ВМК МГУ – ШКОЛЕ

СБОРНИК ЗАДАЧ
по углубленному курсу

ЕГЭ
ОЛИМПИАДЫ
ЭКЗАМЕНЫ в ВУЗ

МАТЕМАТИКА

Лаборатория ЗНАНИЙ

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ
по углубленному курсу

Учебно-методическое пособие

Под редакцией
М. В. Федотова

6-е издание

Москва
Лаборатория знаний

УДК 514
ББК 22.151.0я721.9
М34

Математика. Сборник задач по углубленному курсу : учебно-методическое пособие / Б. А. Будак, Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов [и др.] ; под ред. М. В. Федотова. — 6-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2024. — 324 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе).
М34

ISBN 978-5-93208-389-5

Настоящее пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ и задач Единого государственного экзамена. Пособие содержит теоретический материал и подборку задач.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче Единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 514
ББК 22.151.0я721.9

Учебное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Будак Борис Александрович
Золотарёва Наталья Дмитриевна
Попов Юрий Александрович и др.

МАТЕМАТИКА.
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО УГЛУБЛЕННОМУ КУРСУ
Учебно-методическое пособие

Корректор *Н. И. Коновалова*

Подписано в печать 04.07.23. Формат 70 × 100/16.
Усл. печ. л. 26,65. Заказ 4460

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д.1
Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpd.ru, тел. 8(499)270-73-59

ISBN 978-5-93208-389-5

Оглавление

От редактора

Уважаемый читатель! Вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ – школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. Сначала были созданы пособия для очных подготовительных курсов, затем были разработаны электронные версии учебников, используемые при дистанционном обучении. На основе этого опыта подготовлена серия книг для старшеклассников, одной из которых и является настоящее пособие.

Сейчас изданы или готовятся к изданию пособия по алгебре, геометрии и физике. В дальнейшем предполагается продолжить эту серию силами преподавателей информатики подготовительных курсов факультета ВМК МГУ и выпустить аналогичные пособия по информатике.

По каждому предмету должны выйти два пособия – базовый курс и курс, содержащий сложные задачи части С единого государственного экзамена и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М. В. Ломоносова). Базовый курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач ЕГЭ частей А, В и некоторых задач части С, а также первой половины задач вариантов вступительных экзаменов в вузы. Второе пособие содержит задачи, научившись решать которые, Вы сможете решать все задачи ЕГЭ и все или почти все задачи олимпиад и вступительных экзаменов в вузы (за отведённое время можно просто физически не успеть решить все задачи).

Отличительной особенностью наших пособий является **спиралевидная схема подачи материала**, когда каждая тема повторяется несколько раз, причём каждый раз на более сложном уровне, чем в предыдущий. Это позволяет не забывать пройденный материал и постепенно подходить к сложным задачам.

Директор Учебного центра
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики
М. В. Федотов

Предисловие

Предлагаемый «Углублённый курс» является естественным продолжением «Базового курса» по математике и предполагает свободное владение методами и приёмами из «Базового курса».

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения. Задачи в разделах расположены по принципу *«от простого – к сложному»*. Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

Для задач из материалов ЕГЭ указан соответствующий уровень сложности:
А[1] – задачи базового уровня сложности;
В – задачи повышенного уровня сложности;
С – задачи высокого уровня сложности.

Запись (У) после номера задачи означает, что задача предлагалась на устном экзамене по математике в МГУ.

Для задач письменного экзамена сначала идёт сокращённое название факультета, затем – год, в котором была задача (если после года в скобках идёт цифра 1 или 2, это значит, что эта задача была на весенней олимпиаде факультета; на мехмате и физфаке весной проходили две олимпиады; на ВМК, геологическом, химическом, географическом факультетах и факультете почвоведения – одна олимпиада весной). После точки идёт номер задачи в варианте (обычно, чем больше номер, тем сложнее задача в данном варианте). Например, (ВМК-98.3) означает, что задача была в 1998 году летом на вступительных экзаменах на факультете ВМК, третьим номером в варианте, а (М/м-97(2).1) означает, что задача была в 1997 году на второй весенней олимпиаде механико-математического факультета первым номером в варианте.

Сокращения названий факультетов, принятые в данной книге

М/м – механико-математический факультет,
ВМК – факультет вычислительной математики и кибернетики (.Б – отделение бакалавров по прикладной математике, .И – отделение бакалавров по информационным технологиям),
Физ – физический факультет,
Хим – химический факультет,
ВКНМ – Высший колледж наук о материалах,
ФНМ – факультет наук о материалах (до 2000 года – ВКНМ)
Биол – биологический факультет,
Почв – факультет почвоведения,
Геол – геологический факультет (.ОГ – отделение общей геологии),
Геогр – географический факультет,

[1] До 2009 года включительно задания части А представляли собой задания базового уровня сложности с выбором одного правильного ответа из четырёх предложенных. Начиная с 2010 года, части А и В объединены и представляют собой задания с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Экон – экономический факультет (.М – отделение менеджмента, .К – отделение экономической кибернетики, .В – вечернее отделение),
ВШБ – Высшая школа бизнеса,
Псих – факультет психологии,
Фил – философский факультет,
Филол – филологический факультет,
Соц – социологический факультет,
ИСАА – Институт стран Азии и Африки,
ФГУ – факультет государственного управления (отделение «Антикризисное управление»),
ЧФ – Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь).

Используемые обозначения

$\{a\}$ – множество, состоящее из одного элемента a;
$\cup$ – объединение; $\cap$ – пересечение; $\emptyset$ – пустое множество;
$\in$ – знак принадлежности; $\subset$ – знак включения подмножества;
$\forall$ – для любого; $A\backslash B$ – разность множеств A и B;
$\Longrightarrow$ – следовательно; $\Longleftrightarrow$ – тогда и только тогда;
$\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел;
ОДЗ – область допустимых значений;

$\left\{\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right.$ – знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;

$\left[\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right.$ – знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Необходимо отметить, что в формулировках задач параллельно с математически более корректной терминологией типа «длина отрезка AB равна 5» и записью $|AB| = 5$ используется школьная терминология типа «отрезок AB равен 5» и запись $AB = 5$.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I. Алгебра

1. Элементы теории чисел

1.1. Целые числа. Делимость и остатки

Теоретический материал

При решении задач на целые числа необходимо знать следующие факты:

- любое натуральное число единственным образом (с точностью до перестановки сомножителей) может быть представлено в виде произведения простых чисел;
- при делении натурального числа p на натуральное число q возможны[2] q различных остатков: $0, 1, 2, \ldots, (q-1)$.

Полезно также помнить признаки делимости натуральных чисел:

- при делении на 5 и на 10 число даёт такой же остаток, как и последняя его цифра;
- при делении на 4, 25, 50 и на 100 число даёт такой же остаток, как и число, записанное двумя его последними цифрами;
- при делении на 3 и на 9 число даёт такой же остаток, как и сумма его цифр. Поэтому, если сумма цифр делится на 3 или на 9, то и само число делится на 3 или на 9.

Заметим, что при изучении делимости чисел достаточно работать не с самими числами, а с остатками от деления этих чисел. Все арифметические действия с остатками, кроме деления, повторяют действия с числами, а именно: при сложении чисел складываются остатки, при возведении в степень в эту степень возводятся остатки и т.д.

В задачах, где требуется установить, что какое-то выражение, зависящее от натурального числа n, делится или не делится при всех n на заданное натуральное число, часто используется следующий факт: произведение k последовательных натуральных чисел делится на k.

[2]Иногда бывает удобно рассматривать отрицательные остатки. Например, в качестве остатка при делении числа 15 на 8 можно использовать 7, а можно (-1).

Примеры решения задач

Пример 1. Остатки от деления на 3 чисел m и n равны 1 и 2 соответственно. Каковы остатки от деления на 3:
а) суммы $m+n$;
б) произведения $m \cdot n$?

Решение. Так как $m = 3k+1$, а $n = 3l+2$, то

$$m+n = 3k+3l+3 = 3\cdot(k+l+1).$$

Следовательно, $m+n$ делится на 3 нацело. Рассмотрим теперь произведение

$$mn = (3k+1)\cdot(3l+2) = 9kl+3l+6k+2 = 3(3kl+l+2l)+2,$$

то есть при делении на 3 произведения mn остаток равен 2.

Ответ. а) 0, б) 2.

Пример 2. Доказать, что для всех натуральных n выражение (n^3+3n^2+2n) делится на 6.

Решение. Так как $n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2)$ есть произведение трёх последовательных чисел, которое всегда делится и на 2 и на 3, то n^3+3n^2+2n делится на 6.

Пример 3. Дано число 2^{1995}. Найти
а) последнюю цифру этого числа,
б) остаток от деления на 7.

Решение. а) Представим исходное число в виде

$$2^{1995} = 2^{4\cdot 498+3} = 16^{498}\cdot 8.$$

Поскольку 16 в любой натуральной степени оканчивается на 6, а $6\cdot 8 = 48$, последняя цифра числа 2^{1995} равна 8.

б) Рассмотрим остатки степеней двойки от деления на 7:

- 2^1 при делении на 7 даёт остаток 2,
- 2^2 при делении на 7 даёт остаток 4,
- 2^3 при делении на 7 даёт остаток 1.

Эти остатки повторяются с периодом $T = 3$. Так как $1995 = 3\cdot 665$, то 2^{1995} при делении на 7 даёт остаток 1.

Ответ. а) 8, б) 1.

Задачи

1. Доказать, что число $n^5 - n$ делится на 30.
2. Доказать, что число $n^3 - 7n$ делится на 6.
3. Доказать, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каких целых n.
4. Сумма $m^2 + n^2$ делится на 3. Доказать, что она делится на 9.
5. Доказать, что число $n(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 24.
6. Доказать, что $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48 при нечётном n.
7. При каких натуральных n число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ не делится на 120?
8. Доказать, что сумма кубов трёх последовательных чисел делится на 9.
9. Цифры трёхзначного числа переписаны в обратном порядке. Доказать, что разность между исходным и полученным числом делится на 9.
10. Докажите, что $43^{43} - 17^{17}$ делится на 10.
11. Делится ли на 7 число $1991^{1917} + 1917^{1991}$?
12. Доказать, что для всех натуральных n выражение $\left(8^{2n-1} - 1\right)$ делится на 7.
13. Доказать, что $5^n - 3^n + 2n$ делится на 4.
14. Найти все натуральные n, при которых число $n \cdot 2^n + 1$ делится на 3.
15. Доказать, что число $\underbrace{11\ldots1}_{81}$ делится на 81.
16. Доказать признак делимости на 11: «число n кратно 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр с чередующимися знаками кратна 11».
17. При каких n число $M = \underbrace{1717\ldots17}_{2n \text{ цифр}}$ делится на 33?

1.2. Уравнения в целых числах

Теоретический материал и примеры решения задач

Приведём основные приёмы решения уравнений в целых числах.

- Разложение на множители с последующим перебором возможных вариантов.

  Пример 1. Решить в натуральных числах уравнение $2xy = x^2 + 2y$.

  Решение. $2xy = x^2 + 2y \iff y^2 - 2y = (x-y)^2 \iff$

  $$\iff (y-1)^2 - (x-y)^2 = 1 \iff (2y - x - 1)(x - 1) = 1.$$

  Следовательно, оба множителя равны единице и $x = 2,\ y = 2$.

  Ответ. $(2; 2)$.

Пример 2. Решить в целых числах уравнение $2^x + 1 = y^2$.

Решение. Если $x < 0$, то $0 < 2^x < 1$ и $y^2 \notin \mathbb{Z}$. При $x = 0$ также $y \notin \mathbb{Z}$. Пусть $x > 0$, тогда $2^x = (|y| - 1)(|y| + 1)$, следовательно, $|y| - 1 = 2^p$, $|y| + 1 = 2^q$ и $0 \le p < q$. Откуда $2^q - 2^p = 2 \iff 2^p(2^{q-p} - 1) = 2$. Возможные варианты:

а) $\begin{cases} 2^p = 2, \\ 2^{q-p} - 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 1, \\ q - p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 1, \\ q = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm 3, \\ x = 3. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2^p = 1, \\ 2^{q-p} - 1 = 2 \end{cases} \iff \emptyset.$

Ответ. $(3;3)$, $(3;-3)$.

- Использование делимости целых чисел.

Пример 3. Доказать, что уравнение $y^2 = 5x^2 + 6$ не имеет решений в целых числах.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$y^2 - x^2 = 4x^2 + 6 \iff (y - x)(y + x) = 4x^2 + 6.$$

Так как правая часть уравнения является чётным числом, то и левая часть также должна быть чётным числом. Если $(y + x)$ чётно, то $(y - x)$ тоже чётно, и наоборот. Следовательно, левая часть уравнения делится на 4, но правая часть на 4 не делится. Значит уравнение не имеет решений.

- Использование оценок с последующим перебором возможных значений.

Пример 4. Решить в натуральных числах уравнение $2xy + 4z = zx^2 + 4y^2z$.

Решение. Вынесем z за скобки:

$$z(x^2 + 4y^2 - 4) = 2xy.$$

Выражение в скобках не равно нулю, так как иначе $2xy = 0$, что неверно при $x, y \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$z = \frac{2xy}{x^2 + 4y^2 - 4}.$$

Так как $z \in \mathbb{N}$, то $z \ge 1$, то есть

$$\frac{2xy}{x^2 + 4y^2 - 4} \ge 1 \iff x^2 + 4y^2 - 4 - 2xy \le 0 \iff (x - y)^2 + 3y^2 \le 4.$$

Откуда видно, что y не может быть больше 1, а при $y = 1$ получаем

$$(x - 1)^2 \le 1.$$

Следовательно, $x = 1$ либо $x = 2$.

Ответ. $(1;1;2)$, $(2;1;1)$.

• Рассмотрение остатков.

Пример 5. Решить в целых числах уравнение $11x + 7y = 3$.

Решение. Выразив y через x, получим $y = \dfrac{3 - 11x}{7}$. Представим x в виде

$$x = 7k + r,\ k \in \mathbb{Z},\ r = 0, 1, ..., 6.$$

Тогда $y = -11k + \dfrac{3 - 11r}{7}$. Для того, чтобы y было целым надо, чтобы $(3 - 11r)$ делилось на 7. В результате перебора всех значений $r = 0, 1, ..., 6$ оказывается, что подходит только $r = 6$. Следовательно, $x = 7k + 6$, $k \in \mathbb{Z}$, $y = -11k - 9$.

Ответ. $(7k + 6; -11k - 9)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. Решить в целых числах уравнение $xy + 1 = x + y$.
2. Решить в целых числах уравнение $x(x + 1) = y^2$.
3. Решить в целых числах уравнение $2x^2 + xy - y^2 - 7x - 4y = 1$.
4. Доказать, что уравнение $x^2 - y^2 = 1982$ не имеет решений в целых числах.
5. Доказать, что уравнение $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ не имеет решений в целых числах.
6. Доказать, что уравнение $x^2 = 3y^2 + 17$ не имеет решений в целых числах.
7. Решить в целых числах уравнение $3^y = 1 + x^2$.
8. Решить в целых числах уравнение $\sqrt{x - \dfrac{1}{5}} + \sqrt{y - \dfrac{1}{5}} = \sqrt{5}$.
9. Решить в целых числах уравнение $3(x - 3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$.
10. Решить в целых числах уравнение $x^2 - 4xy = 4y^2$.
11. Решить в целых числах уравнение $xy = x + y$.
12. Решить в натуральных числах уравнение $xz + 4y = yx^2 + z^2y$.
13. Решить в натуральных числах уравнение $2^x - 3^y = 1$.
14. Решить в целых числах уравнение $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.
15. Решить в натуральных числах уравнение $3^x - 2^y = 1$.
16. Решить в натуральных числах уравнение $x + y + z = xyz$.
17. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

1.3. Смешанные задачи на целые числа

Теоретический материал

При решении смешанных задач пригодятся методы и приёмы решения задач на целые числа, приведённые в предыдущих разделах, а именно: разложение на множители с последующим перебором возможных вариантов, использование делимости целых чисел, рассмотрение остатков, использование оценок с последующим перебором возможных значений.

Также в этот раздел включены задачи, связанные с исследованием сократимости дробей вида $a(n)/b(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Существует несколько способов решения таких задач.

- Предполагается сократимость дроби на натуральное q, $q \neq 1$. Этот факт переписывается в виде двух равенств для числителя и знаменателя. Затем исключается исходная переменная n и получается равенство для q, из которого находятся возможные значения q.

- Заданная дробь $\dfrac{a(n)}{b(n)}$ представляется в виде
$$\frac{a(n)}{b(n)} = c(n) + \frac{d(n)}{b(n)},$$
где выражения $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ принимают целочисленные значения. Поскольку натуральное число k является общим делителем выражений $a(n)$ и $b(n)$ тогда и только тогда, когда оно является общим делителем выражений $d(n)$ и $b(n)$, вопрос о сократимости исходной дроби сводится к исследованию сократимости дроби $d(n)/b(n)$. В случаях, когда указанное представление исходной дроби является выделением целой части или когда $d(n)$ не зависит от n (то есть является целым числом), исследование сократимости новой дроби $d(n)/b(n)$ является, как правило, менее трудоёмким, чем исследование сократимости исходной дроби $a(n)/b(n)$.

Напомним также, что если числа a и b представлены в виде произведения простых множителей
$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{n_l}, \qquad b = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{m_l},$$
то наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общие кратное (НОК) этих чисел вычисляются следующим образом:
$$\text{НОД}(a,b) = p_1^{min(n_1,m_1)} \cdot p_2^{min(n_2,m_2)} \cdot \ldots \cdot p_l^{min(n_l,m_l)},$$
$$\text{НОК}(a,b) = p_1^{max(n_1,m_1)} \cdot p_2^{max(n_2,m_2)} \cdot \ldots \cdot p_l^{max(n_l,m_l)}.$$

Замечание. $\text{НОД}(a,b) \cdot \text{НОК}(a,b) = a \cdot b$.

Примеры решения задач

Пример 1. При каких $n \in \mathbb{Z}$ выражение $\dfrac{3n+2}{n-1}$ является целым числом?

Решение. Так как $\dfrac{3n+2}{n-1} = \dfrac{3n-3+5}{n-1} = 3 + \dfrac{5}{n-1}$, то исходное число будет целым, только если целым будет число $\dfrac{5}{n-1}$, что возможно при $n-1 \in \{\pm 5, \pm 1\}$.

Ответ. $n = -4;\ 0;\ 2;\ 6$.

Пример 2. Доказать, что дробь $\dfrac{n^2-n+1}{n^2+1}$ несократима ни при каком n.

Решение. Преобразуем исходную дробь

$$\frac{n^2-n+1}{n^2+1} = 1 - \frac{n}{n^2+1}.$$

Если сократима дробь $\dfrac{n^2-n+1}{n^2+1}$, то сократима дробь $\dfrac{n}{n^2+1}$. Если сократима дробь $\dfrac{n}{n^2+1}$, то сократима дробь $\dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n}$ и сократима дробь $\dfrac{1}{n}$, что неверно. Следовательно, исходная дробь несократима.

Пример 3. При каких натуральных n число n^4+4 простое?

Решение. Так как

$$n^4+4 = n^4+4n^2+4-4n^2 = (n^2+2)^2 - 4n^2 = (n^2+2n+2)(n^2-2n+2),$$

то n^4+4 – простое число, только если $n^2+2n+2 = 1$ или $n^2-2n+2 = 1$. Первое уравнение решений в натуральных числах не имеет. Решением второго уравнения является $n=1$, в этом случае выражение n^4+4 равно 5, то есть является простым числом.

Ответ. $n = 1$.

Пример 4. Является ли полным квадратом число $M = \underbrace{11\ldots1}_{2n\text{ цифр}} - \underbrace{22\ldots2}_{n\text{ цифр}}$?

Решение. Так как $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}} = \dfrac{10^n-1}{9}$, то

$$M = \frac{10^{2n}-1}{9} - 2\cdot\frac{10^n-1}{9} = \frac{10^{2n}-2\cdot10^n+1}{9} = \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2.$$

Так как 10^n-1 делится нацело на 3, то исходное число является полным квадратом.

Ответ. Да.

Задачи

1. Определить p, если p, $p+10$, $p+14$ – простые числа.

2. Числа p и q – простые, $p, q > 3$. Доказать, что $p^2 - q^2$ делится на 24.

3. При каких целых q существует целое решение уравнения $x^3 + 2qx + 1 = 0$?

4. Доказать, что если две положительные несократимые дроби в сумме равны 1, то их знаменатели равны.

5. Доказать, что число $n^4 + 64$ составное при любом $n \in \mathbb{N}$.

6. Доказать, что число $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ является точным квадратом при любом натуральном n.

7. Покажите, что всякое нечётное число можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

8. Доказать, что $2^{3^{1995}} + 3^{1995^3}$ – составное число.

9. Доказать, что если число n не является степенью двойки, то число $k^n + l^n$ – составное (n, k, l – натуральные числа; $n, k, l > 1$).

10. Известно, что a, b, c – целые числа, и $a + b = c$. Доказать, что $a^4 + b^4 + c^4$ есть удвоенный квадрат целого числа.

11. Пусть p и q – два последовательных простых числа. Может ли их сумма быть простым числом?

12. Сумма $k^2 + m^2 + n^2$ делится на 4. Доказать, что числа k, m, n – чётные.

13. Найти все целые n, при которых дробь $\dfrac{22n+3}{26n+4}$ сократима.

14. Доказать, что дробь $\dfrac{2n^2-1}{n+1}$ несократима ни при каком n.

15. При каких натуральных n сократима дробь $\dfrac{n^3-n^2-3n}{n^2-n+3}$?

16. Доказать, что число, состоящее из n $(n > 1)$ одинаковых цифр, не является точным квадратом.

17. Могут ли числа $11, 12, 13$ быть членами, не обязательно последовательными, одной геометрической прогрессии?

18. Решить в целых числах уравнение $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}}} = y$ (всего 1992 корня).

1.4. Рациональные и иррациональные числа

Теоретический материал

Рациональным числом называется действительное число, представимое в виде несократимой дроби p/q, где p – целое число, q – натуральное число.

Иррациональным числом называется действительное число, непредставимое в виде несократимой дроби p/q.

Замечание 1. Любое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби, а любое иррациональное число — в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Замечание 2. Сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел всегда является рациональным числом. Сумма, разность, произведение и частное двух иррациональных чисел может оказаться как рациональным, так и иррациональным числом.

Доказательство иррациональности числа, как правило, проводится от противного. Предполагается, что заданное число можно представить в виде несократимой дроби, после чего полученное равенство с помощью алгебраических преобразований приводится к уравнению в целых числах, не имеющему решений.

Утверждение 1. Если числа $x, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, а $y = \sqrt[n]{x} \notin \mathbb{N}$, то y – иррационально.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $y = \sqrt[n]{x} = \dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь, тогда $\dfrac{p^n}{q^n} = x$. Пусть q_1 – делитель числа q и q_1 – простое число. Так как p^n делится на q^n, то p делится на q_1. Следовательно, дробь $\dfrac{p}{q}$ сократима на q_1, а это противоречит нашему предположению. Значит, y – иррационально.

Утверждение 2. Если у натуральных чисел $k, n \neq 1$ есть несовпадающие простые множители, то $\log_k n$ – число иррациональное.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\log_k n = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$, и пусть k делится на $l \in \mathbb{N}$, а n не делится. Тогда $k^{p/q} = n \iff k^p = n^q$, что невозможно, так как одна часть равенства делится на l, а другая – нет.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать иррациональность числа $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

Решение. Пусть $\sqrt{5} - \sqrt{3} = r \in \mathbb{Q}$. Тогда $r^2 = 8 - 2\sqrt{15}$ и, следовательно, $\sqrt{15} = \dfrac{8 - r^2}{2} \in \mathbb{Q}$. Но $\sqrt{15}$ иррационально согласно утверждению 1. Значит, наше предположение о том, что $\sqrt{5} - \sqrt{3} = r \in \mathbb{Q}$ неверно.

Пример 2. Доказать, что число $\sin 10^\circ$ иррационально.

Решение. Из формулы синуса тройного угла получим

$$\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ \iff \sin 10^\circ = \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\sin^3 10^\circ.$$

Предположим, что $\sin 10^\circ$ – рациональное число, то есть $\sin 10^\circ = \dfrac{p}{q}$, где $\dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь. Тогда

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\cdot\frac{p^3}{q^3} \iff 6pq^2 = q^3 + 8p^3.$$

Из последнего равенства следует, что q чётное, то есть $q = 2n$. Тогда

$$3pn^2 = n^3 + p^3 \iff n^2(3p - n) = p^3.$$

Следовательно, $p^3 \vdots n^2$, а так как дробь $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p}{2n}$ несократима, то $n = 1$. Поскольку полученное в этом случае уравнение для p

$$3p - 1 = p^3 \iff p(3 - p^2) = 1$$

решений в целых числах не имеет, число $\sin 10^\circ$ нельзя представить в виде несократимой дроби $\dfrac{p}{q}$, и, значит, оно является иррациональным.

Пример 3. Доказать, что число $0,1010010001...$ является иррациональным.

Решение. Пусть оно рациональное. Тогда в его десятичной записи есть период из k цифр. Но в записи числа сколь угодно далеко от начала встречаются k нулей подряд. Следовательно, в периоде содержатся одни нули, а это противоречит условию.

Задачи

1. Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ иррационально.
2. Доказать, что число $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ иррационально.
3. Является ли рациональным число $\sqrt{3 - \sqrt{4 + \sqrt{12}}} + \sqrt{3 + \sqrt{4 - \sqrt{12}}}$?
4. Один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$. Найти p и q, если известно, что они рациональные.
5. Является ли рациональным число $\sin 25^\circ$?
6. Определить первые 4 знака после запятой у числа $\sqrt[7]{0,9999}$.
7. Решить в рациональных числах уравнение $2^x = 3^y$.

8. Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным?

9. Доказать, что число $0,123456789101112...$ (после запятой выписаны все натуральные числа подряд) является иррациональным.

10. Доказать, что между любыми двумя различными иррациональными числами есть рациональное число.

11. Доказать, что $\cos 2^\circ$ иррациональное число.

12. Доказать, что $\cos 1^\circ$ и $\sin 1^\circ$ есть иррациональные числа.

13. Определить первый знак после запятой у числа $\sin 80^\circ$.

14. Указать хотя бы одно рациональное число a такое, что $\left|\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}} - a\right| < 1$.

15. Доказать, что уравнение $x^3 + x^2y + y^3 = 0$ не имеет ненулевых рациональных решений.

1.5. Сравнение чисел

Теоретический материал

При решении задач этого раздела будут полезными следующие приёмы.

- В случае сравнения однотипных числовых выражений следует алгебраическими преобразованиями привести исходную задачу к сравнению двух целых чисел.
- При сравнении разнотипных числовых выражений a и b подбирают такое число c, которое сравнимо и с a, и с b. Например, для обоснования неравенства $a > b$ находят число c такое, что $a >$ с и с $> b$.
- Иногда бывает удобно ввести некоторую вспомогательную функцию $f(x)$ и заменить исходную задачу сравнения на сравнение значений функции $f(x)$ при заданных значениях аргумента.

Также могут оказаться полезными следующие неравенства:

- $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \geq 2$, где $a \neq 0$ (оценка суммы двух взаимно обратных величин), равенство достигается при $a = \pm 1$;
- $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, где $x, y \geq 0$, равенство достигается при $x = y$ (среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического);
- $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;
- $(1+x)^n \geq 1 + nx$, где $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}_0$ (неравенство Бернулли).

При сравнении логарифмов может быть полезным следующее утверждение.

Утверждение 1. $\log_n(n+1)$ при $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ убывает с ростом n.

Доказательство. Представим $\log_n(n+1)$ в виде

$$\log_n(n+1) = \log_n\left(\frac{n+1}{n}\cdot n\right) = \log_n\left(\frac{n+1}{n}\right) + 1 = \log_n\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1.$$

Для строгого доказательства убывания первого слагаемого достаточно записать его в виде дроби

$$\log_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lg n},$$

где числитель убывает, а знаменатель возрастает. Таким образом, первое слагаемое убывает, а, следовательно, убывает и сумма. Что и требовалось доказать.

Примеры решения задач

Пример 1. Что больше: $\log_4 5$ или $\log_{1/2} 1/3$?

Решение. $\log_{1/2} 1/3 = \log_2 3 > \log_3 4 > \log_4 5$.

Ответ. $\log_4 5 < \log_{1/2} 1/3$.

Пример 2. Сравнить числа $\sqrt[200]{2}$ и $1,006$.

Решение. Составим формальное неравенство и возведём обе его части в степень 200:

$$2 \vee 1,006^{200}.$$

Оценим правую часть с помощью неравенства Бернулли:

$$(1+0,006)^{200} \geq 1 + 200\cdot 0,006 = 2,2.$$

То есть $1,006^{200} \geq 2,2 > 2$ и, следовательно, $\sqrt[200]{2} < 1,006$.

Ответ. $\sqrt[200]{2} < 1,006$.

Пример 3. Что больше: $\sin\cos 1^\circ$ или $\cos\sin 1^\circ$?

Решение. Покажем, что $\sin\cos 1^\circ < \cos 1^\circ < \cos\sin 1^\circ$.

1) Неравенство $\sin\cos 1^\circ < \cos 1^\circ$ следует из того, что в первой четверти $\sin x < x$.

2) Неравенство $\cos 1^\circ < \cos\sin 1^\circ$ выполняется потому, что $1^\circ > \sin 1^\circ$, а в первой четверти $\cos x$ убывает.

Ответ. $\sin\cos 1^\circ < \cos\sin 1^\circ$.

Замечание. Неравенство $\sin\cos x < \cos\sin x$ справедливо при всех x.

Пример 4. Сравнить числа $\log_2 5$ и $\sqrt{5}$.

Решение. Оба числа (проверьте самостоятельно) лежат на отрезке $[2;3]$. Сравним их с серединой отрезка, то есть с $\dfrac{5}{2}$:

$$\log_2 5 \vee \frac{5}{2} \iff 2\log_2 5 \vee 5 \iff \log_2 25 < \log_2 32;$$

$$\sqrt{5} \vee \frac{5}{2} \iff 2 \vee \sqrt{5} \iff 4 < 5.$$

Следовательно, числа $\log_2 5$ и $\sqrt{5}$ лежат на отрезке $\left[2\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$. Сравним их с серединой этого отрезка, то есть с $\dfrac{9}{4}$:

$$\log_2 5 \vee \frac{9}{4} \iff 4\log_2 5 \vee 9 \iff \log_2 625 > \log_2 512;$$

$$\sqrt{5} \vee \frac{9}{4} \iff 4\sqrt{5} \vee 9 \iff 80 < 81.$$

Следовательно, $\log_2 5 > \dfrac{9}{4} > \sqrt{5}$.

Ответ. $\log_2 5 > \sqrt{5}$.

Пример 5. Доказать, что $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} < 2\sqrt[3]{3}$.

Решение. Возведём обе части неравенства в куб:

$$2 + 3\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{32} + 4 < 24 \iff 3(2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}) < 18 \iff \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} < 3.$$

Обозначим $f(t) = t^2 + t - 3$, $t_0 = \sqrt[3]{2}$ и покажем, что $f(t_0) < 0$.

Неравенство $f(t) < 0$ справедливо при $t \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$. Докажем, что $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt[3]{2} < \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Поскольку $\sqrt[3]{2} > 0$, левое неравенства очевидно. Правое неравенство равносильно неравенству $2\sqrt[3]{2} < \sqrt{13} - 1$. Возведём обе части в куб:

$$16 < 13\sqrt{13} - 3\cdot 13 + 3\sqrt{13} - 1 \iff 56 < 16\sqrt{13} \iff 7 < 2\sqrt{13},$$

так как после возведения в квадрат получим очевидное неравенство $49 < 52$. Следовательно, исходное неравенство также справедливо.

Задачи

1. Сравнить числа: $10^{\log_9 3}$ и $7^{\log_4 2}$.
2. Что больше: $\log_4 7$ или $\log_{1/3} 2$?

3. Что больше: $\log_{11} 12$ или $\log_{12} 13$?

4. Сравнить числа: $\log_2 \pi + \log_\pi 2$ и 2.

5. Что больше: $\log_2 5$ или $\log_3 5$?

6. Что больше: $\log_2 3$ или $\log_3 2$?

7. Сравнить числа: $\log_{11} 119$ и $\log_{15} 227$.

8. Сравнить числа: $4^{\sqrt{\log_4 5}}$ и $5^{\sqrt{\log_5 4}}$.

9. Выяснить, что больше: 3^{40} или 4^{30}.

10. Что больше: $\sqrt[9]{9!}$ или $\sqrt[8]{8!}$?

11. Определить знак числа $\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \sin 5$.

12. Какое из чисел больше: $\sqrt{2\cos 2 + 4\cos 1 + 3} - 2\cos 1$ или $\dfrac{1}{2}$?

13. Какой знак имеет число $\lg(\operatorname{arctg} 2)$?

14. Что больше: $\dfrac{\pi}{4}$ или $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{5}{8}$?

15. Что больше: $\sin 3$ или $\sin 3^\circ$?

16. Расположить в порядке возрастания числа: $\sqrt{\dfrac{2}{7}}$, $\sin\dfrac{\pi}{7}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$.

17. Сравнить логарифмы: $\log_2 3$ и $\log_5 8$.

18. Сравнить числа: $\log_3 7$ и $\log_7 27$.

19. Что больше: $2^{\sqrt{3}}$ или $3^{\sqrt{2}}$?

20. Сравнить числа: $\sin 31^\circ$ и $\operatorname{tg} 30^\circ$.

21. Сравнить числа: $\operatorname{tg} 55^\circ$ и $1,4$.

22. Выяснить, что больше $10^{\sqrt{11}}$ или $11^{\sqrt{10}}$.

23. Что больше: $\sqrt[3]{40} + 1$ или $\sqrt[3]{88}$?

24. Сравнить числа: $\log_2 14$ и $\sqrt{15}$.

25. Сравнить числа: $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$.

26. Сравнить два числа: $\dfrac{\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \ldots \cdot \log_3 80}{2\log_3 5 \cdot \log_3 7 \cdot \ldots \cdot \log_3 79}$ и 1.

2. Тригонометрические неравенства, обратные тригонометрические функции

2.1. Основные свойства арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, связанные с преобразованием выражений, содержащих обратные тригонометрические функции. Для решения таких задач достаточно знать определения обратных тригонометрических функций и помнить основные тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y, \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \qquad \operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1+\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2} \cdot \cos\frac{x \mp y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

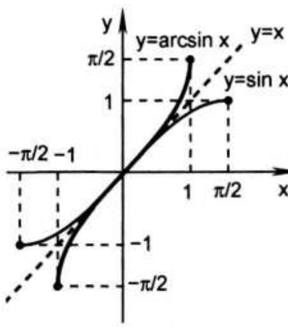
Не забывайте, что тригонометрические формулы справедливы лишь при соответствующих допустимых значениях аргументов.

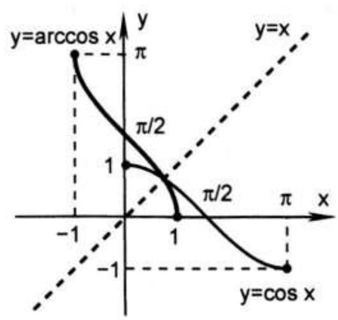
Напомним определения обратных тригонометрических функций:

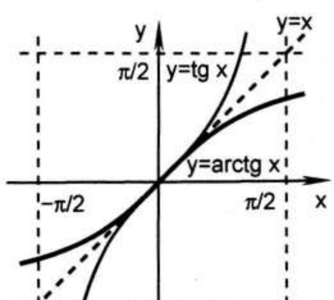
- *арксинусом* числа $x \in [-1;1]$ называется число $y = \arcsin x$, удовлетворяющее двум условиям: $\sin y = x$ и $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

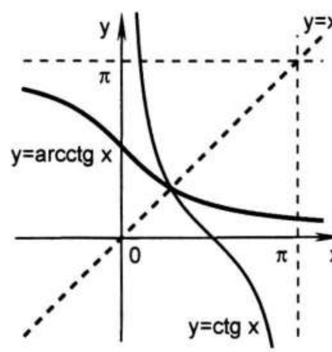
- *арккосинусом* числа $x \in [-1; 1]$ называется число $y = \arccos x$, удовлетворяющее двум условиям: $\cos y = x$ и $y \in [0; \pi]$;
- *арктангенсом* числа $x \in \mathbb{R}$ называется число $y = \operatorname{arctg} x$, удовлетворяющее двум условиям: $\operatorname{tg} y = x$ и $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$;
- *арккотангенсом* числа $x \in \mathbb{R}$ называется число $y = \operatorname{arcctg} x$, удовлетворяющее двум условиям: $\operatorname{ctg} y = x$ и $y \in (0; \pi)$.

График обратной тригонометрической функции симметричен графику основной тригонометрической функции относительно прямой $y = x$ на соответствующей области определения:









Полезно также знать следующие формулы, связанные с обратными тригонометрическими функциями:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \le 1;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \le 1;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0;$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad |x| \le 1;$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad |x| \le 1, \quad x \ne 0.$$

Подобные формулы получаются при комбинировании определений обратных тригонометрических функций и основных тригонометрических формул.

Примеры решения задач

Пример 1. Докажем формулу: $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}, \quad |x| \le 1.$

Доказательство. Перепишем исходное равенство в виде

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

и докажем его, используя определение арксинуса. Проверим выполнение двух условий:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \arccos x\right) = x;$

2) $\dfrac{\pi}{2} - \arccos x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right].$

С помощью формулы приведения получаем, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x,$$

следовательно, первое условие выполняется. Проверим выполнение второго условия:

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \arccos x \le \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\pi \le -\arccos x \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le \arccos x \le \pi.$$

Справедливость последнего неравенства следует из определения арккосинуса.

Пример 2. Вычислить $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$.

Решение. Положим $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, тогда $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ и $0 \le \alpha \le \pi$. Из основного тригонометрического тождества следует, что

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Так как $\alpha \in [0; \pi]$, то подходит только положительное значение синуса.

Замечание. Аналогичным образом доказываются и другие формулы этого раздела в общем случае.

Ответ. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Пример 3. Построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

Решение. Так как 2π является периодом функции $y = \sin x$, то 2π будет периодом и для функции $y = \arcsin(\sin x)$. Поэтому нам достаточно построить график этой функции на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а потом продолжить его на всю числовую ось с учётом периодичности.

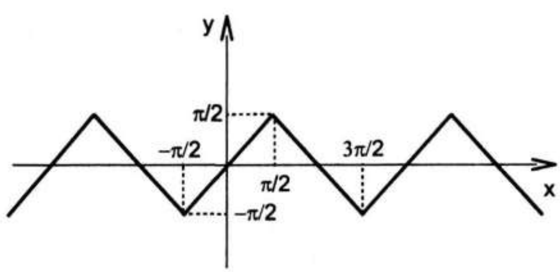
1) Рассмотрим отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ y = \arcsin(\sin x); \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin y = \sin x, \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \end{cases} \iff y = x.$$

2) На отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ получим

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right], \\ y = \arcsin(\sin x); \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right], \\ \sin y = \sin x, \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \end{cases} \iff y = \pi - x.$$

3) Продолжим график с учётом периодичности на всю числовую прямую.



Замечание. Аналогичным образом строятся графики функций $y = \arccos(\cos x)$, $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

Задачи

1. Доказать, что $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
2. Доказать, что $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
3. (ЕГЭ.В) Вычислить $5\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$.
4. (ЕГЭ.В) Вычислить $\frac{8}{\pi}\operatorname{arcctg}(\cos\pi)$.

5. (У) Вычислить $\arcsin\left(\sin\dfrac{8\pi}{7}\right)$.

6. (У) Вычислить $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)$.

7. (У) Вычислить $\cos(\operatorname{arcctg}(-2))$.

8. (У) Вычислить $\sin(2\operatorname{arctg}6)$.

9. (ЕГЭ.В) Найти значение выражения $5\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{7}\right)\right)$.

10. (ЕГЭ.В) Найти значение выражения $\operatorname{tg}^2\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)$.

11. (ЕГЭ.В) Найти значение выражения $\dfrac{4}{3}\operatorname{tg}\left(\pi-\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right)$.

12. (У) Вычислить $\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)+\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

13. (У) Вычислить $\cos\left(\arcsin\dfrac{5}{13}+\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

14. (У) Вычислить $\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right)$.

15. (У) Вычислить $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{4}{7}\right)\right)$.

16. (У) Вычислить $\arccos(\cos 10)$.

17. (У) Вычислить $\arcsin(\sin 14)$.

18. (У) Доказать, что $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}+\operatorname{arctg}\dfrac{7}{23}=\dfrac{\pi}{4}$.

19. (МГУ-53) Упростить выражение $\cos\left(2\arccos\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}\right)$.

20. (МГУ-53) Упростить выражение $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a}{b}\right)$.

2.2. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями

Для успешного решения уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями достаточно знать определения и свойства обратных тригонометрических функций.

Напомним, что функции $y=\arcsin x$ и $y=\operatorname{arctg}x$ монотонно возрастают на своих областях определения и принимают значения из промежутков $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

и $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ соответственно, а функции $y = \arccos x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ монотонно убывают на своих областях определения и принимают значения из промежутков $[0; \pi]$ и $(0; \pi)$ соответственно.

Общий метод решения задач с обратными тригонометрическими функциями состоит в применении одной и той же тригонометрической функции к обеим частям данного уравнения или неравенства. При этом для обеспечения равносильности переходов необходимо тщательно следить за областью значений левой и правой частей исходного уравнения (неравенства), при необходимости рассматривая задачу на нескольких промежутках.

Примеры решения задач

Пример 1. Решить неравенство $\arcsin x < \arccos x$.

Решение. Применив формулу $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, получим

$$\arcsin x < \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad \Longleftrightarrow \quad \arcsin x < \frac{\pi}{4},$$

откуда в силу монотонности арксинуса следует, что $-1 \le x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $\left[-1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Пример 2. Решить уравнение $2\arcsin x + \arccos(1 - x) = 0$.

Решение. *Первый способ.* Перепишем уравнение в виде

$$\arccos(1 - x) = -2\arcsin x.$$

Согласно определению арккосинуса, это равенство равносильно системе

$$\begin{cases} \cos(-2\arcsin x) = 1 - x, \\ 0 \le -2\arcsin x \le \pi; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 1 - x, \\ \arcsin x \le 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - 2x^2 = 1 - x, \\ \arcsin x \le 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x = 0; \\ &x = \frac{1}{2}; \end{aligned}\right. \\ \arcsin x \le 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Второй способ. Проанализируем, в каких пределах может изменяться переменная x. Обратные тригонометрические функции, входящие в исходное уравнение $2\arcsin x + \arccos(1 - x) = 0$, определены при

$$\left[\begin{aligned} &-1 \le x \le 1; \\ &-1 \le 1 - x \le 1; \end{aligned}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &-1 \le x \le 1; \\ &0 \le x \le 2; \end{aligned}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [0; 1].$$

При этих значениях переменной x оба слагаемых исходного уравнения неотрицательны, и равенство нулю возможно только в случае

$$\left[\begin{aligned} &\arcsin x = 0; \\ &\arccos(1 - x) = 0; \end{aligned}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Ответ. 0.

Пример 3*. (Экон-99.5) Решить уравнение

$$x+\frac{1}{6}\arccos\left(\cos 15x+2\cos 4x\sin 2x\right)=\frac{\pi}{12}.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\arccos\left(\cos 15x+2\sin 2x\cos 4x\right)=\frac{\pi}{2}-6x.$$

Согласно определению арккосинуса, это равенство равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 15x+(\sin 6x-\sin 2x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-6x\right),\\ 0\le\dfrac{\pi}{2}-6x\le\pi;\end{cases}\iff\begin{cases}\cos 15x-\sin 2x=0,\\ -\dfrac{\pi}{12}\le x\le\dfrac{\pi}{12}.\end{cases}$$

Используя формулу приведения, решим уравнение

$$\cos 15x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\iff\left[\begin{aligned}&15x=\frac{\pi}{2}-2x+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\\&15x=-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};\end{aligned}\right.\iff$$

$$\iff\left[\begin{aligned}&17x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\\&13x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};\end{aligned}\right.\iff\left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{34}+\frac{2\pi n}{17},\ n\in\mathbb{Z};\\&x=-\frac{\pi}{26}+\frac{2\pi m}{13},\ m\in\mathbb{Z}.\end{aligned}\right.$$

Осталось произвести отбор корней по условию $-\dfrac{\pi}{12}\le x\le\dfrac{\pi}{12}$.

1) $-\dfrac{\pi}{12}\le\dfrac{\pi}{34}+\dfrac{2\pi n}{17}\le\dfrac{\pi}{12}\iff-\dfrac{17}{6}\le 4n+1\le\dfrac{17}{6}\iff-\dfrac{23}{24}\le n\le\dfrac{11}{24}\iff$
$\iff n=0$, в этом случае $x=\dfrac{\pi}{34}$;

2) $-\dfrac{\pi}{12}\le-\dfrac{\pi}{26}+\dfrac{2\pi m}{13}\le\dfrac{\pi}{12}\iff-\dfrac{13}{6}\le 4m-1\le\dfrac{13}{6}\iff$
$\iff-\dfrac{7}{24}\le m\le\dfrac{19}{24}\iff m=0$, в этом случае $x=-\dfrac{\pi}{26}$.

Ответ. $-\dfrac{\pi}{26};\ \dfrac{\pi}{34}$.

Задачи

1. (У) Доказать, что $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}<\dfrac{\pi}{5}$.

2. (У) Что больше: $\dfrac{\pi}{4}$ или $\arcsin\dfrac{1}{3}+\arccos\dfrac{2}{3}$?

3. (У) Решить уравнение $\sin(5\operatorname{arcctg}x)=1$.

4. (У) Решить уравнение $\sin(3\arccos x)=\dfrac{1}{2}$.

5. (У) Решить уравнение $\arccos(\pi \log_3 \operatorname{tg} x) = 0$.

6. (У) Решить уравнение $2 \arcsin x = \arcsin 2x$.

7. (У) Решить уравнение $\arcsin x - \operatorname{arcctg} x = 0$.

8. (У) Решить уравнение $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \pi$.

9. (У) Решить уравнение $\operatorname{arctg}(2+\cos x) - \operatorname{arctg}(1+\cos x) = \dfrac{\pi}{4}$.

10. (Экон-99.4) Решить уравнение $x = \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6x + \cos 7x)$.

11. (Экон-99.6) Решить уравнение $x + \dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 5x + \cos 8x) = \dfrac{\pi}{10}$.

