногие, и этот навык производил немалое впечатление, а потому с помощью него один математик мог доказать свое превосходство над другим и даже отнять у него работу. Серьезные последствия таких математических дуэлей — потерпев поражение, математик вполне мог умереть с голоду, — ускорили дарвиновскую эволюцию новых алгебраических методов. В математике тогда выживал действительно сильнейший, но выжившим следовало соблюдать осторожность, и профессиональные математики тщательно отбирали учеников, которым передавали тайные алгебраические знания. Им вовсе не хотелось, чтобы какой-нибудь ученик раскрыл их секреты конкурентам или вступил в противостояние с учителем, надеясь занять его место. В результате математика распространялась медленно, а недоверие между математиками росло. Мы редко связываем математику с замалчиванием, ревностью и паранойей, но в истории о том, как мы пришли от квадратных уравнений к кубическим (x^3) и уравнениям четвертой степени (x^4), все это есть.

Битва за куб

Наш рассказ начинается со знакомого имени — Лука Пачоли. В книге "Сумма арифметики", опубликованной в 1494 году, Пачоли заявил, что, хотя существует общая формула для решения квадратных уравнений (квадратичная формула, которую мы разбирали ранее в этой главе), представляется невозможным вывести общую формулу для решения кубических уравнений, где x возведен в третью степень. Иными словами, для уравнений следующего вида*:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Заявление Пачоли было интересно исключительно в интеллектуальном плане, поскольку применения кубическим уравнениям пока не находилось. Тем не менее болонский математик Сципион дель Ферро, однажды выступивший соавтором Пачоли, взялся за эту задачу. Он нашел способ решить родственное кубическое уравнение, где b равняется нулю, в результате чего получается уравнение "пониженной степени" без x^2:

$$ax^3 + cx + d = 0$$

Как и любой здравомыслящий математик того времени, дель Ферро ни с кем не поделился своим решением. Пока не оказался при смерти. Поняв, что ему осталось недолго, он послал за своим учеником Антонио Фиоре и зятем Аннибалом делла Наве, которым и раскрыл секрет.

Поверенные дель Ферро оказались совсем разными людьми. Его зять осознал, какая честь ему оказана, и никому не рассказал, что у него есть доступ к ценному математическому знанию. Фиоре, напротив, был алчен и амбициозен. Он счел решение кубического уравнения пониженной степени смертоносным оружием. И решил, что первой своей жертвой сделает Никколо Тарталью.

* Как мы помним из первой главы, отрицательные числа тогда еще не отвоевали себе место под солнцем, поэтому Пачоли говорил не об одном кубическом уравнении, а о разных его типах: один тип — когда отрицательных значений среди чисел a, b, c, d не было, второй — когда только $d < 0$, и так далее. — *Прим. науч. ред.*

В 1535 году, когда Фиоре устроил состязание, Заика жил в Венеции и преподавал теоремы Евклида. Фиоре мечтал занять его место и по правилам вызвал Тарталью на математическую дуэль. Они предложили друг другу по 30 задач. Все задачи Фиоре были вариациями математических решений кубического уравнения пониженной степени. Тарталья сразу понял, что у Фиоре, очевидно, есть формула, а значит, сохранить работу он сможет только в том случае, если найдет решение сам. Будучи талантливым математиком, он справился с задачей. 12 февраля Тарталья нашел способ решить кубическое уравнение пониженной степени $x^3 + px = q$. На следующий день он понял, как решить уравнение вида $x^3 = px + q$. Вскоре после этого он сумел решить уравнение $x^3 + q = px$. Тарталья справился со всеми кубическими уравнениями пониженной степени, предложенными Фиоре. Фиоре, однако, задачи Тартальи оказались не по плечу. Поединок закончился триумфом Тартальи, который сохранил работу и еще сильнее укрепил свою репутацию, публично отказавшись от 30 изобильных пиров, положенных победителю. Как поверженный Румпельштильцхен, униженный Фиоре исчез из публичной сферы.

И все же Тарталью не ждал счастливый конец. Когда состоялась его дуэль с Фиоре, прославленный миланский математик Джероламо Кардано занимался грандиозным проектом: писал книгу, в которой подробно излагал алгебраические знания своей эпохи[16]. Кардано услышал о том, что Тарталья принял участие в состязании по решению кубического уравнения пониженной степени, и попросил его предоставить решение для книги. Понимая ценность этого знания, Тарталья ответил отказом. Кардано повторил свою просьбу и пообещал опубликовать решение Тартальи, обозначив авторство. Тарталья не согласился и на этот раз. Тогда Кардано предложил познакомить Тарталью с генералами, которые готовы щедро заплатить за его знания в области математики артиллерии. Тарталья не уступал. В конце концов

Кардано сделал странное предложение: если Тарталья сообщит ему решение — как математик математику, — он будет ему благодарен, но публиковать его в книге не станет. Непонятно почему, но Тарталья на это согласился.

Получив решение Тартальи, Кардано и его ученик Лодовико Феррари взялись за полноценное кубическое уравнение. Они решили его — и пошли еще дальше. Отталкиваясь от новаторского метода Тартальи, Феррари решил и уравнение четвертой степени, куда добавляется x^4. Как и в случае с кубическим уравнением, практического применения для уравнения четвертой степени не было, но Кардано включил все решения в свою рукопись. Впрочем, опубликовать он ничего не мог, потому что в основе всех выкладок лежало решение Тартальи, которое он поклялся не обнародовать.

Выход из положения нашел школьный учитель из Брешии Дзуан да Кои. Он был знаком с Тартальей и слышал, что Сципион дель Ферро передал свое решение кубического уравнения своему зятю и Фиоре. Да Кои предложил Кардано и Феррари навестить зятя дель Ферро. Они последовали его совету — и узнали тайну, в которую был посвящен Фиоре и которую Тарталья раскрыл самостоятельно. Хотя ученые и сегодня спорят об этичности его поступка, Кардано опубликовал свою книгу, убедив себя, что с формальной точки зрения не нарушает клятву, данную Тарталье.

Тарталья разозлился, узнав, что теперь его добытое тяжким трудом (и невероятно ценное) решение кубического уравнения пониженной степени доступно любому, кто купит книгу Кардано. Они с Кардано обменялись несколькими открытыми письмами, и тон Тартальи с каждым последующим из них становился все более ядовитым. Оскорбленный ученый требовал восстановления справедливости на математической дуэли. Кардано, у которого на карту было поставлено больше, отказался участвовать в поединке. Затем в родном городе Тартальи, Брешии, открылась заманчивая вакансия. Заика подал прошение о принятии на должность, и его одобрили на одном условии: он должен был сразиться на публичной дуэли с учеником Кардано Лодовико Феррари.

Феррари рвался в бой с человеком, который не раз порочил репутацию его любимого учителя. Противники обменялись задачами и сошлись в поединке на глазах у любопытствующей толпы в саду братьев Дзокколанти в Милане 10 августа 1548 года. К несчастью для Тартальи, Феррари лучше него разбирался в решениях уравнений третьей и четвертой степени и использовал их при составлении задач, чтобы разгромить соперника. Он задавал такие вопросы:

> Есть куб, сумма ребер и граней которого равна пропорциональному отношению этого куба к одной из его граней. Каков размер куба?

и еще:

> Найдите два таких числа, которые при сложении дают столько же, сколько куб меньшего из них, прибавленный к произведению утроенного меньшего числа и квадрата большего числа, а сумма куба большего числа и утроенного квадрата меньшего в 64 раза больше суммы этих чисел.

и еще:

> Есть прямоугольный треугольник, в котором построена высота, и сумма одной из сторон с противоположной частью основания дает 30, а сумма другой стороны с другой частью основания дает 28. Какова длина одной из сторон?

Тарталья решил не все задачи. Он покинул Милан с позором. Он все равно получил должность в Брешии, но занимал ее лишь полтора года, после чего разочарованные работодатели перестали ему платить. Феррари, напротив, стал местной знаменитостью и сам занял теплое местечко: он стал старшим налоговым инспектором императора Священной Римской империи в Милане. Хотя практического применения такой алгебре по-прежнему не находилось, алгебраические навыки Феррари — которые он вполне мог больше и не применять — позволили ему разбогатеть и отойти от дел.

Давайте сделаем паузу и подумаем, что мы сами испытали бы, если бы нам предложили решить кубическое уравнение пониженной степени $x^3 + 6x = 20$. По плечу ли оно вам? Кардано в своем "Великом искусстве" предложил такое решение:

> Возведите в куб одну треть коэффициента при x; добавьте получившееся число к квадрату половины постоянной уравнения; извлеките из всего этого квадратный корень. Далее повторите описанное и прибавьте к одному из результатов число, уже возведенное в квадрат, а из другого вычтите половину того же… Затем отнимите кубический корень первого от кубического корня второго, и останется значение x.

Довольно сложно, правда? Но в реальности это просто геометрия. Сначала Кардано представляет огромный куб, который делит на шесть блоков и кубов поменьше, — по сути, он занимается достройкой квадрата в 3D. Он знает размеры каждой из фигур и знает, что сумма их объемов дает объем большого куба, который они составляют. Он приводит это к квадратному уравнению и получает ответ[17]: $x = 2$. Как видите, это легко проверить. Именно поэтому математические дуэли так нравились зрителям: было сразу понятно, преуспели ли противники в своих трудах.

В "Великом искусстве" Кардано хотел представить универсальное решение, которое подходило бы для любого кубического уравнения. Но это было нелегко, поскольку ему приходилось прорабатывать множество вариантов. Например, по отдельности разбирать такие вариации, как $x^3 + mx = n$ и $x^3 + n = mx$. Даже имея лишь базовую математическую подготовку, сегодня мы перестроили бы эти уравнения так, чтобы они повторяли друг друга по форме при отрицательном значении m или n. Однако на том этапе математической истории еще не было устоявшейся формы для записи уравнений в разных формах, а сама идея существования отрицательных чисел по-прежнему вызывала дискомфорт. Потому Кардано и разбирал два этих уравнения в разных главах (и потому Тарталья и разработал разные решения для $x^3 = px + q$ и $x^3 + q = px$).

Но в конце концов хитрость в стиле достраивания квадрата и подмены x целым выражением позволила вывести универсальное решение для уравнения, которое сегодня мы записали бы так:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Благодаря описанной хитрости оно превращается в уравнение, которое можно решить с помощью формулы Кардано для кубического уравнения пониженной степени. В "Великом искусстве" подробно описывается, как Феррари нашел подобный способ решения уравнений четвертой степени — с x^4.

Что насчет уравнения пятой степени, в котором фигурирует грозный x^5? Кардано и Феррари предположили, что привычный фокус с подстановкой выражения на место x поможет решить и его. Но в итоге они признали, что не сумели найти подходящий метод. И правильно сделали, когда отказались от дальнейших его поисков. Почти триста лет спустя, в 1824 году, норвежский математик Нильс Абель доказал, что решить такое уравнение методом подстановки невозможно.

Но уравнение пятой степени все же поддается решению. Для этого нужны так называемые эллиптические функции (или эллиптические кривые), которые сегодня применяются в криптографии — науке о хранении тайн. Мы поговорим об этом позже, а пока давайте рассмотрим, где в наши дни находится применение квадратным, кубическим и уравнениям четвертой степени. На первый взгляд, это продолжение труда Тартальи. Но если Заика описывал кривые траектории полета пушечных ядер, то современные новаторы чаще занимаются изгибами физических тел, например автомобиля “Форд Таурус”. И здесь мы видим, как алгебра по-прежнему помогает решать некоторые из самых насущных проблем продвинутого технологического общества.

Изгибы мира

В 1974 году галлон бензина в США стоил около 40 центов. В 1981 году тот же объем бензина стоил уже 1 доллар 31 цент. Американские автопроизводители поняли, что им нужно вмешаться в ситуацию, если они хотят спасти автомобильный транспорт. Но как? Пересмотреть конструкцию двигателей, чтобы сделать их более производительными, оказалось слишком сложно. Гораздо проще было повысить аэродинамику автомобилей.

Первым в полной мере аэродинамическим американским семейным автомобилем стал “Форд Таурус”, выпущенный в 1986 году. Сегодня в это сложно поверить, но американцам тех времен он казался совершенно непривычным — настолько непривычным, что в 1987 году Пол Верховен даже сделал его машиной Робокопа в своем фильме о том, как полиция будущего проводит эксперимент по созданию киборга. “Таурусу” уже стукнул год, но внешне он все еще оставался автомобилем будущего. Почему? Все дело в изгибах. Американские автомобили, выходившие до “Тауруса”, точнее всего будет назвать угловатыми. Прямые линии их кузова облегчали производство, а то, что угловатость повышала сопротивление воздуха и снижала топливную эффективность, никого не беспокоило: бензин стоил дешево. По другую сторону Атлантики, однако, все было иначе.

"Форд Таурус" 1986 года
IFCAR, изображение из открытого источника, via Wikimedia Commons

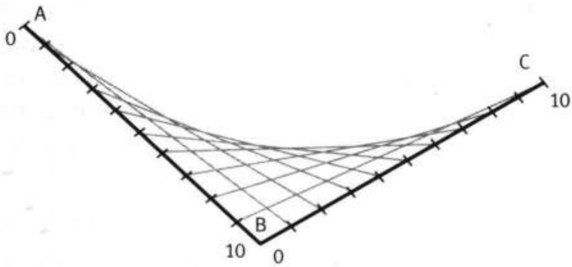
Из-за особенностей налогообложения топливо в Европе всегда стоило дороже. В 1970-х годах цены на нефть росли, и европейцам приходилось пускать все больше средств на эксплуатацию своих автомобилей. Но они нашли частичное решение проблемы и стали производить автомобили с обтекаемым аэродинамическим кузовом.

К счастью для *Ford*, в компанию недавно перешел работать американский дизайнер Джек Телнак, который прежде работал в Европе. Находясь по другую сторону океана, он наблюдал за эволюцией топливосберегающих изгибов, которые мы сегодня считаем отличительной чертой европейского автомобильного дизайна.

Инженеры *Ford* не могли просто ввести уравнение нужной кривой в формовочный станок. Не могли они и загрузить в компьютер тысячи точек, чтобы построить каждую кривую в проекте, — это было бы крайне неэффективно. Им необходимо было найти другой способ создания требуемых кривых. Но Телнак знал, что к началу 1960-х годов два французских автомобильных инженера-конструктора уже решили эту проблему.

Хотя эти кривые назвали кривыми Безье, их, пожалуй, стоит считать совместной разработкой Пьера Безье из *Renault* и Поля де Кастельжо из *Citroën*. Большую часть математических расчетов провел де Кастельжо. Но в машинном зале новую разработку первым применил Безье, и именно он дал другим возможность последовать их примеру.

Чтобы понять, что такое кривая Безье, представьте два прямых отрезка, формирующих две стороны треугольника. Постройте их в любом месте листа под любым углом друг к другу. Назовите один AB, а другой — BC. Теперь разделите отрезки на равное число секций — скажем, на десять. Пронумеруйте их от A = 0, чтобы B = 10, а затем от B = 0, чтобы C = 10. Теперь постройте прямые, соединяющие 1 с 1, 2 с 2 и так далее.



Кривая Безье, построенная из прямых

Видите кривую? Вообще-то ее там нет, ведь вы построили одни прямые. Но каждая из ваших прямых — “касательная” к кривой, то есть прямая, всего в одной точке соприкасающаяся с кривой, точная форма которой определяется положением A, B и C относительно друг друга.

Безье назвал точку B контрольной, поскольку при сдвиге B получается другая кривая. При одной контрольной точке кривая всегда задается квадратным уравнением, содержащим значения A, B и C. Если добавить еще одну контрольную точку, получится кривая, которая задается кубическим уравнением. Если добавить третью — кривая четвертой степени. Если вам не хочется добавлять контрольные точки, можно добавлять кривые. Подобно тому, как Кардано и Феррари нашли решение уравнения четвертой степени, приведя его к кубическому уравнению (а кубическое — к квадратному), вы можете построить кубическую кривую Безье, установив, как взаимодействуют две квадратные кривые, а кривую четвертой степени — с помощью двух кубических.

Обтекаемый "Форд Таурус" был обласкан критиками и — что важнее, учитывая катастрофическое падение позиций *Ford* на автомобильном рынке, — стал отлично продаваться. Напрашивается вполне резонный вывод о том, что алгебра спасла американскую автомобильную промышленность[18].

Так на свет появились не только современные аэродинамические автомобили. Пользуясь этим методом для построения любых кривых, можно проектировать мосты, здания и самолеты. Впрочем, он также находит применение и в менее очевидных сферах, например в дизайне шрифтов. Эта книга — вне зависимости от того, бумажный у вас экземпляр или электронный, — существует благодаря алгебре. Используя шрифт формата *TrueType*, например *Times New Roman*, *Helvetica* или *Courier*, вы строите квадратные кривые Безье, которые определяют, где размещать чернила или пиксели[19].

Пожалуй, не стоит удивляться, что дизайнеры применяют алгебру для проектирования объектов не только в реальном мире, но также и во множестве виртуальных. Некоторые расчеты для них вообще не отличаются от необходимых в реальности: так, дизайнерам видеоигр приходится использовать в программах уравнения второй, третьей и четвертой степеней, чтобы их виртуальные миры — и оружие, которое в них используется, — имели реалистичные характеристики. Архитекторы следуют алгебраическим правилам, чтобы не расходовать пространство впустую и оптимизировать пропорции помещений. Предприниматели применяют квадратные уравнения для оптимизации ценообразования и учета при запуске новых продуктов. Со всем этим, вероятно, справились бы и Кардано, Тарталья и Феррари — и многое теперь автоматизировано с помощью компьютерных программ, — но алгебра остается с нами, определяет облик окружающей нас среды и наши впечатления от взаимодействия с миром.

Теперь давайте погрузимся немного глубже, поскольку алгебра также помогает с организацией вещей за рамками наблюдаемых характеристик и поведения отдельных элементов мира. Оказывается, скрытые структуры нашей Вселенной тоже можно описать алгебраически — и потому физиков, как древних греков, восхищает идея о том, что наша Вселенная имеет математическое ядро. Эта область математики называется довольно странно — "абстрактная алгебра", словно бы алгебра, с которой мы уже познакомились, недостаточно абстрактна. Справедливости ради отмечу, что иногда ее называют *современной* алгеброй. Но даже это определение кажется немного подозрительным. В конце концов, начало ей положил молодой француз Эварист Галуа, умерший еще в 1832 году.

Галуа, Нётер и алгебра Вселенной

"Не плачь, Альфред! Мне нужна вся моя смелость, чтобы умереть в двадцать лет!" Считается, что такими были последние слова Галуа, адресованные его младшему брату. Он был смертельно ранен из пистолета на дуэли. Его противник, похоже, соперничал с ним за внимание девушки по имени Стефани — по мнению историков, это, скорее всего, была дочь человека, у которого Галуа снимал квартиру.

Галуа похоронили в общей могиле на кладбище Монпарнас в Париже. Он погиб в самом расцвете своей жизни, но все равно успел обрести вечную славу. Теперь Галуа считается отцом теории групп — особого раздела математики, который напоминает зоологическую классификацию алгебраических операций. Подобно биологам, помещающим ряд организмов в одно множество млекопитающих, грибов или бактерий, математики распределяют алгебраические выражения по группам на основе общих свойств: например, в одну группу попадают уравнения, которые, как квадратное, решаются универсальным способом.

Биологическая классификация помогла нам взглянуть на вещи шире: именно она дала нам теорию эволюции путем естественного отбора. Алгебраическая классификация ничем не отличается. Она позволяет нам постигать тайны Вселенной — например, выяснять состав “зоопарка элементарных частиц”, то есть обширного множества частиц, из которых состоят все вещества. Начатое еще Галуа, это дело было завершено в 2012 году, когда в ЦЕРН в Женеве был открыт бозон Хиггса.

Чтобы понять, как алгебра получает такую значимость, — и понять это мы попробуем лишь на самом базовом уровне — представим, что мы решили кубическое уравнение и нашли три корня: a, b и c. Теперь попробуем определить, в каких отношениях они находятся друг с другом. Мы можем построить выражение вида:

$$(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$$

и попереставлять корни с места на место. Заменим a на b, b на c, а c на a. Получим:

$$(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$$

По сути, это эквивалентно изменению порядка выражений в скобках. Произведите расчеты, и получите тот же результат.

Что, если поменять местами только a и b? Получим:

$$(b-a)\,(a-c)\,(c-b)$$

Это эквивалентно умножению исходного выражения на –1: положительные члены становятся отрицательными и наоборот. Следовательно, если я произведу такую трансформацию и возведу результат в квадрат, у меня получится такой же ответ, как если бы я возвел в квадрат результат исходного выражения (как сказал Брахмагупта, вводя отрицательные числа, минус, умноженный на минус, дает плюс).

Галуа сделал ряд общих наблюдений такого типа, и это позволило ему сгруппировать алгебраические выражения определенного вида, выделив группы на основании того, как корни уравнений относятся друг к другу при множестве разных преобразований. Может показаться, что достижение его невелико, но оно стало настоящим столпом математики.

Очевидно, Галуа понимал ценность своего открытия, поскольку, как гласит легенда, ночью накануне дуэли он привел в порядок свои бумаги, чтобы они перешли к его другу Огюсту Шевалье[20]. Галуа извинился за скомканность записей. “Надеюсь, впоследствии найдутся люди, которые увидят смысл в том, чтобы расшифровать эту мешанину”, — написал он. Его скромность лишь обостряет горечь из-за его ранней смерти.

Ценность идей Галуа в том, что преобразования служат абстрактной математической связью с физической характеристикой симметрии. Так, перестановка *a* и *b* в приведенном выше примере подобна перемене левой и правой сторон в зеркальном отражении.

Симметрия предполагает, что можно что-то изменить и проверить, меняется ли при этом внешний вид или поведение того, что вы только что изменили. Если перемен не происходит — перед вами симметрия. Если что-то изменилось, симметрию можно назвать нарушенной. Простые примеры можно найти в геометрии: квадрат обладает зеркальной симметрией по диагонали. Если вы приставите плоское зеркало к его диагонали, то увидите точно такой же квадрат. Квадрат также имеет четыре вращательных симметрии, каждая из которых достигается при повороте фигуры на 90°. Если повернуть квадрат всего на 45°, он будет выглядеть иначе (скорее как ромб): симметрия нарушена.

В физике частиц, где симметрии описываются с помощью абстрактной алгебры, происходящие изменения немного сложнее. Так, можно заменить частицу на античастицу. Если в их взаимодействиях не заметно разницы, перед вами симметрия. Хороший пример — изменение заряда двух электронов на противоположный. Два позитрона отталкивают друг друга точно так же, как и два электрона. Это зарядовая симметрия.

Симметрии лежат в основе наших представлений о физическом мире, поскольку многие процессы в физике можно описать языком отражений, вращений и простых перестановок. Такие симметрии могут быть пространственными или временными, а также могут возникать в физических свойствах, таких как электрический заряд. Симметрия тесно связана с законами сохранения, которые гласят, что определенные характеристики физической системы не могут просто бесследно исчезнуть. Взять, к примеру, закон сохранения энергии. Вероятно, из школьных уроков физики вы помните, что энергию можно преобразовывать из одной формы в другую — скажем, из кинетической в потенциальную, закатывая валун на вершину холма, — но она не исчезает из Вселенной просто так. Часть ее может рассеяться, как звук, с которым валун скатится с другой стороны холма, а часть преобразуется обратно в кинетическую энергию валуна, а также земли и камней, сдвигаемых им с места. И все же она никуда не исчезнет. Это объясняется симметрией в законах физики: если не вдаваться в детали, эти законы симметричны во времени и не меняются от минуты к минуте и даже от тысячелетия к тысячелетию. Другие симметрии обусловливают существование других законов сохранения. Так, орбиты планет вокруг Солнца имеют вращательную симметрию, связанную с законом сохранения момента импульса. Впрочем, этих идей не найти в трудах Галуа. Их появлением мы обязаны уже выдающемуся математику Эмми Нётер.

Я потрясен тем, что Амалия Эмми Нётер — первая женщина, с которой мы встречаемся лицом к лицу на страницах этой книги. Женщинам в математике приходилось преодолевать такие предубеждения, что на математической карьере Нётер едва не был поставлен крест. Ее отец преподавал математику в университете, и оба ее родителя хотели, чтобы все их дети тоже занялись наукой. Но братьям Нётер пришлось гораздо легче.

Эмми Нётер родилась в Эрлангене, в Германии, в 1882 году. Она была невероятно умна, но когда ей пришло время поступать в университет, оказалось, что дорога туда ей закрыта. Университет Эрлангена, где работал ее отец, еще не принимал женщин. В конце концов она смогла получить высшее образование, но снова оказалась в тупике: ни один университет не готов был предложить ей оплачиваемую должность, чтобы она могла заниматься исследованиями или преподавать математику.

Нётер так любила свой предмет, что семь лет преподавала в Эрлангене бесплатно. Продвинуться дальше ей удалось лишь тогда, когда о ее блестящих способностях узнали ведущие немецкие математики Давид Гильберт и Феликс Клейн, которые предложили ей позицию в своем математическом институте при Гёттингенском университете. Четыре года Нётер работала ассистенткой Гильберта и не получала жалованья. Лишь в 1922 году ей наконец удалось занять в Гёттингене оплачиваемую должность. К тому времени она уже совершила ряд своих величайших открытий, которые, пожалуй, можно причислить к величайшим достижениям во всей истории математики[21].

Если вам хочется понять, насколько именно Нётер была хороша в математике, вот факты. После того, как в пятьдесят три года она безвременно скончалась из-за осложнений после хирургической операции, Эйнштейн написал колонку для *The New York Times*, в которой заявил, что "фройляйн Нётер была величайшим творческим гением математики, явившимся миру с тех пор, как женщины получили доступ к высшему образованию"[22]. Впрочем, это унизительный комплимент: можно смело сказать, что Нётер была величайшим алгебраистом своего времени в принципе — как среди женщин, так и среди мужчин. Более того, Эйнштейн это знал: когда у него возникли затруднения с одной из частей его общей теории относительности, с которой ему помогла Нётер, он написал Давиду Гильберту и попросил его "поручить мисс Нётер объяснить [ему] это"[23].

Теорема Нётер позволяет превратить алгебраические группы Галуа — и многое, что было впоследствии открыто в алгебре, — в сложную систему классификации и категоризации. Такое впечатление, что остальные ученые занимались своими узкими областями науки, а Нётер сумела понять, как объединить их вклады в науку, чтобы их открытия дополняли друг друга, и как соткать полотно из отдельных нитей. Это имело важные следствия и для других областей, например для топологии — математики, описывающей изменения свойств геометрических фигур при растягивании и скручивании. В лекции, прочитанной в 1996 году, немецкий тополог Фридрих Хирцебрух отметил, что Нётер едва коснулась этой области, но "опубликовала полуфразу и произвела фурор"[24].

Абстрактная алгебра Нётер позволяет нам с помощью уравнений искать новые законы, частицы и физические силы. Симметрия не нарушается без причины, и обычно причиной становится сила. Так физики обычно и узнают о существовании неизвестных прежде сил природы. Например, в начале 1960-х годов физик Марри Гелл-Ман изучал симметрии в абстрактной алгебре, описывающей атомное ядро. Он обнаружил, что наблюдаемые симметрии позволяют сделать вывод о существовании других элементарных частиц в дополнение к протонам и нейтронам, которые содержатся в ядре атома. В 1964 году он опубликовал статью, в которой предсказал существование пока не обнаруженных частиц, из которых состоят протоны и нейтроны. Он назвал их словом, которое приглянулось ему в "Улиссе" Джеймса Джойса. Вскоре экспериментаторы обнаружили “кварки” Гелл-Мана, а сам он впоследствии получил Нобелевскую премию.

Кроме того, благодаря абстрактной алгебре Нётер Питер Хиггс с коллегами в 1960-х годах заметили, что в глубинах физики частиц должна скрываться еще одна пока неизвестная частица. Неуловимый бозон Хиггса был наконец открыт в 2012 году, и Хиггс также стал нобелевским лауреатом.

Бозон Хиггса оказался последним кусочком в мозаике физики частиц. Оказывается, весь набор частиц можно выявить путем изучения симметрии и законов сохранения в соответствии с абстрактной алгеброй Нётер. Может, сначала алгебра и была лишь инструментом для расчета налогообложения, но теперь благодаря ей мы знаем, как устроена Вселенная.

Как получить желаемое

Рассмотрим область алгебры, которой вы, возможно, пользовались буквально сегодня. Эта история начинается в 1998 году, когда два студента-информатика из Стэнфордского университета опубликовали статью, во введении к которой было написано:

> Автоматизированные поисковые системы, основанные на сопоставлении ключевых слов, обычно выдают слишком много низкокачественных совпадений. Хуже того, некоторые рекламодатели пытаются привлечь внимание людей, принимая меры, направленные на дезориентацию автоматизированных поисковых систем. Мы создали масштабную поисковую систему, которая решает многие проблемы существующих систем[25].

Авторы статьи, Сергей Брин и Лоуренс Пейдж, назвали свою систему *Google*, “потому что часто так ошибочно называют гугол, или 10^{100}, и такое название прекрасно соответствует нашей цели создавать поисковые системы огромных масштабов". Совсем скоро их поисковая система огромного масштаба завоевала мир. Уже в 2006 году слово *google* вошло в "Оксфордский словарь английского языка" как глагол, обозначающий распространенный способ поиска информации.

В алгоритме *PageRank*, используемом *Google*, нашлось великолепное применение так называемой линейной алгебре[26]. Это алгебра, в которой переменные (в нашем случае — сведения об интернет-страницах) обрабатываются без возведения в степень — вторую, третью и так далее. Уравнение $y = 4x$ относится к линейной алгебре, а $y = x^2$ — нет.

Линейная алгебра не нова. Нам известны китайские тексты по линейной алгебре, написанные еще до наступления второго тысячелетия до нашей эры. В них показано, как решать системы уравнений, в совокупности содержащие все данные, необходимые для установления отношений между переменными. Такие системы складываются в то, что в китайских текстах называлось "волшебными квадратами". В современной линейной алгебре используются всевозможные технические термины, от которых вам может стать не по себе: векторы и матрицы, собственные векторы и собственные числа. Говорят даже, что своим могуществом *Google* обязан "собственному вектору ценой в 25 миллиардов долларов". Но нам достаточно знать, что уравнения линейной алгебры, по сути, представляют собой математические таблицы, где с помощью единственной операции может обрабатываться гигантский массив данных.

Алгоритм *Google* — лишь одно из множества прекрасных применений линейной алгебры, и можно с уверенностью сказать, что, не будь ее, нынешний мир не был бы таким, каким мы его знаем. Сегодня мы прекрасно справляемся с одновременной обработкой множества переменных и без труда определяем отношения между ними, чтобы оптимизировать конкретный результат их действий. Это не только позволяет нам осуществлять поиск в *Google* — тот же принцип лежит в основе работы авиакомпаний: расписания полетов, графики эксплуатации воздушных судов, маршруты самолетов, состав экипажей, назначение выходов на посадку, графики профилактического обслуживания, планирование меню, планирование обучения, оформление и обработка багажа — все это задачи на оптимизацию, решаемые с помощью линейной алгебры*. Не забудьте поблагодарить линейную алгебру, когда в следующий раз получите питание на борту[27].

FedEx и UPS применяют линейную алгебру для поиска оптимальных программ прокладывания маршрутов для доставки отправлений. Не стоит забывать также о шопинге и его логистике: как осуществляется доставка товаров в ваш супермаркет и как продукты попадают к вам домой, если вы покупаете их онлайн? И здесь на помощь приходит линейная алгебра. Ей также находится применение в здравоохранении: расписание операций, назначение хирургов, планирование визитов к врачам и доставка медикаментов — это современные вариации задачи об организации копейщиков и алебардистов, находящихся у вас в распоряжении. Даже то, каким образом результаты поиска в *Google* выводятся на экран вашего компьютера, — логистика маршрутизации информации в интернете — определяется линейной алгеброй. Да, сегодня все это по большей части уже прописано в программах, подобно тому как тригонометрия запрограммирована в системах автоматизированного проектирования, которыми пользуются архитекторы. И все же ваша повседневная жизнь не обходится без линейной алгебры. Беспрецедентной легкостью современной жизни мы во многом обязаны математикам, которые нашли алгебраические решения почти для всех наших логистических проблем.

Можно даже сказать, что только благодаря линейной алгебре человечество и сумело дожить до XXI века, не уничто-

* Этот раздел математики называется линейным программированием. — *Прим. науч. ред.*

жив себя. Холодная война — 44 года опасного, но все-таки по большей части мирного противостояния США и СССР — во многих отношениях может считаться детищем этой области математики.

По окончании Второй мировой войны, когда отношения между США и СССР свелись к тихим угрозам взаимного ядерного уничтожения, математики по обе стороны конфликта посвятили себя поиску путей к тому, чтобы эти угрозы никогда не исполнились. Самым известным из них был Джон Форбс Нэш, о котором написана книга "Игры разума", а также снят одноименный оскароносный фильм с Расселом Кроу. В фильме показано, как Нэш постепенно сходил с ума и какое влияние психическая болезнь оказывала на его семью и карьеру. К несчастью, за кадром остается то, каким образом его труды — и труды множества других ученых — не позволили нам провалиться в бездну полномасштабной ядерной войны.

Возможно, вам знакома фраза "гарантия взаимного уничтожения". Казалось бы, при таком условии избежать ядерной войны несложно: если обе стороны накопят достаточное количество ядерного оружия — которое, кстати, создается с помощью абстрактной алгебры, — никто не захочет наносить первый удар, поскольку ядерный ответ и последующая серия ударов сделают планету непригодной для жизни. Однако на деле все оказывается гораздо сложнее.

Задействованная здесь алгебра входит в область исследований, называемую теорией игр. Несмотря на фривольное название этой сферы, работавших в ней математиков всегда воспринимали всерьез. В эпоху, когда никому не позволялось встречаться с коллегами по другую сторону "железного занавеса", обе стороны понимали, что вероятность взаимного уничтожения снизится, если дать этим математикам возможность поговорить друг с другом. В 1971 году в Вильнюсе, в Литве, состоялась беспрецедентная встреча специалистов по теории игр из Америки, Европы и Советского Союза.

Прошел всего год с момента подписания СССР, США и другими странами Договора о нераспространении ядерного оружия. Все стороны хотели сохранить мир, и для этого им в том числе необходимо было организовать такую встречу для своих математиков[28].

Здесь невозможно описать, какой вклад в математику они внесли. Многие их выкладки настолько сложны, что их подробно не объясняют даже студентам-математикам, пока они учатся на младших курсах. Одни из них связаны с выработкой наилучшего ответа на угрозу при всех смягчающих обстоятельствах. Другие — с оптимизацией объемов ядерных запасов в условиях взаимного недоверия. Третьи позволяют понять, в разработку каких контрмер стоит вкладываться и как именно их применять.

В разные годы над алгеброй гонки вооружений поработало немало математиков, но Джон Нэш стоит на ступеньку выше всех остальных. Дело в том, что он доказал существование знаменитого "равновесия Нэша" — алгебраического способа найти лучшее решение дилеммы в условиях, когда две стороны не доверяют друг другу. В нем задействуется сложная форма линейной алгебры и описывается сценарий, в котором противники оказываются в ситуации, когда ни один из них не может улучшить свое положение. Равновесная стратегия может быть неоптимальной для конкретного игрока, но при этом единственной, в которой ситуация не становится хуже. Равновесие Нэша не удовлетворяет ни одну из сторон, но все-таки ни одна из сторон не собирается ничего предпринимать, поскольку сложившееся положение — меньшее из зол.

Выявив условия для существования равновесия Нэша и описав стратегии, которые позволяют к нему прийти, Джон Нэш получил Нобелевскую премию по экономике и вошел в историю, хотя его вклад и остается недооцененным. Нэш предоставил обеим сторонам конфликта в холодной войне неопровержимое доказательство того, что им следует смириться с прохладной разрядкой и больше не предпринимать никаких шагов. По сути, он сделал мир безопаснее с помощью алгебры. Сдается мне, Никколо Тарталье это пришлось бы по нраву.

Последняя теорема Ферма

В заключение мне хочется заверить вас, что порой даже простейшая на первый взгляд алгебра заводит профессиональных математиков в тупик. Возможно, вы слышали о последней теореме Ферма? Описать ее очень просто, однако на поиск решения у человечества ушло несколько сотен лет.

Французский математик Пьер Ферма был великим ученым, но отказывался публиковать свои работы. После смерти Ферма в 1665 году его сын Самуэль решил собрать все бумаги отца и опубликовать наиболее значимые выводы. Просматривая экземпляр "Арифметики" Диофанта из отцовской библиотеки, Самуэль обнаружил на полях заметку на латыни. В ней говорилось: "Невозможно разложить куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я нашел этому поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него".

Сегодня мы записываем утверждение Ферма следующим образом: в уравнении

$$x^n + y^n = z^n$$

невозможно найти x, y и z при n больше 2, если считать, что корнями могут быть только целые числа, отличные от нуля.

Ферма утверждал, что может доказать различные теоремы, и во множестве других заметок, и математики, изучавшие его бумаги, в конце концов смогли найти все доказательства, за исключением доказательства, связанного с уравнением Диофанта. Так эта задача и стала называться последней теоремой Ферма.

Сразу ясно, что при $n = 2$ у нас получится пифагоров треугольник со сторонами 3, 4 и 5, поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$. Неужели так сложно найти другие корни? Этим вопросом математик Эндрю Уайлс, который в итоге все же доказал последнюю теорему Ферма, задавался еще с 1963 года, когда в 10 лет нашел книгу о задаче в местной библиотеке. "В тот момент я понял, что никогда не забуду об этом, — сказал он. — Я должен был ее доказать"[29].

Уайлс работал над задачей до 1995 года — как одержимый, в одиночестве, в тайне от всех. Теперь он стал знаменитостью в математическом мире, и все-таки даже ему не под силу ответить на один вопрос об этой теореме: правда ли у самого Ферма имелось доказательство, которое оказалось утраченным?

Несомненно, оно отличалось бы от того, которое нашел Уайлс. Математических техник, использованных Уайлсом, во времена Ферма просто не существовало. Следовательно, если у Ферма действительно имелось доказательство теоремы, в нем применялась какая-то математическая хитрость, которую можно было реализовать в XVII веке, но которую впоследствии никто больше не применял. Кажется маловероятным, правда? И все же остальные доказательства, о которых говорил Ферма, нашлись в его бумагах. Почему же это должно оказаться вымышленным?

Во многих отношениях последняя теорема Ферма позволяет составить лишь поверхностное представление о том, насколько сложной может быть алгебра. Математики могут придумать гораздо больше уравнений, чем решить, и поэтому принцип теоретической физики заключается не в том, чтобы *решать* алгебраические уравнения, описывающие взаимодействие сил и частиц во Вселенной, но в том, чтобы находить приблизительные, приемлемые решения. Один из величайших современных физиков Эдвард Виттен однажды назвал квантовую теорию поля, наше основополагающее математическое описание Вселенной, “научной теорией XX века, в которой используется математика XXI века”[30]. Что он имел в виду? Он хотел сказать, что остаток этого века нам, возможно, придется потратить на разработку алгебраических методов, необходимых для того, чтобы мы смогли понять устройство Вселенной. Может, алгебра и известна человечеству на протяжении уже тысяч лет, но развитие ее еще не закончено.

Учитывая, насколько она полезна, это, пожалуй, неплохо. Как мы увидели, алгебра уже дала нам способ решить множество логистических задач — от расстановки палаток для размещения батальона до разработки алгоритма для поддержания мира во всем мире. Она подобна фонарю, который помогает нам в наших поисках, — и искать мы можем хоть неуловимые частицы, хоть документы на веб-сервере. Алгебра решает вопросы налогообложения, дает нам возможность слетать в отпуск и показывает, по каким орбитам движутся небесные тела. Как знать, что принесет нам алгебра будущего, если мы продолжим ее изучение?

Хотя нам и хочется это выяснить, мы можем оценить и готовый продукт, называемый математическим анализом. Мы с поразительной быстротой изобрели, развили и применили эту область математики, пересмотрев свой метод работы с вещами, которые движутся и меняются. По сути, он сформировался всего за столетие и привел к революциям в науке, медицине, финансах и — конечно — военном деле. Можно даже сказать, что математический анализ сыграл решающую роль во вступлении США во Вторую мировую войну. Впрочем, как мы увидим, математический анализ с самого своего зарождения находился на передовой множества битв.

Глава 4
Математический анализ
История инженерии

Споры о том, кто изобрел математический анализ, не утихают по сей день, но сомнений в том, что он изменил мир, ни у кого не возникает. Подчинив себе бесконечно большое и бесконечно малое, математический анализ привел к вступлению США во Вторую мировую войну и стал двигателем развития всемирной финансовой системы. Он также открыл возможности для строительства городов и мостов и для создания климатических прогнозов. Его ценность понятна: он позволяет нам предсказывать то, что кажется непредсказуемым. Немало людей заметило это и нашло ему применение. Писатель Лев Толстой, конструкторы истребителя "Спитфайр", ученые-медики, сдержавшие эпидемию ВИЧ, и сам Альберт Эйнштейн — вот лишь некоторые из тех, кто летал на крыльях математического анализа.

В июле 1940 года Институт Гэллапа поинтересовался у американских граждан, готовы ли они поддержать вступление США в войну против Германии и Италии. 86% ответили отрицательно. К сентябрю, даже после первого призыва в армию в мирное время, эта цифра снизилась до 48%[1]. Что же узнали американцы за период с июля по сентябрь? То, что Гитлера нельзя считать неуязвимым[2].

Они узнали об этом в ходе битвы за Британию, которая гремела в небесах над Англией и Ла-Маншем в августе и сентябре. Королевские ВВС так эффектно противостояли немецкому люфтваффе, что американский журналист Ральф

Ингерсолл совершил опасное путешествие через Атлантику в Лондон, чтобы выяснить, что происходит на месте событий. Вернувшись домой, он написал, что увидел "гражданское население, которое держалось, несмотря на почти постоянный, беспрерывный ужас, только благодаря практически невероятным отваге и вере". Ингерсолл превозносил британцев до небес:

> Недаром Адольф Гитлер неистовствует из-за безрассудства британцев. Такому трусу, как он, наверняка непросто понять, откуда в них взялась такая смелость. Понять ее вообще крайне сложно. Но отрицать невозможно. Лондонцы продержались, не поддаваясь панике, изо дня в день хоронили погибших и перевязывали раненых, изо дня в день занимались своими делами, разгружали суда в хаосе разрушенных бомбардировкой доков, открывали магазины, тушили пожары, восстанавливали телефонные линии и водопроводные магистрали, расчищали улицы, работали на заводах и фабриках[3].

В конце концов, написал он, они пришли к победе, которая не забудется никогда. "Битва, которая состоялась в небе над Лондоном с 7 по 15 сентября, вероятно, войдет в историю как не менее значимая, чем битвы при Ватерлоо и при Геттисберге", — отметил Ингерсолл. Впрочем, он почти наверняка не понял, что победу в этой битве британцам принес математический анализ.

Математический анализ — это область математики, которая изучает вещи в динамике. Что бы вам ни хотелось спланировать — будь то финансовая прибыль, мост, миссия на Марс, военный механизм или прогноз на будущее планеты, — без математического анализа вам не обойтись. Когда вас знакомил с ним учитель математики, он, вероятно, начал с рассказа об Исааке Ньютоне и движении планет. Мы, однако, начнем с Поппи Хьюстон и движения самолета, а именно — истребителя "Супермарин Спитфайр".

В 1931 году британская авиастроительная компания *Supermarine* имела множество идей, но была стеснена в средствах. Главным образом она производила гидросамолеты и заработала безупречную репутацию, дважды подряд победив в престижном состязании гидросамолетов за обладание кубком Шнайдера. К несчастью, британское правительство только что прекратило ее финансирование.

В тот период шла Великая депрессия, и премьер-министр Рамсей Макдональд расставлял приоритеты иначе: у него не было денег, чтобы вкладываться в разработку сверхбыстрого однокрылого самолета по проекту *Supermarine*. И здесь в игру вступила леди Хьюстон — самая богатая женщина Англии.

Поппи Хьюстон родилась в Ламбете на юге Лондона в 1857 году и происходила из рабочего класса. Некоторое время она танцевала в кордебалете и привлекала внимание многих состоятельных мужчин. Она трижды выходила замуж, и двое ее мужей к 1931 году уже умерли, оставив ей немалое наследство. Время от времени она находила своим деньгам хорошее применение. Например, именно она внесла залог за суфражистку Эммелин Панкхёрст, чтобы вызволить из тюрьмы. Услышав, что *Supermarine* больше не может участвовать в кубке Шнайдера, она пришла компании на помощь.

Леди Хьюстон была вспыльчива. Она разорвала завещание одного из мужей, когда тот сообщил, что после смерти оставит ей 1 миллион фунтов. Эта мизерная сумма, сказала она, заставляет ее чувствовать себя ненужной, и после этого заявления муж увеличил ее наследство до 5 миллионов фунтов. Пожертвование в адрес *Supermarine* — 100 тысяч фунтов, что сегодня равнозначно нескольким миллионам, — по словам леди Хьюстон, не стоило считать великодушным жестом благотворительности. Не пыталась она и завоевать авторитет, став спонсором компании. Она хотела сберечь британский военный потенциал. Осудив скупость правительства, она возмущенно заявила, что "каждый истинный британец продаст последнюю рубашку, но никогда не допустит, чтобы Англии оказалось не по средствам себя защитить"[4].

Деньги леди Хьюстон пошли на постройку самолета "Супермарин S6". На базе этого гидросамолета с эллиптическим крылом после замены поплавков на шасси и внесения ряда других изменений был спроектирован легендарный "Супермарин Спитфайр", выигравший битву за Британию.

Главный конструктор "Спитфайра" Реджинальд Митчелл, похоже, был сделан из того же теста, что и леди Хьюстон. Услышав название, которое руководство выбрало для нового самолета, Митчелл назвал его "чертовски глупым". При испытании экспериментальных образцов он предупредил летчика о склонности своих коллег давать непонятные советы. "Если кто-то вздумает сказать вам об этом самолете что-то столь чертовски сложное, что вы ничего не поймете, послушайте меня: просто действуйте", — сказал он[5]. Пожалуй, еще более известной стала его презрительная ремарка о перфекционистском подходе к форме крыльев "Спитфайра". "Мне плевать, эллиптические они или нет!" — взорвался он в разговоре с Беверли Шенстоуном — родившимся в Канаде авиаконструктором, который отвечал за крылья. Шенстоуну, однако, было не все равно, потому что он прекрасно разбирался в математике.

В 1907 году, всего через четыре года после того, как братья Райт совершили первый моторизованный полет, математик Фредерик Ланчестер показал, что у задней поверхности крыла самолета образуются воздушные спирали, или вихри[6]. Они, в свою очередь, создают силу, называемую лобовым сопротивлением, которая тянет крыло назад. Более того, лобовое сопротивление повышается на низких скоростях, а также когда самолет набирает высоту или пикирует. Это значит, что сопротивление влияет на маневренность. Ланчестер отметил, что в результате эволюции у птиц сформировались эллиптические крылья, сужающиеся к концам, и такая форма должна снижать лобовое сопротивление.

Хотя Ланчестер не произвел расчеты, этим занялись другие. К 1918 году авиаконструкторы получили математическое подтверждение того, что на "двойное эллиптическое" крыло, то есть крыло с эллиптической передней и задней кромками, действует наименьшее лобовое сопротивление. Шенстоун знал, что быстрому и маневренному самолету нужны эллиптические крылья[7].

В юности Шенстоун конструировал корпуса лодок в Торонто, в Канаде[8]. Его хобби постепенно переросло в настоящую страсть, а затем и в карьеру, которая после того, как он получил диплом инженера и диплом магистра по конструированию "летающих лодок", привела его в стремительно растущую сферу авиастроения. Уже к двадцати трем годам он получил работу в компании "Юнкерс" в Германии и погрузился в теорию полета. В 1931 году он вернулся в Англию и обнаружил, что, если он и правда хочет конструировать радикально новые самолеты, ему придется погрузиться в математический анализ.

Математика перемен

Математический анализ, пожалуй, стал самой универсальной в применении инновацией за всю историю. Возможно, вы в этом усомнитесь и сочтете, что шире всего из наших изобретений применяется колесо. Но это не так. Колесо имеет весьма ограниченный спектр применения. Математический анализ же применяется к любой колесной технологии (и совершенствует ее). Более того, математический анализ тесно связан с транспортными технологиями, которые пришли на смену колесу, — например самолетами и космическими ракетами. С точки зрения влияния на цивилизацию математический анализ дает фору всему, что только можно представить, включая даже огнестрельное оружие. Так, если нужно рассчитать мощность ядерной боеголовки, применяется математический анализ.

Он вступает в игру всякий раз, когда мы имеем дело с постоянно изменяющимся набором параметров. Взять, к примеру, топливные потребности авиалайнера: объем топлива, необходимый для того, чтобы удерживать самолет в воздухе, меняется по мере расходования топлива и уменьшения массы. А как рассчитать годовой доход со сберегательного счета с изменяемой процентной ставкой? Или рыночную цену зерна при колебаниях спроса и предложения? Во всех этих примерах применяется математический анализ. А можно даже, как Толстой, использовать математический анализ в качестве метафоры. Взгляните на этот сокращенный фрагмент из "Войны и мира":

> Движение человечества, вытекая из бесчисленного количества людских произволов, совершается непрерывно.
> Постижение законов этого движения есть цель истории. Но для того, чтобы постигнуть законы непрерывного движения суммы всех произволов людей, ум человеческий допускает произвольные, прерывные единицы... Историческая наука в движении своем постоянно принимает все меньшие и меньшие единицы для рассмотрения и этим путем стремится приблизиться к истине...
> Только допустив бесконечно-малую единицу для наблюдения — дифференциал истории, то есть однородные влечения людей, и достигнув искусства интегрировать (брать суммы этих бесконечно-малых), мы можем надеяться на постигновение законов истории.

Толстой анализирует историю, обращаясь к законам и языку математического анализа[9]. Так, интегральное исчисление — это сложение крошечных, *бесконечно малых* единиц, или, иными словами, интегрирование их в единое целое. Есть и *дифференциальное* исчисление, в котором мы выводим законы, управляющие *непрерывной* системой, путем оценки того, как изменения влияют на *все меньшие и меньшие единицы*.

Все упомянутые понятия и операции узнал бы даже пионер математического анализа Исаак Ньютон. Как же получилось так, что в произведении, которое считается величайшим романом XIX века, содержатся математические законы, открытые многие столетия назад? Отчасти дело в том, что в близком окружении Толстого был специалист по физико-математическим наукам. Но главным образом — в том, что законы математического анализа обладают едва ли не бесконечной притягательностью для любого, кому нравится размышлять о том, как в мире происходят изменения.

Толстой начинает рассуждения о математическом анализе, знакомя читателя с парадоксом движения, сформулированным Зеноном Элейским. Парадокс Зенона дошел до нас во множестве форм, и Толстой выбрал вариацию с Ахиллесом и черепахой. Ахиллес и черепаха бегут наперегонки, но у черепахи — фора. Ахиллес при этом бежит в десять раз быстрее черепахи. И все же, утверждает Зенон, Ахиллес не сможет догнать черепаху.

Причина проста. Ахиллесу нужно некоторое время, чтобы преодолеть расстояние, отделяющее его от черепахи. За это время черепаха продвигается дальше — всего на одну десятую того расстояния, которое преодолел Ахиллес, — и оказывается вне досягаемости героя. Теперь Ахиллесу нужно преодолеть оставшееся расстояние, но черепаха опять сдвигается вперед. "Принимая все более и более мелкие единицы движения, мы только приближаемся к решению вопроса, но никогда не достигаем его", — отмечает Толстой. Иными словами, Ахиллес, похоже, и правда никогда не догонит черепаху.

Разумеется, это абсурд. Ахиллес, несомненно, догнал бы — и обогнал бы — черепаху. Толстой поясняет, что проблема рассуждений Зенона в том, что в них не учитывается бесконечность. "Только допустив бесконечно-малую величину... мы достигаем решения вопроса". Если разделить этапы непрерывного движения на бесконечно малые фрагменты (то есть на фрагменты, минимально отличные от нуля) и допустить бесконечное количество шагов, Ахиллес все же догонит черепаху. В этом бесконечном делении и кроется суть математического анализа.

К бесконечности

Поскольку понятие бесконечности лежит в основе математического анализа, нам стоит сделать паузу и уделить ему внимание. Важнее всего отметить, что бесконечность — это понятие, а не число. Еще на детской площадке мы убедились в том, что всегда найдется число побольше, чем названное тобой. Бесконечность — это своего рода кодовое обозначение предельной точки последовательности, которая никогда не кончается.

При этом бесконечность остается элементом математического числового ландшафта. Так, существует бесконечное число натуральных чисел (0, 1, 2, 3, 4...). Существует и бесконечное число четных чисел. И бесконечное число нечетных. Уверен, это не покажется вам странным по существу. Странно то, что с математической точки зрения три этих бесконечности одинаковы по размеру, хотя количество натуральных чисел должно равняться сумме всех четных и нечетных чисел.

Впрочем, некоторые бесконечности действительно больше других. Например, в 1874 году математик Георг Кантор доказал, что "действительных" чисел больше, чем натуральных. Иными словами, он продемонстрировал, что бесконечность всех целых чисел и всех дробей, находящихся между ними, больше, чем бесконечность одних целых чисел. Позже он показал, что существуют и бóльшие бесконечности — и их бесконечно много. И после этого у него случился нервный срыв.

Если вас беспокоит бесконечность бесконечностей, пусть утешением вам послужит то, что большинство современников Кантора тоже не хотели и не могли постичь эту идею, —

и причиной его нервного срыва стали не сами выкладки, а неприятие его трудов. Однако, как мы уже говорили, человеку не свойственно мыслить таким образом. Для этого нужно прикладывать невероятные усилия. Если нам от природы недоступен даже счет дальше трех, то готовность упорно идти вперед, к бесконечности бесконечностей, которую невозможно в полной мере постичь, заслуживает восхищения.

Если вы в состоянии продолжить, давайте обсудим еще одну умопомрачительную вещь, прежде чем перейдем к самому математическому анализу: мы можем также идти по бесконечности и в обратную сторону. Как мы упоминали, наряду с бесконечно большим есть и бесконечно малое. Или стремящееся к нулю.

Представьте, что режете огурец на все меньшие и меньшие кусочки. Сначала разрежьте его пополам, затем разделите половину на две четверти. После этого возьмите одну из четвертей и разрежьте ее на две восьмых от целого огурца. Возьмите одну восьмую и продолжайте резать. В конце концов — в теории — у вас получится такой маленький кусочек, что описать его не получится никаким числом, даже дробным. Это и есть бесконечно малое: то, что стремится к нулю, но нуля не достигает. Меньше только пустота. Меньше бесконечно малого лишь сам ноль. Деля на бесконечно малые единицы время, расстояние и что угодно еще, мы работаем в сфере математического анализа.

Первым это попытался сделать немецкий астроном Иоганн Кеплер. Но цель его состояла не в том, чтобы расширить наши представления о звездах. Он хотел сэкономить деньги на собственной свадьбе[10].

В 1613 году Кеплер женился во второй раз. Свадьба состоялась в австрийском городе Линце, и Кеплер договорился, чтобы виноторговец доставил на торжество бочку вина. Но его поразило то, каким образом торговец рассчитал стоимость бочки. Сначала он положил бочку на борт отверстием вверх. Затем он вставил в отверстие палку и протолкнул ее вниз и вбок, пока палка не соприкоснулась с местом, где борт соединяется с днищем. Стоимость вина зависела от того, какая часть палки увлажнится вином в бочке.

Кеплер уже рассчитал орбиты планет, описал различные оптические явления, нашел оптимальный способ вписывать друг в друга сферы и доказал, что снежинкам свойственна гексагональная симметрия. Он сразу понял, что можно найти и более эффективный способ определять стоимость вина. Он отметил, что в длинной узкой бочке вина гораздо меньше, но при этом увлажнить в ней можно такой же фрагмент палки. Сначала он просто вступил в спор с торговцем, но после свадьбы написал на основе этой дискуссии книгу "Новая стереометрия винных бочек", которую опубликовал в 1615 году. В ней он делит бочки на все меньшие и меньшие круглые фрагменты, чтобы рассчитать их объем. Он описывает, как объем складывается из бесконечного числа бесконечно малых фрагментов.

Он также попытался определить оптимальную форму винной бочки — необходимые пропорции для максимизации ее объема. Он составил кубическое уравнение, показывающее, как объем бочки меняется при изменении ее длины (при неизменном диаметре), и определил, что максимальный объем получается в экстремальной точке этой кривой, когда длина составляет $2/\sqrt{3}$ от диаметра. Как выяснилось, почти такая пропорция и использовалась при производстве бочек в Австрии.

В этой истории — весь математический анализ. Во-первых, он позволяет понять, как меняется одна величина при изменении другой величины, связанной с ней. Это могут быть объем бочки и ее параметры, или расстояние, преодолеваемое автомобилем, скорость которого постоянно растет при разгоне из неподвижного состояния, или число людей, заболевающих при постепенном увеличении заразности вируса. Во-вторых, он дает нам возможность находить максимальные и минимальные значения. Какая доза препарата от рака окажется наиболее действенной? Какой объем топлива дает

"Боингу-747" максимальную дальность полета, учитывая, что он расходует топливо на лету, но требует больше топлива на милю, когда его масса больше?

Работа Кеплера о винных бочках, как правило, считается предтечей математического анализа, но и сегодня не утихают споры о том, кто изобрел его на самом деле. Дело в том, что во второй половине XVII века долгий и ожесточенный диспут Исаака Ньютона и немецкого ученого-энциклопедиста Готфрида Лейбница так и не пришел к удовлетворительному разрешению. Впрочем, ни один из этих ученых не начинал с нуля. Даже если не брать в расчет работу Кеплера о винных бочках, в первой половине века Пьер Ферма занимался вычислением площадей под кривыми и находил максимумы и минимумы этих кривых. Как мы увидим, это неотъемлемые компоненты математического анализа, и сам Ньютон утверждал, что пришел к его ранней форме "от предложенного Ферма способа построения касательных". Рене Декарт, услышав это, перевернулся бы в могиле, ведь он сам провел подобную работу и долго спорил с Ферма о том, кто все-таки был первым. Но итальянский математик Бонавентура Кавальери также работал с бесконечно малыми величинами, закладывая фундамент для трудов Лейбница и Ньютона, и тем же занимался английский ученый Джон Валлис, который обобщил свои выводы в книге "Арифметика бесконечного", опубликованной в 1656 году. Иными словами, Лейбниц и Ньютон превзошли на этом поприще прочих, но сами при этом отталкивались от работ множества других ученых. Но хватит споров — пора переходить к делу.

Производные для ВИЧ

Математический анализ, по сути, продолжает алгебру: это набор инструментов для изучения прямых и кривых, задаваемых алгебраическими выражениями. Впрочем, в школе нам не всегда об этом рассказывают, и мы знакомимся с математическим анализом лишь как с рядом правил для выполнения абстрактных задач. Например, мы учимся вычислять кривизну графика по квадратному уравнению, не понимая толком, зачем нам вообще это нужно. Начнем с одного практического применения математического анализа: вычисления тангенса угла наклона, или крутизны, кривой, показывающей распространение смертельной инфекции по человеческому организму. Как выяснилось, в этой сфере математический анализ сыграл важную роль, защитив нас от особенно опасных вспышек вируса иммунодефицита человека (ВИЧ).

Легко забыть, как плохи были наши дела в те годы, когда ВИЧ был максимально опасен. После регистрации первых случаев заражения в 1981 году ВИЧ быстро стал бичом человечества по всему миру. К 2007 году ВИЧ/СПИД убил уже более полумиллиона американцев, но США все еще отказывались признать, что в стране есть люди, зараженные вирусом. В 2009 году в Вашингтоне ВИЧ был более распространен, чем в Западной Африке — на 3%, — и департамент здравоохранения округа Колумбия сообщил, что развивается "тяжелая и генерализованная эпидемия"[11].

Сегодня, чуть более десятилетия спустя, ВИЧ уже не смертный приговор. Люди с ВИЧ живут относительно нормально. Что же случилось? Математический анализ.

В 1989 году Алан Перельсон с помощью математического анализа построил модель поведения ВИЧ в человеческом организме и показал, как вирус борется с иммунной системой человека[12]. Он упростил ситуацию всего до четырех дифференциальных уравнений, описывающих, что происходит в организме при постепенном изменении концентрации вируса в крови в отсутствие лечения. Дифференциальные уравнения предполагают проведение "дифференцирования", лежащего в основе математического анализа. По сути, это определение темпов изменения чего-либо в конкретной точке.

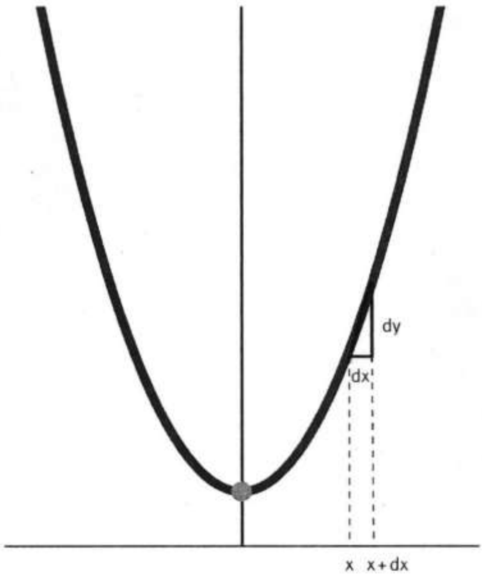
Крутизна меняется при движении по склону

Можно также представить дифференцирование как способ вычислить, какое усилие необходимо для того, чтобы взбежать на холм. Бег вверх по склону, как на рисунке, требует разных усилий на разных участках пути. Сначала склон крутой, а затем становится более пологим. Склон холма — это кривая с рядом разных углов наклона: сначала они велики, но уменьшаются по мере вашего продвижения по холму. Дифференцирование позволяет определить, какое усилие вам необходимо приложить в конкретной точке склона, чтобы взбежать на холм.

Сначала, как правило, берется алгебраическая функция, задающая кривую. Чтобы вычислить кривизну склона, нужно определить “отношение приращения функции к приращению ее аргумента”: вертикальное изменение y (обозначается dy), происходящее при горизонтальном изменении x (dx). Затем кривизна определяется как приращение функции, деленное на приращение аргумента: dy/dx. Иногда это называют производной функции, задающей кривую. Найти производную несложно, когда речь идет о прямых. Но как быть с кривой вроде той, что показана на рисунке?

Эта кривая задается уравнением:

$$y = x^2$$



Крутизна кривой — это приращение функции (*dy*), деленное на приращение аргумента (*dx*)

Как мы видим, кривизна может быть разной в разных точках кривой. Из-за этого вычислять ее в некоторой точке x сложнее, чем работая с прямой, кривизна которой всегда одинакова. Поскольку вычислить кривизну значит определить приращение функции и приращение аргумента, нам нужны две разные точки: приращение аргумента оценивается от одного значения x до другого неподалеку, а приращение функции эквивалентно изменению значения y при движении от одного значения x к другому. Но кривизна кривой в двух разных точках будет немного отличаться. Какое же значение нам нужно?

Для решения этой проблемы применяется фокус, который позволяет свести разницу между двумя точками к минимуму, то есть сделать ее бесконечно малой. Способ не самый простой, но давайте разберемся, что здесь к чему, чтобы понять, откуда взялось общее правило, с которым вас познакомили в школе.

Продолжим работать с функцией $y = x^2$. Мы хотим найти ее производную — кривизну — в некоторой точке x. Чтобы получить горизонтальное “приращение аргумента” для вычисления кривизны, мы пройдем от точки x до соседней точки $x + dx$. Подчеркну: значение dx здесь *крошечное*. Подставив второе значение x в уравнение функции, мы получим $y + dy$, вторую точку приращения функции в промежутке между двумя точками приращения аргумента. Поскольку кривая задается уравнением $y = x^2$ (иными словами, x умножить на x), $y + dy$ равняется $(x + dx)$ умножить на $(x + dx)$.

Далее нам нужно раскрыть скобки, перемножив каждое из слагаемых в первых скобках с каждым из слагаемых во вторых. Получим:

$$y + dy = x^2 + xdx + xdx + dx^2$$

Как помните, dx — это крошечная доля x. Это значит, что dx^2 равняется квадрату этой крошечной доли, а следовательно, эта величина еще меньше. Она настолько мала, что мы даже можем ею пренебречь. Получим вторую точку:

$$y + dy = x^2 + 2xdx$$

Чтобы вычислить кривизну, нужно знать приращение функции от y до $y + dy$. Первая точка у нас задавалась уравнением $y = x^2$, вторая — уравнением $y + dy = x^2 + 2xdx$. Следовательно, приращение функции dy, то есть разница между двумя этими точками, равняется $2xdx$.

Приращение аргумента — это разница между точкой x и точкой $x + dx$. Или dx. Следовательно, приращение функции, деленное на приращение аргумента, это:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xdx}{dx}$$

Два множителя dx в правой части уравнения сокращаются (один делится на другой и получается 1, как при делении 3 на 3 получается 1), и остается:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Иными словами, производная от $y = x^2$ — это $2x$.

Можно пользоваться тем же алгоритмом, чтобы находить производные других кривых, но в конце концов вы выведете общее правило: если

$$y = x^n,$$

то

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

Пусть кривая задается уравнением:

$$y = 3x^2 + 5$$

Чтобы найти производную, берем степень x (в нашем случае — 2) и умножаем ее на число, стоящее перед x. Если в уравнении есть параметр без x (здесь это $+5$), он просто исчезает. Следовательно, производная у нас будет $6x$. Получается, что в точке, соответствующей, например, $x = 5$ по горизонтальной оси, крутизна кривой равна 30.

Есть и другие правила для поиска производных других кривых, и есть способы работать с комбинациями таких уравнений. По сути, однако, все сводится к тому, чтобы определять кривизну в конкретной точке кривой.

Именно так Перельсон поступил со своими дифференциальными уравнениями, которые помимо прочего позволяли по крутизне кривой определить, с какой скоростью меняется концентрация ВИЧ. В его статье содержатся дифференциальные уравнения для Т-лимфоцитов, макрофагов, вируса и антигенов, например:

$$\frac{dV}{dt} = pI - cV,$$

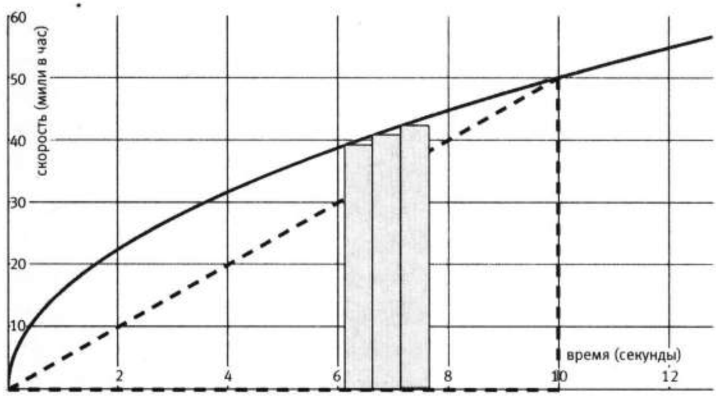
где I — концентрация зараженных клеток, p — скорость, с которой каждая зараженная клетка производит новые вирусные частицы в организме, c — скорость вытеснения вируса иммунной системой человека, а V — концентрация вирусных частиц в крови. Как вы, должно быть, уже догадались, dV/dt — это темп изменения концентрации вируса в крови со временем, который соответствует крутизне кривой, показывающей динамику состояния пациента. Проведя полный анализ, ученые поняли, что существуют разные фазы развития инфекции, которые можно смоделировать математически.

В год выхода статьи Перельсона число подтвержденных случаев заражения СПИДом в США достигло внушительных 100 тысяч, и Конгресс создал Национальную комиссию по СПИДу. Модель Перельсона стала спасительной соломинкой для утопающего. Вскоре Перельсон вместе с врачами и исследователями занялся доработкой модели и уточнением ее параметров. Пожалуй, самым значимым стало его партнерство с Дэвидом Хо, в прошлом физиком, а ныне биологом: с помощью математического анализа они доказали, что комбинация трех “антиретровирусных” препаратов, по сути, избавляет организм от ВИЧ[13]. Предлагалась “тройная терапия”: коктейль из трех антиретровирусных препаратов, который превращал ВИЧ из смертного приговора в поддающуюся решению проблему.

Существует множество примеров дифференциальных уравнений, совершенствующих здравоохранение, от анализа циркуляции крови до оценки темпов распространения рака и эффектов химиотерапии. Но дифференциальные уравнения оказали и более заметное влияние на человеческую жизнь. Когда вы идете или едете по подвесному мосту — например, по Бруклинскому мосту в Нью-Йорке или по мосту Акаси-Кайкё через пролив Акаси в Японии, — вы полагаетесь на умение их конструкторов работать с дифференциальными уравнениями. Одной математики для постройки мостов недостаточно, но начинается все именно с расчетов — как правило, с набора дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие массы, прочности и сопротивления движению, характерных для используемых материалов. Например, инженерам порой приходится рассматривать дифференциальное уравнение, которое описывает, как изменение расстояния между несущими тросами влияет на степень их натяжения, и выбирать конфигурацию, которая минимизирует изменение натяжения при увеличении нагрузки на мост (в таком случае крутизна кривой, описывающей отношение натяжения к нагрузке, должна быть близка к нулю), чтобы сделать конструкцию максимально безопасной. Дифференциальные уравнения находят применение и при проектировании небоскребов: с их помощью рассчитывается, как будет меняться нагрузка на фундамент при увеличении высоты здания и как сильно здание будет поворачиваться и колебаться в шторм. Все находящиеся в зоне вашей видимости здания, дороги, тоннели и мосты, построенные менее ста пятидесяти лет назад, проектировались с использованием математического анализа.

Игра в интегрирование

Дифференцирование — лишь одна сторона медали математического анализа. На другой стороне находится интегрирование — противоположность дифференцированию (хотя,



Методы вычисления площади под кривой

когда его изобрели, об этом никто еще не догадывался). Интегрирование предполагает сложение площадей под крошечными отрезками кривой. Зачем это вообще нужно? Дело в том, что часто это позволяет понять, как ведет себя некая система — будь то экономика страны, спутник на орбите или тропический шторм.

Классический пример обычно проще. Допустим, ваш автомобиль разгоняется из неподвижного состояния. Через 5 секунд он едет со скоростью 36 миль в час, а через 10 секунд достигает скорости 50 миль в час. Если построить график изменения его скорости во времени, он будет примерно таким, как на рисунке.

Теперь допустим, что вы хотите выяснить кое-что новое: как далеко продвинулся автомобиль за 10 секунд. У вас есть только данные о скорости и времени. Но подумайте: скорость измеряется в милях в час, а время — в часах (которые при необходимости можно разделить на секунды). Если перемножить скорость и время, получим:

$$\frac{\text{мили}}{\text{час}} \times \text{часы}$$

Ответом будут одни мили, то есть расстояние. Иными словами, при перемножении вертикальной и горизонтальной величин, как и при вычислении площади квадрата или прямоугольника, мы получаем новые данные. Единственная проблема в том, что график — это не квадрат и не прямоугольник, поэтому вычислить его площадь не так просто. Можно получить примерный результат с помощью прямоугольного треугольника, обозначенного на рисунке пунктиром, но многое тогда останется неучтенным. Лучше разделить область под кривой на ряд прямоугольников (как три серых на рисунке) и сложить их площади вместе. Но даже такое вычисление будет не слишком точным — если только не построить множество прямоугольников ничтожно малой ширины. Под множеством я имею в виду бесконечное множество. А под ничтожно малой шириной — бесконечно малую.

Рассмотрим ситуацию, в которой зависимость y от x описывается плавной кривой вроде той, что описывает скорость автомобиля на рисунке выше. Допустим, мы хотим вычислить площадь под этой кривой между точкой ее пересечения с осью y и вертикальной прямой, проведенной от интересующего нас значения x. Разделим эту область на узкие прямоугольники. Ширина каждого равна dx, а высота — примерно — y. Следовательно, чтобы вычислить площадь каждого из прямоугольников, или dA, нужно y умножить на dx. У нас получится:

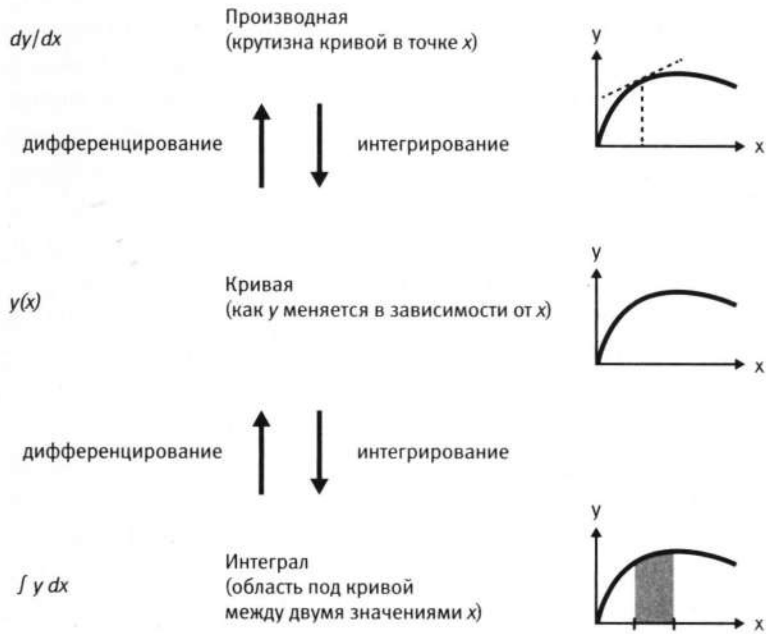
$$dA = ydx$$

Поделив обе части уравнения на dx, получим:

$$\frac{dA}{dx} = y$$

Помните, как мы вычисляли dy/dx, производную, которая описывает, как y меняется при изменении x? Теперь мы работаем с соотношением между этой производной, площадью и значением y, то есть ординатой точки на исходной кривой. Отсюда и вытекает интегрирование, которое, по сути, представляет собой “противоположность дифференцированию”. Лейбниц предложил символ интеграла, или суммы: ∫. Раньше его называли “длинной s”, и он символизировал бесконечное число крошечных операций сложения. Обычно он пишется с dx после интегрируемого, и сразу становится ясно, что речь идет об изменении, которое происходит при изменении x. Интеграл функции $y = ax^n$ — это площадь под ее графиком, и записать его можно следующим образом:

$$\int y\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$



Отношения между кривыми
и их производными и интегралами

C здесь — неизвестная постоянная (как помните, при дифференцировании мы отбрасываем все параметры, не имеющие x, поэтому при обратной операции мы должны вернуть их назад, хотя и как неизвестные).

Как и дифференцирование, интегрирование используется во множестве сфер современной жизни. Например, при прогнозировании погоды и моделировании климата необходимо интегрировать количество солнечного света, поступающего на поверхность Земли. Интегрирование прогнозируемого количества осадков позволяет установить, существует ли опасность наводнения. Инженеры NASA применяют интегралы, чтобы прокладывать траектории полетов: когда одна из первых темнокожих женщин-математиков Кэтрин Джонсон рассчитывала сначала орбиту миссии Алана Шепарда "Фридом-7", состоявшейся в 1961 году, а год спустя — орбиту миссии Джона Гленна "Френдшип-7", она не могла не прибегать к интегрированию. К счастью, она была в нем профи — и ее авторитет был настолько велик, что Гленн даже попросил, чтобы отныне только она проверяла данные с нового электронного компьютера[14].

Муки математического анализа

Сегодня интегрирование — довольно простая операция, которая входит в стандартный инструментарий математика. Тем не менее открыть его оказалось чрезвычайно сложно. Лейбниц и Ньютон пришли к нему с разных сторон. Ньютон так далеко продвинулся в сфере дифференцирования, что даже не пытался объяснить свои приемы современникам. Однажды он довольно высокомерно заявил, что "меньше чем за четверть часа" может вычислить площадь области под любой кривой. Столь головокружительная скорость, добавил он, достигается благодаря "источнику, который [его] питает, но ничего доказывать [он] при этом не [собирается]"[15]. Он рассчитывал, что знание графиков и геометрии поможет его современникам изучить основы этой операции.

Несомненно, многие из них тогда почувствовали себя идиотами. Математический анализ часто обескураживает людей при первой встрече с ним. Хотя мы в состоянии следовать алгоритму и получать верные ответы, идеи, лежащие в основе математического анализа, его производные и требуемый полет фантазии поистине поражают своей сложностью. Архимед сделал первые шаги к решению схожих задач более чем за тысячу лет до того, как Ньютон и Лейбниц предложили свои решения. Такие светила математики, как Декарт и Ферма, сумели разглядеть лишь тень анализа. Чтобы по-настоящему погрузиться в него, нужно представлять себе бесконечное и бесконечно малое. Нужно понимать (а Ферма и Декарт не понимали), что касательная к кривой (прямая, которая касается ее в одной точке) показывает крутизну кривой в точке соприкосновения и позволяет узнать все характеристики этой кривой. Нужно уметь выстраивать длинные цепочки сумм, называемые бесконечными рядами, как умели это и Ньютон, и Лейбниц, а также замечать параметры, исключающие друг друга и открывающие скрытый путь сквозь густой подлесок ваших производных. Неслучайно математический анализ развивался целое тысячелетие.

Сейчас вы, возможно, задаетесь вопросом, кто вообще мог такое придумать. Как правило, это люди, с которыми вам, пожалуй, не захотелось бы водить компанию. Например, Пьер Ферма, который днем работал судьей и адвокатом в судах Тулузы, вечера проводил в уединении от семьи за решением математических задач. Он при этом не стремился поделиться своими открытиями с миром и не опубликовал ни одного из своих выводов. Мы знаем о них лишь потому, что их обнаружили в его записных книжках и дневниках уже после его смерти.

Впрочем, Ферма писал о некоторых своих открытиях другим математикам. Так о нем и услышал Рене Декарт, которому рассказал о нем их общий знакомый Марен Мерсенн. Декарт, в отличие от Ферма, был не лишен самодовольства. Один современник назвал его "холодным и себялюбивым". Хвастаясь, что нашел способ строить касательные к любой кривой, Декарт сказал: "Эта задача является наиболее полезной не только среди известных мне, но также среди всех тех задач, которые я когда-либо желал знать в геометрии"[16].

Декарт ужасно огорчился, узнав от Мерсенна, что Ферма решил эту задачу на десять лет раньше. Чтобы выставить себя в лучшем свете, Декарт изучил доказательства Ферма и во всеуслышание заявил, что нашел в них целый ряд досадных ошибок, хотя на самом деле ошибок в них не было.

Через несколько десятков лет Ньютон отплатил Декарту, назвав того "очередным нерадивым математиком"*. Самого Ньютона, возможно, и не получилось бы упрекнуть в нерадивости, но человеком он был чрезвычайно неприятным. Говорят, он редко смеялся, а сам он признавал, что в детстве однажды пригрозил сжечь дом матери и отчима вместе с ними внутри. Он называл всех, кто безуспешно пытался понять его труды, "маленькими недоучками" и всячески избегал общения с людьми, которых не считал себе равными. "Я не вижу ничего желательного в славе, даже если бы я был способен заслужить ее, — сказал он однажды. — Это, возможно, увеличило бы число моих знакомых, но это как раз то, чего я больше всего стараюсь избегать"[17].

Лейбниц, в свою очередь, был тоже весьма доволен собой. Его работа в сфере математического анализа, хвастался он, составляла "огромную часть открытий, сделанных в этой области". Он тоже не любил людей, но хотя бы сожалел об этом. Однажды он пожаловался другу, что "нехватка вежливости

* Перевод А. Юшкевича.

часто портит первое впечатление" о нем. Он всю жизнь был одинок и не имел детей. Декарт и Ньютон тоже не женились и не оставили потомков. Ферма хотя бы обзавелся семьей, пусть и предпочитал не тратить на нее время. И все же никто из перечисленных не сравнится в своем коварстве с первыми людьми, нашедшими применение трудам Ньютона и Лейбница. Их жизни превратились в мыльную оперу, полную диверсий, злорадства, клеветы и старого доброго соперничества между братьями. Вы наверняка уже слышали прежде о Борджиа. Но готовы ли вы ко встрече с Бернулли?

Беспокойные братья Бернулли

В середине XVII века Бернулли были известны лишь как торговцы специями из Базеля[18]. Математические наклонности первым из них продемонстрировал Якоб Бернулли, который родился в 1655 году. Послушавшись родителей, он изучал в университете теологию, но дополнял ее математикой и астрономией, хотя родители и были против того, чтобы их сын занимался такими мирскими вещами. Якоб выполнил все требования, необходимые для того, чтобы стать протестантским священником, но математика не давала ему покоя: он изучал ее при любой возможности и начал преподавать механику в Базельском университете. В конце концов он отошел от служения Богу и занялся академическими исследованиями. В 1687 году он получил должность профессора математики. Он изучал математический анализ Лейбница, работая вместе со своим младшим братом Иоганном.

Иоганн тоже был талантливым математиком. Он отказался от предложения отца, который хотел, чтобы он продолжил семейное дело по торговле специями, и настоял, чтобы ему позволили поступить в университет. В итоге ему разрешили получить медицинское образование. Но и он стал в дополнение к нему заниматься математикой.

Сначала братья работали слаженно и добились прекрасных результатов, сделав неочевидный и сложный математический анализ Лейбница доступным и прикладным. Потратив лишь несколько дней на изучение одного из сочинений Лейбница о дифференциальном математическом анализе, они "постигли секрет", о чем Иоганн рассказал в автобиографии. Но через несколько лет в их отношениях стал намечаться раскол. По трудам братьев понятно, что Иоганн считал себя полноправным коллегой Якоба, но Якоб видел в нем не более чем ученика. Вскоре соперничество между братьями стало сказываться на их совместной работе.

В 1690 году Якоб написал статью, в которой обозначил словом "интеграл" метод вычисления кумулятивной характеристики, например площади под кривой. Впоследствии Иоганн неизменно утверждал, что термин предложил он. Якоб, по его словам, учился медленно и схватывал новое не сразу, а сам он себя считал ярчайшим гением с потрясающей интуицией. В статье, вышедшей в 1694 году, Якоб отметил, что предложенный Иоганном для решения конкретной задачи метод "обратного тангенса" неэффективен и применим лишь к узкому кругу примеров. Он назвал его обычным фокусом.

Противостояние началось. В письме общему знакомому Иоганн пожаловался на брата: "[Он] преисполнен злости, ненависти, зависти и ревности по отношению ко мне. Он затаил обиду... ему невыносимо, что я, младший брат, не менее уважаем, чем старший, и ему доставило бы огромное удовольствие, если бы я был обездолен и посрамлен". Позже он написал и самому Лейбницу, с которым его брат наладил сотрудничество: "[Якоб] всячески притесняет меня... затаив ко мне ненависть". Еще позже он обвинил брата в том, что тот "скрытен, как господин Ньютон".

Тем временем Якоб жаловался Лейбницу на "слова [брата], пропитанные ядом". Бернулли устроили публичную дуэль: Иоганн церемонно вручил Якобу задачу по математическому анализу, тщательно составленную таким образом, чтобы Якоб потерпел сокрушительное поражение. Якоб ответил брату тем же и составил задачу посложнее. Оставшийся неизвестным свидетель событий сказал Иоганну, что наградит его 50 серебряными экю, если тот сумеет решить задачу за три месяца. Иоганн предложил решение, на которое, по его словам, у него не ушло и трех минут. Но в него вкралась ошибка. Последовали долгие препирательства, и Якоб принялся открыто высмеивать потуги Иоганна в научном журнале.

Интерес к дуэли со стороны общественности сменился чувством неловкости. Коллеги сообщили братьям, что их введут в Королевскую академию наук, если они сумеют разрешить свои противоречия. Якоб возражал против введения Иоганна в академию и писал другу, что их коллеги "слишком высокого мнения о способностях [его] брата". К тому времени Иоганн стал профессором математики в Гронингенском университете. Он оказался в изоляции — семья Бернулли встала на сторону Якоба, — но при этом не собирался сдавать позиций. "Я справляюсь и без него, — писал он их с братом общему другу. — Я ни в чем не завишу от него и ничего ему не должен".

Примирения так и не случилось. В 1705 году Якоб тяжело заболел подагрой, и родственники настояли, чтобы Иоганн приехал с ним повидаться. Но Якоб скончался, пока Иоганн был еще в пути. Свое последнее слово в этой распре Якоб умудрился сказать уже после смерти. Иоганн унаследовал профессорскую должность брата в Базельском университете, но больше ему не досталось ничего: на смертном одре Якоб наказал близким не допустить, чтобы Иоганн получил доступ к его трудам, и те неукоснительно исполнили его волю.

Похоже, Иоганн вымещал досаду на своем сыне Данииле, которому, когда умер дядя, было всего пять лет. Даниил вырос блестящим математиком и хотел постигать секреты математического анализа. Однако по необъяснимой причине Иоганн пошел по стопам собственного отца и запретил Даниилу изучать математику, но позволил ему заняться медициной. В конце концов Иоганн снизошел до того, чтобы обучить сына математическому анализу, но оскорбился, когда Даниил продемонстрировал способности к предмету. В 1734 году Даниил вместе с отцом занял первое место в состязании, устроенном Парижской академией наук. Иоганн так разгневался из-за того, что им вручили одну награду на двоих, что выгнал сына из дома. Через несколько лет Даниил снова победил в этом состязании, на этот раз оставив отца далеко позади. Распаленный Иоганн объявил, что работа, признанная лучшей, а именно — опубликованная в 1738 году книга "Гидродинамика", списана с его книги "Гидравлика". А его книга, которой он потрясал в академии, вышла в 1732 году! На самом деле Иоганн подделал дату: вообще-то его книга была опубликована через год после книги Даниила и была сама как раз списана с нее.

Демонстрируя невероятную силу характера, Даниил много раз пытался уладить разногласия с отцом. И всякий раз у него ничего не получалось. И все же это не помешало ему применять математические инновации отца (и дяди) для решения важных задач и создать ряд самых полезных математических инструментов.

Дифференцирование, болезнь и производные

"Я только хочу, чтобы в вопросе, который так тесно связан с благом человечества, ничего не решалось без полного ознакомления с его сутью, возможно, после некоторого анализа и вычисления"*. Так Даниил Бернулли открыл свою опуб-

* Здесь и далее статья цитируется в переводе О. Шейнина.

ликованную в 1760 году статью, в которой предложил применить математический анализ для решения вопроса о том, стоит ли прививать население от оспы. Однозначно да, решил он, и представил данные, чтобы это доказать*[19].

По расчетам Бернулли, в XVIII веке вирусом оспы было заражено 75 % населения Земли. На болезнь приходилось 10 % всех смертей: в одном только Лондоне число жертв оспы в некоторые годы достигало 15 тысяч. Взрослые в основном имели к ней иммунитет: они выживали, потому что их организм вырабатывал антитела к вирусу. Но дети оказывались в группе риска. Стоило ли прививать их новыми вакцинами? Что ж, сказал Бернулли, у меня есть подходящие уравнения.

С помощью первого уравнения он нашел число людей, никогда не болевших оспой, которое было долей от общей численности населения. С помощью второго уравнения — спрогнозировал ежегодное количество заражений вирусом и смертей, вызванных оспой, и количество жизней, которые будут спасены, если ее искоренить. Вот фрагмент его рассуждений:

> …число тех, кто при этом не болел оспой [в заданном возрасте] = s… элемент $-ds$ с самого начала равен числу тех, кто заболевает оспой в течение времени dx, и… в соответствии с нашим предположением, он равен sdx/n, потому что если за год из n человек заболевает один, то за время dx из s человек заболеет именно столько.

В его анализе содержатся знакомые нам компоненты dx и ds — взятые у Лейбница, — а затем появляются интегралы и дифференциалы. Бернулли приходит к выводу, что числа ясно показывают: Франция должна вакцинироваться.

Так была предпринята первая попытка применить математику для воздействия на политику в области общественного здравоохранения, и без математического анализа здесь было

* Цитируется статья 1766 года, а не 1760-го, как указано в тексте. — *Прим. перев.*

не обойтись. Впрочем, это не сработало: несмотря на математические выкладки, французские обыватели не спешили прививаться от оспы.

Далее Даниил Бернулли понял, что математический анализ можно также применить к экономике. Первым делом он вывел довольно банальный закон "снижения предельной полезности денег"[20]. Иными словами, если денег у вас много, то небольшая прибавка к состоянию почти ничего не изменит, но для человека, у которого денег гораздо меньше, она может стать вполне ощутимой. Словами Бернулли: "Без сомнения, для бедного доход в тысячу дукатов имеет большее значение, чем для богатого, в то время как его денежная ценность одинакова для обоих".

Если говорить на языке математики, x — это ваше текущее состояние, u — степень его полезности для вас. Бернулли отметил, что du/dx, изменение полезности при увеличении состояния, снижается по мере увеличения оного. Это вряд ли можно считать откровением. Но так и было положено начало применения математического анализа к исследованию экономической теории. И этот джинн, изменивший цивилизацию, отказывается возвращаться в бутылку.

Помните Фалеса Милетского и его эксплуатацию производителей оливок? Возможно, именно в тот момент мы должны были понять, что в математике сила. По мнению Аристотеля, Фалес просто хотел доказать, что философы вполне могли бы разбогатеть, но посвящали себя более важным вещам. Впрочем, он, вероятно, сам того не желая, продемонстрировал, что если разбогатеть вам все же хочется, то знание математики придется очень кстати. Неудивительно, что Уолл-стрит, лондонский Сити и все остальные финансовые центры, раскиданные по миру, расхватывают молодых математиков и физиков, которые сильны в математическом анализе, как горячие пирожки.

То, что началось с прозорливости Фалеса, ожидавшего, что прессы для оливок возрастут в цене, вылилось в попытку прогнозирования будущей стоимости любого товара, который можно использовать для заработка денег. Всякий, кому хоть раз приходилось принимать решение о поведении на фондовом рынке, скажет вам, что торговля финансами — это, по сути, азартная игра. Именно поэтому математика финансов уходит корнями в теорию вероятностей.

Теория вероятностей началась с Джероламо Кардано, который хотел выиграть в карты и кости достаточно денег, чтобы оплатить свое обучение в медицинском университете. Но вплотную предметом занялся пионер математического анализа Пьер Ферма, работавший вместе с Блезом Паскалем[21]. Они проанализировали вероятность различных исходов в разных играх и вывели формулу, более или менее эквивалентную той, что используется для определения ценности финансовых пакетов, называемых деривативами.

Дериватив, или производный финансовый инструмент, — это контракт между покупателем и продавцом. В нем оговаривается цена, по которой актив будет продаваться в некоторый момент будущего. Допустим, вы торгуете нефтяными фьючерсами. Вы заключаете контракт на покупку определенного количества баррелей нефти по указанной цене в указанный день или позже. Вы надеетесь, что к этому дню цена на нефть станет больше той, о которой вы договорились, и тогда вы либо выиграете деньги с этой сделки, либо сможете продать контракт заинтересованному покупателю до наступления указанного дня. Проблема в том, что вы точно не знаете, как будет меняться цена на нефть в промежуточное время. В связи с этим вам приходится моделировать вероятные изменения с помощью математики.

После того, как Даниил Бернулли сделал в этом направлении первый шаг, область применения математического анализа в финансах стала неуклонно расширяться. В 1781 году французский математик Гаспар Монж с помощью математического анализа нашел способ свести к минимуму транспортные расходы при перемещении породы в ходе строительства дорог и фортификационных сооружений[22]. Метод Монжа, по сути, не отличается от метода, используемого в финансовом хеджировании, когда люди делают вложения для минимизации общих потерь при возникновении непредвиденных проблем в других областях их финансовой деятельности. Сегодня математический анализ применяется на всех финансовых рынках, но выделяется при этом одно ключевое уравнение: модель Блэка — Шоулза — Мертона.

Все началось в 1973 году, когда ученые-экономисты Фишер Блэк и Майрон Шоулз опубликовали статью "Ценообразование опционов и корпоративные обязательства"[23]. Вскоре после этого экономист Роберт Мертон развил их идею в статье "О ценообразовании корпоративного долга: структура риска процентных ставок"[24]. Вам может показаться, что ничего скучнее не придумаешь (мне именно так и кажется), но эти статьи оказались такими обстоятельными, новаторскими и весомыми, что Мертон и Шоулз в 1995 году получили Нобелевскую премию по экономике (Блэк умер от рака горла в 1995 году и потому не мог стать лауреатом).

Блэк, Шоулз и Мертон пробудили интерес к так называемым опционам. Они напоминают нефтяные фьючерсы, о которых уже говорилось раньше: это заключенный между двумя сторонами контракт на куплю-продажу некоторого товара или акций по заранее оговоренной цене в указанную дату при условии, что к этому времени обе стороны по-прежнему готовы провести сделку. Продавец, однако, может продать опцион третьей стороне. Это еще один способ сделать ставку на повышение или понижение рыночной стоимости акции или товара.

Интерес к этому возник, поскольку Блэк, Шоулз и Мертон продемонстрировали, что с помощью математического анализа можно определять взаимовыгодную цену опциона[25].

В том числе они использовали "уравнение в частных производных". Если в "обыкновенном" дифференциальном уравнении всего одна переменная (и решить его, как правило, довольно просто), то в уравнениях в частных производных уже две и более переменных. Примером может служить стоимость актива, которая меняется со временем, а также при изменении стоимости другого актива, — скажем, цены на нефть, колеблющиеся в зависимости от того, какой объем нефти поступает на рынок, но также порой зависящие от цены на газ. Нередко уравнения в частных производных вообще не решаются должным образом — их решают "численно", то есть с помощью компьютера, который перебирает разные комбинации чисел и ищет подходящие.

Открыв возможности для применения математического анализа с целью оценки таких вещей, как опционы, Мертон, Шоулз и Блэк изменили принципы денежного обращения во всех рыночных экономиках мира. Чтобы понять, какое влияние они оказали, посмотрим на цифры. В 1973 году, когда вышли их статьи, на рынке было всего 16 опционов. Сегодня рынок опционов оценивается в триллионы долларов. На протяжении десятилетий ученые развивали их идеи, создавая на базе математического анализа новые методы определения ценности (и заработка денег) на финансовых рынках. В большинстве своем их инновации предполагают решение уравнений в частных производных в разных формах. И здесь модель Блэка — Шоулза — Мертона нас подвела (как и другие подобные).

Из-за своей сложности эти модели были скомпилированы в готовые компьютерные программы, позволяющие трейдерам вводить небольшое число переменных, связанных с текущим состоянием рынка, и получать, по сути, рекомендацию к действию. К несчастью, лишь малая часть этих программ содержала четкие предупреждения об их ограничениях и несовершенствах. Блэк, Шоулз и Мертон прямо говорили, где и когда обоснованны и применимы решения их уравнений в частных производных, но оговорки об особенностях новых программ часто не принимались в расчет — если делались вообще. Никто из тех, кто пользовался программами, находясь на передовой финансовых транзакций, ничего не знал об уравнениях, лежащих в их основе, и потому рекомендации систем не подвергались сомнению. В результате все больше и больше организаций накапливало скрытые, токсичные задолженности.

Причины глобального финансового кризиса чрезвычайно сложны, но, по сути, они сводятся к недостатку информации о риске. Трейдеры, работавшие на большинство крупных банковских и финансовых организаций, сами того не понимая, покупали огромные объемы финансовых пакетов, в которых скрывались токсичные задолженности. К тому времени, как стало выясняться, что такие компании, как *Lehman Brothers*, владеют долговыми обязательствами, которые никогда не будут погашены, уже ничего нельзя было предпринять: компании больше не могли торговать на рынке. Повторилась ситуация с банком Медичи. В сентябре 2008 года банк *Lehman Brothers* прекратил свое существование. Остальное вы знаете.

Впрочем, не все так плохо. Даниил Бернулли сделал и третий вклад в развитие и применение математического анализа. После здравоохранения и финансов он стал применять уравнения Лейбница и Ньютона, чтобы описывать и прогнозировать течение жидкостей. И здесь к нам возвращается радость математического анализа. Математика течения жидкостей лежит в основе конструирования самолетов. Если правильно все рассчитать, она приведет вас к победам, меняющим ход истории, — таким, например, как битва за Британию. Труды Даниила Бернулли дают нам возможность вернуться к "Супермарин Спитфайру". Настало время подняться в небо и воспарить на крыльях дифференциальных уравнений.

Стремление к совершенству полета

Бернулли начал с изучения открытий Архимеда, сделанных 2 тысячи лет назад. Это были довольно скучные законы, которым подчинялись жидкости, неподвижно находящиеся в емкостях, например в ваннах. С помощью математического анализа Бернулли вдохнул в них новую жизнь, совместив с законами движения Ньютона. Он опубликовал результаты своих исследований в книге "Гидродинамика", которую впоследствии скопировал его отец.

Одним из наиболее значимых открытий Бернулли стало то, что увеличение скорости потока жидкости приводит к снижению давления этой жидкости на окружающую среду. В применении к крыльям самолета этот закон объясняет феномен подъемной силы. Рассчитав колебания давления на поверхность крыла с помощью математического анализа, можно увидеть направленную вверх силу.

Правда в том, что мы точно не знаем, за счет чего летают самолеты. Как ни странно, эксперты по сей день не могут сойтись во мнении, применять ли к ним закон Бернулли, третий закон Ньютона — любому действию всегда есть равное и противоположное противодействие — или какой-нибудь другой принцип. Впрочем, вас, возможно, удивит тот факт, что величайший физик XX века выступал именно на стороне Бернулли.

В 1916 году, только что опубликовав общую теорию относительности, Альберт Эйнштейн обратился к вопросу полета[26]. Применив математический анализ на основе закона Бернулли, он предложил новую форму крыла, верхняя поверхность которого была заметно выгнута, чтобы увеличить скорость движения воздуха, обтекающего крыло, благодаря этому снизить давление в нужной области и обеспечить действие на крыло чистой подъемной силы, возникающей из-за давления воздуха под крылом.

Крыло Эйнштейна плохо показало себя на испытаниях в аэродинамической трубе, но в силу репутации ученого ему все же дали шанс. Немецкий авиаконцерн *Luftverkehrsgesellschaft* (LVG) в 1917 году построил экспериментальный образец, и пионер авиации Пауль Эрхарт вызвался стать летчиком-испытателем. Полет прошел не слишком удачно. "После взлета я завис в воздухе, как беременная утка", — вспоминал впоследствии Эрхарт[27]. Эйнштейн навсегда потерял тягу к прикладной физике. "Должен признать, я часто стыдился своей тогдашней глупости", — сказал он однажды, описывая свои впечатления от этой работы.

А вот менее известные ученые и математики справились с задачей гораздо лучше. На поверку оказалось, что Эйнштейн — что было вполне в его духе — проигнорировал поразительные достижения других специалистов. Как отмечалось в начале этой главы, к тому моменту, когда Эйнштейн решил поиграть с темой, другие математики уже внедряли выведенные изначально по наитию параметры Фредерика Ланчестера для конструирования крыла в математические уравнения, также основанные на трудах Бернулли. В 1920-х годах появилось огромное количество научных сочинений о полете, и многие наиболее значимые открытия были сделаны в Германии. Именно там Беверли Шенстоун два года проработал на заводе "Юнкерс" в Дессау. Он вернулся в Англию в 1931 году, и год спустя Реджинальд Митчелл нанял его в *Supermarine* с зарплатой 500 фунтов в год.

Тогда Шенстоун еще не изучил математический анализ в достаточной степени, чтобы спроектировать "Спитфайр". Но кое-какие знания у него уже были. Писатель Лэнс Коул изучил бумаги, книги и дневники Шенстоуна, собирая материал для своей книги "Тайны «Спитфайра»". На заднем форзаце учебника дифференциального математического анализа, которым Шенстоун пользовался почти двадцать лет, Коул обнаружил "написанные карандашом эллиптические расчеты… подкрепленные математическим анализом". И все же

Шенстоун понимал, что знаний ему недостает. Такой вывод можно сделать, познакомившись с его опубликованной в 1934 году статьей по математическому анализу конструирования крыльев, где он поблагодарил человека, вклад которого оказался практически забыт: "В заключение автор желает выразить благодарность профессору Р. К. Дж. Хауленду за помощь и ценные советы при работе над этой статьей"[28].

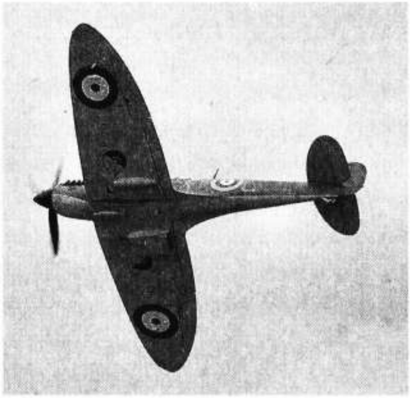
Математик Реймонд Хауленд работал в Саутгемптонском университетском колледже (ныне — Саутгемптонский университет) на южном побережье Англии. Хауленд был специалистом по математическому анализу. Когда они — случайно — познакомились с Шенстоуном, они разговорились о работе и Хауленд заинтересовался попытками Шенстоуна найти математическому анализу практическое применение. В результате их сотрудничество оказалось взаимовыгодным: Хауленд обучил Шенстоуна продвинутым техникам математического анализа, а Шенстоун познакомил Хауленда с аэродинамикой.

Шенстоун публично поблагодарил Хауленда в тот же год, когда компания *Supermarine* приступила к проектированию самолета с эллиптическими крыльями. "Мы довольно рано решили сделать крыло эллиптическим, — написал впоследствии Шенстоун. — С точки зрения аэродинамики оно лучше всего подходило для наших целей, поскольку индуктивное сопротивление… при использовании такой формы оказывалось минимальным; эллипс был идеальной формой, совершенной в теории"[29].

В конце концов совершенную в теории форму все же пришлось доработать. В декабре 1934 года мастера *Supermarine* приступили к сборке экспериментального образца, и итоговым эллипсом, по словам Шенстоуна, стала "просто форма, позволившая сделать крыло как можно более плоским и при этом оставить внутри достаточно места для необходимых несущих конструкций и всего, что [инженерам] хотелось туда поместить". И "получилось симпатично", добавил Шенстоун.

Чтобы выполнить техническое задание, план крыла пришлось составить из нескольких кривых. Их совместили друг с другом так, чтобы показатели их крутизны в каждой точке пересечения были идентичны, что позволило сделать крылья гладкими и аэродинамическими. Неясно, в какой степени итоговая конструкция была основана на расчетах Шенстоуна, а скольким мы обязаны мастерству чертежников *Supermarine*, которые, как правило, работали в мезонине, расположенном над производственными цехами. Но эту работу, несомненно, можно было произвести с помощью математического анализа, если хорошо его освоить, а статья, опубликованная Шенстоуном в соавторстве с Хаулендом в 1936 году, показывает, что Шенстоун освоил его прекрасно. Она называется "Обратный метод конструирования сужающихся и закрученных крыльев", и в ней на языке сложного математического анализа описывается, как изменение формы крыльев сказывается на летных качествах аппарата[30].

К несчастью, эта статья стала последней совместной работой Шенстоуна и Хауленда. В тот же год Хауленд умер, так и не узнав, какой важный вклад в историю он внес, обучив Шенстоуна математическому анализу. "Спитфайр" оказался настоящим триумфом, и его хвалили абсолютно все. Летавшие на нем летчики называли его "идеальной летающей машиной" и "чем-то из другого мира". Впрочем, не стоит, пожалуй, удивляться, что британцам нравилось летать на "Спитфайре". Удивительнее то, что и немецкие летчики восхищались его маневренностью. Когда битва за Британию подошла к кульминации, фельдмаршал Герман Геринг спросил, чем он может обеспечить немецкие истребительные эскадрильи, базировавшиеся во Франции, чтобы сломить сопротивление британцев. "Я бы не отказался от звена «Спитфайров»", — заявил группенкоммандер Адольф Галланд[31]. Хайнц Кноке, еще один летчик, сражавшийся со "Спитфайрами" в битве за Британию, примерно так же оценивал преимущество противника. "Эти поганцы чертовски резко раз-



Эллиптическая в плане форма крыла "Спитфайра"
Arpingstone, изображение из открытого источника, via Wikimedia Commons

ворачиваются, их как будто бы и вовсе не подбить", — писал он в мемуарах[33].