12. (Геол-74.3) Определить, при каких целых значениях k система $\begin{cases}(\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 k,\\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ имеет решения, и найти все эти решения.

13. (ВМК-96.4) Решить неравенство $\arccos 3x + \arcsin(x+1) \le \dfrac{7\pi}{6}$.

14. (Экон-95.5) Найти все $x \in [-3;1]$, для которых неравенство $x(\pi(x+1) - 4\operatorname{arctg}(3m^2+12m+11)) > 0$ выполняется при любых целых m.

2.3. Отбор решений в тригонометрических уравнениях. Тригонометрические неравенства

Теоретический материал

Тригонометрические неравенства нередко возникают при решении уравнений, содержащих наряду с тригонометрическими функциями радикалы и логарифмы. Если тригонометрическое неравенство возникает как дополнительное ограничение при решении уравнения, то в большинстве задач удобнее сначала решить уравнение, а затем произвести *отбор* полученных корней посредством подстановки в неравенство.

Если необходимость в решении тригонометрического неравенства остаётся, советуем воспользоваться *тригонометрической окружностью*. И хотя способы решения тригонометрических неравенств тесно переплетаются со способами решения соответствующих тригонометрических уравнений, графическая иллюстрация поможет избежать ошибок при отборе.

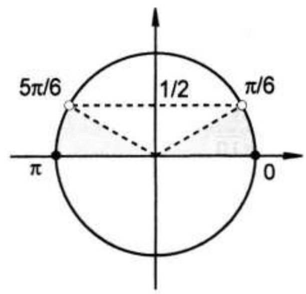
Примеры решения задач

Пример 1. (Хим-92.2) Решить неравенство $\sqrt{2\sin x} < 1$.

Решение. Исходное неравенство равносильно следующему двойному неравенству:

$$0 \le \sin x < 1/2.$$

Отметим на тригонометрической окружности углы, синусы которых удовлетворяют этому условию.



Получим промежутки $\left[2\pi n; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$ и $\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m; \pi + 2\pi m\right]$, где $n, m \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\left[2\pi n; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \bigcup \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m; \pi + 2\pi m\right]$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. (М/м-98(1).2) Найти все решения уравнения

$$2\cos\frac{x}{3} + 2(\sqrt{5} - 1)\sin\frac{x}{6} = 2 - \sqrt{5},$$

удовлетворяющие условию $\cos\dfrac{3x}{4} < 0$.

Решение. С помощью формулы косинуса двойного угла уравнение сводится к квадратному:

$$2\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{6}\right) + 2(\sqrt{5} - 1)\sin\frac{x}{6} = 2 - \sqrt{5} \iff 4\sin^2\frac{x}{6} - 2(\sqrt{5} - 1)\sin\frac{x}{6} - \sqrt{5} = 0.$$

Корень $\dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$ не подходит. Второй корень равен $-\dfrac{1}{2}$; следовательно,

$$\sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{2} \iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{6} = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ \dfrac{x}{6} = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -\pi + 12\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = -5\pi + 12\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Отберём те значения переменной, для которых выполняется условие $\cos\dfrac{3x}{4} < 0$.

1) Если $x = -\pi + 12\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\cos\frac{3x}{4} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4} + 9\pi n\right) = \cos\frac{3\pi}{4}\cos 9\pi n = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^n.$$

Значение косинуса отрицательно при чётном n. Следовательно, $n = 2k$ и, значит, $x = -\pi + 24\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Если $x = -5\pi + 12\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, то

$$\cos\frac{3x}{4} = \cos\left(-\frac{15\pi}{4} + 9\pi m\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos 9\pi m = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^m.$$

Косинус отрицателен при нечётном m. Следовательно, $m = 2l + 1$, $l \in \mathbb{Z}$ и, значит, $x = -5\pi + 12\pi(2l + 1) = 7\pi + 24\pi l$.

Ответ. $-\pi + 24\pi k$, $7\pi + 24\pi l$; $k, l \in \mathbb{Z}$.

Пример 3*. (ВМК-97.3) Решить уравнение $3+|\sin x-3\cos x|=3\sin x+\cos x$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{1+3^2}=\sqrt{10}$ и введём вспомогательный аргумент $\varphi=\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}$:

$$\frac{3}{\sqrt{10}}+\left|\frac{1}{\sqrt{10}}\sin x-\frac{3}{\sqrt{10}}\cos x\right|=\frac{3}{\sqrt{10}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos x \iff$$

$$\iff \frac{3}{\sqrt{10}}+|\sin(x-\varphi)|=\cos(x-\varphi).$$

Обозначим $z=\cos(x-\varphi)$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{3}{\sqrt{10}}+\sqrt{1-z^2}=z \iff \sqrt{1-z^2}=z-\frac{3}{\sqrt{10}} \iff \begin{cases}1-z^2=\left(z-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2,\\ z\geq\dfrac{3}{\sqrt{10}}.\end{cases}$$

Уравнение системы сводится к квадратному уравнению $20z^2-6\sqrt{10}z-1=0$ и имеет корни $z=\dfrac{3\sqrt{10}\pm\sqrt{110}}{20}$. Заметим, что из первой строки системы следует неотрицательность выражения $1-z^2$; следовательно, оба корня удовлетворяют условию $|z|\leq 1$.

Сравним оба корня с числом $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

1) $z=\dfrac{3\sqrt{10}-\sqrt{110}}{20}<0<\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ – не подходит.

2) Сравним второй корень:

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20} & \vee & \dfrac{3}{\sqrt{10}}\\ 30+\sqrt{1100} & \vee & 60\\ 1100 & > & 30^2;\end{array}$$

значит, $z=\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20}>\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, и это значение нам подходит. В результате

$$\cos(x-\varphi)=\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20} \iff x=\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}\pm\arccos\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}\pm\arccos\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задачи

1. (Почв-82.2) Решить уравнение $\sqrt{2-3\cos 2x}=\sqrt{\sin x}$.

2. (Псих-96.3) Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{-6\sin^2 2x-2\sin 2x\cos 2x+8-\sqrt{3}}}.$$

3. (Хим-88.2) Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos x-1}+\sin x=0$.

4. (ВМК-93.2) На отрезке $0\le x\le\pi$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{1+2\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x}.$$

5. (Псих-87.4) Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{3}{4}-\cos x}=\sqrt{\dfrac{3}{4}-\cos 3x}$.

6. (ВМК-00.1) Решить неравенство $\sin x\sin|x|\ge-\dfrac{1}{2}$.

7. (У) Решить неравенство $\left|\dfrac{3\sin x}{2+\cos x}\right|\le\sqrt{3}$.

8. (Геол-94.6) Решить неравенство $4\cos x-\sin 2x>0$.

9. (М/м-71.2) Найти все x из отрезка $0\le x\le\pi$, удовлетворяющие неравенству $\sin 2x-\cos x+\sqrt{2}\sin x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

10. (ВМК-71.2) Найти все решения неравенства $\sqrt{\sin 2x}<\cos x-\sin x$, удовлетворяющие условию $|x|<\pi$.

11. (ИСАА-94.4) Решить неравенство $2\sin x-1\le\sqrt{6\sin^2 x-6\sin x-12}$.

12. (Хим-98(1).3) Найти все числа x из промежутка $[-\pi;\pi]$, удовлетворяющие неравенствам $(4+\sqrt{3})\sin x+2\sqrt{3}+1\le\cos 2x\le 5\cos x-3$.

13. (Геогр-77.5) Решить уравнение $2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}$.

14. (М/м-95(1).4) Найти все значения $x\in[0,\pi]$, при которых выражения $\operatorname{tg}x$ и $\dfrac{1}{\cos 2x}-2\cos 2x$ имеют разные знаки.

2.4. Смешанные задачи

1. (У) Решить неравенство $\log_{|\cos x|}|x|<0$.

2. (У) Решить неравенство $\log_{(x^2-1)}\operatorname{ctg}x\le 0$.

3. (ЕГЭ.С) Найти множество значений функции

$$y=\arcsin\frac{\sqrt{\sqrt{2}(\cos 2006x+\sin 2006x)}}{2}.$$

4. (М/м-70.1) Решить неравенство $\log_2(1+\cos 4x) \le 1 + \log_{\sqrt{2}} \sin x$.
5. (Хим-89.3) Решить уравнение $\log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2 \cos x = 0$.
6. (Хим-70.3) Найти все значения x, лежащие в промежутке $-1 < x < 4$ и удовлетворяющие неравенству $\log_{0,75} \sin x \ge \log_{\frac{9}{16}} 0,75$.
7. (Экон.К-74.3) Решить уравнение $\log_{\cos 2x - \sin 2x}(1 - \cos x - \sin x) = 1$.
8. (ЕГЭ.С) Найти множество значений функции $y = \sin 2x$, если $x \in \left[\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2\right]$.
9. (ЕГЭ.С) Найти множество значений функции $y = \sin 2x$, если $x \in \left[\arccos\dfrac{5}{13}; \dfrac{5\pi}{12}\right]$.
10. (М/м-99(1).1) Решить уравнение $\sqrt[8]{\dfrac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\dfrac{9\pi}{2} - 2x\right)} = 0$.
11. (Филол-99.4) Решить уравнение $\log_{1-2\cos z}(\cos 2z + \sin z + 2) = 0$.
12. (Экон-00.5) Найти все значения x, при которых числа $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)}$, $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}$, $5^{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.
13. (Физ-95(2).7) При каких значениях x числа $a_1 = \sin x$, $a_2 = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $a_3 = \sin 3x$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше нуля?
14. (Экон-88.6) Найти все значения параметра a, при которых неравенство $|3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a| \le 3$ выполняется при всех x.
15. (ВМК-95.4) Решить неравенство
$$\log_{\cos x} \cos^2 x \ge \log_{\cos x - \frac{1}{2}}\left(\cos^2 x - \cos x - x^2 - 14x - \frac{51}{4}\right).$$
16. (ВМК-89.4) Решить неравенство $1 \le |\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}$.

3. Полезные преобразования и замены переменных

3.1. Использование формул сокращённого умножения, выделение полного квадрата

Теоретический материал

В этом параграфе собраны задачи, при решении которых используются различные полезные формулы и преобразования: формулы сокращённого умножения, теорема Безу, выделение полного квадрата, домножение на сопряжённое выражение, введение новых переменных.

Напомним базовые формулы сокращённого умножения:

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b), \quad a^3 \mp b^3 = (a \mp b)\cdot(a^2 \pm ab + b^2),$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Для поиска рациональных корней уравнений высших степеней с целыми коэффициентами удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема Безу. Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_n$ имеет рациональные корни, то есть корни, представимые в виде несократимой дроби $x = \dfrac{p}{q}$, то старший коэффициент a_0 делится нацело на q, а свободный член a_n делится нацело на p.

Следствие 1. Если уравнение имеет целые коэффициенты и старший из них равен единице, то рациональными корнями такого уравнения могут быть только целые числа.

Следствие 2. Целые корни уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

Теорема Безу формулирует необходимое (но не достаточное) условие существования рациональных корней уравнений с целыми коэффициентами и является эффективным инструментом разложения на множители многочленов высших степеней.

Для получения более чёткого представления о структуре выражения полезно вводить новые переменные (одну или несколько). На возможность использования таких замен обычно указывает наличие повторяющихся выражений в уравнении или неравенстве.

Во многих задачах с параметрами полезно сначала выяснить, какая из переменных является параметром по существу условия, а какая – независимой переменной. Иногда по смыслу задачи $x, y, z, \dots$ играют роль параметров, в то время как $a, b, c, \dots$ играют роль переменных.

Напоминаем вам, что после решения задачи в новых переменных необходимо возвращаться к исходным переменным.

Примеры решения задач

Пример 1. (Почв-80.1) Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126. \end{cases}$

Решение. Преобразуем второе уравнение системы, используя формулу разности кубов:

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 126.$$

Далее выделим полный квадрат во втором сомножителе левой части преобразованного уравнения:

$$(x-y)((x-y)^2 + 3xy) = 126.$$

Подставим значение $x - y = 6$ из первого уравнения, тогда второе уравнение принимает следующий вид:

$$6\cdot(6^2 + 3xy) = 126 \quad \Longleftrightarrow \quad xy = -5.$$

Получаем систему уравнений, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x - y = 6, \\ xy = -5; \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + 6, \\ xy = -5; \end{cases} \implies y^2 + 6y + 5 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} y = -5; \\ y = -1. \end{array} \right.$$

Подставляя найденные значения переменной y в первое уравнение системы, находим соответствующие им значения переменной x.

Ответ. $(1;\ -5)$, $(5;\ -1)$.

Пример 2. (М/м-96(2).2) Вычислить $\log^2_{x/y} x + \log^2_{y/x} y$, если $\log_{x/y}(x^9) = \log_{\sqrt{y}} \dfrac{y}{x}$.

Решение. Обозначим искомое выражение через A и преобразуем его.

$$A = \log^2_{x/y} x + \log^2_{x/y} y = (\log_{x/y} x - \log_{x/y} y)^2 + 2\log_{x/y} x \cdot \log_{x/y} y =$$
$$= 1 + 2\log_{x/y} x \cdot \log_{x/y} y.$$

Из условия получаем

$$9\log_{x/y} x = -2\log_y x/y \iff \log_{x/y} x \cdot \log_{x/y} y = -\frac{2}{9}.$$

Значит, $A = 1 + 2 \cdot \left(-\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{5}{9}$.

Ответ. $\dfrac{5}{9}$.

Пример 3. (Физ-95(1).7) Найти наименьшее значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе $\begin{cases} x + y = 3a - 1, \\ x^2 + y^2 = 4a^2 - 2a + 2. \end{cases}$

Решение. Заметим, что $2xy = (x+y)^2 - x^2 - y^2$. Возведём обе части первого уравнения в квадрат и почленно вычтем из них обе части второго уравнения:

$$2xy = 9a^2 - 6a + 1 - 4a^2 + 2a - 2 \iff xy = \frac{1}{2}(5a^2 - 4a - 1).$$

Для того чтобы найти наименьшее значение, которое может принимать произведение xy, надо найти минимум квадратичной функции $f(a) = \dfrac{1}{2}(5a^2 - 4a - 1)$. График функции $f(a)$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Минимальное значение функция принимает в точке $a_0 = -\dfrac{-4}{10} = \dfrac{2}{5}$, которая является абсциссой вершины параболы. Значение функции в этой точке $f\left(\dfrac{2}{5}\right) = -\dfrac{9}{10}$. Таким образом, минимальное значение, которое может принимать произведение xy, – это значение $-\dfrac{9}{10}$. Осталось убедиться, что при $a = \dfrac{2}{5}$ исходная система имеет решение. При $a = \dfrac{2}{5}$ система принимает вид

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{5}, \\ xy = -\dfrac{9}{10}. \end{cases}$$

Решая систему подстановкой, приходим к уравнению $10y^2 - 2y - 9 = 0$. Вычислим дискриминант: $D/4 = 1 + 90 = 91 > 0$. Из положительности дискриминанта заключаем, что решение системы существует; следовательно, минимальное значение $xy = -\dfrac{9}{10}$ достигается.

Ответ. $-\dfrac{9}{10}$.

Пример 4. (ИСАА-95.6) **Найти все значения a, при которых неравенство $x^2 + 4x + 6a|x+2| + 9a^2 \le 0$ имеет не более одного решения.**

Решение. Преобразуем исходное неравенство

$$|x+2|^2 + 6a|x+2| + 9a^2 - 4 \le 0 \iff (|x+2| + 3a)^2 \le 4 \iff$$

$$\iff -2 \le |x+2| + 3a \le 2 \iff -2 - 3a \le |x+2| \le 2 - 3a.$$

Последнее двойное неравенство имеет не более одного решения тогда и только тогда, когда $2 - 3a \le 0$, то есть $a \ge \dfrac{2}{3}$.

Ответ. $\left[\dfrac{2}{3};\ +\infty\right)$.

Задачи

1. (ЕГЭ.В) **Решить систему уравнений** $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5. \end{cases}$

2. (У) **Разложить на множители многочлен** $x^4 + 1$.

3. (У) **Разложить** $x^4 + x^2 + 1$ **в произведение двух многочленов.**

4. (Экон.М-96.2) **Решить систему уравнений** $\begin{cases} x + 3^y = 2, \\ x^3 + 27^y = 26. \end{cases}$

5. (Экон-96.1) **Решить систему** $\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y+3} = 1, \\ (-x\sqrt{-x})^2 - y - 3 = 7. \end{cases}$

6. (М/м-90.3) **Решить неравенство** $\dfrac{\sqrt{1-x^3} - 1}{1+x} \le x$.

7. (М/м-96(1).2) **Решить неравенство** $\dfrac{x^3 - 8 + 6x \cdot (2-x)}{|3-4x|} \le \sqrt{4x-3}$.

8. (Геогр-95(1).1) **Решить систему** $\begin{cases} \sqrt{x}(x+3y) = 36, \\ \sqrt{y}(3x+y) = 28. \end{cases}$

9. (Псих-88.2) **Решить уравнение** $32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$.

10. (Почв-93.2) **Решить уравнение** $\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0$.

11. (Геогр-80.4) Решить уравнение $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{15}{8}\cos 2x - \dfrac{1}{2}$.

12. (Геогр-98.2) Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если сумма первого, второго и третьего членов прогрессии равна (-7), а пятый член прогрессии меньше второго на 14.

13. (ВМК-93.1) Решить неравенство $\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x - x^2 - 2) \geq 0$.

14. (Почв-95(1).5) Найти все значения a, при которых уравнение $2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$ не имеет решений.

15. (Хим-95.5) Решить систему $\begin{cases} 2^{-x} \cdot y^4 - 2y^2 + 2^x \leq 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$

16. (Экон-79.4) Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4,5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$

17. (Хим-98.3) Решить систему $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$

18. (У) Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$

19. (У) Решить систему $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx, \\ 2x + 3y - 6z - 1 = 0. \end{cases}$

20. (Почв-79.5) Решить систему уравнений $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$

21. (ИСАА-94.6) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2x^2 + 2a(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2} - 3$ имеет решение.

22. (У) Решить неравенство $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 > \dfrac{2x}{x^2+1}$.

23. (У) Решить неравенство $\sqrt{9 - \dfrac{9}{x}} < x - \sqrt{x - \dfrac{9}{x}}$.

24. (Геол.ОГ-82.6) Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие условиям: $\begin{cases} 8\cos x \cos y \cos(x - y) + 1 = 0, \\ x + y = z. \end{cases}$

25. (Геол-90.5) Найти все пары действительных чисел m и n, при которых уравнение $(3x^2 - 2m^2 + mn)^2 + (3m^2 - mn + 2n^2 - 12x)^2 + 4 = 4x - x^2$ имеет хотя бы одно решение.

3.2. Замены переменных в рациональных уравнениях, неравенствах и системах

Теоретический материал

Перечислим основные ситуации, в которых целесообразно использовать замену:

- наличие повторяющегося выражения;
- возможность приведения к симметричному виду, например, уравнение
$$(x+\alpha)^4+(x+\beta)^4=c$$
после замены $y=x+\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, приводится к биквадратному уравнению
$$(y+d)^4+(y-d)^4=c, \quad \text{где} \quad d=\frac{\alpha-\beta}{2};$$
- «возвратность» уравнения, например, уравнение
$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$
после деления на x^2, преобразуется к уравнению
$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$$
квадратному относительно $\quad y=x+\dfrac{1}{x}$;
- «однородность» уравнения, например, уравнение $ax^2+bxy+cy^2=0$ при $y\neq 0$ равносильно квадратному уравнению $a\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+b\cdot\dfrac{x}{y}+c=0$;
- «симметричность» уравнений системы, например, при решении системы
$$\begin{cases} P(x,y)=0,\\ Q(x,y)=0,\end{cases}$$
где $P(x,y)=P(y,x)$ и $Q(x,y)=Q(y,x)$, замена $x+y=u$, $xy=v$ может упростить вычисления.

Примеры решения задач

Пример 1. (ВМК-95.2) Решить систему $\begin{cases} x+3xy+y=3+10\sqrt{2},\\ x^2+y^2=11.\end{cases}$

Решение. Перепишем систему в виде
$$\begin{cases} (x+y)+3xy=3+10\sqrt{2},\\ (x+y)^2-2xy=11.\end{cases}$$

Сделаем замену переменных $u = x + y$, $v = xy$; тогда

$$\begin{cases} u + 3v = 3 + 10\sqrt{2}, \\ u^2 - 2v = 11; \end{cases} \iff \begin{cases} 3v = 3 + 10\sqrt{2} - u, \\ 3u^2 - 2\cdot 3v = 33. \end{cases}$$

Подставив выражение для $3v$ из первого уравнения во второе, получим квадратное уравнение относительно u:

$$3u^2 + 2u - 39 - 20\sqrt{2} = 0.$$

Решим это уравнение:

$$D/4 = 1 + 39\cdot 3 + 60\sqrt{2} = 118 + 60\sqrt{2} = (10 + 3\sqrt{2})^2,$$

$$u_{12} = \frac{-1 \pm (10 + 3\sqrt{2})}{3}, \quad u_1 = 3 + \sqrt{2}, \quad u_2 = \frac{-11 - 3\sqrt{2}}{3}.$$

Из первого уравнения последней системы определяем v:

$$v = \frac{3 + 10\sqrt{2} - u}{3} \implies v_1 = 3\sqrt{2}, \quad v_2 = \frac{20 + 33\sqrt{2}}{9}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим две системы уравнений для нахождения x и y:

$$1) \quad \begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{2}, \\ xy = 3\sqrt{2}; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3, \\ y = \sqrt{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2) \quad \begin{cases} x + y = \dfrac{-11 - 3\sqrt{2}}{3}, \\ xy = \dfrac{20 + 33\sqrt{2}}{9}; \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{-11 - 3\sqrt{2}}{3} - x, \\ x^2 + \dfrac{11 + 3\sqrt{2}}{3}x + \dfrac{20 + 33\sqrt{2}}{9} = 0; \end{cases}$$

$$D = \frac{(11 + 3\sqrt{2})^2}{9} - 4\cdot\frac{20 + 33\sqrt{2}}{9} = \frac{121 + 66\sqrt{2} + 18 - 80 - 132\sqrt{2}}{9} = \frac{59 - 66\sqrt{2}}{9} < 0.$$

Значит, во втором случае решений нет.

Ответ. $(3;\ \sqrt{2})$, $(\sqrt{2};\ 3)$.

Пример 2. (У) Решить уравнение $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$.

Решение. Так как $x = 0$ не является решением нашего уравнения, то можем поделить его на x^2. Получим

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Положим $y = x + \dfrac{1}{x}$, тогда $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$ и уравнение примет вид

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} y = 4, \\ y = 1; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x} = 4, \\ x + \dfrac{1}{x} = 1; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{3}, \\ x = 2 - \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ответ. $2 \pm \sqrt{3}$.

Пример 3. (У) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=11, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы на 6, второе уравнение – на 11 и приравняем левые части полученных уравнений:

$$6x^2+18xy+6y^2=11x^2+22xy-22y^2 \iff 5x^2+4xy-28y^2=0.$$

Заметим, что если $y=0$, то исходная система не имеет решений. Разделим однородное уравнение на y^2 и сделаем замену $t=\dfrac{x}{y}$, получим

$$5t^2+4t-28=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-\dfrac{14}{5}. \end{array}\right.$$

Первый случай:

$$\begin{cases} x=2y, \\ x^2+3xy+y^2=11; \end{cases} \iff \begin{cases} x=2y, \\ y^2=1; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2, \\ y=-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{5}{14}x, \\ x^2+3xy+y^2=11; \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\dfrac{5}{14}x, \\ x^2=196; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=14, \\ y=-5; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-14, \\ y=5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $(2;1)$, $(-2;-1)$, $(14;-5)$, $(-14;5)$.

Задачи

1. (Геогр-97.1) Решить неравенство $\dfrac{|x-1|+10}{4|x-1|+3}>2$.
2. (Почв-98.3) Решить неравенство $\dfrac{1}{|x+1|-1}\geq\dfrac{2}{|x+1|-2}$.
3. (У) Решить систему уравнений $\begin{cases} 2|x-y|+y=2, \\ |x-y|-2y=6. \end{cases}$
4. (У) Решить уравнение $2x^4+3x^3+2x^2+3x+2=0$.
5. (У) Решить уравнение $(x+3)^4+(x+5)^4=4$.
6. (У) Разложить на множители многочлен $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.
7. (У) Решить уравнение $x^4-3x^2(x+1)+2(x+1)^2=0$.
8. (У) Решить систему $\begin{cases} xy+yz=8, \\ yz+zx=9, \\ zx+xy=5. \end{cases}$

9. (У) Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$

10. (Геол-98(2).7) Решить систему уравнений $\begin{cases} x(1+y)=y+7, \\ x^2y-xy^2=6. \end{cases}$

11. (У) Решить систему $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^2+xy+2y^2=8. \end{cases}$

12. (Геол-98(1).6) Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|-3x+3\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3x^2}{2}-\left|\frac{x^2}{2}+x-\sqrt{2}\right|.$$

13. (У) При каких a система $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2+xy+y^2=a \end{cases}$ имеет решение?

14. (Экон.К-74.5) Найти все действительные значения величины h, при которых уравнение $x(x+1)(x+h)(x+1+h)=h^2$ имеет четыре действительных корня.

3.3. Замены переменных в иррациональных уравнениях, неравенствах и системах

Теоретический материал

В некоторых задачах целесообразно заменить иррациональное выражение на новую переменную так, чтобы уравнение или неравенство приняло существенно более простой вид. Иногда удачная замена позволяет выделить полный квадрат некоторого выражения под арифметическим квадратным корнем (этот метод рассмотрен в примере 3).

Кроме того, полезно вводить ограничения для введённых новых переменных, которые определяются их областью значений. Например, при замене $t=\sqrt{f(x)}$ появляется очевидное ограничение $t\ge 0$. Такие ограничения помогают производить отбор допустимых значений новых переменных и избегать рассмотрения случаев, приводящих к уравнениям или неравенствам с пустым множеством решений.

Примеры решения задач

Пример 1. (ВМК-89.2) Решить уравнение $8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$.

Решение. Добавим 3 к обеим частям уравнения и вынесем множитель 4 из подкоренного выражения:

$$16\sqrt{3+4x-4x^2}+3+4x-4x^2=36.$$

Пусть $t=\sqrt{3+4x-4x^2}$. Заметим, что новая переменная t может принимать только неотрицательные значения. Исходное уравнение преобразуется к квадратному относительно t:

$$t^2+16t-36=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t=-18; \\ t=2. \end{array}\right.$$

Значение $t = -18 < 0$ не подходит. Остаётся корень $t = 2$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$\sqrt{3+4x-4x^2} = 2 \iff 4x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Пример 2. (Экон-98.3) Решить неравенство $\sqrt{x+8(3-\sqrt{8+x})} < \dfrac{x+16}{2\sqrt{8+x}-10}$.

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt{8+x} \geq 0$. Исходное неравенство примет вид

$$\sqrt{(t^2-8)+8(3-t)} < \frac{t^2+8}{2t-10} \iff \sqrt{t^2-8t+16} < \frac{t^2+8}{2t-10} \iff$$

$$\iff \sqrt{(t-4)^2} < \frac{t^2+8}{2t-10} \iff |t-4| < \frac{t^2+8}{2t-10}.$$

Так как правая часть последнего неравенства должна быть положительна, то

$$2t - 10 > 0 \iff t > 5$$

и, значит, $|t-4| = t-4$. Приходим к системе

$$\begin{cases} t - 4 < \dfrac{t^2+8}{2t-10}, \\ t > 5; \end{cases} \iff \begin{cases} (2t-10)\cdot(t-4) < t^2+8, \\ t > 5; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t^2 - 18t + 32 < 0, \\ t > 5; \end{cases} \iff t \in (5;\ 16).$$

Вернёмся к переменной x:

$$5 < \sqrt{8+x} < 16 \iff 25 < 8 + x < 256 \iff x \in (17;\ 248).$$

Ответ. $(17; 248)$.

Пример 3. (Геогр-95(1).5) Решить уравнение $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{19-x} = 3$.

Решение. Приведём два способа решения этой задачи.

Первый способ

Левая часть уравнения определена тогда и только тогда, когда подкоренные выражения неотрицательны. Значит, $2 \leq x \leq 19$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{19-x} + 2\sqrt[4]{(x-2)(19-x)} = 9 \iff$$

$$\iff \sqrt{x-2} + \sqrt{19-x} = 9 - 2\sqrt[4]{(x-2)(19-x)}.$$

Уравнение имеет смысл при $9 - 2\sqrt[4]{(x-2)(19-x)} \geq 0$. Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$x - 2 + 19 - x + 2\sqrt{(x-2)(19-x)} =$$
$$= 81 - 36\sqrt[4]{(x-2)(19-x)} + 4\sqrt{(x-2)(19-x)} \iff$$
$$\iff 2\sqrt{(x-2)(19-x)} - 36\sqrt[4]{(x-2)(19-x)} + 64 = 0.$$

Сделаем замену $t = \sqrt[4]{(x-2)(19-x)}$. Получим систему относительно t:

$$\begin{cases} 2t^2 - 36t + 64 = 0, \\ 9 - 2t \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 2(t-2)(t-16) = 0, \\ t \leq 9/2; \end{cases} \iff t = 2.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$\sqrt[4]{(x-2)(19-x)} = 2 \iff x^2 - 21x + 54 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 3; \\ x = 18. \end{array}\right.$$

Второй способ

Сделаем замену $y = \sqrt[4]{x-2}$, $z = \sqrt[4]{19-x}$. Тогда вместо уравнения получим систему

$$\begin{cases} y + z = 3\,, \\ y^4 + z^4 = 17\,. \end{cases}$$

Преобразуем левую часть второго уравнения системы:

$$y^4 + z^4 = (y^2 + z^2)^2 - 2y^2z^2 = \left((y+z)^2 - 2yz\right)^2 - 2(yz)^2\,.$$

Подставим из первого уравнения системы значение суммы $y+z$ в преобразованное второе уравнение:

$$(9 - 2yz)^2 - 2(yz)^2 = 17 \iff (yz)^2 - 18yz + 32 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} yz = 2\,; \\ yz = 16\,. \end{array}\right.$$

Таким образом, получаем две системы:

$$\begin{cases} y + z = 3\,, \\ yz = 2; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y + z = 3\,, \\ yz = 16\,. \end{cases}$$

Решая их и возвращаясь к переменной x, находим $x = 3$ и $x = 18$.

Ответ. 3; 18.

Задачи

1. (ЕГЭ.В) Решить уравнение $\sqrt{x^2 + 1 - 2x} - 6\sqrt{x-1} = 7$.
2. (ЕГЭ.В) Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 6 = 5\sqrt{2-x}$.
3. (Экон.К-83.1) Решить уравнение $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$.

4. (Геол-94(2).3) Решить уравнение $y^2 + 2\sqrt{y^2+3y-4} - 4 + 3y = 0$.

5. (У) Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}} + \dfrac{1}{x} = 5$.

6. (У) Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 34, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 23 - \dfrac{1}{\sqrt{xy}}. \end{cases}$

7. (У) Решить уравнение $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

8. (ВМК-96(1).1) Решить неравенство $\sqrt{(2x+1)^4 - (2x+1)^2} + (2x+1)^2 \geq 0$.

9. (Почв-96(1).3) Решить неравенство $\dfrac{2}{2-\sqrt{x+3}} \leq 1$.

10. (Геол-91.3) Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} \geq \dfrac{2}{4-\sqrt{x}}$.

11. (Биол-93.3) Решить неравенство $5\sqrt{1-\dfrac{1}{z}} > \dfrac{7z-1}{z}$.

12. (ВМК-83.5) Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2)$, и найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет только один корень.

13. (ВМК-90.4) Решить неравенство $\sqrt{9v^2-48v-21} + \sqrt{9v^2-51v-15} \leq |3v-6|$.

14. (М/м-80.4) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + 2y = 2. \end{cases}$

15. (Хим-91.3) Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$

16. (Геол-00.5) Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 30, \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases}$

17. (ВКНМ-00(1).3) Решить неравенство $\sqrt{2-\dfrac{2}{x+1}} < \sqrt{2+\dfrac{2}{x}} + 1$.

18. (У) Решить уравнение $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12}$.

3.4. Замены переменных в показательных и логарифмических уравнениях, неравенствах и системах

Теоретический материал

В задачах, содержащих выражения с показательными и логарифмическими функциями, также целесообразно применять замены переменных.

Как правило, прежде чем производить замену, необходимо произвести некоторые преобразования степеней и логарифмов: привести все степенные функции к одному основанию (пример 2), перейти к логарифмам по одному основанию и с одинаковыми подлогарифменными функциями (примеры 1 и 3) и так далее.

При решении задач в новых переменных следует учитывать области значений заменённых выражений, чтобы отбросить полученные значения новых переменных, которые не удовлетворяют ограничениям, и тем самым сократить количество рассматриваемых случаев.

Примеры решения задач

Пример 1. (Физ-93.3) Решить уравнение $\sqrt{\log_2 x} = 2\log_2\sqrt{x} - 1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{\log_2 x} - 2\log_2\sqrt{x} + 1 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \log_2 x - \sqrt{\log_2 x} - 1 = 0.$$

Сделаем замену переменной $t = \sqrt{\log_2 x}$, $t \ge 0$; в новых обозначениях уравнение становится квадратным:

$$t^2 - t - 1 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Принимая во внимание ограничение $t \ge 0$, отбрасываем отрицательный корень $t_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$\sqrt{\log_2 x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad x = 2^{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = 2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ответ. $2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

Пример 2. (Физ-97.2) Решить уравнение $7\cdot\dfrac{4^{x-2}}{4^x - 3\cdot 5^x} = 1 + 3\cdot\left(\dfrac{5}{4}\right)^x$.

Решение. Так как $4^x > 0$, то можно поделить числитель и знаменатель левой части на 4^x. Получим уравнение

$$\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{1 - 3\left(\frac{5}{4}\right)^x} = 1 + 3\left(\frac{5}{4}\right)^x.$$

Сделаем замену переменной $t = 3\left(\dfrac{5}{4}\right)^x$, $t > 0$; в новых обозначениях уравнение примет вид

$$\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{1-t} = 1 + t \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{16t^2 - 9}{t - 1} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad t = \pm\frac{3}{4}.$$

Поскольку $t > 0$, оставляем решение $t = \dfrac{3}{4}$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$3\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{3}{4} \iff \left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{1}{4} \iff x = \log_{\frac{5}{4}} \frac{1}{4} \iff x = \frac{2}{2-\log_2 5}.$$

Ответ. $\dfrac{2}{2-\log_2 5}$.

Пример 3. (Псих-86.3) Решить неравенство $\dfrac{6-\lg(x^4)}{3+2\lg(x^2)} < 2$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $\dfrac{6-\lg(x^4)}{3+\lg(x^4)} < 2$ и сделаем замену $t = \lg(x^4)$:

$$\frac{6-t}{3+t} < 2 \iff 2 + \frac{t-6}{t+3} > 0 \iff \frac{3t}{t+3} > 0.$$

Последнее неравенство выполнено при $t < -3$ и $t > 0$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \lg(x^4) > 0; \\ \lg(x^4) < -3; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^4 > 1; \\ 0 < x^4 < 0,001; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x < -1; \\ x > 1; \\ -\sqrt[4]{0,001} < x < 0; \\ 0 < x < \sqrt[4]{0,001}. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty;\ -1) \cup (-\sqrt[4]{0,001}; 0) \cup (0;\ \sqrt[4]{0,001}) \cup (1;\ +\infty)$.

Пример 4. (Псих-92.2) Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 400 \cdot 5^y \cdot 50^x \cdot 100^{x+y} = 1, \\ \log_{0,5x+0,4y}(8^{-x} \cdot 4^{-y} + 25^{-2x} \cdot 125^{-y}) \cdot \log_{41}(0,5x+0,4y) = 1. \end{array}\right.$$

Решение. Из второго уравнения следует, что $0,5x+0,4y > 0$ и $0,5x+0,4y \neq 1$. Преобразуем первое уравнение системы:

$$400 \cdot 5^y \cdot 50^x \cdot 100^{x+y} = 1 \iff 400 \cdot 5^{2x} \cdot 2^x \cdot 5^y \cdot 5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 2^{2x} \cdot 2^{2y} = 1 \iff$$

$$\iff 400 \cdot 5^{4x+3y} \cdot 2^{3x+2y} = 1.$$

Преобразуем второе уравнение системы:

$$\frac{\log_{0,5x+0,4y}(8^{-x} \cdot 4^{-y} + 25^{-2x} \cdot 125^{-y})}{\log_{0,5x+0,4y} 41} = 1 \iff$$

$$\iff \log_{41}(8^{-x} \cdot 4^{-y} + 25^{-2x} \cdot 125^{-y}) = 1 \iff$$

$$\iff 8^{-x} \cdot 4^{-y} + 25^{-2x} \cdot 125^{-y} = 41 \iff 2^{-3x-2y} + 5^{-4x-3y} = 41.$$

Сделаем замену переменных $u = 2^{-3x-2y}$, $v = 5^{-4x-3y}$:

$$\begin{cases} u+v=41, \\ \dfrac{400}{uv}=1; \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=41, \\ uv=400; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=16, \\ v=25; \end{cases} \\ \begin{cases} u=25, \\ v=16. \end{cases} \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходным переменным. Рассмотрим первую пару (u, v):

$$\begin{cases} 2^{-3x-2y}=16, \\ 5^{-4x-3y}=25; \end{cases} \iff \begin{cases} -3x-2y=4, \\ -4x-3y=2; \end{cases} \iff \begin{cases} x=-8, \\ y=10. \end{cases}$$

При полученных значениях x и y второе уравнение исходной системы не имеет смысла, так как основание логарифма в левой части равно нулю:

$$0,5x+0,4y=-4+4=0.$$

Рассмотрим вторую пару (u, v):

$$\begin{cases} 2^{-3x-2y}=25, \\ 5^{-4x-3y}=16; \end{cases} \iff \begin{cases} -3x-2y=\log_2 25, \\ -4x-3y=\log_5 16; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x=2\log_5 16-3\log_2 25, \\ y=-3\log_5 16+4\log_2 25. \end{cases}$$

Проверим, имеет ли исходная система смысл при полученных значениях x и y. Вычислим значение основания логарифма:

$$0,5x+0,4y=\log_5 16-\frac{3}{2}\log_2 25-1,2\log_5 16+1,6\log_2 25=0,1\log_2 25-0,2\log_5 16.$$

Сравним с нулём:

$$\begin{array}{rcl} 0,1\log_2 25-0,2\log_5 16 & \vee & 0 \\ 2\log_2 5 & \vee & 2\log_5 16 \\ \log_2 5 & >2> & \log_5 16. \end{array}$$

Значит, $\log_2 5>\log_5 16$, то есть основание логарифма положительно. Сравним его значение с единицей:

$$0,5x+0,4y=0,1\log_2 25-0,2\log_5 16<0,1\cdot(5-1)=0,4<1.$$

Итак, полученные значения x и y удовлетворяют исходной системе.

Ответ. $(2\log_5 16-3\log_2 25;\ -3\log_5 16+4\log_2 25)$.

Задачи

1. (ЕГЭ.В) Решить уравнение $2^x+2^{1-x}=3$.
2. (ЕГЭ.В) Решить уравнение $\lg^2 x^2+\lg 10x-6=0$.

3. (ЕГЭ.В) Решить уравнение $5^{2\sqrt{x}} + 125 = 6 \cdot 5^{\sqrt{x}+1}$.

4. (ИСАА-98.2) Решить уравнение $2^{-2x^2+1} - 12 \cdot 2^{-x^2} + 5 = 0$.

5. (Экон.М-98.4) Решить уравнение $3^{2(x+1)^2+1} - 87 \cdot 3^{x^2+2x} + 18 = 0$.

6. (Почв-73.5) Найти все решения уравнения $4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$.

7. (Физ-80.3) Решить уравнение $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$.

8. (Физ-74.3) Решить уравнение $2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0$.

9. (ИСАА-93.4) Решить уравнение

$$\log_x(3x-2) - 2 = \sqrt{\log_x^2(3x-2) + 4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}.$$

10. (Экон-79.5) Решить уравнение

$$\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(21 + 23x + 6x^2) = 4.$$

11. (Геогр-78.4) Решить неравенство

$$\sqrt{\log_9(3x^2 - 4x + 2)} + 1 > \log_3(3x^2 - 4x + 2).$$

12. (М/м-74.2) Решить неравенство $\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5x^2 - 10x + 10)$.

13. (Геогр-90.3) Решить неравенство $\dfrac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1$.

14. (М/м-76.2) Решить неравенство $\dfrac{7}{9^x - 2} \geq \dfrac{2}{3^x - 1}$.

15. (Экон-99.2) Решить неравенство $4 \cdot \sqrt{\dfrac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \leq 14 \cdot \sqrt{\dfrac{2^{x-2}}{2^x - 1}}$.

16. (Псих-81.4) Решить уравнение

$$\frac{4}{3}(\log_3(5x-6)^3)^2 - (\log_3(5x-6)^3)\log_3 x^6 = -6\left(\log_3\frac{1}{x}\right)^2.$$

17. (Псих-89.3) Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2, \\ -(\log_x 0,2)^3 + y = 1. \end{cases}$

18. (Геол.ОГ-74.2) Решить систему неравенств $\begin{cases} 3^{2x+1} - 3^{x+2} + 6 > 0, \\ 3^{2x+2} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 < 0. \end{cases}$

19. (Экон-75.3) Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{3 + \log_x(1-y)} = \log_x\left(x(1-y)\right), \\ xy = -6. \end{cases}$

20. (ВМК-97.4) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4^x + 5\cdot 2^x - 2\cdot 3^y = 2, \\ 2\cdot 9^y + 2^x + 2\cdot 3^y = 1. \end{cases}$$

21. (Хим-85.5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x-y| - \log_2^2(|x|+y+1) + 6 = 0, \\ (x-y)^2 - 6(x-y)\log_2(|x|+y+1) + 5\log_2^2(|x|+y+1) = 0. \end{cases}$$

22. (Хим-00.6) Решить уравнение

$$(26+15\sqrt{3})^x - 5(7+4\sqrt{3})^x + 6(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 5.$$

3.5. Замены в тригонометрических уравнениях и тригонометрические замены

Теоретический материал

В некоторых задачах удобно использовать следствия из основного тригонометрического тождества, например $(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2\sin x\cos x = 1 \pm \sin 2x$. Другими словами, если тригонометрическое уравнение или неравенство содержит выражения вида $\sin x \pm \cos x$ и $\sin 2x$, то заменой переменных $t = \sin x \pm \cos x$ оно может быть сведено к алгебраическому (этот подход реализован в примере 1).

Если ОДЗ исходной задачи ограничена (например, уравнение содержит иррациональность вида $\sqrt{a-x^2}$, поэтому область определения будет содержаться в отрезке $[-\sqrt{a};\sqrt{a}]$), то можно сделать *тригонометрическую замену* переменной $x = \sqrt{a}\sin t$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ или $x = \sqrt{a}\cos t$ $(0 \le t \le \pi)$. Такая замена в алгебраической задаче не приводит к потере возможных решений в силу ограниченности ОДЗ, но может существенно облегчить её решение благодаря большому арсеналу тригонометрических тождеств и способов преобразований тригонометрических выражений (см. пример 2).

Переход от алгебраической постановки к тригонометрической целесообразен и в случае, когда одно из уравнений задачи имеет вид $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$, где $c \ne 0$. Приведя уравнение к виду $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 x^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 y^2 = 1$ и сделав замену переменных $\left(\dfrac{a}{c}\right) x = \sin\phi$, $\left(\dfrac{b}{c}\right) y = \cos\phi$, можно трактовать его как основное тригонометрическое тождество и смело переходить к тригонометрической интерпретации задачи в целом.

Примеры решения задач

Пример 1. (Филол-74.3) Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x$.

Решение. Заметим, что

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Сделаем замену переменной $t = \sin 2x$, при этом $|t| \le 1$. Получим

$$1 - \frac{1}{2}t^2 = t \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 + 2t - 2 = 0.$$

Решая последнее уравнение, с учётом условия на t находим $t = \sqrt{3} - 1$. Возвращаемся к переменной x:

$$\sin 2x = \sqrt{3} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{(-1)^n}{2}\arcsin(\sqrt{3} - 1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\dfrac{(-1)^n}{2}\arcsin(\sqrt{3} - 1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. (Хим-94.3) Решить уравнение $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$.

Решение. Исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin 2x = \cos x - \sin x - 1, \\ \cos x - \sin x - 1 \ge 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $\sin 2x = 1 - (\cos x - \sin x)^2$, и заменяя $\cos x - \sin x$ на новую переменную t, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 1 - (\cos x - \sin x)^2 = \cos x - \sin x - 1, \\ \cos x - \sin x \ge 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - t^2 = t - 1, \\ t \ge 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t - 1 + t^2 - 1 = 0, \\ t \ge 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (t-1)(t+2) = 0, \\ t \ge 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad t = 1.$$

Возвращаемся к переменной x:

$$t = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x - \sin x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ 2\pi m; \ n, m \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. (Геол-81.6) Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{\frac{1 - x^2 + 2x\sqrt{1 - x^2} + x^2}{2}} = 1 - 2x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{(x + \sqrt{1 - x^2})^2}{2}} = 1 - 2x^2.$$

Из исходного уравнения получаем, что $-1 \le x \le 1$, поэтому можем сделать замену $x = \sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда с учётом ограничения на t уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\left|\frac{\sin t + \sqrt{1-\sin^2 t}}{\sqrt{2}}\right| = \cos 2t \quad\Longleftrightarrow\quad \left|\frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}\right| = \cos 2t \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \cos 2t \ge 0, \\ \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \pm \cos 2t = 0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \\ \left(\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 2t\right)\left(\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 2t\right) = 0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \\ 2\cos\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \\ \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \\ \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}; \\ t = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{12}; \\ t = -\frac{\pi}{4}. \end{array}\right.$$

Вычислим $x = \sin t$ для найденных значений переменной t:

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задачи

1. (Геол-00.4) Решить неравенство $4\cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x \le 3$.
2. (У) Решить неравенство $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{ctg}^3 x + \mathrm{tg}^4 x + \mathrm{ctg}^4 x \ge 0$.

3. (Псих-76.4) Найти все корни уравнения $\sqrt{5+4\sin x-4\cos^2 x}=2+\cos 2x$.

4. (ВМК-96(1).3) Решить уравнение

$$\sqrt{12\sin x-\frac{9}{2}\cos 2x+\frac{17}{2}}=\frac{9}{8}+4\sin x+\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

5. (Биол-76.1) Решить уравнение $|\sin x+\cos x|=1+\sin 2x$.