Битва за Британию — первое значительное военное поражение Гитлера — изменила исход Второй мировой войны. Ральф Ингерсолл сообщил, что "с тех пор поведение люфтваффе над Англией изменилось. Его боевой дух, несомненно, сломлен, а Королевские ВВС с каждой новой неделей становятся все сильнее". Впервые появилась надежда на то, что Гитлера можно одолеть, и это подтолкнуло американцев вступить в конфликт. Такова — наряду с чудесами в городском планировании, финансовой сфере и здравоохранении — сила математического анализа.

Студентам математический анализ всегда казался переходным этапом от базовой математики к продвинутой. Почему-то все, что мы изучаем до него, усвоить относительно несложно, но если математический анализ окажется вам не по зубам, велика вероятность, что дальше вы уже не продвинетесь. Но даже если вас сломил математический анализ, не печальтесь. Как мы увидели, положить математику перемен на обе лопатки удалось лишь величайшим ученым. Впрочем, достигнув этого, мы уже не оглядывались назад. Математический анализ стал универсальным инструментом математики и среди прочего помогает решать задачи в сферах медицины, военного дела, финансов и архитектуры. Рынок деривативов, "Спитфайр", тройная терапия ВИЧ и Бруклинский мост — вот впечатляющее наследие дисциплины, которая поначалу была не более чем несерьезной игрой с математикой бесконечного.

В следующей главе речь пойдет об инструменте совершенно иного происхождения. Джон Непер специально изобрел логарифм, чтобы помочь астрономам вычислять суммы. Вышло так, что диапазон применения этого инструмента, как и математического анализа бесконечного, оказался безграничным.

Глава 5
Логарифмы
История науки

Изобретение шотландского лэрда, логарифм, — не более чем инструмент для превращения умножения в сложение, а деления — в вычитание. Но этой простотой и объясняется его важнейшая роль в развитии человечества. Он позволил нам безошибочно рассчитывать орбиты небесных тел и таким образом закрепил Солнце на новом месте в центре Солнечной системы. Преобразованный во множество механических вычислительных инструментов, он веками питал науку и инженерное дело, в том числе при разработке и создании атомной бомбы. Он также познакомил нас с загадочным иррациональным числом e, которое лежит в основе целого ряда природных процессов. А вывернутый наизнанку, он описывает прекрасно знакомое нам экспоненциальное распространение инфекции в разгар вирусной эпидемии.

В 1601 году Иоганн Кеплер, человек, который изобрел интегрирование, чтобы сэкономить деньги на своей свадьбе, опубликовал расчеты, позволившие ему построить орбиту Марса. На них он потратил четыре года. Пятнадцать лет спустя он узнал о математической инновации, которая существенно сэкономила бы ему время.

"Один шотландский барон, имя которого вылетело у меня из головы, — писал он другу, — предложил чудесный способ приводить все необходимые [операции] умножения и деления к простым [операциям] сложения и вычитания". Похоже, Кеплер пришел в восторг от возможности упростить работу в будущем, и его наставнику Михаэлю Мёстлину даже пришлось его осадить. Кеплер жаловался, что коллеги сказали ему, что "негоже профессору математики по-детски радоваться сокращению расчетов"[1].

Попробуйте сказать такое несметному множеству людей, которые в последующие триста пятьдесят лет не могли бы работать без этого шотландского изобретения. Оно называлось логарифмом и, как верно отметил Кеплер, позволяло манипулировать числами, упрощая сложные расчеты. Когда логарифмы перенесли на деревянные планки — логарифмические линейки, — они на века стали движущей силой науки и инженерии. Счетная линейка способствовала наступлению эпохи Просвещения, промышленной революции, атомного века и космической гонки. Если хотите составить представление о том, насколько важную роль играет эта линейка и как давно используется, знайте: логарифмической линейкой пользовался Исаак Ньютон, с ее помощью был сконструирован первый паровой двигатель, ученые применяли ее при испытаниях первой атомной бомбы, а астронавты захватили логарифмические линейки с собой на Луну, когда отправились туда на "Аполлоне". Транспортная, промышленная и жилая инфраструктура XX века проектировалась с помощью счетных линеек: инженеры даже носили их в специальных чехлах у себя на ремне, потому что такие линейки были незаменимым инструментом. Можно, пожалуй, сказать, что логарифмы оказали на нашу жизнь самое большое влияние из всех изобретений, сделанных в современной истории. И своим существованием они обязаны исключительной целеустремленности одного человека.

Из головы у Кеплера в свое время вылетело имя Джона Непера. Он родился в 1550 году в Эдинбурге и был убежденным протестантом в период ожесточенной межконфессиональной борьбы, которая явно не обошла его стороной. Аристократ по рождению, Непер носил титул восьмого лэрда Мерчистона и был преисполнен ненависти к католикам. Его истовая вера угадывалась даже в математике. Первостепенным для Непера был поиск тайных знаний путем трактовки библейских чисел. Сначала он решил предсказать дату конца света. Он попробовал определить ее, анализируя Откровение Иоанна Богослова, однако не сумел прийти к однозначному выводу и назвал лишь верхний предел — 1786 год. Он также отметил, что если человечество станет больше грешить, то конец света, вероятнее всего, наступит раньше. После этого он решил математически доказать, что на папском престоле сидит Антихрист. Он потратил на это немало сил, не стесняясь искажать Писание, но в конце концов его умение обращаться с цифрами позволило ему добиться своего. В результате родился трактат "Простое объяснение", который Непер до самой смерти считал лучшим из своих трудов[2].

Впрочем, тот инструмент, который Кеплер назвал "чудесным изобретением" Непера, не имел ничего общего с религией. Логарифм — от греческого *logos* (отношение) и *arithmos* (число) — появился из жалости к астрономам.

Любой, кто хотел построить траектории движения небесных тел и составить карты звездного неба, полезные астрологам, астрономам и морякам, должен был исписать горы бумаги тригонометрическими расчетами. Измеряемые секстантом углы, а также их синусы и косинусы позволяли наносить на карту звезды и планеты, положение которых менялось, и прогнозировать их дальнейшее движение. Но в ходе этих расчетов приходилось перемножать, делить и возводить в квадрат и в куб огромное количество чисел. Непер понял, что люди теряют время зря, поскольку им приходится повторять эти манипуляции при каждом новом наблюдении. Даже если не учитывать, как выразился Непер, "утомительную трату времени", существовала и другая проблема: люди часто допускали ошибки. "Я начал размышлять над тем, каким надежным и легким способом я мог бы устранить эти препятствия"*, — отметил Непер в предисловии к опубликованной в 1614 году книге, в которой предложил решение проблемы. Книга вышла под довольно смелым названием *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, или "Описание удивительной таблицы логарифмов".

Непер пишет, что в книге содержатся "замечательные короткие правила" для экономии времени при умножении. Может, сами правила и были коротки, но выводились они долго. Неперу понадобилось целых два десятка лет, чтобы заполнить 10 миллионов ячеек в приведенных в книге таблицах. И все же работа того стоила. Кеплер, например, преисполнился такой благодарности ученому, что посвятил ему свои "Эфемериды" 1620 года, не зная, что создатель логарифма к тому времени уже умер.

Экспоненциальный рост

Я пишу эти строки в марте 2020 года, когда в новостях только и говорят что о математике, у истоков которой стоял Джон Непер. Логарифмы, впрочем, упоминаются в них редко, зато очень часто речь идет о противоположных им экспонентах. Именно они определяют рост числа случаев заражения вирусом COVID-19 по всему миру. Построив график растущей динамики заболеваемости, вы увидите резко уходящую вверх "экспоненциальную кривую" — ту самую кривую, которую нам настойчиво рекомендуют "сглаживать", принимая сдерживающие распространение вируса меры, например используя защитные маски и соблюдая дистанцию в общественных местах.

Слово "экспоненциальный" довольно часто встречается и вне контекста вирусной эпидемии. Обычно мы используем его, описывая очень быстрый, головокружительный рост. Как

* Перевод цитируется по изданию: Гутер Р., Полунов Ю. *Джон Непер*. М.: Наука, 1980.

ни странно, у нас при этом нет интуитивного представления об экспоненциальной шкале. Когда нас просят спрогнозировать, как дальше пойдет рост, идущий по экспоненциальному закону, мы, как правило, существенно его недооцениваем. Дело в том, что мы чураемся крайностей и сглаживаем кривую роста в своем воображении, делая ее более или менее прямой.

В лекции, которую американский физик Альберт Аллен Бартлетт прочел не менее тысячи раз, содержится прекрасный пример обескураживающего характера экспоненциального роста[3]. Представьте, говорит он, что сейчас 11 утра. Он дает вам бутылку с одной бактерией и поясняет, что бактерии размножаются путем деления. Количество бактерий в вашей бутылке будет удваиваться каждую минуту, и бутылка окажется до краев заполненной бактериями уже через час.

Это, пожалуй, вполне правдоподобно. Но дальше Бартлетт спрашивает, насколько полной бутылка окажется в 11:56, всего за 4 минуты до конца эксперимента? Математика показывает, что бутылка будет заполнена всего на 6 %. Это не очевидно: будь вы бактерией в бутылке, вам бы в этот момент не показалось, что место скоро закончится. Даже за 2 минуты до конца эксперимента бутылка полна всего на четверть. Она полна наполовину за 1 минуту до полудня. И после этого при последнем удвоении (происходящем в последнюю минуту) она наполняется по самое горлышко.

Еще удивительнее то, что произойдет, если Бартлетт в 11:58 даст вам три новые бутылки, когда первая заполнится лишь на четверть. Бутылка у вас в руке почти пуста, а на полке стоят еще три. Похоже, они заполнятся еще нескоро. Но это не так. Вторая бутылка заполнится в 12:01. Уже в 12:02 полны окажутся все четыре бутылки.

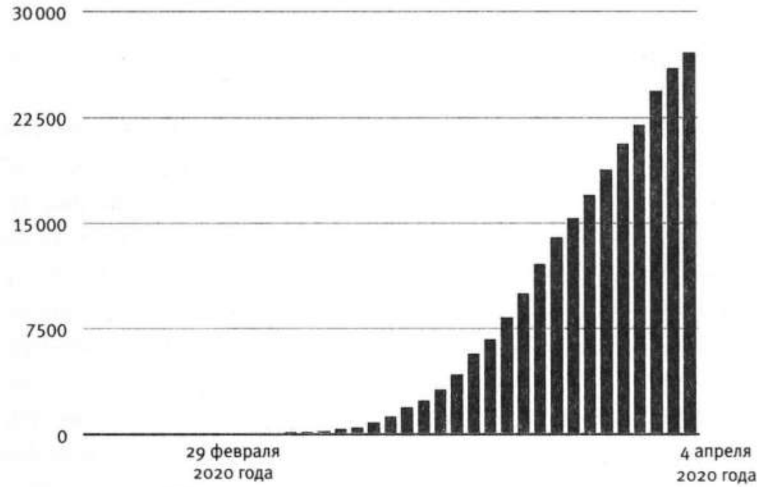
По прошествии 58 минут бактериального деления вы с оптимизмом смотрели в будущее. Еще через четыре минуты от вашего оптимизма не осталось и следа. В этом, по словам Бартлетта, и заключается трагедия нашего непонимания экспонент — хоть в применении к распространению болезней, хоть при бесконтрольном росте численности населения. В начале лекции он неизменно отмечал: "Величайший недостаток человечества — его неспособность понять экспоненциальную функцию".

У этого недостатка есть название. Это недооценка экспоненциального роста, которая встречается не только в мире эпидемий и увеличения численности населения. В научной литературе речь идет в основном о том, какое влияние эта недооценка оказывает на личные финансы — в частности, при капитализации процентов.

Капитализация процентов приносит осторожному держателю сбережений больше денег. Он не просто получает процент с изначально инвестированной суммы, но и добавляет на счет процент, заработанный, скажем, за год. Затем на этот процент тоже начисляются проценты. Если вы положите 100 фунтов под 10% годовых, то по истечении первого года у вас будет 110 фунтов. Но по истечении второго года вы заработаете 10% от 110 фунтов, то есть 11 фунтов. По истечении следующего года вам выплатят 10% от 121 фунта. При капитализации процентов доходность по инвестициям растет экспоненциально.

К несчастью, точно так же дело обстоит со ссудами. Если задолженность по ссуде будет расти экспоненциально из-за неисполнения обязательств по кредиту и начисления процентов, в вашем бюджете могут возникнуть немалые бреши[4]. Мало того, что мы недооцениваем скорость экспоненциального роста, мы еще и *переоцениваем* свою способность работать с числами. Иными словами, мы понимаем экспоненты неправильно, но при этом проявляем опасную самоуверенность, то есть обычно не проверяем свои интуитивные выводы и не обращаемся за помощью к профессионалам[5].

В применении к эпидемиям недооценка экспоненциального роста дает нам подобное ложное чувство безопасности[6]. В начале вспышки вируса число заражений в день обычно ра-



Число случаев заражения COVID-19 в день в начале 2020 года в США *(источник: Центр по контролю и профилактике заболеваний)*

стет экспоненциально, как можно видеть на графике распространения COVID-19 в США в марте 2020 года. И все-таки мы смотрим на первые цифры, и мозг твердит нам, что рост линеен.

Пусть в первый день было выявлено 50 случаев, а во второй — 100. Совершая ошибку экспоненциального роста, мы интуитивно предполагаем, что в третий день прибавится еще 50 случаев. Но если рост идет по экспоненциальному закону, дневное увеличение числа случаев с 50 до 100 значит, что каждый день число заболевших удваивается. Следовательно, в третий день заболеет 200 человек, а не 150. К десятому дню будет выявлено на 25 тысяч больше случаев, чем в нашем предполагаемом линейном сценарии. Ошибка приводит к беспечности: мы считаем, что столкнемся с гораздо меньшим числом заболевших, чем на самом деле. Порой наш не склонный к математике мозг оказывается более опасным, чем можно предположить.

Переход к логарифмам

Слово "экспоненциальный" происходит от слова "экспонента". Экспонентами называются показатели степени — маленькие циферки, стоящие сверху и говорящие, сколько раз нужно умножить число, к которому они относятся, на само себя. Когда мы говорим, что $2^3 = 8$, на самом деле мы имеем в виду, что нужно "три раза умножить число 2 на само себя". Это $2 \times 2 \times 2$, то есть 8. Мы также можем перевернуть эти отношения между числами с ног на голову. И здесь в дело вступает логарифм. Вместо того чтобы смотреть на экспоненту, мы можем выразиться иначе и сказать, что "логарифм по основанию 2 от числа 8 равен 3". Вам может показаться, что толку от этого никакого, но Джон Непер, к счастью, сообразил, что здесь к чему. Он разглядел в этом возможность превратить обременительное умножение в простое сложение.

Математики давно оценили относительную сложность этих операций. Известна чудесная (и, возможно, вымышленная) история немецкого купца XV века, который хотел обучить своего сына математике[7]. Купец обратился за советом к профессору местного университета.

— Если вы хотите, чтобы он просто научился складывать и вычитать, — сказал профессор, — ему достаточно будет окончить немецкий университет.
— А если я хочу, чтобы он научился умножать и делить? — спросил купец.
— Тогда отправьте его в Италию.

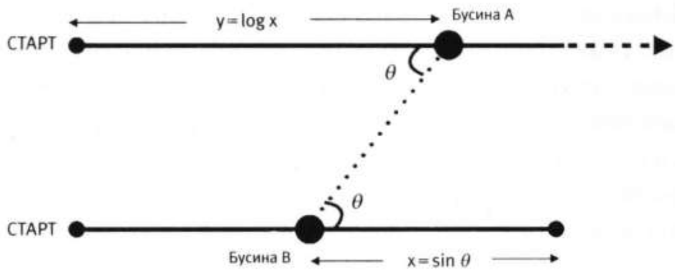
Очевидно, немцы тогда еще не освоили умножение. Но Непер показал, что не нужно ехать в Италию, где на папском престоле восседает Антихрист. Он объяснил, как производить умножение путем сложения с помощью тригонометрии.

Помните, как в тригонометрии находят синусы и косинусы? Для этого находится отношение сторон треугольника, вписанного в круг с радиусом 1. Оказывается, эта операция дает любопытный побочный продукт. Возьмем два угла, A и B, и найдем их косинусы. Перемножим их и затем удвоим произведение. Это число окажется равным сумме косинуса угла $A + B$ и косинуса угла $A - B$. На языке математики:

$$2\cos(A)\cos(B) = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

Это значит, что произведение двух чисел можно найти в тригонометрических таблицах. Если вы хотите перемножить X и Y, сделайте X равным $\cos(A)$, а Y равным $\cos(B)$. Откройте буклет с таблицами и найдите A и B. Далее вычислите $A + B$ и $A - B$. Вернитесь к таблице и найдите косинусы получившихся углов. Сложите их, и получите удвоенное произведение X и Y. Поделите результат пополам — и ответ готов.

Имея набор тригонометрических таблиц, так можно поступать с любыми числами, которые вы хотите перемножить. Непер знал об этой технике и других подобных — например, подобный фокус можно провернуть с помощью синусов углов — и также знал, что моряки и астрономы часто применяли эти "тригонометрические тождества", чтобы ориентироваться по небу. Но особенно он заинтересовался вопросом, когда узнал от своего знакомого Джона Крейга, что Тихо Браге применил эти техники, чтобы совершить великое открытие[8]. Крейг видел, как Браге с помощниками работает с техникой, когда посетил обсерваторию Браге на острове Вен, где остановился в принадлежащем Браге Ураниборге (буквально — "небесный замок"). Браге использовал тригонометрические тождества в процессе открытия новой звезды, и Непер счел, что дальнейшие открытия можно ускорить, если астрономам будет проще их применять — и особенно если за них уже выполнят всю сложную работу. Он решил, что займется ею сам.



Предложенный Джоном Непером
метод вычисления логарифмов

Непер дал толчок к логарифмической революции, представив две бусины, движущиеся по параллельным спицам, одна из которых конечна, а другая — бесконечна. Верхняя спица бесконечна, и бусина A движется по ней с постоянной скоростью. Числа, определяющие ее положение, растут в арифметической прогрессии, то есть увеличиваются равномерно — на одинаковую величину при каждом шаге. Скажем, спустя 1 секунду бусина находится в положении 100, спустя 2 секунды — в положении 200, спустя 3 секунды — в положении 300. Нижняя спица конечна. Бусина B начинает движение на одном уровне с бусиной A и сначала движется с такой же скоростью, но постепенно ее скорость снижается. Точнее, ее скорость пропорциональна расстоянию до конца спицы. Скажем, она начинает движение со скоростью 100, через 1 секунду ее скорость снижается до 50, через 2 секунды — до 25 и так далее. Это имеет два следствия. Во-первых, это значит, что числа, определяющие положение нижней бусины, уменьшаются в "геометрической" прогрессии, то есть на каждом шаге происходит умножение, а не сложение. Во-вторых, это значит, что в любой момент после начала движения верхняя бусина всегда будет дальше нижней. Если соединить их прямой, угол между ней и нижней спицей будет постепенно становиться все меньше.

Таким образом, пожалуй, можно построить бесконечное число треугольников. Как видите, соединительная прямая — это гипотенуза прямоугольного треугольника. Косинус уменьшающегося угла зависит от расстояния, на которое верхняя бусина опережает нижнюю. Первым делом Непер определил синус угла как расстояние, еще не пройденное по нижней спице. После этого он определил число, которое интересовало его на самом деле: логарифм этого синуса. Он сказал, что он равняется расстоянию, которое верхняя бусина преодолела по верхней спице к настоящему моменту. Для всех возможных углов при шаге в 1 минуту (минута равна одной шестидесятой градуса, как завещали нам вавилоняне) он нашел синусы, то есть расстояния до конца нижней спицы, и логарифмы, то есть расстояния, пройденные по верхней спице. Чтобы добиться точности, необходимой астрономам и мореходам, Непер приложил огромные усилия. Он разбил длину нижней спицы на 10 миллионов единиц, что дало ему семь знаков после запятой. Он хотел, чтобы на каждом шаге логарифм увеличивался от нуля на единицу. В результате в его логарифмические таблицы вошли сумасшедшие 10 миллионов значений, каждое из которых он высчитывал с помощью трудоемкой и изнурительной математической процедуры. Теперь астрономы могли превращать неуклюжие операции умножения и деления в удобные операции сложения и вычитания соответствующих чисел из таблиц Непера. Один человек трудился двадцать лет, чтобы только облегчить работу другим. Это ли не истинное самопожертвование?

Изменение основания

Должно быть, Непер вздохнул с облегчением, когда наконец подготовил таблицы к публикации. Однако, как выяснилось, работа была далека от завершения. Лондонский профессор математики Генри Бригс прочитал книгу Непера, и она произвела на него огромное впечатление. “Я никогда не видел книги, которая понравилась бы мне больше или заставила бы меня задуматься глубже”, — отметил Бригс в письме своему другу Джеймсу Ашшеру[9]. Однако, добавил он, кое-что нужно доработать.

Сложно найти двух столь непохожих друг на друга людей, как Непер и Бригс. Выросший в Йоркшире Бригс преподавал геометрию в Грешем-колледже, отличался прагматизмом и почти не проявлял интереса к религии, духовности и мистицизму. Непер же был непоколебим в своей протестантской вере, а еще считал себя едва ли не колдуном. Он занимался астрологией, и есть основания полагать, что он практиковал и более темные искусства. В 1594 году он заключил договор с бароном Робертом Логаном, который поручил Неперу любым способом найти сокровища, спрятанные где-то в его замке Фаст. Поскольку Непер двадцать лет провел в уединении, его (через много лет после его смерти) заподозрили в сатанизме, о чем сообщалось в вышедшем в 1795 году “Статистическом отчете”, сборнике приходских отчетов, составленных шотландскими священниками. “Ранее возникали подозрения, а теперь есть сведения, что он вступил в сделку с дьяволом, и время, которое он проводил в своем кабинете, он тратил на изучение темного искусства и беседы со стариной Ником”, — отмечается в “Отчете”[10].

Неважно: Бригс все же восхищался им. Они переписывались, и Бригс планировал поездку в Эдинбург. “Надеюсь, я встречусь с ним этим летом, если будет угодно Господу”, — писал он Ашшеру в 1615 году. И встретиться у них получилось. В одном из источников того времени сообщается, что ученые четверть часа смотрели друг на друга в полном восхищении, прежде чем хоть кто-то решился нарушить молчание.

Впрочем, в конце концов они перешли к делу. Бригс полагал, что логарифмы Непера прекрасно подходят для тригонометрических вычислений, но для использования с обычными числами их следует доработать. Непер выбрал 10 миллионов как число, которое даст ему достаточное количество знаков после запятой. Бригс, однако, отметил, что в результате это вызывало излишние сложности.

Бригс сразу заметил, что в модели Непера неизбежно возникала ситуация, где

$$\log (A \times B) = \log A + \log B - \log 1$$

Логарифмы Непера были созданы таким образом, что log 1 не равнялся нулю. Бригс предложил изменить принцип вычисления логарифмов, чтобы приравнять log 1 к нулю. В таком случае вырисовывалась благоприятная картина:

$$\log (A \times B) = \log A + \log B$$

И это давало невероятно изящный способ связать сложение с умножением.

По сути, логарифмы — это способ выразить отношение между числами. Как мы видели, выражение $2^3 = 8$ сообщает нам такую же информацию, как и выражение "логарифм по основанию 2 от числа 8 равен 3". Но при использовании логарифмов мы можем менять "основание", чтобы упрощать расчеты. Бригс понял, что полезнее других основание 10, поскольку со степенями числа 10 логарифмы справляются легко. Раз log 1 приравнен к 0, то log 10 равняется 1, log 100 — 2, log 1000 — 3 и так далее. Как видите, логарифм описывает, сколько нулей идет после единицы при использовании арабских цифр. Поскольку 100 = 10 × 10 (десять в квадрате, или 10^2), 1000 = 10 × 10 × 10 (десять в кубе, или 10^3) и так далее, становится ясно, что усовершенствованный логарифм тесно и очень просто связан с процессами умножения.

Бригсу — а затем и Неперу — стало очевидно, что астрономам и другим пользователям системы Непера теперь будет гораздо проще производить сложные расчеты. Ученым оставалось лишь пересчитать 10 миллионов значений из книги логарифмов Непера. Именно этому они и посвятили следующие два года.

Их совместная работа завершилась, когда весной 1617 года Непер умер от подагры. Но Бригс не отступился от задачи. Таблицы были закончены (с помощью голландского математика Адриана Влакка) и опубликованы в голландском городе Гауде летом 1628 года. Это были знакомые нам "логарифмы по основанию 10" всех натуральных чисел от 1 до 100 000, вычисленные с точностью до 14 знаков после запятой. В публикации также содержались таблицы натуральных синусов с точностью до 15 знаков после запятой и другие тригонометрические данные. Через два года после выхода сборника Бригс тоже скончался, но к тому моменту их с Непером труд оказался доведен до конца.

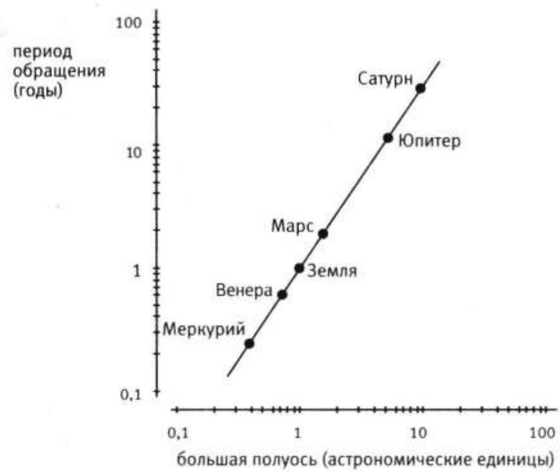
Упрощенные расчеты

Позже Пьер-Симон Лаплас отметил, что сэкономленное логарифмами время, пожалуй, "удвоило продолжительность жизни астронома"[11]. В случае с Кеплером, однако, этим дело не ограничилось: складывается впечатление, что логарифмы подтолкнули его мыслить иначе. Есть основания полагать, что он вывел третий закон планетарного движения — совершив один из величайших прорывов в истории науки — во многом благодаря открытию этих численных отношений.

Кеплер опубликовал два первых закона в 1609 году, но третий сформулировал лишь в 1618-м — через два года после знакомства с работой Непера. Третий закон математически связывает время, за которое планета делает оборот вокруг Солнца, с пространственной протяженностью более длинной, "большой" оси ее орбиты. Говоря на языке математики, квадрат периода обращения планеты пропорционален кубу "большой полуоси" (большая полуось — это половина большой оси). Кеплер пришел к этому выводу не через квадраты и кубы, а через отношения. 8 марта 1618 года он сказал, что “ему в голову пришло”, что “отношение периодов обращения двух любых планет ровно в полтора раза больше отношения средних расстояний”[12]. Мы можем перевести это на язык логарифмов отношений периодов и расстояний. Если планета А совершает оборот вокруг Солнца за время $T_А$, а радиус ее орбиты (среднее расстояние планеты от Солнца) равен $r_А$, а планета В совершает оборот вокруг Солнца за время $T_В$ при радиусе орбиты $r_В$, то

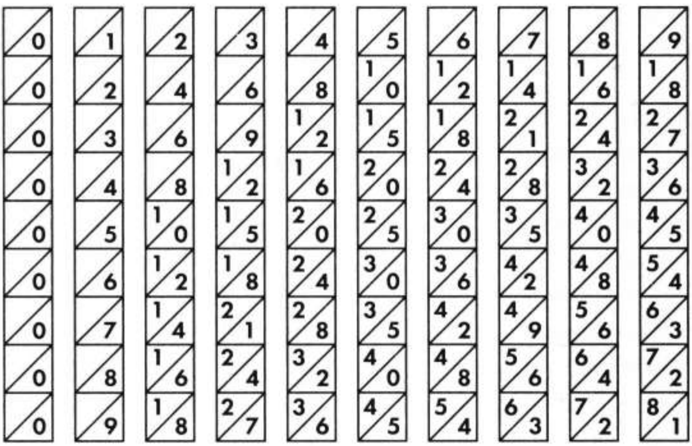
$$\log\left(\frac{T_A}{T_B}\right) = 1{,}5 \log\left(\frac{r_A}{r_B}\right)$$

Если мы построим график с логарифмическим масштабом на обеих осях, связь станет очевидной. Судя по всему, в какой-то момент в промежутке с 1609 по 1618 год мозг Кеплера совершил логарифмический скачок. Логично предположить, что Непер (и Бригс), возможно, сделали непредвиденный и почти не оцененный вклад в астрономию.



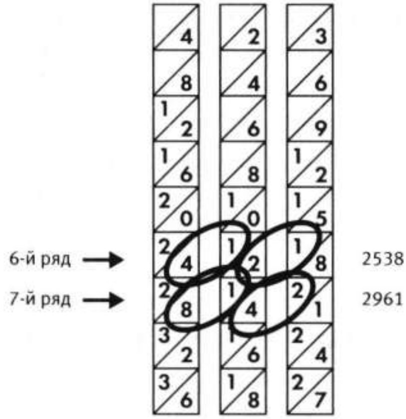
Иоганн Кеплер увидел логарифмическую связь между диаметром орбиты планеты и временем обращения этой планеты вокруг Солнца

Еще больше времени и сил сэкономила автоматизация этих расчетов. Первый шаг к ней сделал Непер, который предложил использовать для вычислений деревянные палочки, названные палочками Непера (или костями Непера, когда впоследствии их начали изготавливать из слоновой кости). Как и в случае с логарифмами, Непер разработал палочки, чтобы упростить сложные вычисления. Палочки были поделены на квадраты, каждый из которых был по диагонали поделен на два треугольника. В каждом треугольнике стояла цифра, и расположение цифр превращало эти палочки в счетный инструмент, который требовал от пользователя умения не умножать, но складывать.



Набор палочек Непера

Допустим, вы хотите умножить 423 на 67. Возьмите палочки, в верхней части которых стоят цифры 4, 2 и 3, и положите их рядом. Теперь выпишите цифры из шестого ряда, складывая по диагоналям: у вас получится 2, 4+1, 2+1 и 8, то есть 2538. Теперь поступите аналогично с седьмым рядом: у вас получится 2, 8+1, 4+2 и 1, или 2961.



Умножение 423 на 67
с помощью палочек Непера

Теперь сложите полученные четырехзначные числа, сместив число из шестого ряда на один знак влево (поскольку шестерки в этой сумме символизируют десятки, а семерки — единицы). Сложите 25 380 и 2961. Получится 28 341, и это произведение 423 и 67.

Поскольку палочки Непера упрощали умножение, деление и извлечение квадратных корней, они завоевали огромную популярность и производились во множестве вариаций (включая и такие, которые позволяли извлекать квадратные и кубические корни), пока не легли в основу более сложных инструментов. Некоторые из них были автоматизированными: машина, созданная в 1623 году Вильгельмом Шиккардом, даже складывала нужные числа, чтобы вам не приходилось делать это в уме. В 1650-х годах французский инженер Пьер Пети нанес числа на бумажные полоски, которые надел на барабан, чтобы они могли двигаться относительно друг друга, еще сильнее упрощая умножение. Вскоре после этого немецкий ученый-универсал Афанасий Кирхер пошел дальше и создал машину для умножения на базе палочек Непера, добавив в нее также собственные изобретения, чтобы расчеты производились при повороте рукоятки. Однако, как бы хорошо такие машины ни справлялись с автоматизацией умножения, их роль была ничтожной в сравнении с той, что сыграло универсальное полуавтоматическое математическое оружие, называемое счетной, или логарифмической, линейкой.

Калькулятор столетий прогресса

Одним из первых следствий появления логарифмических таблиц Непера и Бригса стало осознание, что можно обходиться и без таблиц. Можно нанести числа на логарифмическую линейку, где промежуток между 1 и 2 равен промежутку между 2 и 4 или между 4 и 8.

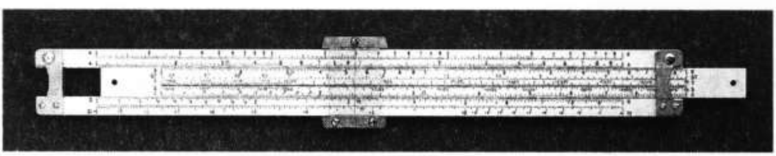
Логарифмическая линейка

Сопоставление двух линеек позволяет производить расчеты: две линейки становятся, по сути, переносной логарифмической таблицей. Первым это сделал еще один профессор Грешем-колледжа — Эдмунд Гантер. Он выгравировал нужные числа на деревянной планке в два фута длиной, которую стали называть линейкой Гантера. С помощью циркуля-измерителя, заостренные ножки которого позволяют измерять расстояние между точками, математик вычислял суммы и разности, оценивая лишь длины. Гантер сравнивал свою логарифмическую линейку с нанесенными на карту отметками, которые обозначали линии румбов, обратные курсы и тригонометрические функции, обеспечивая моряков многофункциональным навигационным инструментом, применявшимся сотни лет.

Вскоре у сухопутных крыс появился даже более продвинутый инструмент, и произошло это благодаря Уильяму Отреду. Он предложил совместить две деревянных планки с нанесенными на них числами логарифмической шкалы, чтобы эти планки могли сдвигаться относительно друг друга. Устройство такой линейки позволяло подготовленному пользователю осуществлять всевозможные вычисления. “Счетная линейка” Отреда произвела революцию в мире быстрых и точных расчетов. Исаак Ньютон явно оценил изобретение по достоинству: в 1672 году он написал Джону Коллинзу, что использовал линейку при решении кубического уравнения. Коллинз заинтересовался, потому что аналогичным образом можно было вычислять объем жидкости в частично наполненной бочке, — так математика снова нашла применение в сфере налогообложения[13].

Ньютон предложил и способ усовершенствовать конструкцию инструмента: он первым применил подвижный бегунок, без которого сегодня не обходится ни одна логарифмическая линейка. В конце XVIII века Джеймс Уатт дополнил линейку шкалами для инженерных расчетов и назвал свой вариант “сохо-линейкой”. С ее помощью он рассчитал технические характеристики недавно изобретенного парового двигателя, и многие его современники взяли сохо-линейку на вооружение. По трудам Уатта видно, что логарифмическая технология заложила фундамент промышленной революции. Химик Джозеф Пристли использовал ее, чтобы обрабатывать результаты своих экспериментов, и так определил химический состав воздуха. Счетная линейка обрела такую важность, что по другую сторону Ла-Манша французским государственным служащим приходилось доказывать свое умение обращаться с ней на квалификационном экзамене[14].

Спрос на логарифмические линейки достиг пика в XX веке. Наука, инженерия и промышленность процветали. В них было не продвинуться без математики: счетная линейка стала незаменимым инструментом в лабораториях, заводских цехах и конструкторских бюро во всем западном мире. И технология продолжала развиваться, предоставляя пользователям новые функции и обеспечивая более высокую точность. Только в первое десятилетие XX века появилось 90 новых модификаций линейки. Нобелевский лауреат Джулиус Аксельрод применял ее в работе, которая привела к созданию современных антидепрессантов, называемых ингибиторами обратного захвата серотонина. Кэтрин Джонсон не обходилась без линейки при расчете траектории полета Алана Шепарда, первого американца в космосе. С ее помощью Джонсон рассчитала и траектории экспедиций "Аполлона" к Луне. Одновременно с ней инженеры NASA орудовали логарифмическими линейками при проектировании и сборке ракет и посадочных модулей для программы "Аполлон". Счетная линейка даже входила в стандартный набор инструментов астронавтов с "Аполлона": не будь ее, Базз Олдрин не сумел бы выполнить последние расчеты для высадки на Луну в 1969 году. В 1969 году его логарифмическая линейка *Pickett Model N600-ES* продавалась за 10 долларов 95 центов. В 2007 году ее выставили на аукцион, и кто-то приобрел ее за 77 675 долларов.



Логарифмическая линейка Базза Олдрина
Heritage Auctions, HA.com

Это весьма впечатляющая цифра, но существовала и другая счетная линейка, сыгравшая еще более значимую роль в истории человечества. Она принадлежала физику Энрико Ферми и помогла ему создать изменившую мир технологию атомной бомбы.

Рождение бомбы

Очевидцы сообщают, что в 15 часов 25 минут 2 декабря 1942 года лицо Энрико Ферми озарила улыбка. Он стоял среди других ученых и инженеров на сквош-корте под западными трибунами стадиона *Stagg Field*, принадлежащего Чикагскому университету. Говорят, он сложил свою логарифмическую линейку и повернулся к коллегам. "Реакция самоподдерживается, — объявил он. — Кривая экспоненциальна"[15].

Речь шла о первой контролируемой ядерной цепной реакции. Чтобы выяснить, можно ли спровоцировать такую цепную реакцию, Ферми многие годы проводил эксперименты и производил расчеты, не выпуская логарифмической линейки из рук. В то время ответа на этот вопрос еще не было, а сегодня он, естественно, считается чрезвычайно важным. Эта реакция привела к созданию атомной бомбы и развитию атомной энергетики. Тот момент, наступивший благодаря умелой работе с логарифмическими линейками и тщательному изучению экспоненциальных кривых, определил мировую историю на следующие полвека.

Ферми родился в Риме и приехал в Чикаго из Стокгольма. В 1938 году ему присудили Нобелевскую премию по физике за "доказательство существования новых радиоактивных элементов, полученных при облучении нейтронами, и связанное с этим открытие ядерных реакций, вызываемых медленными нейтронами". Нейтроны высвобождались из ядер атомов бериллия, урана и других радиоактивных элементов. Ферми научился замедлять нейтроны — и сначала применял для этого не что иное, как парафин, — чтобы они взаимодействовали с атомами в других металлах и высвобождали ядерные частицы, в результате чего эти металлы тоже становились радиоактивными. Но цель его заключалась в том, чтобы сделать этот процесс самоподдерживающимся, то есть использовать нейтроны для высвобождения новых нейтронов, которые, в свою очередь, высвобождали бы еще больше нейтронов. В результате этого процесса высвобождалось бы огромное количество энергии. Научившись контролировать ее, мир получил бы новый и почти неиссякаемый источник энергии.

На церемонию вручения Нобелевских премий в Стокгольме Ферми пришел в традиционном фраке с черной бабочкой. Когда на следующий день в итальянской прессе появились фотографии с торжества, вспыхнул скандал. Утверждалось, что Ферми должен был выразить поддержку правительству — диктатуре Бенито Муссолини, — надев на церемонию фашистскую униформу и поприветствовав короля Швеции фашистским салютом. Разгневавшись на фашистов, Ферми не вернулся в Италию. Вместо этого он отправился в Америку, где поселился в Нью-Йорке, чтобы продолжать работу в сотрудничестве с физиками Колумбийского университета.

Как только идея о контролируемом мощном высвобождении энергии стала превращаться в возможность, один из коллег Ферми по Колумбийскому университету, Лео Силард, написал письмо президенту Рузвельту. Он предложил основать программу по развитию атомной энергетики и предупредил президента об опасностях, которые могут возникнуть, если такая технология попадет в плохие руки. Альберт Эйнштейн подписал письмо, и так родился Манхэттенский проект.

Ферми понимал, что атомную бомбу не построить, если каждый быстрый нейтрон будет выбивать лишь один нейтрон из мишени или если в мишени окажется недостаточное количество нейтронов. В связи с этим ему нужно было произвести сложнейшие расчеты радиоактивных выбросов из каждого атомного ядра, а также определить "критическую массу" — минимальное количество радиоактивного вещества, необходимое для самоподдерживающейся реакции. Эти расчеты, осуществляемые с помощью логарифмической линейки, показали, что если 100 быстрых нейтронов высвободят 103 или 104 других нейтрона — чуть больше, чем по одному нейтрону каждый, — то реакция будет самоподдерживающейся и развивающейся по экспоненте. Для этого подходил уран: по расчетам Ферми, при делении ядра урана должно было высвобождаться в среднем 1,73 нейтрона. Он поставил эксперимент. Его первый семитонный реактор состоял из спрессованного в брикеты оксида урана (и графитовых блоков для контролирования реакции) и возвышался на 3,5 метра. Разместить тяжелые блоки ученым помогли члены футбольной команды Колумбийского университета.

Хотя Ферми назвал получившуюся стопку "экспоненциальной поленницей", реакция не сразу стала развиваться по экспоненциальному закону. Из-за особенностей конструкции один нейтрон в среднем высвобождал 0,87 другого нейтрона. Конструкцию усовершенствовали, и это число поднялось до 0,918, но и этого было недостаточно. Ученым нужно было построить реактор иначе, увеличив его в размерах, и для этого они отправились в Чикаго. Потенциально он был таким мощным, что Ферми подготовил специальный кадмиевый стержень, поглощающий нейтроны, который можно было бы бросить в реактор, чтобы избежать опасного, слишком быстрого экспоненциального высвобождения нейтронов. В день, когда "чикагская поленница" продемонстрировала экспоненциальный рост, Ферми с помощью логарифмической линейки вычислил, какую часть стержня нужно погрузить в реактор, чтобы не подвергнуть наблюдателей опасности.

Счетная линейка Ферми не раз появлялась на сцене в поворотные моменты истории. Ученый взял ее с собой и 16 июля 1945 года, когда в США взорвали первую атомную бомбу. Находясь в наблюдательном бункере в 30 километрах к северо-западу от полигона, где состоялось испытание "Тринити", Ферми измерил силу взрывной волны, проследив за движением обрывков бумаги. Когда их сдуло, Ферми вытащил линейку, произвел несколько вычислений и объявил, что мощность взрыва составила 10 тысяч тонн в тротиловом эквиваленте[16]. Как выяснилось, он ошибся: на самом деле она составила более 20 тысяч тонн. Но логарифмическая линейка, как и любой другой инструмент, всего лишь работает с теми вводными, которые получает.

Последующие модификации счетной линейки использовались вплоть до середины 1970-х годов. Даже если вам самим не случалось ее применять, вполне возможно, что у ваших родителей, бабушек и дедушек где-то дома еще хранится одна из старых линеек. Может, вы даже носите часы с круговой логарифмической линейкой на вращающемся ободке. Такие часто можно увидеть у пилотов: многие из них привыкли производить расчеты скорости, расстояния, высоты и расхода топлива по старинке. И все же логарифмическая линейка устарела почти сразу после изобретения электронного калькулятора, и мы быстро забыли о том, как логарифмы помогли нам построить наш нынешний мир.

Чудо *e*

Уильям Отред, конечно, и не догадывался, что изобретенная им логарифмическая линейка сыграет столь важную роль в истории человечества. Впрочем, он, похоже, был не из тех, кого волновало свое место в истории. Во втором издании первой книги Непера о логарифмах, вышедшем в 1618 году, содержится приложение, которое, как полагают ученые, написал Отред[17]. Очень жаль, что он решил его не подписывать, ведь его появление ознаменовало еще один исторический момент: из него мы впервые узнали об удивительном числе, которое сегодня называем *e*.

Как и Бригс, Отред заметил, что выбранный Непером метод вычисления логарифмов можно усовершенствовать. В его приложении (если его и правда написал Отред) приводится таблица логарифмов, не имеющих ничего общего с логарифмами Непера. Рядом с числом 8, например, находится число 2079441. Эти цифры (только с десятичной запятой после 2) составляют то, что мы сегодня называем "натуральным логарифмом" 8. Иными словами, 2,718281828 в степени 2,079441 равняется 8.

У вас может возникнуть закономерный вопрос: что "натурального" в любом из этих чисел? Если речь идет о 8 и 2,079441 — ничего. Но Отред выбрал "основание" 2,718281828 — и на этом число не заканчивается, а продолжается бесконечно, — которое, похоже, лежит в основе множества природных явлений.

Никто не знает, почему Отред поместил эту таблицу в книгу. Никакого объяснения этому нет, и подразумевается лишь, что читатели найдут ее полезной. Следующее появление натуральных логарифмов случилось лишь шестьдесят пять лет спустя, когда Якоб Бернулли произвел вычисления о природе начисляемых процентов.

В 1865 году Бернулли работал над задачей, связанной с тем, как часто вы бы хотели, чтобы банк начислял на ваш счет проценты. Представьте, что у вас есть 1000 долларов и банк (в этом крайне далеком от жизни мысленном эксперименте) дает вам 100% годовых. Если их начислят в конце года, у вас будет 2000 долларов. Но что, если бы вам начисляли проценты за полгода уже по истечении 6 месяцев после открытия вклада? Тогда у вас было бы 1500 долларов, которые полгода лежали бы в банке, принося вам 100% годовых. В таком случае в конце года у вас было бы 2250 долларов.

Это прекрасно, поэтому давайте и дальше настаивать на ранней выплате процентов — и копить деньги. При ежеквартальной выплате процентов в конце года у вас будет 2414 долларов, а при ежемесячной — 2613 долларов. А если выплачивать проценты каждый день? Тогда у вас наберется 2715 долларов. Бернулли это показалось странным. При расчете процентов в 30 раз (примерно) чаще ваш капитал увеличивается всего на 102 доллара, и переход от ежемесячной выплаты к ежедневной вряд ли стоит того. Как открыл Бернулли, так происходит потому, что процентные выплаты стремятся к пределу, где разница практически стирается. Этот предел называется *e*. Его значение составляет 2,71828... Конца этим цифрам нет, но *e* можно определить с помощью различных математических выражений.

Большую часть черновой работы по вычислению значения *e* провел Леонард Эйлер. Эйлер был, пожалуй, лучшим математиком в истории. Он родился в 1707 году в швейцарском Базеле и практически все науки освоил сам, поскольку в школе его не обучили математике, а заносчивый Иоганн Бернулли отказался стать его наставником и велел ему убираться восвояси и читать книги. В конце концов Эйлер сам стал автором книг, которые читали другие математики. "Читайте Эйлера, читайте Эйлера, — твердил Лаплас своим юным последователям. — Он наш общий учитель"[18].

Судя по всему, Эйлер был изобретателем от бога. Его математические изобретения, охватывающие огромный диапазон тем, рождались так легко, что он сохранил плодовитость даже после того, как ослеп и обзавелся кучей детей, которые путались у него под ногами, пока он работал. При этом занимался Эйлер не только математикой. Он был старшим советником прусского короля Фридриха, которому помогал с инженерными проектами, вопросами артиллерии и даже с проведением национальной лотереи. Он также некоторое время работал военным врачом на Российском флоте и проводил исследования в Петербургской академии наук. Казалось, нет такого дела, с которым он бы не справился.

Именно Эйлер обозначил основание натурального логарифма символом *e*. Иногда высказывается мнение, что он выбрал первую букву своей фамилии, но мало кто готов поверить, что он был настолько самовлюблен. Скорее всего, он выбрал *e* просто потому, что эту букву ранее не использовали в математической записи. Теперь, однако, число *e* порой называют числом Эйлера, и мы вычислили уже несколько триллионов его десятичных знаков. Однако мы никак не можем постичь всю глубину его мощи. Откровенно говоря, на первый взгляд число *e* кажется нелепым. Так, в 1898 году российский экономист Владислав Борткевич опубликовал собранные за двадцать лет данные о травмах от ударов копытами в прусской кавалерии[19]. В 109 из 200 случаев обошлось без жертв, но в среднем раз в 1,64 года от удара копытом погибал один человек. Подставив эти числа в уравнение, получим *e*:

$$\left(\frac{200}{109}\right)^{1.64} = 2{,}71$$

Если это вас не удивляет, как насчет такого: *e* можно вывести, если нанести на карту Лондона места падения немецких бомб "Фау-1" во время Второй мировой войны. Его же мы увидим и если изучим темпы появления мутаций в вашей ДНК. Но это не случайность и не мистика. Это следствие того, что *e* фигурирует в числах, описывающих определенные типы событий. Если событие повторяется, но редко, и каждое новое событие происходит независимо от других, закономерность, которая наблюдается в связи с этим (хоть во времени, хоть в пространстве), можно описать с помощью так называемого распределения Пуассона. Мы снова встретимся с ним в седьмой главе, в которой предметом нашего рассмотрения станет статистика, но числа в распределении Пуассона показывают, что в нем всегда участвует и число *e* Эйлера.

Но пока самая важная особенность *e* проявляется в математическом анализе, поскольку число *e* является собственной производной. Попробуем понять, почему это важно.

В главе о математическом анализе я упоминал, что существуют различные правила вычисления производной — или тангенса угла наклона — кривой. Когда кривая задается уравнением $y = b^x$, по правилам ее производная — просто kb^x, где k — неизвестная, численно связанная (довольно сложным образом) с b. Иными словами, производная любой экспоненциальной функции — это k, умноженная на исходную функцию. И здесь возникает логичный вопрос: существует ли условие, при котором число k равно 1? Это было бы неплохо: в таком случае функция становится собственной производной, что невероятно упрощает математический анализ.

Ответ на этот вопрос — да. И условие таково: b, основание нашего исходного равенства $y = b^x$, должно равняться 2,71828... Иными словами, если вычислять производную $y = e^x$, $dy/dx = e^x$.

С учетом этого важность *e* невозможно переоценить. Если вы способны перестраивать свои экспоненциальные функции, каким бы ни было их основание, и приводить их к основанию *e*, у вас появляется возможность осуществлять их математический анализ с непревзойденной легкостью и благодаря этому решать множество интересных задач. Так, если вам хочется выяснить, сколько новых случаев заражения вирусом будет выявлено завтра, вы понимаете, что ожидаемое число будет некоторым образом связано с числом случаев, выявленных сегодня. Это экспоненциальная функция, которую можно записать с помощью произвольных чисел. Но если вы хотите поиграть с математикой и вычислить такие вещи, как скорость изменений, часто вам проще использовать в записи число Эйлера *e*, возведенное в степень, кратную проходящему времени. Это объясняется тем, что такая степень является коэффициентом пропорциональности общего числа случаев к скорости роста. По тем же причинам мы применяем *e* при исследовании целого ряда иных феноменов. Число *e* играет важнейшую роль в финансовых вопросах, например при расчете сложных процентов, в конфигурации разветвляющихся кровеносных сосудов в организме человека, в динамике роста бактериальных колоний, в скорости распространения теплоты от горячего тела к холодному (именно оно помогло составить уравнения, которые стали двигателями промышленной революции), а также в естественной убыли количества радиоактивного вещества в изучаемом образце. Разберем последний пример: если исходная масса m_0 испускает излучение со скоростью r, по прошествии времени t останется радиоактивная масса m_0e^{-rt}. Атомная эпоха наступила во многом благодаря тому, что ученые научились использовать *e* таким образом (а необходимые расчеты, конечно, производились с помощью логарифмической линейки).

Важнее всего, пожалуй, то, что, отталкиваясь от любой логарифмической таблицы, можно составить другую логарифмическую таблицу с новым основанием, но нет основания ценнее, чем *e*. Судя по всему, именно об этом Отред и написал в приложении к книге Непера. Мы никогда не узнаем, каким образом он проник так глубоко в суть вещей, но главное, что он оказался прав: как мы увидим в следующей главе, число *e* открыло нам весь диапазон технологий XX века — оно не только дало толчок к развитию банковского дела и созданию атомных бомб, но и подарило нам такие электрические новшества, как радио, электрическая сеть и, наконец, компьютер.

Впрочем, прежде чем двигаться дальше, нам стоит отметить и другие достижения Непера. Как ни посмотри, хватило бы и одних логарифмов. Мы увидели, что их появление привело к целым столетиям новаторства: составлению карт звездного неба, созданию парового двигателя, наступлению атомного века и использованию счетных линеек, с помощью которых астронавты "Аполлона" осуществляли особенно важные расчеты. Но Непер также подарил нам десятичные дроби.

Десятичные дроби

Об успехе десятичных дробей говорит то, что мы уже встречали их в этой книге, но нам даже не пришлось останавливаться и обсуждать, что именно они собой представляют. Давайте все же уделим им немного времени.

По сути, десятичные дроби — это просто другой способ записи дробей. Первая цифра после запятой обозначает количество десятых долей, вторая — сотых, третья — тысячных и так далее. Насколько нам известно, впервые эта идея нашла применение в книге арабского математика Абу-л-Хасана Ахмада ибн Ибрахима аль-Уклидиси, написанной в X веке. Он даже предложил особую форму записи — использовав знак, похожий на апостроф, — чтобы отделять целую часть числа от дробной.

Западные математики обратили внимание на десятичные дроби лишь в 1585 году, когда выходец из Брюгге Симон Стевин опубликовал книгу "Десятая", в которой объяснил азы работы с ними. Твердо уверенный в практической пользе десятичных дробей, Стевин заявил, что рано или поздно страны перейдут к чеканке денег по десятичной системе.

Правда, в его собственной записи дроби выглядели иначе. Стевин обозначал начало дробной части нулем, заключенным в круг. За десятыми долями следовала заключенная в круг единица, за сотыми — заключенная в круг двойка и так далее. В 1612 году немецкий математик Бартоломеус Питискус избавился от этого мусора и предложил использовать в качестве разделителя знакомую нам точку. Популяризатором этой записи стал не кто иной, как Джон Непер, который применил ее в своих чудесных логарифмических таблицах.

Теперь мы узнали все необходимое, чтобы сделать следующий шаг — совершить поразительный скачок, который позволит нам вырваться из собственного мира и исследовать другие миры. Помните, как Непер изначально разработал логарифмы, чтобы помочь с расчетами астрономам и морякам? Поскольку в их основе лежит тригонометрия (а это слово, кстати, изобрел как раз Бартоломеус Питискус, отец десятичной точки), существуют любопытные взаимосвязи между логарифмами, экспонентами и вычисляемыми на основе треугольников отношениями, которые мы называем синусами, косинусами и тангенсами. Но в них участвует и еще кое-что, с чем мы еще не знакомы: комплексное, или мнимое, число. Как мы скоро увидим, "мнимое" — эпитет неудачный: это странное математическое творение достаточно реально, чтобы питать почти весь современный мир.

Глава 6
Комплексные числа
История электрического века

Случалось ли математическому изобретению получить более обманчивое название? Комплексные, или мнимые, числа появились из алгебры и сформировали собственную область науки — и собственную сферу влияния. Хотя они и не похожи на другие числа, они, несомненно, реальны: без них в современном мире не обходится практически ничего. Электрификация Америки, начинка мобильного телефона, звук в кинозале и треск усилителя Marshall — все перечисленное обязано своим существованием этим числам. Кремниевая долина в буквальном смысле была основана на них. И все же хорошо, что математик Чарльз Лютвидж Доджсон — более известный как Льюис Кэрролл — не понял, какую пользу они принесут, ведь иначе нам не удалось бы побывать на пресловутом безумном чаепитии у Шляпника.

Кларенс Леонидас Фендер был одним из миллионов американцев, потерявших работу в Великую депрессию, разразившуюся в 1930-х годах. Фендер получил диплом бухгалтера, окончив Фуллертонский колледж в Калифорнии, устроился в Калифорнийский дорожный департамент и так полюбил свою работу, что даже не задумывался о смене профессии. Позже он вел бухгалтерию в компании, которая торговала шинами. Лишившись и этой работы, он решил, что настало время перемен. Он вспомнил о своем детском увлечении, взял в кредит 600 долларов и открыл радиомастерскую.

Был 1938 год, и радиомастерская Фендера не только предлагала услуги по ремонту радио, но и продавала и давала в аренду собранные по собственному проекту усилители — главным образом для систем оповещения. Но важнее всего оказалась внедренная Лео Фендером инновация. Услышав о новомодных электрогитарах с дребезжащими усилителями, он взялся за проектирование и производство более удачных моделей. Никто не понимает, как он к этому пришел: похоже, он просто скопировал и приспособил под свои нужды усилительные контуры из выпущенного Американской радиовещательной корпорацией "Руководства по радиоприемникам", содержавшего базовые инструкции по сборке радиооборудования.

Первые усилители вышли из его мастерской в 1945 году. Год спустя он начал продавать усовершенствованные модели, которые прозвали "деревяшками", потому что их корпуса изготавливались из твердой древесины. Усилители и гитары Фендера прославились на весь мир, и место, где находилась его радиомастерская в Фуллертоне, теперь отмечено табличкой и внесено в Национальный реестр исторических мест США. Невозможно, впрочем, отрицать, что по звучанию первых усилителей Фендера было ясно, что проектировал их бухгалтер, и вскоре доморощенные инженеры-электрики принялись за совершенствование конструкции.

Одна из таких попыток привела к появлению другой памятной таблички, на этот раз на стене дома номер 76 по Аксбридж-роуд в районе Хэнуэлл на западе Лондона. На табличке просто написано, что именно там Джим Маршалл продал свой первый гитарный усилитель.

Маршалл торговал главным образом барабанами — он преподавал игру на ударных, — но также и усилителями Лео Фендера. Однако в начале 1960-х годов гитаристам хотелось уйти от тонкого и чистого звука этих усилителей. Барабаны становились все громче, и гитаристам нужны были усилители, способные перекрыть их грохот — и, пожалуй, выдать более интересное звучание. Маршалл решил подзаработать на конструировании и продаже собственных усилителей с характерным оглушительным звучанием, но у него для этого недоставало инженерных навыков. Ими не располагал и работавший с ним мастер по ремонту оборудования Кен Брэн. Но Брэн знал, к кому обратиться.

Брэн был радиолюбителем и состоял в Гринфордском радиоклубе, который собирался пятничными вечерами. Именно там он познакомился с 18-летним Дадли Крейвеном, стажером-электротехником из компании *EMI Electronics*, находившейся в Хейсе на западе Лондона. В клубе Крейвен слыл гением электроники. После одной из пятничных встреч Брэн уговорил его зайти в закусочную выпить кофе и там предложил ему помочь им с Маршаллом в осуществлении плана[1].

Крейвен обрадовался возможности подзаработать. Вечерами после учебы и работы он стал уходить в отцовский сарай, где пускал в ход свое знание электроники, чтобы усовершенствовать конструкцию усилителя Лео Фендера. В стремлении обеспечить трескучее перегруженное звучание на чудовищной громкости, какого жаждал Джим Маршалл, он заменял часть деталей и добавлял новые. В сентябре 1963 года он понял, что движется в верном направлении, когда его первый усилитель купил Пит Таунсенд, который вскоре основал группу *The Who*. Таунсенд заплатил Маршаллу 110 фунтов.

Комиссия Крейвена составила менее 0,5 % — всего 10 шиллингов. Маршалловское звучание, приведшее к рождению рок-музыки, появилось благодаря таланту молодого паренька, который просто хотел заработать денег на карманные расходы. Однако ни этого звучания, ни того, что привело к его появлению, — включая изобретение радио и электрификацию Америки — не было бы без комплексных чисел.

Квадратный корень из чего?

Мнимые, или комплексные, числа — вовсе не вымысел. На самом деле они оказали на нашу жизнь гораздо более значительное влияние, чем могло бы оказать нечто поистине мнимое. Без комплексных чисел, сыгравших важнейшую роль в подведении электричества к домам, заводам и серверным фермам, обеспечивающим работу интернета, современного мира просто не существовало бы. Впрочем, прежде чем погружаться в тему, нам, вероятно, стоит объяснить, что же такое комплексные числа.

Мы уже знаем, как возвести число в квадрат (умножить его на само себя), и знаем, что отрицательные числа при возведении в квадрат становятся положительными (как помните, минус на минус дает плюс). Следовательно, $(-2) \times (-2) = 4$. Мы также знаем, что извлечение квадратного корня — это обратная операция по отношению к возведению в квадрат. Получается, что число 4 имеет два возможных квадратных корня: 2 и –2. Комплексное число появляется, когда мы пытаемся извлечь квадратный корень из –4.

В чем здесь вообще смысл? Если возвести число в квадрат, будь оно хоть положительным, хоть отрицательным, результат будет положительным. Следовательно, невозможно произвести обратную операцию для отрицательного числа. Несомненно, так и полагал Герон Александрийский, египетский архитектор, математические хитрости которого из книги “Стереометрия” подарили нам купол Софийского собора в Константинополе. В той же книге он объяснил, как найти объем усеченной квадратной пирамиды, то есть пирамиды с усеченной верхушкой. В одном из примеров он для этого вычел 288 из 225, после чего должен был извлечь квадратный корень из полученного числа. Но число это оказалось отрицательным: –63. Следовательно, ответом был $\sqrt{-63}$.

По какой-то причине — может, кто-то решил, что в расчеты вкралась ошибка, может, переписчик неправильно скопировал текст, а может, счел это абсурдным — из дошедших до нас списков видно[2], что Герон опустил знак минуса и просто извлек $\sqrt{63}$.

Квадратные корни из отрицательных чисел и есть комплексные, или мнимые, числа. Первым о том, что их не стоит оставлять без внимания, заговорил итальянский астролог Джероламо Кардано. Мы уже встречались с Кардано в главе об алгебре, и именно так, решая кубические уравнения, он и столкнулся с этой проблемой. Сначала он назвал такие числа "невозможными случаями". В своей книге по алгебре "Великое искусство", вышедшей в 1545 году, он привел пример, в котором попытался разделить 10 на два числа, при перемножении дающих 40. В процессе расчетов у него возникло выражение $5 + \sqrt{-15}$.

Кардано не смутила эта неожиданная встреча. Он даже снабдил ее комментарием. Но свою мысль он записал на латыни, и переводчики не могут однозначно сказать, что он имел в виду[3]. Одни считают, что он назвал это "ложным положением". Другие полагают, что он написал о "воображаемом" числе. Третьи утверждают, что он указал на "невозможность" решения такой задачи. Один из его последующих комментариев о том, как действовать в такой ситуации, либо велит нам "покончить с муками разума", либо сообщает, что "воображаемые элементы теряются". В другом месте Кардано называет это "арифметической тонкостью, которая... столь же изящна, сколь бесполезна". Он отмечает, что ситуация "поистине сложна... невозможно провести другие операции, которые проводятся с чисто отрицательными числами". Под чисто отрицательными числами он понимает обыкновенные отрицательные числа, например -4. Отрицательные числа его не смущали, и он написал, что "$\sqrt{9}$ равняется либо $+3$, либо -3, ибо плюс [умноженный на плюс] или минус, умноженный на минус, дает плюс". Он продолжил: "$\sqrt{9}$ — это не $+3$ и не -3, а некая малопонятная третья величина". Очевидно, Кардано полагал, что квадратные корни из отрицательных чисел — нечто мудреное и абсурдное, но при этом понимал, что их существование невозможно отрицать и что математику следует с ними работать. Но сам он этим заниматься не стал: ни в одном из его более поздних сочинений не упоминаются квадратные корни из отрицательных чисел. Он оставил эту задачу на откуп своему соотечественнику Рафаэлю Бомбелли, который взялся за нее через пару десятков лет.

Как выразился сам Бомбелли, в 1572 году ему в голову пришла "шальная мысль", что слагаемые в выражении $5+\sqrt{-15}$ можно рассматривать как отдельные элементы. "Казалось, в основе этого лежит софистика, а не истина", — отметил он, но все же осуществил задуманное. И мы поступаем так по сей день, поскольку этот метод работает.

Отдельные элементы Бомбелли мы называем действительными и мнимыми частями того, что в комбинации дает "комплексное число" (комплексное, как "военно-промышленный комплекс", то есть предполагающее комбинацию — действительной и мнимой частей, — а не усложнение). Но давайте говорить начистоту. Если, вспоминая математику, мы и научились чему-то, так это тому, что все числа мнимые. Числа — это просто запись, помогающая нам с понятием "сколько". В связи с этим называть квадратные корни из отрицательных чисел "мнимыми числами" — уничижительно и неразумно.

И все же следует понимать, что между ними есть разница. "Действительными" математики называют числа, которые знакомы вам лучше. Это "два" в сочетании "два яблока", это 3,14... в пи, это различные дроби. Как положительные числа в некотором смысле дополняются отрицательными, так и действительные числа дополняются числами, которые нам приходится называть мнимыми. Они похожи на инь и ян, на орла и решку. И на самом деле они вовсе не мнимые.

Развивая свою "шальную мысль", Бомбелли продемонстрировал, что числа нового типа играют собственную роль в реальном мире. Он взялся за кубическое уравнение, которое отчаялся решить Кардано: $x^3 = 15x + 4$. В решении Кардано возникло выражение с квадратным корнем из –121, и ученый просто зашел в тупик. Бомбелли, однако, подумал, что можно попробовать применить к квадратному корню обычные правила арифметики. И он предположил, что $\sqrt{-121}$ эквивалентен $\sqrt{121} \times \sqrt{-1}$, то есть $11 \times \sqrt{-1}$.

Свой великий прорыв Бомбелли совершил, когда осознал, что эти странные и, казалось бы, невозможные числа подчиняются простым арифметическим правилам, если в ходе вычислений отделить их от других, более привычных нам чисел. После этого оставалось лишь взять быка за рога.

Поработав с кубическим уравнением Кардано, он получил решение:

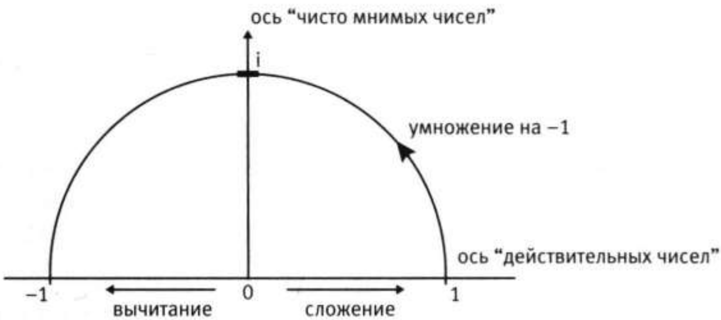
$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1})$$

Если разделить его на части, которые сейчас назвали бы действительной и мнимой, у нас получится $2 + 2$ и $\sqrt{-1} - \sqrt{-1}$. Мнимая часть исчезнет, и останется только $2 + 2$. Следовательно, один из корней уравнения $x^3 = 15x + 4$ — это $x = 4$. Подставьте 4 на место x и проведите проверку.

Мнимая реальность

Сегодня $\sqrt{-1}$, как правило, обозначается буквой i. Использовать ее предложил уже знакомый нам швейцарский математик Леонард Эйлер. Можно подумать, что он взял букву i, поскольку она идет первой в слове *imaginary*, "мнимый", но, скорее всего, Эйлер выбрал ее произвольно, как и e. Как бы то ни было, решение Эйлера закрепило за i статус чисто мнимого числа, и это сбивает нас с толку.

Чтобы лучше понять, что такое чисто мнимое число, представим числовую ось от –1 до 1 (можете представить лежащую перед вами линейку, слева у которой –1, а справа +1). Процесс перемещения по оси мы называем сложением и вычитанием (я стою в точке 0,3, прибавляю еще 0,3 и перемещаюсь в точку 0,6). Но также можно представить, как мы перемещаемся путем умножения. Если я начинаю в точке 1, то как мне попасть в точку –1? Путем умножения на –1. Представим умножение на –1 как половину оборота по окружности против часовой стрелки (в нашем случае окружность проходит через точки 1 и –1). Это поворот на 180 градусов. Математики предпочитают использовать другие единицы: 180° — это π радиан (360°, полный круг, — это 2π радиан).



Чисто мнимые числа и числовая ось

Что произойдет, если мы совершим лишь половину такого поворота? Мы остановимся на полпути от умножения на –1, то есть как если бы произвели умножение на $\sqrt{-1}$. Этот поворот на π/2 радиан (или 90°) помещает нас в верхнюю точку полуокружности, находящуюся на удалении от обычной числовой оси. Следовательно, можно считать, что квадратный корень из –1 находится на второй числовой оси, которая проходит под прямым углом к первой. Это просто еще один набор чисел, на этот раз на второй линейке, которая лежит крест-накрест под углом 90° к первой, и дальше всего от вас находится +1, а –1 — прямо у вас перед глазами.

И здесь мы приходим к любопытному выводу. Связь с вращением по кругу значит, что число i связано с π и синусами и косинусами углов. Посредником в этой связи выступает странное число e, с которым мы встречались в прошлой главе. Эйлер установил, как именно они взаимосвязаны, когда взял особый бесконечный ряд (ряд Тейлора) и вывел формулу, которую теперь называют формулой Эйлера:

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

Такова фундаментальная взаимосвязь между основанием натурального логарифма и чисто мнимым числом. Более того, можно свести ее к так называемому тождеству Эйлера:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Кому-то покажется, что в этой формуле есть нечто мистическое. В ней фигурируют основание натурального логарифма e, числа 0 и 1, которые представляют собой уникальные случаи на числовой оси, чисто мнимое число, само по себе исключительное, а также число π, питающее математику. Хотя их открыли в разное время разные люди, изучающие разные математические феномены, оказалось, что все они взаимосвязаны и сосуществуют в этом простом и изящном уравнении.

Впрочем, если взглянуть на него иначе, удивляться, пожалуй, станет нечему. В этой формуле, как и в числе π, нет ничего таинственного. Она является следствием того, что числа меняются и преобразовывают себя и друг друга при вращении. Это объясняется исключительно самой природой чисел, которые отражают взаимосвязь величин. Нам ведь не кажется мистическим движение по знакомой "действительной" числовой оси посредством сложения и вычитания. И преобразования путем умножения и деления, по сути, ничем не отличаются. Как вы помните, синусы и косинусы — это просто отношения (частные двух чисел), связанные с углами в треугольниках, и эти углы можно представить в виде долей π или кратных π величин в единицах, называемых радианами. Следовательно, мы здесь не раскрываем непостижимую загадку Вселенной, а получаем простой и полезный набор взаимосвязей, вытекающих из различных подходов к определению чисел.

Эти взаимосвязи не просто полезны — их можно назвать жизненно важными. Рассмотрим, например, их применение в естественных науках: составить полное математическое описание природы без чисто мнимых чисел просто не представляется возможным. Действительных чисел, которые мы так хорошо изучили, недостаточно. Их необходимо комбинировать с чисто мнимыми числами, чтобы создавать "комплексные" числа, впервые продемонстрированные Бомбелли. В результате, по словам математика Роджера Пенроуза, получается прекрасная завершенность. "Вскоре мы увидим, что комплексные числа, как и вещественные, а может быть, и в еще большей степени, обнаруживают поистине замечательное единство с природой, — отмечает он в книге «Путь к реальности». — Это выглядит так, как если бы сама природа была, как и мы, под впечатлением от общего и последовательного характера системы комплексных чисел и поручила им описывать тонкие процессы в самых малых масштабах"[4]. Иными словами, мы должны были открыть комплексные числа, поскольку они представляют собой неотъемлемый элемент описания природы.

Величайший вклад в науку комплексные числа, пожалуй, вносят своей важнейшей ролью в уравнении Шрёдингера, используемом в квантовой механике. Эта область математики дает нам наилучший способ описывать и прогнозировать поведение части базовых составляющих природы. Будь то фотоны (сгустки электромагнитной энергии, например света), электроны (отрицательно заряженные субатомные частицы), протоны и нейтроны (из которых состоят ядра атомов) или различные силы, возникающие между такими частицами, — все в природе, похоже, подчиняется законам, заключенным в этом уравнении. Его вывел австрийский физик

Эрвин Шрёдингер в 1925 году, и за это в 1933 году он удостоился Нобелевской премии. Это уравнение остается одним из самых важных и самых емких описаний поведения мира природы, и нам стоит на него взглянуть, хотя подробно разбирать его мы не станем. Обратите внимание на i, чисто мнимое число, которое стоит в нем в самом центре:

$$H\Psi(r,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r,t)$$

О странности и непостижимости квантовой теории сказано немало. Американский физик Ричард Фейнман, получивший Нобелевскую премию за разработку теории квантовой электродинамики, однажды заявил: “Думаю, можно смело сказать, что квантовую механику не понимает никто”[5]. В ее странности сомнений не возникает: уравнение Шрёдингера допускает существование такого явления, как “суперпозиция”, при котором субатомные частицы словно бы наделяются множественными сущностями и могут фактически находиться в двух местах одновременно или двигаться одновременно в двух разных направлениях. Есть и “квантовая запутанность”, которую Эйнштейн назвал “призрачным дальнодействием”. Призрачное оно потому, что, пребывая в состоянии запутанности, квантовые частицы, судя по всему, мгновенно оказывают влияние на свойства друг друга, как бы далеко друг от друга они ни находились в пространстве. Если толкнуть одну из частиц, пребывающих в запутанном состоянии, то вторая “ощутит” этот толчок, даже находясь при этом на другом конце Вселенной.

Все странные квантовые свойства были замечены в уравнениях квантовой теории задолго до того, как удалось пронаблюдать их в ходе экспериментов. И эти уравнения не обходятся без комплексных чисел.

Это объясняется тем, что мы имеем дело с явлениями, которые лучше всего описываются как волны. Первым такой подход к квантовым феноменам предложил французский аристократ герцог Луи де Бройль. Учась в аспирантуре на факультете естественных наук Парижского университета, он предположил, что любую частицу можно представить как волну, а любую волну — как частицу.

Основная идея де Бройля заключалась в том, чтобы считать электрон внутри атома волной, длина которой зависит от заряда. Когда заряд увеличивается, длина волны уменьшается. Сделать полное математическое описание такой волны можно лишь с использованием комплексных чисел. Главный фактор в этом описании — так называемая фаза. Обычно наличие фаз предполагает оценку относительно чего-то: так, фазы Луны меняются в зависимости от относительного расположения Луны, Земли и Солнца. Применительно к физическим волнам, например водяным и звуковым, фаза показывает, где вы находитесь относительно начала и конца волнового цикла (скажем, посередине). Но применительно к квантовым волнам фаза — нечто совсем иное: это простое свойство квантовой частицы. Можно сказать, что электрон находится в определенном положении, обладает определенным импульсом и пребывает в определенной фазе. Как ни странно, эта квантовая фаза не существует в одном физическом пространстве с частицей.

Чтобы согласовать свою идею с теорией относительности Эйнштейна, де Бройль допустил наличие дополнительных измерений. Если бы волна переносила энергию и импульс частицы в физическом пространстве, ей приходилось бы двигаться быстрее скорости света, а теория относительности этого не допускает. Де Бройль подчеркнул, что речь здесь идет о "фазовой волне", а не о "вещественной". Волна в данном случае — хотите верьте, хотите нет — представляет собой комплексное число, которое колеблется в некоем абстрактном измерении.

Возможно, вам уже и это кажется безумием, но дальше — хуже. Квантовая физика выделяет дополнительное измерение для каждого физического свойства каждого электрона. Именно поэтому Эрвин Шрёдингер назвал свое развитие идеи де Бройля "многомерной волновой механикой"[6]. Маленькая буква i в уравнении Шрёдингера кажется совсем простой, но создает огромный комплексный (во всех смыслах) ландшафт, состоящий из практически бесконечного числа измерений.

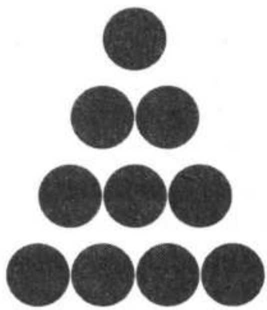
Этот многомерный ландшафт используется для построения гильбертова пространства. Оно названо по имени математика Давида Гильберта, который, изучая математический анализ и геометрию, предложил идею об арене, где знакомые нам три пространственных измерения разветвляются на бесконечное число измерений. На этом основана "многомировая" интерпретация квантовой теории, которая утверждает, что существуют, по сути, другие вселенные, альтернативные нашей, и каждая из них содержит чуть отличную от нашей версию реальности.

Поразительно, но квантовая концепция множества миров — не самый сложный результат работы с комплексными числами. Дело в том, что квантовая механика не является финальной теорией Вселенной. Для такой теории нам, вероятно, понадобится набор комплексных чисел, называемых кватернионами, а также (возможно) родственных им октонионов. Пора совершить путешествие в Дублин и познакомиться с математиком сэром Уильямом Роуэном Гамильтоном, который выцарапал свое открытие на мосту.

Как *i* попало в Алису

Начнем с пифагорейцев, с которыми мы уже встречались в одной из предыдущих глав. Это те самые ученые, которые входили в свою школу через ворота с надписью "Все есть число" и, возможно, утопили коллегу, указавшего на изъян в их системе ценностей.

Их фанатизм начался с любви и уважения к музыке. Греческую музыку — музыку космоса, по мнению пифагорейцев, — можно свести к отношениям чисел, например 1 к 2, 3 к 2 и 4 к 3. Две одинаково натянутые струны, длины которых относятся друг к другу как 1:2, дают ноты с интервалом в октаву. Струны с отношением 3:2 дают "чистую квинту". При отношении 4:3 получается кварта. Числа 1, 2, 3 и 4 для греков были священны, а их сумма равнялась 10 — совершенному числу. Их представляли в виде треугольника из символов. Этот набор из четырех элементов назывался тетрактис. К нему обращались при произнесении клятв: "Во имя того, кто подарил нам тетрактис, содержащий источник и корень вечно текущей природы". Иными словами, они подходили к числам со всей серьезностью, считая их ключом к пониманию Вселенной.



Греческий тетрактис

И они, возможно, были правы. В 1960 году венгерский математик Юджин Вигнер написал очерк "Непостижимая эффективность математики в естественных науках"[7]. Его мысль была проста: Вигнер полагал, что изобретение чисел и набора правил для проведения манипуляций с ними позволило нам описывать и прогнозировать множество явлений реального мира. Но числа и правила, то есть математика, были, как он утверждал, продуктом человеческого мозга, так почему же они открывали нам путь к таким открытиям? Вигнер отметил, что "чрезвычайная эффективность математики в естественных науках… [это] нечто загадочное". И добавил, что она "не поддается рациональному объяснению". Он назвал это "чудом".

Шестьдесят лет спустя чудо так никуда и не делось, но вышло за пределы мира натуральных чисел, занимавших умы пифагорейцев. Как мы увидели, оно вошло в мир комплексных чисел, которые позволили нам сконструировать усилители и изучить поведение субатомных частиц. Но и это не стало пределом, поскольку теперь у нас на горизонте маячат гиперкомплексные числа. Понимаю, звучит пугающе, но потерпите немного. Есть смысл набраться смелости и выйти в эту область, ведь в итоге вы получите прекрасное постпифагорейское представление о том, из чего на самом деле может состоять Вселенная.

Герой этой истории — ирландский математик. Уильям Роуэн Гамильтон родился в Дублине в 1805 году. Возможно, его биографы преувеличивают, но утверждается, что он был настолько смышлен, что к десяти годам успел освоить десять древних языков, включая халдейский, сирийский и санскрит. Но мальчик и правда был весьма одарен: когда в семнадцать лет он прочел недавно опубликованный трактат Лапласа о механике небесных тел, он нашел в нем ошибку, которую не заметил больше никто. Уже в двадцать два года он стал королевским астрономом Ирландии. К тридцати годам он был посвящен в рыцари за заслуги в развитии наук.

Это случилось в 1835 году, в тот же год, когда Гамильтон увлекся комплексными числами. Ему искренне хотелось продвинуться дальше в этой сфере. Он рассудил, что если чисто мнимое число i дает нам дополнительное измерение в пространстве чисел, то нельзя утверждать, что других измерений в этом пространстве нет. Он решил провести эксперимент и предложил два дополнительных набора чисел — по сути, два дополнительных измерения на числовой оси. Обозначив их j и k, он стал изучать, какие арифметические действия может с ними произвести, подобно тому как Бомбелли поступил с квадратным корнем из –1 (ныне известным как i) тремя столетиями ранее.

Оказалось, что Гамильтон мог приписать j и k математические свойства, которые позволили бы ему осуществлять сложение и вычитание в "тройке" — так он называл совокупность i, j и k. А вот с умножением и делением ничего не выходило. Гамильтон был твердо настроен расширить набор допустимых операций, и это находило отражение в вопросе, с которым дети обращались к нему каждое утро. "Ну что же, папа, — говорили они, когда отец спускался к завтраку, — ты научился умножать тройки?" Гамильтон, по его же словам, отвечал им, "печально качая головой"[8].

А затем у него все получилось. Его озарение стало предметом известного анекдота из истории математики. 16 октября 1843 года он прогуливался с женой вдоль дублинского канала Ройал и вдруг понял, в какой взаимосвязи должны состоять i, j и k, чтобы задача обрела решение. "В тот миг я почувствовал, как замыкается гальваническая цепь моей мысли, и искры, вылетевшие из нее, дали мне базовые уравнения, связывающие i, j и k", — вспоминал он. Он так обрадовался, что, боясь упустить свою мысль, выцарапал решение на камне ближайшего моста. Следы его вандализма давно исчезли, уничтоженные годами и прикосновениями. Сегодня место, где на Гамильтона снизошло озарение, отмечено табличкой, на которой высечено и выражение, сложившееся из отдельных искр:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Гамильтон добавил свою тройку к знакомому набору действительных чисел, чтобы создать то, что он назвал кватернионами. Он сказал, что создал это слово, опираясь на греческую идею о тетрактисе — изначальном мистическом наборе из четырех элементов. Эта связь была не случайной. Гамильтон полагал, что ученые сделаны из того же теста, что и древнегреческие мыслители. Он говорил, что им следует "изучать язык оракулов Вселенной и прислушиваться к ним"[9]. Он также разделял любовь греков к поэзии и близко дружил с поэтами-романтиками Вордсвортом и Кольриджем. По мнению Гамильтона, крайне важно было восстановить связь науки с философией и поиском божественного начала. И он считал, что кватернионы стали первым шагом в нужном направлении.

На следующий день после открытия Гамильтон написал своему другу Джону Грейвзу, который был юристом, но глубоко интересовался алгеброй. Грейвз ответил смело: зачем на этом останавливаться? "Я пока не понимаю, насколько мы вольны по своему усмотрению создавать мнимые числа и наделять их сверхъестественными свойствами", — отметил он в ответном письме 26 октября. Два месяца спустя Грейвз снова написал Гамильтону. Он снова удвоил число мнимых чисел и разработал математику октонионов. Словно бы в угоду музыкальным вкусам древних, двое ученых создали числовую октаву.

Они попытались пойти дальше, но у них ничего не вышло. Теперь мы знаем, что шансов у них не было, потому что сделать это невозможно. Складывается впечатление, что природа сложена из наборов чисел, но количество их конечно. Математики доказали это с октонионами, и мы получили полный комплект возможных систем, с помощью которых люди могут чрезвычайно эффективно описывать Вселенную на языке чисел.

Как же это происходит? Вас вряд ли удивит, что это сложно. Настолько сложно, что, похоже, легло в основу одной из величайших сцен англоязычной абсурдистской литературы: безумное чаепитие у Шляпника в "Алисе в Стране чудес".

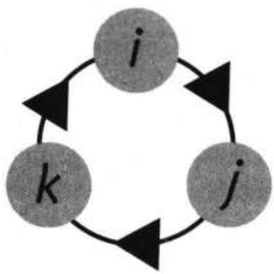
Под псевдонимом Льюис Кэрролл скрывался оксфордский математик Чарльз Лютвидж Доджсон. Он преподавал геометрию в колледже Крайст-Черч. По природе он был довольно консервативен, из книг больше всего любил "Начала"

Евклида и похвалил чистую математику своего героя в книге *Curiosa Mathematica*: "Ее очарование, полагаю, заключается главным образом в абсолютной однозначности результатов, ведь именно этого больше всех сокровищ разума и жаждет человеческий интеллект. Нам лишь бы быть хоть в чем-то уверенными!" Можно смело сказать, что Доджсон не особо жаловал экспериментальные идеи и прогресс.

Его самое известное сочинение родилось в 1864 году и поначалу было довольно скучной рукописью под названием "Приключения Алисы под землей". В нем не было и намека на чаепитие. Но в ходе работы над ним Доджсон все сильнее разочаровывался в том, как развивается его любимый предмет. Евклидова алгебра устаревала, ее сменяла абстрактная — в частности, комплексные числа и кватернионы. Доджсон писал о своих опасениях сестре, обсуждал их с коллегами и транслировал их в статьях для математических журналов, но казалось, что никто его не слушает. И тогда он применил один из любимых риторических приемов Евклида: доведение до абсурда.

"Алиса в Стране чудес" полна насмешек Доджсона над математическими тенденциями, которые нравились ему меньше всего[10]. Там есть выпады в сторону отрицательных чисел, символической алгебры и области, называемой проективной геометрией, и ее "принципа непрерывности" (чтобы высмеять ее идеи, Доджсон превратил младенца в свинью). Специалист по английской литературе Мелани Бэйли, собравшая из отдельных кусочков мозаики общую картину, полагает, что Доджсону наверняка доставляло особенное удовольствие проносить такие отсылки в дом Генри Лидделла, декана колледжа Крайст-Черч[11]. Лидделл был отцом Алисы — той самой девочки, которая стала героиней первой истории Доджсона. Бэйли обнаружила документы, подтверждающие, что Доджсона сердило включение символической математики в оксфордскую учебную программу и что он лично повздорил об этом с деканом Лидделлом как раз в то время, когда писал "Алису". Бэйли представляет, как Доджсон включил свои аргументы в отредактированную версию книги, которую он передал семейству Лиддел, чтобы его возражения оказались на столе в гостиной декана как тайная шутка — или шутка, понятная лишь сторонникам Доджсона.

Несмотря на нелюбовь Доджсона к символической алгебре, именно кватернионы Гамильтона вдохновили его на самую яростную атаку. На чаепитии у Шляпника Алиса встречает трех странных персонажей: самого Шляпника, Мартовского Зайца и Соню. Алиса замечает, что герои постоянно пересаживаются. Похоже, это отсылка к одной из величайших инноваций Гамильтона — его способу умножать и делить кватернионы. Он схематично изображен на рисунке.



Цикл умножения кватернионов
Уильяма Гамильтона

Дело в том, что в случае с кватернионами имеет значение порядок умножения. Мы говорим, что 2 × 3 равняется 3 × 2. Но $i \times j$ (или k) не равняется $j \times i$ (или $-k$). Важно, как именно вы двигаетесь по кругу. Разговор Алисы с Мартовским Зайцем — следствие недоверия Доджсона к новой математике: как отмечает Безумный Шляпник, “говорить то, что думаешь”, — вовсе не то же самое, что “думать то, что говоришь”.

Тем временем четвертого героя — Времени — на чаепитии нет. Из-за его отсутствия возникает проблема: на часах всегда шесть — и всегда пора пить чай. Здесь Доджсон, похоже, отвечает на громкое заявление Гамильтона, что кватернионы тесно связаны с проблемой представления времени, существующей в физике. В 1835 году Гамильтон написал книгу "Алгебра как наука чистого времени". Изобретение кватернионов дало ему основание предположить, что одно из четырех чисел — время. В одном из своих (вполне берущих за душу) стихов Гамильтон отметил: "Один от Времени, три от Пространства — цепь символов должна закольцеваться". Он представлял время четвертым измерением, но время не идущее, а существующее, статичное и абсолютное, или, по его словам: "До и после; прошедшее, последующее и одновременное; непрерывное бесконечное течение из прошлого через настоящее к будущему". Оказывается, Гамильтон был склонен к философствованиям. "Есть нечто таинственное и запредельное в понятии Времени, — писал он, — но есть в нем также и нечто определенное и ясное, и если метафизики размышляют об одном, то математики строят свои рассуждения, отталкиваясь от другого". Это несколько многословнее некоторых цитат о времени другого его великого толкователя — Альберта Эйнштейна. Сразу вспоминается, как Эйнштейн сказал: "Единственная причина для существования времени — чтобы все не случилось одновременно". Но это, по сути, все та же мысль: время в голове — лишь иллюзия. И сцена из книги Доджсона показывает, что он этого не признавал: без Времени нет прогресса.

Своей теорией относительности это доказал Эйнштейн, а не Гамильтон. И для разработки специальной и общей теорий относительности, которые описывают свойства пространства и времени и поведение объектов при движении по ним, ему даже не понадобились четырехмерные кватернионы Гамильтона. В математике шла война, напоминающая войну видеоформатов *Betamax* и VHS. В конце концов кватернионы уступили инновационным векторам, которые определяют числа, указывая направление и расстояние на числовом эквиваленте навигационной карты. С тех пор кватернионы считаются жалким подобием векторов. Однако, хотя Эйнштейн и использовал четырехмерные векторы, мы по-прежнему можем смело благодарить Гамильтона за то, что он поместил идею о четвертом измерении в сердца и головы всех тех, кто хотел открыть доступ к космосу пифагорейцев. И хотя кватернионы очень мало используются в реальном мире, родственные им октонионы вполне могут стать ключом к финальной теории физики.

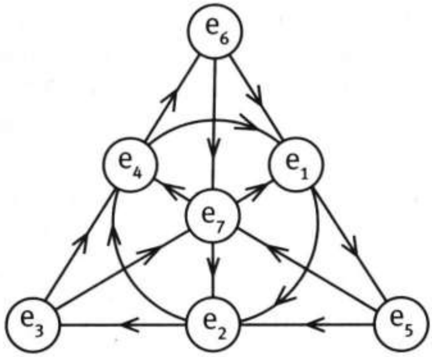
Восьмеричный путь

Даже Уильям Роуэн Гамильтон, неустанный поборник своих кватернионов, не стал продвигать октонионы. Четырехмерная алгебра позволяла учитывать время. Но какая польза от восьмимерной алгебры? Что делать с этим дополнительным пространством? Особенно коль скоро его математические законы столь запутанны.

Кватернионы состоят в довольно простой математической связи. Но когда Грейвз понял, что арифметические операции можно также производить в восьми измерениях, ему пришлось прокладывать новые — и, казалось бы, несуразные — пути. Например, положение скобок в выражении никогда прежде не имело значения. Но с октонионами $3 \times (4 \times 5)$ не было равно $(3 \times 4) \times 5$.

При работе с обычными числами математики начинают вычисления со скобок. Так, вычисляя произведение $3 \times (4 \times 5)$, они получили бы 3×20, или 60. Но если бы скобки переместились в другое место, ничего бы не изменилось. Вычисляя произведение $(3 \times 4) \times 5$, они получили бы 12×5, то есть тоже 60.

Но к октонионам обычные правила неприменимы. Если в кватернионах используются три числа i, j и k, то в октонионах их семь: e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 и e_7. Если хотите знать, e_1, e_2 и e_4 сравнимы с кватернионами i, j и k. На рисунке показано, как они работают вместе в математических целях.



Плоскость Фано для умножения октонионов

В некотором роде это прекрасно. Эта карта ландшафта октонионов называется плоскостью Фано в честь итальянского математика Джино Фано. В ней есть нечто мистическое, напоминающее о всевидящем оке, которое можно найти на обратной стороне Большой печати США и долларовой купюры. Математики эпохи Возрождения смотрели на него и видели око Бога, заключенное в треугольник, символизирующий христианскую Святую Троицу. Их современные коллеги — по крайней мере, некоторые — видят кое-что иное: краткое описание того, как устроена Вселенная.

Этот фрагмент математики пока не изменил историю человечества. Работа с октонионами еще не завершена, и она, возможно, ни к чему нас не приведет. Но эти странные числа дразнят нас, а их свойства отражают наши представления о поведении сил и частиц, которые встречаются в природе, и этого достаточно, чтобы некоторые физики отправились за ними вниз по кроличьей норе.

Мы уже упоминали о некоторых странных свойствах квантовой теории. Когда мы описываем поведение различных субатомных частиц, некоторая странность в получающейся математике отражает свойства кватернионов. Рассмотрим принцип неопределенности Гейзенберга. Он гласит, что нельзя одновременно точно знать определенные пары характеристик частицы — например, ее координаты и импульс. Это следствие того, что в квантовой математике порядок вещей имеет значение, как и при работе с кватернионами i, j и k.

Неразрешимая странность квантовой теории оттолкнула от нее и Эйнштейна, и Шрёдингера. Они вместе искали ее недостатки и пытались убедить остальных — в частности, Нильса Бора, который часто считается отцом-основателем квантовой теории, — что лучше начать все с начала. В 1939 году Эйнштейн прочел лекцию, на которой присутствовал Бор. Глядя ему прямо в глаза, Эйнштейн заявил, что теперь его цель состоит в том, чтобы сместить с позиций квантовую механику[12].

Шрёдингер также не стал дальше развивать квантовую теорию и отошел от нее примерно тогда же, когда и Эйнштейн. Оба ученых — независимо друг от друга — занялись разработкой теории, которая объединила бы квантовую физику с теорией относительности. Им хотелось создать грандиозную финальную теорию, которая включала бы в себя и описание космических свойств Вселенной из теории относительности, и объяснение субатомного мира и действующих в нем сил из квантовой теории. Так появилось бы единое математическое описание всего космоса. Ни один из двух ученых не преуспел в этом начинании, и они сильно разругались, публично критикуя труды друг друга[13]. После одного особенно колкого замечания о проблемах в рассуждениях Эйнштейна, сделанного Шрёдингером на пресс-конференции, Эйнштейн наказал бывшего друга и три мучительных (по крайней мере, для Шрёдингера) года не отвечал на его письма.

Теперь эстафету перехватили другие, но никто пока не заявил о близости к цели: математики и физики, а также все, кто работает в плодородных областях на стыке этих наук, по-прежнему исследуют различные пути. Любопытно — особенно в контексте этой главы, — что сегодня оптимизм в ученых вселяет в основном как раз математика комплексных чисел, в частности октонионов.

Все началось с теории струн. Это попытка построить все частицы и силы физики, начав с довольно простой вещи — вибрирующих струн энергии. Струны вибрируют определенным образом — и мы получаем электрон. Вибрация другого типа дает нам электромагнитную силу. Идея о том, что математика музыки переплетена с математикой космоса, весьма заманчива: пифагорейцам она бы точно понравилась.

Но такой подход работает, только если мы допускаем существование "дополнительных" пространственных измерений (отличных от тех, что предложил Луи де Бройль). Согласно теории струн, к трем измерениям, в которых мы живем, нужно добавить еще семь скрытых. В этой схеме свойства вещества взаимодействуют друг с другом такими способами, которые математически описываются с помощью октонионов. Хотя теория струн вряд ли станет итогом наших размышлений, на текущий момент она, пожалуй, представляет собой лучшую из имеющихся у нас вариаций описания "квантовой теории гравитации" и подсказывает нам, что в финальной теории, какой бы она ни оказалась, вполне может фигурировать математика октонионов.

Эти подсказки проистекают из того, как специалисты по физике частиц собирают свой "зоопарк". Стандартная модель — это нечто вроде зоологической классификации, которая позволяет распределять частицы по классам на основании сходства их характеристик. Так, в класс адронов входят кварки, с которыми мы встречались в главе об алгебре. Адроны обладают электрическим зарядом, кратным заряду электрона (при этом множителем может быть и ноль). Вероятно, вы слышали о протонах и нейтронах, составляющих ядро атома. Это адроны. Существует и множество других классов, включая лептоны (к ним относятся электроны) и бозоны (например, бозон Хиггса).

Из-за различных классификаций, характеристик и особенностей поведения этих частиц стандартная модель оказывается довольно запутанной. Нам сложно понять, как выводятся ее законы. Но есть основания предполагать, что запутанность возникает лишь потому, что мы пока не поняли, как модель соотносится со всеми тонкостями плоскости Фано и как в ней участвует гравитация. Лауреат Абелевской премии математик Майкл Атья отметил: "Настоящая теория, которую мы хотим вывести, должна сочетать гравитацию со всеми этими теориями так, чтобы гравитация казалась следствием октонионов... Это будет сложно, ведь мы знаем, что с октонионами не бывает легко, но такая теория, когда она будет обнаружена, окажется прекрасной и уникальной"[14].

Но пока, разумеется, это лишь гипотетическая возможность для применения комплексных чисел. Но есть и другая прекрасная теория, чрезвычайно практичная и применяемая уже более века. Ее подарил нам Чарльз Протеус Штейнмец, родившийся в Германии. И именно эта история показывает нам — возможно, нагляднее любой другой, — в каком долгу наша цивилизация перед математикой.

Электрификация Америки

В этой истории мы встретимся с некоторыми из известных эксцентриков. И с раздражительным, нелюдимым Томасом Эдисоном, которого порой называют изобретателем электрической лампочки и волшебником из Менло-Парк, района Нью-Джерси, где он открыл свою первую лабораторию. И с сумасбродным гением Николой Теслой, который, как считается, был одержим созданием умопомрачительных световых композиций с роскошными электрическими инсталляциями. И с глубоко религиозным Майклом Фарадеем, который родился в семье кузнеца и создал первый в мире электромотор. И с шотландским пионером электромагнитной теории Джеймсом Клерком Максвеллом, которого школьные друзья прозвали Недоумком из-за того, что он ходил в странных самодельных туфлях. И все же наш главный герой был самым эксцентричным из всех них.

Карл Август Рудольф Штейнмец родился в прусском городе Бреслау (ныне — Вроцлав, Польша) в 1865 году. От отца и деда он унаследовал кифоз — искривление позвоночника, при котором спина выгибается назад. Его рост составлял около 145 см, но из-за сгорбленной спины он казался гораздо ниже. Обладая исключительным умом, Штейнмец блистал в учебе. Однокурсники понимали, насколько он одарен, и щедро платили ему за частные уроки. Они прозвали Штейнмеца Протеусом в честь греческого бога Протея, способного принимать любые обличья и наделять мудростью того, кто к нему прикоснется. Когда Штейнмец примкнул к запрещенной социалистической группе, члены которой мечтали положить конец бедности, добиться равноправия для всех и освободиться от гнета правящих классов, он стал неугоден властям и бежал в Америку. Там 24-летний Карл превратился в Чарльза Протеуса Штейнмеца. Он оказался в Америке в 1889 году. И уже к концу 1893 года его гений изменил американский образ жизни.

В 1821 году Майкл Фарадей понял, как собрать электромотор. В его первом аппарате были задействованы чаша с ртутью, магнит, аккумулятор и жесткий провод. Когда электричество, идущее по проводу, вступало во взаимодействие с магнитным полем, провод начинал описывать круги вокруг магнита. Через несколько месяцев инженеры собрали на базе изобретения Фарадея устройство, в котором мы сегодня узнали бы классический электромотор. Через десять лет изобретатели перевернули процесс с ног на голову, чтобы при вращении провода вокруг магнита в нем вырабатывалось электричество. Уже к 1882 году у нас появились электрический телеграф, телефон, электрические маяки и электростанции. Но все еще не было надежного, эффективного способа доставлять электроэнергию в дома и на заводы.

Главная проблема заключалась в том, что слишком много электроэнергии терялось при ее транспортировке с электростанции. При транспортировке переменного тока, сила которого циклично меняется по плавной синусоиде от положительного значения к отрицательному, потери были меньше, но для Томаса Эдисона это представляло другую проблему. Эдисон немало вложил в постоянный ток, который дает стандартный аккумулятор. Он подключил семейную ферму к сети постоянного тока и оборудовал ее множеством работающих на нем выключателей и лампочек, и поэтому настаивал на его повсеместном использовании, утверждая, что небольшие генераторы постоянного тока можно установить в каждом здании, чтобы свести к минимуму потери электроэнергии при ее транспортировке. К несчастью для Эдисона, совет директоров его собственной компании *Edison General Electric* посчитал, что такое решение будет ошибкой.

Их главным конкурентом была инфраструктурная компания *Westinghouse Electric*, которая располагала немалыми ресурсами и планировала строить загородные электростанции, например гидроэлектростанцию на Ниагарском водопаде. В *Westinghouse* отдавали предпочтение переменному току — отчасти потому, что деятельный гений Никола Тесла уже спроектировал целую сеть переменного тока, способную питать целый город, а возможно, и целую страну. Упрямый Эдисон отчаянно сражался за постоянный ток, и его в конце концов исключили из совета директоров, а *Edison General Electric* превратилась в *General Electric*. И сделала ставку на переменный ток. Она стала скупать компании, обладающие нужным опытом, патентами и квалификациями. В одной из них работал Чарльз Протеус Штейнмец.

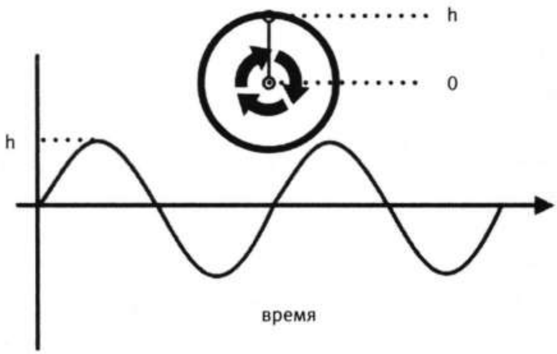
Штейнмец был к тому времени человеком уже весьма видным. Он изменил всю отрасль, сумев сократить энергопотери, возникающие при конвертации электротока разного напряжения. Но в тот год, когда он стал сотрудником GE, он потряс даже тех, кто и раньше восхищался им. Как? Взяв на вооружение комплексные числа.

Звездный час Штейнмеца настал в августе 1893 года, на Международном электрическом конгрессе. Он состоялся в рамках Всемирной выставки 1893 года в Чикаго, которую полностью питал генератор переменного тока, созданный Николой Теслой. Штейнмеца пригласили выступить на конгрессе, и он задумался, что нужно инженерам-электрикам, чтобы постепенно обеспечить электричеством всех. В конце концов он выступил не за новое оборудование, а за новые инструменты мышления.

Слухи о том, что предложит с трибуны Штейнмец, просочились заранее. Не успел он начать выступление, как председательствовавший на заседании профессор Генри Огастус Роуланд обратился к собравшимся. "Мы все чаще используем эти сложные величины вместо синусов и косинусов, и это дает нам огромное преимущество, — сказал он. — Все, что делается в этой сфере, приносит большую пользу науке"[15].

Сложные величины сегодня называются комплексными числами — это комбинации действительных и мнимых частей, например $5 + \sqrt{-15}$. В своем выступлении Штейнмец призвал инженеров-электриков использовать комплексные числа во всех расчетах и проектах. Его идея сразу обрела популярность.

Без комплексных чисел инженеры, имевшие дело с переменным током, упирались в своей работе в глухую стену. Поскольку генераторная турбина вращается под действием чего-то вроде падающей воды Ниагарского водопада, вращается и вырабатываемое ею электричество. Представьте его в виде точки на ободе генераторного колеса: когда колесо вращается, эта точка оказывается то выше, то ниже оси (нулевой отметки) и рисует плавные изгибы синусоиды. Переменный



Точка на ободе вращающегося колеса рисует синусоиду

ток меняется так же: его сила становится то положительной, то отрицательной. Она поднимается с нуля до максимального значения, затем опускается обратно до нуля, меняет полярность, достигает отрицательного максимума (минимума) и снова возвращается к нулю.

Этот цикл повторяется снова и снова, пока переменный ток идет по проводнику, а это значит, что, если вы хотите узнать, какова сила тока, вам нужно выяснить, в какой точке синусоиды вы находитесь. Иными словами, здесь имеет значение время. Это само по себе не проблема: мы можем описать меняющуюся силу (и напряжение) переменного тока, выходящего из генератора, на языке синусов и косинусов. Но как только мы добавляем в систему такие элементы, как переключатели, резисторы, конденсаторы и индукторы, используемые как в домашних электросетях, так и на производственном оборудовании, возникает ужасная математическая путаница, поскольку эти элементы меняют фазу различных волн. Фаза показывает, на каком этапе своего цикла находится волна, но при появлении такого переключателя фазы, как конденсатор или индуктор, алгебра становится мучительной. Это объясняется тем, что теперь различные волны в любой заданный момент времени пребывают на разных этапах своего цикла. В результате с самого наступления электрического века инженеры страдали из-за сложности расчетов: все интересующие их величины зависели от того, в какой момент происходил анализ сети. Но Штейнмец убрал из уравнений время, просто переключившись с синусов и косинусов на комплексные числа. В некотором роде эта инновация была довольно простой. Штейнмец математически доказал, что сложение синусоид можно представить как сложение двух комплексных чисел, применив (как и Бомбелли) соответствующую арифметику. Здесь нашли применение наработки Эйлера в области синусов, косинусов и комплексных чисел:

$$e^{ix} = \sin(x) + i\cos(x)$$

С этим уравнением инженерам больше не приходилось переживать из-за перемены множества фаз при функционировании сетей переменного тока. Комплексные числа позволили им без труда делать срез работы сети в любой момент, а элементы, зависящие от времени, вообще исчезли из расчетов. В начале своего выступления Штейнмец сказал: “Если раньше нам приходилось работать с периодическими функциями независимой переменной, времени, то теперь нам достаточно складывать, вычитать и т. д. постоянные величины, а это задача элементарной алгебры”.

И это изменило все. Теперь, рассчитывая влияние конденсаторов (которые накапливают энергию, создавая электрическое поле) и индукторов (которые временно хранят энергию в магнитном поле, создаваемом электричеством) на электрическую цепь, инженеры просто учитывают их вклад как “чисто мнимые” компоненты уравнения. Анализ с помощью комплексных чисел также помог решить многие загадки: например, почему в некоторых цепях наблюдаются всплески общего переменного тока, когда цепь разветвляется и делит ток пополам. Комплексные числа показали, что всплески объясняются реакцией измеряющих силу тока приборов на переменный ток.