6. (Биол-85.5) Сколько корней на отрезке $[0;1]$ имеет уравнение

$$8x(2x^2-1)\cdot(8x^4-8x^2+1)=1?$$

7. (Экон.К-85.5) Среди всех решений (x,y,z,v) системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z^2+v^2=9, \\ xv+yz\geq 6 \end{cases}$$

найти такие, при каждом из которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

8. (М/м-75.2) Найти все пары действительных чисел (x,y), удовлетворяющих условию $x>0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} \sin\left((x-\sqrt{\pi})^2+y^2\right)=0, \\ \log_{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2\log_{2\pi}\sqrt{x^2+y^2}}=2. \end{cases}$$

9. (Экон.К-75.1) Найти все действительные решения уравнения

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^{\sin x}=\frac{10}{3}.$$

4. Нестандартные текстовые задачи

4.1. Недоопределённые задачи

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, сводящиеся к решению систем, в которых уравнений меньше, чем неизвестных.

Обычно в таких задачах надо найти некоторую комбинацию неизвестных, для чего, как правило, не требуется вычислять значения всех входящих в неё переменных.

При решении недоопределённых задач может помочь введение новых переменных, относительно которых система становится определённой. Иногда эти новые переменные и являются теми величинами, которые надо найти по условию задачи.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геогр-86.3) Три цистерны одинакового объёма начинают одновременно заполняться водой, причём в первую цистерну поступает 100 литров воды в минуту, во вторую – 60 и в третью – 80. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, вторая и третья частично заполнены, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Во сколько раз количество воды в начальный момент времени во второй цистерне больше, чем в третьей?

Решение. Пусть V л – объём первой цистерны и t мин. – время её заполнения водой, тогда $V = 100t$. Пусть во второй цистерне изначально было x л воды, а в третьей – y л. По условию задачи необходимо найти отношение $x : y$. Так как все три цистерны имеют одинаковый объём и будут заполнены водой одновременно, то $V = x + 60t$, $V = y + 80t$. В результате получаем систему:

$$\begin{cases} V = 100t, \\ V = x + 60t, \\ V = y + 80t; \end{cases} \iff \begin{cases} V = 100t, \\ 100t = x + 60t, \\ 100t = y + 80t; \end{cases} \iff \begin{cases} V = 100t, \\ x = 40t, \\ y = 20t; \end{cases}$$

откуда $x : y = 2$.

Ответ. В 2 раза.

Пример 2. (Филол-72.1) Гвоздь, 3 винта и 2 шурупа весят вместе 24 г, 2 гвоздя, 4 шурупа и 5 винтов – 44 г. Сколько весят вместе гвоздь, 4 винта и 2 шурупа?

Решение. Пусть 1 гвоздь весит x г, 1 шуруп – y г, 1 винт – z г, тогда

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 24, \\ 2x + 4y + 5z = 44; \end{cases}$$

а найти надо $x+2y+4z$. Из этой системы нельзя определить значения переменных x, y и z, однако можно предположить, что искомая величина $x + 2y + 4z$ является линейной комбинацией левых частей данных уравнений. Другими словами, найдутся такие числа a и b, что

$$a(x + 2y + 3z) + b(2x + 4y + 5z) = x + 2y + 4z.$$

Для того чтобы определить значения a и b, достаточно раскрыть скобки и приравнять коэффициенты при x, y и z. Слева при x будет $(a + 2b)$, а справа 1, следовательно, $a + 2b = 1$. Слева при y будет $(2a + 4b)$, а справа 2, следовательно, $2a + 4b = 2$. Слева при z будет $(3a + 5b)$, а справа 4, следовательно, $3a + 5b = 4$. В результате получаем систему

$$\begin{cases} a + 2b = 1, \\ 2a + 4b = 2, \\ 3a + 5b = 4; \end{cases}$$

откуда $a = 3,\ b = -1$.

Если домножить первое уравнение на 3 и вычесть из него второе уравнение, то получим

$$(3 - 2)x + (2 \cdot 3 - 4)y + (3 \cdot 3 - 5)z = 24 \cdot 3 - 44,$$

откуда $x + 2y + 4z = 28$.

З а м е ч а н и е. Предложенный метод решения (метод неопределённых коэффициентов) особенно эффективен при решении систем с большим числом уравнений. Небольшие системы можно решать и с помощью обычной подстановки, последовательно уменьшая число неизвестных и число уравнений.

О т в е т. 28.

Задачи

1. (Почв-83.1) Поле разделено на три участка. За день были вспаханы половина первого участка и $3/4$ второго участка, а третий участок, который составляет четвёртую часть всего поля, был вспахан полностью. Вспаханная за день площадь поля в два раза больше площади второго участка. Какую часть площади поля составляет площадь, вспаханная за день?

2. (Почв-78.3) Имеются два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота.

3. (Геол-97(2).6) В момент, когда два бассейна были пустыми, 4 трубы одинаковой производительности были подключены для заполнения первого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/6$ его объёма, одну трубу переключили для заполнения второго бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/2$ его объёма, ещё 2 трубы переключили для заполнения второго бассейна. После этого оба бассейна наполнились доверху одновременно. Найти отношение объёмов бассейнов. (Временем на переключения пренебречь).

4. (Фил-90.4) От двух сплавов массами 7 кг и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Определить массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

5. (Геогр-88.3) Из пункта A в пункт C, находящийся на расстоянии 20 км от A, выехал грузовик. Одновременно с ним из пункта B, расположенного между A и C на расстоянии 15 км от A, в пункт C вышел пешеход, а из C навстречу им выехал автобус. За какое время грузовик догнал пешехода, если известно, что это произошло через полчаса после встречи грузовика с автобусом, а пешеход до встречи с автобусом находился в пути втрое меньше времени, чем грузовик до своей встречи с автобусом?

6. (ВМК-89.3) Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а ещё через 30 минут – мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На

сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?

7. (Псих-82.5) Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из пункта B в пункт A выехал мотоциклист. Встретив в пути пешехода, мотоциклист сразу же развернулся, довез пешехода до пункта B, а затем тотчас же снова поехал в пункт A, куда и беспрепятственно добрался. В результате мотоциклист затратил на дорогу до пункта A в два с половиной раза больше времени, чем если бы он ехал из пункта B в пункт A, не подвозя пешехода. Во сколько раз медленнее пешеход добрался бы до пункта B, если бы весь путь от A до B он прошел пешком?

8. (Геол-94(2).9) Четыре бригады разрабатывали месторождение железной руды в течение трёх лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. По одному месяцу на первом и третьем году работа не велась, а все остальное время (то есть в течение 34 месяцев) работала только одна из бригад. Отношения времен работы первой, второй, третьей и четвёртой бригад и количество выработанной продукции соответственно равны:
в первый год $3:2:4:2$ и 10 млн. т,
во второй год $4:2:5:1$ и 9 млн. т,
в третий год $4:3:3:1$ и 8 млн. т.
Сколько млн. т железной руды выработали бы за 7 месяцев четыре бригады, работая все вместе?

4.2. Неравенства в текстовых задачах

Теоретический материал

В данном разделе рассматриваются текстовые задачи, которые описываются неравенством или смешанной системой, состоящей из уравнений и неравенств.

Решение этих задач существенно упрощается, если удаётся использовать такие свойства переменной, как *целочисленность* и *неотрицательность*. Обычно отбор физически допустимых решений неравенств на множестве целых чисел приводит к единственному значению целочисленной переменной.

Единственное решение системы неравенств может быть получено и для действительной переменной, если множества решений отдельных неравенств, входящих в систему, пересекаются в одной точке.

Если же в результате решения задачи получился целый промежуток или несколько значений и нет дополнительных ограничений, вытекающих из условия задачи и физического смысла переменной, то все найденные значения надо указывать в ответе.

Примеры решения задач

Пример 1. (Экон-78.4) Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на восемь вагонов больше и при этом всё равно один вагон остался не полностью загруженным.

Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось ещё на пять вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

Решение. Пусть потребовалось n вагонов по 80 т для погрузки S т груза; тогда из условия задачи получаем систему:

$$\begin{cases} 80(n-1) < S < 80n, \\ 60(n+8-1) < S < 60(n+8), \\ S = 50(n+8+5), \quad n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

подставляем $S = 50(n+13)$ в неравенства

$$\begin{cases} 8(n-1) < 5(n+13) < 8n, \\ 6(n+7) < 5(n+13) < 6(n+8); \end{cases} \iff \begin{cases} 65 < 3n < 73, \\ 17 < n < 23; \end{cases}$$

значит, $\dfrac{65}{3} < n < 23$, то есть $n = 22$, и $S = 50(n+13) = 50 \cdot 35 = 1750$ т.

Ответ. 1750 тонн.

Пример 2. (Экон.К-85.4) В 6 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул назад и на своём пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов, а прибыл в пункт A не ранее 22 часов того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B, если его собственная скорость (скорость в стоячей воде) вдвое больше собственной скорости лодки.

Решение. Обозначим за x и $2x$ км/ч собственные скорости лодки и катера, u км/ч – скорость течения реки, S км – путь AB, t ч – время движения катера от пункта A до пункта B, тогда $T = t + 6$ ч – искомое время прибытия катера в пункт B.

Так как катер доплыл до пункта B за t ч, а лодка по условию за 10 часов, то

$$S = t(2x+u), \quad S = 10(x+u).$$

Поскольку катер вернулся в пункт A не ранее 22 часов того же дня, то в пути от A до B и обратно он провёл не менее 16 ч, то есть

$$t + \frac{S}{2x-u} \geq 16.$$

К моменту, когда катер прибыл в B, лодка проплыла $t(x+u)$ км. Дойдя до пункта B, катер сразу повернул назад и на своём пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов. Следовательно, суммарное время движения катера от A до B и от B до встречи с лодкой не превосходит 8 ч:

$$t + \frac{S - t(x+u)}{(x+u)+(2x-u)} \leq 8.$$

Запишем полученные уравнения и неравенства в систему:

$$\begin{cases} S = t(2x+u), \\ S = 10(x+u), \\ t + \dfrac{S}{2x-u} \geq 16, \\ t + \dfrac{S - t(x+u)}{(x+u)+(2x-u)} \leq 8; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t(2x+u) = 10(x+u), \\ t + \dfrac{t(2x+u)}{2x-u} \geq 16, \\ t + \dfrac{t(2x+u) - t(x+u)}{3x} \leq 8; \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t\left(2+\dfrac{u}{x}\right) = 10\left(1+\dfrac{u}{x}\right), \\ \dfrac{4tx}{2x-u} \geq 16, \\ t \leq 6; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u}{x} = \dfrac{2t-10}{10-t}, \\ \dfrac{4t}{2-\dfrac{u}{x}} \geq 16, \\ t \leq 6. \end{cases}$$

Подставив выражение для величины u/x из первого уравнения в неравенство, получим систему для t:

$$\begin{cases} \dfrac{4t}{2-\dfrac{2t-10}{10-t}} \geq 16, \\ t \leq 6; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t(10-t)}{15-2t} \geq 8, \\ t \leq 6; \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} t^2 - 26t + 120 \leq 0, \\ t \leq 6; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6 \leq t \leq 20, \\ t \leq 6; \end{cases} \Longleftrightarrow \quad t = 6.$$

В результате искомое значение равно $T = t + 6 = 12$ ч.

Ответ. В 12 ч.

Задачи

1. (Физ-68.3) Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп., за альбомы – 56 коп. Книг купили на 6 штук больше, чем альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги больше чем на 1 руб. превосходит цену одного альбома?

2. (Псих-84.5) Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвёртого её членов меньше 4. Найти первый член этой прогрессии.

3. (Геогр-97(1).4) Танкер может заполняться через две трубы, причём его заполнение через первую трубу происходит на 5 часов медленнее, чем через вторую. При каких значениях времени заполнения танкера через первую трубу его заполнение через обе трубы одновременно занимает не менее 6 часов?

4. (Хим-97.4) N насосов различной мощности наполняют бассейн водой. Первый насос, работая автономно, может наполнить весь бассейн за 2 часа, второй – за 4 часа, $\ldots, n$-ый – за 2^n часов. Каким должно быть наименьшее число насосов n, чтобы все n насосов, работая одновременно, наполнили бассейн быстрее, чем за 1 час и 1 минуту? Можно ли наполнить бассейн быстрее, чем за 1 час?

5. (М/м-92.4) Один рабочий на новом станке производит за 1 час число деталей, большее 8, а на старом станке – на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма?

6. (Экон-85.5) Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позже чем через 40 минут вслед за ним вышел ещё один пешеход. В пункт B сначала пришел один из пешеходов, а другой достиг B не раньше, чем через час после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они бы прибыли в пункт B с интервалом не более чем в 20 минут. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B, если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.

7. (Геол.ОГ-83.5) Автобус проходит путь AE, состоящий из участков AB, BC, CD, DE длиной 10 км, 5 км, 5 км, 6 км соответственно. При этом, согласно расписанию, выезжая из пункта A в 9 ч, он проходит пункт B в $9\frac{1}{5}$ ч, пункт C – в $9\frac{3}{8}$ ч, пункт D – в $9\frac{2}{3}$ ч. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения пунктов B, C, D и времени движения автобуса от A до E при скорости v, не превосходила 51,7 мин?

4.3. Оптимальный выбор, наибольшие и наименьшие значения

Теоретический материал

Текстовые задачи, в которых требуется отыскать наибольшее или наименьшее значение некоторой функции нескольких переменных, связанных дополнительными условиями, встречаются достаточно часто.

Общий подход к решению таких задач состоит в следующем. Обозначаем исследуемую функцию за новую переменную, выражаем одну из исходных переменных через новую и в результате получаем уравнение, неравенство или систему соотношений, зависящих (в том числе) от новой переменной. Остаётся выяснить, при каких условиях задача в новой формулировке имеет решения. На этом этапе активно используются свойства элементарных функций, что позволяет обойтись без применения производной.

Задачи на оптимальный выбор, как правило, сводятся к отысканию максимального (минимального) значения некоторой функции от нескольких целочисленных переменных, удовлетворяющих системе уравнений или неравенств в целых числах, и поэтому являются частным случаем задач о поиске наибольшего и наименьшего значения. Основные особенности решения задач на оптимальный выбор рассмотрены в примере 1.

Примеры решения задач

Пример 1. (Экон.К-84.5) Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для сборки 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго вида соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир было наибольшим?

Решение. Пусть n – число 12-квартирных домов, m – число 16-квартирных, k – 21-квартирных домов. Тогда $S = 12n + 16m + 21k$ общее число квартир. Так как всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида, то

$$\begin{cases} 70n + 110m + 150k \le 900, \\ 100n + 150m + 200k \le 1300; \end{cases} \iff \begin{cases} 7n + 11m + 15k \le 90, \\ 2n + 3m + 4k \le 26. \end{cases}$$

Заметим два полезных соотношения, связывающих число квартир и количество деталей.

1) Два 12-квартирных дома (24 квартиры за 140 и 200 деталей) выгоднее, чем один 21-квартирный дом (21 квартира за 150 и 200 деталей).

Вывод: строить 21-квартирные дома невыгодно; значит, $k = 0$.

2) Три 12-квартирных дома (36 квартир за 210 и 300 деталей) выгоднее двух 16-квартирных домов (32 квартиры за 220 и 300 деталей).

Вывод: число 16-квартирных домов меньше двух; значит, $m \in \{0; 1\}$.

Теперь задача свелась к отысканию целых $n \ge 0$ и $m \in \{0; 1\}$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 7n + 11m \le 90, \\ 2n + 3m \le 26; \end{cases}$$

при которых величина $S = 12n + 16m$ принимает наибольшее значение.

При $m = 0$ максимальное значение n, удовлетворяющее системе, равно 12. При этом $S = 12n = 144$.

При $m = 1$ максимальное значение n, удовлетворяющее системе, равно 11. При этом $S = 12n + 16m = 148 > 144$.

Следовательно, общее количество квартир будет наибольшим при $n = 11$, $m = 1$, $k = 0$.

Ответ. 11 домов по 12 квартир и один дом на 16 квартир.

Пример 2. (Экон.К-78.4) Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй – 10% меди и 90% марганца, третий – 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

Решение. Введём обозначения:

	Никель	Медь	Марганец	Масса
I сплав :	30%	70%	–	x кг
II сплав :	–	10%	90%	y кг
III сплав :	15%	25%	60%	z кг
Общий :	$60-p\%$	$p\%$	40%	$x+y+z$ кг

Из условия задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 0,9y+0,6z=0,4(x+y+z), \\ \dfrac{0,7x+0,1y+0,25z}{x+y+z}\cdot 100=p; \end{cases} \iff \begin{cases} 4x-5y-2z=0, \\ p=\dfrac{70x+10y+25z}{x+y+z}; \end{cases}$$

где $0\le p\le 60,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

Выразив $y=\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}z$ из первого уравнения и подставив во второе, получим

$$p=\frac{70x+8x-4z+25z}{x+\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}z+z}=5\cdot\frac{7z+26x}{z+3x}=5\cdot\frac{7(z+3x)+5x}{z+3x}=35+\frac{25x}{z+3x}.$$

Из условия $y=\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}z\ge 0$ следует, что $0\le z\le 2x$, значит,

$$35+\frac{25x}{2x+3x}\le p\le 35+\frac{25x}{0+3x}\iff 40\le p\le\frac{130}{3}=43\frac{1}{3}.$$

При этом наименьшее значение p достигается при $z=2x,\ y=0$; наибольшее – при $z=0,\ y=\frac{4}{5}x$.

Ответ. 40% и $43\frac{1}{3}$%.

Задачи

1. (Экон.К-68.3) На 100 рублей решено купить ёлочных игрушек. Ёлочные игрушки продаются наборами. Набор, состоящий из 20 игрушек, стоит 4 рубля; набор, состоящий из 35 игрушек, стоит 6 рублей и набор, состоящий из 50 игрушек, стоит 9 рублей. Сколько каких наборов нужно купить, истратив все 100 рублей, чтобы было куплено наибольшее количество игрушек?

2. (Экон.М-96.3) В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа и 600 тыс. руб. и 15 кг для второго типа. Общий вес комплектующих равен 321 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

3. (Экон-96.4) В контейнер упакованы комплектующие изделия трёх типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

4. (Псих-87.3) Бригада маляров белила потолки в классе и в актовом зале школы, причём площадь потолка в актовом зале в три раза больше, чем площадь потолка в классе. В той части бригады, которая работала в актовом зале, было на 6 маляров больше, чем в той части, которая работала в классе. Когда побелка всего потолка в актовом зале закончилась, та часть бригады, которая была в классе, ещё работала. Какое наибольшее число маляров могло быть в бригаде, если все они начали работать одновременно и работали с одинаковой производительностью?

5. (Экон-90.4) Натуральные числа a, b, c, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найти числа a, b и c, если известно, что при указанных условиях сумма $a + b + c$ максимальна.

6. (Псих-94.5) Абитуриенты сдавали экзамены в течение трёх дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причём каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равно числу используемых аудиторий. Определить минимальное возможное число абитуриентов, которое могло бы быть проэкзаменовано при этих условиях.

7. (ВМК-87.5) С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Вес маленького блока 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

8. (Геол-99.6) Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в которой $a_3 = -13$ и $a_7 = 3$. Определить, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найти значение этой суммы.

9. (Экон-94.5) Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|$ тыс. руб., а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540 - \frac{3}{10}n$ тыс. руб. Определить ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.

10. (ВМК-95.5) Строительной организации необходимо построить некоторое количество одинаковых домов общей площадью ровно 2500 кв.м. Стоимость одного дома площадью a кв.м складывается из стоимости материалов $p_1a^{3/2}$ тыс. руб., стоимости строительных работ p_2a тыс. руб. и стоимости отделочных работ $p_3a^{1/2}$ тыс. руб. Числа p_1, p_2, p_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, их сумма равна 21, а их произведение равно 64. Если построить 63 дома, то затраты на материалы будут

меньше, чем затраты на строительные и отделочные работы. Сколько следует построить домов, чтобы общие затраты были минимальными?

5. Использование свойств квадратного трёхчлена в задачах с параметрами

5.1. Исследование свойств квадратичной функции в зависимости от значений параметра. Теорема Виета

Теоретический материал

По нашим наблюдениям, тема *"Квадратный трёхчлен и его свойства"* хорошо усваивается школьниками. Каждый абитуриент, сдающий математику на вступительных экзаменах, помнит общий вид и график квадратного трёхчлена, формулы корней и даже формулировки основных теорем. В принципе, этих знаний достаточно для того, чтобы решить любую задачу выпускных и вступительных экзаменов на свойства квадратного трёхчлена, в том числе и задачу с параметрами. Однако для оптимизации решения необходимо владеть специальными навыками и приёмами работы с квадратными уравнениями и неравенствами.

Напомним основные теоремы, связывающие коэффициенты квадратного трёхчлена с его корнями.

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 (может быть, совпадающих), то для них выполнены соотношения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Обратная теорема Виета. Если числа x_1 и x_2 являются решениями системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q; \end{cases}$$

то они же являются корнями приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$.

Особо подчеркнём, что теорема Виета может быть применена только к квадратному трёхчлену, *имеющему корни*. Это означает, что прежде чем использовать хотя бы одно соотношение, связывающее корни квадратного трёхчлена с его коэффициентами, необходимо убедиться в существовании корней, то есть проверить неотрицательность дискриминанта:

$$D = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (ИСАА-92.6) При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?

Решение. Уравнение имеет корни при неотрицательном дискриминанте:

$$D/4 = a^2 - 2a^2 - 4a - 3 \geq 0 \iff a^2 + 4a + 3 \leq 0 \iff -3 \leq a \leq -1.$$

Сумму квадратов корней найдём, используя теорему Виета:

$$S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4a^2 - 2(2a^2 + 4a + 3) = -8a - 6.$$

При $-3 \leq a \leq -1$ получаем $2 \leq -8a-6 \leq 18$, следовательно, наибольшее значение суммы равно 18 и оно достигается при $a = -3$.

Ответ. -3; 18.

Пример 2*. (М/м-96.6) При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2 - x + a^2 + 2)^2 = 4a^2(2x^2 + 2 - x)$$

имеет ровно три различных решения?

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$((x^2 - x + 2) + a^2)^2 = 4a^2(x^2 + (x^2 - x + 2));$$
$$(x^2 - x + 2)^2 + a^4 + 2a^2(x^2 - x + 2) = 4a^2x^2 + 4a^2(x^2 - x + 2);$$
$$((x^2 - x + 2) - a^2)^2 - 4a^2x^2 = 0;$$
$$(x^2 - x + 2 - a^2 - 2ax)(x^2 - x + 2 - a^2 + 2ax) = 0.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - (2a + 1)x + 2 - a^2 = 0; \\ x^2 + (2a - 1)x + 2 - a^2 = 0. \end{array}\right.$$

Она имеет ровно три различных решения в одном из следующих случаев: у каждого из уравнений по два корня, но только один из них общий; у одного из уравнений один корень, а у другого два, причём общих решений нет.

1) Если уравнения имеют общий корень, то он является решением системы

$$\begin{cases} x^2 - (2a + 1)x + 2 - a^2 = 0, \\ x^2 + (2a - 1)x + 2 - a^2 = 0; \end{cases}$$

вычитая одно уравнение из другого, получаем $4ax = 0$, но при $a = 0$ уравнение $x^2 - x + 2 = 0$ не имеет решений; значит, только $x = 0$ может быть общим корнем уравнений (необходимое условие). Подставив $x = 0$ в любое из уравнений, получим $2 - a^2 = 0 \iff a = \pm\sqrt{2}$.

Для наличия общего корня у двух рассматриваемых уравнений необходимо, чтобы $a = \pm\sqrt{2}$, причём тогда этим корнем станет $x = 0$.

Проверим на достаточность, подставив в исходную совокупность:

- $a = -\sqrt{2}$, $\quad \left[\begin{array}{l} x^2 - x(1-2\sqrt{2}) = 0; \\ x^2 + x(-1-2\sqrt{2}) = 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_1 = 0,\ x_2 = 1-2\sqrt{2}; \\ x_1 = 0,\ x_2 = 1+2\sqrt{2}; \end{array}\right.$

  совокупность имеет три различных решения; значит, $a = -\sqrt{2}$ подходит;

- $a = \sqrt{2}$, $\quad \left[\begin{array}{l} x^2 - x(2\sqrt{2}+1) = 0; \\ x^2 + x(2\sqrt{2}-1) = 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_1 = 0,\ x_2 = 1+2\sqrt{2}; \\ x_1 = 0,\ x_2 = 1-2\sqrt{2}; \end{array}\right.$

  совокупность имеет три различных решения; значение $a = \sqrt{2}$ подходит.

Таким образом, общий корень у двух исходных уравнений имеется в тех и только тех случаях, когда $a = \pm\sqrt{2}$, причём им является $x = 0$.

2) Первое уравнение имеет один корень ($D = 0$), второе уравнение имеет два корня ($D > 0$), общих корней нет ($a \neq \pm\sqrt{2}$):

$$\begin{cases} 8a^2 + 4a - 7 = 0, \\ 8a^2 - 4a - 7 > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 8a^2 - 7 = -4a, \\ -8a > 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{15}}{4}, \\ a < 0; \end{cases} \iff a = \frac{-1-\sqrt{15}}{4}.$$

3) Первое уравнение имеет два корня ($D > 0$), второе уравнение имеет один корень ($D = 0$), общих корней нет ($a \neq \pm\sqrt{2}$):

$$\begin{cases} 8a^2 + 4a - 7 > 0, \\ 8a^2 - 4a - 7 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 8a > 0, \\ 8a^2 - 7 = 4a; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a > 0, \\ a = \dfrac{1 \pm \sqrt{15}}{4}; \end{cases} \iff a = \frac{1+\sqrt{15}}{4}.$$

Таким образом, из двух последних случаев получаем $a = \pm\dfrac{1+\sqrt{15}}{4}$.

О т в е т. $\pm\sqrt{2}$; $\pm\dfrac{1+\sqrt{15}}{4}$.

Задачи

1. (ЕГЭ.С) При каких значениях a функция $y = x^2 + (a-2)x + 0,25$ не принимает отрицательных значений?

2. (Биол-75.2) Найти все значения параметра p, при которых квадратное уравнение $(3x)^2 + (3^{3+\frac{1}{p}} - 15)x + 4 = 0$ имеет ровно одно решение.

3. (У) Пусть $4a + 2b + c > 0$, и уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней. Каков знак c?

4. (У) При каких значениях q уравнение $x^2 - px + q = 0$ имеет решение при любом p?

5. (У) Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px - q = 0$. Найти $x_1^4 + x_2^4$, не вычисляя этих корней.

6. (У) Дано уравнение $x^2 + px + q = 0$. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются сумма квадратов и сумма кубов корней данного уравнения.

7. (Псих-78.5) Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x) = ax^2+bx+c$ выполнены неравенства: $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$, $f(3) < -4$. Определить знак коэффициента a.

8. (Физ-94(2).7) Найти все значения a, для каждого из которых система

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0, \\ x \leq 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы для одного x.

9. (М/м-71.4) Найти все α, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x + \alpha \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6\alpha \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

10. (Экон-98.5) Найти все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$

принадлежат интервалу $(-1; 2)$.

11. (Физ-93.7) Уравнение $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$, имеет одним из своих корней число $x = 3$. Решить уравнение $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$.

12. (Физ-89.5) Найти все значения параметра m, при каждом из которых уравнение $(2x)^2 - 4x \cdot (m \cdot 3^m)^{\frac{1}{2}} + 3^{m+1} + m - 3 = 0$ имеет корни. Выяснить знаки корней при различных значениях m.

13. (Физ-91.5) При каких значениях a все корни уравнения $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$ удовлетворяют условию $|x| < 1$?

14. (Псих-81.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трёхчлена $4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$ на отрезке $0 \leq x \leq 2$ равно 3.

5.2. Теоремы о расположении корней квадратного трёхчлена на числовой оси

Теоретический материал

Во многих задачах на квадратный трёхчлен требуется выяснить особенности расположения его корней на числовой оси, при этом необходимости в вычислении самих корней нет. Простейшая задача этого типа состоит в определении знаков корней некоторого квадратного трёхчлена.

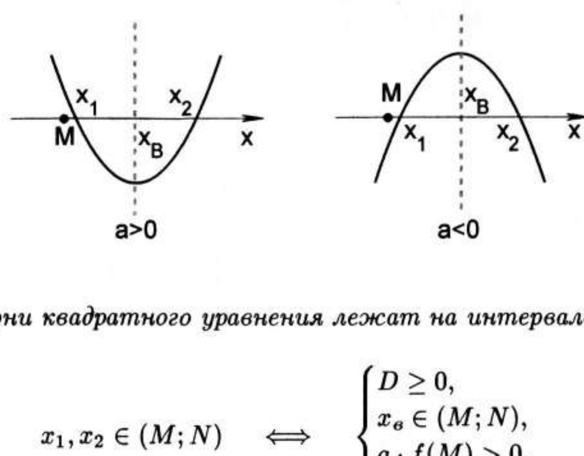
Рецепт решения таких задач известен. За основу всегда берём теорему Виета и добавляем дополнительные утверждения, использующие известные свойства парабол.

Обозначим через x_1, x_2 корни квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, через $D = b^2 - 4ac$ его дискриминант, через $x_в$ абсциссу вершины параболы.

Справедливы следующие теоремы.

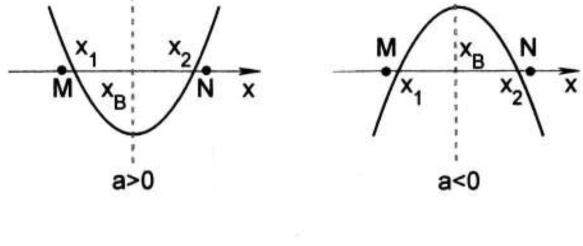
Теорема 1 (*корни квадратного уравнения больше некоторого числа* M)

$$\begin{cases} x_1 > M, \\ x_2 > M; \end{cases} \iff \begin{cases} D \geq 0, \\ x_в > M, \\ a \cdot f(M) > 0. \end{cases}$$



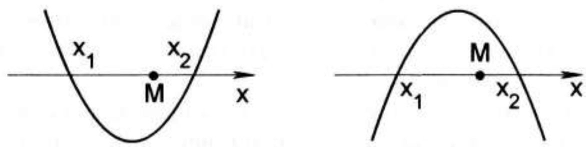
Теорема 2 (*корни квадратного уравнения лежат на интервале* $(M; N)$)

$$x_1, x_2 \in (M; N) \iff \begin{cases} D \geq 0, \\ x_в \in (M; N), \\ a \cdot f(M) > 0, \\ a \cdot f(N) > 0. \end{cases}$$



Теорема 3 (*число M расположено между корнями*)

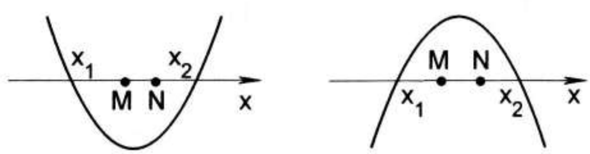
$$x_1 < M < x_2 \iff a \cdot f(M) < 0.$$



a>0 a<0

Теорема 4 (*интервал $(M; N)$ расположен между корнями*)

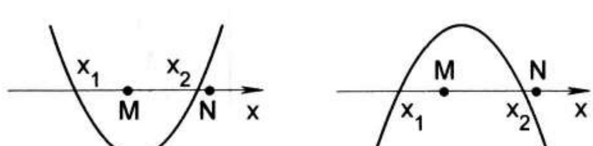
$$x_1 < M < N < x_2 \iff \begin{cases} a \cdot f(M) < 0, \\ a \cdot f(N) < 0. \end{cases}$$



a>0 a<0

Теорема 5 (*один корень лежит на интервале $(M; N)$, другой корень – левее этого интервала*)

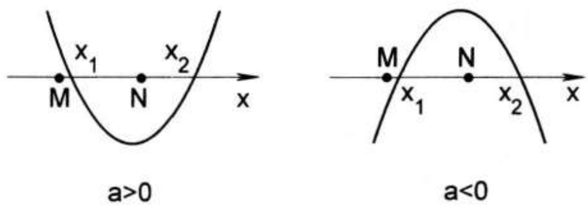
$$x_1 < M < x_2 < N \iff \begin{cases} a \cdot f(M) < 0, \\ a \cdot f(N) > 0. \end{cases}$$



a>0 a<0

Теорема 6 (*один корень лежит на интервале $(M; N)$, другой корень – правее этого интервала*)

$$M < x_1 < N < x_2 \iff \begin{cases} a \cdot f(M) > 0, \\ a \cdot f(N) < 0. \end{cases}$$



Подобные равносильные системы можно получить и для других случаев расположения корней квадратного трёхчлена относительно точек, отрезков, конечных или бесконечных интервалов. Задача читателя - не только помнить приведённые теоремы и уметь их доказывать, но и научиться формулировать новые утверждения о расположении корней квадратного трёхчлена в каждом конкретном случае.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-96(1).8) Найти все значения a, при которых неравенство $ax^2+1>4x-3a$ выполняется для всех x из интервала $(-1;0)$.

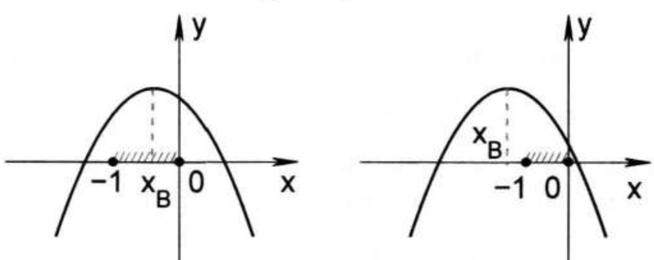
Решение. Обозначим $f(x)=ax^2-4x+3a+1$ и запишем исходное неравенство в виде $f(x)>0$.

1) Рассмотрим отдельно случай, когда функция $f(x)$ не является квадратичной. При $a=0$ функция принимает вид $f(x)=-4x+\ 1$, и неравенство $f(x)>0$ справедливо при при всех $x\in(-1;0)$, следовательно, $a=0$ подходит.

2) При $a<0$ ветви параболы направлены вниз, и условие $f(x)>0$ при $x\in(-1;0)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(-1)\ge 0, \\ f(0)\ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} a+5+3a\ge 0, \\ 3a+1\ge 0; \end{cases} \iff a\ge -\frac{1}{3},$$

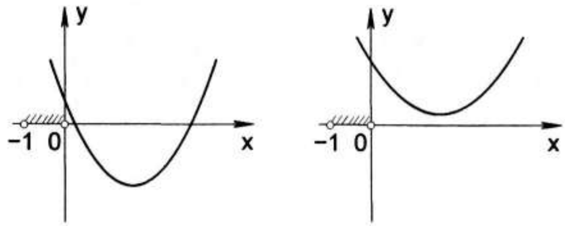
следовательно, в ответ войдут $a\in\left[-\frac{1}{3};0\right)$.



3) При $a>0$ ветви параболы направлены вверх. Так как $x_{\text{в}}=\dfrac{2}{a}>0$, то условие $f(x)>0$ при $x\in(-1;0)$ равносильно условию

$$f(0)\ge 0 \iff 3a+1\ge 0 \iff a\ge -\frac{1}{3},$$

то есть все положительные значения a подходят.



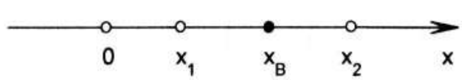
Заметим, что условие $f(0) \geq 0$ должно выполняться независимо от того, есть ли у этой параболы корни или нет. Это даёт нам возможность не рассматривать по отдельности три варианта: $D = 0$, $D > 0$ и $D < 0$.

Объединив все результаты, получим, что $a \geq -\dfrac{1}{3}$.

Ответ. $\left[-\dfrac{1}{3}; \infty\right)$.

Пример 2. (Геогр-90.5) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)x + a = 5$ имеет два различных положительных корня.

Решение. Обозначим $f(x) = (a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)x + a - 5$. Уравнение $f(x) = 0$ будет иметь два различных положительных корня в том и только в том случае, когда $\begin{cases} D > 0, \\ x_в > 0, \\ (a+1)f(0) > 0. \end{cases}$



1) $D = (|a+2| - |a+10|)^2 - 4(a+1)(a-5) = -2|a+2||a+10| - 2a^2 + 40a + 124 > 0$

$$\iff \quad |a^2 + 12a + 20| < -a^2 + 20a + 62 \quad \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} a^2 + 12a + 20 < -a^2 + 20a + 62, \\ a^2 + 12a + 20 > a^2 - 20a - 62; \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} a^2 - 4a - 21 < 0, \\ 16a + 41 > 0; \end{cases} \quad \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} -3 < a < 7, \\ a > -\dfrac{41}{16}; \end{cases} \quad \iff \quad -\frac{41}{16} < a < 7.$$

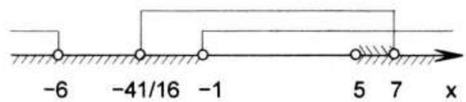
2) $x_в = \dfrac{|a+10| - |a+2|}{2(a+1)} > 0 \quad \iff \quad \dfrac{(a+10)^2 - (a+2)^2}{2(a+1)} > 0 \quad \iff$

$\dfrac{(a+10-a-2)(a+10+a+2)}{a+1} > 0 \iff \dfrac{a+6}{a+1} > 0 \iff a \in (-\infty; -6) \cup (-1; +\infty)$.

В первом равносильном переходе мы воспользовались тем, что разность модулей двух выражений имеет тот же знак, что и разность их квадратов.

3) $(a+1)f(0) = (a+1)(a-5) > 0 \iff a \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

Отметим полученные промежутки на числовой прямой:



Пересечением является интервал $(5; 7)$.

З а м е ч а н и е. Вместо условий на вершину и значение в нуле можно было использовать условия, полученные с помощью теоремы Виета, то есть

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_в > 0, \\ (a+1)f(0) > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq -1, \\ D > 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0; \end{cases}$$

и множества решений этих систем совпадают.

О т в е т. $(5; 7)$.

Задачи

1. (У) При каких значениях a оба корня уравнения $(2-a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ больше $1/2$?

2. (У) При каких значениях a один из корней уравнения

$$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + (a - 5) = 0$$

больше 1, а другой меньше 1?

3. (У) Найти все значения a, при которых оба корня уравнения

$$(a+1)x^2 - 3ax + 4a = 0$$

больше 1.

4. (У) Известно, что корни x_1 и x_2 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют неравенству $x_1 < -1 < x_2$. Доказать, что $a^2 + ac < ab$.

5. (Физ-94(2).7) Найти все значения a, для каждого из которых система

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0, \\ x \leq 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы для одного x.

6. (ЕГЭ.С) При каком значении a область определения функции

$$y = \sqrt[6]{-x^2+4x+a} + \sqrt{x-3}$$

состоит из одной точки?

7. (ЕГЭ.С) При каком значении a область определения функции

$$y = \sqrt[6]{-x^2+6x+a} + \sqrt{x-4}$$

состоит из одной точки?

8. (М/м-93(2).2) Найти все значения a, при которых уравнение

$$4^x + (a^2+5)\cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$$

не имеет решений.

9. (ИСАА-91.6) При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y-|x|=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

10. (Геол-97(1).8) При каких α система

$$\begin{cases} \alpha(x-4)=3(y+2), \\ y+\sqrt{x}=0 \end{cases}$$

имеет два различных решения?

11. (Экон.К-77.4) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_3(9^x+9a^3)=x$ имеет два решения.

12. (Физ-94(1).7) При каких значениях a уравнение $2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$ имеет четыре различных решения?

13. (Геол-89.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a^2-6a+9)(2+2\sin x-\cos^2 x)+(12a-18-2a^2)(1+\sin x)+a+3=0$$

не имеет решений.

14. (Экон.М-95.6) Найти все значения p, при которых уравнение $x-2=\sqrt{-2(p+2)x+2}$ имеет единственное решение.

15. (Псих-93.5) Обозначим через x_1 и x_2 корни квадратного трёхчлена

$$(a-1)x^2-(2a+1)x+2+5a.$$

1) Найти все a, при которых $x_1>1$, $x_2>1$.
2) Найти все b, при которых величина $(x_1-b)(x_2-b)$ принимает постоянное значение при всех a, при которых определена.

16. (Биол-77.5) Найти все те значения параметра s, при каждом из которых корни уравнений $x^2+\dfrac{3x}{s}+2s=0$ и $x^2+\dfrac{12x}{s}-s=0$ не чередуются, то есть оба уравнения имеют по два корня и между корнями одного из уравнений нет одного корня другого уравнения.

17. (ВМК-88.5) Найти все a, при которых уравнение

$$((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2(x^2+x)\lg a)\cdot\lg\frac{36a-9a^2}{35}=0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1.

18. (М/м-91.5) Найдите все пары чисел p и q, при которых неравенство $|x^2+px+q|>2$ не имеет решений на отрезке $[1;5]$.

5.3. Смешанные задачи

1. (ЕГЭ.В) Найти все значения a, при которых функция $y=\sqrt[9]{5x^2-(2-a)x+2-4a}$ имеет минимум в точке $x_0=\dfrac{1}{2}$.

2. (ЕГЭ.В) Найти все значения a, при которых функция $y=\sqrt[5]{ax^2+15x-1}$ имеет максимум в точке $x_0=1,5$.

3. (У) Найти наименьшее значение, принимаемое z, если $z=x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4$.

4. (У) При каком целом p уравнения $3x^2-4x+p-2=0$ и $x^2-2px+5=0$ имеют общий корень?

5. (У) Докажите, что если значение квадратного трёхчлена ax^2-bx+c является целым числом при $x_1=0, x_2=1$ и $x_3=2$, то при любом целом x значение данного трёхчлена является целым числом.

6. (У) Доказать, что при любых допустимых значениях a,p,q уравнение

$$\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}=\frac{1}{a}$$

имеет вещественные корни.

7. (У) На плоскости (p,q) изобразить множество точек таких, что уравнение $x^2+px+q=0$ имеет одним из корней фиксированное число a.

8. (У) Коэффициенты p и q квадратного трёхчлена x^2+px+q нечётны. Доказать, что он не может иметь целых корней.

9. (Псих-70.2) Найти все a, при которых уравнение $x^8+ax^4+1=0$ имеет ровно четыре корня, образующих арифметическую прогрессию.

10. (ВМК-74.2) Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства
$$\log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$
является решением неравенства $49x^2 - 4a^4 \leq 0$.

11. (Геол-99.2) Известно, что x_1, x_2 – корни уравнения
$$2x^2 - (\sqrt{3}+5)x - \sqrt{4+2\sqrt{3}} = 0.$$
Найти значение $A = x_1 + x_1x_2 + x_2$ и выяснить, какое из чисел больше: A или $1,999$?

12. (Экон.К-78.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$ выполняется для любого числа x.

13. (Биол-73.5) Найти все значения действительного параметра α, для которых неравенство $4^x - \alpha \cdot 2^x - \alpha + 3 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение.

14. (Экон-77.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3 - |x-a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

15. (Экон-80.5) Найти все целые значения параметра k, при каждом из которых уравнение $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \dfrac{x}{2} = 3k$ имеет решения. Найти все эти решения.

16. (Псих-71.5) При каких значениях a уравнение
$$\sin^2 3x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\sin 3x + \frac{a}{2} = 0$$
имеет ровно три корня, расположенных на отрезке $\left[\dfrac{2\pi}{3}; \pi\right]$?

17. (Геол-77.5) Найти все значения параметра k, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств
$$x^2 + 4kx + 3k^2 > 1 + 2k \quad \text{и} \quad x^2 + 2kx \leq 3k^2 - 8k + 4.$$

18. (Геол-88.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых область значений функции $y = \dfrac{\sin x + 2(1-a)}{a - \cos^2 x}$ содержит отрезок $[1; 2]$.

19. (М/м-99.5) Найти все значения a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства
$$\frac{x^2 + (2a^2+6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2+7a-7)x - a^2 + 2a - 3} < 0,$$
не меньше 1.

6. Использование различных свойств функций и применение графических иллюстраций

В этом параграфе приведены задачи, при решении которых решающую роль играет использование таких свойств функций как монотонность, чётность и нечётность, периодичность. Рекомендуем вам, прежде чем приступать к решению задач данного параграфа, повторить свойства элементарных функций.

6.1. Область определения функции, монотонность, периодичность, чётность и нечётность

Теоретический материал

Функцией называется отображение числового множества X на числовое множество Y, при котором каждому значению x из множества X, называемого *областью определения*, ставится в соответствие единственное значение y из множества Y, называемого *множеством значений*. Для обозначения функции используется запись $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для всех $x \in X$ выполняется соотношение $(-x) \in X$ и равенство $f(x) = f(-x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для всех $x \in X$ имеет место соотношение $(-x) \in X$ и равенство $f(x) = -f(-x)$.

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на множестве D, если для любых значений $x_1, x_2 \in D$ таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $f(x)$ называется *убывающей* на множестве D, если для любых значений $x_1, x_2 \in D$ таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) < f(x_1)$.

Свойства монотонных функций

- Сумма возрастающих (убывающих) функций есть также возрастающая (убывающая) функция. Сумма возрастающей и убывающей функций может вообще не являться монотонной функцией.
- Произведение неотрицательных возрастающих (убывающих) функций есть также возрастающая (убывающая) функция.
- Монотонная функция все свои значения принимает только один раз.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что для всех $x \in X$ выполняются соотношения $(x+T) \in X$, $(x-T) \in X$ и равенства $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$. При этом число T называется *периодом* функции.

Свойства периодических функций

- Если $y = f(x)$ – периодическая функция с периодом T, то $y = f(kx)$ – периодическая функция с периодом $T_1 = \dfrac{T}{k}$.

- Функция, являющаяся суммой или произведением двух периодических функций с периодом T, будет периодической с периодом T, однако T может не быть её наименьшим положительным периодом. Например, период функции $y(x) = \sin x \cos x$ равен π, а период каждого из множителей равен 2π.

- Функция, являющаяся суммой или произведением двух периодических функций с разными периодами, может вообще не быть периодической.

Примеры решения задач

Пример 1. (У) Найти область определения функции

$$y = \arcsin(\arcsin x) + \arccos \frac{2\arccos x}{\pi - 2}.$$

Решение. Из определений арксинуса и арккосинуса следует, что

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ -1 \le \arcsin x \le 1, \\ -1 \le \dfrac{2\arccos x}{\pi - 2} \le 1; \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ -\sin 1 \le x \le \sin 1, \\ -\dfrac{\pi - 2}{2} \le \arccos x \le \dfrac{\pi - 2}{2}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -\sin 1 \le x \le \sin 1, \\ \arccos x \le \dfrac{\pi}{2} - 1; \end{cases} \iff \begin{cases} -\sin 1 \le x \le \sin 1, \\ \sin 1 \le x \le 1. \end{cases}$$

При последнем переходе использовалось равенство $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.
В результате областью определения является единственная точка $x = \sin 1$.