Электроинженерия вдруг стала достаточно простой наукой — по крайней мере, проще, чем была прежде. Через несколько лет она захватила мир, и Чарльз Протеус Штейнмец стал настоящей знаменитостью. Он общался с Теслой, Эйнштейном, Эдисоном, Маркони и множеством других научных светил. Как и они, он слыл эксцентриком. Он держал дома аллигаторов, черных вдов и аризонских ядозубов. Он часто плавал на каноэ по реке Мохок, прихватив с собой свои книги и бумаги. Из-за озорного нрава его прозвали волшебником из Скенектади, после того как он собрал в исследовательской лаборатории *General Electric* генератор грозовых импульсов мощностью 120 тысяч вольт и использовал его, чтобы разрушить специально построенный по такому случаю макет деревни (статья об этой проделке в газете *The New York Times* вышла под заголовком "Современный Юпитер своевольно мечет молнии")[16]. И все же, несмотря на яркость своего характера, Штейнмец заработал и поддерживал репутацию благодаря своему гению. Глубину уважения к нему иллюстрирует одна чудесная история, опубликованная в журнале *Life* в 1965 году[17]. На заре своего существования автомобильная компания Генри Форда испытывала проблемы с генераторами, питавшими сборочный конвейер. За советом обратились к Штейнмецу, и тот нашел решение, лежа на полу генераторного зала. Два дня и две ночи он слушал, как работает генератор, и вел какие-то подсчеты в блокноте. В конце концов он встал, забрался на гигантскую машину и мелом поставил крестик у нее на боку. Затем он спустился и сказал инженерам заменить 16 генераторных катушек, которые находились в отмеченной области. Инженеры выполнили указание, снова включили генератор и пораженно отметили, что он работает без нареканий.

Одной этой истории было бы достаточно, но дальше — лучше. Компания *General Electric*, штаб-квартира которой находилась в Скенектади (штат Нью-Йорк), выставила Форду счет на 10 тысяч долларов за услуги Штейнмеца. Форд попросил объяснить, за что именно он должен заплатить такую астрономическую сумму. Штейнмец ответил ему лично. В детализированном счете значилось:

Отметка мелом на генераторе — 1 доллар.
Умение поставить отметку в нужном месте — 9 999 долларов.

По всей видимости, после этого счет незамедлительно оплатили.

Совершив переход к комплексным числам, электрическая отрасль уже не оглядывалась назад. Теперь инженеры могли проектировать сети и компоненты, генераторы и трансформаторы, точно зная, какого поведения от них ожидать. Как отметил Генри Роуланд, это принесло огромную пользу науке: широкая доступность электричества изменила возможности лабораторий, и научные организации стали производить гораздо больший объем работ. Через несколько лет были изобретены радио и телевидение, а также появились катодные трубки. Радиоинженерия привела к появлению усилительных схем, которые Лео Фендер и Джим Маршалл впоследствии превратили в знаковые культурные и коммерческие объекты. И царили в эту эпоху не только *General Electric* и *Westinghouse*, но и Лаборатории Белла и AT&T, производители лампочек *Philips* и *Osram*, а также *International Business Machines Corporation* (IBM). Так, в 1901 году был выдан первый патент на производство полупроводникового устройства, а через несколько лет появились диоды и триоды — самые важные компоненты электрического и электронного оборудования, которое в последующие десятилетия стали производить новые высокотехнологичные компании. В завершение этой главы рассмотрим одну из инноваций: схему, которая создает и усиливает сигналы звуковой частоты. Возможно, вас не слишком впечатляет эта концепция, но именно благодаря ей возникла Кремниевая долина.

Мнимые числа приносят вполне реальные деньги

Если вы окажетесь в Калифорнии и заглянете по адресу Аддисон-авеню, 367, в Пало-Альто, то увидите еще одну памятную табличку. Она стоит возле гаража, внесенного в Национальный реестр исторических мест, поскольку, как значится в надписи, это "место рождения первого в мире высокотехнологичного региона".

Гараж принадлежал Дэвиду Паккарду. Именно в нем Паккард и его друг Уильям Хьюлетт основали компанию по производству электроники, первым продуктом которой стал сконструированный Хьюлеттом "звуковой генератор". Хьюлетт спроектировал его, когда изучал электроинженерию в магистратуре Стэнфордского университета. Он сдал свою магистерскую диссертацию на тему "Резистивно-емкостный генератор нового типа" 9 июня 1939 года. В ней всего 15 страниц, но там описывается легкая и портативная, простая в производстве и использовании конструкция, сочетающая "качество звучания с дешевизной сборки и дающая в итоге идеальный лабораторный генератор".

Нам интересно приложение к диссертации Хьюлетта. Помня, что инженеры-электрики в своих записях вместо i используют букву j (поскольку буквой i обозначается электрический ток), вы можете понять важность комплексных чисел. Хьюлетт объясняет основные принципы работы своего генератора с помощью нескольких уравнений с целым сонмом чисел j.

Научным руководителем Хьюлетта был Фредерик Терман, который подталкивал своих студентов открывать собственные компании на Западном побережье, вместо того чтобы отправляться на Восточное, где происходило все самое интересное в сфере электрики и электроники — и где главную роль играли Лаборатории Белла. С помощью Паккарда Хьюлетт так и поступил: гараж Паккарда стал первым производственным предприятием в области, которая впоследствии прославилась как Кремниевая долина, а комплексные числа стали основным столпом технологий Западного побережья. Хьюлетт и Паккард дали своему генератору название HP200A, чтобы не возникало мысли, что их компания разработала лишь один продукт. Вскоре свет увидела модель HP200B. Компания Уолта Диснея купила восемь таких генераторов для нового многообещающего проекта — новаторского мультфильма “Фантазия”. В результате Хьюлетт и Паккард оказались на острие революции в сфере развлечений.

В “Фантазии” Уолта Диснея была впервые использована технология “Фантасаунд”, разработанная для реалистического воссоздания звучания симфонического оркестра в кино. Она предполагала применение целого ряда сложных электронных систем, включая устройства *Hewlett-Packard*, и когда мультфильм вышел на экраны в 1940-х годах, он показал, что можно сделать со звуком с помощью “электронных усилителей” наподобие тех, что были встроены в HP200B. Хьюлетт и Паккард внезапно обрели серьезную репутацию.

Но денег у них было немного: за первый год продаж они заработали лишь 1563 доллара — около 30 тысяч долларов в пересчете на сегодняшние деньги[18]. Дела пошли в гору во время Второй мировой войны, и армия США отметила компанию особой наградой за выдающиеся достижения в разработке продуктов на базе математики мнимых чисел. Уже в 1951 году продажи составили 5,5 миллиона долларов, или около 57 миллионов долларов сегодня. Когда Паккард умер в 1996 году, его состояние превышало 4 миллиарда долларов. Большая часть его денег ушла на благотворительность: Хьюлетт и Паккард всегда щедро распоряжались своими деньгами, временем и ресурсами. Среди прочих их великодушие помогло 12-летнему парнишке по имени Стив Джобс, который летом 1967 года успешно прошел стажировку в HP. Таким стал его первый шаг к основанию *Apple Computers* со Стивом Возняком, который конструировал калькуляторы в HP. Получается, что сила мнимых чисел непосредственно поспособствовала возникновению гигантской корпорации *Apple* — одной из богатейших компаний мира.

В XXI веке невозможно переоценить влияние мнимых чисел на нашу повседневную жизнь. Радиопередачи, гитарные усилители и системы объемного звука в кинотеатрах — лишь малая часть их культурного наследия. Большинство наших незаменимых цифровых инструментов функционирует благодаря обработке мнимых чисел. Возьмем, к примеру, ваш мобильный телефон. Он воспроизводит музыкальные файлы в формате MP3, которые создаются с помощью математической техники, называемой быстрыми преобразованиями Фурье, и там в расчетах не обойтись без комплексных чисел (о преобразованиях Фурье мы поговорим в следующей главе). Эта же техника отвечает за передачу сигнала от базовой станции к конкретному телефону. При разработке аккумулятора для вашего телефона именно с помощью комплексных чисел производится моделирование того, как он излучает тепло. Комплексные числа задействуются и при настройке цветопередачи на дисплее — то есть при определении того, каким пикселям показывать какие цвета и насколько они должны быть насыщенными. Как выясняется, в *iPhone* на деле далеко не одна буква *i*.

Если вы из тех, кто в школе жаловался учителю математики, что нет никакого смысла изучать поведение комплексных чисел, возможно, вам пора отложить телефон, выключить музыку, вытащить провода из интернет-роутера, перекрыть подачу электричества в свой дом и навсегда перестать ходить в кино и на концерты. А может, вам просто стоит признать, что вы были неправы.

Впрочем, вы могли и не проходить комплексные числа в школе, ведь на протяжении десятилетий школьная программа меняется, как меняется и список обязательных к изучению тем. Сейчас к ним, несомненно, должна добавиться статистика — и остается надеяться, что ее из школьной программы не уберут. Этот предмет нередко незаслуженно критикуют: по расхожему выражению, есть три вида лжи — ложь, наглая ложь и статистика. Марк Твен однажды сказал: "Факты упрямы, а статистика податлива". Тень на статистику бросал даже великий физик Эрнест Резерфорд, которому приписывают такие слова: "Если в вашем эксперименте не обойтись без статистики, вам следует провести эксперимент получше". Но это совершенно несправедливо, и скоро мы это увидим.

Глава 7
Статистика
История улучшений

Хотя общество считает статистику синонимом надувательства, вообще-то она стремится к истине. Она не всегда красива, но незаменима, как швейцарский нож с математическими инструментами — измерителями, пинцетами, скальпелями и скребками, — которые помогают понять, о чем на самом деле говорят нам данные. Одни — Guinness, Флоренс Найтингейл, JPEG — благодаря ей завоевали репутацию, а бессчетное множество других оказалось забыто, поскольку их работа не прошла проверку статистикой. Без статистики мы покупали бы шарлатанские снадобья, не знали бы о преимуществах вакцинации и не могли бы смотреть кино и слушать музыку в интернете. Иными словами, наша жизнь была бы короче и скучнее. Вам решать, позволяют ли преимущества статистики закрыть глаза на ее темное и шокирующее происхождение и злодеяния тех, кто применял ее в самом начале.

В 1662 году — в год, когда человек в последний раз увидел птицу додо, — один лондонский галантерейщик опубликовал первый в мире статистический анализ вероятности скорой смерти среднего человека. Тогда свирепствовала бубонная чума, и король Карл II хотел создать систему предупреждения, которая сообщала бы лондонцам о растущем риске. Джон Граунт решил, что возьмется за это дело. Он взял сырые данные из регулярно публикуемых, но редко изучаемых “Бюллетеней смертности”, которые обновлялись еженедельно[1]. “Обнаружив, что из моих размышлений над этими пренебрегаемыми бумагами следуют некоторые истины и мнения, которым обычно не доверяют, я пошел дальше, чтобы поразмыслить, какую пользу их знание может принести миру", — написал он в предисловии к "Естественным и политическим наблюдениям над бюллетенями смертности"*. Он отметил, что ставит своей целью "не заниматься праздными и бесполезными спекуляциями, а представить миру какие-то реальные плоды из этих воздушных цветений". Никто прежде не называл "Бюллетени смертности" "воздушными цветениями". Но никто и не пытался проанализировать, какова вероятность того, что население сумеет пережить грядущую неделю.

Граунт был приятным человеком во всех отношениях: радушным, прилежным, умным и щедрым. Однажды он показал Сэмюэлу Пипсу, автору знаменитого дневника, свою коллекцию архитектурных гравюр, и Пипс отметил, что, "пожалуй, никогда не видел собрания лучше". Столь же благосклонно приняли и книгу Граунта. Пипс назвал ее "очень милой", а молодое Королевское общество философов сочло ее настолько впечатляющей, что Граунта приняли в Общество в год ее публикации. Его вхождение в состав членов одобрил лично Карл II, которого крайне удивило, что лондонский галантерейщик сумел написать столь глубокую работу. Король отметил, что "если найдутся еще такие торговцы, их всех следует принять [в Общество] без лишних рассуждений".

Помимо прогнозирования продолжительности жизни в зависимости от возраста, которое заложило фундамент для сферы страхования жизни, Граунт предложил в своих "Наблюдениях" целый ряд других инноваций. Изучив не только данные о смертности, но и записи в крестильных книгах, он заметил, что женщин рождается меньше, но мужчин умирает больше, в результате чего разница в их количестве сглаживается. Он адекватно оценил численность населения Лондона

* Здесь и далее работа цитируется в переводе О. Шейнина.

и составил таблицу, в которой сравнил наблюдаемые в городе уровни смертности от разных болезней. Он показал, что чума не передается непосредственно от человека к человеку (у него не было данных, чтобы продемонстрировать, что на самом деле ее переносят крысиные блохи), и развенчал заблуждение о том, что вспышки чумы обычно сопровождают коронации монархов. Он даже составил "таблицы дожития", в которых прогнозировалось, сколько человек доживет до определенного возраста, и приводилась средняя ожидаемая продолжительность жизни для каждого поколения. Но важнее всего, пожалуй, другое: он понимал, что проведенный анализ может оказаться недостоверным, и рассматривал один вопрос в разных ракурсах, проверяя таким образом сделанные выводы.

Несмотря на высокие оценки трудов Граунта, переход в открыто осуждаемую тогда в Англии католическую веру в конце жизни привел его к разорению и нищете. Он умер немногим более десяти лет спустя, и Гильдия галантерейщиков назначила его жене пенсию в размере 4 фунта в год "в связи с ее бедственным положением". Но книгу Граунта по-прежнему перепечатывали, и, умерев от желтухи в 1674 году, он и сам вошел в свою статистику.

Жизнь по числам

Впрочем, Граунту еще повезло. Он умер незадолго до своего 54-летия, то есть прожил примерно на 20 лет больше, чем можно было ожидать в Англии в его время. Продолжительность жизни в Великобритании — в стране, где данные начали собирать раньше всего, — колебалась в диапазоне от 30 до 40 лет с 1540-х годов до начала XIX века. Ситуация везде была примерно одинаковой: в 1800 году ожидаемая продолжительность жизни ни в одной из стран мира не превышала 40 лет. Но в 2019 году средняя ожидаемая продолжительность жизни в мире составила 73 года[2]. Что случилось?

Мы разработали эффективные медикаменты и взяли под контроль инфекционные заболевания. И без статистики мы никогда бы с этим не справились.

По сути, статистика — это просто набор инструментов. Применяя статистические инструменты к числовым множествам, мы можем достаточно точно сказать, что описывают числа. Казалось бы, в этом нет ничего особенного, но это изобретение чрезвычайно функционально. Статистика позволяет нам изменить измеряемое, применить новый набор инструментов, проверить, улучшилась или ухудшилась ситуация после перемены, а также оценить, в какой степени мы можем быть уверены в своих выводах.

Этот довольно простой и скучный набор инструментов оказал огромное влияние на человечество. Не стоит удивляться, что сестра милосердия и специалист по медицинской статистике Флоренс Найтингейл, как утверждается, полагала, что изучение статистики поможет людям заглянуть в мысли Бога. Может, это и преувеличение, но тех, кто умеет ею пользоваться, статистика явно наделяет силой. Именно поэтому, когда Джонатан Розенберг занимал должность старшего вице-президента *Google*, он сказал: "Данные — меч XXI века, а тот, кто хорошо владеет им, — самурай"[3].

Знающие люди понимают, что упомянутый меч — обоюдоострый. Хотя мы привыкли представлять самураев блестящими и опытными воинами, правда в том, что многие из них в итоге становились чиновниками, которые собирали и обрабатывали статистику, а таких людей мы обычно считаем скучноватыми. Сложно не испытать разочарования, узнав об этом, но самураи были прекрасно образованными членами японского общества, и потому, когда воины не требовались, они действительно убирали мечи на полку и становились государственными служащими.

Чиновники всегда осуществляли статистические подсчеты на основе данных: слово "статистика" происходит от немецкого существительного *die Statistik*, предложенного в 1749 году для обозначения совокупности "фактов о государстве". В Англии соответствующую дисциплину сначала называли "политической арифметикой", а "статистика" была впервые упомянута в англоязычной публикации в 1791 году, когда вышло "Статистическое обозрение Шотландии"[4]. Затем, в XIX веке, статистика громко заявила о себе. И надо отметить, что причина была не слишком жизнеутверждающей.

При всех преимуществах статистики никак нельзя сказать, что ее изобретение принесло человечеству одно лишь благо. Статистику можно даже назвать одной из самых проблемных областей математики. Можно по-разному относиться к применению логарифмов для создания атомной бомбы, но изобретатель логарифмов и не подозревал, что их будут использовать именно так. Вы можете — как Тарталья — сказать, что вообще-то нам стоило бы задуматься о применении алгебры для совершенствования военных машин. Я возражу вам, отметив, что война — часть истории человечества, а алгебру — например, в теории игр — использовали и для того, чтобы ее избегать. Однако, когда речь заходит о раннем применении статистики в евгенике — учении о регулировании рождаемости, основанном на ущербных представлениях о расе, умственных способностях, криминальных наклонностях и др., — этой дисциплине лишь остается стыдливо склонить голову. И особенно ей должно быть стыдно за труды Фрэнсиса Гальтона.

Гальтон был умен, обеспечен (он приходился двоюродным братом Чарльзу Дарвину, и оба ученых выиграли от своего привилегированного происхождения) и поразительно отстранен от своих собратьев. Посвятив немало сил развитию статистики и науки об измерениях, он решил создать расу сверхлюдей, в которой не будет места ни бедным, ни слабым, ни немощным, ни даже некрасивым.

Не пытаясь скрыть свои стремления, он изложил эту идею в книге "Наследственный гений", вышедшей в 1869 году. Он заявил, что наука должна "проверять уровень рождаемости слабых и улучшать расу, повышая производительность сильных путем раннего заключения браков с лучшими представителями рода". Гальтон создал карту красоты Великобритании и пришел к выводу, что самые некрасивые в Британии женщины, которых он называл "пугалами", жили в шотландском городе Абердине. На страницах "Наследственного гения" Гальтон ввел понятие "евгеника", которое произвел от греческого словосочетания "[человек] хорошего рода". В опубликованном в 1904 году очерке "Евгеника: определение, предмет и цели" он написал: "То, что природа делает слепо, медленно и безжалостно, человек может сделать осторожно, быстро и милостиво. Поскольку это в его силах, он обязан работать в этом направлении"[5].

Взгляды Гальтона у многих нашли отклик. Прославленные британские и американские интеллектуалы строем последовали за ним, ухватившись за идею создания высшей расы и ограничения воспроизводства "нежелательных элементов". Например, Герберт Уэллс однажды сказал: "Именно стерилизация дефективных, а не отбор успешных особей при размножении дает возможность улучшить человеческий род". На лекции в лондонском Обществе евгенического образования драматург Джордж Бернард Шоу пошел еще дальше и призвал к "широкому применению камеры смерти"[6]. Он провозгласил, что во имя создания лучшего мира "огромное число людей придется уничтожить просто потому, что уход за ними — пустая трата чужого времени".

Фрэнсис Гальтон был основателем и президентом Общества евгенического образования, в котором состоял до самой смерти. Еще одним известным сторонником его идей был Уинстон Черчилль (в 1910 году Черчилль написал британскому премьер-министру Герберту Генри Асквиту служебную записку, в которой отметил, что "размножение слабоумных представляет ужасную угрозу расе"[7], а двумя годами позже стал вице-президентом первого Международного евгенического конгресса). В 1989 году, в запоздалой попытке избавиться от скандального слова на букву "Е", Общество евгенического образования было переименовано в Институт Гальтона. И это не первое объединение евгенических взглядов, названное в его честь. В Америке его труды дали толчок к появлению множества евгенических организаций, самой престижной из которых было Гальтоновское общество. Одним из его основателей был Мэдисон Грант, автор вышедшей в 1916 году книги "Конец великой расы". В ней, отчаянно сетуя на американскую иммиграционную политику, Грант призывал к строительству более совершенного общества путем принудительной стерилизации и внедрения ряда других мер, которые позволили бы обеспечить появление расы сверхлюдей. Эту книгу считали "самым влиятельным трактатом американского научного расизма"[8], но на деле она получила широкое распространение по всему миру. В начале 1930-х годов Адольф Гитлер написал Гранту письмо, в котором поблагодарил его за готовность делиться своими идеями и назвал его книгу "своей Библией". Когда нацисты пришли к власти в Германии, они приказали перевыпустить "Конец великой расы".

Нельзя оправдывать Гальтона и его современников, ссылаясь на специфику соответствующего исторического периода. Двоюродный брат Гальтона Чарльз Дарвин тоже отличался великим умом, прокладывал новые пути в науке и не боялся расширять горизонты. Но его шокировали псевдонаучные доводы, в которых утверждалось, что людей можно ранжировать по расе, и он, пусть и неявно, призывал к отмене рабства[9]. Рабовладелец, написал однажды Дарвин, "порочит свою природу и идет против всех инстинктов, превращая в раба своего чернокожего собрата".

И все же сложно сформировать однозначное мнение о Гальтоне. Его взгляды возмутительны и непростительны. Его работа задала тон многим направлениям научных исследований, и его наследие живет в опасных современных попытках делить род человеческий на основе генетических истоков расовых характеристик[10]. Тем не менее стоит признать, что Гальтон предоставил нам и ряд наиболее широко применяемых математических техник. Например, он заново открыл то, что сегодня называется "мудростью толпы": как оказалось, изучив множество случайных предположений о величине, можно получить неплохой усредненный ответ.

Древние узнали об этом во время Пелопоннесской войны в V веке до нашей эры, когда платейский полководец велел своим воинам считать ряды кирпичной кладки в открытом, неоштукатуренном фрагменте стены, которую пелопоннесцы и беотийцы возвели вокруг их города. Полководец взял значение, которое воины называли чаще всего, — моду, — умножил его на оценочную толщину кирпича и получил высоту стены. Затем он приказал построить достаточно высокие лестницы, чтобы перебраться через стену и бежать.

Снова открыв эту технику, Гальтон использовал медиану. В 1907 году он посетил прибрежный город Плимут на юге Англии. Бродя по рынку, он увидел, как люди пытаются угадать, сколько весит бык, выставленный на продажу в отделе откормленного скота и птицы. Его внимание привлек большой разброс величин, выставленных на всеобщее обозрение, и когда состязание закончилось, он уговорил организаторов передать ему билеты со ставками всех участников. Отбросив билеты с неразборчивыми надписями, он разложил оставшиеся 787 штук по возрастанию и выяснил, что серединным — медианным — предположением стало 1207 фунтов, а это значение всего на 1% отличалось от реального веса быка, который составлял 1198 фунтов. Гальтон написал об этом в журнал *Nature*[11].

Здесь нам стоит сделать паузу, поскольку в его статье затаились угрозы наивного применения статистики. Гальтон начинает с наблюдения: "В наши демократические времена любое исследование достоверности и специфики общественных суждений представляет интерес". Далее он заявляет: "Средний участник [состязания], вероятно, был настолько же в состоянии дать справедливую оценку... как средний избиратель в состоянии судить о большинстве политических вопросов, по которым голосует". В конце концов Гальтон приходит к выводу о том, что результат "свидетельствует о степени доверия к демократическому волеизъявлению". Но это рискованное сравнение. Статистики выяснили, что то, что прекрасно работает в одном контексте, редко хорошо работает в другом. Даже поверхностный анализ показывает, что демократические процессы отличаются от взвешивания быков. Например, в них не используются ни медианные, ни даже средние значения народного волеизъявления. Успех в одном контексте нельзя считать поводом использовать такой же инструмент в другом, и поэтому статистики очень осторожно подходят к своему анализу и его применению. В конце концов, как известно из старой шутки, статистически у человека в среднем чуть меньше одного яичка.

Несмотря на свои шокирующие представления о социуме, к работе с числами Гальтон подходил с огромной тщательностью. В статью о мудрости толпы в журнале *Nature* он включил оценку "вероятной ошибки" в каждой величине. Он также предоставил нам множество статистических инструментов, которые мы доработали и используем по сей день. Так, он первым начал изучать корреляции, с помощью которых на основе изменений переменных определяется, есть ли между ними связь[12]. Вводя эту идею, Гальтон отмечает, что можно измерить множество рук и ног и решить, коррелируют ли между собой их длины. Теперь мы применяем ее, чтобы, например, искать корреляции между оценкой уровня загрязнения и количеством госпитализаций из-за проблем с дыханием.

Кроме того, Гальтон провел подготовительную работу по отделению друг от друга эффектов воздействия разных причин, что подтолкнуло его давнего соратника Карла Пирсона к созданию сложных математических моделей для отслеживания соответствующего воздействия, а затем — к изобретению критерия согласия хи-квадрат. Теперь мы используем этот критерий при анализе данных медицинских исследований, например при определении оптимального возраста для вакцинации детей. О “регрессии к среднему”, то есть тенденции серии измерений возвращаться к средним значениям после захода на территорию “статистических выбросов”, первым тоже заговорил Гальтон. Сначала он назвал это “возвращением к посредственности”, но сути это не меняет. Именно такое статистическое наблюдение говорит мне, что скоро мне станет лучше. Я знаю точно, потому что сходил к врачу: я хожу к нему только в крайнем случае, а когда вы достигли крайности, существенно возрастает вероятность, что дальше вас ждет движение в обратном направлении. Иными словами, регрессия к среднему сообщает мне, что худшая фаза болезни наступает тогда, когда намечается перелом к лучшему.

Гальтон также изобрел опросник, ставший краеугольным камнем медицинских, психологических и социологических исследований. Он применил его в другом своем творении — близнецовых исследованиях, в которых биологические различия сведены к минимуму, что позволяет ученым оценивать влияние воспитания, (почти) не обращая внимания на вопросы природы. Это, сказал Гальтон, дает “возможность справедливо оценить влияние природы и воспитания и понять, в какой степени каждый из этих факторов определяет характер и интеллектуальные способности человека”[13]. Он разослал родителям сотен близнецов опросники с вопросами о сходствах и различиях детей, а также о том, какое влияние на них оказывают жизненные обстоятельства.

Однако Гальтон не понимал, что не все ставят числа превыше всего. Порой необходимо, чтобы люди реагировали на данные эмоционально, а не рационально. Поскольку нашему мозгу сложно работать с числами, данные нужно представлять в таком виде, чтобы они взывали к первичным инстинктам. Изображение кричащего человека может привести к всплеску адреналина, а визуализация данных позволяет нам обойти ограничения нашего мозга и убедиться в истине, постичь которую нелегко. Например, если я попрошу вас подумать о том, какое влияние на природу оказывают 4 триллиона пластиковых бутылок, купленных нами за последние десять лет, мой рассказ о неминуемой экологической катастрофе произведет на вас гораздо меньшее впечатление, чем если я покажу вам гору пластиковых бутылок 2,4 километра высотой, которая вот-вот поглотит весь Манхэттен[14]. И лучше всего этой стратегией воспользовалась Леди с лампой.

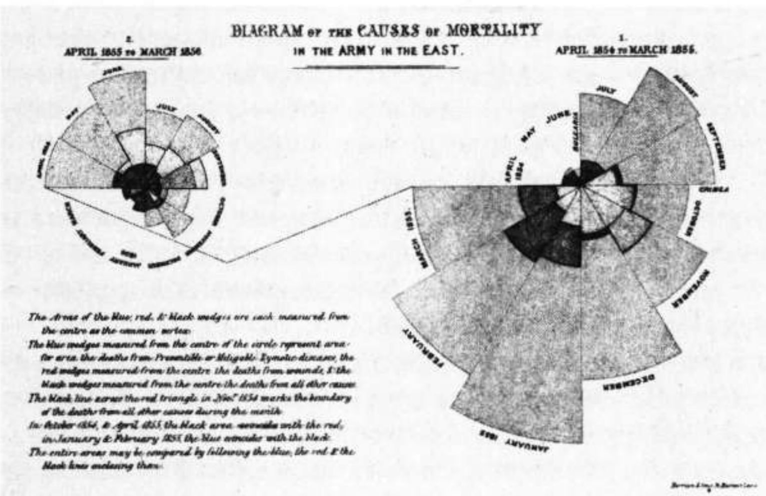
Сила изображений

Флоренс Найтингейл известна тем, что во время Крымской войны она ночами заботилась о раненых в британском военном госпитале в турецком городе Скутари. Она прославилась, когда в заметке в лондонской газете *Times* от 8 февраля 1855 года ее сравнили с ангелом-хранителем и написали: "Ее стройный силуэт тихо скользит по коридорам, и лица страдальцев светлеют от благодарности при виде нее. Когда военные врачи уходят отдыхать и длинные ряды лежащих ничком больных погружаются в тишину и темноту, она остается одна и делает обходы с маленькой лампой в руке"[15].

Неудивительно, что солдаты выделяли ее: она была единственной женщиной, которой разрешалось заходить в палаты после восьми вечера. В стремлении защитить честь своих сестер милосердия Найтингейл ночью держала их под замком — и спала с ключом под подушкой.

Эти меры казались ей необходимыми. Ее ужасало происходящее в госпитале: в письме своему другу Генри Бонем Картеру она рассказала о сержанте, который открывал своим ключом воинский склад и проводил там ночи с женщиной из госпиталя. "Последствия вскоре стали очевидны", — с издевкой написала Найтингейл о беременности женщины. Она обратилась к коменданту лагеря, чтобы он наказал сержанта, но его ответ ее возмутил. “Я не добилась никакого взыскания и никакого наказания для этого человека”, — сообщила она[16]. Найтингейл была поборницей дисциплины и нравственности, но еще яростнее она боролась за цифры. Она понимала, что их правильный анализ может спасать жизни.

Найтингейл с детства занималась математикой. Проходя подготовку во Франции и Германии, она собирала больничные выписки, статистические данные и информацию об организации санитарного контроля и ухода за пациентами в госпиталях. Работая в Скутари, она провела учет смертности больных и сравнила данные с показателями смертности в других местах. Оказалось, что в Скутари умирало 37,5 % пациентов, но в госпиталях на линии фронта уровень смертности составлял всего 12,5 %. Вооружившись числами, Найтингейл решила выяснить, почему так происходит, и принять меры. Как? С помощью действенной инфографики.



Круговая диаграмма Флоренс Найтингейл
Wellcome Collection, Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

По круговой диаграмме Найтингейл сразу видно, что от болезней на Крымской войне умирало больше солдат, чем от ран. Площадь каждого сектора соответствует месячному уровню смертности, а причины смерти отмечены разными цветами. Найтингейл показала диаграмму военному министру, а затем включила ее в свою книгу "Заметки о факторах, влияющих на здоровье, эффективность и управление госпиталями британской армии", вышедшую в 1858 году. Экземпляр этой книги она отправила королеве Виктории, которая велела, чтобы Найтингейл явилась к ней на аудиенцию и лично представила свои выводы. В результате она добилась основания Королевской комиссии по проблемам здоровья в армии, что привело к реформам в военной медицине. И ключевую роль в этом, по словам Найтингейл, сыграла диаграмма: "Диаграммы весьма полезны для иллюстрации некоторых аспектов демографической статистики, поскольку они в визуальной форме передают идеи, ухватить которые сложнее, когда у нас перед глазами одни числа".

Флоренс Найтингейл была не просто сестрой милосердия и не просто статистиком — она была и очень умелым лоббистом. Обретя славу после заметки в *Times*, она стала пользоваться своим положением. У славы была и обратная сторона — в августе 1856 года Найтингейл пришлось тайком вернуться в Британию под чужим именем, чтобы избежать толп, — и все же слава помогла ей собрать более 40 тысяч фунтов в Фонд Найтингейл, и этого хватило на основание Найтингельской школы подготовки сестер милосердия при больнице Святого Фомы в Лондоне. В довершение всего в 1859 году Найтингейл стала первой женщиной — членом Королевского статистического общества. И приняли ее туда вовсе не из-за славы: так там отметили ее выдающиеся заслуги в сфере, которой она посвятила не один десяток лет.

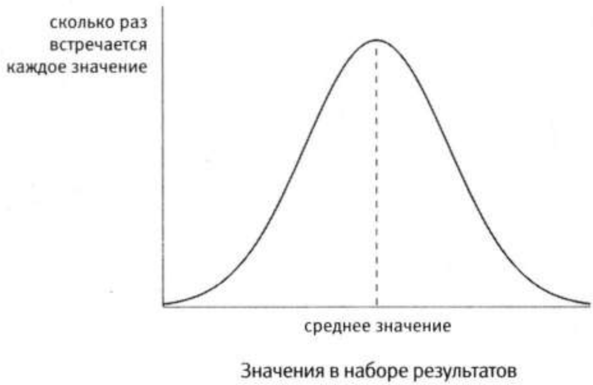
В поисках значимости

К тому времени, когда Флоренс Найтингейл впервые применила свои диаграммы, статистики уже разработали немало инструментов для анализа данных. Первым был метод построения простейшей кривой, лучше всего описывающей основную тенденцию в наборе разрозненных данных. Этот "метод наименьших квадратов" позволил проводить кривую как можно ближе к каждому из элементов данных, сохраняя при этом плавность.

Математики спорят о том, кто предложил метод наименьших квадратов. Француз Адриен Мари Лежандр опубликовал свою версию в 1805 году, но немец Карл Фридрих Гаусс подробнее описал его в 1809-м (через год после того, как Роберт Эдрейн, школьный учитель из США, опубликовал *свой* не менее удачный вариант этого метода). Лежандр, Гаусс и Эдрейн вывели формулу, работающую с "отклонениями", то есть вертикальными расстояниями до кривой от каждого элемента данных. Поскольку точки данных имеются по обе стороны от кривой, одни отклонения положительны, а другие отрицательны, и поэтому сначала нужно возвести их в квадрат, чтобы избавиться от минусов. Кривая наименьших квадратов — это кривая с наименьшей суммой квадратов отклонений.

Гораздо интереснее "нормальное распределение" Гаусса, которое относится к 1809 году. "Распределение" — это разброс данных. Оно бывает разным, и нормальное — или гауссово — распределение формируется в том случае, когда идентичны три определенных характеристики данных. Это среднее значение, мода и медиана. С двумя из них мы встречались, когда изучали работу Фрэнсиса Гальтона, и вместе с модой они дают нам три разных способа вычисления того, что непосвященные называют "средним".

Представим набор данных, в котором, например, записан рост всех людей, живущих на вашей улице. Чтобы вычислить среднее значение в этом наборе, нужно сложить все величины, а затем поделить их сумму на количество слагаемых. Мода — это рост, который имеет наибольшее число людей. Медиану вы получите, если выстроите всех людей по росту от самого низкого к самому высокому и возьмете рост человека, оказавшегося ровно посередине. В нормальном распределении среднее значение, мода и медиана равны. Такое распределение обладает и другими любопытными свойствами, и вскоре мы поговорим о них подробнее.

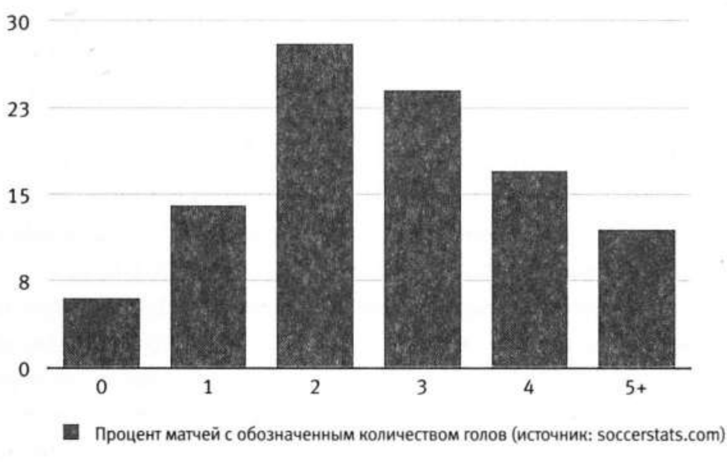


Нормальное распределение

Рост людей — лишь один пример величин, которые обычно приближаются к нормальному распределению. Таким же образом распределяются оценки на контрольных и показатели кровяного давления у населения. Как скажет вам любой актуарий и любой специалист по страхованию жизни, данные о продолжительности жизни людей тоже приближаются к нормальному распределению, пусть и немного асимметричному (выявляя эту асимметрию, они и зарабатывают деньги). Нормальное распределение повсюду. Хотя нам и неясно, как именно оно получило свое название, нормальное распределение вполне можно считать нормой распределения данных.

Как правило, нормальное распределение возникает, когда на измеряемый параметр одновременно незначительно влияет большое число независимых факторов (например, различные генетические, социальные и эволюционные факторы, определяющие, какой у человека будет рост), но существуют и другие формы распределения данных. Одну из них открыл Симеон Дени Пуассон.

Изучая число *e* в пятой главе, мы увидели, что распределения Пуассона наблюдаются тогда, когда события случаются редко, но при этом повторяются и остаются независимыми друг от друга. Пуассон изучал вероятность вынесения несправедливых приговоров в парижских судах в 1820-х годах, желая узнать, стали ли судьи лояльнее к гражданам (как выяснилось, не стали)[17]. Сегодня мы наблюдаем распределения Пуассона в различных системах, например, смотря на число голов в футбольных матчах (в Английской премьер-лиге чаще всего забивают по 2 и 3 гола) и на вероятное число метеоритов больше определенного размера, которые падают на Землю за год (для метеоритов диаметром более 22,4 ме-



Пример распределения Пуассона: распределение голов в футбольных матчах Английской премьер-лиги в сезоне 2019–2020 годов тра в год с наибольшей вероятностью происходит 10, 11 или 12 столкновений).

В каждом случае можно вычислить среднее и применить его к распределению Пуассона, чтобы сделать прогноз. Допустим, я управляю баром и знаю, что в среднем за вечер я продаю 10 ящиков пива. Как подготовиться к неожиданному наплыву клиентов? Покупать на всякий случай 20 ящиков нет смысла: это слишком затратно. Но если я куплю слишком мало ящиков — скажем, всего 12, — то возникнет риск, что пиво закончится и покажется, будто я не умею управлять баром. Новые клиенты никогда ко мне не вернутся.

Оказывается, я могу эмпирически оценить необходимое число ящиков на базе распределения Пуассона. Есть формула, которая дает мне вероятность того, что вечером потребуется x ящиков пива. В ней задействуется историческое среднее λ и (разумеется, как везде и всюду) число Эйлера e:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

(Восклицательный знак после x обозначает "факториал", то есть x умножается на $x-1$, $x-2$, $x-3$ и так далее до единицы.)

Вероятность (P) того, что вечером понадобится 15 ящиков пива, составляет всего 3,5 %. Я продам 13 ящиков только в 7,3 % вечеров. 12 ящиков мне хватит в 9,5 % вечеров.

Какой же мне нужен запас? Если я могу себе такое позволить, то, пожалуй, 15 ящиков... Полностью распродавать их я буду (примерно) 12 раз за год. Но решать мне.

И это важно. По сути, статистика сводится к принятию субъективных решений. Это, если хотите, наука эмпирических предположений. Она напоминает математику и пахнет математикой, но в ней нет и следа той абсолютной уверенности, которую мы ассоциируем с этой наукой. Статистика говорит лишь о том, что вероятно при определенных числах и при определенных оценках достоверности чисел. Может, потому мы, попытавшись освоить математику, и испытываем трудности со статистикой.

С самого начала нашего путешествия мы видим, что человеческий мозг не слишком приспособлен для работы с числами. Статистика дается ему тяжелее всего. Мы смотрим на статистические данные и забываем об оговорках, которые их сопровождают. Или просто не можем понять, что именно они значат. Например, насторожитесь ли вы, если я скажу, что, по данным Всемирной организации здравоохранения, ежедневное употребление 50 граммов переработанного мяса — или бутерброда с двумя кусочками бекона — на 18 % повышает риск развития рака кишечника?[18]

Если вас встревожила эта информация, возможно, вы некорректно поняли слово "повышает" в предыдущем предложении. Съедая каждый день бутерброд с беконом, вы вовсе не повышаете на 18 % вероятность того, что у вас когда-то разовьется рак. Вы повышаете риск войти в 6 % людей, которые не едят изо дня в день бутерброды с беконом, но рано или поздно сталкиваются с раком кишечника. Здесь и наблюдается повышение на 18 %: эти 18 % от 6 % добавляются к вероятности того, что у вас вообще разовьется болезнь.

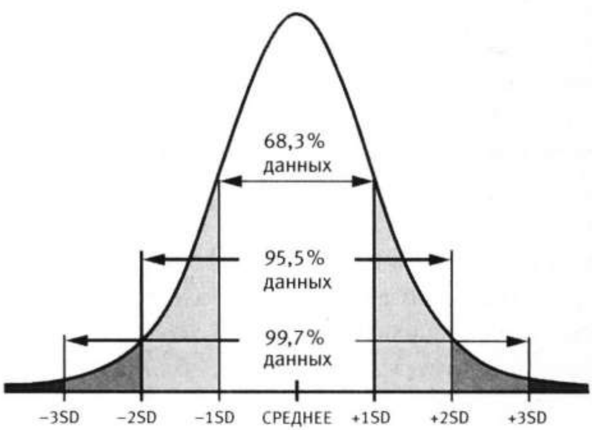
Вычислим 18 % от 6 и получим 1,08. Следовательно, вместо риска в 6 % вы получаете риск в 7,08 %. Скорее всего, вас никогда не тревожило, что вы можете войти в 6 % людей, страдающих от рака кишечника. Думаете, вероятность в 7 % озаботит вас настолько, что вы откажетесь от ежедневного бутерброда с беконом?

Вероятно, это будет не самая рациональная причина отказаться от употребления такого количества переработанного мяса. Да и едите вы его не так уж много. А еще, учитывая, какое удовольствие вы получаете, съедая бутерброд с беконом, — и то, что вещи, которые приносят удовольствие, обычно благотворно сказываются на здоровье, — вам останется лишь принять субъективное решение.

Это справедливо и при рассмотрении вопроса о том, правда ли специалисты по физике частиц в 2012 году засекли бозон Хиггса, проводя эксперименты в ЦЕРН в Женеве. Они не могут быть на 100% уверены в том, что детектор частиц не сработал случайно (да еще и несколько раз, поскольку вердикт был вынесен на основании нескольких наблюдений). Когда мы говорим, что уверены насчет чего-либо в науке, это значит лишь, что случайное совпадение в этой ситуации крайне маловероятно.

Статистики оценивают достоверность, анализируя различные числовые атрибуты данных — например, их среднее значение и размер выборки. Принципиальную важность имеет "стандартное отклонение" — мера того, насколько различные значения из выборки в среднем отличаются от среднего значения. Оно измеряется в тех же единицах, что и измеряемая величина: если это высота 101 далматинца в холке, то средняя высота может составлять 60 см при стандартном отклонении 3 см.

Стандартное отклонение позволяет взглянуть на данные в любопытном ракурсе. Если допустить, что рост со-



Стандартные отклонения при нормальном распределении бак имеет нормальное распределение со средним значением 60 см, то стандартное отклонение 3 см сообщает нам, что рост 68 % собак составляет от 57 см до 63 см. В таком контексте этот диапазон называется 1 стандартное отклонение, или 1σ (сигма). Два стандартных отклонения (2σ) — это диапазон высот в холке, в который входят 95 % собак. 3σ — это 99,7 %.

Вернемся к бозону Хиггса. Уверенность в результате эксперимента обозначается числом, производным от стандартного отклонения и других атрибутов данных. Оно называется *p*-значением, и объяснить простыми словами, что именно оно собой представляет, весьма нелегко. Если обратиться к статистику, он ответит словесной кашей в таком духе: "*P*-значение показывает вероятность получения результатов, которые по меньшей мере столь же экстремальны, как и наблюдаемые результаты проверки гипотезы, при условии, что гипотеза верна". Я же с натяжкой скажу, что *p*-значение показывает, насколько вероятно, что вы получите конкретный результат, если к нему приводит *не то*, о чем вы думаете. Иными словами, если результат, полученный ЦЕРН, *никак* не связан с бозоном Хиггса, а объясняется лишь случайной флуктуацией в фоновом шуме при проведении эксперимента, то сколько раз ученые ЦЕРН получат такой же результат — результат, позволяющий предположить, что перед ними *действительно* бозон Хиггса, — когда будут повторять эксперимент?

Решение в этом случае тоже зависит от субъективного выбора. Его впервые сделал британский статистик Рональд Фишер. В 1925 году он опубликовал книгу "Статистические методы для исследователей"[19]. В ней он предположил, что 1 из 20 — достаточный критерий для большинства экспериментов, проводимых с целью определить, имеет ли наблюдаемое явление любопытную природу или же объясняется лишь волей случая. Этот фактор называется статистической значимостью.

Предложенные Фишером 1 из 20 соответствуют 5 %. Но критерий Фишера не сводится к простому "если мы получаем такой результат в 95 % случаев, то этот результат верен". Если бы! Чтобы продемонстрировать статистическую значимость, нужно сделать сложную серию из хитрых шагов.

Сначала необходимо выдвинуть гипотезу и проверить, верна ли она. В случае с бозоном Хиггса она связана с данными, получаемыми от детекторов, которые (примерно) оценивают число раз, когда засекают определенное количество энергии. Теоретически присутствие бозона Хиггса должно привести к характерному всплеску в частоте обнаружения определенного уровня энергии.

Разумеется, всегда есть вероятность, что такую странную закономерность могут вызвать и случайные флуктуации в детекторах — скажем, флуктуации от электрических помех или от непредвиденного попадания в детектор группы энергетических частиц, прошедших сквозь межзвездное пространство. Это значит, что нельзя быть полностью уверенным, что конкретный всплеск объясняется присутствием бозона Хиггса. Но можно настроить аппарат таким образом, чтобы вероятность выдачи определенного набора данных без участия бозона Хиггса оказалась бы крайне мала. Теперь остается лишь решить, насколько малой должна быть эта вероятность.

Золотой стандарт научного "открытия", который ЦЕРН применил к бозону Хиггса, составляет 5σ, что соответствует попаданию 99,99994 % зафиксированных величин в обозначенный диапазон. Что это значит? Правильно проанализировав статистические показатели, вы увидите, что если бозон Хиггса *не существует*, то в среднем мы будем наблюдать этот принесший Нобелевскую премию набор данных в одном из 3,5 миллиона экспериментов. Если вам интересно, это соответствует *p*-значению 0,0000003.

Понизив стандарт с 5σ до 1σ, мы (в среднем) получали бы случайный результат, похожий на открытие, в одном из шести проводимых экспериментов. При стандарте 3σ ложное "открытие" совершалось бы в среднем в одном из 741 испытания. Можно сказать, что стоило бы для верности повысить стандарт с 5σ, скажем, до 10σ. И это решение тоже субъективно. Правда в том, что, применяя стандарт 10σ, мы, вероятно, и вовсе не смогли бы заявить ни об одном открытии. Стоит также отметить, что мы не всегда требовали и 5σ. В 1984 году физики ЦЕРН Карло Руббиа и Симон ван дер Мер получили Нобелевскую премию за открытие W- и Z-бозонов годом ранее. Но статистическая значимость их результатов даже не приблизилась к 5σ[20].

Вопрос о субъективных решениях важен, поскольку от них зависит, поступит ли на рынок жизненно важное лекарство и признают ли ответчика виновным в суде. Давайте сначала займемся юридическими делами, поскольку они имеют гораздо большее значение, чем кажется многим из нас.

Преступление и наказание

В зависимости от того, где вы живете, вас с вероятностью 1 к 3 могут однажды попросить войти в состав коллегии присяжных заседателей. В ходе судебного разбирательства вам могут представить статистические данные. Скорее всего, вы никогда не учились их анализировать. И вполне возможно, что человек, который представит их вам, тоже будет не слишком сведущ в статистике. Это серьезная проблема судебной системы, и она уже стоила людям жизни.

В частности, я говорю о британке Салли Кларк, которую в ноябре 1999 года осудили за убийство двух ее первых детей. Защита утверждала, что дети умерли от естественных причин — либо из-за недиагностированного наследственного заболевания, либо из-за ужасного и необъяснимого синдрома внезапной детской смерти (СВДС). Специалист в области жестокого обращения с детьми — и врач — профессор сэр Рой Мидоу сообщил суду, что статистический риск смерти ребенка от СВДС в таком доме, как у Салли Кларк, составляет 1 к 8453. Вероятность того, что такое случится дважды, сказал он, составляет 1 к 8453^2, то есть 1 к 73 миллионам. Иными словами, она чрезвычайно мала.

Суд присяжных признал Салли Кларк виновной. Первая апелляция успехом не увенчалась. Подали вторую апелляцию, и Кларк освободили на основании того, что ее осуждение не подкрепляется статистическими данными. Но прежде другую женщину обвинили в двойном убийстве в пугающе похожем деле (где в качестве эксперта тоже выступал Мидоу), а психическое здоровье Салли Кларк так сильно пошатнулось, что спустя четыре года после освобождения она умерла от алкоголизма.

В признании Кларк виновной было несколько проблем, но нас интересуют две[21, 22]. Во-первых, хотя образ жизни Кларк и состояние ее дома действительно говорили, что вероятность СВДС составляет 1 к 8453, отсюда не следует, что второй случай СВДС в этом доме столь же маловероятен. Нельзя просто возвести вероятность в квадрат. Если какой-то неизвестный фактор вызвал смерть в первом случае, то вполне вероятно, что этот же неизвестный фактор вызовет ее снова. Иными словами, вторая необъяснимая смерть становится гораздо более вероятной (по одной из оценок, ее риск возрастает до 1 к 60). Во-вторых, если объяснение невиновности обвиняемого крайне маловероятно, это не делает его виновность крайне вероятной. Стратегия использования сомнительной или вводящей в заблуждение статистики, которая, казалось бы, свидетельствует о высокой вероятности виновности, называется ошибкой обвинителя.

Стоит отметить, что существует и ошибка подзащитного. Ее совершили в суде над О. Джеем Симпсоном: команда адвокатов апеллировала к тому факту, что менее 1 из 1000 человек, прибегающих к домашнему насилию над женщинами, в конце концов убивает их. Если вы сидите в составе коллегии присяжных, у вас возникает вопрос: неужели О. Джей Симпсон хуже, чем 1 из 1000? Но задаваться им не стоит, ведь он сбивает с толку и используется, чтобы вас отвлечь. Суть в том, что Николь Браун была убита, а нужная статистика такова: 4 из 5 избитых и убитых женщин погибают от руки партнера.

Даже убедительные с научной точки зрения доказательства, такие как пробы ДНК, могут вводить в заблуждение, если статистика представляется некорректно. Например, американской коллегии присяжных на суде об ограблении могут сказать, что вероятность совпадения ДНК подозреваемого и ДНК с места преступления — один на миллион. В результате присяжным может показаться, что дело не стоит и выеденного яйца. Но в США проживает 152 миллиона взрослых мужчин, а значит, помимо подозреваемого может найтись еще 151 человек, ДНК которого совпадет с ДНК преступника. Для вынесения обвинительного вердикта этих улик недостаточно.

Подобная проблема возникла при тестировании населения на COVID-19 в разгар недавней вирусной пандемии. В несовершенном мире нам кажется, что тест, дающий "99% точности", близок к совершенству, правда? Значит, нужно применять его ко всем, вне зависимости от того, есть ли у них какие-либо симптомы болезни, так? Если тест окажется положительным, люди вылечатся (при необходимости), а затем вернутся к своим делам, зная, что не заболеют снова, потому что у них сформировался иммунитет. Но такое субъективное решение может привести к ужасным последствиям.

Допустим, один человек из тысячи действительно болен COVID-19, и мы тестируем 1000 человек. На 99% точный тест даст нам верный ответ при тестировании 99% больных и 99% здоровых. Следовательно, он выдаст положительный результат оставшемуся 1% из 999 человек, которые не болеют коронавирусом. Это огромное число — 9,99 человека. Фактически 11 человек из 1000 получат положительные результаты, но только один из них действительно приобретет иммунитет. Это значит, что если ваш тест показал положительный результат, вы можете быть лишь на 10% уверены в том, что у вас сформировался иммунитет. Не очень полезно, правда? И это если вы владеете *всей* информацией. Не зная, насколько коронавирус распространен в популяции, вы и понятия не имеете, сколько тестов оказываются ложноположительными.

Такая нелогичность является одной из причин, по которым многие статистики предпочитают работать с другой системой. Она называется байесовской статистикой и появилась довольно давно. Преподобный Томас Байес вывел свою теорему в середине XVIII века. Точной даты мы не знаем, поскольку Байес никогда ни с кем не делился своими идеями.