Ответ. $\sin 1$.

Пример 2. (У) Решить уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

Решение. Так как $\sqrt{2-\sqrt{3}} < 2$ и $\sqrt{2+\sqrt{3}} < 2$, то, разделив обе части уравнения на 2^x, получим, что сумма двух убывающих функций равна 1:

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1.$$

Следовательно, уравнение не может иметь более одного решения. Значение $x = 2$ находим подбором. Действительно,

$$\frac{2-\sqrt{3}}{4} + \frac{2+\sqrt{3}}{4} = 1,$$

то есть $x = 2$ – единственное решение уравнения.

Ответ. 2.

Пример 3. (У) Найти наименьший положительный период функции

$$y = \cos x + 2\cos 3x.$$

Решение. Число 2π является периодом каждого слагаемого правой части и, следовательно, их суммы. Покажем, что 2π является наименьшим положительным периодом. Достаточно показать, что расстояние между двумя соседними максимумами равно 2π.

Максимум достигается в случае, когда оба косинуса равны 1, то есть

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 3x = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{2\pi k}{3}, \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff x = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Расстояние между двумя соседними максимумами функции $y = \cos x + 2\cos 3x$ равно 2π, поэтому её период не может быть меньше 2π.

Итак, число 2π является наименьшим положительным периодом функции y.

Ответ. 2π.

Задачи

1. (У) Найти область определения функции $y = \sqrt{\log_7(\cos 2x)}$.
2. (У) Найти область определения функции $y = \sqrt{\lg\cos\pi x} + \sqrt{9 - x^2}$.
3. (У) Решить уравнение $2^x = 3 - x$.
4. (У) Решить уравнение $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$.
5. (У) Решить уравнение $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = \left(2\sqrt{2}\right)^x$.
6. (У) Решить уравнение $2\pi\cos x = |x| - |x - \pi|$.
7. (У) Является ли функция $f(x) = (2+\sqrt{3})^{1/x} - (2-\sqrt{3})^{1/x}$ чётной, нечётной или ни той, ни другой?
8. (У) Доказать непериодичность функции $y = \cos\sqrt{x}$.
9. (У) Доказать непериодичность функции $y = \sin\log_2|x|$.
10. (У) Найти наименьший положительный период функции $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.
11. (У) Найти наименьший положительный период функции

$$y = \sin x + \cos x + \sin x\cos x.$$

12. (У) Доказать, что функция $y = \sin 2^x$ не является периодической.
13. (У) Доказать непериодичность функции $y = \sin x^3$.
14. (У) Доказать, что функция $y = \cos x + \cos\pi x$ не является периодической.
15. (У) Доказать, что функция $y = \sin x \sin\sqrt{2}x$ не является периодической.

6.2. Множество значений функции, промежутки знакопостоянства и монотонности

Теоретический материал

При решении задач из этого пункта необходимо знать область определения и множество значений всех элементарных функций и пользоваться свойствами, вытекающими из их монотонности (возрастания, убывания).

Примеры решения задач

Пример 1. (ЕГЭ.С) Найдите множество значений функции

$$y = \log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{10 + \log_7(7 + |x|)}{77} \right).$$

Решение. Используя неотрицательность модуля, возрастание логарифмической функции при основании, большем 1, и её убывание при основании, меньшем 1, запишем цепочку очевидных равносильных переходов:

$$|x| \geq 0 \iff 7 + |x| \geq 7 \iff \log_7(7 + |x|) \geq \log_7 7 = 1 \iff$$

$$\iff 10 + \log_7(7 + |x|) \geq 11 \iff \frac{10 + \log_7(7 + |x|)}{77} \geq \frac{11}{77} = \frac{1}{7} \iff$$

$$\iff \log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{10 + \log_7(7 + |x|)}{77} \right) \leq \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7} = 1.$$

Последнее неравенство даёт ответ.

Ответ. $(-\infty; 1]$.

Пример 2. (ЕГЭ.С) При каких значениях параметра a сумма $\log_a(\sin x + 2)$ и $\log_a(\sin x + 3)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

Решение. Оба выражения определены при всех $x \in \mathbb{R}$. Их сумма равна

$$\log_a(\sin x + 2) + \log_a(\sin x + 3) = \log_a(\sin x + 2)(\sin x + 3).$$

Эта сумма будет равна единице тогда и только тогда, когда

$$(\sin x + 2)(\sin x + 3) = a.$$

В левой части последнего уравнения стоит квадратичная функция

$$f(t) = (t + 2)(t + 3)$$

относительно новой переменной $t = \sin x$. Так как квадратичная функция возрастает правее вершины $t_в = -2,5$ и $-1 \leq \sin x \leq 1$, то эта функция принимает значения от $f(-1)$ до $f(1)$, то есть от 2 до 12. Значит, и решения уравнения будут существовать при $a \in [2; 12]$.

Ответ. $[2; 12]$.

П р и м е р 3. (Геол-82.4) Решить уравнение $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right) = \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right) = \frac{1}{2} \iff \frac{4}{3}\pi\sin x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{8} + \frac{3n}{2},\ n \in \mathbb{Z}; \\ \sin x = \frac{5}{8} + \frac{3k}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Так как $\sin x \in [-1; 1]$, то остаются следующие значения:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{8}; \\ \sin x = \frac{5}{8}; \\ \sin x = -\frac{7}{8}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{8} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = (-1)^k \arcsin\frac{5}{8} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \\ x = (-1)^{m+1} \arcsin\frac{7}{8} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $(-1)^n\arcsin\frac{1}{8}+\pi n,\ (-1)^k\arcsin\frac{5}{8}+\pi k,\ (-1)^{m+1}\arcsin\frac{7}{8}+\pi m;\ n, k, m \in \mathbb{Z}$.

П р и м е р 4. (М/м-96(1).4) При каких значениях a уравнение

$$2\cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1})$$

имеет хотя бы одно решение?

Р е ш е н и е. Обозначим $t = 2^{2x-x^2} > 0$, тогда для новой переменной t получим уравнение

$$2\cos^2 t = a + \sqrt{3}\sin 2t$$

или, после преобразований,

$$\cos 2t + 1 = a + \sqrt{3}\sin 2t \iff \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a-1}{2}.$$

Так как $0 < 2t = 2^{1+2x-x^2} = 2^{2-(x-1)^2} \le 4$, то $\frac{\pi}{3} < 2t + \frac{\pi}{3} \le 4 + \frac{\pi}{3}$, поэтому

$$-1 \le \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}.$$

Значит, исходное уравнение будет иметь решения при условии

$$-1 \le \frac{a-1}{2} < \frac{1}{2} \iff -1 \le a < 2.$$

О т в е т. $[-1; 2)$.

П р и м е р 5. (М/м-79.4) Решить неравенство $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}$.

Р е ш е н и е. ОДЗ: $x \in \left(-2; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

1) Пусть $x \in \left(-2; -\dfrac{1}{2}\right)$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$1 + \log_2(2+x) > \frac{6x}{2x+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \log_2(2+x) > 2 - \frac{3}{2x+1}.$$

При рассматриваемых значениях переменной x в силу монотонного возрастания функций $f(x) = \log_2(x+2)$ и $g(x) = 2 - \dfrac{3}{2x+1}$ справедливы неравенства

$$\log_2(x+2) < \log_2 \frac{3}{2} < 1 \quad \text{и} \quad 2 - \frac{3}{2x+1} > 2;$$

следовательно, исходное неравенство решений не имеет.

2) Пусть $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$, тогда справедливы неравенства

$$\frac{6}{2x+1} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1+\log_2(2+x)}{x} < 0;$$

следовательно, исходное неравенство верно для любого $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

3) Пусть $x > 0$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2(x+2) < 2 - \frac{3}{2x+1}.$$

При рассмотриваемых значениях переменной x справедливы неравенства

$$\log_2(x+2) > 1 \quad \text{и} \quad 2 - \frac{3}{2x+1} < 2;$$

следовательно, исходное неравенство не имеет решений там, где

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(x+2) \geq 2; \\ 2 - \dfrac{3}{2x+1} \leq 1; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x+2 \geq 4; \\ 2x+1 \leq 3; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \geq 2; \\ x \leq 1. \end{array}\right.$$

Остаётся рассмотреть только $x \in (1; 2)$. На этом множестве

$$\log_2(x+2) > \log_2 3 \quad \text{и} \quad 2 - \frac{3}{2x+1} < \frac{7}{5}.$$

Сравним числа:

$$\begin{array}{rcl} \log_2 3 & \vee & \dfrac{7}{5} \\ 5\log_2 3 & \vee & 7\log_2 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3^5 & \vee & 2^7 \\ 243 & > & 128. \end{array}$$

Следовательно, $\log_2 3 > \dfrac{7}{5}$. Итак, получаем следующую цепочку:

$$\log_2(x+2) > \log_2 3 > \frac{7}{5} > 2 - \frac{3}{2x+1}.$$

Значит, при $x \in (1;2)$ решений нет.

Ответ. $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Пример 6. (М/м-80.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\log_{1/a}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3 \geq 0$ имеет одно решение.

Решение. ОДЗ для параметра a: $a>0$, $a \neq 1$. Перейдём в первом и третьем логарифме к основанию 3:

$$\frac{-\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+1}{\log_3 a} \geq 0.$$

Рассмотрим различные значения параметра a.
1) Пусть $0<a<1$, тогда $\log_3 a < 0$ и, следовательно,

$$\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6) \geq 1.$$

Обозначим $u = x^2+ax+5 \geq 0$, тогда в левой части последнего неравенства стоит функция

$$f(u) = \log_3(\sqrt{u}+1)\cdot\log_5(u+1).$$

Заметим, что $f(u) \geq 0$, монотонно возрастает и $f(4)=1$; следовательно,

$$u \geq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+ax+5 \geq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+ax+1 \geq 0.$$

У этого неравенства для любого a существует бесконечно много решений.
2) Пусть $a>1$, тогда

$$\begin{cases} f(u) \leq 1, \\ u \geq 0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad 0 \leq x^2+ax+5 \leq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x^2+ax+5 \geq 0, \\ x^2+ax+1 \leq 0. \end{cases}$$

Поскольку обе параболы имеют одну и ту же абсциссу вершины, то система при $a>1$ будет иметь единственное решение, если второй квадратный трёхчлен имеет корень кратности два, то есть

$$D = a^2-4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad a=2.$$

При этом первое неравенство выполняется $\forall x \in \mathbb{R}$, поскольку $D = 4-20 < 0$.

Ответ. 2.

Задачи

1. (ЕГЭ.С) Найдите множество значений функции
$$y = \log_{0,25}\left(\frac{\log_4(4+x^4)+47}{3}\right).$$

2. (ЕГЭ.С) Найдите множество значений функции
$$y = \log_{0,2}\left(\frac{80}{\log_5(125+x^4)+13}\right).$$

3. (ЕГЭ.С) Найдите множество значений функции
$$y = \frac{9}{\pi}\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}\right).$$

4. (ЕГЭ.С) При каких значениях a выражение $3+\cos x(a\cos x+4\sin x)$ не равно нулю ни при каких значениях x?

5. (ЕГЭ.С) При каких значениях параметра a сумма $\log_a\left(\dfrac{3+2x^2}{1+x^2}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{5+4x^2}{1+x^2}\right)$ будет больше единицы при всех x?

6. (Экон-94.2) Найти область значений функции $y=-\sqrt{-3x^2+12x-3}$.

7. (Экон.К-71.2) Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}\sin x\right)$.

8. (ВМК-82.2) Найти все значения x, для каждого из которых функция $f(x)=6\cos^2 x+6\sin x-2$ принимает наибольшее значение.

9. (Почв-90.4) Найти наименьшее значение функции $y=1+4\sin x-2x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

10. (Геол.ОГ-81.6) Показать, что функция
$$y(x)=\sin^2 x-12\sin x\cos x+3\cos^2 x-2\sqrt[3]{66}$$
может принимать неотрицательные значения.

11. (Псих-80.5) Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство
$$2(2p-1)^4+1+(1-2(2p-1)^4)\sin 2t\geq 0,$$
и найти все пары чисел (p,t), для которых это неравенство превращается в равенство.

12. (Почв-90.6) Решить неравенство $\log_2(2-3x)>4x+1$.

13. (Хим-80.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения
$$3(x^2+a^2)=1-(9a^2-2)x$$
не превосходит числа решений уравнения
$$x+(3a-2)^2\cdot 3^x=(8^a-4)\log_3\left(3^a-\frac{1}{2}\right)-3x^3.$$

14. (Геол.ОГ-85.5) Решить уравнение
$$\sqrt{(x+2)\cdot(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)\cdot(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$$

15. (ИСАА-94.5) Решить неравенство $|x-4^{1+\sqrt{3-x}}|\le\dfrac{5}{3}x-4\cdot 4^{\sqrt{3-x}}$.

16. (М/м-96(2).1) Найти все целочисленные решения неравенства
$$\sqrt{x^3-5x-3}\le 6-x.$$

17. (Фил-87.5) Решить неравенство $\dfrac{9}{3x+2}>\dfrac{1+\log_3(x+6)}{x}$.

18. (Псих-82.6) Решить уравнение
$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3).$$

19. (ВМК-92.6) Найти все значения a, при каждом из которых неравенство
$$\frac{4}{3}(x^2-ax)-\frac{\pi}{3}<\sin(x^2-ax)+\cos\left(2x^2-2ax+\frac{\pi}{4}\right)$$
выполняется для всех x из отрезка $[\pi;2\pi]$.

6.3. Функциональные уравнения и неравенства

Теоретический материал

При решении задач этого пункта необходимо знать и уметь применять определения чётной, нечётной, монотонной и периодической функций.

Кроме того, полезными могут оказаться две следующие формулы, помогающие выбрать из двух чисел минимальное и максимальное:
$$\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2};\qquad \min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}.$$
Чтобы доказать их, надо рассмотреть два случая: $a\ge b$ и $a\le b$.

Напомним также определения целой и дробной части числа. *Целой частью* числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a. Целая часть числа a обозначается $[a]$. *Дробной частью* числа a называется число, равное $\{a\}=a-[a]$.

Примеры решения задач

Пример 1. (У) Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая для всех действительных x соотношению

$$2f(x+2) + f(4-x) = 2x + 5\,?$$

Решение. Линейная функция имеет вид $f(x) = ax + b$. Исходя из общего вида линейной функции, находим

$$f(x+2) = a(x+2) + b, \quad f(4-x) = a(4-x) + b.$$

Подставим полученные выражения в исходное соотношение:

$$2(a(x+2)+b) + a(4-x) + b = 2x + 5 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-2)x + 8a + 3b - 5 = 0.$$

Так как последнее равенство должно выполняться для всех $x \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{cases} a - 2 = 0, \\ 8a + 3b - 5 = 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 2, \\ b = -\dfrac{11}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяет линейная функция $y = 2x - \dfrac{11}{3}$.

Ответ. Существует; эта функция $y = 2x - \dfrac{11}{3}$.

Пример 2. (У) Решить уравнение $x + [10x] = 10x$, где квадратные скобки означают целую часть числа.

Решение. Исходное уравнение можно переписать в виде

$$[10x] = 9x.$$

Величина $[a]$ есть целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. Сделаем замену $y = 9x$, тогда уравнение примет вид

$$\left[\frac{10y}{9}\right] = y.$$

Воспользуемся определением целой части числа:

$$\begin{cases} y \in \mathbb{Z}, \\ 0 \le \dfrac{10y}{9} - y < 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y \in \mathbb{Z}, \\ 0 \le y < 9; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0, 1, 2, \ldots, 8.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$x = \frac{y}{9}, \quad \text{где} \quad y = 0, 1, 2, \ldots, 8.$$

Ответ. $0;\ \frac{1}{9};\ \frac{2}{9};\ \frac{3}{9};\ \frac{4}{9};\ \frac{5}{9};\ \frac{6}{9};\ \frac{7}{9};\ \frac{8}{9}$.

Пример 3. (Геогр-96.2) $f(x)$ – периодическая функция с периодом $T = \frac{1}{3}$. Найти значение $f(1)$, если известно, что

$$f^2(2) - 5f(0) + \frac{21}{4} = 0 \quad \text{и} \quad 4f^2(-1) - 4f\left(\frac{10}{3}\right) = 35.$$

Решение. В силу периодичности $f(1) = f(2) = f(0) = f(-1) = f\left(\frac{10}{3}\right)$, поэтому задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} f^2(1) - 5f(1) + \dfrac{21}{4} = 0, \\ 4f^2(1) - 4f(1) - 35 = 0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 4 и вычтем из него второе:

$$-16f(1) + 56 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(1) = \frac{7}{2}.$$

Проверкой убеждаемся в том, что найденное значение $f(1)$ удовлетворяет второму уравнению системы.

Замечание. При решении системы двух уравнений важно помнить следующее: если мы получаем новое уравнение как линейную комбинацию двух исходных, то для обеспечения равносильности переходов необходимо далее рассматривать систему, состоящую из полученного уравнения и любого из двух уравнений исходной системы.

Ответ. $\frac{7}{2}$.

Пример 4. (Экон.М-97.5) Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4, и на промежутке $0 \le x \le 2$ её значения вычисляются по правилу $f(x) = 1 - |x - 1|$. Решить уравнение

$$2f(x) \cdot f(x-8) + 5f(x+12) + 2 = 0.$$

Решение. Так как функция $f(x)$ периодична с периодом 4, то достаточно рассмотреть её на любом отрезке длины 4. Так как она ещё является и нечётной, то удобно рассмотреть отрезок $[-2; 2]$.

На отрезке $[0; 2]$ по условию функция имеет вид $f(x) = 1 - |x - 1|$. Используя определение нечётной функции, продолжим $f(x)$ на отрезок $[-2; 0]$. Здесь она будет вычисляться по правилу

$$f(x) = -f(-x) = -(1 - |-x-1|) = -1 + |x+1|.$$

Итак, на отрезке $[-2; 2]$ функция имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} -1 + |x+1| & \text{при} \quad x \in [-2; 0], \\ 1 - |x-1| & \text{при} \quad x \in [0; 2]. \end{cases}$$

По условию функции $f(x)$ является периодической с периодом 4, поэтому

$$f(x) = f(x-8) = f(x+12).$$

Уравнение упрощается:

$$2(f(x))^2 + 5f(x) + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = -2; \\ f(x) = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Рассмотрим два случая.
1-й случай. Пусть $x \in [0;2]$; тогда

$$\left[\begin{array}{l} 1 - |x-1| = -2; \\ 1 - |x-1| = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 4 > 2; \\ x = -2 < 0; \\ x = -\dfrac{1}{2} < 0; \\ x = \dfrac{5}{2} > 2. \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \emptyset.$$

2-й случай. Рассмотрим $x \in [-2;0]$; тогда

$$\left[\begin{array}{l} -1 + |x+1| = -2; \\ -1 + |x+1| = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}; \\ x = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

С учётом периодичности получаем ответ:

$$x = -\frac{1}{2} + 4k,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{или} \quad x = -\frac{3}{2} + 4n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $-\dfrac{1}{2} + 4k,\ -\dfrac{3}{2} + 4n;\ k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. (Экон.В-00.7) Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\dfrac{2}{5}; \dfrac{5}{2}\right]$ и удовлетворяет на этом множестве системе

$$\begin{cases} \cos(2f(x)) - 6\cos^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1-3x}{x}, \\ 0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решить уравнение $f(x) = \dfrac{5\pi}{12}$.

Решение. Обозначая $g(x) = \cos(2f(x))$ и применяя формулу косинуса двойного угла, приходим к уравнению

$$g(x) - 3g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Поскольку $\dfrac{1}{x} \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\dfrac{5}{2}\right]$, то в полученное уравнение вместо x можно подставить $\dfrac{1}{x}$:

$$g\left(\frac{1}{x}\right) - 3g(x) = x\,.$$

Выражая из последнего уравнения $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ и подставляя в первое, находим

$$g(x) = -\frac{1}{8}\left(3x + \frac{1}{x}\right)\,.$$

Для вычисления множества значений функции $g(x)$ при $x \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\dfrac{5}{2}\right]$ заметим, что

$$h(x) = 3x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}\ \left(x\sqrt{3} + \frac{1}{x\sqrt{3}}\right) \geq 2\sqrt{3}\,,$$

причём минимум достигается при $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\dfrac{5}{2}\right]$. Поэтому

$$2\sqrt{3} \leq h(x) \leq \max\left\{h\left(\frac{2}{5}\right)\,;\,h\left(\frac{5}{2}\right)\right\} = \frac{79}{10}\,.$$

Значит, для $x \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\dfrac{5}{2}\right]$ значения функции $g(x)$ попадают в промежуток $[-1\,;0]$. В силу ограничения на область значений $f(x)$ уравнение

$$\cos(2f(x)) = g(x)$$

даёт единственное решение

$$f(x) = \frac{1}{2}\arccos(g(x)) = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{8}\left(3x + \frac{1}{x}\right)\right)\,.$$

Задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{5\pi}{12}\,, \\ x \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\dfrac{5}{2}\right]; \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{1}{8}\left(3x + \dfrac{1}{x}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,, \\ x \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\dfrac{5}{2}\right]; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \pm 1\,, \\ x \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\dfrac{5}{2}\right]; \end{cases} \iff x = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1\,.$$

Ответ. $1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Задачи

1. (У) Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая для всех действительных x соотношению $f(x+3) - f(2-x) = 3x+1$?

2. (У) Найти квадратичную функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую для всех действительных x соотношению $f(1-x) - f(2-x) = -2x+7$.

3. (У) Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую для всех действительных $x \neq 0$ условию $f(x) + 3x \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x^2$.

4. (У) Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую для всех действительных $x \neq 0$ условию $f(x) + 5x \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x^3$.

5. (У) Сколько решений имеет уравнение $x + [100x] = 100x$, где квадратные скобки означают целую часть числа?

6. (У) Решить неравенство $[x] \cdot \{x\} < x - 1$, где квадратные скобки означают целую часть числа, а фигурные – дробную часть числа.

7. (У) Решить уравнение $\{2\{2x\}\} = x$, где фигурные скобки означают дробную часть числа.

8. (У) Решить уравнение $\max(2x; 3-x) = \min(5+2x; 6x)$.

9. (ЕГЭ.В) Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 2 и $f(-1) = -2$. Найдите значение выражения $3f(5) - 2f(-3)$.

10. (ЕГЭ.В) Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 3 и $f(-1) = 5$. Найдите значение выражения $3f(2) + 2f(5)$.

11. (ЕГЭ.В) Нечётная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 2{,}3 + f(x-9)$ вычислите сумму $g(6)+g(8)+g(10)+g(12)$.

12. (ЕГЭ.В) Чётная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = x + (x-7)\cdot f(x-7) + 7$ вычислите сумму $g(5)+g(7)+g(9)$.

13. (ЕГЭ.В) Нечётная функция $g(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $f(x) = x(3+x)(x^2-4)$. Укажите число корней уравнения $g(x) = 0$.

14. (ЕГЭ.В) Чётная функция $g(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $f(x) = (x^2+4x)(x^3+8)$. Укажите число корней уравнения $g(x) = 0$.

15. (ЕГЭ.В) Функция $y = h(x)$ определена на всей числовой прямой и является чётной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0; 3]$ функция $y = h(x)$ задана равенством $h(x) = x^2 - 4x + 1$. Определите количество нулей функции $y = h(x)$ на отрезке $[-3; 5]$.

16. (ЕГЭ.В) Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является чётной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0;3]$ функция $y = f(x)$ задана равенством $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке $[-1;5]$.

17. (Физ-92.7) Известно, что некоторая нечётная функция при $x > 0$ определяется формулой $f(x) = \log_3\left(\dfrac{x}{3}\right)$. Найти, какой формулой определяется функция $f(x)$ при $x < 0$. Решить уравнение $f(x) = 3$.

18. (Почв-00(1).6) Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0;8]$. Решите уравнение $f(2x+16) + 23 = 5f(x)$.

19. (Экон-97.5) Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4, и на промежутке $-2 \le x \le 0$ её значения вычисляются по правилу $f(x) = 2x(x+2)$. Решить уравнение

$$\frac{2\cdot f(-3-x) - 3}{\sqrt{f\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right) - \sqrt{2}}} = 0.$$

20. (Экон-00.7) Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\dfrac{1}{6};6\right]$ и удовлетворяет на этом множестве системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 f(x) - \frac{1}{2}} - 12\cos\left(2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{10}{x}, \\ 0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решить неравенство $f(x) \le \dfrac{\pi}{8}$.

21. (ЕГЭ.С) Решить уравнение $f(g(x)) + g(1+f(x)) = 33$, если известно, что
$$f(x) = x^2 - 6x + 15 \ \text{ и } \ g(x) = \begin{cases} 18 & \text{при } \ x \ge 4, \\ 3^x + \dfrac{12}{5-x} & \text{при } \ x < 4. \end{cases}$$

22. (ЕГЭ.С) Решить уравнение $f(g(x)) + g(3+f(x)) = 30$, если известно, что
$$f(x) = 0,5x^4 - 4x + 5 \ \text{ и } \ g(x) = \begin{cases} 25 & \text{при } \ x \ge 4, \\ 2^x + \dfrac{9}{5-x} & \text{при } \ x < 4. \end{cases}$$

6.4. Использование графических иллюстраций

Теоретический материал

Перед тем как решать задачи этого пункта, вспомните графики всех элементарных функций.

Примеры решения задач

Пример 1. (Биол-78.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x|x+2a|+1-a=0$ имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$x|x+2a| = a-1.$$

Необходимо найти такие значения параметра a, при которых прямая $y=a-1$ пересекает график функции $f(x)=x|x+2a|$, стоящей в левой части уравнения, ровно в одной точке. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $a=0$. Тогда

$$x|x|=-1 \quad \Longleftrightarrow \quad x=-1,$$

и в этом случае решение единственно.

2. Пусть $a>0$. Рассмотрим функцию $f(x)=x|x+2a|$ и её график.

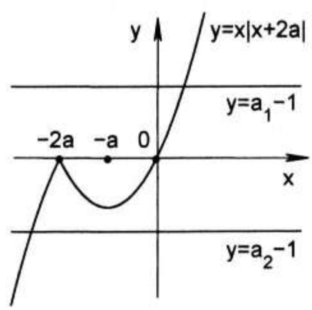


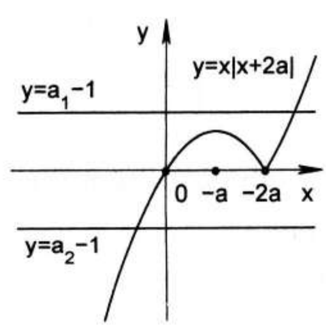
График функции $y=f(x)$ будет пересечён прямой $y=a-1$ единственный раз, если

$$\left[\begin{array}{l} a-1>0; \\ a-1<f(-a); \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a>1; \\ a-1<-a|a|. \end{array}\right.$$

Так как $a>0$, то модуль раскрывается с плюсом:

$$\left[\begin{array}{l} a>1; \\ a^2+a-1<0; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad a\in\left(0;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cup(1;+\infty).$$

3. Пусть $a<0$. Рассмотрим функцию $f(x)=x|x+2a|$ и её график.



Прямая $y = a-1$ пересечёт график функции $y = f(x)$ в единственной точке, если

$$\left[\begin{array}{l} a-1 > f(-a); \\ a-1 < 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} a-1 > -a|a|; \\ a < 1; \end{array}\right. \iff a < 0.$$

Объединяя найденные значения параметра a, получаем ответ.

Ответ. $\left(-\infty; \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Пример 2. (Геол.ОГ-78.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4. \end{cases}$$

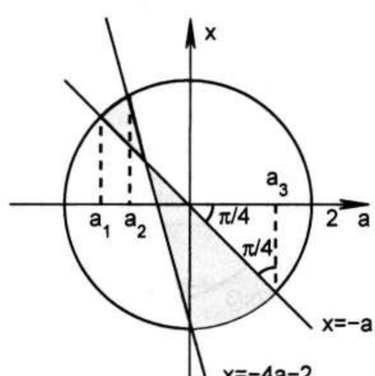
Решение. Разложим левую часть неравенства на множители. Для этого найдём корни квадратного трёхчлена:

$$D = (5a+2)^2 - 4(4a^2+2a) = (3a+2)^2 \implies \left[\begin{array}{l} x_1 = -a; \\ x_2 = -4a-2. \end{array}\right.$$

Следовательно, исходную систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} (x-(-a))(x-(-4a-2)) < 0, \\ x^2 + a^2 = 4. \end{cases}$$

Изобразим на декартовой плоскости с координатами (a, x) множество точек, которые удовлетворяют этой системе.



Система имеет решения при $a \in (a_1; a_2) \cup (0; a_3)$. Из равнобедренных прямоугольных треугольников легко находим $a_1 = -\sqrt{2}$ и $a_3 = \sqrt{2}$; a_2 определяем из второго уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} (-4a_2-2)^2 + a_2^2 = 4, \\ a_2 < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 17a_2^2 + 16a_2 = 0, \\ a_2 < 0; \end{cases} \iff a_2 = -\frac{16}{17}.$$

Ответ. $\left(-\sqrt{2}; -\dfrac{16}{17}\right) \cup \left(0; \sqrt{2}\right)$.

Пример 3. (М/м-96(2).4) При каком значении a сумма различных корней уравнения

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = a(\operatorname{ctg} x + 2\cos 3x),$$

принадлежащих отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{22\pi}{3}\right]$, максимальна?

Решение. Приведём выражение в правой части уравнения к общему знаменателю и воспользуемся методом расщепления:

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = a\frac{\cos x + 2\sin x \cdot \cos 3x}{\sin x} \iff$$

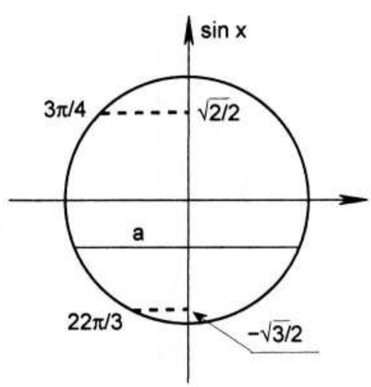
$$\iff \cos x - \sin 2x + \sin 4x = a\frac{\cos x - \sin 2x + \sin 4x}{\sin x} \iff$$

$$\iff \frac{\cos x - \sin 2x + \sin 4x}{\sin x} \cdot (\sin x - a) = 0.$$

Сумма корней этого уравнения может меняться только за счёт решений уравнения

$$\sin x - a = 0.$$

- Сумма корней уравнения $\sin x = a$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi; \frac{\pi}{2} + 6\pi\right]$ принимает при всех $a \in (-1; 1)$ одинаковое (оно же максимальное) значение. Действительно, при увеличении параметра a каждый из двух корней уравнения, лежащих на правой полуокружности тригонометрической окружности, увеличивается ровно настолько, насколько уменьшается каждый из двух корней, лежащих на левой полуокружности.



- На промежутке $\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi; \frac{22\pi}{3}\right]$ корень принимает наибольшее значение при $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- На промежутке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2} + 2\pi\right]$ сумма корней максимальна при всех $a \in \left(-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Следовательно, на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{22\pi}{3}\right]$ сумма корней максимальна при $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. При найденном значении параметра a $\sin x \neq 0$ (то есть решения принадлежат ОДЗ) и корни уравнения

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

не совпадают с корнями уравнения

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = 0.$$

Действительно, если $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$|\cos x| = \frac{1}{2},$$

$$|\sin 2x| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$|\cos 2x| = \frac{1}{2},$$

$$|\sin 4x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и, наконец,

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0.$$

Ответ. $-\sqrt{3}/2$.

Задачи

1. (Геогр-92.5) Найти все значения параметра c, при которых уравнение $|x^2 - 2x| + |x^2 - 3x + 2| = x^2 - 4x + c$ имеет ровно три различных решения.

2. (Почв-96.6) Определите, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a} \geq x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

3. (Экон-83.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x - a = 2 \cdot |\, 2 \cdot |x| - a^2 \,|$ имеет три различных корня. Найти эти корни.

4. (Геогр-94(1).6) Найти все значения a, при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = a$$

существуют и принадлежат отрезку $[2; 17]$.

5. (Геогр-94.5) Найти все значения a, при которых уравнение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

имеет ровно одно решение.

6. (ВМК-96.5) Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

7. (Псих-97.6) Найти все значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y, \\ x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27 \end{cases}$$

имеет два решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2), удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}.$$

8. (Хим-87.5) Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество всех решений неравенства

$$(p - x^2)(p + x - 2) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.

9. (Экон.М-97.6) Найти все значения параметра a, при которых периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условием

$$\log_{\left(\frac{2-|ay|}{3}\right)} \left(\frac{a^2 + x^2}{2a^2}\right) > 0,$$

будет наименьшим.

10. (М/м-94(1).6) Найти все значения $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для каждого из которых уравнение

$$\sin 2x + \sin x + \sin(x - \alpha) = \sin\alpha + \sin(x + \alpha)$$

имеет ровно пять различных корней на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

11. (М/м-99.3) При каких значениях φ все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \varphi\right) - \cos\left(\frac{3x}{2} + \varphi\right) = \sin\frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

12. (М/м-00.5) Найти все a, при которых уравнение

$$(|a| - 1)\cos 2x + (1 - |a - 2|)\sin 2x + (1 - |2 - a|)\cos x + (1 - |a|)\sin x = 0$$

имеет нечётное число решений на интервале $(-\pi; \pi)$.

13. (ВКНМ-00(1).6) Решить уравнение $x^2 = \arcsin(\sin x) + 10x$.

14. (Геогр-99.4) Найти все значения параметра a, при которых среди корней уравнения
$$\sin 2x + 6a\cos x - \sin x - 3a = 0$$
найдутся два корня, разница между которыми равна $\dfrac{3\pi}{2}$.

15. (ЕГЭ.В) При каком натуральном значении a уравнение
$$x^3 + 3x^2 - 9x - a = 0$$
имеет ровно два корня?

16. (ЕГЭ.В) При каком значении b уравнение
$$x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 96x + b = 0$$
имеет ровно три корня?

17. (ЕГЭ.С) Найдите все значения параметра a, при которых в множестве решений неравенства
$$x(x - 2a - 4) < \frac{4a^2}{x} - a^2 - 8a$$
нельзя расположить два отрезка длиной $1,5$ каждый, которые не имеют общих точек.

7. Метод оценок

В этом параграфе приведены задачи, при решении которых используется ограниченность функций, входящих в уравнения и неравенства.

7.1. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства

Теоретический материал

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху* на некотором множестве D, если существует такое число M, что для любых значений $x \in D$ выполняется условие $f(x) \le M$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *ограниченной снизу* на некотором множестве D, если существует такое число m, что для любых значений $x \in D$ выполняется условие $f(x) \ge m$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на некотором множестве D, если существуют такие числа m и M, что для любых значений $x \in D$ выполняется условие $m \le f(x) \le M$.

Определение 3а. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на некотором множестве D, если существует такое число M, что для любых значений $x \in D$ выполняется условие $|f(x)| \leq M$ (это определение эквивалентно определению 3).

Полезно помнить следующие факты:

- $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$, если $a > 0$, причём равенство достигается при $a = 1$;
- $a + \dfrac{1}{a} \leq -2$, если $a < 0$, причём равенство достигается при $a = -1$;
- функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ ограничена значением $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ снизу при $a > 0$ и сверху при $a < 0$;
- если $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$, то

$$f(x) + g(x) = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0; \end{cases}$$

- если $f(x) \geq a$, $g(x) \leq a$, то

$$f(x) = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a; \end{cases}$$

- если $|f(x)| \geq a$, $|g(x)| \geq b$, $a > 0$, $b > 0$, то

$$f(x) \cdot g(x) = ab \iff \begin{cases} |f(x)| = a, \\ |g(x)| = b; \end{cases}$$

  причём $f(x)$ и $g(x)$ одного знака;
- если $|f(x)| \geq a$, $|g(x)| \leq b$, $a > 0$, $b > 0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \iff \begin{cases} |f(x)| = a, \\ |g(x)| = b. \end{cases}$$

  причём $f(x)$ и $g(x)$ одного знака.

Заметим, что мы выписали здесь не все случаи применения оценок в суммах, произведениях и частных. Однако если вам понятно всё, что написано выше, то вы сможете сами распространить метод оценок и на другие случаи.

Примеры решения задач

Пример 1. (У) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}(y-1) + \sqrt{y}(x-1) = \sqrt{2xy}, \\ y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-1} = xy. \end{cases}$$

Решение. Из условия неотрицательности подкоренных выражений следует, что $x \geq 1$ и $y \geq 1$. Разделим второе уравнение системы на xy:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-1}}{y} = 1 \iff \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}} = 1 \iff$$

$$\iff \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{y}\right)^2} = 1.$$

Так как $\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)^2} \leq \frac{1}{2}$ и $\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{y}\right)^2} \leq \frac{1}{2}$, то

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{y}\right)^2} \leq 1,$$

следовательно, равенство может выполняться только при $x = y = 2$. Проверкой убеждаемся, что эти значения переменных являются решениями и первого уравнения системы.

Ответ. $(2; 2)$.

Задачи

1. (У) Решить уравнение $\sqrt{x^7 + 1} + \sqrt{1 - x^5} = 8$.
2. (У) Решить уравнение $|x|^3 + |x - 1|^3 = 9$.
3. (У) Решить уравнение $\sqrt{4 - x} + \sqrt{x - 2} = x^2 - 6x + 11$.
4. (У) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \dfrac{2x^2}{x^4 + 1}$.
5. (У) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$.
6. (У) Найти область значений функции $y = \sqrt{x^2 - 1} - x$.
7. (У) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$.
8. (У) Найти все решения системы

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 1, \\ x^6 + y^6 = 1. \end{cases}$$

9. (У) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y + 1} = 1, \\ \sqrt{x + 1} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

10. (У) Решить неравенство $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + x^2 - 5x + 6 < 0$.

11. (У) Найти максимальное значение выражения $|x|\sqrt{16-y^2}+|y|\sqrt{4-x^2}$.

12. (Геол-98.8) При каких значениях a уравнение

$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x-1=0$$

имеет хотя бы одно решение?

13. (Биол-93.6) Найти все решения системы $\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)\cdot(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x; \end{cases}$

удовлетворяющие условию $z\geq 0$.

14. (ЕГЭ.С) Решить уравнение $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4$.

15. (Геогр-81.5) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$

7.2. Тригонометрические уравнения и неравенства

Теоретический материал

В этом разделе приведены задачи, при решении которых используется ограниченность тригонометрических функций:

$$|\sin x|\leq 1,\quad |\cos x|\leq 1,$$

$$|\arcsin x|\leq\frac{\pi}{2},\quad 0\leq\arccos x\leq\pi,\quad |\operatorname{arctg} x|<\frac{\pi}{2},\quad 0<\operatorname{arcctg} x<\pi.$$

Перед тем как приступить к решению задач, рекомендуется повторить приёмы, приведённые в предыдущем разделе, и все тригонометрические формулы.

Примеры решения задач

Пример 1. (Псих-78.4) Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=4x+\frac{9\pi^2}{x}+\sin x$$

при $x>0$.

Решение. Применим теорему о сумме двух взаимно обратных положительных чисел:

$$4x+\frac{9\pi^2}{x}=2\cdot 3\pi\left(\frac{2x}{3\pi}+\frac{3\pi}{2x}\right)\geq 6\pi\cdot 2=12\pi,$$

причём равенство достигается при $\dfrac{2x}{3\pi}=1 \iff x=\dfrac{3\pi}{2}$. Значит,

$$\min_{0<x<+\infty}\left(4x+\frac{9\pi^2}{x}\right)=12\pi\quad\text{при}\quad x=\frac{3\pi}{2}.$$

Так как при $x = \dfrac{3\pi}{2}$ функция $y(x) = \sin x$ также принимает своё наименьшее значение, равное -1, то
$$\min_{0<x<+\infty} f(x) = 12\pi - 1.$$

Ответ. $12\pi - 1$.

Пример 2. (Почв-94.4) Найти все значения a и b, при которых система
$$\begin{cases} a + \sin bx \le 1, \\ x^2 + ax + 1 \le 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

Решение. Для того чтобы у второго неравенства были решения, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трёхчлена был неотрицательным:
$$D = a^2 - 4 \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |a| \ge 2.$$

Первое неравенство равносильно неравенству
$$\sin bx \le 1 - a.$$

1) Пусть $a \le -2$. Тогда $1 - a \ge 3$. В этом случае первое неравенство системы верно для любого $x \in \mathbb{R}$. Система будет иметь единственное решение, если второе неравенство имеет только одно решение, что произойдёт при
$$D = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = -2.$$

Значение параметра b при этом может быть любым.
2) Пусть $a \ge 2$. Тогда $1 - a \le -1$, и первое неравенство будет иметь решения, если $1 - a = -1 \iff a = 2$. Система принимает вид
$$\begin{cases} \sin bx = -1, \\ x^2 + 2x + 1 \le 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} bx = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ. $(-2; b)$, $b \in \mathbb{R}$; $\left(2; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. (ИСАА-93.5) Решить уравнение $\sin^2 x + 3x^2 \cos x + 3x^2 = 0$.

Решение. Сгруппируем слагаемые:
$$\sin^2 x + 3x^2(\cos x + 1) = 0.$$

Так как $\cos x \ge -1$, то в левой части уравнения стоит сумма двух неотрицательных выражений. Она будет равна нулю, только если каждое из слагаемых равно нулю:
$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ 3x^2(\cos x + 1) = 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ \cos x = -1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. 0; $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. (Хим-94(1).5) При каких значениях q разрешима система

$$\begin{cases} x^2 + qx + 3 = 0, \\ \sin^2 q\pi + \cos^2 \dfrac{\pi x}{2} + 2^{y^2} = \sin \dfrac{\pi x}{2} \ ? \end{cases}$$

Найти эти решения.

Решение. Так как левая часть второго уравнения не меньше 1, а правая часть, наоборот, не превосходит 1, то исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x^2 + qx + 3 = 0, \\ \sin q\pi = 0, \\ \cos \dfrac{\pi x}{2} = 0, \\ y = 0, \\ \sin \dfrac{\pi x}{2} = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{-q \pm \sqrt{q^2 - 12}}{2}, \\ |q| \geq \sqrt{12}, \\ q \in \mathbb{Z}, \\ y = 0, \\ x = 1 + 4n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и последнего уравнений получаем

$$(2(1 + 4n) + q)^2 = q^2 - 12 \quad \iff \quad q = -\frac{3}{1 + 4n} - (1 + 4n).$$

Так как $q \in \mathbb{Z}$, то знаменатель дроби может принимать одно из четырёх значений:
1) $1 + 4n = -3 \iff n = -1$. В этом случае $q = 4$, $x = -3$, $y = 0$;
2) $1 + 4n = -1 \iff n = -0,5$. Не подходит, так как $n \in \mathbb{Z}$;
3) $1 + 4n = 1 \iff n = 0$. В этом случае $q = -4$, $x = 1$, $y = 0$;
4) $1 + 4n = 3 \iff n = 0,5 \notin \mathbb{Z}$.

Ответ. При $q = 4$ $x = -3$, $y = 0$; при $q = -4$ $x = 1$, $y = 0$.

Пример 5. (Биол-90.5) Найти все значения a, b, x, y, z, при которых выполняются соотношения

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{tg}(bz) \cdot \sin^2(xy) + \cos(2xy) \leq (\cos x + \sin(ay)) \cdot |\sin(2xy)|, \\ 2 + 2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)} \cdot \cos(b(y + x)) + \cos(2b(y + x)) = 0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Сделав замену $t = \cos(b(y + x))$, приведём его к квадратному уравнению относительно t:

$$2 + 2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)} \cdot t + 2t^2 - 1 = 0 \quad \iff \quad 2t^2 + 2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)} \cdot t + 1 = 0.$$

Полученное уравнение имеет решения, если $D \geq 0$, то есть $\operatorname{tg}(bz) \geq 2$.
Рассмотрим первое неравенство исходной системы. Преобразуем левую часть:

$$1 + \operatorname{tg}(bz) \cdot \sin^2(xy) + \cos(2xy) = 1 + \operatorname{tg}(bz) \cdot \sin^2(xy) + 1 - 2\sin^2(xy) =$$

$$= 2 + \sin^2(xy) \cdot (\operatorname{tg}(bz) - 2) \geq 2.$$

Правая часть неравенства, в свою очередь, не превосходит 2. Следовательно, неравенство переходит в равенство, и исходная система принимает вид

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}(bz) = 2; \\ \sin(xy) = 0; \end{array}\right. \\ \cos x = 1, \\ \sin(ay) = 1, \\ \sin(2xy) = \pm 1, \\ 2 + 2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)} \cdot \cos(b(y+x)) + \cos(2b(y+x)) = 0. \end{cases}$$

Так как $\sin(2xy) = \pm 1$, то $\sin(xy) \neq 0$. Подставив $\operatorname{tg}(bz) = 2$ в последнее уравнение, получим

$$\left(\cos(b(y+x)) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0.$$

Итак, решаем систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(bz) = 2, \\ \cos x = 1, \\ \sin(ay) = 1, \\ \sin(2xy) = \pm 1, \\ \cos(b(y+x)) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} bz = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ ay = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ xy = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi l}{2},\ l \in \mathbb{Z}, \\ b(y+x) = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi p,\ p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отсюда сразу получаем ответ.

Ответ. $x = 2\pi k$, $y = \dfrac{1+2l}{8k}$, $a = \dfrac{4\pi k(1+4m)}{1+2l}$, $b = \dfrac{2\pi k(8p \pm 3)}{16\pi k^2 + 2l + 1}$,
$z = (\operatorname{arctg} 2 + \pi n) \cdot \dfrac{16\pi k^2 + 2l + 1}{2\pi k(8p \pm 3)}$; $k, l, m, n, p \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.

Пример 6. (Геогр-88.5) Доказать, что при каждом $x > 0$ выполнено неравенство $x^2 + \pi x + \dfrac{15}{2}\pi \cdot \sin x > 0$.

Решение. В силу ограниченности функции $f_1(x) = \sin x$ справедлива оценка

$$x^2 + \pi x + \frac{15\pi}{2} \cdot \sin x \geq x^2 + \pi x - \frac{15\pi}{2}.$$

Рассмотрим функцию $f_2(x) = x^2 + \pi x - \dfrac{15\pi}{2}$. Корни квадратного трёхчлена

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{\pi^2 + 30\pi} - \pi}{2}.$$

Значит, при $0 < x < \dfrac{\sqrt{\pi^2 + 30\pi} - \pi}{2}$ $f_2(x) < 0$, при $x > \dfrac{\sqrt{\pi^2 + 30\pi} - \pi}{2}$ $f_2(x) > 0$.