Байесовская статистика, описанная в документах, обнаруженных после смерти преподобного в 1761 году, по-прежнему вызывает у статистиков споры. Никто не может однозначно сказать, лучше ли она, чем стандартная "частотная" статистика, которую мы разбирали ранее. Знакомая нам система называется частотной, поскольку в ее основе лежит поиск вероятности путем анализа частотности конкретного исхода. Так, если я буду снова и снова бросать правильную кость, в долгосрочной перспективе все числа будут выпадать с одинаковой частотой. Байесовская система, с другой стороны, изучает "условные вероятности": каковы шансы B, если случилось A?

Допустим, вы присяжный и вам представили улику, которая на 70 % убедила вас, что я виновен в нападении. Но вас пока не ознакомили с данными судебной экспертизы. Из них вы узнаете, что на жертве найдена кровь такой же группы, что и у меня. Ага! Но постойте: такая группа крови у 35 % населения. Должно ли это повысить вашу уверенность в моей виновности? Или понизить? Или же эта информация не имеет значения?

Вооружившись байесовской статистикой, вы можете прямо на скамье присяжных рассчитать все с помощью карандаша и бумаги. Для меня ваши расчеты обернутся катастрофой: теперь вам следует примерно вдвое сократить свою уверенность в моей невиновности. Это, однако, не значит, что вы уверены в моей виновности на 140 %. Дело обстоит так: вы были на 30% уверены, что я невиновен, но данные судебной экспертизы укрепили вашу уверенность в том, что я виновен. Теперь вы лишь на 14% уверены в моей невиновности, а следовательно, на 86% уверены, что я совершил преступление[23].

Может, вам кажется сомнительным, что присяжному под силу разобраться с числами, чтобы оценить свою уверенность в виновности подсудимого, но уверяю вас, в этом нет ничего нового. Возьмем, например, дело "Нью-Джерси против Спанна" 1993 года[24]. Чернокожего тюремного надзирателя Джозефа Спанна обвинили в зачатии ребенка при совокуплении с заключенной — с учетом его положения это преступление. Все зависело от того, сможет ли обвинение доказать, что Спанн — отец ребенка.

Прокурор представил данные судебной экспертизы на основе генетического тестирования, которое, как утверждалось, с вероятностью 96,55% показало, что отцом действительно является Спанн. В экспертизе учитывалось, что у ребенка обнаружился определенный набор генов, которого не было в ДНК матери, но который обычно присутствует в ДНК 1% чернокожих американских мужчин, и что Спанн входил в этот один процент. Присяжным сказали, что им следует отталкиваться от любой "априорной" оценки вероятности его вины, но также сообщили, что государственный свидетель-эксперт присвоил ей "нейтральную" вероятность в 50%. Весьма любопытно ознакомиться с подробностями этого дела[25]. Эксперт показал, что итоговая вероятность менее чем в 90% считается "не показательной", при результате 90–94,99% отцовство признается "вероятным", 95–99% — "весьма вероятным", а 99,1–99,79% — "крайне вероятным".

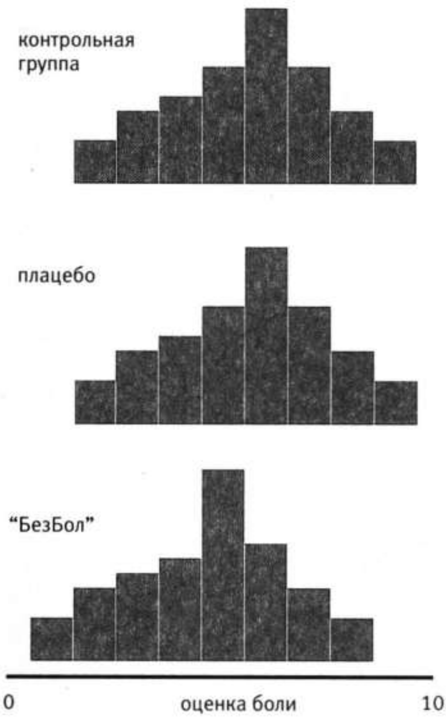
Присяжным объяснили, как рассчитать свою уверенность на основе выбранной ими априорной оценки. Им, однако, не показали, как априорная вероятность скажется на итоговом результате. В конце концов они признали подсудимого виновным, но это дело остается спорным по целому ряду причин — и не в последнюю очередь потому, что решение зависело от статистических расчетов не сведущих в статистике присяжных.

Если у вас от этих чисел закружилась голова, вы вовсе не одиноки. Сегодня, когда данные судебных экспертиз играют все большую роль в системе правосудия, задействованная в них математика становится весьма проблематичной. Идея о том, что обычные люди решают, виновны ли обвиняемые в преступлениях, формирует фундамент нашего общества, но сложно спорить с тем, что статистику лучше оставить на откуп профессионалам. В следующем рассматриваемом случае — в случае с исследованиями, определяющими судьбу лекарственных средств, — сомневаться в этом не приходится. Давайте с помощью стандартного частотного подхода взглянем на статистику гипотетического испытания лекарственного препарата.

Патологии, пилюли, плацебо и *p*-значения

Пока мы не освоили искусство большего, эффективность лечения оценивалась субъективно, часто по слухам или по наитию. Так, например, прославленный гений Исаак Ньютон убедил себя в том, что раствор жабьей рвотной массы лечит бубонную чуму. Сегодня у нас есть более надежные способы. Допустим, мы хотим проверить гипотезу, что лучше принять обезболивающее (назовем его “БезБол”), чем не принимать никаких лекарств или принять плацебо (таблетку, не содержащую действующего вещества). Сначала мы подвергнем всех испытуемых слабому электрическому шоку и попросим их дать оценку боли. Затем мы дадим половине из них “БезБол”, а другой половине — плацебо, которое не отличается от “БезБола” ни видом, ни вкусом, но при этом не обладает обезболивающим действием. Теперь мы снова подвергнем испытуемых электрошоку и попросим их оценить боль. Велика вероятность, что мы получим три характерных нормальных распределения: кривую "БезБола", кривую плацебо и начальную кривую. Как понять, стоит ли нам пускать "БезБол" в производство?

Нужно провести "проверку гипотезы". По сути, мы хотим узнать вероятность случайного наступления улучшения. Скажем, начальная средняя оценка боли составила 5,71 (из 10) для 50 испытуемых. Стандартное отклонение в этом наборе данных — 1,97. Группа пациентов, которым дали "БезБол", сообщает, что боль при электрошоке составила в среднем 4,28 из 10 при стандартном отклонении 1,72. Группа плацебо теперь оценивает боль в 4,80 из 10 при стандартном отклонении 1,42.



Распределения "БезБола", контрольной группы и группы плацебо

Теперь можно взять данные по группам “БезБола” и плацебо, подставить их в стандартные статистические формулы и вычислить *p*-значение. Сначала выдвинем гипотезу о результатах приема плацебо и “БезБола”. Наша “нулевая” гипотеза состоит в том, что разница между этими группами объясняется волей случая. Проверим это по формуле из учебника статистики и найдем *p*-значение, которое покажет, в какой степени мы можем быть уверены в эффективности “БезБола”. Подставив в формулу средние оценки боли, стандартное отклонение и число испытуемых, мы получим так называемый *t*-критерий. Далее преобразуем его с помощью статистической программы, которая учитывает, какой вопрос мы задаем и сколько у нас испытуемых, в *p*-значение. В нашем случае *t*-критерий равен 1,5116. Это дает нам *p*-значение, близкое к 0,072.

Это немного выше 0,05 — обычного стандарта статистической значимости. Поскольку *p*-значение показывает, с какой вероятностью мы наблюдали бы столь же значительную разницу в средних оценках боли в том случае, если бы препарат не оказывал никакого действия и работал исключительно как плацебо, это дает основание предположить, что опровергнуть нашу нулевую гипотезу нельзя: похоже, “БезБол” не показывает стабильно более высоких результатов в сравнении с плацебо. В конце концов нам снова приходится принять субъективное решение, но это чрезвычайно полезная инновация. Современные лекарственные препараты основаны на статистике: описанный процесс позволил нам количественно оценивать, насколько хорошо работают лекарства, операции и другие медицинские вмешательства, радикально улучшая — и порой спасая — огромное множество жизней, не расходуя попусту ценные ресурсы системы здравоохранения, например часы работы в операционных и, конечно, деньги.

Виртуозная экстраполяция

Хотя история статистики и вызывает у нас вопросы, а необходимость принимать субъективные решения может показаться нам проблематичной, нет смысла отрицать, что в современном мире статистика обрела огромную важность и влияние. Статистические инструменты каждый день используются в медицине, политике, экономике, правосудии и науке. Но одна область статистики оказывает на нашу жизнь гораздо большее воздействие, чем остальные. Я имею в виду семплирование.

Семплирование — это искусство достоверно экстраполировать знания о малой части чего-либо, чтобы получать представление о целом. Вы постоянно прибегаете к семплированию, но действуете, вероятно, по наитию, без математической точности. Так, готовя спагетти, вы наверняка снимаете больше одной пробы, чтобы удостовериться, что блюдо уже можно подавать к столу. Если вы ищете электрика, то что-то подсказывает вам, что лучше сперва спросить в нескольких местах, сколько стоят необходимые работы, чтобы в итоге с вас не взяли слишком много. В процессе онлайн-шопинга вы также принимаете субъективные решения о семплировании, изучая отзывы покупателей: можно ли считать, что продукт, которому поставили пять высших оценок, лучше, чем продукт, который 200 раз оценили на четверку?

В промышленных масштабах ситуация с семплированием не отличается. Если я сорву с поля 10 спелых колосьев ячменя и изучу их качество, насколько показательными будут результаты моей проверки для оценки состояния всего поля? Если я сниму с заводского конвейера 10 деталей и подвергну их испытанию на прочность, насколько я смогу быть уверенным в качестве остатка партии? Есть ли способ выяснить, будет ли лекарство помогать большинству людей, проверив его лишь на нескольких? Если я могу передать лишь небольшую часть сигнала по электрическому или оптоволоконному кабелю, то есть ли способ собрать отправленные мною фрагменты, чтобы человек на другом конце смог воссоздать оригинальное сообщение? Эти вопросы на множество миллионов долларов лежат в основе нашей потребительской экономики.

История семплирования восходит как минимум к 400 году нашей эры. В санскритском эпосе "Махабхарата" древнеиндийский правитель Ритупарна оценивает количество плодов на двух больших ветвях дерева бибхитаки. Сосчитав плоды на нескольких маленьких веточках, он заявляет, что на всем дереве 2095 плодов и 100 тысяч листьев. Его спутник царь Нала всю ночь не смыкает глаз, чтобы проверить ответ, и приходит к выводу, что он верен. Подобным образом с 1282 года в Англии проверяют монеты, отчеканенные на Королевском монетном дворе. Этот процесс называется пробировкой и предполагает семплирование новых монет для проверки их единообразия.

Англоязычное название — *The Trial of the Pyx* — происходит от латинского слова, значащего "маленький ящик". Случайная выборка монет каждого достоинства запирается в нескольких деревянных ящиках. Затем их берут на проверку: их вес, состав, размер и маркировку сравнивают с желаемым стандартом. Число проверяемых монет каждого достоинства определяется пропорционально числу отчеканенных монет: предполагается, что если их характеристики соответствуют установленным нормам, то практически наверняка им будут соответствовать характеристики всей партии.

Пробировка монет проходит каждый год в зале Почтенного общества золотых дел мастеров в Лондоне. Церемония поражает размахом и красками, но строго следует древним протоколам. Присутствовать на ней обязаны канцлер казначейства — или назначенный им представитель, —

а также полноправные члены Почтенного общества золотых дел мастеров и сотрудники монетного двора. Решение о том, хорошо ли двор отчеканил новые монеты, выносит жюри из членов Общества золотых дел мастеров. Если все в порядке, то находящиеся в обращении монеты, не соответствующие стандартам, можно вполне обоснованно считать поддельными.

Королевский монетный двор всегда гордился своими денежными знаками и безжалостно преследовал фальшивомонетчиков. В 1696 году смотрителем монетного двора стал особенно ревностный человек, а эта должность, помимо прочего, предполагает борьбу с подделкой денег. Исаак Ньютон никогда прежде не состоял на государственной службе, но призвал на помощь свои наблюдательность, проницательность и дальновидность. К 1699 году он лично выследил и арестовал Уильяма Челонера — крайне злостного фальшивомонетчика. Челонер был настолько искусен и настолько хладнокровен, что даже предложил свою помощь властям, поскольку “только вор может поймать вора” и положить конец бичу фальшивомонетничества. Но с Ньютоном ему было не тягаться, и 16 марта его повесили[26]. Вскоре после этого Ньютон занял еще более высокую должность: стал управляющим монетного двора. Именно тогда у него и возникли сложности с пробировкой монет.

Учитывая, что мы знаем об Исааке Ньютоне, несложно представить, в какую неистовую ярость он пришел, когда в 1710 году жюри сообщило, что отчеканенные монеты на одну тысячную долю отклонились от стандарта в меньшую сторону. Ньютон же полагал, что под его руководством монетный двор стал чеканить монеты “с гораздо большей точностью, чем когда-либо прежде”[27].

Из-за громких протестов Ньютона мастера золотых дел выставили его из церемониального зала. Не желая сдавать позиций, тот отправился в лабораторию, вооружившись ручкой и бумагой, и не переставал трудиться, пока не понял, в чем их ошибка. Проблема была в дефектной "проверочной пластине" — изготовленном из золотого сплава эталоне сравнения, который заменили в том году.

Объяснив ошибку в производстве проверочной пластины, которая привела к его отставке, Ньютон предложил реформировать протокол пробировки монет. Он сказал, что монетный двор должен заменить проверочную пластину на пластину из чистого золота. Его идею не приняли. Но через сто пятьдесят лет чиновники монетного двора признали предложение Ньютона дельным. Спустя целых сто тридцать три года с его погребения в Вестминстерском аббатстве его инновацию все же внедрили. Да, он был сварлив, но у нас ушло больше века, чтобы наконец воспользоваться его мудростью.

Guinness и *t*-критерий Стьюдента

Статистической инновацией, связанной с семплированием, также объясняется успех *Guinness* — одного из наиболее преуспевающих мировых брендов XX века. И здесь вышло особенно удачно: в стремлении улучшить свой стаут пивоварня *Guinness* подарила нам один из самых широко используемых статистических инструментов.

Когда в 1899 году Уильям Сили Госсет пришел работать на завод *Guinness*, он стал одним из шести человек в только что основанном в компании отделе научного пивоварения[28]. Его коллегами были химики, с отличием окончившие либо Оксфорд, либо Кембридж, и относились к ним как к настоящим звездам. Их поселили в доме *Guinness*. Сотрудникам ниже рангом говорили, что если им повезет встретить в коридоре одного из пивоваров, то следует опустить глаза и не поднимать их, пока он не пройдет мимо.

Предприятие недавно расширилось, и руководители *Guinness* были твердо настроены сделать науку фундаментом своего бизнеса. В 1886 году компания весьма успешно вышла на Лондонскую биржу. К тому времени, как Госсет пришел туда работать, *Guinness* стала крупнейшей пивоварней в мире, а это значило, что ей в огромном количестве требовались хмель и ячмень неизменно высокого качества. Новые пивовары стали собирать нужные данные, но анализировать их было сложно. Несмотря на статус и образование, пивоварам плохо давалась математика, а статистику они не знали вовсе. Поскольку в математике Госсет был лучшим среди худших, именно ему пришлось разбираться в вопросе. Он прочел пару учебников и уже к 1903 году научился на основе стандартного отклонения и размера выборки определять так называемую стандартную ошибку. Он даже предложил самостоятельно разработанный критерий корреляции. В отчете для пивоварни Госсет описал свой новый "урожай" статистических инструментов и пояснил, каким образом они могут улучшить производство. Он также упомянул, что никто на пивоварне — включая ученых пивоваров — прежде ничего из этого не знал из-за "распространенного страха перед математикой". Видите? Не только вы ее боитесь.

Летом 1905 года компания *Guinness* отправила своего нового эксперта по статистике в Англию на консультацию к последователю Гальтона Карлу Пирсону, которого в то время считали ведущим мировым статистиком. Госсет объяснил, что хочет научиться сравнивать небольшие количества разных вещей: так, экспериментируя с ячменем, в *Guinness* рассматривали лишь четыре его сорта. Точно вывести стандартное отклонение для выборки из четырех единиц чрезвычайно сложно, и Госсет надеялся, что Пирсон хотя бы подскажет ему, как в таком случае оценивать ошибку и принимать нужные субъективные решения, например определять, какой уровень вероятности стоит считать значимым. Но в то время еще ни у кого, включая Пирсона, не было статистических инструментов для работы с такими малыми выборками. Постаравшись не обидеть Госсета, Пирсон обучил его всем известным ему статистическим приемам. По словам Госсета, они управились за полчаса.

Как ни странно, этого оказалось достаточно, чтобы по возвращении на *Guinness* Госсет внедрил кое-какие методы анализа данных. И его инновация была признана успешной, поскольку через год пивоварня снова отправила Госсета работать с Пирсоном и Госсет поступил в Лондонский университетский колледж. К 1907 году, сделав, как он выразился, несколько "удачных предположений", Госсет получил ответ на свои вопросы об ошибках в малых выборках. Исследовались не данные о ячмене, а рост и длины средних пальцев левой руки преступников из местной тюрьмы, а сведения предоставлял Скотленд-Ярд, что стало возможно, как мы вскоре увидим, поскольку Фрэнсис Гальтон вызвался найти (и искоренить) преступное естество английского общества.

Когда проблема оказалась решена, Госсет снова вернулся в Дублин и применил новые статистические законы. Благодаря им стало очевидно, что лучше всего для *Guinness* подходит сорт "Лучник", и пивоварня быстро скупила все семена этого сорта, которые были на рынке: 1000 бочек. Через год после посева у *Guinness* оказалось 10 тысяч бочек семян, которые можно было распределять между фермерами, а больше их нигде не было. *Guinness* захватила контроль над самым важным сырьем для своего пива.

Как только вопрос с ячменем был улажен, Госсету разрешили опубликовать свое открытие. Ему не позволили подписать статью своим именем, чтобы конкуренты *Guinness* не раскрыли секрет пивоварни, и предложили на выбор два псевдонима: Пьюпил ("ученик") и Стьюдент ("студент"). Так и появился *t*-критерий Стьюдента.

Этот *t*-критерий позволяет нам понять, как взаимосвязаны размер выборки и степень неопределенности, которую он вносит в расчеты. Зная это, мы можем оценивать достоверность своих результатов. Инновация Госсета прекрасно работала в *Guinness*, но правда в том, что никто не обращал на нее внимания, пока Рональд Фишер — человек, который решил, что считается статистически значимым, — не доказал ее математически и не расширил диапазон ее применения. Теперь мы используем *t*-критерий всякий раз, когда хотим сравнить разные выборки. В медицинских исследованиях мы применяем его, чтобы оценивать действенность антиретровирусной терапии при лечении ВИЧ. В исследованиях бизнеса он позволяет нам изучать, какой эффект оказывают различные вмешательства — например, совершенствование протоколов обслуживания клиентов. И он по-прежнему применяется в той сфере, с которой все и началось, — в сельскохозяйственных исследованиях, где он показывает нам эффективность удобрений, относительную ценность разных сортов выращиваемых культур и безопасность таких переработанных продуктов, как молоко и сыр.

Компромиссы сжатия

Несмотря на все новаторские предложения Фишера, в последние несколько десятилетий миром правит другая выборочная статистика, которая значительно повысила качество нашей жизни и дала нам такие известные аббревиатуры, как JPEG, MPEG, MP3 и HDTV. Давайте рассмотрим математику сжатия данных.

В 2019 году население США получило более 1 триллиона аудио- и видеофайлов в формате потокового вещания с серверов, раскиданных по всему миру. Учитывая пропускную способность каналов передачи данных, формирующих интернет, это было бы невозможно, если бы передаваемые файлы не были “сжатыми”, то есть содержащими гораздо меньший объем данных, чем оригинал. А сжатие не выполнить без выборочной статистики.

Записывая музыкальную композицию, мы хотим, чтобы запись содержала всю информацию, которая необходима для воспроизведения того, что мы слышали в оригинале. Эта информация может быть записана на дорожки виниловой пластинки, в микроскопические углубления на пластике компакт-диска или закодирована нулями и единицами в цифровом файле, но она так или иначе сообщает проигрывающему музыку устройству, звуки какой частоты воспроизводить в конкретный момент и как согласовывать их уровень громкости. Даже для трехминутной поп-песни это огромный объем данных. Но оказывается, что без значительной их части можно обойтись.

В начале XIX века французский математик Жозеф Фурье показал, что непрерывный сигнал любой сложности можно воспроизвести как сумму синусоидальных колебаний различной частоты и амплитуды. Для идеального воспроизведения понадобится бесконечный набор таких колебаний, но Фурье продемонстрировал, что достаточно и конечного их числа. Результат, в котором задействуются (относительно) простая формула и комплексные числа, называется преобразованием Фурье.

Нововведение Фурье предоставило ученым совершенно новый инструмент. Чтобы представить сигнал, меняющийся со временем, теперь можно было просто пройтись по частотам его компонентов. Переход в так называемый диапазон частот позволил ученым по-новому анализировать и обрабатывать меняющиеся со временем сигналы. Эта техника заняла главенствующее положение в целом ряде областей науки, включая термодинамику, геологию и — гораздо позже — квантовую механику.

Когда мир приступил к работе с цифровой информацией, появился немного другой инструмент. Преобразование Фурье в применении к дискретным нулям и единицам, а не к непрерывной аналоговой волне, стало “дискретным преобразованием Фурье”. Эта идея легла в основу формата

JPEG, предложенного Объединенной группой экспертов по фотографии (*Joint Photographic Experts Group*), которая в 1992 году одобрила официальный стандарт сжатия файлов цифровых изображений. Впрочем, как в 1965 году показал Джон Тьюки, дискретным преобразованием Фурье дело не ограничилось.

Тьюки родился в 1915 году и быстро проявил способности к математике[29]. Рано заметив его талант, родители в 1920-х годах обеспечили ему обучение на дому. Уже к 35 годам он стал полным профессором в Принстоне, а в 1965 году основал в университете кафедру статистики. В тот же год появилось быстрое преобразование Фурье (БПФ) — Тьюки, входивший в Научно-консультационный совет при президенте Кеннеди, предложил этот алгоритм, поняв, что нужно быстро обрабатывать сейсмологические сигналы, которые могут сообщить о советских ядерных испытаниях.

К тому времени Тьюки, которого сравнивали с “огромным медведем”, уже ввел в употребление понятие “бит”, которым обозначил бинарную единицу теории информации (о которой мы поговорим в следующей главе). Это было в 1947 году. В 1958 году он изобрел понятие “программное обеспечение”. Пожалуй, “быстрое преобразование Фурье” было все же менее запоминающимся. Но в ходе цифровой революции эта техника оказалась ничуть не менее важной.

БПФ, по сути, представляет собой ускоренный способ осуществлять дискретное преобразование Фурье для сжатия цифровых данных. Формат JPEG не нуждался в скорости БПФ. Но формату MPEG, одобренному Экспертной группой по движущимся изображениям (*Moving Pictures Expert Group*) в 1993 году, она была, несомненно, нужна. Аудиодорожка к движущимся изображениям содержится в MP3-файле — вы каждый день воспроизводите такие файлы при беспроводном подключении, а также подключении по *Bluetooth*, медному или оптоволоконному кабелю. MP4 —

это совокупность аудио и видео. В этом формате оригинальный сигнал обрабатывается с помощью статистического анализа БПФ Тьюки, в результате чего размер файла с данными уменьшается, но к заметному ухудшению качества изображения или звука это не приводит. Третья итерация, MPEG-3, обеспечивает работу телевидения высокой четкости. На всякий случай эксперты MPEG уже разработали стандарт сжатия и передачи информации, содержащейся в вашем геноме (MPEG-G), и полностью иммерсивного 360-градусного видео виртуальной реальности (MPEG-I). Да, вклад статистики не всегда очевиден, но она делает жизнь в XXI веке необычайной, успешно доставляя развлекательные материалы, образовательные ресурсы, важнейшие для бизнеса данные и даже персонализированные услуги здравоохранения в любую точку земного шара — ровно туда, где в них возникает потребность.

Нам осталось упомянуть лишь об одном человеке, и этот человек — образец скромности. Жозеф Фурье остался сиротой в нежном возрасте девяти лет и впоследствии открыл парниковый эффект, оказался за решеткой во время Великой французской революции и посетил не один континент как научный советник Наполеона Бонапарта. Джон Тьюки, как мы видели, был вундеркиндом, который успел послужить президенту Кеннеди и сыграл решающую роль в холодной войне. Я не могу сказать вам ничего из ряда вон выходящего об Ингрид Добеши (если не считать того, что в 1994 году она стала первой женщиной — полным профессором математики в Принстоне, но это, пожалуй, больше говорит о Принстоне, чем о ней самой). Добеши родилась в Бельгии и работает в Университете Дьюка в Дареме (штат Северная Каролина). Имея огромный талант к математике, она подарила нам статистический инструмент, который лег в основу базы данных отпечатков пальцев ФБР, множества медицинских технологий, спасающих жизни, и аппаратов, регулярно выявляющих столкновения черных дыр примерно в миллиарде световых лет от нас. Впрочем, она бы, пожалуй, не оценила, если бы это наделало шуму.

Рассказывая о Добеши, акцент обычно делают на том, как ей нравится работать в саду. Возможно, это объясняется тем, что большинству из нас просто не под силу оценить сложную математику ее изобретения. Тем не менее мы можем хотя бы взглянуть на колебания, называемые вейвлетами (от англ. *wavelet* — небольшая волна).

Вейвлеты позволяют нам математически представить всплеск — очень короткий изолированный сигнал, напоминающий пик на кардиомониторе. Это гораздо сложнее, чем кажется. Когда мы воссоздаем сигналы в качестве суммы синусоидальных колебаний, у них почти всегда оказывается "длинный хвост", потому что резкая остановка сигнала возможна только при использовании чрезвычайно высокочастотных синусоидальных волн. Это сильно нас ограничивает, поскольку к сигналу добавляется огромный объем данных — часто даже больше, чем содержится в оригинале.

Вейвлеты Добеши — альтернатива системе преобразований Фурье. Они занимают пространство с бесконечным числом измерений (это не так сложно, как кажется; для их применения нужно просто обратиться к силе бесконечных рядов, с которыми мы встречались в главе о математическом анализе). Добеши нашла способ создавать начальный, или материнский, сигнал, у которого вообще нет хвоста: такой сигнал сводится к нулю на очень малом расстоянии от пика. При корректировке сигнала-матери у него появляются дочери, внучки, правнучки и так далее. Они дают нам все больше подробностей, и их можно сложить, чтобы создать чрезвычайно короткие, информационно насыщенные всплески, которые кодируются в очень маленькие файлы.

Добеши совершила свой прорыв в 1986 году, и это сразу же оказало влияние на обработку данных. Особенно широко вейвлеты применяются в сфере медицинской визуализации. При эндоскопических, ультразвуковых, рентгеновских, МРТ- и КТ-исследованиях вейвлеты упрощают обработку и передачу снимков без потери жизненно важных — возможно, даже спасающих жизни — деталей. Но поистине мир, пожалуй, изменило применение вейвлетов в базах данных отпечатков пальцев.

Пионером применения отпечатков пальцев в качестве источника информации для правоохранительных органов был Фрэнсис Гальтон. В 1888 году в письме в журнал *Nature* он назвал отпечатки пальцев, пожалуй, "самым красивым и характерным из всех внешних признаков" и немного странно описал их как "узоры из тонких линий, которые остаются на полях книг, когда дети хватают их жирными пальцами"[30]. Он вычислил, что вероятность совпадения отпечатков пальцев у разных людей составляет 1 к 64 миллиардам. Скотленд-Ярд не упустил представившийся шанс, основал свою первую картотеку отпечатков пальцев в 1901 году, и уже через год отпечатки пальцев оказались впервые представлены суду в качестве улики. В 1903 году идею подхватили тюрьмы штата Нью-Йорк, где заключенных стали опознавать по отпечаткам пальцев.

Ценность отпечатков пальцев пропорциональна их количеству в вашей картотеке и обратно пропорциональна времени, которое необходимо, чтобы найти их и сравнить между собой. Но чем больше в картотеке записей, тем дольше искать нужную. Сжатие отпечатков пальцев с помощью преобразований Фурье не помогло решить этот парадокс, поскольку при успешном сжатии данных терялось слишком много деталей. Но затем появились вейвлеты, и все изменилось. Сегодня Информационная служба криминальной юстиции ФБР хранит отпечатки пальцев около 150 миллионов человек, применяя для их шифрования вейвлеты Добеши.

Выявление мошенничества

Как мы увидели, у статистиков немало способов отправить человека за решетку — или снять с него бремя вины. Но, пожалуй, самый незаурядный из них — закон Бенфорда. На первый взгляд он кажется совершенно нелепым. Его суть такова: в любой таблице чисел, описывающих естественную активность — включая деятельность человека, — наблюдается особая закономерность: цифра 1 встречается чаще всего, за ней идет 2, потом 3 и так далее до цифры 9, которая встречается лишь в 4,6 % случаев.

Первым это заметил астроном Саймон Ньюком, который изучил то, как его современники в XIX веке пользовались брошюрами с логарифмическими таблицами[31]. Он заметил, что первые страницы брошюры, на которых люди искали числа, начинающиеся с единицы, грязнее остальных. Далее страницы постепенно становились все чище. Таблицы с числами, начинающимися на девятку, почти не использовались. Ньюком пришел к выводу, что большинство его коллег работало с задачами, в которых малые цифры встречались чаще больших. Как выяснилось, астрономия — лишь крошечная часть мира, где наблюдается такая закономерность.

Теперь эта универсальная истина носит имя физика и инженера Фрэнка Бенфорда. В 1889 году, когда Бенфорду было всего шесть лет, произошла катастрофа на дамбе Саут-Форк в его родном городе Джонстауне в Пенсильвании. Потоки воды устремились на Джонстаун со скоростью 40 миль в час, и в результате погибло 2200 человек. Сам Бенфорд сломал руку, но выжил: всю ночь он цеплялся здоровой рукой за корягу, плавающую в воде[32].

После наводнения Джонстаун оказался в бедственном положении, и Бенфорду пришлось в двенадцать лет уйти из школы, но позже он вернулся к учебе и поступил в Мичиганский университет, когда ему исполнилось двадцать три.

Получив диплом, он устроился в компанию *General Electric* и работал в светотехнических лабораториях в Скенектади. Он посвятил им тридцать восемь лет своей жизни — и, несомненно, пересекался с Чарльзом Протеусом Штейнмецом — и вышел на пенсию в июле 1948 года. Пять месяцев спустя Бенфорд умер.

Но имя Бенфорда живет, поскольку в 1938 году он изучил 20 тысяч характеристик естественных феноменов, таких как площадь речных бассейнов, численность населения городов, молекулярный вес различных химических веществ и даже номера домов из адресной книги. Только в 1995 году мы сумели понять, почему наблюдается описанная им закономерность: она становится следствием проявления различных распределений, например нормального и пуассонова, в природе. Закон Бенфорда, который сам Бенфорд изначально назвал “законом аномальных чисел”, описывает, как возникают эти распределения[33]. Мы настолько уверены в существовании соответствующей закономерности, что Налоговое управление США теперь применяет закон Бенфорда, чтобы выявлять мошенничество при аудите счетов компаний. Если вам когда-нибудь захочется подделать что-то, где встречаются цифры, не забудьте учесть закон Бенфорда, иначе статистика точно выведет вас на чистую воду.

Вообще, хотя статистику и можно считать наукой о принятии субъективных решений, это умаляет ее достоинство. Нельзя отрицать, что порой решения принимались неверно, а порой — на заре существования дисциплины — еще и в сомнительных целях. Но они также подарили нам аптечки с лекарствами, действие которых гарантировано, открыли нам доступ к бесчисленным достоверным научным открытиям и предоставили нам инструменты, чтобы анализировать улики в суде и убедительно доносить истину, не говоря уже о чудесных во всех отношениях пинтах пива *Guinness*.

Поразительно, что в первой главе мы начали с древневавилонских инструментов для сбора налогов, а теперь пришли к американскому инструменту для проверки уплаты налогов. Но если я невольно создал у вас впечатление, что математика нужна лишь в скучных сферах жизни, то следующая (и последняя) глава исправит это недоразумение. Мы совершим путешествие в далекие уголки Солнечной системы, встретимся с жонглирующими роботами, заглянем в мир шпионажа и узнаем о машине, разработанной специально для того, чтобы ничего не делать. Теория информации, может, и не обещает многого, но предлагает немало интересного. А лучше всего то, что она никак не связана с налогами.

Глава 8
Теория информации
История создания современности

Во многих отношениях мы вернулись туда, откуда начали. Хотя название этой главы вам, возможно, ни о чем не говорит, на самом деле она, как и первая, покажет нам, в чем сила чисел в том виде, в котором они перед нами предстают. В ней речь пойдет о числах, сведенных к своей сути, — нулям и единицам, единственным числам, нужным для выражения всех остальных. В ней также будет рассказано, какие ответы в них ищут люди. Двоичная система впустила нас в информационный век компьютерных вычислений, цифровых данных, шифрования и интернета. Но также считается, что с ней связана наша главная надежда наконец постичь космос.

Родоначальники математического анализа были неисправимыми мистиками. Исаак Ньютон полагал, что Библия содержит зашифрованные секреты, и потратил немало времени и сил, пытаясь их расшифровать. Готфрид Лейбниц, в свою очередь, был одержим мыслью о том, что источниками аппетита, действия и восприятия служат неделимые "простые субстанции", или "монады". Каждая из таких "субстанций, — писал он, — в точности представляет весь универсум... и представления, или выражения внешних вещей, возникают в душе в данный момент в силу ее собственных законов, как будто в особом мире и как будто бы ничего, кроме Бога и ее, не существовало"[1].

Философия Лейбница, называемая монадологией, была сложна и непонятна. Из-за нее ученый не раз становился объектом насмешек. Вольтер однажды написал: "Можете ли вы спокойно утверждать, будто капля мочи представляет собой бесчисленные монады, каждая из которых имеет идеи целой Вселенной?"* Тем не менее монадология пробудила в Лейбнице огромный аппетит к изучению других философских концепций и поиску в них скрытых истин. Именно поэтому в 1679 году он написал о потенциале сборки механической вычислительной машины, основанной на двоичной системе счисления, единственными элементами которой были нули и единицы[2]. Он проявлял к этому немалый интерес, поскольку полагал, что применение двоичной системы откроет путь к невозможным прежде вычислениям, "алфавиту человеческой мысли", а может, даже обнажит природу "простых субстанций", на фундаменте из которых и покоится реальность. Лейбниц верил, что, раз любое число можно составить из одних нулей и единиц, то именно так, вероятно, Бог и сотворил вселенную из пустоты. Лейбниц написал об этом своему другу Иоахиму Буве, миссионеру-иезуиту, который жил в Китае. Буве ответил, что китайцы, возможно, опередили его, создав "И цзин"[3].

По легенде, "И цзин", которую еще называют Книгой перемен, была основана на трудах Фу Си — дракона с человеческим лицом. Фу Си изучил все узоры вселенной и ее содержимого — созвездия, пятна лишайников на скалах, окрас голубиных перьев и так далее — и свел их к пиктограммам, называемым триграммами. Каждая из них уникальна и состоит из трех линий. Линии "двоичны", то есть могут принимать одну из двух форм: непрерывную либо прерывистую. Это дает нам восемь возможных триграмм, каждая из которых символизирует форму, место или явление.

* Перевод С. Шейнман-Топштейн.

Восемь двоичных триграмм Фу Си

С помощью этих восьми триграмм (четыре из которых красуются на флаге Южной Кореи) Фу Си описал все аспекты цивилизации. Они рассказали ему о войне, лидерстве, браке, предпринимательстве, сельском хозяйстве, путешествиях и всех остальных занятиях людей. Около 1050 года до нашей эры император Вэнь, основатель китайской династии Чжоу, пошел дальше и, удвоив триграммы Фу Си, превратил их в гексаграммы. В каждой из них содержалось по шесть линий, что давало 64 комбинации, которые Вэнь и его наследники истолковали людям. В последующие двести лет получившаяся Чжоуская книга перемен стала практически священным текстом, к которому обращались при гаданиях и за советом. Например, двоичные результаты подбрасывания шести монет давали гексаграмму, в толковании которой нужно было искать ответ на конкретный вопрос. Еще триста лет спустя философ Конфуций написал знаменитые комментарии к Книге перемен и объяснил этические принципы системы. В конце концов этот обильный поток мудрости воплотился в "И цзин". В ней название и номер каждой гексаграммы сопровождаются трактовками ее значения в разных обстоятельствах. Этот сборник древней мудрости содержит советы на каждый день, путеводитель по физической Вселенной и манифест этических принципов, а также предсказывает ваше будущее.

Буве отправил Лейбницу гравюру с изображением китайской системы, сопроводив ее описанием ее предполагаемых свойств. Лейбниц тотчас принялся за работу над статьей "Изложение двоичной арифметики, для которой достаточно только цифр 0 и 1, с замечаниями о ее пользе, а также о том, какой свет она проливает на древние китайские фигуры Фу Си". На французском эта работа была опубликована в 1705 году[4].

К великому огорчению Лейбница, никто не проявил к ней интереса. Хуже того — при жизни ученого ни монадизм, ни двоичная арифметика так и не помогли раскрыть загадки человеческого существования и понять, какое место человек занимает в общей картине вселенной. Полтора века спустя такое же разочарование испытал учитель математики Джордж Буль. Оба они, пожалуй, обрадовались бы, если бы узнали, что сегодня двоичная сила нулей и единиц наконец все же захватила мир. Информационный век, наступивший с появлением цифровых коммуникаций и достигший зенита, когда был создан интернет — Книга перемен XX века, — оказался построен как раз на двоичной арифметике Лейбница и законах логики Джорджа Буля. Уверен, мне не нужно объяснять вам, насколько сильно это изобретение повлияло на человеческую цивилизацию.

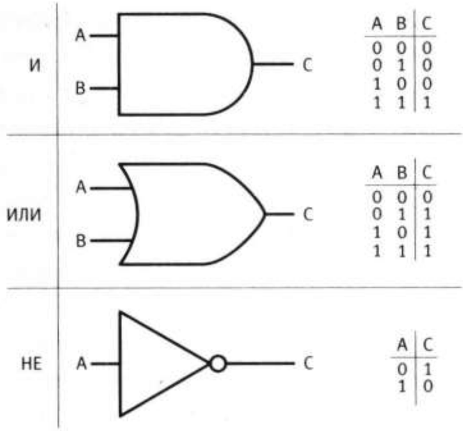
Математика истинного и ложного

Джордж Буль не блистал в математике. В 1831 году, когда ему было шестнадцать, он встал из-за парты и бросил учебу, чтобы зарабатывать деньги, обучая других. Он неплохо справлялся с этим и всего три года спустя открыл собственную школу в Линкольне, в регионе Западный Мидленд в Англии. Но свой след в истории он оставил благодаря мистическому опыту, который он пережил в семнадцать лет.

После смерти Буля в сорок девять лет его жена Мэри Эверест (племянница геодезиста, который руководил организованным Британской Ост-Индской компанией "Великим тригонометрическим исследованием" Индостана и дал свое имя самой высокой из измеренных человеком гор) рассказала, как на ее мужа снизошло озарение. "Вдруг ему в голову пришла мысль, — написала она, — случилась вспышка интуиции в условиях, когда разум лучше всего открыт знаниям"[5]. С этого момента преподавание стало для Буля не более чем заработком: отныне он был одержим исследованиями работы мозга. Он решил, что люди получают знания непосредственно от того, что он назвал Незримым. Он подумывал выучиться на англиканского священника, чтобы открыть себе возможность для дальнейшего погружения в эту область, но быстро пришел к выводу, что сделанные им выводы выходят далеко за пределы организованной религии. Буль даже не мог облечь их в слова. Он обратился к книгам и освоил алгебру и математический анализ, чтобы далее работать на универсальном языке чисел.

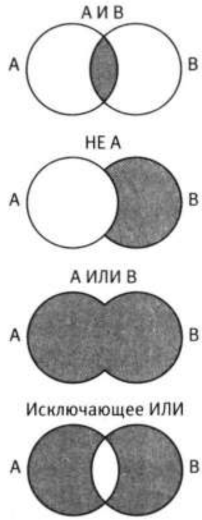
В конце концов Буль зашел дальше, чем позволяли его книги. Он разработал собственную систему алгебры — двоичную алгебру — и очень обрадовался, когда позже выяснил, что Лейбниц сделал то же самое и по тем же причинам. Оба ученых одержимо сводили все к мельчайшим единицам, надеясь таким образом найти ответы на важнейшие вопросы. Но Буль копнул глубже, чем Лейбниц. Когда он закончил, с помощью его системы можно было раскладывать сложные выкладки на утверждения, истинные или ложные, и описывать, как из этих утверждений проистекают логические рассуждения.

В его конструкции используются три оператора, которые теперь называются И (AND), ИЛИ (OR) и НЕ (NOT). Первые два работают с двумя утверждениями, каждое из которых может быть ИСТИННЫМ или ЛОЖНЫМ (или, как отметил Буль, 0 или 1). Оператор И дает результат ИСТИННО, только если ИСТИННЫ оба утверждения. Оператор ИЛИ дает результат ИСТИННО, если ИСТИННО одно из утверждений или если ИСТИННЫ оба. Оператор НЕ работает лишь с одним утверждением и дает результат ИСТИННО, если утверждение ЛОЖНО, и наоборот.



Логические операции Джорджа Буля, представленные в виде схем и “таблиц истинности” различных результатов

Буль опубликовал свою работу в 1854 году под названием “Исследование законов мышления, на которых основываются математические теории логики и вероятностей”[6]. Он так гордился ею, что считал, что именно благодаря ней он и войдет в историю, как в итоге и произошло. Например, оттолкнувшись от нее, Джон Венн в 1880 году изобрел новый тип диаграммы[7]. Венн назвал его кругами Эйлера, но сегодня они называются по фамилии создателя и используются для визуализации работы операторов И, ИЛИ и НЕ. Работа Буля также легла в основу современных компьютерных вычислений. Вытащите какую-нибудь микросхему *Intel* из своего компьютера, положите ее под мощный микроскоп, увеличьте изображение — и увидите транзисторы (по сути, переключатели), в которых задействованы электрические схемы, называемые логическими вентилями, поскольку они контролируют поток электрического тока. Эти вентили выполняют логические операции И, ИЛИ и НЕ, описанные Булем. Существует несколько способов соединять вентили в полезные комбинации, например в вентили “исключающее ИЛИ" (XOR), которые дают результат ИСТИННО, только если два утверждения различаются между собой, а также в вентили НЕ И (NAND), дающие результат ИСТИННО во всех случаях, кроме тех, когда оба утверждения ИСТИННЫ.



Булева логика в виде диаграмм Венна

Хотя сегодня может показаться, что никакого прорыва в этом нет, Булевы законы мышления стали проявлением радикально нового подхода к математике и позволили зашифровать то, что прежде шифрованию не поддавалось. Они принесли Булю множество почетных ученых степеней и членство в Королевском обществе. Впрочем, он недолго наслаждался успехом: он умер всего через десять лет после публикации своих выводов.

Печально, что виновницей его смерти почти наверняка стала его жена. У нее не было злого умысла — их брак был поразительно счастливым, несмотря на 17-летнюю разницу в возрасте. Но, к несчастью, Мэри верила в гомеопатию: она считала, что подобное лечится подобным. Однажды в ноябре 1864 года Джордж пришел домой, промокнув до нитки под ливнем и дрожа от холода. Мэри уложила его в постель и стала поливать холодной водой. У него началась простуда, а затем воспаление легких. Через несколько дней он умер.

Несмотря на награды, которые посыпались на Буля, в полной мере потенциал его алгебры логики оценили лишь через семьдесят три года. И сделал это — неожиданно — инженер по имени Клод Элвуд Шеннон, мастер жонглировать и кататься на одноколесном велосипеде.

Телефонные номера

Признание Джорджа Буля началось с очередной чрезвычайно весомой магистерской диссертации. Да, диссертация Билла Хьюлетта основала Кремниевую долину, но диссертация Шеннона, написанная в 1937 году и озаглавленная "Символический анализ релейных и переключательных схем", сотворила всю информационную эпоху[8]. Она родилась из первой работы, которую он получил после окончания бакалавриата по электроинженерии и математике в Мичиганском университете: он устроился в Массачусетский технологический институт (MIT), где загружал дифференциальные уравнения в "дифференциальный анализатор" — один из первых механических компьютеров. Этот аппарат стоял на кафедре инженерии MIT, и Шеннон вручную задавал положения более чем 100 электромеханических переключателей, называемых реле. Такие же реле — в огромном множестве — были основой новой отрасли телекоммуникаций, и, поработав в MIT в 1937 году, Шеннон смог на лето устроиться в Лаборатории Белла при Американской телефонной и телеграфной компании (AT&T). Там он погрузился в поиск нового способа выполнять нудную и отнимающую уйму времени задачу по разработке и проверке гигантских сетей релейных схем для быстрорастущей американской телефонной системы. Так Шеннон и открыл для себя работу Джорджа Буля.

Преобразовав состояния реле ВКЛ/ВЫКЛ в 1/0, Шеннон применил инновационные идеи Буля для разработки бинарной математики, которая представляла во всей полноте переключательную сеть телефонной системы. Теперь, вместо того чтобы конструировать и по несколько раз испытывать тысячи переключателей, инженеры могли с помощью Булевой алгебры записывать конфигурации и вычислять, насколько хорошо они будут работать, когда окажутся собраны.

Преимущества такого подхода стали очевидны сразу, и Шеннон получил престижную награду за статью об этой схеме[9]. Когда он подал заявку на выступление на конференции Американской ассоциации инженеров-электриков, организаторы написали его научному руководителю и назвали работу Шеннона "выдающейся". Руководителем Шеннона был Вэнивар Буш, декан Инженерной школы MIT и создатель дифференциального анализатора. К июню 1940 года, когда в Европе началась война, Буш создал новую структуру — Национальный исследовательский комитет по вопросам обороны США (NDRC). Многие из контрактов на проведение военных исследований, распределявшихся Бушем, уходили в Лаборатории Белла, где теперь работал Шеннон.

Одним из первых заданий Шеннона для NDRC было участие в разработке "системы X", защищенной телефонной линии, позволяющей президенту Франклину Д. Рузвельту вести конфиденциальные переговоры с британским премьер-министром Уинстоном Черчиллем. В представлении инженеров трансатлантический телефонный звонок — это не более чем колеблющаяся электромагнитная волна, и инженеры Лабораторий Белла понимали, что разговор можно зашифровать, если смешать эту волну с несколькими другими, известными лишь людям на другом конце провода. Отправитель мог добавлять сигналы, а получатель мог их удалять, очищая изначальную передачу. Но вскоре инженеры поняли, что математика добавления непрерывных волн осложняет надежное шифрование сигнала: достаточно подготовленный перехватчик вполне мог выяснить, о чем идет разговор. Проблему решили с помощью цифрового подхода.

Сначала сигнал разбили на последовательность дискретных единиц, каждую из которых маркировали числом, описывающим амплитуду волны в конкретный момент. Это позволило им добавлять к передаче случайные числа, известные только отправителю и получателю сигнала. Теперь для перехватчика стало математически невозможно получить доступ к информации.

Работая над "системой X", Шеннон увлекся технологиями шифрования. Он даже беседовал о них с британским математиком Аланом Тьюрингом, который участвовал во взломе немецкого шифра "Энигма" и в 1943 году посетил Лаборатории Белла, чтобы изучить американские инновации в области шифрования. Как выяснилось, взгляды Тьюринга и Шеннона на оптимальные способы шифрования не совпадали, поэтому в своих разговорах за чаем они почти не затрагивали рабочих тем, а рассуждали о том, какими возможностями могут обладать компьютеры. Они сошлись во мнении, что компьютеры теоретически могут имитировать работу человеческого мозга и что на реализацию этого на практике уйдет пара десятков лет. Очевидно, эта идея не давала Тьюрингу покоя и после войны, поскольку в 1948 году он написал революционную статью "Разумные машины"[10]. Шеннон, однако, отвлекся. Его прорывная статья 1948 года называлась "Математическая теория связи"[11]. Построив ее на базе своей выдающейся магистерской диссертации, он подробно описал в ней все, что произойдет в технологиях связи в последующие семьдесят лет.

Рождение бита

Первый элемент статьи Шеннона — идея о том, что информацию можно моделировать на основе статистического подхода. Шеннон отмечает, что одни комбинации слов более вероятны, чем другие: например, вы вряд ли ожидаете, что после слова "стол" я поставлю слово "депресняк". Мы воплотили это в умной (но далеко не безупречной) технологии интеллектуального ввода текста на наших телефонах, но именно Шеннон первым продемонстрировал, что благодаря этому у нас появляется возможность для более эффективной коммуникации. По сути, это позволяет "сжимать" многие формы коммуникации. Например, мы можем отказаться от передачи некоторых фрагментов информации, поскольку человек, выступающий получателем, сумеет без труда их восстановить. Английский язык прекрасно подходит для этой задачи: его гласные часто избыточны. Как Шеннон отметил в статье для "Британской энциклопедии", MST PPL HV LTTL DFFCLTY N RDNG THS SNTNC*.

Второй элемент — идея об информационной энтропии. Шеннон зацепился за возможность оцифровки сигнала с целью сведения его к последовательности поддающихся манипуляции чисел. Он также нашел способ количественного представления информации, содержащейся в сигнале, что интересовало и Тьюринга. Тьюринг назвал единицу информации "бан", но Шеннон выбрал вариант, предложенный коллегой в конце 1946 года, когда они обменивались идеями за обедом. Двоичная единица не может называться "баном", "биджитом" или "бинитом", сказал Джон Тьюки. "Разве не очевидно, что ее нужно назвать бит?"[12]

Но как понять, сколько у вас битов? Здесь Шеннон оттолкнулся от малоизвестной работы инженера Ральфа

* *Most people have little difficulty in reading this sentence* ("Большинству людей не составит труда прочитать это предложение"). — *Прим. перев.*

Хартли. Хартли более десяти лет проработал в *Western Electric Company* над телеграфной и голосовой передачей и после этого в 1928 году опубликовал примечательную статью "Передача информации"[13]. Он понял, что информацию можно представлять количественно, на каком бы языке и посредством какой бы технологии ни происходила передача, если понять, какие решения лежат в ее основе. Подбрасывая монетку, вы совершаете выбор. Говоря с кем-нибудь по-английски, вы много раз выбираете слова английского языка. Если вы хотите написать английское слово из трех букв, вам придется три раза сделать выбор из 26 вариантов. Зная диапазон вариантов, отметил Хартли, можно получить меру информации, необходимой для осуществления связи. Он добавил, однако, что такой показатель не будет непосредственным. Работая с алфавитом, вы выбираете из 17576 (26 × 26 × 26) вариантов. Хартли, впрочем, подчеркнул, что в трехбуквенном слове не содержится *столько* информации. Он предложил определять объем информации — сколько раз нужно сделать бинарный (да/нет) выбор — с помощью *логарифма* (по основанию 2) от общего числа вариантов.

Логарифм по основанию 2 от 17576 равен 14,1. Это значит, что для передачи английского трехбуквенного слова нам нужно сделать выбор не более 15 раз. Иными словами, размер сообщения составляет 15 бит.

Глядя на биты, можно увидеть, как происходит взаимодействие между ними. Один бит дает нам только два варианта: 0 или 1. Два бита дают четыре варианта: 00, 01, 10, 11. Три бита дают восемь вариантов: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Четыре бита дают 16 вариантов. Можно также повернуть счет с ног на голову и сказать, что в процессе выбора одного из 16 одинаково вероятных сообщений задействуется четыре бита информации. Здесь наблюдается логарифмическая связь: 4 — это логарифм по основанию 2 от 16.

В общем виде правило таково: при наличии *C* одинаково вероятных вариантов вероятность выбора каждого сообщения равна $1/C$. Информация, участвующая в процессе выбора, — это логарифм по основанию 2 от $1/C$. Если некоторые сообщения (или некоторые слова в языке) используются чаще других, формула становится немного сложнее. Сначала вероятность первого варианта умножается на –1, а затем полученный результат умножается на логарифм от этой вероятности. После этого такая же операция производится со вторым вариантом и так далее. Когда варианты закончатся, результаты складываются и получается информационное содержание — энтропия Шеннона.