1) Заметим, что $\dfrac{\sqrt{\pi^2+30\pi}-\pi}{2} < \dfrac{7\pi}{6}$, поэтому при $x > \dfrac{7\pi}{6}$ исходное неравенство верно. Для оставшихся значений переменной x рассмотрим два случая.

2) При $x \in (0;\pi)$ в левой части исходного неравенства стоит сумма двух положительно определённых функций $g(x) = x^2 + \pi x > 0$ и $h(x) = \dfrac{15\pi}{2} \cdot \sin x > 0$. Значит, на рассматриваемом промежутке неравенство выполнено.

3) Пусть $x \in \left[\pi; \dfrac{7\pi}{6}\right]$. Оценим значения функций $g(x)$ и $h(x)$ снизу:

$$g(x) = x^2 + \pi x \geq 2\pi^2 > 4\pi;$$

$$h(x) = \frac{15\pi}{2} \cdot \sin x \geq \frac{15\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15\pi}{4} > -4\pi.$$

Значит, для суммы справедлива оценка

$$g(x) + h(x) > 4\pi - 4\pi = 0.$$

Объединяя все случаи, убеждаемся в том, что при $x > 0$ исходное неравенство верно.

Задачи

1. (У) Решить уравнение $2\sin x = y + \dfrac{1}{y}$.

2. (У) Найти наибольшее значение функции $y = 3\sin^2 x + 2\cos^2 x$.

3. (У) Решить уравнение $\sin^2(\pi x) + \sqrt{x^2+3x+2} = 0$.

4. (У) Решить уравнение $x^2 + 4x\cos(xy) + 4 = 0$.

5. (У) Решить неравенство $|\operatorname{tg}^3 x| + |\operatorname{ctg}^3 x| \leq 2 - \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2$.

6. (У) Решить уравнение $\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+\cos x} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

7. (У) Решить неравенство $y - \dfrac{1}{|\cos x|} - \sqrt{1-y-x^2} \geq 0$.

8. (У) Решить уравнение $\operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 2 = \dfrac{2}{\pi}\arcsin y$.

9. (У) Определить множество значений функции $y = \arccos\dfrac{1}{x}$.

10. (У) Решить уравнение $\sin 7x \cdot \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{3}$.

11. (У) Решить уравнение $\sin 9x \cdot \sin x + \cos x = \dfrac{3}{2}$.

12. (ВМК-92.2) Решить уравнение $\sqrt{1+\cos 4x} \cdot \sin x = 2\sin\dfrac{\pi}{4}$.

13. (Геогр-96(1).3) Решить уравнение $\cos\left(\dfrac{3\pi+1}{2}x\right)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi-1}{2}x\right)=1.$

14. (Экон.М-97.2) Решить систему неравенств $\begin{cases} \left|\sin\dfrac{\pi(x+y)}{2}\right|+(x-y-2)^2\le 0, \\ |2x+3|\le 2. \end{cases}$

15. (М/м-93(1).4) При каких значениях $a\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$ уравнение $\sqrt{2\cos(x+a)-1}=\sin 6x-1$ имеет решения?

16. (Псих-92.1) Решить неравенство $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\le\dfrac{\sin x-3}{\sqrt2}.$

17. (У) Найти все значения целочисленного параметра a, при которых разрешимо уравнение $\sin x-\sin ax=-2$.

18. (У) Указать хотя бы одно рациональное число a такое, что

$$|\sin 81^\circ - a|<0,01.$$

19. (Псих-93.3) Найти все решения уравнения

$$\frac{1}{\sqrt2}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin 3x=\cos 3x-\sqrt2$$

на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

20. (ЕГЭ.С) Решить уравнение $7\operatorname{tg}x+\cos^2x+3\sin 2x=1$.

21. (Хим-94.5) Решить систему $\begin{cases} x^2+2x\sin y+1=0, \\ 8|x|y(x^2+y^2)+\pi^3+4\pi=0. \end{cases}$

22. (Экон-78.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a(4-\sin x)^4-3+\cos^2x+a>0$ выполняется для всех значений x.

23. (ВМК-83.6) Найти все пары чисел (x,y), удовлетворяющие условию

$$\sqrt{2-|y|}\cdot(5\sin^2x-6\sin x\cos x-9\cos^2x+3\sqrt[3]{33})=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5}{4}\pi^2.$$

24. (Геол-92.6) Найти все тройки чисел (x,y,z), удовлетворяющие уравнению

$$x^2+1-2x\sin\pi y+\sqrt{yz-2z^2-64}=(41-yz)\cdot(\cos 2\pi y+\cos\pi z)^2.$$

25. (Хим-91.4) Решить уравнение $\cos^4x=\dfrac14\cos 2x+\dfrac12\cos^2x\cdot\cos 8x.$

26. (ВМК-86.5) Решить уравнение $\sin 3x-2\sin 18x\sin x=3\sqrt2-\cos 3x+2\cos x.$

7.3. Уравнения и неравенства с логарифмическими и показательными функциями

Примеры решения задач

Пример 1. (Псих-97.4) При каких действительных p уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет решение?

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\left(4^x + \frac{1}{4^x}\right) + 4\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) + 7 = p.$$

Так как по теореме о сумме двух взаимно обратных чисел

$$4^x + \frac{1}{4^x} \geq 2, \quad 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2$$

и равенства в обоих случаях достигаются при $x = 0$, то выражение, стоящее в левой части уравнения, не меньше, чем $2 + 4 \cdot 2 + 7 = 17$, и в силу непрерывности входящих в него функций принимает все значения, большие или равные 17. Значит, данное уравнение будет иметь решения при $p \geq 17$.

Ответ. $[17; +\infty)$.

Пример 2. (Экон.В-98.4) Решить уравнение

$$25 \cdot 3^{|x-5|+|x-3|} + 9 \cdot 5^{|x-4|+|x-6|} = 450.$$

Решение. Разделим обе части уравнение на $5^2 \cdot 3^2$:

$$3^{|x-3|+|x-5|-2} + 5^{|x-4|+|x-6|-2} = 2.$$

Так как для любых действительных x верны неравенства

$$|x-3| + |x-5| \geq 2, \quad |x-4| + |x-6| \geq 2,$$

(докажите это самостоятельно!), то левая часть уравнения больше или равна правой, причём равенство достигается в случае

$$\begin{cases} |x-3| + |x-5| = 2, \\ |x-4| + |x-6| = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x-5 \leq 0, \\ x-4 \geq 0, \\ x-6 \leq 0; \end{cases} \iff 4 \leq x \leq 5.$$

Ответ. $[4; 5]$.

Задачи

1. (У) Решить уравнение $\ln x + \dfrac{1}{\ln x} = 2\cdot\sin(x+\pi/4)$.

2. (У) Решить уравнение $2^{1-|x|} = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$.

3. (ИСАА-97.4) Решить неравенство $\log_{0,5}|1-x| - \log_{x-1} 2 \le 2$.

4. (У) Решить неравенство $\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos\alpha \le 0$.

5. (У) Доказать, что уравнение $2^{x^2}\cdot 3^{-x} = \dfrac{2}{5}$ не имеет решений.

6. (У) Решить неравенство $\cos^2(x+1)\lg(9-2x-x^2) \ge 1$.

7. (У) Решить неравенство $3^{2x/3}\cdot\sin x > \sqrt{2}$ при $x \in \left[1; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

8. (У) Решить уравнение $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 1,5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$.

9. (У) Решить неравенство $2^{-|x-2|}\log_2(4x - x^2 - 2) \ge 1$.

10. (У) Решить неравенство $(3 - \cos^2 x - 2\sin x)\cdot(\lg^2 y + 2\lg y + 4) \le 3$.

11. (Биол-81.4) Решить неравенство $(2^x + 3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$.

12. (Псих-79.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6, \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1. \end{cases}$$

13. (Физ-96(2).8) Для каждого значения a решить уравнение

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}.$$

14. (Хим-93(1).5) Решить уравнение $2\left(1 + \sin^2(x-1)\right) = 2^{2x-x^2}$.

15. (Геогр-94(1).4) Решить уравнение $\log_{0,5}(\operatorname{tg}\pi x + \operatorname{ctg}\pi x) = 8(2x^2 + 3x + 1)$.

16. (У) Решить неравенство $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \ge 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

17. (Филол-98.5) Решить неравенство $\sqrt[4]{13 + 3^{(3^{1-\cos x})}} \le \sqrt{5\cdot 2^{-2x^2} - 1}$.

18. (ВМК-81.4) Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие равенству $(a+2)^2\log_3(2x - x^2) + (3a-1)^2\log_{11}\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) = 0$.

19. (Геогр-83.4) Найти все пары чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяет условиям $\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3| - \log_2 3} = 3^{-y-4}, \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \le 8. \end{cases}$

20. (Почв-89.5) Решить неравенство

$$(x^2-4x+3)\cdot\log_{1/\sqrt{2}}\left(\cos^2\pi x+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}\right)\geq 2.$$

21. (Геол-95(1).9) Для каждого значения a решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(|a|x^2-3x+4)}{\log_2(-3x+4)}=5^{-|x|\cdot(x+1)^2}, \\ x\leq 1. \end{cases}$$

22. (М/м-97(1).5) Решить систему

$$\begin{cases} |x+1|-1\leq x, \\ (2^x+2^{x-2}+2^{2-x})\cos\dfrac{\pi x}{2}+\cos(\pi x)+3+2^{2x-3}=0. \end{cases}$$

23. (ЕГЭ.С) Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $3\sin a+5$ и $9\cos 2a-36\sin a-18$ являются решениями неравенства $\dfrac{(25x-3x^2+18)\sqrt{x-1}}{\log_4|x-7|-1}\geq 0$.

24. (ЕГЭ.С) Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a\cdot 2^{a-4}$ и $a^2\cdot 4^{a-4}+104-5a\cdot 2^{a-2}$ являются решениями неравенства $\log_{10,5-x}\left(\log_2\dfrac{x-2}{x-3}\right)\geq 0$.

8. Задачи на доказательство

8.1. Тригонометрические задачи на доказательство

Теоретический материал

Перед тем как приступить к изучению этого раздела, необходимо повторить все основные тригонометрические факты и формулы.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что $\dfrac{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\sqrt{3}$.

Решение. Воспользуемся в числителе левой части равенства формулами разности косинусов, приведения и разности синусов:

$$\frac{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\cos 40^\circ+(\cos 40^\circ-\cos 20^\circ)}{\sin 20^\circ}=\frac{\cos 40^\circ-2\sin 30^\circ\cdot\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 40^0-\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin 50^\circ-\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{2\cos 30^\circ\cdot\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\sqrt{3},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать равенство $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$.

Решение. Умножим и разделим левую часть равенства на $2\sin\dfrac{\pi}{7}\neq 0$ и воспользуемся в числителе формулой преобразования произведения тригонометрических функций:

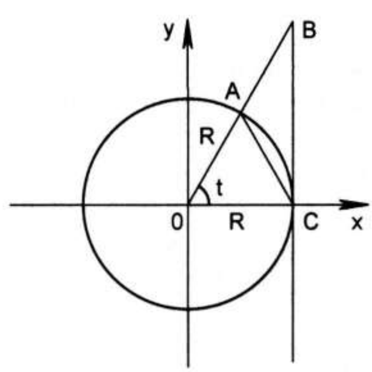
$$\frac{2\sin\dfrac{\pi}{7}\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\sin\dfrac{3\pi}{7}-\sin\dfrac{\pi}{7}+\sin\dfrac{5\pi}{7}-\sin\dfrac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\dfrac{5\pi}{7}}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}.$$

Равенство доказано.

Пример 3. Доказать, что $\sin t<t<\operatorname{tg}t$ при $0<t<\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Рассмотрим окружность радиуса R. Пусть угол AOC равен t. Тогда площадь треугольника AOC равна $\dfrac{1}{2}R^2\sin t$, а площадь сектора AOC равна $\dfrac{1}{2}R^2t$.



Площадь сектора AOC больше площади треугольника AOC, то есть

$$\frac{1}{2}R^2\sin t<\frac{1}{2}R^2t \quad\Longleftrightarrow\quad \sin t<t.$$

Площадь треугольника OCB равна $\dfrac{1}{2}R^2\operatorname{tg}t$. Она больше площади сектора AOC, то есть

$$\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}t>\frac{1}{2}R^2t \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{tg}t>t,$$

что и требовалось доказать.

Задачи

1. Доказать, что $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}=2$.

2. Доказать, что $\dfrac{1}{4}\le\sin^6 x+\cos^6 x\le 1$.

3. Доказать, что $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0$.

4. Доказать, что $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$.

5. Доказать равенство $\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{1}{8}$.

6. Доказать, что $\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{\sin 3\alpha}{4}$.

7. При всех значениях $\alpha\ne\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ доказать неравенство
$$3(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)-8(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)+10\ge 0.$$

8. При всех значениях $\beta\ne\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ доказать неравенство
$$\frac{3(1+\cos^2 2\beta)}{\sin^2 2\beta}-\frac{8}{\sin 2\beta}+5\ge 0.$$

9. Доказать равенство $\dfrac{\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ}{\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}=3$.

10. Доказать, что $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}<\dfrac{\pi}{5}$.

11. Доказать, что $\dfrac{\pi}{4}<\arcsin\dfrac{1}{3}+\arccos\dfrac{2}{3}$.

12. Доказать, что $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}+\operatorname{arctg}\dfrac{7}{23}=\dfrac{\pi}{4}$.

13. Доказать, что если $0\le x\le 1$, то $x\sin x+\cos x\ge 1$.

14. Доказать справедливость неравенства $\arcsin x\cdot\arccos x\le\dfrac{\pi^2}{16}$ и указать, при каких значениях x выполняется равенство.

15. Зная, что $\sin\alpha>0$ и $\sin 3\alpha>\dfrac{1}{4}$, доказать, что $\sin\alpha>\dfrac{109}{1296}$.

16. Доказать, что $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$ при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

17. Имеет ли смысл выражение $\arcsin\left(\sqrt{32}\sin\dfrac{\pi}{11}\right)$?

18. Имеет ли решение уравнение $\cos(\sin 7x) = \dfrac{\pi}{5}$?

19. Доказать справедливость неравенства $\cos(\cos x) > 0,5$.

20. Доказать справедливость неравенства $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

8.2. Метод математической индукции

Теоретический материал

Метод математической индукции заключается в следующем.

Пусть есть некое утверждение, зависящее от n, $n \in \mathbb{N}$. Требуется доказать, что оно верно при всех натуральных $n \geq n_0$.

Базис индукции. Проверяется его справедливость при $n = n_0$.

Предположение индукции. Предполагается истинность этого утверждения при $n = k \geq n_0$.

Индукционный шаг. На основании этой информации доказывается выполнение утверждения при $n = k + 1$. Тогда данное утверждение справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$.

Метод математической индукции позволяет строго и быстро доказать многие утверждения и теоремы. Обратите внимание на то, что переменная n принимает значения из множества целых чисел. Это принципиально важно! В других случаях метод не применим.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n = 1$. Получим

$$1^2 = 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{6} \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что равенство справедливо при $n = k$:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

и докажем его истинность при $n = k + 1$. То есть нам надо доказать, что

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Выпишем левую часть равенства и используем предположение индукции:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Таким образом, утверждение при $n = k + 1$ доказано, и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Пример 2. Доказать неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \text{где} \quad x > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n = 1$. Получим

$$1+x \geq 1+x \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что неравенство справедливо при $n = k$:

$$(1+x)^k \geq 1+kx,$$

и докажем его истинность при $n = k+1$. То есть нам надо доказать, что

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

Выпишем левую часть неравенства и используем предположение индукции:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.$$

Таким образом, утверждение при $n = k+1$ доказано, и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Замечание. Равенство в неравенстве Бернулли достигается только при $n = 1$ или при $x = 0$. При остальных n и x неравенство Бернулли является строгим.

Задачи

1. Доказать, что $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Доказать, что $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1} = 2^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3. Доказать, что $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

4. Доказать для любого натурального n равенство

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

5. Доказать, что $(n-1)! > 2^n \quad \forall n \geq 6$.

6. Доказать, что неравенство $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ выполняется при любом натуральном $n \geq 2$.

7. Доказать, что $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

8. Доказать, что $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

9. Доказать, что $2^n > n^2 \quad \forall n \geq 5$.

10. Доказать, что $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

11. Доказать, что при любом натуральном n выполняется неравенство
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

12. Доказать, что $4^n + 15n - 1 \,\vdots\, 9 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

13. Доказать, что $7^n + 12n + 17 \,\vdots\, 18 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

8.3. Доказательство неравенств и тождеств

Теоретический материал

При доказательстве неравенств из этого раздела могут оказаться полезными следующие утверждения:

- (*оценка суммы двух взаимно обратных величин*)
$\left|a + \frac{1}{a}\right| \ge 2$, где $a \ne 0$; равенство достигается при $a = \pm 1$;
- (*среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического*)
$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$, где $x, y \ge 0$; равенство достигается при $x = y$;
- (*модуль суммы не превосходит суммы модулей*)
$|x| + |y| \ge |x + y|$; равенство достигается, когда $x \cdot y \ge 0$;
- (*неравенство Бернулли*)
$(1 + x)^n \ge 1 + nx$, где $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что $(a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a) \ge 8abc$ при $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$.

Решение. Поскольку среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического, справедливы следующие неравенства:
$$a + b \ge 2\sqrt{ab}, \quad b + c \ge 2\sqrt{bc}, \quad c + a \ge 2\sqrt{ca}.$$

Перемножив их, получим нужное неравенство.

Пример 2. Доказать, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$ при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Решение. Умножим обе части неравенства на сумму $(a + b + c)$:
$$3 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \ge 9 \iff \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \ge 6.$$

Справедливость последнего неравенства следует из свойства суммы двух взаимно обратных положительных чисел, в соответствии с которым

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,\quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2,\quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2.$$

Неравенство доказано.

Пример 3. Доказать неравенство $\dfrac{1}{15}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100}<\dfrac{1}{10}$.

Решение. Правильная положительная дробь увеличивается с увеличением числителя и знаменателя на одно и то же положительное число, то есть $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+c}$, где $0<a<b,\ c>0$. В этом легко убедиться непосредственной проверкой:

$$\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}=\frac{c(b-a)}{b(b+c)}>0.$$

Следовательно, $\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4}<\dfrac{4}{5},\ldots$ Пусть $A=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100}$; тогда

$$A<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}=\frac{1}{101\cdot A},$$

откуда

$$A^2<\frac{1}{101}\quad\Longrightarrow\quad A<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}.$$

Оценим A снизу:

$$\frac{3}{4}>\frac{2}{3};\ \ \frac{5}{6}>\frac{4}{5};\ \ \ldots\ ;\ \ \frac{99}{100}>\frac{98}{99}\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}>\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{98}}=\frac{1}{200\cdot A}\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad A^2>\frac{1}{200}>\frac{1}{225}\quad\Longrightarrow\quad A>\frac{1}{15}.$$

Неравенство доказано.

Задачи

1. Доказать, что для любых $a\neq 0,\ b\neq 0$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{b^2+1}{b}\right)^2>15.$$

2. Доказать, что $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$.

3. Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство $x+y+\dfrac{1}{xy}\geq 3$.

4. Доказать, что если $a+b+c=1$, то $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{1}{3}$.

5. Доказать неравенство $\lg 8 \cdot \lg 12 < 1$.

6. Доказать, что если для неотрицательных чисел $xy+yz+zx=1$, то $x+y+z>1$.

7. Сравнить $2^{x-1}+2^{y-1}$ и $\sqrt{2^{x+y}}$.

8. Доказать неравенство $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{100^2}<\dfrac{99}{100}$.

9. Доказать, что если $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$, то $|ac-bd| \leq 1$.

10. Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3} \leq \sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}$.

11. Доказать, что $\dfrac{1}{\log_2 \pi}+\dfrac{1}{\log_5 \pi}+\dfrac{1}{\log_{10} \pi}>4$.

12. Доказать неравенство $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ для произвольных чисел a, b, c, d.

13. Доказать, что для любого значения переменной x выполняется неравенство
$$x^{12}-x^9+x^6-x^3+1>0.$$

14. Доказать, что если $a+b \geq 1$, то $a^4+b^4 \geq \dfrac{1}{8}$.

15. Доказать, что если $|x-a|+|y-b|<c$, то $|xy-ab|<(|a|+|b|+|c|)c$.

16. Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство $\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \leq \dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$.

17. Пусть $0 \leq x, y, z \leq \pi$. Доказать, что $\sin\dfrac{x+y+z}{3} \geq \dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{3}$.

18. Доказать, что для любого значения x выполняется неравенство $2^x>x$.

19. Пусть a, b, c — попарно взаимно простые числа, причём $a \neq 1$. Доказать, что они не могут быть членами одной геометрической прогрессии.

20. Числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

21. Могут ли различные числа a_k, a_m, a_n быть одноимёнными членами как арифметической, так и геометрической прогрессий?

22. Положительные числа $a_1, a_2, ..., a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что
$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

23. Доказать, что если числа $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ отличны от нуля и образуют арифметическую прогрессию, то
$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

24. В арифметической прогрессии $S_m = S_n\ (m \neq n)$. Доказать, что $S_{m+n} = 0$.

25. Пусть a, b, c — различные простые числа, каждое из которых больше 3. Доказать, что если они образуют арифметическую прогрессию, то её разность кратна 6.

9. Использование особенностей условия задачи

9.1. Оптимизация процесса решения, введение функций, искусственное введение параметров, смена ролей параметра и переменной

Теоретический материал

Любая сложная задача может быть сведена к более простой с помощью различных следствий. Упрощающие предположения основаны на свойствах и особенностях функций, простейшими из которых являются монотонность и ограниченность. После каждого упрощения полезно заново формулировать условие, что особенно важно в задачах с параметрами. Рассмотрим несколько стандартных приёмов.

- Допустим, необходимо решить уравнение $f(x) = c$, где $f(x)$ – возрастающая функция. В силу монотонности функция может принимать значение c не более чем в одной точке. Нужное значение аргумента нередко легко угадывается.

- Если исходное уравнение может быть представлено в виде равенства композиций функций $y = f(t)$ и $t = g(x)$ или $t = h(x)$, то есть $f(g(x)) = f(h(x))$, где $f(t)$ – монотонная функция, то равенство значений функции $f(t)$ эквивалентно равенству значений её аргументов: $g(x) = h(x)$.

- Если в результате преобразований исходного уравнения удалось разделить переменные, то есть представить его в виде $f(x) = g(y)$, необходимо прежде всего проверить, не являются ли функции $f(x)$ и $g(y)$ ограниченными: одна снизу, а вторая сверху.

Для оптимизации процесса решения в ряде задач полезно использовать метод введения новых параметров, изначально в задаче не содержащихся. Он даёт хорошие результаты в тех случаях, когда, например, требуется найти наибольшее и/или наименьшее значение функции нескольких переменных, связанных дополнительными условиями.

В некоторых задачах с параметром логически оправданным является нетривиальный подход к решению, основанный на смене ролей неизвестной величины и параметра. Он отлично себя зарекомендовал в тех случаях, когда смена ролей приводит к существенному упрощению (прежде всего в смысле восприятия) постановки задачи.

Примеры решения задач

Пример 1. (Хим-89.5) Решить уравнение

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$. Она нечётная, монотонно возрастает. Докажем эти свойства.

- Функция $f(t)$ определена на всём множестве действительных чисел; $f(-t)=-t\left(2+\sqrt{(-t)^2+3}\right)=-f(t)$, то есть $f(t)$ нечётная.
- Докажем монотонность. Возьмём два значения аргумента t_1 и t_2 такие, что $t_2>t_1$. Рассмотрим разность:

  $$f(t_2)-f(t_1)=2(t_2-t_1)+t_2\sqrt{t_2^2+3}-t_1\sqrt{t_1^2+3};$$

  первое слагаемое положительно по предположению. Рассмотрим остальные:

  – если $0\le t_1<t_2$, то $t_2\sqrt{t_2^2+3}-t_1\sqrt{t_1^2+3}>$ $>t_2\sqrt{t_1^2+3}-t_1\sqrt{t_1^2+3}=(t_2-t_1)\sqrt{t_1^2+3}>0;$

  – если $t_1<0\le t_2$, то $t_2\sqrt{t_2^2+3}\ge 0$ и $-t_1\sqrt{t_1^2+3}>0;$

  – если $t_1<t_2<0$, то $t_2\sqrt{t_2^2+3}-t_1\sqrt{t_1^2+3}>$ $>t_2\sqrt{t_2^2+3}-t_1\sqrt{t_2^2+3}=(t_2-t_1)\sqrt{t_2^2+3}>0;$

  значит, $f(t_2)>f(t_1)$, то есть функция возрастает на всей области определения.

Исходное уравнение может быть представлено в виде

$$f(2x+1)=-f(3x);$$

воспользуемся нечётностью функции $f(t)$:

$$f(2x+1)=f(-3x);$$

воспользуемся монотонностью:

$$2x+1=-3x \iff x=-\frac{1}{5}.$$

Ответ. $-\frac{1}{5}$.

Пример 2. (Хим-97.6) **Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.**

Решение. Введём обозначение: $a = x^2 + 2y^2$. Переформулируем условие задачи: требуется найти наибольшее и наименьшее значения параметра a, при которых система $\begin{cases} a = x^2 + 2y^2, \\ x^2 - xy + 2y^2 = 1 \end{cases}$ имеет решение. Подставив a из первого уравнения во второе, выразим x через параметр и вторую переменную:

$$\begin{cases} a = x^2 + 2y^2, \\ a - xy = 1; \end{cases}$$

- при $y = 0$ из второго уравнения $a = 1$, из первого уравнения $x = -1$ или $x = 1$;
- при $y \neq 0$ из второго уравнения выразим $x = \dfrac{a-1}{y}$ и подставим в первое:

$$a = \left(\frac{a-1}{y}\right)^2 + 2y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y^4 - ay^2 + (a-1)^2 = 0.$$

Уравнение является квадратным относительно новой переменной $t = y^2 > 0$:

$$2t^2 - at + (a-1)^2 = 0;$$

$$D = a^2 - 8(a-1)^2 = \left(a - 2\sqrt{2}(a-1)\right)\left(a + 2\sqrt{2}(a-1)\right).$$

Уравнение должно иметь корни:

$$D \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \left[\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}; \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}\right].$$

При найденных значениях параметра по крайней мере один корень t^* положителен, поскольку абсцисса вершины параболы $f(t) = 2t^2 - at + (a-1)^2$ положительна: $t_в = \dfrac{a}{4} > 0$. Значит, уравнение $2y^4 - ay^2 + (a-1)^2 = 0$ имеет по крайней мере два корня: $y_1 = -\sqrt{t^*}$ и $y_2 = \sqrt{t^*}$; соответствующие им значения переменной x вычисляются по формуле $x = \dfrac{a-1}{y}$.

Итак, наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$ (то есть наибольшее и наименьшее значения параметра a) равны соответственно $\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$ и $\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$.

Ответ. $\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$; $\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$.

Пример 3. (М/м-92.6) Найти все значения x, при каждом из которых неравенство

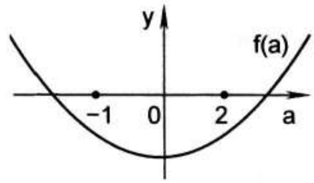
$$(2-a)\cdot x^3+(1-2a)\cdot x^2-6x+(5+4a-a^2)<0$$

выполняется хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$.

Решение. По смыслу задачи x – параметр задачи, a – переменная. Переформулируем условие: найти все значения параметра x, при которых неравенство

$$f(a)=a^2+a(x^3+2x^2-4)-(2x^3+x^2-6x+5)>0$$

имеет решение на отрезке $[-1;2]$. Данному условию не удовлетворяет только такое расположение параболы $f(a)$, при котором



$$\begin{cases} f(-1)\le 0,\\ f(2)\le 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -3x^3-3x^2-6x\le 0,\\ 3x^2+6x-9\le 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(x-1)(x+2)\ge 0,\\ (x-1)(x+3)\le 0; \end{cases} \iff x\in[-2;0]\cup\{1\}.$$

Значит, при всех остальных значениях параметра

$$x\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$$

неравенство будет иметь решение на отрезке $[-1;2]$.

Ответ. $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Задачи

1. (М/м-77.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0,\\ z^3-9y^2+27y-27=0,\\ x^3-9z^2+27z-27=0. \end{cases}$$

2. (Псих-91.5) При каждом значении параметра $a\ge\dfrac{1}{2\pi}$ найти все корни уравнения

$$\cos\left(\frac{2x+a}{2x^2+2ax+5a^2/2}\right)=\cos\left(\frac{2x-a}{2x^2-2ax+5a^2/2}\right).$$

3. (Псих-86.6) Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x+3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2+xy+4y^2\le 3$.

4. (Хим-91.1) Найти максимум и минимум функции $f(x) = \dfrac{3x+1}{(3x+1)^2+1}$.

5. (Псих-99.4) Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \dfrac{3x+p}{x^2+5x+7}$ содержит полуинтервал $(-1;3]$. Определить при каждом таком p множество значений функции $f(x)$.

6. (Биол-94.5) Найти все значения x, при которых неравенство
$$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + (33-13a) > 0$$
выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

7. (ЕГЭ.С) Найдите все значения a, при которых неравенство
$$\frac{x-2a-4}{x+3a-2} \le 0$$
выполняется для всех $x \in [1;3]$.

8. (ВМК-93.6) Найти все значения параметра a, при которых область определения функции
$$y = \frac{1}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}$$
совпадает с областью определения функции
$$y = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x - a} - \frac{\sqrt{2}}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}.$$

9. (Экон.М-99.6) Для каждого значения b найти все пары чисел (x,y), удовлетворяющие уравнению
$$b\sin 2y + \log_4 (x\sqrt[8]{1-4x^8}) = b^2.$$

9.2. Чётность и симметричность по нескольким переменным, исследование единственности решения, необходимые и достаточные условия

Теоретический материал

Нестандартные задачи с параметрами можно существенно упростить, если алгебраическое выражение в условии является чётным. Иногда уравнение, неравенство или система обладает свойством симметрии в более широком смысле, а именно не меняет своего вида при определённой замене переменных, смене переменных местами или других действиях. Нередко такая алгебраическая симметрия бывает неявной и может быть обнаружена только после предварительного преобразования выражения.

Наиболее эффективно информация о симметрии функций используется в задачах о единственности решений или наличии определённого числа решений. Если задача формулируется так: *«Найти все значения параметра, при которых уравнение (неравенство, система) имеет единственное решение»*, то прежде всего необходимо посмотреть, не является ли задача чётной относительно одной из переменных или симметричной относительно двух каких-либо переменных.

- Если задача является чётной относительно переменной x (то есть не меняется при замене x на $(-x)$), то можно рассуждать так: *«Предположим, что x_0 – решение нашей задачи. Тогда в силу чётности относительно x значение $(-x_0)$ тоже будет решением. Поскольку решение должно быть единственным, то $x_0 = -x_0 \iff x_0 = 0$. Значит, единственным может быть только решение $x = 0$. Подставим это значение в исходную задачу и найдём значения параметра, при которых $x = 0$ является решением (необходимые условия единственности решения). Осталось проверить, не будет ли других решений при найденных значениях параметра (достаточность)»*.

- Если задача является симметричной относительно переменных x и y (то есть не меняется при замене $(x; y)$ на $(y; x)$), то можно руководствоваться следующими соображениями: *«Предположим, что $(x_0; y_0)$ – решение задачи. Тогда в силу симметричности задачи $(y_0; x_0)$ также будет решением. Поскольку решение должно быть единственным, то $x_0 = y_0$. Значит, решение задачи будет единственным только при $x = y$. Подставим эту зависимость в исходную задачу и определим те значения параметра, при которых $x = y$ (необходимые условия на параметр). Далее при вычисленных значениях параметра проведём исследование исходной системы и определим количество решений (достаточность)»*.

- Задача может быть симметричной относительно замены x на $1/x$. В этом случае рассуждаем следующим образом: *«Предположим, что $x_0 \neq 0$ – решение нашей задачи. Тогда в силу симметричности $1/x_0$ также будет решением. Поскольку решение должно быть единственным, то $x_0 = 1/x_0$, то есть $x_0 = -1$ или $x_0 = 1$. Значит, решение задачи будет единственным только при $x = -1$ или $x = 1$. Подставим эти значения в исходную задачу и определим те значения параметра, при которых $x = -1$ $(x = 1)$ является решением (необходимые условия). Далее при вычисленных значениях параметра определяем количество решений задачи (достаточность)»*.

Примеры решения задач

Пример 1. (М/м-90.4) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

Решение. Функция в левой части уравнения чётная по переменной x; значит, если x_0 является решением уравнения, то и $-x_0$ также будет решением. Единственным может быть только решение $x = 0$. Подставим это значение переменной в уравнение и найдём те значения параметра, при которых $x = 0$ является корнем:

$$-2a\sin(1) + a^2 = 0 \quad \iff \quad a = 0 \quad \text{или} \quad a = 2\sin(1).$$

1) При $a = 0$ уравнение принимает вид $x^2 = 0 \iff x = 0$ – единственное решение.

2) При $a = 2\sin(1)$ получаем

$$x^2 - 4\sin(1)\cdot\sin(\cos x) + 4\sin^2(1) = 0;$$

так как $|\cos x| \le 1$, то $\sin(\cos x) \le \sin(1)$, поэтому

$$x^2 - 4\sin(1)\cdot\sin(\cos x) + 4\sin^2(1) \ge x^2 \ge 0;$$

равенство достигается при одновременном выполнении двух условий:

$$\begin{cases} x = 0, \\ \cos x = 1; \end{cases} \iff x = 0 \text{ – единственное решение.}$$

Ответ. $0; 2\sin(1)$.

Пример 2. (ВМК-98(1).5) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} + a\cos\left(x - \frac{1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0;$$

заметим, что на области допустимых значений уравнение обладает свойством симметрии относительно замены x на $\dfrac{1}{x}$. Значит, если x_0 является решением, то и $\dfrac{1}{x_0}$ будет решением. Необходимым условием единственности решения является равенство $x = \dfrac{1}{x}$, то есть $x = -1$ или $x = 1$. Найдём соответствующие им значения параметров и проверим достаточность.

1) При $x = -1$ получаем

$$\frac{1}{2} + a + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \iff a^2 + a - \frac{3}{4} = 0 \iff a = -\frac{3}{2} \quad \text{или} \quad a = \frac{1}{2};$$

а) при $a = -\dfrac{3}{2}$ уравнение принимает вид

$$2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} = -1 + \frac{3}{2}\cos\left(x - \frac{1}{x}\right);$$

функция слева ограничена снизу: $2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} \ge 2^{\frac{2}{-2}} = \dfrac{1}{2}$, функция справа ограничена сверху: $-1 + \dfrac{3}{2}\cos\left(x - \dfrac{1}{x}\right) \le \dfrac{1}{2}$; равенство возможно при выполнении условий

$$\begin{cases} 2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} = \dfrac{1}{2}, \\ -1 + \dfrac{3}{2}\cos\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{x} + x = -2, \\ \cos\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = 1; \end{cases} \iff x = -1;$$

решение единственное. Значит, значение параметра $a = -\frac{3}{2}$ подходит;

б) при $a = \frac{1}{2}$ получаем уравнение $2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} = 1 - \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)$. Докажем, что данное уравнение имеет более одного решения. Введём обозначения: $f(x) = 2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}}$, $g(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)$. Корень $x = -1$ мы уже знаем. Докажем, что на интервале $(-1;0)$ есть ещё решения уравнения $f(x) = g(x)$. Прежде всего заметим, что на данном интервале обе функции непрерывны, функция $f(x)$ возрастает и ограничена: $\frac{1}{2} < f(x) < 1$. Далее, так как при изменении x от -1 до 0 функция $h(x) = x - \frac{1}{x}$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, то в силу периодичности косинуса, функция $g(x)$ бесконечное число раз проходит от $\frac{1}{2}$ до $\frac{3}{2}$ и обратно. Следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет бесконечное число решений на интервале $(-1;0)$. Поэтому значение параметра $a = \frac{1}{2}$ не подходит.

2) При $x = 1$ получаем $2 + a + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \iff a^2 + a + \frac{3}{4} = 0$. Так как дискриминант последнего уравнения отрицателен, то $x = 1$ не является решением исходного уравнения ни при каких значениях параметра.

Ответ. $-\frac{3}{2}$.

Пример 3. (ИСАА-98.7) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}\,y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}\,x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

Решение. Заметим, что задача является чётной по переменной x. Пусть $t = x^2$:

$$\begin{cases} t^2 - (a-1)\sqrt{a+3}\,y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}\,t; \end{cases}$$

подставим y из второго уравнения системы в первое:

$$t^2 - (a-1)(a+3)t + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0;$$

$$f(t) = t^2 - (a-1)(a+3)t + (a-1)(a-2)(a+1)(a+4) = 0.$$

Исходная задача имеет три решения, если корни последнего уравнения различны и удовлетворяют условиям: $t_1 = 0$, $t_2 > 0$. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы парабола $f(t)$ проходила через начало координат и имела положительную абсциссу вершины:

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ t_{\text{в}} > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} (a-1)(a-2)(a+1)(a+4) = 0, \\ (a-1)(a+3) > 0; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} a = -4; \\ a = 2. \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ остаётся только $a = 2$. Проверять это a не надо, так как мы его нашли при условии, что первое уравнение будет иметь ровно три решения, а значит, и вся система будет иметь ровно три решения.

Ответ. 2.

Задачи

1. (Псих-95.5) Найти все значения a, при которых неравенство
$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$
имеет единственное решение.

2. (Биол-91.5) Найти все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} z\cos(x-y) + (2+xy)\sin(x+y) - z = 0, \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x+y+a\sin^2 z)\left((1-a)\ln(1-xy)+1\right) = 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

3. (Фил-92.5) Найти все значения параметра b, при которых система уравнений
$$\begin{cases} bx^2 + 2bx + y + 3b - 3 = 0, \\ by^2 + x - 6by + 11b + 1 = 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

4. (Биол-95.6) Найти все значения a, при которых уравнение
$$\left(x^2 - 6|x| - a\right)^2 + 12\left(x^2 - 6|x| - a\right) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$$
имеет ровно два решения.

5. (Хим-84.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$$\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x+a-4| + \left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|} - |a-2|\right)\cdot|x-2| +$$
$$+\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x-a| \le 1$$
выполняется ровно для двух различных значений x.

6. (Хим-02.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$2^{-x^2}\cdot 4^x + \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}$$
имеет единственное решение.

7. (Экон-90.6) Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3+2\sqrt{2})^y - 3a = x^2 + 6x + 5, \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6) \cdot x^2 = 0, \\ -6 \le x \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

8. (Хим-86.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

9.3. Редукция задачи и переформулирование условия

Теоретический материал

В ряде нестандартных задач один из параметров или переменная может принимать всевозможные значения из некоторого множества.

Одна из схем решения задач такого типа состоит в присваивании свободному параметру (переменной) специальных значений, при которых постановка задачи существенно упрощается.

Предположим, задача формулируется так: *«Найти все значения параметра, при которых уравнение (система) выполняется для всех значений x».* Рассуждаем следующим образом: *«Поскольку уравнение должно выполняться для всех x, выберем такое значение переменной x_0, при котором исходное уравнение максимально упрощается. Подставим это значение в уравнение и найдём набор "подозрительных" значений параметра (необходимое условие), которые, в свою очередь, подставим в исходное уравнение (проверяем достаточность). Если для найденного значения параметра уравнение выполняется при всех x, то это значение параметра подходит. Если же уравнение выполняется не при всех значениях x (при этом достаточно найти хотя бы одно такое значение), то рассматриваемое значение параметра не подходит».*

Примеры решения задач

Пример 1. (Почв-98.6) Определить:
а) при каких значениях a существует такое число b, что уравнение $5\cos x + \sin x + \cos(x-b) = a$ имеет решения;
б) при каких значениях a это уравнение имеет решения при любом значении b?

Решение. а) Преобразуем выражение в левой части уравнения, воспользовавшись методом дополнительного аргумента:

$$\sqrt{26}\cos\left(x - \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) + \cos(x-b) = a;$$

функция $f(x) = \sqrt{26}\cos\left(x - \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) + \cos(x-b)$ при всевозможных значениях переменной x и параметра b принимает значения из отрезка $[-\sqrt{26}-1; \sqrt{26}+1]$.

Значит, решение уравнения $f(x) = a$ существует хотя бы при одном b, если $a \in [-\sqrt{26} - 1; \sqrt{26} + 1]$.

б) Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{26}\cos\left(x - \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) = a - \cos(x - b);$$

множество значений левой части есть отрезок $[-\sqrt{26}; \sqrt{26}]$, тогда как множество значений правой части есть отрезок $[a-1; a+1]$. Поскольку это уравнение должно иметь решения при любых значениях b, то

$$\begin{cases} a - 1 \ge -\sqrt{26}, \\ a + 1 \le \sqrt{26}; \end{cases} \iff -\sqrt{26} + 1 \le a \le \sqrt{26} - 1.$$

Ответ. а) $[-\sqrt{26} - 1; \sqrt{26} + 1]$; б) $[-\sqrt{26} + 1; \sqrt{26} - 1]$.

Пример 2. (Псих-78.4) Найти множество всех пар чисел $(a; b)$, для каждой из которых при всех значениях x справедливо равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

Решение. Поскольку по условию задачи равенство должно быть справедливым для всех значений переменной, возьмём $x = 0$:

$$b^2 = \cos(b^2) - 1 \iff b = 0.$$

Значит, другие значения параметра b условию задачи не удовлетворяют; полагаем далее $b = 0$:

$$a(\cos x - 1) = \cos(ax) - 1.$$

Поскольку последнее равенство также должно выполняться $\forall x$, рассмотрим два «специальных» значения переменной:

- при $x = \dfrac{\pi}{2}$ получаем уравнение $\cos\dfrac{\pi a}{2} = 1 - a$;
- при $x = \pi$ $\cos\pi a = 1 - 2a \iff 2\cos^2\dfrac{\pi a}{2} - 1 = 1 - 2a$;

подставим выражение тригонометрической функции из первого уравнения во второе:

$$2(1-a)^2 - 1 = 1 - 2a \iff a = 0 \quad \text{или} \quad a = 1;$$

других значений параметра a быть не может.

Осталось подставить найденные значения параметров $(a; b)$ в исходное уравнение и убедиться в том, что обе пары обращают уравнение в тождество.

Ответ. $(0; 0)$, $(1; 0)$.

Пример 3. (Геол-97.8) При каких значениях α уравнения

$$x\alpha^2 - \alpha - (x^3 - 5x^2 + 4) = 0,$$
$$(x+1)\alpha^2 + (x^2 - x - 2)\alpha - (2x^3 - 10x^2 + 8) = 0$$

не имеют общего решения?

Решение. Переформулируем задачу. Найдём все значения параметра α, при которых система

$$\begin{cases} x\alpha^2 - \alpha - (x^3 - 5x^2 + 4) = 0, \\ (x+1)\alpha^2 + (x^2 - x - 2)\alpha - (2x^3 - 10x^2 + 8) = 0; \end{cases}$$

имеет решения. Тогда все остальные значения параметра будут удовлетворять условию задачи.

Вычитая из удвоенного первого уравнения системы второе, получаем

$$(x-1)\alpha^2 - (x^2 - x)\alpha = 0 \iff$$
$$\iff \left[\begin{aligned} &\alpha = 0; \\ &(x-1)\alpha - (x^2 - x) = 0; \end{aligned}\right. \iff$$
$$\iff \left[\begin{aligned} &\alpha = 0; \\ &x^2 - (\alpha+1)x + \alpha = 0; \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &\alpha = 0; \\ &x = \alpha; \\ &x = 1; \end{aligned}\right.$$

подставляем найденные значения переменной и параметра в исходную систему:

1) при $\alpha = 0$ получаем два одинаковых уравнения: $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$. Подбором находим одно из решений $x = 1$. Значит, при $\alpha = 0$ система имеет решения;

2) при $x = \alpha$, заменяя первое уравнение на разность первого и второго уравнения, получаем

$$\begin{cases} 5\alpha^2 - \alpha - 4 = 0, \\ 10\alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0 \end{cases} \iff 5\alpha^2 - \alpha - 4 = 0 \iff \left[\begin{aligned} &\alpha = 1; \\ &\alpha = -\frac{4}{5}; \end{aligned}\right.$$

значит, при $\alpha = 1$ система имеет решение $x = 1$, при $\alpha = -\dfrac{4}{5}$ у системы есть решение $x = -\dfrac{4}{5}$;

3) при $x = 1$ получаем

$$\begin{cases} \alpha^2 - \alpha = 0, \\ 2\alpha^2 - 2\alpha = 0 \end{cases} \iff \left[\begin{aligned} &\alpha = 0; \\ &\alpha = 1; \end{aligned}\right.$$

оба значения параметра были исследованы ранее.

Итак, система имеет решения при $\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. При остальных α система не имеет решений.

Ответ. $\left(-\infty; -\dfrac{4}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{4}{5}; 0\right) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Задачи

1. (ИСАА-93.6) Найти все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2 + 2|x-a| \geq a^2$ справедливо для всех x.

2. (М/м-86.5) Найти все значения a, при каждом из которых для любого значения b система
$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z = 4 \end{cases}$$
имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

3. (Геол-98(1).8) При каких a для любого $b \geq 2$ неравенство
$$(b-1)x + 2\sqrt{1-(b-1)^{-2}} < \left(\frac{a+1}{b-1} - b + 1\right)\frac{1}{x}$$
выполняется для всех $x < 0$?

4. (Почв-00.7) Найдите все значения параметра a, при которых при любых значениях параметра b уравнение
$$|x-2| + b|2x+1| = a$$
имеет хотя бы одно решение.

5. (Геол-79.6) Найти все неотрицательные числа x, при каждом из которых из неравенств $abx \geq 4a + 7b + x$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ следует неравенство $ab \geq 5$.

6. (Геогр-85.5) Найти все значения параметра a, удовлетворяющие условию $-1 < a < 1$, для каждого из которых выражение
$$1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10}$$
принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел x, y.

7. (ВМК-90.6) Найти все значения параметра a, при которых для любых значений параметра b неравенство
$$\left|\log_6 \frac{x}{36} + \left(\frac{10a+3b+31}{5}\right)x^2 - 9b^2 - 9b - 1\right| \leq \log_6 \frac{36}{x} + \left(\frac{10a+3b+41}{5}\right)x^2 -$$
$$-(6b+2)x + 9b^2 + 15b + 3$$
имеет хотя бы одно решение.

8. (ВМК-98.5) Найти все значения параметра a, при которых существуют (x, y), удовлетворяющие системе неравенств
$$\begin{cases} \max(2-3y, y+2) \leq 5, \\ \sqrt{a^2 + \dfrac{6}{\pi}\arccos\sqrt{1-x^2} - 16 - \dfrac{2}{\pi^2}\arcsin x(\pi + 2\arcsin x)} \geq y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

9.4. Смешанные задачи

Теоретический материал

В данном пункте собраны примеры, для успешного решения которых необходимо владеть как базовыми навыками логического мышления, так и широким набором нестандартных приёмов решения алгебраических задач.

Примеры решения задач

Пример 1. (ВМК-85.5) Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - 17} + \sqrt{3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos\pi y + \cos\pi z)x + 4} = 0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - 17 = 0, \\ 3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos\pi y + \cos\pi z)x + 4 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно является квадратным по переменной x. Необходимое условие существования корней – неотрицательность дискриминанта:

$$D_1 = 3(\cos\pi y + \cos\pi z)^2 - 12 \geq 0 \iff |\cos\pi y + \cos\pi z| = 2.$$

1) Равенство $\cos\pi y + \cos\pi z = 2$ равносильно системе

$$\begin{cases} \cos\pi y = 1, \\ \cos\pi z = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ z = 2m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

значит, переменные y и z – чётные целые числа.

Подставляя условие $\cos\pi y + \cos\pi z = 2$ во второе уравнение системы, находим значения переменной x:

$3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0 \iff x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Из первого уравнения системы получаем

$$2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + 1 - 17 = 0 \iff z^2 - y^2 + 5z + 3y = 7.$$

Поскольку y и z чётные, выражение в левой части чётное, справа – нечётное число. Следовательно, уравнение решений не имеет.

2) Равенство $\cos\pi y + \cos\pi z = -2$ равносильно системе

$$\begin{cases} \cos\pi y = -1, \\ \cos\pi z = -1; \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 + 2n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ z = 1 + 2m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

то есть переменные y и z – нечётные целые числа. Из второго уравнения системы находим x: $3x^2 + 4\sqrt{3}x + 4 = 0 \iff x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Подставляем найденное значение в первое уравнение:

$$2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y - 1 - 17 = 0 \iff z^2 - y^2 + 5z + 3y = 8.$$

Решим полученное уравнение на множестве целых чисел и отберём пары, состоящие из нечётных целых чисел:

$$z^2 - y^2 + 5z + 3y = 8 \iff (z-y)(z+y) + 4(z+y) + z - y = 8 \iff$$
$$\iff (z-y+4)(z+y+1) = 12.$$

Если y и z нечётные, то выражение $z - y + 4$ будет принимать чётные значения, а выражение $z + y + 1$ – нечётные; следовательно, есть четыре возможности:
а) $z - y + 4 = 12, \quad z + y + 1 = 1 \iff y = -4, \ z = 4$ – не подходит;
б) $z - y + 4 = -12, \quad z + y + 1 = -1 \iff y = 7, \ z = -9$ – подходит;
в) $z - y + 4 = 4, \quad z + y + 1 = 3 \iff y = 1, \ z = 1$ – подходит;
г) $z - y + 4 = -4, \quad z + y + 1 = -3 \iff y = 2, \ z = -6$ – не подходит.

Ответ. $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 1; 1\right), \ \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 7; -9\right)$.

Пример 2. (Почв-85.5) Пусть x_0 – больший из корней уравнения

$$x^2 + 2(a-b-3)x + a - b - 13 = 0.$$

Найти наибольшее значение x_0 при $a \geq 2, \ b \leq 1$.

Решение. Убедимся, что корни существуют:

$$D_1 = (a-b-3)^2 - (a-b-13) = (a-b)^2 - 7(a-b) + 22 > 0 \quad \forall a, \ b;$$

преобразуем исходное уравнение:

$$(a-b)(2x+1) = 13 + 6x - x^2;$$

поскольку $x = -\frac{1}{2}$ не является корнем уравнения, выразим разность $a - b$ через переменную:

$$a - b = \frac{13 + 6x - x^2}{2x+1}.$$

По условию $a \geq 2, \ b \leq 1 \implies a - b \geq 1$. Найдем все допустимые x:

$$\frac{13 + 6x - x^2}{2x+1} \geq 1 \iff \frac{(x+2)(x-6)}{2x+1} \leq 0 \iff x \in (-\infty; -2] \cup \left(-\frac{1}{2}; 6\right].$$

Наибольшее значение корня $x_0 = 6$; ему соответствует $a - b = 1$, что при ограничениях $a \geq 2, \ b \leq 1$ возможно при $a = 2, \ b = 1$.

Ответ. 6.

Пример 3. (Геогр-80.5) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left|y + \frac{1}{x}\right| + \left|\frac{13}{6} + x - y\right| = \frac{13}{6} + x + \frac{1}{x}, \\ x^2 + y^2 = \frac{97}{36}; \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $x < 0$ и $y > 0$.

Решение. Заметим, что первое уравнение может быть представлено в виде

$$|f(x,y)| + |g(x,y)| = f(x,y) + g(x,y),$$

где $f(x,y) = y + \frac{1}{x}$, $g(x,y) = \frac{13}{6} + x - y$; равенство равносильно системе

$$\begin{cases} f(x,y) \geq 0, \\ g(x,y) \geq 0; \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} y + \frac{1}{x} \geq 0, \\ \frac{13}{6} + x - y \geq 0. \end{cases}$$

Складывая неравенства, получаем следствие: $\frac{1}{x} + \frac{13}{6} + x \geq 0$, откуда с учётом отрицательности переменной, $x^2 + \frac{13}{6}x + 1 \leq 0$.

С другой стороны, из второго неравенства: $y \leq \frac{13}{6} + x$; возводим в квадрат, учитывая условие $y > 0$: $y^2 \leq \left(\frac{13}{6} + x\right)^2$. Используя равенство $x^2 + y^2 = \frac{97}{36}$, получаем

$$\frac{97}{36} - x^2 \leq \left(\frac{13}{6} + x\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + \frac{13}{6}x + 1 \geq 0.$$

Значит, $x^2 + \frac{13}{6}x + 1 = 0$, то есть $x = -\frac{3}{2}$ или $x = -\frac{2}{3}$. Из равенства $y^2 = \frac{97}{36} - x^2$ определяем соответствующие положительные значения второй переменной: $y = \frac{2}{3}$ или $y = \frac{3}{2}$. Найденные значения проверяем в исходной системе.

Ответ. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

Задачи

1. (Геол-95.8) Найти все значения a, при которых неравенство $9^x < 20 \cdot 3^x + a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

2. (Хим-96(1).5) Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2 + 5x + 5} \geq 2, \\ x^2 + 6x + 5 \leq 0. \end{cases}$$

3. (Экон-98.7) Найти все значения a, при которых уравнения $x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 + 2 = 0$ и $x^3 - ax^2 - 10a^2x + 10a^3 - 1 = 0$ имеют хотя бы один общий корень.

4. (Фил-80.5) Найти все значения a из промежутка $[1; +\infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения

$$x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$$

принимает наибольшее значение.

5. (Псих-88.6) Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2-2x+1)+\frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1}\leq\sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

6. (Псих-92.4) Найти все значения параметров u и v, при которых существуют два различных корня уравнения

$$x(x^2+x-8)=u,$$

являющихся одновременно корнями уравнения

$$x(x^2-6)=v.$$

7. (М/м-99(2).3) Найти все x, при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x-3|(|x-5|-|x-3|)-6x \quad \text{и} \quad |x|(|x|-|x-8|)+24$$

неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

8. (Псих-98.6) Найти все целые значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right)-b\cdot 2^{\sin\pi bx}-\left|\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right)+b\cdot 2^{\sin\pi bx}\right|=2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

9. (Фил-82.5) Найти все значения параметра γ, при каждом из которых минимально количество пар (n,m) целых чисел n и m, удовлетворяющих условию $\gamma^3|n|\leq\sqrt{2}(\gamma^2-m^2)$.

Часть II. Геометрия

1. Треугольники

1.1. Прямоугольные треугольники

Теоретический материал

Этот раздел всецело посвящен прямоугольным треугольникам. Для успешного решения задач, относящихся к этой теме, необходимо знать и уметь обосновывать **все** факты, перечисленные ниже по тексту.

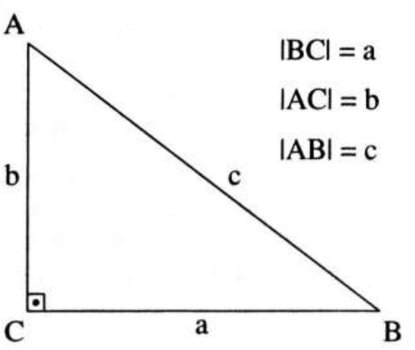
1. Соотношения между длинами сторон и величинами углов в прямоугольном треугольнике

Рассмотрим **прямоугольный треугольник** ABC, будем считать, что его угол C прямой (то есть его величина равна $\pi/2$), длины отрезков AB, AC и BC (которые везде в пособии будут обозначены как $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$) равны c, b и a соответственно. Тогда

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \widehat{A} = b \cdot \operatorname{ctg} \widehat{B} = c \cdot \sin \widehat{A} = c \cdot \cos \widehat{B},$$

$$b = a \cdot \operatorname{tg} \widehat{B} = a \cdot \operatorname{ctg} \widehat{A} = c \cdot \sin \widehat{B} = c \cdot \cos \widehat{A},$$

$$c = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{a}{\cos \widehat{B}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{b}{\cos \widehat{A}}.$$



З а м е ч а н и е. Полезно знать, что эти формулы на самом деле есть не что иное, как переписанные утверждения, вытекающие из определений тригонометрических функций величин острых углов, а именно:

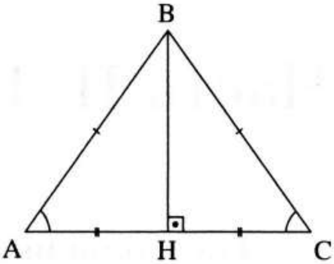
синус величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **противолежащего** этому углу, к длине гипотенузы;

косинус величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **прилежащего** к этому углу, к длине гипотенузы;

тангенс величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **противолежащего** этому углу, к длине катета, **прилежащего** к этому углу;

котангенс величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **прилежащего** к этому углу, к длине катета, **противолежащего** этому углу.

2. Соотношения между длинами сторон и величинами углов в равнобедренном треугольнике



Пользуясь вышеизложенными фактами, получим непосредственно вытекающие из них важные соотношения между длинами сторон, длиной высоты, проведённой к основанию, и величинами углов в равнобедренном треугольнике. Как показывает практика, при решении задач очень часто возникают различные конфигурации, в которые входят равнобедренные треугольники, и как следствие возникает необходимость применять нижеприведённые формулы. Рассмотрим **равнобедренный треугольник** ABC, в котором $|AB| = |BC|$, BH — высота, проведённая к основанию AC. Справедливы следующие утверждения:

I. *Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна частному длины его основания и удвоенного косинуса величины угла при основании этого треугольника:*

$$|AB| = |BC| = \frac{|AC|}{2\cos\widehat{BAC}}, \quad |AC| = 2\cdot|AB|\cdot\cos\widehat{BAC}.$$

II. *Длина высоты равнобедренного треугольника, проведённой к его основанию, равна частному длины этого основания и удвоенного котангенса величины угла при основании этого треугольника:*

$$|BH| = \frac{|AC|}{2\operatorname{ctg}\widehat{BAC}}, \quad |AC| = 2\cdot|BH|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{BAC}.$$

Доказательство этих фактов несложно: ясно, что прямоугольные треугольники ABH и CBH равны по гипотенузе и катету. Из этого равенства вытекает, что $|AH| = |HC|$, а, с другой стороны, из прямоугольного треугольника ABH следует, что $|AH| = |AB|\cdot\cos\widehat{BAC}$, $|AH| = |BH|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{BAC}$. Поэтому

$$|AC| = 2\cdot|AH| = 2\cdot|AB|\cdot\cos\widehat{BAC} \iff |AB| = |BC| = \frac{|AC|}{2\cos\widehat{BAC}};$$

$$|AC| = 2\cdot|AH| = 2\cdot|BH|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{BAC} \iff |BH| = \frac{|AC|}{2\operatorname{ctg}\widehat{BAC}}.$$

Утверждение доказано.

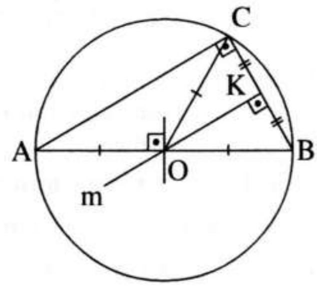
3. Формула площади прямоугольного треугольника

Площадь прямоугольного треугольника может быть вычислена как половина произведения длин его катетов $\left(S = \dfrac{ab}{2}\right)$.

Доказательство этого факта практически очевидно: ясно, что если в прямоугольнике, длины сторон которого равны a и b, провести диагональ, то он будет разделён на два равных прямоугольных треугольника, длины катетов которых равны a и b. Осталось лишь вспомнить, что площадь прямоугольника равна произведению длин двух его смежных сторон, то есть ab.

4. Окружность, описанная около прямоугольного треугольника

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, находится на середине его гипотенузы; длина радиуса этой окружности равна половине длины гипотенузы $\left(R = \dfrac{c}{2}\right)$.



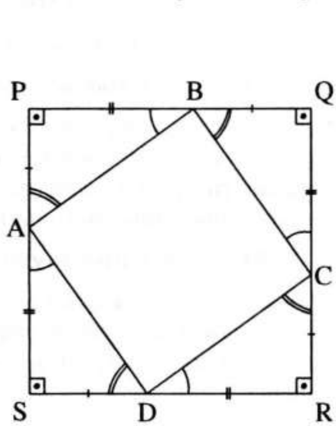
Для доказательства этого утверждения воспользуемся тем, что центр окружности, описанной около **произвольного** треугольника, лежит на пересечении **серединных перпендикуляров** к его сторонам. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой), обозначим буквой K середину его стороны BC, проведем через точку K прямую m, перпендикулярную BC (она как раз и будет серединным перпендикуляром к отрезку BC) и обозначим буквой O точку пересечения m и AB.

Рассматривая прямоугольные треугольники ABC и OBK, имеем $\cos\widehat{B} = |BK| : |OB| = |BC| : |AB|$, из чего следует $|OB| : |AB| = |BK| : |BC|$. Но поскольку $|BK| : |BC| = 1 : 2$, то точка O – **середина** отрезка AB. Наконец, в силу того что серединный перпендикуляр к AB тоже проходит через точку O, то точка O есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC, то есть она является центром окружности, описанной около треугольника ABC. Длина радиуса этой окружности, очевидно, равна длине отрезка OA, то есть половине длины гипотенузы AB.

Замечание. Верно и обратное утверждение: если у некоторого треугольника центр описанной около него окружности находится на середине одной из его сторон (что эквивалентно тому, что длина радиуса этой окружности равна половине длины одной из его сторон), то этот треугольник прямоугольный.

5. Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы ($a^2 + b^2 = c^2$).



Приведем доказательство этого факта. Рассмотрим четыре **равных** между собой прямоугольных треугольника ABP, BCQ, CDR и DAS, будем считать, что

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = c,$$

$$|AP| = |BQ| = |CR| = |DS| = a,$$

$$|BP| = |CQ| = |DR| = |AS| = b,$$

и расположим их так, как показано на рисунке. Заметим, что $|PQ| = |QR| = |RS| = |SP| = a + b$, углы P, Q, R и S – прямые, поэтому $PQRS$ – квадрат. С другой стороны, из теоремы о сумме величин углов треугольника вытекает, что сумма величин острых углов прямоугольного треугольника равна $\pi/2$. Но тогда величины углов ABC, BCD, CDA и DAB тоже равны $\pi/2$. Это следует из того, что, например, $\widehat{ABC} + \widehat{ABP} + \widehat{CBQ} = \pi$, $\widehat{ABP} + \widehat{CBQ} = \pi/2$. Пользуясь этим фактом и равенством длин отрезков AB, BC, CD и DA, мы получаем, что $ABCD$ тоже является квадратом.

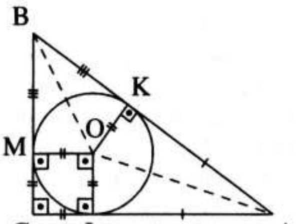
Наконец, очевидно, что площадь квадрата $PQRS$ равна сумме площади квадрата $ABCD$ и учетверённой площади треугольника ABP. Пользуясь формулами площади квадрата и прямоугольного треугольника, находим

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \iff a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \iff a^2 + b^2 = c^2.$$

Замечание. Верна и обратная теорема: если в некотором треугольнике сумма квадратов длин двух его сторон равна квадрату длины его третьей стороны, то он прямоугольный.

6. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник

Длина радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равна полуразности суммы длин его катетов и длины его гипотенузы $\left(r = \dfrac{a+b-c}{2}\right)$.



Доказательство этого факта чуть более сложно, чем предыдущие доказательства. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой), обозначим центр вписанной в него окружности буквой O, точки её касания со сторонами AB, BC и AC – буквами K, M и L соответственно, а длину её радиуса – буквой r.

Ясно, что $OK \perp AB$, $OM \perp BC$ и $OL \perp AC$. Из этого следует, что $OLCM$ – квадрат (у четырёхугольника $OLCM$ три прямых угла, поэтому он прямоугольник, и равны длины смежных сторон OL и OM, поэтому он квадрат), стало быть, $|CM| = |CL| = |OL| = r$. Также заметим, что равны пары прямоугольных треугольников AOL и AOK, BOM и BOK (по гипотенузе и катету), из чего вытекает, что $|AL| = |AK|$, $|BM| = |BK|$. Наконец, запишем цепочку соотношений

$$|AB| = |AK| + |BK| = |AL| + |BM| =$$
$$= (|AC| - |CL|) + (|BC| - |CM|) = |AC| + |BC| - 2r,$$

откуда и следует требуемая формула.

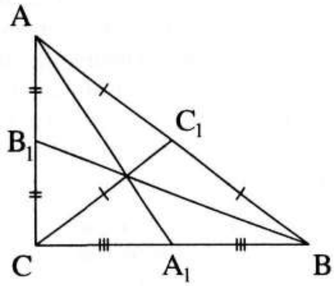
Замечание. Обратное утверждение опять-таки верно: если длина радиуса окружности, вписанной в некоторый треугольник, может быть вычислена как полуразность суммы длин двух его сторон и длины его третьей стороны, то этот треугольник – прямоугольный.

7. Медианы прямоугольного треугольника

Длина медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равна половине длины гипотенузы; длина медианы, проведённой к катету, равна корню из суммы четверти квадрата длины этого катета и квадрата длины другого катета:

$$m_c = \frac{c}{2},\ m_a = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}},\ m_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

Доказательство этого факта тривиально. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой), его медианы обозначим как AA_1, BB_1 и CC_1. Поскольку C_1 – середина гипотенузы, то C_1 – центр окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому



$$|AC_1| = |BC_1| = |CC_1| = \frac{|AB|}{2}.$$

Для нахождения длин отрезков AA_1 и BB_1 надо всего лишь применить теорему Пифагора для треугольников AA_1C и BB_1C.

Следствие. *Сумма квадратов длин медиан прямоугольного треугольника, проведённых к катетам, в пять раз больше, чем квадрат длины его медианы, проведённой к гипотенузе* ($5m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$).

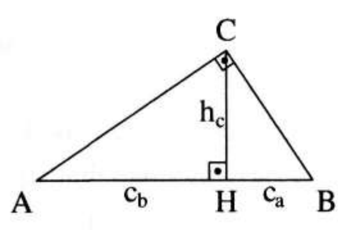
Замечание. Опять-таки верны обратные утверждения: если в некотором треугольнике длина медианы, проведённой к одной из его сторон, равна половине длины этой стороны или выполнено соотношение $5m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$, то этот треугольник – прямоугольный.

8. Высоты прямоугольного треугольника

I. *Длина высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равна частному произведения длин катетов и длины гипотенузы* $\left(h_c = \dfrac{ab}{c}\right)$.

II. *Квадрат длины высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению длин отрезков гипотенузы, на которые её делит основание этой высоты* ($h_c^2 = c_a \cdot c_b$).

Доказать эти утверждения несложно: возьмем прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой), проведём его высоту CH и с помощью соотношений между длинами сторон и величинами углов в прямоугольном треугольнике выразим двумя способами синус величины угла A (рассмотрев треугольники ABC и ACH):



$$\sin\widehat{A} = \frac{|BC|}{|AB|},\ \sin\widehat{A} = \frac{|CH|}{|AC|} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|CH|}{|AC|} \quad\Longleftrightarrow\quad |CH| = \frac{|AC|\cdot|BC|}{|AB|}.$$

С другой стороны, из прямоугольных треугольников ACH и BCH имеем

$$\operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{|CH|}{|AH|},\ \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{|CH|}{|BH|} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}\widehat{A}\cdot\operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{|CH|^2}{|AH|\cdot|BH|},$$

из чего, пользуясь тем, что $\operatorname{tg}\widehat{A}\cdot\operatorname{tg}\widehat{B} = \dfrac{|BC|}{|AC|}\cdot\dfrac{|AC|}{|BC|} = 1$, мы получаем требуемое соотношение: $|CH|^2 = |AH|\cdot|BH|$.

З а м е ч а н и е 1. Верны и обратные утверждения:

I. Если в некотором треугольнике длина высоты, проведённой к одной из его сторон, равна отношению произведения длин двух других его сторон и длины стороны, к которой проведена высота, то этот треугольник – прямоугольный;

II. Если в некотором треугольнике квадрат длины высоты, проведённой к одной из его сторон, равен произведению длин отрезков, на которые её основание делит эту сторону, то этот треугольник – прямоугольный.

З а м е ч а н и е 2. Ясно, что высота прямоугольного треугольника, проведённая к одному из его катетов, совпадает с другим его катетом. То есть $h_a = b$, $h_b = a$.

Отметим, что все приведённые обратные утверждения даны без доказательств. Это сделано по причине того, что их доказательства требуют применения различных фактов, связанных с произвольными треугольниками и впрямую не относящихся к теме этого параграфа, или же решения различных тригонометрических уравнений. Тем не менее попробуйте их доказать.

Наконец, перечислим некоторые факты, относящиеся к произвольным треугольникам, которые также необходимо знать и уметь использовать при решении задач, в которых встречаются прямоугольные треугольники.

В нижеприведённых формулах a, b, c – длины сторон произвольного треугольника; $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ – величины соответствующих противолежащих им углов треугольника; h_a, h_b, h_c – длины высот, проведённых к сторонам, длины которых равны a, b и c соответственно; p – полупериметр треугольника; r – длина радиуса вписанной в треугольник окружности; R – длина радиуса описанной около треугольника окружности.

Теорема о сумме величин внутренних углов треугольника

Сумма величин внутренних углов треугольника равна π. (Сумма градусных мер внутренних углов треугольников равна 180°.)

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R.$$

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}.$$

Различные формулы площади произвольного треугольника

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\widehat{A},$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$S = p\cdot r, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = 2R^2\cdot\sin\widehat{A}\cdot\sin\widehat{B}\cdot\sin\widehat{C}.$$

Теоремы о медианах и высотах треугольника

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой на отрезки, длины которых относятся как 2:1, считая от вершины.

Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке. Если треугольник остроугольный, то эта точка лежит внутри треугольника. Если он тупоугольный, то эта точка лежит вне его.

Теоремы об описанной и вписанной окружностях

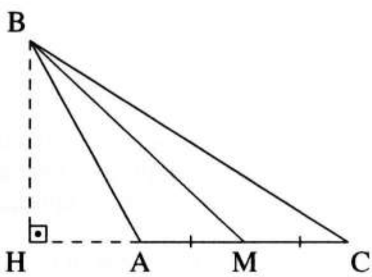
Около всякого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведённых к сторонам треугольника. Причём этот центр лежит внутри треугольника, если он остроугольный; вне треугольника, если он тупоугольный; на середине гипотенузы, если он прямоугольный.

Во всякий треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения биссектрис всех трёх внутренних углов треугольника, причём всегда внутри треугольника.

Примеры решения задач

Пример 1. В треугольнике ABC из вершины B к стороне AC проведены медиана BM и высота BH. Известно, что $|AB| = \sqrt{5}$, $|BM| = 2\sqrt{2}$, $|BH| = 2$. Найдите длину стороны BC, если $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} < \pi/2$.

Решение. При решении этой задачи главное – выяснить, где находится основание высоты BH. Для этого рассмотрим данное нам про величины углов треугольника соотношение и используем теорему о сумме величин углов треугольника:



$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} < \frac{\pi}{2},$$

$$\widehat{BAC} = \pi - \left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) \implies$$

$$\implies \widehat{BAC} > \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, угол BAC – тупой. Из этого вытекает, что точка H лежит **на продолжении** стороны AC за точку A, поэтому $|AH|+|AM| = |HM|$. Применяя теорему Пифагора для треугольников BAH и BMH, получаем

$$|BH|^2 + |AH|^2 = |BA|^2 \implies 2^2 + |AH|^2 = (\sqrt{5})^2 \implies |AH| = 1,$$

$$|BH|^2 + |MH|^2 = |BM|^2 \implies 2^2 + |MH|^2 = (2\sqrt{2})^2 \implies |MH| = 2.$$

Отсюда вытекает, что $|AM| = |MH| - |AH| = 1$. Далее, M – середина AC, значит, $|AC| = 2 \cdot |AM| = 2$, а $|CH| = |AH| + |AC| = 3$.

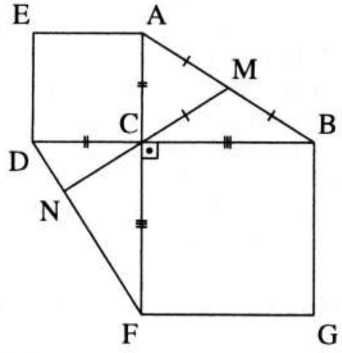
Наконец, записываем теорему Пифагора для треугольника BHC:

$$|BH|^2 + |HC|^2 = |BC|^2 \implies |BC|^2 = 2^2 + 3^2 = 13.$$

Ответ. $|BC| = \sqrt{13}$.

Пример 2. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите длину отрезка CN, если известно, что $|AC| = 1, |BC| = 4$.

Решение. CM – медиана треугольника ABC, проведённая к его гипотенузе, значит, $|AM| = |BM| = |CM|$ и треугольники ACM и BCM – равнобедренные.



С учётом этого и того, что углы FCN и MCA – вертикальные, получаем

$$\widehat{FCN} = \widehat{MCA} = \widehat{MAC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{MBC}.$$

А из равенства прямоугольных треугольников FCD и BCA (по двум катетам) вытекает равенство углов CFN и MBC. Отсюда следует, что

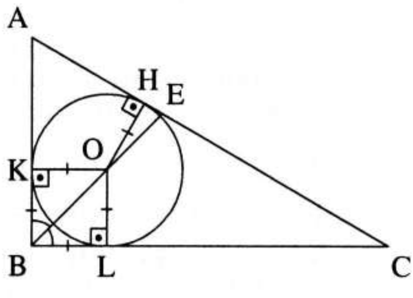
$$\widehat{FCN} + \widehat{CFN} = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{CNF} = \frac{\pi}{2}.$$

То есть CN – высота треугольника FCD. Её длину можно легко вычислить с помощью формулы длины высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе:

$$|DF| = \sqrt{|CF|^2 + |CD|^2} = \sqrt{17}; \ |CN| = \frac{|CD| \cdot |CF|}{|DF|} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Ответ. $\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Пример 3. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, считая от вершины B. Найдите величины острых углов треугольника ABC.



Решение. Проведём из центра вписанной окружности радиусы OH, OK и OL в точки касания её с гипотенузой и катетами, положим $|OH| = |OK| = |OL| = r$.

Поскольку углы OKB, OLB, ABC – прямые, а $|OK| = |OL|$, то $OKBL$ – квадрат. Поэтому $|BO| = r\sqrt{2}$. Теперь выразим длину отрезка OE. Так как BE – биссектриса угла ABC, то величина угла ABE равна $\pi/4$. Обозначим величину угла A за α, тогда, так как сумма величин углов треугольника ABE равна π, величина угла AEB равна $3\pi/4 - \alpha$. С учётом этого из прямоугольного треугольника OHE получаем

$$|OE| = \frac{|OH|}{\sin \widehat{OEH}} = \frac{r}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \alpha)}.$$

Подставляя выраженные нами длины отрезков BO и OE в соотношение из условия задачи и учитывая тот факт, что, поскольку угол A – острый, то $0 < \alpha < \pi/2$ и величина $3\pi/4 - \alpha$ может принимать только значения из интервала $(\pi/4, 3\pi/4)$, имеем

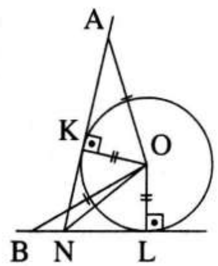
$$\frac{r\sqrt{2}}{\frac{r}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3\pi}{4} - \alpha = \frac{\pi}{3}, \\ \frac{3\pi}{4} - \alpha = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{5\pi}{12}, \\ \alpha = \frac{\pi}{12}. \end{array}\right.$$

Мы получили два варианта для величины угла α, в сумме они дают $\pi/2$. Это и есть величины острых углов треугольника, поскольку, если мы выберем в качестве α одно из двух полученных значений, величина другого острого угла будет равна как раз второму из этих значений.

Ответ. $\dfrac{5\pi}{12}$ и $\dfrac{\pi}{12}$.

Пример 4. Через точку N проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром O. На одной из этих прямых взята точка A, а на другой взята точка B так, что $|OA| = |OB|$, $|OA| > |ON|$, $|NA| \neq |NB|$. Известно, что $|NA| = a, |NB| = b, |OA| = c$. Найдите длину отрезка ON.

Решение. Обозначим точки касания прямых и окружности из условия задачи буквами K и L, без ограничения общности будем считать, что точка A лежит на прямой NK, а точка B – на прямой NL.



Заметим, что $\triangle NOK = \triangle NOL$ и $\triangle AOK = \triangle BOL$ (по гипотенузе и катету), откуда следует, что $|NK| = |NL|$ и $|AK| = |BL|$. Также отметим, что из данных в условии задачи неравенств $|OA| > |ON|$, $|OB| > |ON|$ и теоремы Пифагора вытекает, что $|AK| > |KN|$ и $|BL| > |LN|$. После этого мы можем сделать вывод о расположении точек A и B. Если предположить, что точка A лежит на луче $[NK)$, а точка B – на луче $[NL)$, то необходимо получается, что точка K лежит на отрезке NA, а точка L – на отрезке NB, то есть

$$|NA| = |NK| + |AK|;\ |NB| = |NL| + |BL| \quad \Longrightarrow \quad |NA| = |NB|.$$

Это противоречит условию задачи. Аналогично доказывается, что невозможен случай, когда точка A лежит на луче, дополнительном к $[NK)$, а точка B – на луче, дополнительном к $[NL)$. Будем полагать, что A лежит на луче $[NK)$, а B – на луче, дополнительном к $[NL)$. Тогда $|NA| = |NK| + |AK|$, $|NB| = |BL| - |NL|$, и в силу того, что $|NK| = |NL|$, $|AK| = |BL|$, мы находим

$$|NA| + |NB| = |AK| + |BL| \quad \Longrightarrow \quad |AK| = |BL| = \frac{a+b}{2};\ |NK| = |NL| = \frac{a-b}{2}.$$

Теперь запишем теорему Пифагора для треугольников AOK и NOK:

$$\begin{cases} |OK|^2 = |OA|^2 - |AK|^2, \\ |OK|^2 = |ON|^2 - |NK|^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad |OA|^2 - |AK|^2 = |ON|^2 - |NK|^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |ON|^2 = |OA|^2 + |NK|^2 - |AK|^2 = c^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = c^2 - ab.$$

Случай, когда A лежит на луче, дополнительном к $[NK)$, а B – на луче $[NL)$, рассматривается аналогично.

Ответ. $|ON| = \sqrt{c^2 - ab}$.

Задачи

1. В треугольнике ABC угол BAC прямой, $|AB| = 1$, $|BC| = 3$. Точка K делит сторону AC в отношении 7:1, считая от точки A. Что больше, $|AC|$ или $|BK|$?

2. В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $|CD| = |CE| = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE. Площадь треугольника BOD больше площади треугольника AOE на $0,5$. Известно, что $|AD| = \sqrt{10}$. Найдите длину гипотенузы AB.

3. В равнобедренном треугольнике длины высот, опущенных на основание и на боковую сторону, равны соответственно m и n. Найдите длины сторон этого треугольника.

4. В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна c, а величина одного из его острых углов равна α. Найдите длину биссектрисы прямого угла этого треугольника.

5. В треугольнике ABC угол A – прямой, $|AB| = 1$, $|BC| = 2$. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке L. G – точка пересечения медиан треугольника ABC. Что больше, $|BL|$ или $|BG|$?

6. В треугольнике ABC $|AB| = c$, $|BC| = a$, а медианы AD и CE взаимно перпендикулярны. Найдите длину стороны AC.

7. В треугольнике ABC угол A – прямой, величина угла B равна $\pi/6$. В треугольник вписана окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до точки касания этой окружности с катетом AB.

8. В треугольнике ABC величина угла BAC равна $\pi/3$, длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, равна $\sqrt{3}$, а длина радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, равна 5. Найдите длины сторон треугольника ABC.

9. В прямоугольном треугольнике отношение длины радиуса вписанной окружности к длине радиуса описанной окружности равно $2/5$. Найдите величины острых углов треугольника.

10. В треугольнике ABC угол B – тупой, продолжения высот AM и CN пересекаются в точке O, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \gamma$, $|AC| = b$. Найдите расстояние от точки O до прямой AC.

11. В треугольнике, величина одного из углов которого равна разности величин двух других его углов, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найдите длину большей стороны треугольника.

12. В прямоугольном треугольнике KLM проведён отрезок MD, соединяющий вершину прямого угла KML с точкой D, лежащей на гипотенузе KL таким образом, что $|DL| = 1$, $|DM| = \sqrt{2}$, $|DK| = 2$. Найдите величину угла KMD.

13. В треугольнике ABC угол C прямой, катет BC разделён точками D и E на три равные части. Найдите сумму величин углов AEC, ADC и ABC, если известно, что $|BC| = 3|AC|$.

14. В прямоугольном треугольнике ABC расстояние от середины гипотенузы AB до катета BC равно 5, а расстояние от середины этого катета до гипотенузы равно 4. Найдите площадь треугольника ABC.

15. В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках P, Q и R. Найдите площадь треугольника PQR, если длины катетов треугольника ABC равны 3 и 4.

16. В треугольнике ABC угол C прямой, CD – высота. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, если длины радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 6 и 8 соответственно.

17. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, до его вершин A и B равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$ соответственно. Найдите длины катетов треугольника ABC.

18. В треугольнике ABC точка M расположена на стороне AC таким образом, что $|AM| : |MC| = 1 : 3\sqrt{3}$. Величина угла ABM равна $\pi/6$, $|BM| = 6$, угол B прямой. Найдите величину угла BAC.

19. Дан треугольник KLM. Через точки K и L проведена окружность, центр которой лежит на высоте LF, опущенной на сторону KM. Известно, что точка F лежит на стороне KM. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью, если $|KL| = 1$, $|KM| = \sqrt{3}/2$, $|FM| = \sqrt{3}/6$.

20. В прямоугольнике $ABCD$ длины отрезков AB и BD равны 3 и 6 соответственно. На продолжении биссектрисы BL треугольника ABD за точку L взята точка N такая, что отношение $|BL| : |LN|$ равно $10 : 3$. Что больше: длина отрезка BN или длина отрезка CL?

21. В прямоугольном треугольнике ABC угол B – прямой, AM – медиана, BH – высота. Найдите величину угла BAM, если известно, что величина угла между прямыми AM и BH равна φ. При каких φ задача имеет решение?

22. В треугольнике ABC угол C – прямой, отношение длины медианы CM к длине биссектрисы CL равно $\sqrt{6} : 1$, длина высоты CH равна 2. Найдите площадь треугольника ABC.

23. В прямоугольном треугольнике ABC ED – отрезок, соединяющий середины сторон AB и BC. Точка F лежит на стороне BC, отрезки AF и ED пересекаются в точке M. Известно, что отношение площадей четырёхугольника $AMDC$ и треугольника ABC равно $7/10$, а длины катетов BC и AC равны a и b соответственно. Найдите длину отрезка AM.

24. В треугольнике ABC проведены высота BH и медиана BM. Найдите $|BM|$, если известно, что $|BH| = h$, $\widehat{ABH} = \widehat{CBM}$, $\widehat{HBM} = 2 \cdot \widehat{CBM}$.

25. В треугольник ABC вписана окружность, длина радиуса которой равна 2. D – точка касания этой окружности со стороной AC, $|AD| = 2$, $|DC| = 4$. Найдите длину биссектрисы треугольника ABC, проведённой из вершины B.

26. В прямоугольном треугольнике ABC угол B – прямой, AL – биссектриса. Известно, что $|AC| = 5$, $|AL| = 5/\sqrt{3}$. Найдите $|LC|$.

27. Треугольники ABC и ABD имеют общую сторону AB и не имеют общих внутренних точек, углы BAC и ADB прямые. Найдите $|CD|$, если $|AD| = 3$, $|BC| = 13$, $|AC| + |BD| = 16$.

28. В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3, а высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$. Также известно, что основание D высоты CD лежит на стороне AB и $|AD| = |BC|$. Найдите длину стороны AC.

29. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 4, а длина катета AC равна 3. Точка D делит гипотенузу пополам. Найдите расстояние между центром окружности, вписанной в треугольник ACD, и центром окружности, вписанной в треугольник ABD.

30. В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 20, а длина диаметра описанной около него окружности равна 25. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в этот треугольник.

31. Из середины D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведён луч, перпендикулярный гипотенузе и пересекающий один из его катетов. На этом луче отложен отрезок DE, длина которого равна половине длины отрезка AB. Длина отрезка CE равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC.

32. Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке D, а катет BC – в точке E, причём длина отрезка DE равна 2, а длина отрезка BE равна 1. На гипотенузе взята точка F так, что $|BF| = 1$. Известно также, что величина угла FCB равна α. Найдите площадь треугольника ABC.

33. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности, длина радиуса которой равна 10. Вершина C лежит на диаметре этой окружности, параллельном гипотенузе. Градусная мера угла CAB равна 75°. Найдите площадь треугольника ABC.

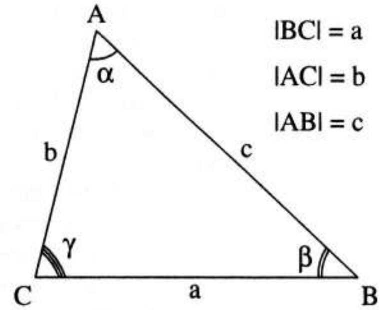
34. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найдите расстояние от центра окружности, вписанной в этот треугольник, до его высоты, проведённой к гипотенузе.

35. Середины высот треугольника лежат на одной прямой. Какое максимальное значение может принимать его площадь, если длина его наибольшей стороны равна 10?

1.2. Теоремы синусов и косинусов

Теоретический материал

Во всех материалах этого параграфа будут использоваться следующие обозначения: a, b, c – длины стороны произвольного треугольника; α, β, γ – величины соответствующих противоположных им углов; p – полупериметр треугольника; R – длина радиуса описанной около треугольника окружности; r – длина радиуса вписанной в треугольник окружности; h_a, h_b, h_c – длины высот, проведённых к сторонам, длины которых равны a, b и c соответственно.



Приведем некоторые базовые факты, касающиеся общих треугольников. Часть из них приводится без доказательства, поскольку их подробное обоснование можно найти в любом школьном учебнике геометрии.

1. Различные формулы площади произвольного треугольника

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c, \quad S = p \cdot r, \quad S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R},$$

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \text{ (формула Герона).}$$

2. Теорема синусов

Отношение длины любой стороны треугольника к синусу величины внутреннего угла треугольника, противолежащего этой стороне, равно удвоенной длине радиуса окружности, описанной около этого треугольника:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Отметим, что теорема синусов является одним из наиболее часто используемых средств для решения задач на треугольники. Однако для нахождения величины угла треугольника лучше пользоваться теоремой косинусов. Это соображение можно пояснить так: с помощью теоремы синусов можно найти лишь синус величины угла треугольника, а вот однозначно найти эту величину нельзя, так как уравнение $\sin\alpha = a$ $(0 < a < 1)$ имеет два решения, лежащие в интервале $(0, \pi)$. То есть некоторому значению синуса величины угла треугольника соответствуют два угла, острый и тупой, сумма величин которых равна π.

3. Теорема косинусов

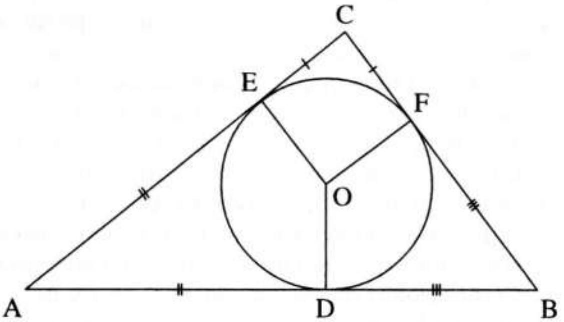
Квадрат длины любой стороны треугольника равен разности суммы квадратов длин двух других его сторон и удвоенного произведения длин этих сторон и косинуса величины внутреннего угла треугольника, заключенного между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

4. Окружность, вписанная в треугольник

В произвольный треугольник можно вписать окружность, причём только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов треугольника, причём всегда расположен внутри треугольника.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC, буквой O обозначим центр вписанной в него окружности, буквами D, E и F обозначим точки, в которых она соответственно касается его сторон AB, AC и BC. Сформулируем и докажем важное утверждение, связывающее длины сторон треугольника ABC и длины отрезков, на которые они разбиты точками D, E и F.



Теорема. *Длина любого из отрезков, на которые стороны треугольника разбиваются точками их касания с вписанной в этот треугольник окружностью, может быть вычислена как разность полупериметра треугольника и длины стороны треугольника, не содержащей ни один из концов этого отрезка:*

$$|AD| = |AE| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2} = p_{\triangle ABC} - |BC|;$$

$$|BD| = |BF| = \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2} = p_{\triangle ABC} - |AC|;$$

$$|CE| = |CF| = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} = p_{\triangle ABC} - |AB|.$$

Доказательство. Равенство длин пар отрезков AD и AE, BD и BF, CE и CF следует из равенства по гипотенузе и катету пар прямоугольных треугольников AOD и AOE, BOD и BOF, COE и COF соответственно. С учётом этого положим $|AD| = |AE| = x$, $|BD| = |BF| = y$, $|CE| = |CF| = z$ и составим систему уравнений

$$\begin{cases} |AB| = |AD| + |BD|, \\ |AC| = |AE| + |CE|, \\ |BC| = |BF| + |CF|; \end{cases} \implies \begin{cases} |AB| = x + y, \\ |AC| = x + z, \\ |BC| = y + z; \end{cases} \implies$$

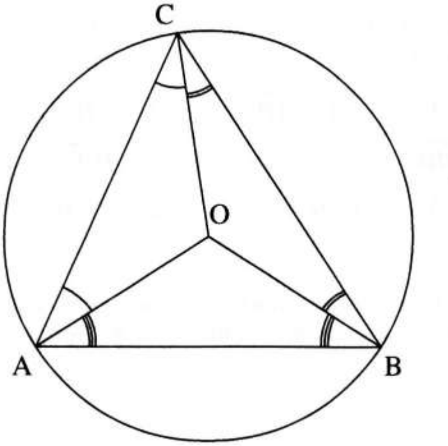
$$\implies \begin{cases} x = \dfrac{|AB| + |AC| - |BC|}{2}, \\ y = \dfrac{|AB| + |BC| - |AC|}{2}, \\ z = \dfrac{|AC| + |BC| - |AB|}{2}; \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dfrac{|AB| + |AC| + |BC|}{2} - |BC|, \\ y = \dfrac{|AB| + |BC| + |AC|}{2} - |AC|, \\ z = \dfrac{|AC| + |BC| + |AB|}{2} - |AB|. \end{cases}$$

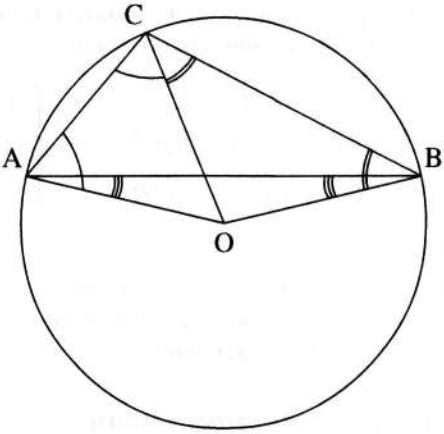
Теорема доказана.

5. Окружность, описанная около треугольника

Около произвольного треугольника можно описать окружность, причём только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, причём расположен вне треугольника, если треугольник тупоугольный, и внутри треугольника, если треугольник остроугольный.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC, буквой O обозначим центр описанной около него окружности.





Теорема. *Величина угла, образованного стороной треугольника и радиусом описанной около этого треугольника окружности, проведённым в один из концов этой стороны, может быть вычислена как модуль разности числа $\pi/2$ и величины угла, противолежащего этой стороне:*

$$\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{ABC}\right|; \ \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{BAC}\right|;$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{ACB}\right|.$$

Доказательство. Поскольку OA, OB и OC – радиусы окружности, описанной около треугольника ABC, то $|OA| = |OB| = |OC|$, поэтому треугольники AOB, AOC и BOC равнобедренные. Из этого факта вытекает, что $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$, $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$, $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Введём обозначения $\widehat{OAC} = \varphi$, $\widehat{OBC} = \psi$, $\widehat{OAB} = \theta$ и рассмотрим два варианта.