Чтобы проиллюстрировать это, вернемся к примеру с подбрасыванием правильной монеты. Оба исхода — орел и решка — имеют одинаковую вероятность: 1 к 2, или 0,5. Логарифм по основанию 2 от 0,5 равен –1. Для варианта "орел" умножим его на 0,5 и на –1. Затем поступим так же с вариантом "решка". Сложим результаты. Это даст нам 1 бит энтропии Шеннона — объем информации, заключенной в подбрасывании монеты.

В другой части своей статьи Шеннон обратился к иному наблюдению Хартли: о том, что значение имеет и канал связи. Если канал позволяет использовать широкий диапазон частот — например, если он "широкополосный", — в сообщении получится уместить больше деталей, а следовательно, у вас будет больше вариантов, что позволит вам передать больший объем информации за отведенное время. На основе этого Шеннон вывел математику "пропускной способности канала". Он показал, что можно охарактеризовать используемый для передачи информации канал, назвав максимальное число битов, которые можно гарантированно загружать в него (и считывать с него) каждую секунду. Приведу пример (хотя и упрощенный): пропускная способность C зависит от мощности сигнала S, мощности неконтролируемых проблемных помех N и диапазона частот сигнала, пропускаемых каналом, W (это называется полосой пропускания). Опишем их взаимосвязь на языке математики:

$$C = W\log_2(1 + \frac{S}{N})$$

Пропускная способность канала измеряется в битах в секунду — а лучше, конечно, в миллионах бит (мегабитах) в секунду, если измерять приходится пропускную способность вашего интернет-соединения. Именно поэтому широкополосный доступ в интернет лучше старой технологии доступа через телефонный модем: он создает более широкую полосу пропускания и увеличивает W в приведенном уравнении. Когда вы находитесь далеко от источника данных, мощность сигнала S падает, что уменьшает C — иногда настолько, что данные передаются очень медленно, и возникает буферизация. Если на вашей интернет-линии много помех, N растет и уменьшает C еще сильнее. Большинство из нас каждый день сталкивается с этим, сидя в интернете с телефонов, планшетов и компьютеров. Пожалуй, пропускная способность, описанная Шенноном, касается лично нас в большей степени, чем любое из предыдущих поколений.

Четвертый важный вклад в науку Шеннон сделал, показав, как работать с ошибками, которые возникают при передаче данных. Отправляя сигнал, вы можете столкнуться с помехами — случайными внешними факторами, — которые не позволят получателю прочитать и расшифровать пришедшие к нему биты.

Эта проблема возникает не только в сфере высоких технологий: представьте, что вы общаетесь с помощью светового кода в Древнем Риме — например, двигаете зеркало, чтобы систематически отражать солнечные лучи в сторону союзной армии, стоящей на соседнем холме. Если свет упадет на чей-нибудь щит, в вашем сообщении появится ложный бит. Сегодня, когда вы передаете HTML-код веб-страницы по медному проводу, подобное может спровоцировать случайный электрический сигнал от удара молнии или случайное колебание в одном из компонентов электрической схемы. Оптоволоконный кабель, по которому телевизионный сигнал передается в форме отдельных световых импульсов, тоже может терять часть фотонов — сгустков энергии света — с важнейшими битами информации. Но переживать не стоит, ведь Шеннон о вас позаботился.

Можно подумать, что у этой проблемы есть очевидное решение, которое не требует вмешательства Шеннона: достаточно всего лишь передать сигнал дважды. Это, несомненно, неплохая идея. Если два сигнала совпадут, можно с высокой степенью уверенности сказать, что вы получили верное сообщение, поскольку маловероятно, что одинаковое случайное вмешательство (или случайная потеря) произошло дважды. Но так передача замедлится, а расход энергии возрастет. Шеннон показал, что в этом нет необходимости.

В его статье есть раздел о "кодировании каналов", где он утверждает, что, зная, с какими помехами вам предстоит столкнуться, вы можете разработать такую систему кодирования, которая обеспечит вам математически идеальную коммуникацию. Допустим, я хочу передать четыре фрагмента информации. Чтобы различать их, я присвою им "кодовые имена", состоящие из пар двоичных символов:

A	B	C	D
00	01	10	11

При передаче по каналу с помехами, которые будут время от времени отнимать биты, возникнет риск, что получатель увидит B там, где я имел в виду A, или D там, где я имел в виду C. Что, если передать каждый фрагмент дважды? Тогда C превратится в 1010, но при изменении одного бита из-за помехи может получиться 1011. Будет казаться, что я передал либо C, либо D, — и сделать выбор будет невозможно.

Я мог бы передавать каждый фрагмент по три раза. Теперь C будет 101010, и изменение одного бита даст 111010, 100010 или 001010. Какой бы бит ни изменился, большинством голосов (2 к 1) можно постановить, что я хотел передать 10.

Шеннон, однако, показал, что у нас есть способ получше: хотя это и не очевидно, нам достаточно передавать лишь пять битов, при условии, что мы тщательно оформим закодированные слова таким образом, чтобы сделать "расстояние" между ними максимальным. В нашем примере шифрование должно осуществляться так:

A	B	C	D
00000	00111	11100	11011

Здесь случайная замена одного бита не вызовет вопросов о том, какой именно фрагмент информации пытались передать. Попробуйте! На удивление — а это удивило всех, — Шеннон показал, что можно найти оптимальную схему кодирования для любого канала с шумами. Иными словами, всегда существует корректирующий код, позволяющий передавать данные, используя почти всю пропускную способность канала (сегодня этот закон часто называют пределом Шеннона для безошибочной передачи данных). К несчастью, аргумент Шеннона был вероятностным. Шеннон не дал никакого способа понять, какие кодовые комбинации позволяют достичь предела в различных ситуациях.

Выбор корректирующих кодов — это, пожалуй, единственное, что не освещалось в статье Шеннона, вышедшей в 1948 году. Во всех остальных отношениях теория информации была полностью оформлена. При перепечатке статьи на следующий год в нее было внесено лишь одно значимое изменение: если раньше в названии стоял неопределенный артикль, который делал математическую теорию связи одной из многих возможных, то теперь на его место встал определенный артикль, указывающий, что другой теории быть не может. Как вам такое заявление?

После публикации статьи Шеннона оставалось лишь дождаться появления аппаратного обеспечения, чтобы воплотить в жизнь описанные в ней идеи. Через несколько десятилетий, когда нужные технологии оказались достаточно развитыми, инновация Шеннона дала нам электронную почту, интернет, стриминговые аудио- и видеосервисы, хранилища данных и почти все, что мы принимаем как должное в XXI веке. Но часто мы упускаем из виду то, к каким культурным сдвигам она привела. Шеннон не просто подарил нам видео по запросу. Он подарил нам спутники, космические программы, открытие миров за пределами Земли, первые шаги человека по Луне. Но все перечисленные достижения, пожалуй, меркнут в сравнении с важнейшим следствием появления теории информации: открытием, что Земля — это хрупкая и красивая колыбель человечества, которую нужно оберегать.

В рождественский сочельник 1968 года экипаж "Аполлона-8" передал на Землю первые снимки нашей планеты в ходе прямого эфира с окололунной орбиты, во время кото-

Восход Земли
Билл Андерс, изображение из открытого источника, via Wikimedia Commons

рого астронавты по очереди читали выдержки из Книги Бытия. "Бесконечное одиночество восхищает и позволяет оценить, что мы оставили там, на Земле", — сказал пилот командного модуля Джим Ловелл[14]. В этот момент Уильям Андерс сделал знаменитый снимок "Восход Земли", который, как считается, дал толчок к основанию движения в защиту окружающей среды. Позже Андерс сказал: "Мы отправились исследовать Луну, но вместо этого открыли Землю"[15]. И помогла им в этом теория информации Клода Шеннона.

Шеннон, "Аполлон" и открытие Земли

Вообще-то все началось со спутника. В октябре 1957 года СССР запустил первый искусственный спутник, и американцы вдруг почувствовали, что проигрывают в гонке. Год спустя в США основали агентство NASA. Его задача была проста: сделать США мировым лидером в исследовании космоса. Вскоре после этого, 25 мая 1961 года, президент Джон Кеннеди сказал Конгрессу, что "страна должна приложить все усилия, чтобы до конца десятилетия отправить человека на Луну и вернуть его живым на Землю"[16].

Инженеры NASA уже знали, что ключевую роль в этом сыграет работа Шеннона. Исследуя космос, любой корабль должен обмениваться с Землей навигационными и коммуникационными данными, а также изображениями. Чтобы транслировать сигналы из космоса на Землю, требовались громоздкие и тяжелые электрогенераторы, поэтому любая возможность снизить стартовую массу, например, применив математику теории связи, рассматривалась в первоочередном порядке.

Всего за несколько недель до выступления Кеннеди в 1961 году Лаборатория реактивного движения NASA опубликовала элементарное руководство по теории информации Шеннона, которым мог воспользоваться любой, кому нужно было наладить обмен сигналами между Землей и открытым космосом. Оно называлось “Теория кодирования и ее применение в системах связи”[17]. Довольно любопытно полистать его, учитывая, что мы только что изучили основы теории Шеннона. Складывается впечатление, что инженерам NASA тоже приходилось начинать с нуля. Во втором абзаце читаем: “В последние годы все большее внимание уделяется так называемым *цифровым коммуникациям*. В настоящем руководстве цифровой сигнал будет считаться последовательностью *единиц* и *нулей* или *единиц* и *минус единиц*”.

Руководство вовсе не поражает сложностью. В нем описываются различные способы компоновки этих бинарных единиц в “кодовые слова”, которые сводят к минимуму ошибки при передаче данных. Авторы показывают, как вычислять вероятные ошибки, и демонстрируют результаты своей работы на новейшем компьютере IBM 704.

Шеннон упоминается лишь в самом конце: его статья 1948 года — последняя в списке использованной литературы. Ссылка на нее дается на 75-й странице после фразы: “Еще одна важная единица теории информации — пресловутая пропускная способность канала”. Авторы заявляют: “Выйти на пропускную способность канала возможно в пределе бесконечного кодирования”. Впрочем, значимость статьи 1948 года очевидна по отсылкам к ней во множестве технических документов программы “Аполлон”. Статья также повлияла на бюджетную заявку NASA на 1967 год. Среди прочего в ней говорится:

> В 1967 налоговом году также потребуется периодически закупаемое оборудование для обслуживания и совершенствования существующих систем. К нему относятся генераторы сигналов, устройства модуляции и демодуляции, высокочастотные радиомодемы для передачи данных, мониторы системы контроля качества данных, оборудование для обнаружения данных и исправления ошибок и устройства для измерения искажений[18].

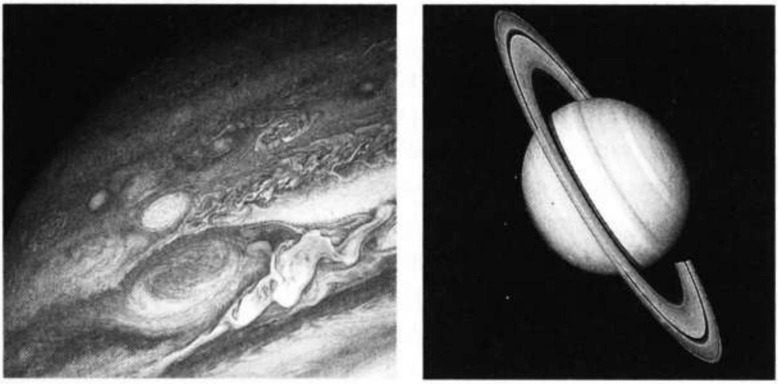
Обнаружение данных, исправление ошибок и измерение искажений — важнейшие компоненты применения теории Шеннона для отправки человека на Луну. Почему? Потому что в NASA решили, что основанной Кеннеди программе "Аполлон" пойдет на пользу, если все данные между Землей и Луной — голоса астронавтов, данные о состоянии, местоположении и работе космического корабля, телевизионные сигналы, результаты научной работы и так далее — будут передаваться по единой системе. Ею должен был стать "транспондер унифицированной связи в диапазоне частот *S*" (*Unified S-Band Transponder*, или USB-транспондер), и в 1963 году контракт на его разработку получило подразделение правительственной электроники компании *Motorola*[19].

На компании лежала огромная ответственность, поскольку от транспондера зависел успех всей программы "Аполлон". Когда астронавты оказались на Луне, USB-транспондер единственной ниточкой связывал их с Центром управления полетами и передавал все данные, которые мы теперь ассоциируем с тем эпохальным моментом: знаменитые слова "Один маленький шаг...", телевизионный сигнал, сведения о запасе топлива, информацию о месте посадки. Если бы транспондер отказал, возможно, мы сегодня уже не смогли бы навскидку вспомнить имена первых людей, ступивших на Луну. Но успех был обеспечен благодаря применению теории информации, разработанной Шенноном.

Жаль, я не могу во всех подробностях описать, как труды Шеннона определили конструкцию USB-транспондера. Из проведенной в 1972 году оценки его работы можно узнать, что существовала особая математическая модель USB-системы. Она была описана в статье "Принципы определения коэффициентов модуляции для используемой на «Аполлоне» системы унифицированной связи в диапазоне частот *S* с учетом дальности полета", опубликованной в 1965 году. Ее автором был Дж.Д. Хилл из компании *Bellcomm Inc.* — еще один сотрудник Лабораторий Белла. К несчастью, NASA не позволяет мне взглянуть на эту статью. Она, как меня известили, "не засекречена, но доступна только для сотрудников NASA и пока не может быть обнародована"[20]. Очевидно, работа Шеннона, закодированная в математической модели USB-системы, и сегодня не теряет значимости.

Влияние Шеннона на космические путешествия не ограничилось программой "Аполлон". В 1949 году — в тот год, когда теория Шеннона стала единственной математической теорией связи, — родившийся в Швейцарии математик Марсель Голей изобрел, пожалуй, первый действительно применимый корректирующий код. Голей четыре года проработал в Лабораториях Белла, а затем вступил в войска связи армии США. Там он дослужился до звания старшего исследователя. В его статье о корректирующем коде содержится всего одна отсылка — к статье Шеннона, опубликованной годом ранее, — и объясняется, как безошибочно принимать группу битов, передаваемую по каналу, который искажает четверть всех битов, проходящих по нему. Чтобы пользоваться кодом, достаточно просто передавать вдвое больше битов, чем в начальном сообщении. Код Голея (а точнее, расширенный двоичный код Голея) не позволяет приблизиться к пределу Шеннона, но ничего лучше на тот момент никто еще не предложил — и не предложит еще долго[21]. Поэтому код Голея и был выбран при снаряжении космического зонда "Вояджер-1", запущенного NASA в 1977 году.

Известные снимки Юпитера и Сатурна, которые передал на Землю "Вояджер-1", оказались очень четкими и лишенными искажений именно благодаря тому, что Голей продолжил дело Шеннона. Тот же зонд подарил нам и знаменитый снимок Земли "Бледно-голубая точка", сделанный с расстояния около 6 миллиардов километров по предложению астронома Карла Сагана. В 1994 году Саган задумался о его значимости. "Посмотрите на это пятнышко, — написал он. — Вот здесь. Это наш дом. Это мы. Все, кого вы знаете, все, кого вы любите, все, о ком вы слышали, все люди, когда-либо существовавшие на свете, провели здесь свою жизнь"[22].



Снимки Юпитера и Сатурна, сделанные зондом "Вояджер-1"
NASA

Этот показательный снимок Земли был сделан с расстояния 6 миллиардов километров, и наша планета заняла на нем один-единственный пиксель: увеличить изображение не было возможности. Но другие снимки "Вояджера" могли бы быть и лучше. Просто никто — или почти никто — не знал, что другой бывший сотрудник Лабораторий Белла (и бывший инженер войск связи) изобрел более удачный корректирующий код еще в 1960 году — задолго до того, как началась подготовка к запуску "Вояджера".

К 5G и дальше

Служба Роберта Галлагера в войсках связи проходила не так гладко, как у Голея[23]. Его призвали в армию из Лабораторий Белла и определили в часть, где служили ученые и квалифицированные специалисты. Командующим частью поручили задействовать личный состав — в основном сотрудников Лабораторий Белла и Комиссии по атомной энергии, а также студентов старших курсов американских вузов — для совершенствования "наблюдения за полем боя". Но те лишь попусту тратили время умных людей, которые оказались у них в распоряжении. Галлагер вспоминает учебно-тренировочные занятия, на которых полковник садился в фургон, писал записку и передавал ее одному из ученых. После этого ученый должен был добежать до другого фургона, чтобы вручную доставить записку другому офицеру. Если так их "готовили" к наблюдению за полем боя, Галлагер и слышать об этом не хотел. Он написал сенатору от своего штата, что армия транжирит свои научные ресурсы. Сенатор явно пожаловался на него, поскольку на следующие три месяца Галлагера отправили тянуть лямку на должности охранника в военной тюрьме. Впрочем, тот этому только обрадовался: "Делать мне было нечего, и все время я посвящал научным изысканиям и решению задач, — вспоминает он. — Среда там располагала к академической работе гораздо более любой из тех, в которых я оказывался впоследствии".

Это вряд ли так, поскольку после увольнения из армии Галлагер устроился на работу в MIT. Там ему в голову и пришла идея корректировать ошибки с помощью "кода с малой плотностью проверок на четность"[24]. При использовании этой схемы биты, переносящие данные, сопровождаются "четными" битами, которые выполняют защитную функцию, почти как надпись "верх" на коробках при переезде. Увидев, что коробка стоит вверх ногами, вы проверите, не повредилось ли ее содержимое. Точно так же, если четные биты искажены, нужно проверить и биты данных. Это сложно — настолько сложно, что в то время ни у кого не было для этого достаточной вычислительной мощности, — но позволяет почти достичь предела Шеннона при передаче данных.

Изобретение Галлагера не применялось и впоследствии забылось. Но в 1993 году два французских специалиста по телекоммуникациям опубликовали идею, которую назвали турбокодами. Эти коды работали по схожей схеме с проверкой на четность, предложенной Галлагером, и давали схожие результаты. Сходство было настолько сильным, что в 1996 году оно натолкнуло двух ученых на воспоминания. Рэдфорд Нил и Дэвид Маккей откопали диссертацию Галлагера и обнаружили, что применение кода с малой плотностью проверок на четность уже возможно, а патент на него уже истек. Зачем платить за использование французских турбокодов, когда изобретение Галлагера доступно бесплатно? Несомненно, именно так и решили многие конструкторы, включая тех, которые внедрили стандарт 802.11 для *Wi-Fi*, наладили спутниковое вещание множества телеканалов и создали программу *Skype* для видеосвязи[25].

Справедливости ради отмечу, что кое-кто все же решил заплатить за использование турбокодов. Например, они применяются в технологиях мобильной связи 3G и 4G и для защиты данных, передаваемых с Марсианского разведывательного спутника (МРС), запущенного NASA в 2005 году и по-прежнему остающегося на связи с Землей. Предполагается, что МРС станет первым звеном в сети, которую в NASA называют “межпланетным интернетом” и которая будет передавать сигналы с множества международных космических кораблей, улетающих все дальше в Солнечную систему[26]. Турбокоды также используются в Сети дальней космической связи, куда входят радиостанции, играющие важнейшую роль в коммуникации со многими межпланетными космическими кораблями NASA. Теперь, когда скорость связи приблизилась к пределу Шеннона, это может показаться прозаичным, но в момент публикации теории, лежащей в основе турбокодов, никто не верил, что такое вообще возможно. Всерьез их приняли лишь тогда, когда у скептиков не получилось доказать, что они не работают.

При этом скепсис был вполне обоснован. Не было никакого математического подтверждения тому, что турбокоды окажутся функциональными. Как и код с малой плотностью проверок на четность, предложенный Галлагером, они были инженерным решением: набором инструкций, в котором не объяснялось, почему соответствующие действия дадут нужный результат. Хотя оба кода позволяли приблизиться к пределу Шеннона, на математиков их работа особого впечатления не производила. А вот с "полярными кодами", родившимися в голове Эрдала Арыкана, все обстояло иначе.

Арыкан — турецкий профессор электрической и электронной инженерии. В 2008 году он работал над алгоритмом декодирования информации и понял, что используемые им техники можно также применить для достижения предела Шеннона. У него ушло два года на проработку деталей, но теперь эти техники используются в новейшем протоколе шифрования мобильной связи в цифровых сетях. Этот протокол пятого поколения (5G) называется стандартом передачи данных 5G NR (*New Radio*, "новое радио"). Приятно, что он работает параллельно с проверками на четность Галлагера, предложенными в 1960 году и также входящими в стандарт передачи данных 5G[27]. 5G — чудесная вещь: в ней плечо к плечу работают математика "бумеров" и математика "зумеров".

Секретная служба Шеннона

Иметь математически доказуемую схему для коррекции ошибок неплохо, но вовсе не обязательно. Как выяснили первые пользователи турбокодов, если система работает, этого вполне достаточно. Но есть в теории информации такая область, в которой без математических доказательств никак не обойтись. Это криптография.

Криптографию — науку о шифровании и дешифровании секретных сообщений — можно, пожалуй, назвать самым недооцененным разделом математики. Наша свобода и наше благополучие зависят от нашей способности обеспечивать конфиденциальность связи. В конце концов, конфиденциальность имеет принципиальное значение как в работе правительства, так и при совершении покупок в интернете. Она лежит в основе безопасного мобильного банкинга, который позволяет фермерам в Руанде вести дела и зарабатывать на жизнь. Она играет ключевую роль при подготовке облав на торговцев кокаином, помогая колумбийским агентствам по борьбе с оборотом наркотиков проводить операции. Разоблачителям, которые пытаются привлечь внимание к проблеме коррупции, нужно шифровать свою переписку в мессенджерах. Шифрование — важнейший ресурс, который сродни кислороду информационной эпохи.

Полученный во время войны опыт быстро подсказал Шеннону, что математика теории информации может показывать, насколько хорошо — или плохо — будет работать система шифрования. В 1949 году он изложил свои идеи в статье "Теория связи в секретных системах", которая представляла собой переработанную версию засекреченного документа, составленного им в 1945 году[28]. В статье разбирается ситуация, когда "сообщение, подлежащее шифрованию, состоит из последовательных дискретных символов, каждый из которых выбран из некоего конечного множества. Эти символы могут быть буквами или словами некоторого языка, амплитудными уровнями «квантованной» речи или видеосигнала и так далее". Шеннон отметил, что секреты, зашифрованные символами, — в отличие от тех, что скрываются с помощью невидимых чернил или шифруются с применением специальных технологий, например аппарата, способного в обратном порядке воспроизводить записанную речь, — можно проанализировать математически. Но главное — он продемонстрировал, что математический анализ может показать, есть ли вообще смысл взламывать шифр. Иными словами, он вывел математику криптоанализа и того, стоит ли игра с шифром свеч.

Это невероятно важно, поскольку говорит вам, куда лучше всего направить свои силы. Если следовать указаниям Шеннона, можно изменить ход истории, как показывает Специальное донесение о шифре "Фиш".

Оно было отправлено в военное министерство США в декабре 1944 года под грифом "совершенно секретно" и содержало свежие данные о том, как обстоят дела с получением доступа к зашифрованным сообщениям, которые немецкие радисты отправляли во время Второй мировой войны[29]. Британские криптографы прозвали этот канал связи "Фиш". Донесение составил Альберт Смолл из войск связи армии США, которого командировали в британский шифровальный центр в Блетчли-парке, чтобы помочь коллегам со взломом шифров. Он явно пребывал под впечатлением. В первом абзаце своего донесения он сообщает, что успехи наблюдаются каждый день. Он объяснил их "британским математическим гением, превосходными инженерными навыками и незыблемым здравым смыслом" и назвал "выдающимся вкладом в криптоаналитическую науку".

Но был ли этот вклад действительно выдающимся? Главная цель состояла в том, чтобы взломать шифр немецкой машины "Лоренц", пришедшей на смену "Энигме" и устроенной еще сложнее. Теоретически машина "Лоренц" могла создавать совершенно случайные криптографические ключи. Их смешивали с сообщениями, напечатанными "открытым текстом", с помощью принципов логики Джорджа Буля, развитых в магистерской диссертации Шеннона: клапанными комбинациями вентилей И, НЕ и ИЛИ, которые вместе формировали вентиль Исключающее ИЛИ.

Теоретически в результате должен был получаться шифр, который невозможно взломать. Союзникам оставалось лишь надеяться, что на практике шифр окажется не столь совершенным, как в теории. Так и случилось. Немецкие телеграфисты допускали ошибки при использовании машины "Лоренц", а сами машины настраивались таким образом, что в их броне возникали другие бреши.

И тут на сцену вышел *Colossus*. Этот первый в мире программируемый электронный компьютер, который стал прародителем прекрасно знакомых нам машин, разработал телекоммуникационный инженер Томми Флауэрс[30]. Он тоже задействовал вентили Исключающее ИЛИ и мог безошибочно осуществлять 100 миллиардов булевых операций. Он получал данные с телетайпной ленты, которая протягивалась со скоростью около 50 километров в час. Эти хитрые инженерные решения привели к тому, что, когда 5 февраля 1944 года *Colossus* ввели в эксплуатацию, на взлом постоянно меняющегося шифра "Лоренц" стали уходить уже часы, а не целые дни. Флауэрс, однако, знал, что может усовершенствовать свой компьютер, и уже 1 июня появился *Colossus Mk II*. После переработки он стал таким же быстрым, как первая микросхема, которую *Intel* предложит тридцать лет спустя.

Colossus Mk II сыграл ключевую роль в успехе высадки в Нормандии. Он применялся для расшифровки радиосообщений, которыми Гитлер обменивался со своими генералами. Через четыре дня после его ввода в эксплуатацию курьер из Блетчли-парк доставил генералу Дуайту Эйзенхауэру телеграмму прямо во время заседания штаба. В телеграмме говорилось, что различные меры военной дезинформации в преддверии высадки в Нормандии сработали. Из разведданных, полученных с помощью *Colossus*, Гитлер полагал, что неминуемое наступление случится на востоке, и направил огромное количество войск в эти регионы — далеко от того места, где планировалась высадка. Поскольку первая армия США должна была высадиться в самой западной точке выбранного прибрежного участка, телеграмма наверняка обрадовала Эйзенхауэра. Он повернулся к членам штаба и объявил: "Выдвигаемся завтра". Много лет спустя Эйзенхауэр отметил, что работа по взлому шифров в Блетчли-парке сократила войну на два года и спасла сотни тысяч жизней. Не стоит и сомневаться, что Джорджу Булю, а может, и Готфриду Лейбницу есть чем гордиться.

Полная конфиденциальность

История математического криптоанализа вообще-то началась не с Шеннона. Самой известной ее отправной точкой считается 850 год, когда арабский математик и философ Абу Юсуф Якуб ибн Исхак аль-Кинди провел статистический анализ информации в своем "Трактате о дешифровке криптографических сообщений". Он показал, что зашифрованный текст часто можно прочитать, применив статистические инструменты, например частотный анализ. Зная, какие буквы или слова встречаются чаще всего (например, буква "e" в английском языке), можно найти в зашифрованном сообщении подставленные вместо них символы и приступить к взлому шифра.

Со времен аль-Кинди людям, которые стремились сохранить что-либо в тайне, всегда приходилось находить новые неожиданные способы подставлять символы в текст. Но гарантию дает лишь один способ: разработка кода, в котором алгоритм подстановки для шифрования и дешифрования сообщения — "ключ" — нельзя угадать. Идеальный ключ предполагает совершенно случайные подстановки, содержит не меньше символов или битов, чем начальное сообщение, известен только отправителю и получателю и используется только один раз, чтобы невозможно было подвергнуть его статистическому анализу. В криптографических кругах его называют одноразовым блокнотом.

В своей статье Шеннон показал, что доказуемо надежны лишь такие методы шифрования, которые математически эквивалентны одноразовому блокноту. Однако, хотя его невозможно взломать, одноразовый блокнот ужасно неудобен. Как убедиться, что никто, кроме отправителя и получателя, не имеет доступ к идеальному криптографическому ключу? Нужно либо привлечь к задаче курьеров, которым можно в полной мере доверять, либо организовать встречу отправителя и получателя, чтобы они поделились друг с другом ключом, прежде чем разойтись. Если только они не будут встречаться перед каждым следующим сеансом связи (но в таком случае они вполне могли бы просто шепотом обменяться информацией), им придется заготовить целый набор ключей, которые они будут хранить и использовать при необходимости. Но тогда необходимо убедиться, что хранилище надежно и что им известно, какой именно ключ применять при получении нового сообщения.

Из-за этих трудностей практического характера единственный математически надежный метод шифрования используется редко. Вместо него все прибегают к несовершенным шифрам. Это не так уж плохо, учитывая, что более серьезные проблемы обычно возникают из-за несовершенства задействованных в процессе людей. Как и при работе с шифром "Лоренц", польским математикам удалось взломать немецкий код "Энигма" (после чего они сообщили о своем прорыве британским разведчикам) главным образом не потому, что шифровальные машины "Энигма" были несовершенны, а потому, что связисты повторялись в своих действиях и становились предсказуемыми — например, завершали многие сообщения фразой "Хайль Гитлер".

Возникает любопытный вопрос: в какой степени ухищрения, необходимые для практичного шифрования с помощью одноразового блокнота, умаляют его надежность? Для ответа на него нужно учитывать диапазон вариантов доступных символов, размер ключа, с помощью которого осуществляется шифрование, а также число зашифрованных сообщений, перехватываемых при передаче. Шеннон представил попытку взломать шифр методом грубой силы, который перебирает все возможные комбинации случайных ключей и ищет на выходе осмысленные слова и фразы. Затем он ввел понятие "интервал однозначности" — количество зашифрованных символов, которые необходимо перехватить, чтобы метод сработал. Этот интервал зависит от того, какие есть варианты при выборе ключа, а также от статистических характеристик языка. Если сообщение на английском передается с помощью простого шифра подстановки, по подсчетам Шеннона, вы сможете расшифровать его, имея около 30 символов.

30 символов — не так уж много, правда? Именно поэтому никто сегодня и не работает с простыми шифрами, которые в своих примерах рассматривал Шеннон. Какой же подход используют вместо этого?

Ответ может вас удивить. Хотя современная криптография дьявольски сложна, новейшие методики основаны на поразительно простой идее, которая возвращает нас в первую главу. Она такова: умножение проще деления.

Если я попрошу вас умножить 3 на 7, вы почти сразу назовете ответ: 21. Но стоит мне попросить вас разложить 21 на множители — целые числа, которые при перемножении дают 21, — и вам уже придется подумать подольше.

Что, если бы я попросил вас разложить на множители число 302 041? Здесь вам остается лишь прибегнуть к методу грубой силы и перебирать варианты. Можно начать с выражения 3 умножить на 100 тысяч с чем-то, пока не найдется верная комбинация. Я говорю “комбинация”, а не “комбинации”, потому что в этом примере лишь один ответ (не считая варианта с умножением самого числа на 1): 302 041 — это произведение 367 и 823. Эти множители нельзя разложить дальше, потому что они принадлежат к бесконечности простых чисел, которые делятся только на самих себя и на 1. Как и в случае с π и *e*, люди приписывают простым числам мистические свойства и наделяют их метафизической значимостью. Но в процессе они порой забывают, что простые числа обладают огромной практической ценностью — особенно если вам нужно хранить секреты.

Шифрование с помощью простых чисел впервые применили в Лабораториях Белла — где же еще? В октябре 1944 года инженер Уолтер Кёниг-младший закончил работу над секретным документом под названием “Итоговый отчет по проекту С-43”[31]. Работа над этим проектом велась параллельно с созданием системы X, над которой трудился Шеннон, и он представлял собой трехгодичное исследование технологий шифрования речи.

“Насущная необходимость этих исследований объяснялась, разумеется, войной”, — отмечает Кёниг во введении. Армия, флот и Национальный исследовательский комитет по вопросам обороны хотели знать, как обеспечить безопасность телефонной связи, а также выяснить, в какой степени поддаются расшифровке переговоры противника. Кёниг понимал, что, хотя отчет и был итоговым, работы предстояло еще много. Он рекомендовал “в мирное время продолжить настоящее исследование под эгидой правительства, чтобы оставаться в курсе последних изменений в искусстве связи”.

Его желание сбылось. В 1969 году инженер Джеймс Эллис наткнулся на отчет в ходе собственных исследований. Эллис работал в британском Центре правительственной связи (GCHQ) и искал способы сделать технологию шифрования более практичной. Он выяснил, что в рамках проекта С-43 среди прочего изучалось, насколько безопасной становится телефонная связь, когда лишь одна сторона добавляет в сигнал шумы. Если отправить получателю по телефонной линии гигантский объем случайных электрических помех и записать по отдельности сам звонок и созданный шум, то позже он сможет удалить помехи из разговора. Перехватчик не будет знать форму помех и потому не сможет выделить из сигнала интересующий его голос. Это “односторонняя” функция: ее легко создать, но невозможно обратить, если только у вас нет ключа.

Эллис заинтересовался возможностью обеспечивать безопасность переговоров силами лишь одной из сторон и предположил, что можно найти способ разработать подобную технологию для передачи данных. Одним летним вечером он лег спать, и, как он сказал позже, “к утру все само сложилось у меня в голове"[32]. Как истинный шпион, он решил не делать никаких записей дома и просто понадеялся, что ничего не забудет.

И не забыл. В июле 1969 года отчет Эллиса лег на стол старшего математика GCHQ Шона Уайли. Ответ Уайли позволяет понять, как работает пессимистически настроенный мозг начальника разведки: "Увы, — сказал он, — мне здесь не к чему придраться".

Возможно, Уайли вздохнул с облегчением, поняв, что идею Эллиса не получится внедрить с использованием технологий, доступных в то время. Путь к этому методу открылся лишь в 1973 году, когда в GCHQ пришел кембриджский математик Клиффорд Кокс. Кокс проводил постдипломное исследование больших простых чисел. Когда ему объяснили, в чем состоит идея Эллиса, он сразу подумал, что с помощью простых чисел можно воссоздать "односторонний" эффект добавления помех на телефонную линию.

Он рассчитал все за один вечер. Находясь дома, он ничего не записывал, но схема запечатлелась у него в голове. В (весьма) упрощенном варианте она такова: Кокс производит математическую операцию, в ходе которой два больших простых числа создают "открытый ключ". Он может опубликовать его, чтобы тот, кто хочет передать ему секретное сообщение, мог математически смешать свой секрет с открытым ключом. Получившуюся последовательность данных следует отправить Коксу. Поскольку математика создания открытого ключа с помощью двух простых чисел известна только Коксу, только он и может расшифровать сообщение и открыть секрет.

Эллис и Кокс описали свою идею "шифрования с открытым ключом", но только для сотрудников британских и американских спецслужб. Через несколько лет гражданские математики тоже совершили это открытие, которое в итоге легло в основу коммерческого продукта: системы шифрования Ривеста — Шамира — Адлемана (RSA), созданной в 1977 году.

Двадцать лет спустя GCHQ объявил, что на самом деле освоил шифрование с открытым ключом несколькими десятилетиями раньше.

После Эллиса и Кокса творческие математики разработали целый ряд новых способов хранить секреты. Сегодня внедрять надежные криптографические методы так просто, что подобные схемы повсеместно защищают наши персональные данные, данные наших кредитных карт, наши разговоры и все, что мы предпочитаем не разглашать. В онлайн-шопинге, как правило, используется шифрование с открытым ключом, но компания *Apple* для блокировки своих мобильных устройств применяет алгоритм шифрования, основанный на математике "эллиптической кривой". При шифровании с помощью эллиптической кривой данные скрывают не простые числа, а точки на графике. Этот алгоритм определяет последовательность простых операций, которые позволяют вам перемещаться по кривой, а перехватчик знает только начальную и конечную точки, но никак не может определить, какие точки между ними скрывают данные. Другой подход у *WhatsApp*: для шифрования сообщений применяется протокол *Signal*, который представляет собой комбинацию нескольких техник шифрования. Единственная проблема в том, что сегодня все перечисленные алгоритмы под угрозой, поскольку появилась революционная, квантовая версия криптоанализа.

Информация и квантовое будущее

Мы упоминали о "квантовом" мире молекул, атомов и субатомных частиц, когда изучали странные миры, которые нам открывают комплексные числа. Законы, по которым они работают, сильно отличаются от законов обычной жизни. Когда теория информации применяется на стандартном, или "классическом", компьютере, двоичные символы — это вполне определенные нули и единицы. Однако, если вы решите зашифровать свои биты на квантовом компьютере, может возникнуть неопределенность. И это, как выясняется, меняет все.

На классических компьютерах нули и единицы закодированы как определенные состояния электрической схемы. Это может быть наличие/отсутствие напряжения, включенное/выключенное состояние транзистора или заряженное/незаряженное состояние конденсатора. На квантовых компьютерах все не так конкретно. Здесь мы кодируем нули и единицы в сущности, которые можем описать лишь математически. Как мы выяснили в главе о комплексных числах, в математике квантового мира применяются комплексные числа и волновые уравнения, а его физические проявления выходят за рамки обыденного. Это значит, что с информацией могут происходить странные вещи.

В 1994 году математик, работающий в дочерней компании — вы угадали — Лабораторий Белла, показал, насколько странными они бывают. Питер Шор изучал математику разложения на множители: поиска двух чисел, которые при перемножении дают большее известное число. Как мы уже видели, в традиционной математике нет быстрого способа раскладывать числа на множители: приходится пользоваться методом проб и ошибок. Но в квантовой математике такая хитрость есть.

Будет сложно, но лучше всего представить, что квантовые сущности кодируют информацию в виде волн. Эти волны, как рябь на воде, могут "интерферировать" друг с другом: когда небольшие волны встречаются, их структура меняется предсказуемым образом. Волны обладают и другим свойством: некоторые их атрибуты, например местоположение, не имеют точного, определенного значения. Шор продемонстрировал, что неизвестные факторы можно находить, манипулируя интерференцией неопределенных свойств волны. В более полном объяснении задействуются преобразования Фурье, но главное, что достаточно большой квантовый компьютер, который одновременно кодирует большое число квантовых битов (кубитов), может применять алгоритм Шора, чтобы с непревзойденной легкостью раскладывать большие числа на простые множители.

Это открытие сильно всколыхнуло органы государственной безопасности разных стран. В последующие годы правительства вложили немалые деньги в исследование квантовых компьютеров. Они хотели выяснить, насколько просто собрать такую машину и правда ли она будет представлять такую опасность, как указывает алгоритм Шора. Но правда в том, что прогресс в сфере квантовых компьютеров идет медленно, и лишь через двадцать лет, в 2016 году, Агентство национальной безопасности США сделало заявление по этому вопросу. "АНБ неизвестно, будет ли однажды создан квантовый компьютер достаточно большого размера, подходящий для работы с шифрованием с открытым ключом, и если да, то когда это произойдет", — говорилось в нем. Но завершалось заявление предостережением: "Объем исследований в сфере квантовых компьютеров растет, и наблюдается достаточно серьезный прогресс, в связи с чем АНБ необходимо переходить к активным действиям". Агентство посоветовало всем американским компаниям отказаться от шифрования на базе разложения больших чисел на простые множители. Стало ясно, что вскоре и RSA, и эллиптические кривые, и другие системы могут оказаться совершенно бесполезными[33].

Возможно, вас обнадежит, что работу Шеннона в сфере шифрования продолжают и сегодня: некоторые из лучших современных математиков разрабатывают на смену старым новые алгоритмы, способные выдержать даже квантовую атаку. Другие математики приспособили работу Шеннона по криптографии 1949 года к веку квантовой информации. Вернувшись к не имеющему равных и не поддающемуся взлому одноразовому блокноту, они подчинили себе силы квантового мира и дали нам новый способ безопасно распространять ключи шифрования. В результате возникла так называемая квантовая криптография — метод абсолютно безопасной передачи битов криптографических ключей по оптоволоконному кабелю или по спутниковой связи в любую точку мира. Если перехватчик получит эти данные или попытается завладеть хотя бы фрагментом ключа, отправитель и получатель узнают об этом, поскольку так работают математические законы квантового мира. Далее им останется лишь снова передать ключ с новым набором чисел.

В заключение разговора об этом ужасающе конструктивном и утилитарном исследовании стоит отметить, что у него возник и неожиданный побочный эффект. Совмещение бинарной логики с законами квантовой физики стимулировало новые, квантово-ориентированные исследования Вселенной, мышления и моделей поведения человека. Мы словно создаем квантовую версию "И цзин" — Лейбниц был бы доволен.

В основе этих изысканий лежит любопытная фраза "всё из бита" (*it from bit*), которую предложил физик Джон Уилер — человек, подаривший нам понятие "черная дыра". Под "всем" Уилер понимает всё вокруг нас: космос. "Бит" — это двоичная единица Шеннона. Уилер изложил свои идеи в научной статье "Информация, физика, квант: поиск связей", первое предложение которой привело бы Лейбница и Буля в восторг: "В этой статье приводится обзор того, что квантовая физика и теория информации могут сказать нам в ответ на извечный вопрос: как появилось все сущее?"[34]

Уилер объяснил, что фраза "всё из бита" — это "наиболее емкая" формулировка идеи, что "всё — каждая частица, каждое силовое поле, даже сам пространственно-временной континуум — своей функцией, своим смыслом, даже своим существованием всецело — хотя в некоторых контекстах и опосредованно — обязано аппаратно извлеченным ответам на вопросы, предполагающие ответ «да» или «нет», двоичным вариантам, битам". По мнению Уилера, вполне логично свести все во Вселенной к информации, которая поступает к нам в форме двоичной единицы. Если правильно совместить квантовую теорию с этими простыми кирпичиками информации, получатся пространство и время, звезды и планеты, вы и я.

Поиски продолжаются: сегодня физики, стремящиеся постичь вселенную во всей ее сложности, полагают, что теория информации может открыть им новые двери. Они мыслят категориями информационной "энтропии" — изучают пути передачи информации и проводят ее количественную оценку — и вычислительных процессов, поскольку каждый закон физики и химии можно представить как процесс, обрабатывающий биты физической Вселенной с помощью квантовых версий логических вентилей. Мы — результат этих вычислительных процессов, и наши мысли и поступки определяют их ход. Как выразился физик Сет Ллойд, "каждый атом, каждая элементарная частица участвуют в масштабном вычислительном процессе, который и есть Вселенная", а "каждый человек на Земле — часть общего вычислительного процесса"[35]. На переднем крае физики всё во Вселенной, включая нас, можно свести к обработке битов Шеннона, Буля и Лейбница: истина и ложь, да и нет, 1 и 0.

Величайший шоумен

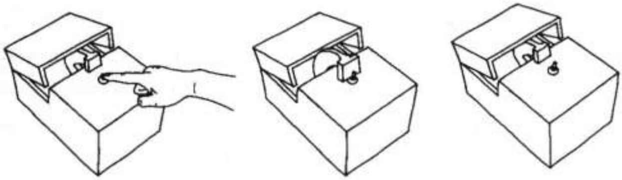
Я хочу завершить эту главу небольшим рассказом о человеке, который занял в ней центральное место. Ранее на страницах этой книги мы встречали весьма непривлекательных персонажей, в частности Ньютона и Лейбница, и мне не хотелось бы, чтобы у вас сложилось впечатление, что гении математики — сплошь неприятные люди.

Сложно сказать о Клоде Шенноне хоть что-то плохое. Как и любой человек, в голове которого роится множество мыслей, он был порой не очень открыт к общению, но при этом никогда не терял игривого настроя. В детстве Шеннон мечтал выступать на ярмарках и только и думал, что о сложном моторном навыке жонглирования, который очень нелегко довести до совершенства. Именно поэтому он сначала научился жонглировать сам, а впоследствии разработал и сконструировал жонглирующих роботов. Его механические клоуны были собраны чрезвычайно точно, и Шеннон хвастался, что роботы "жонглируют всю ночь напролет, никогда ничего не роняя!"[36]

У него самого, однако, жонглировать без ошибок не получалось, и это подтолкнуло его взять новую высоту: он научился кататься на одноколесном велосипеде, а затем еще и жонглировать, сидя в седле. Далее он научился жонглировать, передвигаясь на одноколесном велосипеде по стальному тросу. И это лишь малая часть того, чем он занимался, когда не корпел над теорией информации. Он также изготовил полистироловые тапочки, чтобы ходить по воде, и гигантский механический палец, которым подзывал жену из кухни, нажимая на кнопку в своей лаборатории, устроенной в подвале.

Этот палец он сделал в шутку: Бетти прекрасно готовила, но также блистала в науке, и сотрудничество с ней имело огромную ценность для Шеннона. Были и другие потешные машины: например, Шеннон сконструировал огнедышащую трубу и первую "бесполезную машину". Если вы никогда не видели это устройство, оно чудесно: его единственная задача — выключаться. Как только вы приводите переключатель в положение ВКЛ, из закрытой коробки появляется рука, которая возвращает его в положение ВЫКЛ. Затем рука прячется, а машина выключается до тех пор, пока вы не включите ее снова.

Шеннон позаимствовал эту идею у пионера информационных технологий и робототехники Марвина Минского. Тот факт, что, услышав о ней, Шеннон не смог не воплотить



Бесполезная машина Клода Шеннона,
которая не делает ничего, только выключается

ее в жизнь, многое говорит о его натуре. Впрочем, бесполезные машины не всем пришлись по вкусу. Писателю-фантасту Артуру Кларку они казались пугающими. "Есть нечто неописуемо жуткое в машине, которая не делает ничего — совершенно ничего, — не считая того, чтобы выключаться", — сказал он[37].

В существовании других машин Шеннона было гораздо больше смысла. Он сконструировал первый переносной компьютер, который должен был анализировать скорость и траекторию движения шарика на колесе рулетки[38]. Этот компьютер был размером с пачку сигарет и подсоединялся к нескольким микропереключателям, которые находились в ботинках пользователя и давали ему возможность перезагружать устройство и начинать процесс анализа. На входе компьютер получал с ножного переключателя сигнал, показывающий время, за которое шарик совершал один оборот после запуска рулетки. На выходе проигрывалась музыкальная нота, которая звучала в проводном наушнике и сообщала пользователю, на что ставить.

Летом 1961 года Шеннон и второй разработчик этого устройства, его аспирант Эдвард Торп, привезли своих жен в Лас-Вегас, чтобы опробовать компьютер в деле. Женам они поручили следить, не вызывают ли они подозрений. В целом они не привлекали внимания, если не считать того случая, когда порвался провод и наушник Торпа выглянул из его слухового прохода, сделав его, как он позже вспоминал, "похожим на инопланетное насекомое". Провода рвались несколько раз, но в остальном компьютер показал себя хорошо. Торп и Шеннон даже подумали, что стоит вернуться в Лас-Вегас, отрастив волосы, чтобы легче было прятать наушник.

Но поездка не состоялась. В 1960-х Шеннон стал постепенно отдаляться от коллег. К концу десятилетия он перестал посещать конференции по теории информации. Он, однако, не оторвался от мира и от своих друзей. Он сделал ряд вложений в компании, основанные людьми, которых он знал и которым доверял. Одним из них стал его бывший коллега Билл Харрисон, а когда компания *Harrison Laboratories* была продана Биллу Хьюлетту и Дэвиду Паккарду, Шеннон оказался одним из первых держателей акций HP. Он также помог Генри Синглтону, с которым учился в MIT, основать компанию *Teledyne*. Шеннон сделал вложение потому, что не сомневался в талантах Синглтона, и не прогадал: *Teledyne* стала приносить многомиллиардные прибыли. Готовность помогать друзьям претворять свои идеи в жизнь также принесла ему первые акции компании *Motorola*[39].

Несмотря на то что Шеннон больше не появлялся на публике, его популярность не снижалась. Это стало очевидно, когда он неожиданно заглянул на конференцию в английском Брайтоне. Стоял 1985 год, Шеннону было 69 лет. Никто не помнит почему, но так случилось, что он зашел на несколько выступлений в рамках Международного симпозиума по теории информации в брайтонском "Гранд-отеле". Кто-то узнал его, и пошли шепотки, что на мероприятии появился сам отец теории информации. Организатор конференции Роберт Макэлис позже описал атмосферу так: "Это было все равно как если бы на конференцию по физике пришел Исаак Ньютон"[40].

Это красивая аналогия, но немногие из коллег Ньютона захотели бы с ним пообщаться. Шеннона же, напротив, любили и уважали. Его быстро поймали, и организаторы симпозиума уговорили его выступить с речью на торжественном ужине. Шеннон побоялся утомить собравшихся, и потому, когда пришло время, он сказал несколько слов, а затем вытащил мячики и начал жонглировать, превратив свою речь в цирковой номер. В заключительной части вечера физики, которым обычно нет дела до знаменитостей, выстроились в очередь, чтобы получить автограф Шеннона.

Клод Шеннон умер в 2001 году. По иронии судьбы этого колосса в конце концов свалила болезнь Альцгеймера — тщательно каталогизированная информация, накопленная за целую жизнь, постепенно стиралась из его изувеченного недугом мозга. Таким печальным стал конец выдающейся жизни, полной всевозможных достижений.

Теория информации Шеннона оказалась такой великой и убедительной, что почти сразу изменила человеческую жизнь навсегда. В 1956 году, через восемь лет после того, как теория информации появилась на свет, Шеннон даже посчитал необходимым призвать людей не применять его работу слишком широко. "[Она] нашла применение в биологии, психологии, лингвистике, теоретической физике, экономике, теории организации производства и во многих других областях науки и техники", — довольно неодобрительно отметил он в очерке "Повальное увлечение"[41]. Признавая, что такая "широкая популярность", несомненно, "приятна и стимулирует работу", Шеннон настаивал, что теория информации применима не везде. "Очень редко удается открыть одновременно несколько тайн природы одним и тем же ключом", — утверждал он.

Это необычайный очерк. Часто ли математику приходится просить людей не торопиться применять его открытия в реальном мире? Но вряд ли можно их винить: кажется, нет такой сферы жизни, которая не выиграла бы от результатов работы Шеннона. Они открыли нам тайны Солнечной системы и позволили не беспокоиться при совершении покупок в интернете. Благодаря ним у нас появилось кино по запросу, а возможно (будем надеяться), появится и финальная физическая теория. Они связывают интернет с "И цзин". Куда ни посмотри — на компьютеры, принесшие нам победу в войне, на информационно насыщенные сигналы мобильной связи, на песни, которые транслируются из интернета и передаются по воздуху прямо к нам в уши, — без вклада Шеннона в математику наш мир сегодня было бы не узнать. Теория информации стала кульминацией десятков тысяч лет человеческих открытий, изобретений и находок, апофеозом искусства большего.

Заключение
Блистающие грани математики

Мы с вами, вероятно, согласимся, что мы цивилизованные люди. Но что же это значит? Ученые не могут прийти к единому мнению по вопросу о том, что такое цивилизация, но обычно называют несколько ее признанных характеристик. Цивилизация имеет крупные поселения — по сути, города. Ее общества в какой-либо форме практикуют религию. Им свойственны разделение труда, специализация навыков и существование центрального правительства, сформированного в соответствии с действующим правом и практически наверняка финансирующего свою работу с помощью налогообложения. В цивилизации есть классовая система и налажено стабильное снабжение продовольствием. Некоторые граждане цивилизации располагают свободным временем, благодаря чему развиваются искусство, музыка и другие области культуры.

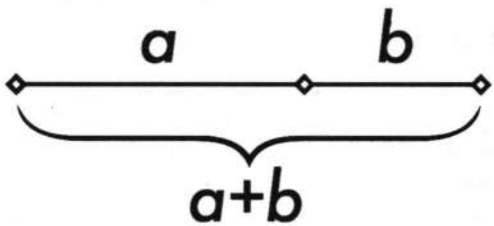
В большинстве исследований утверждается, что письменная культура также представляет собой неотъемлемый компонент цивилизации. Однако мы знаем, что в империи инков — несомненно, одной из величайших цивилизаций — письменности не было. И все же у инков было кое-что такое, что почти никогда не попадает в список цивилизационных характеристик. А вообще-то этот элемент должен быть первым — может, даже единственным — критерием цивилизации. Разумеется, это математика.

Инки записывали официальные данные, торговые сделки, бухгалтерские счета и многие другие наборы чисел с помощью узелкового письма, называемого кипу. В каждом городе был “хранитель узелков”, который назначался королем и выступал в качестве государственного статистика — почти как самурай в Японии. Мы видели, как математика работала в шумерских царствах 5 тысяч лет назад и как ее задействовали при строительстве африканских цивилизаций в Северной и Черной Африке. В начале XIV века Манса Муса, который прослыл богатейшим человеком всех времен, основал в Тимбукту огромный университет, где наравне с астрономией и правом преподавали математику. Подвластная Мусе Империя Мали, источник большей части золота, находившегося в обращении в средневековом мире, была основана на торговле и налогообложении, а своим процветанием обязана искусству работы с числами.

Прошло семьсот лет, но мы и сегодня остаемся у него в долгу. Вот краткий список прекрасных вещей, которые нам подарила математика: международные путешествия, полные полки супермаркетов, холодильники, мобильные телефоны, сложные и красивые городские среды, индустрия развлечений, доступ к финансам, приведший к беспрецедентно высокому благосостоянию, феноменальные произведения искусства, многие дополнительные десятилетия здоровой жизни, глубокое знание космоса и его истории, великолепный информационный ресурс, которым стал интернет, — и это лишь первое, что пришло мне в голову. Теперь остается только спросить: как вышло, что ключевая роль математики так долго оставалась непризнанной?

Я виню в этом Платона. В IV веке до нашей эры этот древнегреческий философ провозгласил, что наш мир есть не что иное, как тень совершенной реальности, составленной из математических идеалов. Он разделял мысль, что Вселенная построена на фундаменте из нескольких выпуклых геометрических фигур. Главной из них был 12-сторонний додекаэдр, который, как выразился Платон, “Бог определил для Вселенной и прибегнул к нему в качестве образца”[1].

Около 300 года до нашей эры Евклид использовал принципы Платона при создании “Начал”, его обзорного труда по математике. “Начала” называют самым авторитетным учебником, который когда-либо был написан, но в них не содержалось ни указаний авторства, ни ссылок на источники идей, ни истории их появления. Складывалось впечатление, что математику нам передали на каменных скрижалях. В результате математику век за веком преподавали почти как богословие. Чтобы убедиться в этом, достаточно узнать, какой переполох вызывало “золотое сечение”.



$a + b$ относится к a так же, как a относится к b

Отрезок, разделенный по принципу золотого сечения

Описать золотое сечение довольно просто: поделите отрезок на две части так, чтобы отношение длины всего отрезка к большей части оказалось таким же, как отношение большей части к меньшей. Отношение равняется $(1 + \sqrt{5})/2$, примерно 1,618. Этому числу приписывалась такая мистическая сила, что когда в 1509 году Лука Пачоли написал о нем книгу, он назвал ее “Божественная пропорция”. Уже по оглавлению понятно, в каком восхищении пребывал Пачоли: пятая глава, например, называется “О подходящем названии для настоящего трактата или обзора". В ней объясняется, почему пропорция, о которой идет речь, божественна. В главах 12–14 описываются свойства пропорции, которые Пачоли (по порядку) называет "существенным", "особым" и "поразительным". Свойство из пятнадцатой главы "невероятно", а затем идут "невообразимое", "наивысшее", "великолепное" и "трудновообразимое" свойства. Пожалуй, никогда еще автор не восторгался своим предметом столь явно.

Так и повелось. Золотым сечением его стали называть лишь в XIX веке, но, поскольку друг (и ученик) Пачоли Леонардо да Винчи проиллюстрировал его книгу, исследователи проецировали его на многие работы да Винчи, включая "Мону Лизу" и "Витрувианского человека". Кое-кто, например, утверждает, что пропорции лица Моны Лизы соответствуют золотому сечению. Ни одно из подобных заявлений не проходит проверку — все зависит от того, как осуществляются измерения[2].

Попытки обнаружить золотое сечение в архитектуре не менее сомнительны. Порой утверждается, что по принципу золотого сечения спроектированы египетские пирамиды, многочисленные соборы и римский Пантеон, но большинство ученых не скрывает своего скепсиса. Тем не менее его мифическая сила одолевала архитекторов современности, например Ле Корбюзье, который считал, что золотое сечение и последовательность Фибоначчи имеют первородный характер и потому могут считаться "очевидными глазу ритмами". По его словам, они лежат в основе деятельности человека: "Они находят в человеке отклик своей органической неизбежностью, той самой неизбежностью, которая заставляет детей и стариков, дикарей и мудрецов воспроизводить золотое сечение"[3].

В помпезных заявлениях Ле Корбюзье мало правды. Золотое сечение действительно присутствует в природе: оно определяет свойства огромного количества природных явлений, от расположения листьев на стебле растения до пропорций спиральной морской раковины и термодинамических свойств черных дыр. Но в этом нет никакой мистики: в природных явлениях снова и снова встречаются и многие другие числа.

Невозможно, однако, отрицать, что золотое сечение явило себя на картине Сальвадора Дали "Тайная вечеря". Она вписана в прямоугольник, длины сторон которого выбраны так, чтобы их отношение давало золотую пропорцию. Позади Христа и его апостолов находится гигантский додекаэдр — геометрическая фигура, в свойствах которой также проявляется это соотношение. Это, впрочем, сделано совершенно намеренно. Выбор Дали продиктован не эстетикой, а символизмом: он опускается на колени перед Платоном. Такое низкопоклонство и подталкивало других приписывать псевдомистические свойства различным математическим явлениям. Я уже упоминал, что не вижу ни в числе π, ни в числе e, ни в квадратном корне из двух ничего особенно вдохновляющего. Не вдохновляют меня и простые числа.

Позвольте, я поясню свою мысль. Как мы увидели, люди изобрели целые числа, чтобы описывать предметы, которые находили в окружающей среде (или выдумывали), и оперировать ими. Мы также изобрели деление, чтобы их распределять. Разумеется, вскоре мы обнаружили, что одни целые числа можно поделить на другие целые числа так, чтобы у нас получились меньшие целые числа. Вместе с тем другие целые числа поделить таким образом нельзя. Такова их природа. Любопытно, что такие простые числа появляются в определенных точках на числовой оси, которая в нашем представлении тянется от 1 до бесконечности. Но это не загадка. Назвать это загадкой — все равно что приписать сверхъестественные свойства шафрану, позволяющему приготовить особенно вкусное блюдо. Да, можно сказать, что шафран — дорогая, ароматная, древняя специя, много веков назад привезенная с таинственного Востока. Но также можно назвать его вместилищем химических веществ кроцин и пикрокроцин, которые взаимодействуют с другими химическими веществами, содержащимися в пище, в результате чего она приобретает золотисто-желтый цвет и особенно приятный вкус, знакомый людям уже тысячи лет.

Возможно, вы сочтете это святотатством, будто я пытаюсь "расплести радугу". Такое обвинение Джон Китс предъявил Ньютону, когда тот продемонстрировал, что лучи света разных цветов при смешении дают белый свет. Но я полагаю, что существует веская причина расплести математическую радугу. На данный момент лишь те, кто посвящен в Платонов культ, осознают силу чисел. Но если мы сорвем с математики покров тайны, возможно, у нас получится ее демократизировать. Может, каждый наконец получит шанс разглядеть, что математика соткана из полезных нитей и что понять их ценность способен даже человек, не обладающий особым складом ума. Кое-кто, пожалуй, даже поймет, что изучение этих нитей и работа с ними может приносить удовольствие и удовлетворение. Правда ведь, что математика должна быть доступна каждому?

Сложно сказать, намеренно ли избранное меньшинство постепенно присваивало себе математику. Древнеегипетские ниломеры позволяют предположить, что в этом был умысел: эти измерители уровня воды в реке строились на территории храмов, чтобы доступ к ним имели только жрецы. Они одни знали о приближении наводнений, а следовательно, владели секретами, которые влияли на жизнь обычных людей, что очень важно для любого, кто хочет управлять массами. Однако, даже если математики разных времен не стремились к власти явно, несложно представить их неосознанное желание представлять свой предмет как нечто глубокое и авторитетное, а еще — сложное для понимания. В переводе на язык производной от математики экономики это обретает смысл: каждому хочется создать спрос на товар, который предлагает только он.

Существует и альтернатива элитистскому, мистическому математическому мышлению. Вместо того чтобы считать математиков исследователями, которые совершают открытия на Платоновом ландшафте, нам, вероятно, стоит видеть в них художников, творящих предмет. Они пользуются палитрой, преисполненной чисел, а их лоток для инструментов вмещает все больше алгоритмических ножей и кистей. Большинство из них завершает работу, начатую очень давно, и заполняет пробелы, оставленные старыми мастерами. Но порой математик создает нечто совершенно новое и поразительное. Благодаря этому у нас появились такие шедевры, как геометрия, логарифм, теория информации и доказательство теоремы Ферма. Истинная красота всего этого в том, что их творения, в отличие от картин гения, принадлежат всем нам. Новая математика позволяет нам создавать великолепную архитектуру, разрабатывать спасающие жизни лекарства, предлагать технологии сжатия данных, приносящие радость миллионам людей, совершать научные прорывы, показывающие нам наше место во Вселенной, а также достигать множества других высот, которые покоряются человеку.

Наша история тесно переплелась с историей математики. Мы считали — и изобрели деньги и торговлю. Мы рисовали на песке — и научились безопасно путешествовать по свету. Мы вычисляли неизвестное на основе известного — и создали сложное, сетевое, взаимосвязанное общество, которое позволило некоторым людям посвящать свое время тому, чтобы заполнять пробелы, открывая новые возможности для повышения благосостояния. Мы увидели, что свойства треугольников и окружностей помогают нам освоить невозможные прежде вычисления, — и использовали получившиеся инструменты, чтобы проложить себе путь в XX век. Мы поняли, что такие абстрактные идеи, как информация и комплексные числа, служат ключом к атомной, электрической и электронной энергии, — и теперь чудесные следствия этого озаряют вашу жизнь. Математика повлияла даже на самосознание человека и оставила свой отпечаток на каждом из нас — мы просто раньше этого не замечали. Возможно, мы так и не сумеем однозначно сказать, открыли мы математику или сотворили ее, но теперь нам, пожалуй, стоит согласиться, что математика сотворила нас.

Благодарности

Написав книгу и представив ее миру, испытываешь смешанные чувства. Кажется, я никогда прежде не получал такого удовольствия при работе над текстом, и теперь мне даже немного грустно, что больше мне не придется узнавать столько новых и интересных вещей о цифрах.

Но мои близкие, наверное, вздохнули с облегчением. Больше никаких восторженных вечерних рассказов о моих удивительных находках, никаких "попробуй-ка этот египетский метод умножения, это не займет и минуты...", никаких "скажи-ка, каково впервые столкнуться с комплексными числами...", никаких "подарите-ка мне на день рождения логарифмическую линейку / секстант / абак...". Филиппа, Милли, Нова, спасибо вам за терпение. Надеюсь, вам было не слишком тяжело.

Эта книга не вышла бы без Патрика Уолша и команды агентства PEW *Literary*. Я был поражен, когда Патрик ухватился за мою сырую, незрелую мысль написать книгу о математике для людей, которые не слишком увлечены предметом. Мы вместе доработали эту идею, гуляя по утесам в Кукмер-Хейвен, и больше я уже ни разу в ней не усомнился. Мои редакторы Молли Слайт и Эдвард Кастенмайер, а также их команды в издательствах *Scribe* и *Knopf* с энтузиазмом поддерживали меня, пока я работал над проектом, и давали мне ценные советы. Отдельное спасибо выпускающему редактору Ричарду Ли, который кропотливо вычитывал рукопись и оценил шутку о плане Маршалла, а еще Филипу Гвину Джонсу, поддержавшему меня на ранних этапах.

Я безмерно благодарен своим беспристрастным и требовательным рецензентам: специалистам Артуру Экерту и Мэттью

Хэнкинсу, а также неспециалистам Шону Гарнеру и Чарли Хигсону. И еще Рику Эдвардсу, который не вписывается ни в одну из этих категорий, — он поймет, что я имею в виду. Они оказали мне ценную помощь, но если в книге остались ошибки (хоть в фактах, хоть в суждениях), то отвечаю за них лишь я сам.

Наконец, я хочу поблагодарить всех, кто помогал мне советами по целому ряду вопросов, от истории бухгалтерского дела до тонкостей рутинной архитекторской работы. Перечислю их без всякого порядка: Ричард Линдли, Джен Хойрап, Джон Баттеруорт, Мелани Бейли, Кристофер Напье, Кит Хоскин, Ричард Макве, Манфред Золлнер, Жан-Жак Крапье, Эрдал Арикан, Редфорд Нил, Ник Кингсбери, Дэвид Блокли и Эндрю Уайтхерст.

Майкл Брукс
Май 2021 года

Примечания

Введение. **Почему умение работать с цифрами — величайшее достижение человечества**

1 Gordon P. *Numerical cognition without words: evidence from Amazonia*. Science 306. 5695 (2004): 496–99.
2 Everett C. *Numbers and the Making of Us: counting and the course of human cultures*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 2019.
3 Nuwer R. *Babies are born with some math skills*. Science, 2013, *www.sciencemag.org/news/2013/10/babies-are-born-some-math-skills*.
4 Dee J. *The Mathematicall Praeface to Elements of Geometrie of Euclid of Megara*, *www.gutenberg.org/files/22062/22062-h/22062-h.htm*.

Глава 1. **Арифметика.** История цивилизации

1 Brooks R. *Bean Counters: the triumph of the accountants and how they broke capitalism*. London: Atlantic Books, 2019.
2 Mignet F. A. M. A. *History of the French Revolution from 1789 to 1814*, *www.gutenberg.org/files/9602/9602–8.txt*.
3 Soll J. *The Reckoning: financial accountability and the rise and fall of nations*. New York: Basic Books, 2014.
4 Founders Online. *From Alexander Hamilton to Robert Morris, [30 April 1781]*, *http://founders.archives.gov/documents/Hamilton/01-02-02-1167*.
5 Существует другая кость, которая может претендовать на статус более древнего математического артефакта. Это кость Лебомбо, которой около 43 тысяч лет. На ней видны насечки, которые,

возможно, были знаками некоторой системы счисления. Впрочем, это подвергается большим сомнениям, и южноафриканский археолог Питер Бомонт, обнаруживший кость, вовсе не утверждает, что ее использовали в качестве инструмента для ведения подсчетов.

6 Fehr T. et al. *Common brain regions underlying different arithmetic operations as revealed by conjunct fMRI-BOLD activation*. Brain Research. 1172 (2007): 93–102.

7 Pika S. et al. *How to order a beer: cultural differences in the use of conventional gestures for numbers*. Journal of Cross-Cultural Psychology 40. 1 (2009): 70–80.

8 Ifrah G. *From One to Zero: a universal history of numbers*. New York: Penguin Books, 1987.

9 Berteletti I., Booth J. R. *Perceiving fingers in single-digit arithmetic problems*. Frontiers in Psychology. 6 (2015).

10 Butterworth B. *The Mathematical Brain*. London: Macmillan, 1999.

11 Høyrup J. *State, "justice", scribal culture and mathematics in ancient Mesopotamia: Sarton Chair Lecture*. Sartoniana. 22 (2009): 13–45.

12 Høyrup J. *On a collection of geometrical riddles and their role in the shaping of four to six "algebras"*. Science in Context. 14, no. 1–2 (2001): 85–131. (Ответ: 4,874. Его можно вычислить с помощью квадратного уравнения, с которым мы еще не познакомились.)

13 Crappier J.-J. et al. *The Akan Weighing System restored after 120 years of oblivion. A metrological study of 9301 geometric goldweights*. Colligo 2. 2 (2019): 9–22.

14 Scripture E. W. *Arithmetical prodigies*. American Journal of Psychology. 4, no. 1 (1891): 1–59.

15 Duvernoy S. *Leonardo and theoretical mathematics*. Nexus Network Journal. 10,1 (2008): 39–49.

16 Если вы сочувствуете Леонардо, в этом нет ничего удивительного. Разумеется, можно просто принять, что при делении на число меньше единицы частное оказывается больше делимого. Не помешает, впрочем, разобраться в этом на примере. Допустим, мы делим 10 шоколадок между 5 хоккейными командами. Каждая команда получает по 2 шоколадки. Теперь допустим, что мы делим шоколадки между 2 командами. В таком случае каждая команда получает по 5 шоколадок. Чем меньше оказывается делитель, тем больше становится частное. Так продолжается, пока делитель не достигнет 1. Рассмо-

трим числа меньше 1. Допустим, мы делим 10 шоколадок между 1/3 команды. Треть хоккейной команды — это 2 человека. Следовательно, 10 шоколадок делится между 2 игроками, то есть каждый игрок получает по 5 шоколадок. Но это равнозначно тому, как если бы вся команда получила 5 × 6 = 30 шоколадок. Итак, при делении 10 на 1/3 получается 30.

17 McNamara J., Shaughnessy M. M. *Student errors: what can they tell us about what students DO Understand?* Math Solutions, 2011.

18 Ответ на первый вопрос: 2/7, 1/2, 5/9. Ответ на второй вопрос: 2. Прийти к ним можно либо путем аппроксимации (и 12/13, и 7/8 близки к 1, поэтому их сумма близка к 2), либо путем приведения дробей к общему знаменателю. Превратим 12/13 в 96/104, умножив числитель и знаменатель на 8. Затем превратим 7/8 в 91/104, умножив числитель и знаменатель на 13. Сложим числители. 96 + 91 = 187, а значит, в сумме дроби дают 187/104. Это приблизительно 1,8, что ближе всего к 2.

19 Последовательность Фибоначчи начинается с 0 и 1, а каждое следующее число в ней получается путем сложения двух предыдущих. Первые 12 чисел таковы: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 и 89.

20 Pascal B. *Pensées*, *www.gutenberg.org/files/18269/18269-h/18269-h.htm*. Перевод Ю. Гинзбург.

21 Wallis J. *A Treatise of Algebra, Both Historical and Practical*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 15, no. 173 (1685): 1095–1106.

22 Seife C. *Zero: The Biography of a Dangerous Idea.* New York: Viking, 2000.

23 Kaplan R. *The Nothing That Is: a natural history of zero.* Oxford: Oxford University Press, 2000.

24 *Physics by Aristotle*, *http://classics.mit.edu/Aristotle/physics.html.*

25 Weng J. et al. *The effects of long-term abacus training on topological properties of brain functional networks*. Scientific Reports. 7, no. 1 (2017): 8862.

26 Goldthwaite R. *The practice and culture of accounting in Renaissance Florence*. Enterprise & Society. 16, no. 3 (2015): 611–47.

27 Gleeson-White J. *Double Entry: how the merchants of Venice created modern finance*. New York: W. W. Norton & Co, 2012.

28 Schemmen M. *The Rules of Double-Entry Bookkeeping (a Translation of Particularis de Computis et Scripturis)*. IICPA Publications, 1494. “Сумма” Пачоли цитируется в переводе Э. Вальденберга.

29 ANZOVIN S., PODELL J. *Famous First Facts, International Edition: a record of first happenings, discoveries, and inventions in world history*. New York: H. W. Wilson, 2000.
30 PERAGALLO E. *Jachomo Badoer, Renaissance man of commerce, and his ledger*. Accounting and Business Research. 10, sup. 1 (1980): 93–101.
31 NEVINS A. *John D Rockefeller: The Heroic Age of American Enterprise*. New York: Charles Scribner's Sons, 1940.
32 MCKENDRICK N. *Josiah Wedgwood and cost accounting in the Industrial Revolution*. Economic History Review. 23, no. 1 (1970): 45–67.
33 GLEESON-WHITE J. *Double Entry: how the merchants of Venice created modern finance*. New York: W. W. Norton & Co, 2012.
34 Там же.

Глава 2. **Геометрия.** История завоеваний и творений

1 KURT A. *The search for Prester John, a projected crusade and the eroding prestige of Ethiopian kings, c. 1200 — c. 1540*. Journal of Medieval History. 39, no. 3 (2013): 297–320.
2 RANDLES W. G. L. *The alleged nautical school founded in the fifteenth century at Sagres by Prince Henry of Portugal, called the "Navigator"*. Imago Mundi. 45, no. 1 (1993): 20–28.
3 HUFFMAN C. *Pythagoras*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Winter 2018.
4 SCHOTTE M. E. *Sailing School: navigating science and skill, 1550–1800*. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 2019.
5 TAYLOR E. G. R. *Mathematics and the navigator in the thirteenth century*. Journal of Navigation. 13, no. 1 (1960): 1–12.
6 ALEXANDER J. *Loxodromes: A rhumb way to go*. Mathematics Magazine. 77, no. 5 (2004): 349–56.
7 *The four voyages* // SYMCOX G., SULLIVAN B. (ed.) *Christopher Columbus and the Enterprise of the Indies: A Brief History with Documents*. New York: Palgrave Macmillan US, 2005: 60–139. Дневник цитируется в переводе Я. Света.
8 MONMONIER M. *The lives they lived: John P. Snyder; the Earth made flat*. The New York Times, 4 January 1998.
9 HESSLER J. W. *Projecting Time: John Parr Snyder and the development of the Space Oblique Mercator*. Philip Lee Phillips Society Occasional Paper Series. No. 5. Washington, DC: Geography and Map Division, Library of Congress, 2004.

10 Svenshon H. *Heron of Alexandria and the dome of Hagia Sophia in Istanbul*. Proceedings of the Third International Congress on Construction History. Vol. 3. Cottbus, 2009: 1387–1394.

11 Sebregondi G. C., Schofield R. *First principles: Gabriele Stornaloco and Milan Cathedral*. Architectural History. 59 (2016): 63–122.

12 Fehér K. et al. *Pentagons in medieval sources and architecture*. Nexus Network Journal. 21, no. 3 (2019): 681–703.

13 Edgerton S. Y. *The Mirror, the Window, and the Telescope: how Renaissance linear perspective changed our vision of the universe*. Ithaca, NY: Cornell University Press, 2009.

14 Manetti A. *The Life of Brunelleschi*. University Park, PA: Pennsylvania State University Press, 1970.

15 Licht M., Tigler P. *Filarete's Treatise on Architecture (Yale Publications in the History of Art, 16), trans. with intro. by John R. Spencer*. The Art Bulletin. 49, no. 4 (1967): 351–60. Цитируется в переводе В. Глазычева (с изменениями).

16 Alberti L. B. *On Painting*. London: Penguin, 1991.

17 Lamb E. *The slowest way to draw a lute*. Scientific American Blog Network, 2014.

18 Dürer A. *Memoirs of Journeys to Venice and the Low Countries, trans. Rudolf Tombo*. Auckland: Floating Press, 2010. Перевод Ц. Нессельштраус.

19 Ramey K. E. et al. *In-FUSE-ing STEAM learning with spatial reasoning: distributed spatial sensemaking in schoolbased making activities*. Journal of Educational Psychology. 112, no. 3 (2020): 466–93.

20 Gordon I. S., Sorkin S. *The Armchair Science Reader*. New York: Simon and Schuster, 1959.

21 Atiyah M. F. *Collected Works, vol. 6*. Oxford: Clarendon Press, 1988.

Глава 3. **Алгебра.** История организации

1 *FedEx History, www.fedex.com/en-us/about/history.html.*

2 Morrison K. E. *The FedEx problem*. College Mathematics Journal. 41, no. 3 (2010): 222–32.

3 Hadley J., Singmaster D. *Problems to sharpen the young*. Mathematical Gazette. 76, no. 475 (1992): 102–26.

4 У того, который просил двух волов, было четыре вола, а у того, который просил одного, — восемь. Из большого куска ткани можно сшить 100 туник.

5 Moore T. *Why X marks the unknown*. Cosmos Magazine, 14 June 2015.
6 Cajori F. *A History of Mathematical Notations, Volume I: Notations in Elementary Mathematics*. London: The Open Court Company, Publishers, 1928.
7 Høyrup J. *Algebra in cuneiform: Introduction to an Old Babylonian geometrical technique*. Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte. Preprint Vol. 452 (2013).
8 Woodward W. *Make maths optional — union leader*. The Guardian, 22 April 2003.
9 House of Commons Hansard Debates for 26 Jun 2003, *https://publications.parliament.uk/pa/cm200203/cmhansrd/vo030626/debtext/30626-22.htm*, in col. 1264.
10 Susac A., Braeutigam S. *A case for neuroscience in mathematics education*. Frontiers in Human Neuroscience. 8 (2014).
11 Lichtenberg G. C. *Briefwechsel, Band III: 1785–1792*. Munich: Beck, 1990.
12 Ostwald W. *Über Papierformate*. Mitteilungen des Normenausschusses der Deutschen Industrie. 12 (1918): 199–200.
13 Oppenheimer J. R. *Physics in the contemporary world*. Bulletin of the Atomic Scientists. 4, no. 3 (1948): 65–86.
14 Valleriani M. *The Nova scientia: transcription and translation*, 18 April 2013, *https://edition-open-sources.org/sources/6/12/index.html.*
15 Hurley W. J., Finan J. S. *Military operations research and Digges's Stratioticos*. Military Operations Research. 22, no. 2 (2017): 39–46.
16 Brooks M. *The Quantum Astrologer's Handbook*. Scribe, 2017.
17 Обозначив грань большого куба t, Кардано может сказать, что $t^3 = u^3 + (t-u)^3 + 2tu\,(t-u) + u^2\,(t-u) + u\,(t-u)^2$, где u — грань одного из маленьких кубов. Перестроим это выражение и получим $(t-u)^3 + 3tu(t-u) = t^3 - u^3$. Далее можно просто сказать, что $x = t - u$, и получится формула, с которой все и начиналось: $x^3 + mx = n$, где $m = 3tu$, а $n = t^3 — u^3$. Еще немного преобразований (начнем с подстановки $m/3tu$ на место u в выражение $t^3 - u^3$), и получится $(t^3)^2 - n(t^3) - m^3/27 = 0$. Вам может показаться, что легче не становится, но это не так. Теперь перед вами квадратное уравнение с t^3 вместо x, а решать такие уравнения вы уже умеете.
18 Patton P. *The shape of Ford's success*. The New York Times, 24 May 1987.
19 *The mathematics behind font shapes — Bézier curves and more*, 27 November 2018, *https://jdhao.github.io/2018/11/27/font_shape_mathematics_bezier_curves/.*

20 Rothman T. *Genius and biographers: the fictionalization of Evariste Galois*. American Mathematical Monthly. 89, no. 2 (1982): 84–106.
21 *Celebrate the mathematics of Emmy Noether*. Nature. 561, no. 7722 (2018): 149–50.
22 Einstein A. *The late Emmy Noether; Professor Einstein writes in appreciation of a fellow-mathematician*. The New York Times, 4 May 1935.
23 *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 8: The Berlin Years: Correspondence, 1914–1918 (English Translation Supplement)*: 217 (245 of 742), *https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol8-trans/245*.
24 Hirzebruch F. *Emmy Noether and topology*, *https://hirzebruch.mpim-bonn.mpg.de/id/eprint/98/6/preprint_1997_34.pdf*.
25 Brin S., Page L. *The Anatomy of a Search Engine*, *http://infolab.stanford.edu/~backrub/google.html*.
26 Bryan K., Leise T. *The $ 25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind Google*. SIAM Review. 48, no. 3 (2006): 569–81.
27 Wei P. et al. *Algebraic connectivity maximization of air transportation network: the flight routes' addition/deletion problem*. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review. 61 (2014): 13–27.
28 Hagemann H. et al. *Game theory modeling for the Cold War on both sides of the Iron Curtain*. History of the Human Sciences. 29, no. 4–5 (2016): 99–124.
29 *Solving Fermat: Andrew Wiles*, *www.pbs.org/wgbh/nova/article/andrew-wiles-fermat/*.
30 Devlin K. J. *The Millennium Problems: The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time*. New York: Basic Books, 2002.

Глава 4. **Математический анализ.** История инженерии

1 *Gallup Poll*, *http://ibiblio.org/pha/Gallup/Gallup%201940.htm*.
2 В июле вопрос полностью звучал так: “Если бы в ближайшие две недели состоялся национальный референдум по вопросу о том, следует ли США вступить в войну против Германии и Италии, вы бы отдали свой голос за то, чтобы вступить в войну, или за то, чтобы в нее не вступать?” В сентябре американцев спросили: “Как вы думаете, что из этих двух вариантов важнее для США: попытаться не вступить в войну или попы-

таться помочь Англии победить, даже рискуя, если возникнет риск вступить в войну?" В декабре 1940 года опрос провели еще раз, и 60% респондентов сочли, что США следует помочь Англии.

3 Ingersoll R. *Report on England: November 1940.* New York: Simon and Schuster, 1940.

4 Reese P. *The showgirl and the Schneider Trophy*. The History Press.

5 Quill J. *Spitfire: a test pilot's story.* Manchester: Crécy, 1998.

6 Lanchester F. W. *Aerodynamics: constituting the first volume of a complete work on aerial flight.* London: Constable, 1907.

7 Price A. *Spitfire: a documentary history.* London: Macdonald and Jane's, 1977.

8 Cole L. *Secrets of the Spitfire*. Pen & Sword, 2018.

9 Ahearn S. T. *Tolstoy's integration metaphor from War and Peace*. American Mathematical Monthly. 112, no. 7 (2005): 631–38.

10 Cardil R. *Kepler: The Volume of a Wine Barrel, www.matematicasvisuales.com/loci/kepler/doliometry.html.*

11 *A timeline of HIV and AIDS*. HIV.gov, 11 May 2016.

12 Perelson A. S. *Modeling the interaction of the immune system with HIV*. Mathematical and Statistical Approaches to AIDS Epidemiology, ed. Carlos Castillo-Chavez, Lecture Notes in Biomathematics. Berlin: Springer, 1989): 350–70.

13 David D. H. et al. *Rapid turnover of plasma virions and CD4 lymphocytes in HIV-1 infection.* Nature. 373, no. 6510 (1995): 123–26.

14 Loff S. *Katherine Johnson biography*. NASA, 22 November 2016.

15 *Letter from Newton to John Collins, dated 8 November 1676.* The Newton Project.

16 Westfall R. S. *Never at Rest: a biography of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

17 Greenstreet W. J. *Isaac Newton, 1642–1727: A Memorial Volume Edited for the Mathematical Association*. London: G. Bell, 1927.

18 Peiffer J. *Jacob Bernoulli, teacher and rival of his brother Johann*. Electronic Journal for History of Probability and Statistics. 2/1 (2006).

19 Bernoulli D., Blower S. *An attempt at a new analysis of the mortality caused by smallpox and of the advantages of inoculation to prevent it*. Reviews in Medical Virology. 14, no. 5 (2004): 275–88.

20 Bernoulli D. *Exposition of a new theory on the measurement of risk*. Econometrica. 22, no. 1 (1954): 23–36. Перевод А. Нардовой.

21 *July 1654: Pascal's letters to Fermat on the "problem of points", www.aps.org/publications/apsnews/200907/physicshistory.cfm.*

22 Akyildirim E., Soner H. M. *A brief history of mathematics in finance*. Borsa Istanbul Review. 14, no. 1 (2014): 57–63.
23 Black F., Scholes M. *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy. 81, no. 3 (1973): 637–54.
24 Merton R. C. *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates*. Journal of Finance. 29, no. 2 (1974): 449–70.
25 Veisdal J. *The Black-Scholes formula, explained*. Medium, 4 July 2020.
26 Stimson R. *Einstein's wing flops*, *https://wrightstories.com/einsteinswing-flops/*.
27 *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 6: The Berlin Years: Writings*, 1914–1917: 402 (430 of 654), *https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-doc/430*.
28 Shenstone B. S. *The Lotz method for calculating the aerodynamic characteristics of wings*. Aeronautical Journal. 38, no. 281 (1934): 432–44.
29 Price A. *Spitfire: a documentary history*. London: Macdonald and Jane's, 1977.
30 Howland R. C. J., Shenstone B. S. *I. The inverse method for tapered and twisted wings*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 22, no. 145 (1936): 1–29.
31 *Adolf Galland: winged knight of the Luftwaffe*. Warfare History Network (blog), 12 September 2016.
32 Knoke H., Overy R. J. *I Flew for the Führer: the memoirs of a Luftwaffe fighter pilot*. London: Frontline Books, 2012.

Глава 5. **Логарифмы.** История науки

1 Thorvaldsen S. *Early numerical analysis in Kepler's new astronomy*. Science in Context. 23, no. 1 (2010): 39–63.
2 Rice B. et al. *John Napier* // Rice B. et al. (eds.) *The Life and Works of John Napier*. Cham: Springer, 2017: 1–60.
3 *Arithmetic, Population and Energy — Full Length*, 2012, *www.youtube.com/watch?v=sI1C9DyIi_8*.
4 Stango V., Zinman J. *Exponential growth bias and household finance*. Journal of Finance. 64, no. 6 (2009): 2807–49.
5 Levy M. R., Tasoff J. *Exponential-growth bias and overconfidence*. Journal of Economic Psychology. 58 (2017): 1–14.
6 Romano A. et al. *The public do not understand logarithmic graphs used to portray COVID-19*. LSE COVID-19 (blog), 19 May 2020.
7 Dantzig T., Mazur J. *Number: the language of science*. New York: Plume, 2007.

8 Brown K. *Reflections on Relativity*. Lulu.com, 2011.
9 *Henry Briggs — biography*. Maths History, *https://mathshistory.standrews.ac.uk/Biographies/Briggs/*.
10 *Statistical Accounts of Scotland: Killearn, County of Stirling, OSA, Vol. XVI*, 1795: 108–09.
11 Bryant W. W. *A History of Astronomy*. London: Methuen, 1907.
12 Caspar M., Hellman C. D. *Kepler*. New York: Dover Publications, 1993.
13 Sangwin C. J. *Newton's polynomial solver*, *www.academia.edu/313991/Newtons_Polynomial_Solver*.
14 Davis R., Hume T. *Oughtred Society Slide Rule Reference Manual*. Roseville, CA: The Oughtred Society.
15 *The curve is exponential*, *www.atomicarchive.com/history/first-pile/firstpile_10.html*.
16 Dreifus C. *In the footsteps of his uncle, then his father*. The New York Times, 14 August 2007.
17 Mitchell U. G., Strain M. *The number e*. Osiris 1 (1936): 476–96.
18 Académie des inscriptions et belles-lettres (France) Auteur du texte, 'Le Journal Des Sçavans', issue, Gallica (1846): 51, *https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k57253t*.
19 Härdle W. K., Vogt A. B. *Ladislaus von Bortkiewicz — statistician, economist and a European intellectual*. International Statistical Review. 83, no. 1 (2015): 17–35.

Глава 6. **Комплексные числа.** История электрического века

1 *Dudley Craven*, *www.dudleycraven.com/*.
2 Nahin P. J. *An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2016.
3 Kenney E. *Cardano: "arithmetic subtlety" and impossible solutions*. Philosophia Mathematica. s2–4, no. 2 (1989): 195–216.
4 Penrose R. *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. London: Random House, 2005. Перевод А. Логунова и Э. Эпштейна.
5 Feynman R. P. *The Character of Physical Law*. London: Penguin Books, 1992.
6 Bacciagaluppi G., Valentini A. *Quantum Theory at the Crossroads: reconsidering the 1927 Solvay Conference*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

7 Wigner E. P. *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard Courant Lecture in Mathematical Sciences delivered at New York University, May 11, 1959*. Communications on Pure and Applied Mathematics. 13, no. 1 (1960): 1–14. Перевод Ю. Данилова.

8 Baez J. *The octonions*. Bulletin of the American Mathematical Society. 39, no. 2 (2002): 145–205.

9 Altmann S. L. *Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal*. Mathematics Magazine. 62, no. 5 (1989): 291–308.

10 Bayley M. *Alice's adventures in algebra: Wonderland solved*. New Scientist, 19 December 2009.

11 Мелани Бэйли, электронное письмо автору от 22 апреля 2020 года.

12 Isaacson W. *Einstein: his life and universe*. New York: Simon & Schuster, 2007.

13 Halpern P. *Einstein's Dice and Schrödinger's Cat: how two great minds battled quantum randomness to create a unified theory of physics*. New York: Basic Books, 2016.

14 *Graduate Mathematics, Michael Atiyah, From Quantum Physics to Number Theory [2010]*, 2015, *www.youtube.com/watch?v=zCCxOE44M_M*.

15 *Proceedings of the International Electrical Congress Held in the City of Chicago, August 21st to 25th, 1893*. New York, American Institute of Electrical Engineers, 1894, *http://archive.org/details/proceedingsinte01chicgoog*.

16 *Modern Jove hurls lightning at will; million-horse-power forked tongues crackle and flash in laboratory. To perfect arresters Dr. Steinmetz's artificial bolts shatter wood, and wire vanishes in dust*. The New York Times, 3 March 1922.

17 *Letters to the Editor*. LIFE magazine, May 14, 1965: 27 (Time Inc., 1965).

18 Packard D. et al. *The HP Way: how Bill Hewlett and I built our company*. New York: Harper Business, 1995.

Глава 7. **Статистика.** История улучшений

1 Sutherland I. *John Graunt: a tercentenary tribute*. Journal of the Royal Statistical Society, Series A. 126, no. 4 (1963): 537.

2 Roser M. et al. *Life expectancy*. Our World in Data, 23 May 2013.

3 *From the height of this place*. Official Google Blog, 2009.

4 *Timeline of statistics*, *www.statsref.com/timeline.pdf*.

5 Galton F. *Eugenics: its definition, scope and aims*. American Journal of Sociology. 10, no. 1 (1904): 45–50.
6 Shaw G. B. *Lecture to the Eugenics Education Society*. Daily Express, 4 March 1910.
7 Churchill W. *Asquith Papers, MS 12, Folios 224–8*, 10 December 1910.
8 Gould S. J. *The Mismeasure of Man, revised and expanded*. New York: Norton, 1996.
9 Desmond A. J., Moore J. R. *Darwin's Sacred Cause: race, slavery and the quest for human origins*. London: Penguin Books, 2013.
10 Saini A. *Superior: the return of race science.* London: 4th Estate, 2020.
11 Galton F. *Vox Populi*. Nature. 75, no. 1949 (1907): 450–51.
12 Galton F. *I. Co-relations and their measurement, chiefly from anthropometric data*. Proceedings of the Royal Society of London. 45, no. 273–279 (1889): 135–45.
13 Galton F. *The history of twins*, 1875, *https://galton.org/essays/1870–1879/galton-1875-history-of-twins.htm.*
14 Scarr S., Hernandez M. *Drowning in plastic: visualising the world's addiction to plastic bottles*. Reuters, 4 September 2019.
15 *The Sick and Wounded Fund.* The Times, 8 February 1855.
16 McDonald L. (ed.) *Florence Nightingale: The Crimean War*. The Collected Works of Florence Nightingale, Vol. 14. Waterloo, Ontario: Wilfrid Laurier University Press, 2010.
17 Maltz M. D. *From Poisson to the present: applying operations research to problems of crime and justice*. Journal of Quantitative Criminology. 12, no. 1 (1996): 3–61.
18 World Health Organization. *Cancer: carcinogenicity of the consumption of red meat and processed meat.*
19 Fisher R. A. et al. *Statistical Methods, Experimental Design, and Scientific Inference.* Oxford [England]; New York: Oxford University Press, 1990.
20 Dorigo T. *Demystifying the Five-Sigma Criterion*. Science 2.0, 14 August 2014.
21 Royal Statistical Society. *Royal Statistical Society concerned by issues raised in Sally Clark case*, news release (23 October 2001), *www.inference.org.uk/sallyclark/RSS.html.*
22 Scheurer V. *Convicted on Statistics?* Understanding Uncertainty.
23 В вашем представлении вероятность моей невиновности (H) равна 30 %, или 0,3. Мы хотим узнать, какова вероятность моей невиновности с учетом улики E. Для этого нам сначала необходимо найти величину $P(E)$, то есть вероятность того, что группа моей крови совпадет с группой крови с места преступ-

ления. Это сумма двух слагаемых. Первое из них — вероятность, с которой они совпадут, если я невиновен и если при этом я действительно невиновен:

$$P(E|H) \times P(H),$$

где $P(E|H)$ — вероятность того, что улика укажет на любого невиновного человека из общей массы: 35 %, или 0,35. Следовательно, наше первое слагаемое: 0,35 × 0,3 = 0,105.

Второе слагаемое — вероятность совпадения в случае, если я не невиновен (она равняется 100 %, или 1) и если при этом я действительно не невиновен, которая, как вы полагаете, составляет 65 %, или 0,65:

$$P(E|\text{не } H) \times P(\text{не } H)$$

У нас получается 1 × 0,65 = 0,65.

Вычислим сумму этих слагаемых, чтобы учесть все возможности: 0,105 + 0,65 = 0,755. Это $P(E)$, вероятность того, что группа моей крови совпадет с группой крови с места преступления. Общая вероятность того, что я невиновен с учетом этой улики, $P(E|H)$, представляет собой комбинацию вашей начальной оценки, вероятности того, что улика укажет на невиновного человека, и $P(E)$, вероятности того, что группа моей крови совпадет с группой крови с места преступления. Она задается уравнением:

$$\mathrm{P(H|E) = P(H) \times P(E|H)/P(E)}$$
$$= 0{,}3 \times 0{,}35/0{,}755 = 0{,}14$$

Это значит, что с учетом улик вы теперь должны считать, что вероятность моей невиновности составляет 14 %.

24 *State v. Spann, 617 A.2d 247, 130 N. J. 484*, CourtListener, 1993, *www.courtlistener.com/opinion/2389693/state-v-spann/.*

25 *State v. Spann.* Casetext, *https://casetext.com/case/state-v-spann-17.*

26 Levenson T. *Newton and the Counterfeiter: the unknown detective career of the world's greatest scientist.* London: Faber, 2010.

27 Newman E. G. V. *The gold metallurgy of Isaac Newton*. Gold Bulletin. 8, no. 3 (1975): 90–95.

28 Box J. F. *Guinness, Gosset, Fisher, and small samples*. Statistical Science. 2, no. 1 (1987): 45–52.

29 Brillinger D. *John W. Tukey: his life and professional contributions*. Annals of Statistics. 30 (2002).

30 Galton F. *Personal identification and description*. Nature. 38 (1888): 173–77, 201–02.

31 Newcomb S. *Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers*. American Journal of Mathematics. 4, no. 1/4 (1881): 39.

32 *From Johnstown flood to research lab — a success story*. The Michigan Alumnus, 28 October 1939.
33 BENFORD F. *The law of anomalous numbers*. Proceedings of the American Philosophical Society. 78, no. 4 (1938): 551–72.

Глава 8. **Теория информации.** История создания современности

1 LOOK B. C. *Gottfried Wilhelm Leibniz*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Spring 2020. Перевод Н. Иванцова.
2 LODDER J. M. *Binary arithmetic: from Leibniz to von Neumann* // HOPKINS B. (ed.) *Resources for Teaching Discrete Mathematics*. Washington DC: Mathematical Association of America, 2009.
3 KRIKKE J. *Digital Dragon: the road to Nirvana runs through the Land of Tao*. CreateSpace, 2017.
4 *Explanation of binary arithmetic (1703)*, *www.leibniz-translations.com/binary.htm.*
5 *Mary Everest Boole, Indian Thought and Western Science in the Nineteenth Century*. The Ceylon National Review, 1901, *http://archive.org/details/indianthoughtwes00bool.*
6 BOOLE G. *An Investigation of the Laws of Thought on which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. London: Walton and Maberly, 1854.
7 VENN J. *I. On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 10, no. 59 (1880): 1–18.
8 SHANNON C. E. *A symbolic analysis of relay and switching circuits*. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. 57, no. 12 (1938): 713–23.
9 GUIZZO E. M. *The essential message: Claude Shannon and the making of information theory*. (Магистерская диссертация, Массачусетский технологический институт, 2003, *https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/39429.*)
10 TURING A. M. *Intelligent machinery*. National Physics Laboratory, 1948.
11 SHANNON C. E. *A mathematical theory of communication*. Bell System Technical Journal. 27, no. 3 (1948): 379–423.
12 WALDROP M. M. *The Dream Machine: J. C. R. Licklider and the revolution that made computing personal*. New York: Penguin, 2001.
13 HARTLEY R. V. L. *Transmission of information*. Bell System Technical Journal. 7, no. 3 (1928): 535–63.

14 *Apollo expeditions to the Moon: Chapter 9.6, https://history.nasa.gov/SP-350/ch-9-6.html.*

15 ANDERS B. *50 Years after 'Earthrise,' a Christmas Eve message from its photographer*. Space.com, 2018.

16 DUNBAR B. *Excerpt from the "Special Message to the Congress on Urgent National Needs"*. NASA, 7 August 2017.

17 BAULERT L. et al. *Coding theory and its applications to communications systems*. JPL Technical Report. No. 3267 (1961).

18 UNITED STATES CONGRESS HOUSE COMMITTEE ON SCIENCE AND ASTRONAUTICS. *1967 NASA Authorization: Hearings, Eighty-Ninth Congress, Second Session, on H. R. 12718 (Superseded by H. R. 14324)*. Washington, DC: US Government Printing Office, 1966.

19 *Engineering the communications system for Apollo 11 — general dynamics, https://gdmissionsystems.com/space/apollo11.*

20 Электронное письмо автору от информационной службы Программы научно-технической информации NASA, 'Re: 19770091020 — design philosophy of ', 20 августа 2020 года.

21 FORNEY G. D. *Coding and its application in space communications*. IEEE Spectrum. 7, no. 6 (1970): 47–58.

22 SAGAN C. *Pale Blue Dot: a vision of the human future in space*. New York: Random House, 1994. Перевод О. Сивченко.

23 *Robert G. Gallager wins the 1999 Harvey Prize, www.ee.ucla.edu/~congshen/robert_gallager.pdf.*

24 GALLAGER R. G. *Low-density parity-check codes*, 1963, *https://web.stanford.edu/class/ee388/papers/ldpc.pdf.*

25 GUIZZO E. *Closing in on the perfect code*. IEEE Spectrum: Technology, Engineering, and Science News, 2004.

26 *Mars Reconnaissance Orbiter, https://mars.nasa.gov/mars-exploration/missions/mars-reconnaissance-orbiter.*

27 BAE J. H. et al. *An overview of channel coding for 5G NR cellular communications*. APSIPA Transactions on Signal and Information Processing. 8 (2019).

28 SHANNON C. E. *Communication theory of secrecy systems*. Bell System Technical Journal. 28, no. 4 (1949): 656–715. Перевод В. Писаренко (с изменениями).

29 SMALL A. W. *The Special Fish Report (1944), www.codesandciphers.org.uk/documents/small/PAGE001. HTM.*

30 COPELAND B. J. *Colossus: The secrets of Bletchley Park's codebreaking computers*. New York: Oxford University Press, 2010.

31 KOENIG W. JR. *Final Report on Project C-43*, 1944.

32 ESPINER T. *GCHQ pioneers on birth of public key crypto*. ZDNet, 2010.

33 Статья NASA более не доступна онлайн, но цитируется и обсуждается в статье KOBLITZ N., MENEZES A. J. *A riddle wrapped in an enigma*, 2015, *https://eprint.iacr.org/2015/1018.*
34 WHEELER J. A. et al. *Information, Physics, Quantum: The Search for Links*. Tokyo, 1989.
35 LLOYD S. *Programming the Universe: a quantum computer scientist takes on the cosmos*. New York: Knopf, 2006.
36 SONI J., GOODMAN R. *A Mind at Play: how Claude Shannon invented the Information Age*. New York: Simon & Schuster, 2017.
37 OBERHAUS D. *Marvin Minsky on making the "most stupid machine of all"*. Vice, 2016.
38 THORP E. O. *The invention of the first wearable computer*. Digest of Papers. Second International Symposium on Wearable Computers (Cat. No.98EX215), 1998: 4–8.
39 ROGERS. *Claude Shannon's cryptography research during World War II and the mathematical theory of communication*. Proceedings of IEEE International Carnahan Conference on Security Technology, 1994: 1–5.
40 HORGAN J. *Claude Shannon: tinkerer, prankster, and father of information theory*. IEEE Spectrum: Technology, Engineering, and Science News, 27 April 2016.
41 SHANNON C. *The Bandwagon (Edtl.)*. IRE Transactions on Information Theory. 2, no. 1 (1956): 3. Перевод В. Писаренко.

Заключение. **Блистающие грани математики**

1 PLATO. *Timaeus, www.gutenberg.org/files/1572/1572-h/1572-h.htm.* Перевод С. Аверинцева.
2 MARKOWSKY G. *Misconceptions about the golden ratio*. College Mathematics Journal. 23, no. 1 (1992): 2–19.
3 CORBUSIER L. *Towards a New Architecture*. New York: Dover, 1986.

CORPUS 805
Научно-популярное издание

СЕРИЯ **ЭЛЕМЕНТЫ 2.0**

МАЙКЛ БРУКС

ИСКУССТВО БОЛЬШЕГО

КАК МАТЕМАТИКА СОЗДАЛА ЦИВИЛИЗАЦИЮ

Главный редактор Варвара Горностаева
Художник Андрей Бондаренко
Редактор Максим Череповский
Научный редактор Константин Кноп
Ответственный за выпуск Ольга Энрайт
Технический редактор Татьяна Полонская
Корректор Вера Андреева
Верстка Марат Зинуллин

Общероссийский классификатор продукции
ОК-034-2014 (КПЕС 2008);
58.11.1 — книги, брошюры печатные

Подписано в печать 08.12.2023. Формат 60×90 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура *OriginalGaramondC*
Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,0
Тираж 2000 экз. Заказ № 6723.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО "Тверской полиграфический комбинат"
170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.
Телефон: (4822) 44-5203, 44-5034, телефон/факс: (4822) 44-4215
Home page — www.tverk.ru.
Электронная почта (E-mail) — sales@tverpk.ru

Произведено в Российской Федерации в 2024 г.
Изготовитель — ООО "Издательство АСТ"

ООО "Издательство АСТ"
129085, г. Москва, Звездный бульвар, дом 21, строение 1,
комната 705, пом. I, 7 этаж
Контактный адрес электронной почты: ask@ast.ru

"Баспа Аста" деген ООО
129085, Мәскеу қ., Звёздный бульвары, 21-үй, 1-құрылыс,
705-бөлме, I жай, 7-қабат
Біздің электрондық мекенжайымыз: ask@ast.ru

Интернет-магазин: www.book24.kz
Импортер в Республику Казахстан ТОО "РДЦ-Алматы"
Дистрибьютор и представитель по приему претензий
на продукцию в Республике Казахстан: ТОО "РДЦ-Алматы"

Интернет-дүкен: www.book24.kz
Қазақстан Республикасындағы импорттаушы "РДЦ-Алматы" ЖШС
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша
арыз-талаптарды қабылдаушының өкілі "РДЦ-Алматы" ЖШС
050039 Алматы қ., Домбровский көш., 3 "а", литер Б, офис 1
Тел.: +7 (727) 251-59-89, 90, 91, 92, факс: +7 (727) 251-58-12, доб. 107
E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген

По вопросам оптовой покупки книг обращаться по адресу:
123112 г. Москва, Пресненская наб., д. 6, строение 2, БЦ "Империя"
Тел.: +7 (499) 951-60-00, доб. 574
E-mail: opt@ast.ru

12+

Если вы когда-либо задавались вопросом, зачем нужна была математика в школе и каковы ее заслуги, вы найдете ответ на него здесь.
ИЭН СТЮАРТ

Какова движущая сила развития человеческой цивилизации? В равной степени познавательная и развлекательная, книга “Искусство большего” отправляет нас в путешествие сквозь века, показывая, как математика играла решающую роль в эволюции нашего образа жизни. С тех пор как Джаред Даймонд написал “Ружья, микробы и сталь”, мир еще не видел столь глубокого и убедительного анализа того, как мы оказались в нашей сегодняшней действительности.
ЛЕОНАРД МЛОДИНОВ

Математика уникальна тем, что полученные прежде результаты не меняются со временем. Эта книга — не только страстное признание в любви к математике, но и предложение оценить по достоинству ее ключевую роль в истории человечества.
МАРИО ЛИВИО

9 785171 480813

Многие из нас привыкли считать математику не более чем школьным предметом, к тому же зубодробительным, но какова на деле ее история? Каким образом люди выстраивали структуру этой науки? Как она непрерывно изменяла нашу цивилизацию? Майкл Брукс блестяще и в доступной форме описывает по-настоящему живую историю этого на первый взгляд безжизненного и сухого направления науки. Перед читателем предстает математика вдохновляющая, увлекательная и человечная.

Книжные проекты
Дмитрия Зимина