Если треугольник ABC остроугольный, то точка O лежит внутри него, поэтому

$$\begin{cases} \widehat{OAB} + \widehat{OAC} = \widehat{BAC}, \\ \widehat{OBA} + \widehat{OBC} = \widehat{ABC}, \\ \widehat{OCA} + \widehat{OCB} = \widehat{ACB} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \theta + \varphi = \widehat{BAC}, \\ \theta + \psi = \widehat{ABC}, \\ \psi + \varphi = \widehat{ACB} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\widehat{BAC}+\widehat{ACB}-\widehat{ABC}}{2}, \\ \psi = \frac{\widehat{ABC}+\widehat{ACB}-\widehat{BAC}}{2}, \\ \theta = \frac{\widehat{ABC}+\widehat{BAC}-\widehat{ACB}}{2}. \end{cases}$$

Наконец, с учётом того, что $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}+\widehat{BAC}=\pi$, и того, что $\widehat{ABC}<\pi/2$, $\widehat{BAC}<\pi/2$, $\widehat{ACB}<\pi/2$, мы получаем

$$\begin{cases} \widehat{OAC}=\varphi=\dfrac{(\pi-\widehat{ABC})-\widehat{ABC}}{2}=\pi/2-\widehat{ABC}=|\pi/2-\widehat{ABC}|, \\ \widehat{OBC}=\psi=\dfrac{(\pi-\widehat{BAC})-\widehat{BAC}}{2}=\pi/2-\widehat{BAC}=|\pi/2-\widehat{BAC}|, \\ \widehat{OAB}=\theta=\dfrac{(\pi-\widehat{ACB})-\widehat{ACB}}{2}=\pi/2-\widehat{ACB}=|\pi/2-\widehat{ACB}|. \end{cases}$$

Если же треугольник ABC тупоугольный (будем считать, что угол C – тупой), то точка O лежит вне треугольника, поэтому

$$\begin{cases} \widehat{OAC}-\widehat{OAB}=\widehat{BAC}, \\ \widehat{OBC}-\widehat{OBA}=\widehat{ABC}, \\ \widehat{OCA}+\widehat{OCB}=\widehat{ACB} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \widehat{OAC}=\pi/2-\widehat{ABC}=|\pi/2-\widehat{ABC}|, \\ \widehat{OBC}=\pi/2-\widehat{BAC}=|\pi/2-\widehat{BAC}|, \\ \widehat{OAB}=\widehat{ACB}-\pi/2=|\pi/2-\widehat{ACB}|. \end{cases}$$

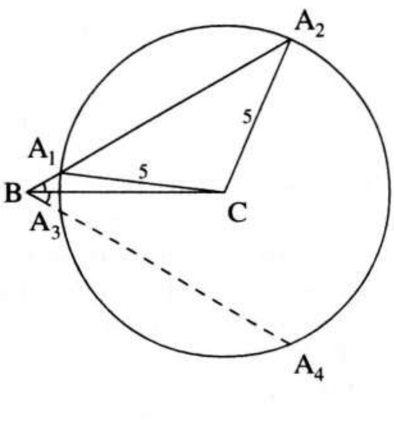
Теорема доказана.

Замечание. Эту теорему можно доказать и более простым способом, используя соотношения между величинами центральных и вписанных углов. Попробуйте сделать это самостоятельно.

Примеры решения задач

Пример 1. В треугольнике ABC дано $|BC|=6$, $|AC|=5$, $\widehat{ABC}=\pi/6$. Найдите площадь треугольника ABC, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше $1/\sqrt{2}$.

Решение. В этой задаче данным из условия задачи соответствуют **два** различных треугольника ABC.



В самом деле, можно построить отрезок BC длины 6, отложить из точки B два симметричных относительно прямой BC луча, составляющих с лучом $[BC)$ угол величины $\pi/6$, и построить окружность с центром в точке C, длина радиуса которой равна 5. Точка A – одна из точек пересечения лучей и этой окружности. Таких точек будет, вообще говоря, четыре, но поскольку лучи симметричны, то и треугольники получатся тоже попарно симметричными. Так что **различных** треугольников будет все-таки два.

Для того чтобы найти площадь треугольника ABC, нам необходимо найти либо длину стороны AB, либо синус угла ACB. $|AB|$ найти попроще, для этого достаточно написать теорему косинусов:

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 25 = |AB|^2 + 36 - 12 \cdot |AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad |AB|_{1,2} = 3\sqrt{3} \pm 4.$$

Как и ожидалось, мы получили два различных варианта длины стороны AB. Меньшей из этих длин на чертеже соответствует точка $A_1(A_3)$, большей – $A_2(A_4)$.

Осталось проверить условие, что расстояние от вершины A до прямой BC меньше $1/\sqrt{2}$. Это расстояние есть длина перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BC. Ясно, что оно может быть вычислено как произведение длины отрезка AB на синус угла ABC:

$$|AB| = 3\sqrt{3} + 4 \quad \Longrightarrow \quad \rho(A, (BC)) = \frac{3\sqrt{3} + 4}{2} > 2 > \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$|AB| = 3\sqrt{3} - 4 \quad \Longrightarrow \quad \rho(A, (BC)) = \frac{3\sqrt{3} - 4}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

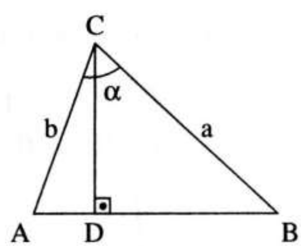
Значит, $|AB| = 3\sqrt{3} - 4$. Наконец, найдём искомую площадь

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{3} - 4) \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(3\sqrt{3} - 4).$$

Ответ. $\frac{3}{2}(3\sqrt{3} - 4)$.

Пример 2. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $|BC| = a$, $|AC| = b$, $\widehat{ACB} = \alpha$. Найдите длину высоты CD и величину угла ABC.

Решение. Длину высоты CD можно посчитать как с помощью формулы площади, так и через синус угла ABC. В любом случае нам понадобится длина стороны AB, найдем её с помощью теоремы косинусов:



$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos \widehat{ACB} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |AB| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.$$

Теперь запишем формулу площади треугольника ABC:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad ab\sin\alpha = |CD| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \quad \Longrightarrow \quad |CD| = \frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}.$$

Самым простым способом определения величины угла ABC здесь является, конечно, выражение его синуса из прямоугольного треугольника CDB и использование того факта, что треугольник ABC – остроугольный. Однако лучше сразу привыкать к тому, что для нахождения величины угла треугольника следует искать его **косинус**, поскольку по косинусу угол треугольника определяется **однозначно**. Так и поступим:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos \widehat{ABC} \quad \Longrightarrow$$

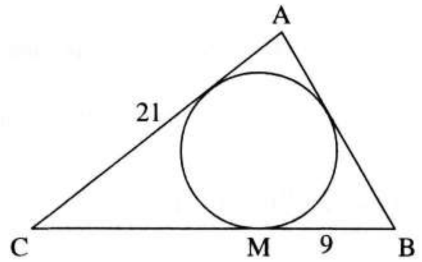
$$\Longrightarrow \quad b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + a^2 - 2a\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\cdot\cos\widehat{ABC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\widehat{ABC} = \frac{a - b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}.$$

Ответ. $|CD| = \dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$, $\widehat{ABC} = \arccos\left(\dfrac{a-b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}\right)$.

Пример 3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его стороны BC в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если $|AC| = 21$, $|BM| = 9$, а градусная мера угла ABC равна 60°.

Решение. Воспользуемся теоремой о длинах отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, делит точками касания его стороны:



$$|BM| = p_{\triangle ABC} - |AC| \Longrightarrow 9 = p_{\triangle ABC} - 21 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p_{\triangle ABC} = 30, P_{\triangle ABC} = 60.$$

Теперь обозначим длины сторон AB и BC за x и y соответственно, запишем теорему косинусов для треугольника ABC и заметим, что поскольку

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}xy,$$

то нам надо найти не сами x и y, а лишь значение произведения xy.

$$\begin{cases} |AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC}, \\ |AB| + |BC| + |AC| = P_{\triangle ABC} \end{cases} \Longrightarrow$$

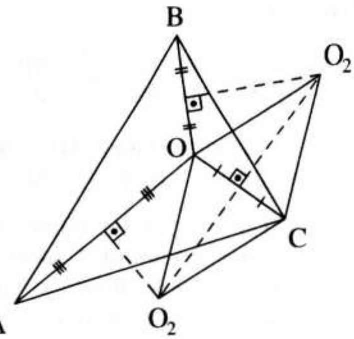
$$\Longrightarrow \begin{cases} 21^2 = x^2 + y^2 - xy, \\ x + y + 21 = 60 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 21^2 = (x+y)^2 - 3xy, \\ x + y = 39 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 3xy = 39^2 - 21^2 = (39-21)(39+21) = 18\cdot 60 \quad \Longrightarrow \quad xy = 360.$$

Наконец, площадь треугольника ABC равна $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 360$, то есть $90\sqrt{3}$.

Ответ. $90\sqrt{3}$.

Пример 4. Внутри треугольника ABC выбрана точка O таким образом, что $\sin\widehat{BOC} = 1/4$, $\sin\widehat{AOC} = 1/3$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOC и BOC, если известно, что $|BO| = 2$, $|BC| = 3$, $|AC| = 4$.



Решение. Обозначим центры окружностей, описанных около треугольников BOC и AOC, буквами O_1 и O_2 соответственно и заметим, что точки O_1 и O_2 обе лежат на прямой, проходящей через середину отрезка OC перпендикулярно ему (поскольку центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам).

Далее по теореме синусов

$$|O_1O| = |O_1C| = R_{\triangle BOC} = \frac{|BC|}{2\sin\widehat{BOC}} = \frac{3}{1/2} = 6;$$

$$|O_2O| = |O_2C| = R_{\triangle AOC} = \frac{|AC|}{2\sin\widehat{AOC}} = \frac{4}{2/3} = 6.$$

Таким образом, $\triangle O_1OC = \triangle O_2OC$ (по трем сторонам). Если точки O_1 и O_2 лежат в одной полуплоскости относительно прямой OC, то они совпадают, из чего вытекает, что все четыре точки A, B, C и O лежат на одной окружности, что невозможно. Поэтому точки O_1 и O_2 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой OC, то есть O_1OO_2C – ромб. Мы знаем длину его стороны, просят же нас найти длину его диагонали O_1O_2. Очевидно, что для её нахождения необходимо вычислить длину второй его диагонали, OC. Её легко найти из треугольника BOC по теореме косинусов, если знать $\cos\widehat{BOC}$.

Для начала попробуем выяснить, острый или тупой угол BOC. Ясно, что

$$\widehat{BOC} + \widehat{AOC} + \widehat{AOB} = 2\pi;\ \widehat{AOB} < \pi \quad\Longrightarrow\quad \widehat{BOC} + \widehat{AOC} > \pi.$$

Если угол BOC – острый, то есть его величина равна $\arcsin 1/4$, то даже если угол AOC тупой, то есть $\widehat{AOC} = \pi - \arcsin 1/3$, будем иметь

$$\widehat{BOC} + \widehat{AOC} = \pi - \arcsin 1/3 + \arcsin 1/4 < \pi.$$

Значит, угол BOC – тупой, поэтому $\cos\widehat{BOC} = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Теперь запишем теорему косинусов для треугольника BOC:

$$|BC|^2 = |BO|^2 + |OC|^2 - 2\cdot|BO|\cdot|OC|\cdot\cos\widehat{BOC} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad 9 = 4 + |OC|^2 + \sqrt{15}|OC| \quad\Longrightarrow\quad \{|OC| > 0\} \quad\Longrightarrow\quad |OC| = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{2}.$$

Наконец, воспользуемся тем, что в ромбе диагонали перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Из этого следует, что

$$|O_1O_2| = 2\sqrt{|O_1C|^2 - \frac{1}{4}|OC|^2} = \sqrt{144 - \frac{50-10\sqrt{21}}{4}} = \sqrt{\frac{526+10\sqrt{21}}{4}} = \frac{5\sqrt{21}+1}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{5\sqrt{21}+1}{2}$.

Задачи

1. Длина стороны AC треугольника ABC равна 3, синусы величин его углов A и B равны $\sqrt{3}/2$ и $\sqrt{2}/2$ соответственно. Найдите длину стороны AB.

2. В треугольнике ABC известно, что $|AB| = c$, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$. Найдите площадь треугольника ABC.

3. Внутри треугольника ABC взята точка K так, что треугольник ABK – равносторонний. Известно, что расстояние от точки K до центра окружности, описанной около треугольника ABC, равно 6, а величина угла ACB равна $\arcsin(5\sqrt{13}/26)$. Найдите длину стороны AB.

4. В треугольнике ABC $|AC| = 3$, $\widehat{BAC} = \pi/6$, длина радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, равна 2. Докажите, что площадь треугольника ABC меньше 3.

5. В треугольнике ABC найдите величину угла CAB, если произведение квадрата длины стороны BC на сумму длин сторон AC и AB равно сумме кубов длин сторон AC и AB.

6. В треугольнике ABC длины сторон AB и AC равны 3 и 2 соответственно. На стороне AB выбрана точка M, а на стороне AC – точка N так, что $|AM| = 2$, $|AN| = 1{,}5$. Найдите площадь треугольника AMN, если длина стороны BC больше длины отрезка MN в $6/\sqrt{17}$ раз.

7. В треугольнике ABC $|AB| = 4, |BC| = 5$. Из вершины B проведен отрезок BM $(M \in AC)$, причём $\widehat{ABM} = \pi/4, \widehat{MBC} = \pi/6$.

   а) В каком отношении точка M делит сторону AC?

   б) Вычислите длины отрезков AM и MC.

8. В треугольнике ABC $|BC| = 4$, $|AB| + |AC| = 6$. Найдите площадь треугольника ABC, если $\cos\widehat{ACB} = 5/12$.

9. В треугольнике ABC градусная мера угла ACB равна $75°$, а длина высоты, опущенной из вершины этого угла, равна 1. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, если его периметр равен $4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

10. Внутри треугольника ABC взята точка K таким образом, что $|AK| = 1$, $|KC| = \sqrt{3}$, $\widehat{AKC} = 120°$, $\widehat{ABK} = 15°$, $\widehat{KBC} = 15°$. Найдите длину отрезка BK.

11. Величины углов тупоугольного треугольника ABC удовлетворяют соотношению $\sin\left(\widehat{A} - \widehat{B}\right) = \sin^2\widehat{A} - \sin^2\widehat{B}$. Найдите периметр этого треугольника, если длина радиуса описанной около него окружности равна R, а величина одного из его углов равна $\pi/8$.

12. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. Площадь треугольника AOB относится к площади треугольника BOC как $\sqrt{3} : 2$, $\widehat{ACB} = \pi/3$, $|AC| = 2$. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

13. В треугольнике ABC известно, что $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, $|BC| = a$. На стороне AB взята точка P так, что $|AP| : |PB| = 1 : 2$. Через точку P проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке D, причём AD – высота треугольника ABC. Найдите длину радиуса этой окружности.

14. Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую MN параллельно основанию AB (M лежит на BC, N лежит на AC). Известно, что $|AB| = 5, |MN| = 3$. Найдите периметр четырёхугольника $ABMN$.

15. В треугольнике ABC даны длины сторон $|AB| = \sqrt{2}, |BC| = \sqrt{5}$ и $|AC| = 3$. Сравните градусную меру угла BOC и $112,5^\circ$, если O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.

16. В треугольнике ABC известно, что $|BC| - |AB| = 0,15|AC|$. Чему равно произведение $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\widehat{BAC}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\widehat{ACB}\right)$?

17. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AC, AB и BC в точках K, M и N соответственно. Известно, что $|AK| = |KC|$, $\widehat{KMN} = 75^\circ$, а произведение длин всех сторон треугольника KMN равно $9 + 6\sqrt{3}$. Найдите длины сторон треугольника ABC.

18. Точка O лежит на отрезке AB так, что $|AO| = 13, |OB| = 7$. С центром в O проведена окружность, длина радиуса которой равна 5. Из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M, причём точки касания лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника AMB.

19. Периметр треугольника ABC равен $40/3$, косинусы углов ABC и ACB равны $0,6$ и $0,28$ соответственно. Найдите площадь треугольника ABC.

20. Известно, что для величин углов треугольника ABC выполнено соотношение $\cos^2\widehat{A}+\cos^2\widehat{B}+\cos^2\widehat{C} = 1$. Найдите площадь этого треугольника, если длины радиусов вписанной в него и описанной около него окружностей равны $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$ соответственно.

21. Площадь треугольника равна $6\sqrt{6}$, периметр его равен 18, расстояние от центра вписанной в него окружности до одной из его вершин равно $\sqrt{56/3}$. Найдите длину наименьшей стороны этого треугольника.

22. В треугольнике ABC $|AB| = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}, |BC| = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$. Точка M лежит на стороне AB, точка O лежит на стороне BC, причём $|BM| = \dfrac{3}{2}|AM|$, а прямые MO и AC параллельны. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MO в точке P, лежащей между точками M и O, причём длина радиуса окружности, описанной около треугольника AMP, равна $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Найдите длину стороны AC.

23. В треугольнике ABC величина угла при вершине B равна $\pi/3$, а длины отрезков, соединяющих центр вписанной окружности с вершинами A и C, равны 4 и 6 соответственно. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC.

24. Известно, что длина радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, равна 1. Эта окружность касается его сторон AB, BC и AC в точках K, M и N соответственно, $\widehat{MKN} = \widehat{ABC} = 45^\circ$. Найдите длины сторон треугольника ABC.

25. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. $|BC| = \sqrt[4]{2}$, периметр треугольника AMN равен $3\sqrt[4]{2}$, а длина отрезка AO втрое больше длины радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите площадь треугольника ABC.

26. В треугольник KLM вписана окружность, которая касается его стороны KM в точке A. Известно, что $|AK| = 10$, $|AM| = 4$, $\widehat{KLM} = \pi/3$. Найдите длину отрезка AL.

27. В равностороннем треугольнике ABC проведена окружность с центром в точке O, проходящая через точку пересечения медиан треугольника ABC и касающаяся его стороны BC в её середине D. Из точки A проведена прямая, касающаяся этой окружности в точке E так, что градусная мера угла BAE меньше 30°. Найдите отношение площадей треугольника ABE и четырёхугольника $BEOD$.

28. В треугольнике длина стороны AB равна $2\sqrt{2}$, а длина радиуса окружности, описанной около него, равна 2. Отношение длин сторон AC и BC равно $\sqrt{8}$, длина стороны BC больше 1. Найдите площадь треугольника ABC.

29. В треугольнике ABC даны длины сторон: $|AB| = |BC| = 13$, $|AC| = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанной в него и описанной около него.

30. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB| = |BC|$) отношение расстояний от центра вписанной в этот треугольник окружности до вершин углов B и C соответственно равно k. Найдите величины углов треугольника ABC. При каких значениях k задача имеет решение?

31. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Вычислите длину отрезка AD, если $|CE| = 2$.

32. В треугольнике ABC $|AB| = 4$, $|AC| = 3$, угол C – острый. Известно, что $\sin\left(\widehat{ACB} - \widehat{ABC}\right) = 7/25$. Найдите площадь треугольника ABC.

33. В треугольник ABC, в котором длина стороны BC равна 9, вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Известно, что $|AD| = |DC|$, $\cos\widehat{BCA} = 2/3$. Найдите длину стороны AC.

34. Треугольник ABC со стороной AB, длина которой равна 4, и углом A, градусная мера которого равна 60°, вписан в окружность с длиной радиуса $2\sqrt{3}$. Найдите длину средней линии этого треугольника, параллельной AC, и расстояние между точками, в которых её продолжение пересекает окружность.

35. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. В треугольники ADC и ADB вписаны окружности, длины радиусов которых равны 3 и 8 соответственно, касающиеся отрезка AD в точках M и N. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $|ND| = 4$.

36. В треугольнике KLM отношение длин радиусов описанной около него и вписанной в него окружностей равно k. Окружность, вписанная в треугольник KLM, касается его сторон в точках A, B и C. Найдите отношение площадей треугольников ABC и KLM.

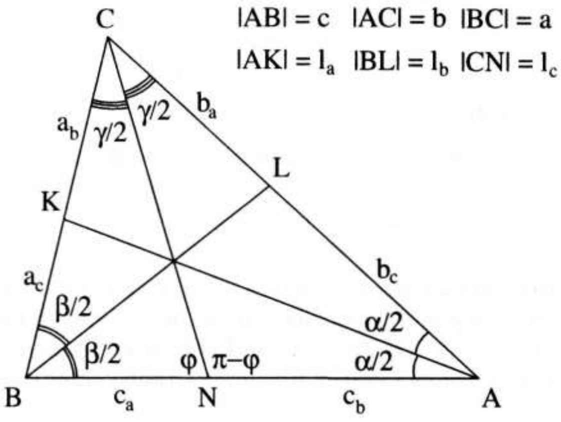
1.3. Биссектриса, медиана, высота

Теоретический материал

1. Биссектриса треугольника

Определение. *Биссектрисой треугольника* называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника, заключённый между его вершиной и противолежащей ей стороной треугольника.

Рассмотрим треугольник ABC, проведём его биссектрисы AK, BL и CN. Длины сторон AB, AC и BC обозначим за c, b и a соответственно, длины биссектрис AK, BL и CN обозначим за l_a, l_b и l_c соответственно, точку их пересечения обозначим буквой O. Также введём обозначения для длин отрезков, на которые биссектрисы разбивают стороны: $|BK| = a_c$, $|CK| = a_b$, $|BN| = c_a$, $|AN| = c_b$, $|AL| = b_c$, $|CL| = b_a$.



Приведём несколько важных фактов, связанных с биссектрисами треугольника.

Основное свойство биссектрисы треугольника. *Отношение длин двух сторон треугольника равно отношению длин прилежащих к ним отрезков, на которые биссектриса треугольника разбивает третью его сторону:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c_a}{c_b}; \quad \frac{b}{c} = \frac{a_b}{a_c}; \quad \frac{c}{a} = \frac{b_c}{b_a}.$$

Первая формула длины биссектрисы треугольника. *Длина биссектрисы треугольника, проведённой к некоторой его стороне, равна частному удвоенного* *произведения длин двух других сторон треугольника на косинус половины величины угла между ними и суммы длин этих сторон:*

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}; \quad l_b = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}; \quad l_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Вторая формула длины биссектрисы треугольника. *Квадрат длины биссектрисы треугольника, проведённой к некоторой его стороне, равен разности произведения длин двух других его сторон и произведения длин отрезков, на которые она делит сторону треугольника:*

$$l_a^2 = bc - a_b a_c; \quad l_b^2 = ac - b_a b_c; \quad l_c^2 = ab - c_a c_b.$$

Точка пересечения биссектрис. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, эта точка является центром окружности, вписанной в этот треугольник. Эта точка делит каждую биссектрису на отрезки, отношение длин которых, считая от вершины треугольника, равно частному суммы длин сторон, образующих угол, из вершины которого она проведена, и длины стороны, к которой она проведена.*

Докажем все эти факты, начнем с основного свойства биссектрисы треугольника. Для этого запишем теорему синусов для треугольников ACN и BCN, предварительно обозначив величины смежных углов BNC и ANC за φ и $\pi - \varphi$ соответственно:

$$\frac{|AN|}{\sin\widehat{ACN}} = \frac{|AC|}{\sin\widehat{ANC}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{c_b}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\sin(\pi-\varphi)} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{c_b}{b} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\pi-\varphi)};$$

$$\frac{|BN|}{\sin\widehat{BCN}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BNC}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{c_a}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\sin\varphi} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{c_a}{a} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\varphi}.$$

Воспользовавшись тем, что $\sin(\pi-\varphi) = \sin\varphi$, получим

$$\frac{c_a}{a} = \frac{c_b}{b} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{a}{b} = \frac{c_a}{c_b}.$$

Оставшиеся два соотношения доказываются абсолютно аналогично.

Для доказательства первой формулы длины биссектрисы выпишем формулы площади для треугольников ABC, ANC и BNC и воспользуемся тем, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ACN и BCN:

$$\begin{cases} S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma, \\ S_{\triangle ANC} = \dfrac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|CN|\cdot\sin\widehat{ACN} = \dfrac{1}{2}al_c\sin\dfrac{\gamma}{2}, \\ S_{\triangle BNC} = \dfrac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|CN|\cdot\sin\widehat{BCN} = \dfrac{1}{2}bl_c\sin\dfrac{\gamma}{2}, \end{cases} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad ab\sin\gamma = al_c\sin\frac{\gamma}{2} + bl_c\sin\frac{\gamma}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad 2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = (a+b)l_c\sin\frac{\gamma}{2} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad l_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Формулы для l_a и l_b доказываются таким же образом.

Для доказательства второй формулы длины биссектрисы запишем теорему косинусов для треугольников ANC и BNC:

$$\begin{cases} |AC|^2 = |AN|^2 + |CN|^2 - 2\cdot|AN|\cdot|CN|\cdot\cos\widehat{ANC}, \\ |BC|^2 = |BN|^2 + |CN|^2 - 2\cdot|BN|\cdot|CN|\cdot\cos\widehat{BNC} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} b^2 = c_b^2 + l_c^2 - 2c_bl_c\cos(\pi-\varphi), \\ a^2 = c_a^2 + l_c^2 - 2c_al_c\cos\varphi. \end{cases}$$

Домножим первое из этих соотношений на c_a, второе на c_b и сложим их. Пользуясь тем, что $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$, получим

$$a^2c_b + b^2c_a = c_a^2c_b + l_c^2c_b + c_b^2c_a + l_c^2c_b.$$

Из доказанного выше основного свойства биссектрисы вытекает, что $ac_b = bc_a$. С помощью этого факта преобразуем левую часть последнего равенства:

$$abc_a+bac_b = c_a^2c_b+l_c^2c_b+c_b^2c_a+l_c^2c_b \quad\Longrightarrow\quad ab(c_a+c_b) = c_ac_b(c_a+c_b)+l_c^2(c_a+c_b) \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad ab = c_ac_b + l_c^2 \quad\Longrightarrow\quad l_c^2 = ab - c_ac_b.$$

Формулы для l_a и l_b доказываются аналогично.

Наконец, для обоснования последнего утверждения предварительно выразим величины a_b, a_c, b_a, b_c, c_a, c_b через длины сторон треугольника ABC. Воспользуемся основным свойством биссектрисы:

$$\begin{cases} |AB| = |AN| + |BN|, \\ \dfrac{|AN|}{|AC|} = \dfrac{|BN|}{|BC|} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = c_b + c_a, \\ \dfrac{c_b}{b} = \dfrac{c_a}{a} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_a = \dfrac{ac}{a+b}, \\ c_b = \dfrac{bc}{a+b}. \end{cases}$$

Абсолютно аналогично получаем, что

$$b_a = \frac{ab}{a+c},\ b_c = \frac{bc}{a+c},\ a_b = \frac{ab}{b+c},\ a_c = \frac{ac}{b+c}.$$

Теперь рассмотрим треугольник ANC. AO – его биссектриса, поэтому

$$\frac{|CO|}{|ON|} = \frac{|AC|}{|AN|} = \frac{b}{c_b} = \frac{b}{\dfrac{bc}{a+b}} = \frac{a+b}{c}.$$

Рассуждая таким же образом, находим

$$\frac{|AO|}{|OK|} = \frac{b+c}{a}, \quad \frac{|BO|}{|OL|} = \frac{a+c}{b}.$$

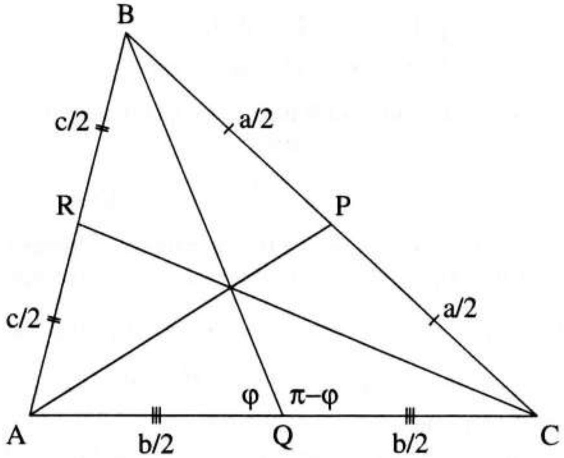
Замечание. С учётом полученных выражений для a_b, a_c, b_a, b_c, c_a, c_b вторая формула длины биссектрисы может быть записана в виде

$$l_a^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right), \quad l_b^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right), \quad l_c^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right).$$

2. Медиана треугольника

Определение. *Медианой треугольника* называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей этой вершине стороны.

Рассмотрим треугольник ABC, проведём его медианы AP, BQ и CR. Длины сторон AB, AC и BC обозначим за c, b и a соответственно, длины медиан AP, BQ и CR обозначим за m_a, m_b и m_c соответственно.



Точка пересечения медиан. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке, эта точка является его центром тяжести. Она делит каждую медиану на отрезки, отношение длин которых, считая от вершин треугольника, равно* $2:1$.

Формула длины медианы треугольника. *Учетверённый квадрат длины медианы треугольника, проведённой к некоторой его стороне, равен разности удвоенной суммы квадратов длин двух других сторон треугольника и квадрата длины стороны, к которой проведена медиана:*

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2; \quad 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2; \quad 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Для доказательства этого утверждения запишем теорему косинусов для треугольников ABQ и CBQ, предварительно обозначив величины смежных углов AQB и CQB за φ и $\pi - \varphi$ соответственно:

$$\begin{cases} |AB|^2 = |AQ|^2 + |BQ|^2 - 2 \cdot |AQ| \cdot |BQ| \cdot \cos \widehat{AQB}, \\ |BC|^2 = |CQ|^2 + |BQ|^2 - 2 \cdot |CQ| \cdot |BQ| \cdot \cos \widehat{CQB} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} c^2 = \dfrac{b^2}{4} + m_b^2 - bm_b \cos\varphi; \\ a^2 = \dfrac{b^2}{4} + m_b^2 - bm_b \cos(\pi - \varphi). \end{cases}$$

Сложив эти равенства и учитывая то, что $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, получим

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2.$$

Для двух других медиан треугольника ABC доказательство проводится так же.

Замечание. Доказанные соотношения можно переписать в таком виде:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}, \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

3. Теорема о наибольшем угле треугольника

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против меньшей – меньший.

Без ограничения общности будем считать, что длины сторон треугольника связаны соотношением $a \leqslant b \leqslant c$.

Тогда по теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha \leqslant \sin\beta \leqslant \sin\gamma.$$

А поскольку величины углов треугольника находятся в интервале $(0, \pi)$, то из этого следует $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. В самом деле, если предположить, что $\alpha > \beta$, то, пользуясь свойствами синуса, мы получаем, что либо α и β – тупые, что невозможно, либо α – тупой, β – острый, но тогда $\alpha + \beta > \pi$, что тоже невозможно. Поэтому $\alpha \leqslant \beta$. Аналогично доказывается, что $\beta \leqslant \gamma$.

4. Критерий остроугольности (тупоугольности) треугольника

Рассмотрим произвольный треугольник, будем считать, что длины его сторон равны a, b и c, причём $c \geqslant a$, $c \geqslant b$.

Для того чтобы треугольник являлся тупоугольным (остроугольным) [прямоугольным], необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$c^2 > a^2 + b^2 \text{ или } m_c < \frac{c}{2} \quad \left(c^2 < a^2 + b^2 \text{ или } m_c > \frac{c}{2}\right)$$

$$\left[c^2 = a^2 + b^2 \text{ или } m_c = \frac{c}{2}\right].$$

Для обоснования этого факта заметим, что тупоугольность или остроугольность треугольника зависит только от того, является ли тупым или острым наибольший из его углов, напротив которого лежит наибольшая сторона треугольника. Ответ на этот вопрос проще всего получить с помощью косинуса этого угла – если он отрицательный, то угол тупой, если же он положительный, то угол острый. Воспользуемся этим фактом и теоремой косинусов:

$$\gamma \text{ – тупой} \iff \cos\gamma < 0 \iff a^2+b^2-2ab\cos\gamma > a^2+b^2 \iff c^2 > a^2+b^2,$$

$$\gamma \text{ – острый} \iff \cos\gamma > 0 \iff a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma < a^2 + b^2 \iff c^2 < a^2 + b^2,$$

$$\gamma \text{ – прямой} \iff \cos\gamma = 0 \iff a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 \iff c^2 = a^2 + b^2.$$

Теперь задействуем формулу длины медианы, предварительно переписав её в виде $4m_c^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2)$:

$$c^2 > a^2 + b^2 \iff c^2 > \frac{4m_c^2 + c^2}{2} \iff c^2 > 4m_c^2 \iff m_c < \frac{c}{2},$$

$$c^2 < a^2 + b^2 \iff c^2 < \frac{4m_c^2 + c^2}{2} \iff c^2 < 4m_c^2 \iff m_c > \frac{c}{2},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \iff c^2 = \frac{4m_c^2 + c^2}{2} \iff c^2 = 4m_c^2 \iff m_c = \frac{c}{2}.$$

Утверждение доказано.

Замечание. В основном эта теорема, конечно же, применяется, когда надо по длинам сторон треугольника понять, является ли он тупоугольным или остроугольным. Действовать надо просто – взять квадрат длины наибольшей стороны треугольника и сравнить его с суммой квадратов длин двух остальных его сторон. Однако в ряде задач применима и вторая часть этой теоремы.

5. Высота треугольника

Определение. *Высотой треугольника* называется отрезок, соединяющий его вершину и прямую, содержащую противолежащую ей сторону треугольника, перпендикулярный этой прямой.

Точка пересечения высот. *Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке, эта точка называется ортоцентром треугольника.*

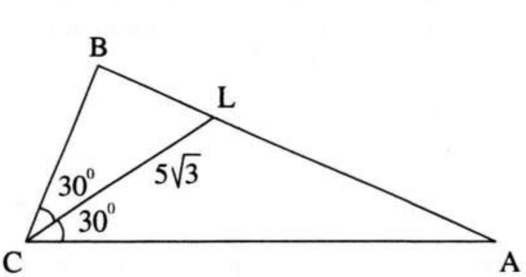
Отметим, что в остроугольном треугольнике все высоты попадают на его стороны и лежат внутри треугольника, поэтому его ортоцентр является точкой пересечения высот. В тупоугольном треугольнике высоты, проведённые из вершин двух его острых углов, попадают на продолжения сторон и лежат вне треугольника. Поэтому его ортоцентр есть точка пересечения прямых, содержащих высоты.

Для вычисления длин высот треугольника используется либо формула площади, либо соотношения между длинами сторон и величинами углов различных прямоугольных треугольников, сторонами которых являются эти высоты.

Примеры решения задач

Пример 1. В треугольнике ABC градусная мера угла C равна 60°, длина биссектрисы, проведённой из вершины C, равна $5\sqrt{3}$, $|AC| : |BC| = 5 : 2$. Найдите тангенс величины угла A и длину стороны BC.

Решение. По условию задачи $|AC| : |BC| = 5 : 2$, поэтому если обозначить длину отрезка BC за $2x$, то длина отрезка AC равна $5x$. Обозначим буквой L точку пересечения биссектрисы угла C со стороной AB и воспользуемся первой формулой длины биссектрисы треугольника:



$$|CL| = \frac{2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\widehat{C}\right)}{|AC| + |BC|} \implies 5\sqrt{3} = \frac{2 \cdot 5x \cdot 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{5x + 2x} \implies x = \frac{7}{2}.$$

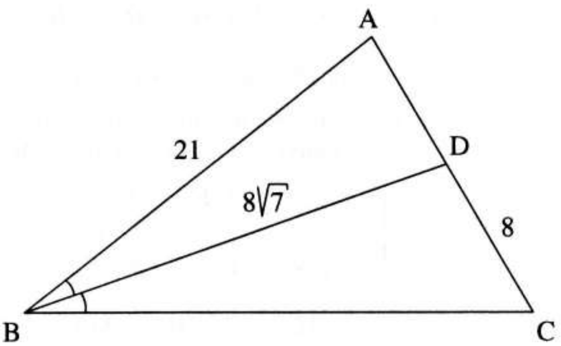
Значит, $|BC| = 7$. Теперь если величину угла A обозначить за α, то, по теореме о сумме градусных мер углов треугольника, $\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 120^\circ - \alpha$. Запишем теорему синусов для треугольника ABC:

$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{B}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{A}} \quad\Longrightarrow\quad 5\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ. $\operatorname{tg}\widehat{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $|BC| = 7$.

Пример 2. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 21, длина биссектрисы BD равна $8\sqrt{7}$, а длина отрезка DC равна 8. Найдите периметр треугольника ABC.

Решение. Для ответа на вопрос задачи нам надо найти длины отрезков AD и BC. Обозначим их длины за x и y соответственно, после чего, воспользовавшись основным свойством биссектрисы треугольника и второй формулой её длины, мы получим два уравнения для введённых неизвестных:



$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|} \quad\Longrightarrow\quad \frac{21}{y} = \frac{x}{8};$$

$$|BD|^2 = |AB|\cdot|BC| - |AD|\cdot|DC| \quad\Longrightarrow\quad 448 = 21y - 8x.$$

Теперь решим полученную систему уравнений, учитывая, что x и y положительные:

$$\begin{cases} xy = 168, \\ 21y = 8x + 448 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(8x + 448) = 168\cdot 21, \\ 21y = 8x + 448 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ y = 24. \end{cases}$$

Наконец, периметр треугольника ABC равен сумме длин отрезков AB, AD, DC и BC, то есть 60.

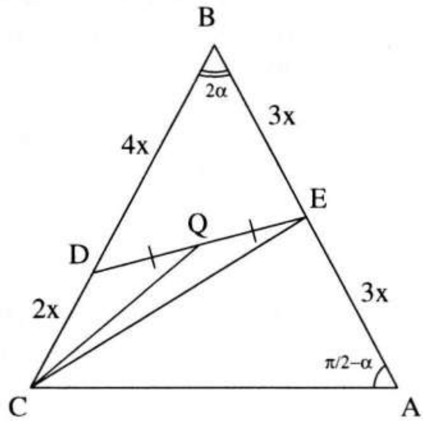
Ответ. 60.

Пример 3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении 2:1, считая от вершины B, а точка E – середина стороны AB. Известно, что длина медианы CQ треугольника CED равна $\dfrac{\sqrt{23}}{2}$ и $|DE| = \dfrac{\sqrt{23}}{2}$. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. В этой задаче нам придётся немедленно вводить какие-то неизвестные величины, поскольку по данным в условии задачи длинам ничего явно вычислить нельзя. Обозначим $|AB| = |BC| = 6x$, $\widehat{ABC} = 2\alpha$. Тогда $0 < \alpha < \pi/2$,

$$|CD| = 2x,\ |DB| = 4x,\ |AE| = |EB| = 3x,$$

$$\widehat{CAB} = \pi/2 - \alpha, \quad |AC| = 12x\sin\alpha.$$



Для того чтобы составить два уравнения с введёнными неизвестными, поступим следующим образом. Сначала рассмотрим треугольник DBE и запишем для него теорему косинусов:

$$|DE|^2 = |DB|^2+|EB|^2-2\cdot|DB|\cdot|EB|\cdot\cos\widehat{B} \implies \frac{23}{4} = 16x^2+9x^2-24x^2\cos 2\alpha \implies$$

$$\implies 100x^2 - 96x^2\cos 2\alpha = 23 \implies 4x^2 + 192x^2\sin^2\alpha = 23.$$

После этого воспользуемся формулой длины медианы в треугольнике CDE и применим теорему косинусов к треугольнику ACE:

$$\begin{cases} |CQ|^2 = \dfrac{2|CE|^2 + 2|CD|^2 - |DE|^2}{4}, \\ |CE|^2 = |AC|^2 + |AE|^2 - 2\cdot|AC|\cdot|AE|\cdot\cos\widehat{A} \end{cases} \implies$$

$$\implies 2|AC|^2 + 2|AE|^2 - 4\cdot|AC|\cdot|AE|\cdot\cos\widehat{A} + 2|CD|^2 - |DE|^2 = 4|CQ|^2 \implies$$

$$\implies 288x^2\sin^2\alpha + 18x^2 - 144x^2\sin^2\alpha + 8x^2 - \frac{23}{4} = 23 \implies 144x^2\sin^2\alpha + 26x^2 = \frac{5}{4}\cdot 23.$$

Решая полученную систему уравнений, получаем

$$\begin{cases} 4x^2 + 192x^2\sin^2\alpha = 23, \\ 144x^2\sin^2\alpha + 26x^2 = \dfrac{5}{4}\cdot 23 \end{cases} \implies$$

$$\implies 5x^2 + 240x^2\sin^2\alpha = 144x^2\sin^2\alpha + 26x^2 \implies 96x^2\sin^2\alpha = 21x^2 \implies$$

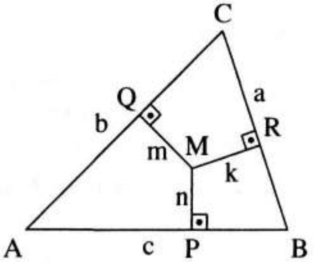
$$\implies \sin^2\alpha = \frac{7}{32} \implies \begin{cases} \cos^2\alpha = \dfrac{25}{32}, \\ 4x^2 + 192x^2\cdot\dfrac{7}{32} = 23 \end{cases} \implies \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{5}{4\sqrt{2}}, \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Наконец, запишем теорему синусов в треугольнике ABC:

$$2R_{\triangle ABC} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{CAB}} \implies R_{\triangle ABC} = \frac{3x}{\sin(\pi/2-\alpha)} = \frac{3x}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{5}{4\sqrt{2}}} = \frac{12}{5}.$$

Ответ. $\dfrac{12}{5}$.

Пример 4. Из точки M, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на его стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Вычислите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания этих перпендикуляров.



Решение. Обозначим основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны треугольника ABC как P, Q и R, без ограничения общности будем считать, что $|AB| = c, |MP| = n$; $|AC| = b, |MQ| = m$; $|BC| = a, |MR| = k$.

Наметим путь решения. С площадью треугольника ABC всё понятно, её можно вычислить, например, по формуле Герона. В треугольнике же PQR нам не даны ни длины сторон, ни величины углов. Поэтому представим его площадь как сумму площадей треугольников MPQ, MPR и MQR, после чего найдём связь между величинами углов PMQ, PMR, QMR и величинами углов треугольника ABC:

$$S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{2}\cdot|MP|\cdot|MQ|\cdot\sin\widehat{PMQ} = \frac{1}{2}mn\sin\widehat{PMQ};$$

$$S_{\triangle MPR} = \frac{1}{2}\cdot|MP|\cdot|MR|\cdot\sin\widehat{PMR} = \frac{1}{2}nk\sin\widehat{PMR};$$

$$S_{\triangle MQR} = \frac{1}{2}\cdot|MQ|\cdot|MR|\cdot\sin\widehat{QMR} = \frac{1}{2}km\sin\widehat{QMR} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2}\left(mn\sin\widehat{PMQ} + nk\sin\widehat{PMR} + km\sin\widehat{QMR}\right). \qquad (*)$$

Теперь заметим, что поскольку сумма величин углов четырёхугольника равна 2π, а в каждом из четырёхугольников $PMQA, PMRB$ и $QMRC$ есть по два прямых угла, то

$$\widehat{PMQ} = \pi - \widehat{A},\quad \widehat{PMR} = \pi - \widehat{B},\quad \widehat{QMR} = \pi - \widehat{C} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \sin\widehat{PMQ} = \sin\widehat{A},\quad \sin\widehat{PMR} = \sin\widehat{B},\quad \sin\widehat{QMR} = \sin\widehat{C}.$$

В задаче нас просят найти не сами площади треугольников ABC и PQR, а их отношение. Поэтому поступим таким образом: выразим синусы величин углов A, B и C через площадь треугольника ABC.

$$\sin\widehat{A} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|AB|\cdot|AC|};\quad \sin\widehat{B} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|AB|\cdot|BC|};\quad \sin\widehat{C} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|AC|\cdot|BC|} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \sin\widehat{A} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{bc};\quad \sin\widehat{B} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{ac};\quad \sin\widehat{C} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{ab}.$$

Подставив полученные соотношения в $(*)$, получаем

$$S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2}\left(mn\cdot\frac{2S_{\triangle ABC}}{bc} + kn\cdot\frac{2S_{\triangle ABC}}{ac} + mk\cdot\frac{2S_{\triangle ABC}}{ab}\right) \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad S_{\triangle PQR} = S_{\triangle ABC}\left(\frac{mn}{bc} + \frac{kn}{ac} + \frac{mk}{ab}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PQR}} = \frac{1}{\frac{mn}{bc} + \frac{kn}{ac} + \frac{mk}{ab}} = \frac{abc}{amn + bkn + cmk}.$$

Ответ. $\dfrac{abc}{amn + bkn + cmk}$.

Задачи

1. В остроугольном треугольнике площади S известны величины α и β углов A и B. Найдите длину высоты, опущенной на сторону, прилежащую к углам A и B.

2. В треугольнике KMN, в котором $\sin\widehat{KNM} = \sqrt{3}/2$, $\cos\widehat{KMN} = 1/3$, проведены высоты NP и MQ. Найдите значение отношения $|NP| : |MQ|$.

3. Длины сторон AB, BC и AC треугольника ABC образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии, если известно, что отношение длины высоты треугольника ABC, проведённой из вершины A, к длине радиуса вписанной в этот треугольник окружности равно 3.

4. В равнобедренном треугольнике ABC $|AB| = |BC|$, AD – биссектриса, $|BD| = b$, $|DC| = c$. Найдите длину биссектрисы AD.

5. Известно, что длины высот треугольника равны h_1, h_2 и h_3. Найдите его площадь.

6. Точка M лежит внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC на расстоянии 6 от его боковых сторон и на расстоянии $\sqrt{3}$ от его основания. Найдите длину этого основания, если $\widehat{B} = 2\pi/3$.

7. В треугольнике BCE известно, что $|CE| : |BC| = 3$, а величина угла BCE равна $\pi/3$. Отрезок CK – биссектриса треугольника. Найдите $|KE|$, если длина радиуса окружности, описанной около треугольника BCE, равна $8\sqrt{3}$.

8. В треугольнике ABC градусная мера угла B равна 30°, $|AB| = 4$, $|BC| = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Найдите площадь треугольника ABD.

9. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD, при этом величины углов ADC и CDB относятся как $7 : 5$. Найдите длину отрезка AD, если известно, что $|BC| = 1$, $\widehat{BAC} = \pi/6$.

10. В треугольнике ABC биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O, $|AB| = 14$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$. Найдите длину отрезка OD.

11. В тупоугольном треугольнике ABC на стороне AB длины 14 выбрана точка L, равноудаленная от сторон AC и BC, а на отрезке AL – точка K, равноудаленная от вершин A и B. Найдите синус величины угла ACB, если $|KL| = 1, \widehat{CAB} = \pi/4$.

12. Величины углов A, B и C треугольника ABC составляют арифметическую прогрессию с разностью $\pi/7$. Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке D. Точки A', B' и C' находятся на продолжениях отрезков DA, DB, DC за точки A, B, C соответственно на одинаковом расстоянии от точки D. Доказать, что величины углов A', B', C' треугольника $A'B'C'$ также образуют арифметическую прогрессию. Найдите её разность.

13. В треугольнике ABC биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке K. Известно, что $|BC| = 2$, $|KC| = 1$, $|BK| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Найдите площадь треугольника ABC.

14. Треугольник ABC вписан в окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{3} - 1$. Градусная мера угла BAC равна 60°, а длина радиуса окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, равна 1. Найдите градусные меры углов ABC и ACB.

15. Величина одного из углов треугольника равна $2\pi/3$, длина противолежащей ему стороны равна 6, а длина одного из отрезков, на которые она разделена проведённой к ней биссектрисой этого треугольника, равна 2. Найдите величины двух других углов треугольника.

16. Среди треугольников KLM, у которых длина радиуса описанной окружности равна 10, длина стороны KL равна 16, а длина высоты MH равна $3{,}9$, выбирается тот, у которого длина медианы MN наименьшая. Найдите величину его угла KML.

17. В треугольнике ABC проведена медиана AD, $|AD| = m, |AB| = c, |AC| = b$. Найдите $\widehat{BAC}$.

18. Найдите величину угла A треугольника ABC, если известно, что $|AB| = 2$, $|AC| = 4$, а длина медианы AM равна $\sqrt{7}$.

19. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $|AB| = |BC| = 2|AC|$, $|AM| = 4$.

20. Найдите величины углов, образованных медианой BB_1 треугольника ABC со сторонами AB и BC, если $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $|BB_1| = 5$.

21. В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Известно, что $|AB| = 3$, $|AC| = \sqrt{5}$, длина медианы, проведённой из вершины A к стороне BC, равна $\sqrt{6}$, а длины отрезков AP, PQ и QC равны между собой. Найдите длину отрезка PQ.

22. В треугольнике ABC проведены биссектриса BK и медиана BM. Найдите длину отрезка KM, если $\widehat{ABM} = \pi/4$, $\widehat{CBM} = \pi/6$, $|AK| = 6$.

23. В треугольнике ABC проведены биссектриса BD и медиана AE. Известно, что $|AB| = 8$, $|BC| = |BD| = 6$. Найдите длину медианы AE.

24. В треугольнике ABC проведены биссектриса AL и медиана AM. Известно, что $|AL| = 6$, $|AM| = 8$, $|AC| = 2 \cdot |AB|$. Найдите длину стороны BC.

25. В треугольнике KMN проведены высота NA, биссектриса NB и медиана NC, которые делят угол KNM на четыре равные части. Найдите длины высоты NA, биссектрисы NB и медианы NC, если длина радиуса описанной около треугольника KMN окружности равна R.

26. В треугольнике ABC проведены высоты CH и AK. Найдите длину стороны AC, если $|AB| = c$, $|CH| = h$, $|AK| = k$.

27. В треугольнике ABC проведена высота BH, при этом оказалось, что длины отрезков CH и AH относятся как $10 : 3$. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $|BH| = h$, $\widehat{ABC} = \pi/6$.

28. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, длина которой равна l. Найдите длины сторон треугольника ABC, если известно, что расстояния от точек A и C до прямой BL равны p и q соответственно.

29. Вычислите величину угла A треугольника ABC, если величина угла B равна $\pi/5$ и известно, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из этой вершины.

30. На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку B расположена точка E так, что биссектрисы углов AEC и ABC пересекаются в точке K, лежащей на стороне AC. Длина отрезка BE равна 1, длина отрезка BC равна 2, градусная мера угла EKB равна 30°. Найдите длину стороны AB.

31. В треугольнике ABC известно, что $|AC| = |BC| = 12$, $|AB| = 6$, AD – биссектриса. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ADC и сравните эту длину с числом $13/2$.

32. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно, причём $|BM| = |BN|$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная BC, а через точку N – прямая, перпендикулярная AB. Эти прямые пересекаются в точке O. Продолжение отрезка BO пересекает сторону AC в точке P, $|AP| = 5, |PC| = 4$. Найдите длину отрезка BP, если известно, что $|BC| = 6$.

33. Вокруг треугольника MKH описана окружность с центром в точке O, длина её радиуса равна r. Длина стороны HM равна a. Известно, что справедливо равенство $|HK|^2 - |HM|^2 = |HM|^2 - |MK|^2$. Найдите площадь треугольника OLK, где L – точка пересечения медиан треугольника MKH.

34. В треугольнике KLM проведены биссектрисы KA и MB, которые пересекаются в точке O. Диагонали четырёхугольника $AOBL$ пересекаются в точке C. Найдите численные значения отношений $|BC| : |CA|$ и $|LC| : |CO|$, если известно, что $|KL| = m$, $|KM| = l$, $|LM| = k$.

35. Отрезки AM и BP являются медианами треугольника ABC. Известно, что угол APB равен углу BMA, $|BP| = 1$, косинус величины угла ACB равен $4/5$. Найдите площадь треугольника ABC.

36. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C взята точка O таким образом, что $|OA| = |OB| = b$. CD – высота треугольника ABC, точка E – середина отрезка OC, $|DE| = a$. Найдите $|CE|$.

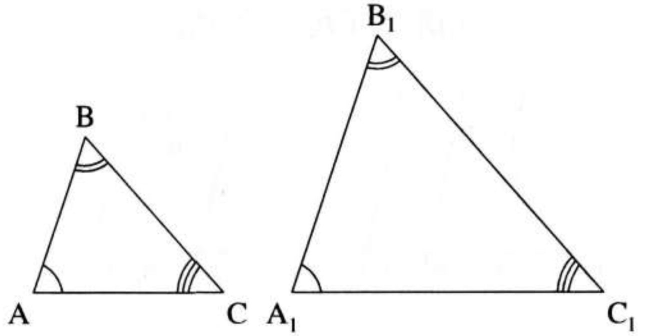
1.4. Подобие треугольников

Теоретический материал

В этом параграфе рассматриваются задачи, при решении которых ключевую роль играет подобие треугольников.

Определение. *Два треугольника называются* **подобными**, *если у них попарно равны все углы, а длины соответствующих сторон пропорциональны.* То есть

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ если } \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1,$$
$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|}.$$



Численное значение отношения длин соответствующих сторон называется *коэффициентом подобия* треугольников. Имеется в виду следующее: если нам дано, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $k = |AB| : |A_1B_1|$.
Замечание. У подобных треугольников пропорциональны не только стороны, но и все соответствующие линейные элементы (например, длины радиусов описанных около них окружностей или длины биссектрис, проведённых к соответственным сторонам). Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента их подобия.

Сформулируем три признака подобия треугольников:

1. *Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны.*

2. *Если некоторый угол первого треугольника равен некоторому углу второго треугольника, а длины прилежащих к этим углам сторон треугольников пропорциональны, то эти треугольники подобны.*

3. *Если длины трёх сторон одного треугольника пропорциональны длинам трёх сторон другого треугольника, то эти треугольники подобны.*

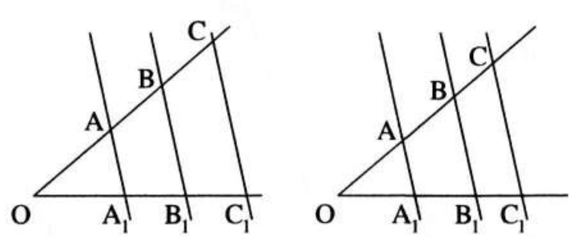
Замечание. Подобие треугольников необходимо записывать правильно, то есть порядки появления соответственных вершин треугольников в записи их подобия должны совпадать. Если, например, про треугольники ABC и MKN известно, что $\widehat{A} = \widehat{K}$ и $\widehat{C} = \widehat{M}$, то правильной записью их подобия будет $\triangle ACB \sim \triangle KMN$. После этого, глядя на эту запись, можно легко выписать пропорцию

$$\frac{|AC|}{|KM|} = \frac{|AB|}{|KN|} = \frac{|CB|}{|MN|}.$$

Теорема Фалеса. Если при пересечении сторон угла параллельными прямыми на одной стороне угла отсекаются равные между собой отрезки, то и на другой стороне угла отсекаются также равные между собой отрезки (левый рисунок).

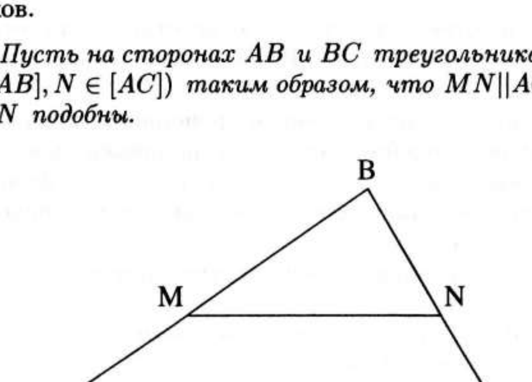
Обобщённая теорема Фалеса. При пересечении сторон угла параллельными прямыми на сторонах угла отсекаются пропорциональные отрезки (правый рисунок).

$$\frac{|AO|}{|A_1O|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|}.$$



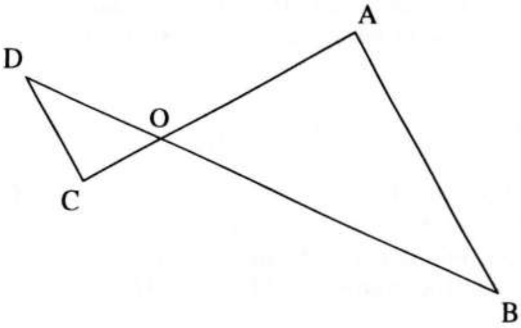
Теперь рассмотрим несколько классических ситуаций, в которых возникает подобие треугольников.

Утверждение 1. *Пусть на сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N ($M \in [AB], N \in [AC]$) таким образом, что $MN||AC$. Тогда треугольники ABC и MBN подобны.*



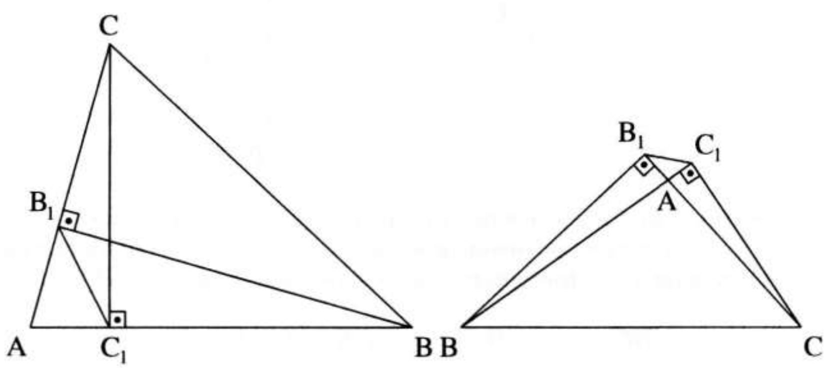
Доказательство. Углы BAC и BMN являются парой соответственных углов при параллельных прямых AC и MN. Поэтому $\angle BAC = \angle BMN$. Аналогично получаем, что $\angle BCA = \angle BNM$. Значит, треугольники ABC и MBN подобны по первому признаку подобия треугольников.

Утверждение 2. *Пусть отрезки AC и BD пересекаются в точке O, причём $AB||CD$. Тогда треугольники AOB и COD подобны.*



Доказательство. Углы OAB и OCD образуют пару внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых AB и CD и секущей AC. Поэтому $\angle OAB = \angle OCD$. С другой стороны, углы AOB и COD – вертикальные, значит, $\angle AOB = \angle COD$. Таким образом, треугольники AOB и COD подобны по первому признаку подобия треугольников.

Утверждение 3. *Пусть в треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Тогда треугольники AB_1C_1 и ABC подобны с коэффициентом подобия $|\cos\widehat{BAC}|$, а также подобны треугольники ABB_1 и ACC_1.*



Доказательство. При доказательстве этого утверждения необходимо рассмотреть два различных случая. Если угол A – острый, то точки B_1 и C_1 попадают либо на стороны AC и AB, либо на их продолжения за точки C и B. Независимо от этого, из прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1 вытекает, что

$$\frac{|AB_1|}{|AB|} = \cos\widehat{BAC}, \quad \frac{|AC_1|}{|AC|} = \cos\widehat{BAC}.$$

Пользуясь этим фактом и тем, что угол A – общий угол треугольников AB_1C_1 и ABC, мы получаем, что $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ по второму признаку подобия треугольников, причём коэффициент их подобия равен отношению длин их соответствующих сторон, то есть косинусу угла BAC. Подобие треугольников ABB_1 и ACC_1 вытекает из того, что углы AB_1B и AC_1C – прямые, а угол A – их общий угол. Стало быть, они подобны по первому признаку подобия треугольников.

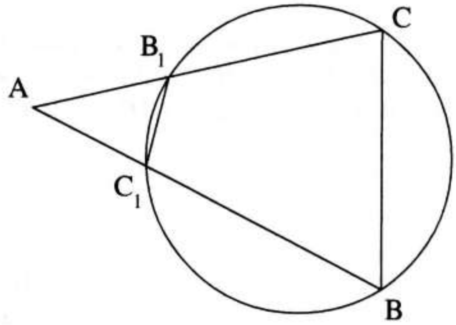
Если же угол A – тупой, то точки B_1 и C_1 попадают на продолжения сторон AC и AB за точку A. Тогда из прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1 получаем

$$\frac{|AC_1|}{|AC|} = \cos\widehat{CAC_1} = -\cos\widehat{BAC}, \quad \frac{|AB_1|}{|AB|} = \cos\widehat{BAB_1} = -\cos\widehat{BAC}.$$

Так же как и в предыдущем случае, с учётом того, что углы B_1AC_1 и BAC равны как вертикальные, мы заключаем, что $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ по второму признаку подобия треугольников, причём коэффициент их подобия равен $-\cos\widehat{BAC}$. Таким образом, в любом случае треугольники AB_1C_1 и ABC подобны с коэффициентом подобия $|\cos\widehat{BAC}|$.

Подобие треугольников ABB_1 и ACC_1 вытекает их того, что углы AB_1B и AC_1C – прямые, а углы B_1AB и C_1AC – вертикальные.

Утверждение 4. *Пусть окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Тогда треугольники AB_1C_1 и ABC подобны.*



Доказательство. Для доказательства этого утверждения воспользуемся тем фактом, что сумма величин противоположных углов четырёхугольника, вписанного в окружность, равна π. Применяя её к четырёхугольнику BC_1B_1C, получаем, что

$$\widehat{C_1BC} = \pi - \widehat{CB_1C_1}; \quad \widehat{B_1CB} = \pi - \widehat{BC_1B_1}.$$

С другой стороны, по свойству смежных углов

$$\widehat{AB_1C_1} = \pi - \widehat{CB_1C_1}; \quad \widehat{AC_1B_1} = \pi - \widehat{BC_1B_1}.$$

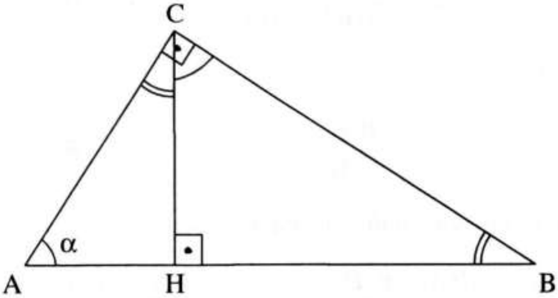
Их этих двух пар соотношений следует, что

$$\widehat{C_1BC} = \widehat{AB_1C_1}, \quad \widehat{B_1CB} = \widehat{AC_1B_1}.$$

Таким образом, треугольники AB_1C_1 и ABC подобны по первому признаку подобия треугольников.

З а м е ч а н и е. Утверждение 3 является частным случаем утверждения 4. В самом деле, если BC – диаметр окружности, а угол A – острый, то точки B_1 и C_1 лежат на сторонах AC и AB соответственно, углы BC_1C и CB_1B опираются на диаметр, поэтому они прямые. То есть отрезки BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC. Однако, в отличие от утверждения 3, утверждение 4 не дает никакой информации о коэффициенте подобия треугольников AB_1C_1 и ABC.

Утверждение 5. *Пусть CH – высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины его прямого угла C. Тогда треугольники ACH, CBH и ABC попарно подобны.*



Доказательство. Если обозначить величину угла BAC за α, то из прямоугольных треугольников ACH, ABC и CBH вытекает, что

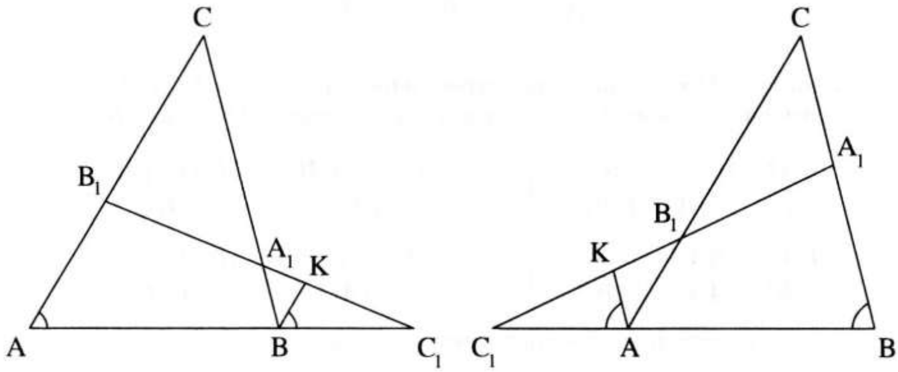
$$\widehat{ACH} = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \widehat{BCH} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha.$$

Поэтому любая пара перечисленных в формулировке утверждения треугольников подобна по первому признаку подобия треугольников.

Приведём ещё две важные теоремы, которые часто используются для решения задач. Их доказательство проводится с использованием подобия треугольников.

Теорема Менелая. *Пусть прямая пересекает произвольный треугольник ABC, причём B_1 – точка её пересечения со стороной AC, A_1 – точка её пересечения со стороной BC и C_1 – точка её пересечения с продолжением стороны AB. Тогда*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Доказательство. Могут возникнуть две различные ситуации: либо точка C_1 лежит на продолжении стороны AB за вершину B (левый рисунок), либо же она лежит на продолжении стороны AB за вершину A (правый рисунок).

Рассмотрим первый из этих случаев. Проведем отрезок BK (K лежит на прямой A_1C_1), параллельный стороне AC. Тогда по утверждению 1

$$\triangle BKC_1 \sim \triangle AB_1C_1 \implies \frac{|AB_1|}{|BK|} = \frac{|AC_1|}{|BC_1|} \iff |BK| = \frac{|AB_1| \cdot |BC_1|}{|AC_1|},$$

а по утверждению 2

$$\triangle A_1BK \sim \triangle A_1CB_1 \implies \frac{|BA_1|}{|CA_1|} = \frac{|BK|}{|CB_1|} \iff |BK| = \frac{|BA_1| \cdot |CB_1|}{|CA_1|}.$$

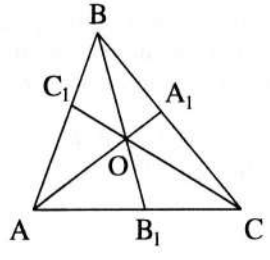
Из двух полученных соотношений вытекает, что

$$\frac{|AB_1| \cdot |BC_1|}{|AC_1|} = \frac{|BA_1| \cdot |CB_1|}{|CA_1|} \implies \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Второй случай рассматривается абсолютно аналогично.

Теорема Чевы. *Пусть в треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах BC, AC и AB соответственно, причём отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Тогда*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Доказательство. Обозначим точку пересечения отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 буквой O и применим теорему Менелая для треугольников ABB_1 и CBB_1:

$$\frac{|B_1O|}{|OB|} \cdot \frac{|BC_1|}{|C_1A|} \cdot \frac{|AC|}{|CB_1|} = 1 \iff \frac{|C_1A| \cdot |CB_1|}{|BC_1|} = \frac{|B_1O| \cdot |AC|}{|OB|};$$

$$\frac{|B_1O|}{|OB|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CA|}{|AB_1|} = 1 \iff \frac{|AB_1| \cdot |A_1C|}{|BA_1|} = \frac{|B_1O| \cdot |AC|}{|OB|}.$$

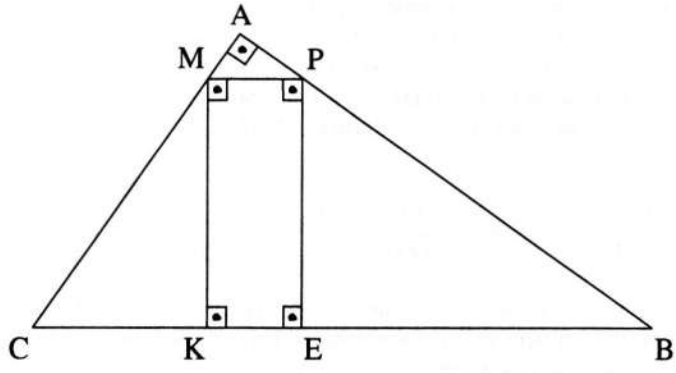
Приравняем левые части полученных соотношений:

$$\frac{|C_1A| \cdot |CB_1|}{|BC_1|} = \frac{|AB_1| \cdot |A_1C|}{|BA_1|} \iff \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Теорема Чевы доказана.

Примеры решения задач

Пример 1. В прямоугольном треугольнике ABC, длины катетов AB и AC которого равны 4 и 3, расположен прямоугольник $EKMP$ так, что сторона EK лежит на гипотенузе BC, а вершины M и P – на катетах AC и AB соответственно. Найдите длины сторон прямоугольника $EKMP$, если его площадь равна $5/3$, а периметр меньше 9.



Решение. Обозначим длины сторон EP и MK прямоугольника $EKMP$ за x. Треугольники MKC и BAC подобны по первому признаку подобия, поскольку углы MKC и BAC – прямые, а угол C является их общим углом. Значит,

$$\frac{|MK|}{|AB|} = \frac{|KC|}{|AC|} \quad \Longrightarrow \quad |KC| = \frac{|MK| \cdot |AC|}{|AB|} = \frac{3x}{4}.$$

Аналогично получаем, что $\triangle PEB \sim \triangle CAB$, что даёт нам

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|EP|}{|AC|} \quad \Longrightarrow \quad |BE| = \frac{|EP| \cdot |AB|}{|AC|} = \frac{4x}{3}.$$

Далее заметим, что по теореме Пифагора $|BC| = 5$. Поскольку точки E и K лежат на стороне BC, то

$$|EK| = |BC| - |BE| - |KC| = 5 - \frac{3x}{4} - \frac{4x}{3} = \frac{60 - 25x}{12} = |MP|.$$

Теперь можно воспользоваться условием задачи про площадь и периметр прямоугольника $EKMP$:

$$\begin{cases} S_{EKMP} = |EK| \cdot |EP|, \\ P_{EKMP} = |EK| + |EP| + |MP| + |MK|, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

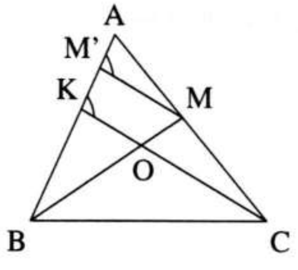
$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{5}{3} = x \cdot \dfrac{60 - 25x}{12}, \\ 2x + \dfrac{60 - 25x}{6} < 9, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 5x^2 - 12x + 4 = 0, \\ 60 - 13x < 54, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 2.$$

Таким образом, $|EP| = |MK| = 2, |EK| = |MP| = \dfrac{60 - 25 \cdot 2}{12} = \dfrac{5}{6}$.

Ответ. $|EP| = |MK| = 2, |EK| = |MP| = \dfrac{5}{6}$.

Пример 2. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки K и M соответственно. Найдите отношение, в котором точка пересечения прямых KC и BM делит отрезок BM, если $|AK|:|KB| = 2:3$, $|AM|:|MC| = 4:5$.

Решение. В такого сорта задачах, то есть в задачах, где даны какие-либо отношения длин отрезков, традиционно вводят по одной неизвестной на каждое отношение. Обозначим точку пересечения прямых KC и BM буквой O и положим $|AK| = 2x$, $|KB| = 3x$, $|AM| = 4y$, $|MC| = 5y$, тогда $|AB| = 5x$, $|AC| = 9y$.



Первый способ решения заключается в следующем: применим теорему Менелая к треугольнику ABM и секущей KO:

$$\frac{|AK|}{|KB|}\cdot\frac{|BO|}{|OM|}\cdot\frac{|MC|}{|CA|} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{|BO|}{|OM|} = \frac{9y}{5y}\cdot\frac{3x}{2x} = \frac{27}{10}.$$

Минусом этого способа решения является то, что теорема Менелая не входит в школьную программу и при использовании её в решении задач на экзаменах придётся привести её доказательство.

Однако можно предложить другой способ решения, который использует идею, с помощью которой доказывается теорема Менелая. Раз мы ищем численное значение отношения $|BO|:|OM|$, то проведём из точки M отрезок MM', параллельный KC ($M' \in AB$). Тогда по утверждению 1 треугольник $AM'M$ подобен треугольнику AKC, а треугольник BKO подобен треугольнику $BM'M$. Из этих подобий мы находим

$$\frac{|AM'|}{|AK|} = \frac{|AM|}{|AC|} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|AM'|}{2x} = \frac{4y}{9y} \quad\Longrightarrow\quad |AM'| = \frac{8x}{9};$$

$$\frac{|BM|}{|BO|} = \frac{|BM'|}{|BK|} = \frac{|AB| - |AM'|}{|BK|} = \frac{5x - \dfrac{8x}{9}}{3x} = \frac{37}{27}.$$

Теперь получить нужное нам отношение совсем просто:

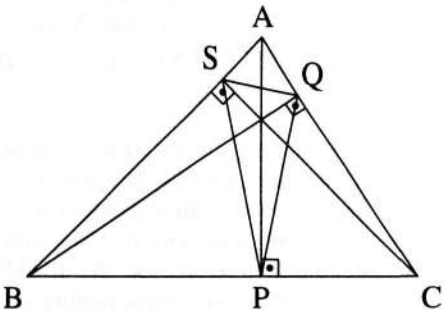
$$\frac{|BM|}{|BO|} = \frac{37}{27} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|BO|}{|OM|} = \frac{|BO|}{|BM| - |BO|} = \frac{1}{\dfrac{|BM|}{|BO|} - 1} = \frac{1}{\dfrac{37}{27} - 1} = \frac{27}{10}.$$

Ответ. $\dfrac{27}{10}$.

Пример 3. Длины отрезков, соединяющих основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите площадь треугольника.

Решение. Обозначим вершины треугольника буквами A, B и C и проведём его высоты AP, BQ и CS. Без ограничения общности будем считать, что $|SP| = 13$, $|PQ| = 12$, $|QS| = 5$.

Пользуясь утверждением 3, мы находим три пары подобных треугольников: $\triangle CPQ \sim \triangle CAB$, $\triangle BSP \sim \triangle BCA$ и $\triangle AQS \sim \triangle ABC$, причём коэффициенты этих подобий в силу остроугольности треугольника ABC равны $\cos\widehat{ACB}$, $\cos\widehat{ABC}$ и $\cos\widehat{CAB}$ соответственно. Так что если нам удастся найти величины этих углов, то задача фактически будет решена, поскольку



$$\frac{|PQ|}{|AB|} = \cos\widehat{ACB}, \quad \frac{|SP|}{|AC|} = \cos\widehat{ABC}, \quad \frac{|QS|}{|BC|} = \cos\widehat{CAB},$$

то есть мы сможем найти длины сторон треугольника ABC. Заметим, что, помимо этого, эти подобия дают нам следующие соотношения на величины углов:

$$\widehat{CPQ} = \widehat{CAB}, \quad \widehat{CQP} = \widehat{CBA}, \quad \widehat{BSP} = \widehat{BCA}, \quad \widehat{BPS} = \widehat{BAC},$$
$$\widehat{AQS} = \widehat{ABC}, \quad \widehat{ASQ} = \widehat{ACB}.$$

Теперь мы легко получаем связь между величинами углов треугольника ABC и величинами углов треугольника PQS:

$$\widehat{QPS} = \pi - \widehat{CPQ} - \widehat{BPS} = \pi - 2\widehat{BAC} \iff \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{QPS}}{2};$$

$$\widehat{PSQ} = \pi - \widehat{BSP} - \widehat{ASQ} = \pi - 2\widehat{ACB} \iff \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{PSQ}}{2};$$

$$\widehat{SQP} = \pi - \widehat{AQS} - \widehat{CQP} = \pi - 2\widehat{ABC} \iff \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{SQP}}{2}.$$

Осталось посчитать необходимые нам косинусы. Заметим, что треугольник PQS прямоугольный (поскольку $13^2 = 12^2 + 5^2$). Тогда

$$\cos\widehat{QPS} = \frac{|PQ|}{|SP|} = \frac{12}{13}, \quad \cos\widehat{PSQ} = \frac{|QS|}{|SP|} = \frac{5}{13}, \quad \widehat{SQP} = \frac{\pi}{2} \implies \widehat{ABC} = \frac{\pi}{4};$$

$$\cos\widehat{BAC} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{QPS}}{2}\right) = \sin\frac{\widehat{QPS}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\widehat{QPS}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}};$$

$$\cos\widehat{ACB} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{PSQ}}{2}\right) = \sin\frac{\widehat{PSQ}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\widehat{PSQ}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

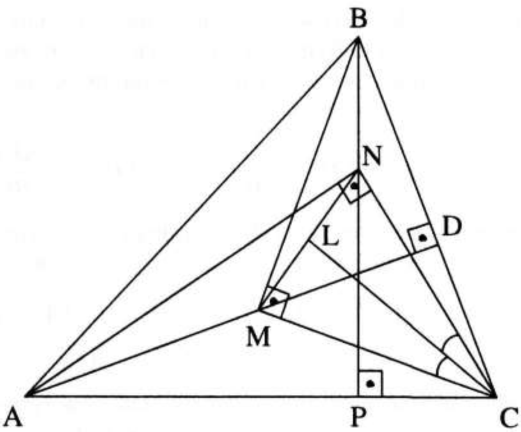
Таким образом мы вычислили все коэффициенты подобия. Осталось найти длины нужных нам сторон треугольника ABC:

$$|AB| = \frac{|PQ|}{\cos\widehat{ACB}} = 6\sqrt{13}, \quad |BC| = \frac{|QS|}{\cos\widehat{BAC}} = 5\sqrt{26};$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{13}\cdot 5\sqrt{26}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 195.$$

Ответ. 195.

Пример 4. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP – точка N так, что углы BMC и ANC – прямые. Известно, что $\widehat{MCN} = 30^\circ$, $|MN| = 4+2\sqrt{3}$. Найдите длину биссектрисы CL треугольника MCN.



Решение. В условии этой задачи даны лишь два элемента треугольника MCN. Это означает, что нам надо каким-то образом из условий про расположение точек N и M получить ещё одно соотношение на элементы треугольника MCN. Заметим, что по утверждению 5 треугольник NCP подобен треугольнику ACN, треугольник CMD подобен треугольнику CBM, и воспользуемся этими подобиями:

$$\frac{|CN|}{|AC|} = \frac{|CP|}{|CN|} \Longrightarrow |CN|^2 = |AC|\cdot|CP|;$$

$$\frac{|CM|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|CM|} \Longrightarrow |CM|^2 = |BC|\cdot|CD|.$$

С другой стороны, из утверждения 3 вытекает, что треугольники ADC и BPC также подобны, поэтому

$$\frac{|CD|}{|CP|} = \frac{|AC|}{|BC|} \quad \Longrightarrow \quad |AC|\cdot|CP| = |BC|\cdot|CD|.$$

Таким образом, $|CM|^2 = |CN|^2$, то есть $|CM| = |CN|$. Следовательно, треугольник MCN равнобедренный, CL – его биссектриса, медиана и высота. С учётом этого находим

$$|CL| = \frac{1}{2}\cdot|MN|\cdot\operatorname{ctg}15^\circ = (2+\sqrt{3})\cdot\frac{1+\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 7+4\sqrt{3}.$$

Ответ. $7+4\sqrt{3}$.

Задачи

1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B опущена высота BD на гипотенузу AC. Известно, что $|AB| = 13$, $|BD| = 12$. Найдите площадь треугольника ABC.

2. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 11.2, а длина высоты AE равна 12. Точка E лежит на стороне BC, причём $|BE| : |EC| = 5 : 9$. Найдите длину стороны AC.

3. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 8, величина угла ACB равна $\pi/3$. Прямая, параллельная стороне AB, пересекает сторону AC в точке D, а сторону BC в точке E. Известно, что $|BC| = |DC|$, $|DE| = 3$. Найдите $|BC|$.

4. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе прямоугольного треугольника, касается его катетов. Найдите длину радиуса этой окружности, если длины катетов треугольника равны 3 и 4.

5. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC в точках E и D соответственно. Найдите величину угла ABC, если $|AE| = 1$, $|BD| = 3$.

6. В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AB равна 6, а длина высоты, проведённой к основанию AD, равна 3. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $|MC| = 4$. N – точка пересечения отрезков AM и BD. Вычислите площадь треугольника BNM.

7. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, длина радиуса которой равна 3. Прямая p касается этой окружности и параллельна прямой AC, но не совпадает с ней. Расстояние от точки B до прямой p равно 3. Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC.

8. В ромбе $ABCD$ проведены высоты BP и BQ. Они пересекают диагональ AC в точках M и N соответственно (M между A и N). Известно, что $|AM| = p$, $|MN| = q$. Найдите $|PQ|$.

9. На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OB взята точка M на расстоянии $3\cdot|OA|$ от прямой OA, а на луче OA – точка N на расстоянии $3\cdot|OB|$ от прямой OB. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника AOB, равна 3. Найдите $|MN|$.

10. В треугольнике ABC угол C – тупой, D – точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведённая из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $|AM| = a$, $|MB| = b$. Найдите $|AC|$.

11. На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR – точка L, причём $|NQ| = |LR|$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении $m : n$, считая от точки Q. Найдите значение отношения $|PN| : |PR|$.

12. В треугольнике ABC на стороне AC взяты точки P и Q таким образом, что $|AP| > |AQ|$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $|PQ| = 3$. Найдите длину стороны AC.

13. В треугольнике ABC взяты точка K на стороне AB и точка M на стороне AC так, что $|AK| : |KB| = 3 : 2$, $|AM| : |MC| = 4 : 5$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC, делит отрезок BM.

14. В треугольнике ABC взяты точка N на стороне AB и точка M на стороне AC. Отрезки CN и BM пересекаются в точке O. Вычислите $|CO| : |ON|$, если известно, что $|AN| : |NB| = 2 : 3$, $|BO| : |OM| = 5 : 2$.

15. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB пополам, а точка E лежит на стороне BC, причём $|BC| = 3|BE|$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O, $|AE| = 5$, $|OC| = 4$, $\widehat{AOC} = 120^\circ$. Найдите длину стороны AB.

16. В треугольнике ABC точки D, E и F расположены на сторонах AB, BC и AC соответственно. Известно, что $|AD| : |DB| = 1 : 2$, $|BE| : |EC| = 2 : 3$, $|AF| : |FC| = 1 : 1$. Отрезки DE и BF пересекаются в точке K. Вычислите отношение $|BK| : |KF|$.

17. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 6, длина медианы CE равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1. Найдите длину стороны AB.

18. В треугольнике ABC из вершин A и B проведены отрезки AD и BE, причём точки D и E лежат на сторонах BC и AC соответственно. Отрезки AD и BE пересекаются в точке Q таким образом, что $|AQ| : |QD| = x$, $|BQ| : |QE| = y$. Найдите значения отношений $|AE| : |EC|$ и $|BD| : |DC|$.

19. В треугольнике PQR точка T лежит на стороне PR так, что $\widehat{QTR} = \widehat{PQR}$. Известно, что $|PT| = 8$, $|TR| = 1$. Найдите:

    а) длину стороны QR;

    б) величину угла QRP, если длина радиуса описанной около треугольника PQT окружности равна $3\sqrt{3}$.

20. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, длина радиуса которой равна $2\sqrt{5}$, отсекающая от прямой BC отрезок длины $4\sqrt{5}$ и касающаяся прямой AC в точке A. Из точки B проведён перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите площадь треугольника ABC, если $|BF| = 2$.

21. Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки O, M, E, C лежат на одной окружности, $|BE| = |AM| = 3$. Найдите $|AB|$.

22. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки D, E и F соответственно. Отрезки AE и DF проходят через центр вписанной в треугольник ABC окружности, а прямые DF и BC параллельны. Найдите длину отрезка BE и периметр треугольника ABC, если известно, что $|BC| = 15$, $|BD| = 6$, $|CF| = 4$.

23. Прямая, параллельная медиане AD прямоугольного треугольника ABC, пересекает его гипотенузу BC в точке F, катет AB в точке E и прямую AC в точке H. Известно, что $|EF| = 1$, $|EH| = 3$. Найдите длину гипотенузы BC.

24. На сторонах AB и AD прямоугольника $ABCD$ выбраны точки P и Q ($P \in AB$) так, что $\angle CQD = \angle AQP = \angle BPC$. Вычислите длину отрезка AP, если $|AB| = b$, $|AD| = d$ $(b > d)$.

25. Прямые, содержащие высоты треугольника ABC, пересекаются в точке H. Известно, что $|BH| = 6$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Найдите длину стороны AC.

26. В треугольнике ABC расположен прямоугольник $PQRS$ так, что сторона PQ лежит на отрезке AC, а вершины R и S – на отрезках BC и AB соответственно. Найдите длину отрезка PS, если известно, что $|AP| = 1$, $|PQ| = 5$, $|QC| = 2$, а периметр треугольника BRS равен 15.

27. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята точка D таким образом, что $\widehat{BDC} = \widehat{BAL} = \pi/3$, $|AD| = 10$. Найдите площадь треугольника ABC.

28. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BD, а на гипотенузе BC взята точка H так, что $DH \perp BD$. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $|CH| = 1$, $|CD| = 2$.

29. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle AMD = \angle ADB$ и $\angle ACM = \angle ABC$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $|CD| = 20$. Найдите длину радиуса вписанной в треугольник ACD окружности.

30. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно таким образом, что $\widehat{BAC} = \widehat{BNM} = \pi/6$. Также известно, что $|AM| = |CN|$. Найдите отношение периметра треугольника ABC к сумме длин его медиан.

31. Найдите пару подобных треугольников, длины всех сторон которых выражаются целыми числами, если известно, что длины двух сторон первого треугольника равны длинам двух сторон второго треугольника, а длины их третьих сторон отличаются на 61.

1.5. Площадь треугольника

Теоретический материал

В этом разделе рассматриваются различные факты, связанные с площадями треугольников. Для успешного решения задач, относящихся к этой теме, необходимо знать и уметь обосновывать все леммы, приведённые ниже.

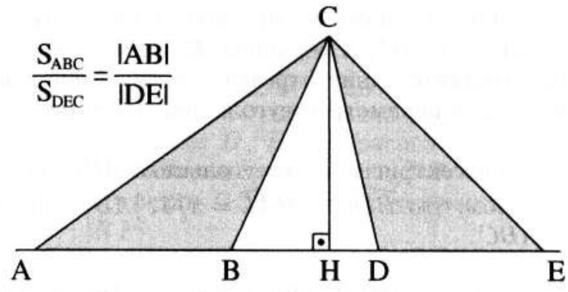
Сначала сформулируем два утверждения, которые следует воспринимать как аксиомы.

Утверждение 1. *Равные фигуры имеют одинаковые площади.*

Утверждение 2. *Если фигура F состоит из двух непересекающихся фигур F_1 и F_2, то площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_1 и F_2.*

Теперь докажем пять лемм, с помощью которых решается большинство задач, связанных с площадями треугольников и многоугольников.

Лемма 1. *Если два треугольника имеют общую вершину, а их стороны, противолежащие этой вершине, лежат на одной прямой, то отношение площадей этих треугольников равно отношению длин указанных сторон.*

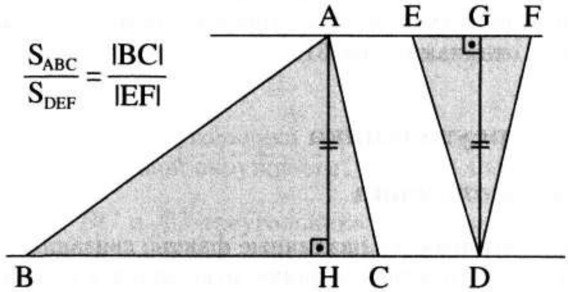


Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и DEC, стороны AB и DE которых лежат на одной прямой. Опустим из точки C перпендикуляр CH на эту прямую, тогда, очевидно, отрезок CH будет являться как высотой треугольника ABC, так и высотой треугольника DEC. Наконец, воспользуемся формулой площади треугольника, в которую входят длина его стороны и длина его высоты:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH|, \quad S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |CH| \quad \Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{|AB|}{|DE|}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если некоторая вершина и противолежащая ей сторона одного треугольника и некоторая вершина и противолежащая ей сторона другого треугольника лежат на двух параллельных прямых, то отношение площадей этих треугольников равно отношению длин указанных сторон.*

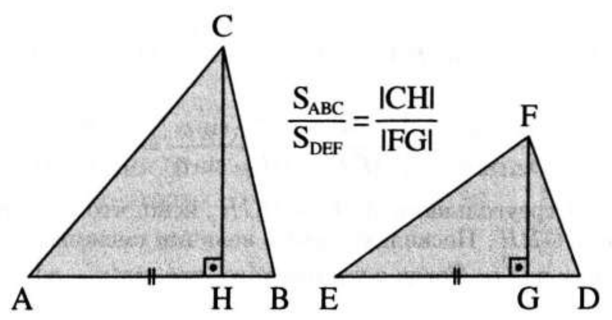


Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и DEF, будем считать, что сторона BC и точка D лежат на одной прямой, а сторона EF и точка A лежат на другой прямой, причём эти прямые параллельны. Проведём высоты AH и DG этих треугольников, тогда длины отрезков AH и DG будут равны, поскольку каждый из них перпендикулярен обеим прямым. После этого воспользуемся формулой площади треугольника, в которую входят длина его стороны и длина его высоты:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AH|, \quad S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot |DG| \quad \Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{|BC|}{|EF|}.$$

Случай, когда вершины A и D лежат на одной прямой, а стороны BC и EF лежат на другой прямой, рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если длина некоторой стороны одного треугольника равна длине некоторой стороны другого треугольника, то отношение площадей этих треугольников равно отношению длин их высот, проведённых к указанным сторонам.*



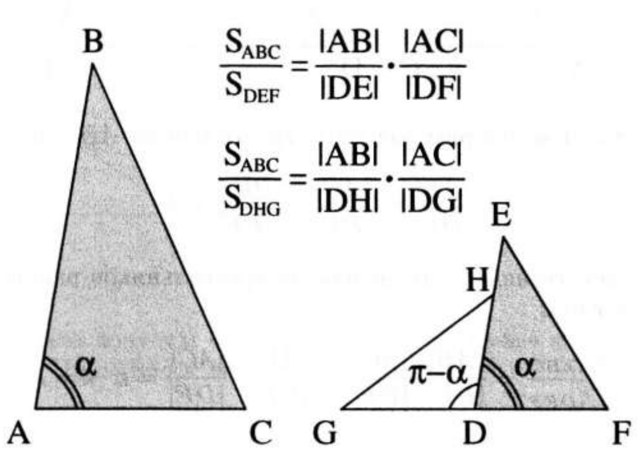
Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и DEF, длины сторон AB и DE которых равны. Проведём высоты CH и FG этих треугольников и воспользуемся формулой площади треугольника, в которую входит длина его стороны и длина его высоты:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH|, \quad S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |FG| \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH|}{\frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |FG|} = \frac{|CH|}{|FG|}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если некоторый угол одного треугольника равен некоторому углу другого треугольника или углу, смежному с ним, то отношение площадей этих треугольников равно отношению произведений длин их сторон, образующих указанные углы.*



Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и DEF, будем считать, что углы BAC и EDF равны, а величины этих углов равны α. Применим формулу площади треугольника, в которую входят длины его сторон и синус величины угла между ними:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\widehat{BAC}, \quad S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \sin\widehat{EDF} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \sin\alpha} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DE| \cdot |DF|}.$$

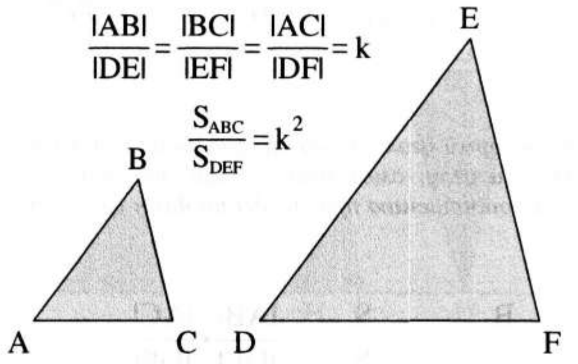
Теперь рассмотрим треугольники ABC и DGH, ясно, что угол BAC равен углу, смежному с углом GDH. Поскольку сумма величин смежных углов равна π, то $\widehat{GDH} = \pi - \widehat{EDF} = \pi - \alpha$. Тогда с учётом того, что $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, получаем

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\widehat{BAC}, \quad S_{\triangle DGH} = \frac{1}{2} \cdot |DG| \cdot |DH| \cdot \sin\widehat{GDH} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DGH}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot |DG| \cdot |DH| \cdot \sin(\pi - \alpha)} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DG| \cdot |DH|}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если два треугольника подобны с коэффициентом подобия k, то отношение их площадей равно k^2.*



Доказательство. Рассмотрим подобные треугольники ABC и DEF, пусть

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k.$$

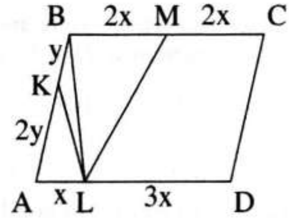
Поскольку соответственные углы подобных треугольников равны, то применима лемма 4, что дает нам

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DE| \cdot |DF|} = \frac{|AB|}{|DE|} \cdot \frac{|AC|}{|DF|} = k \cdot k = k^2.$$

Лемма доказана.

Примеры решения задач

Пример 1. На сторонах AB, BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, M и L соответственно. Найдите отношение площадей треугольников KBL и BML, если $|AK|:|KB|=2:1$, $|BM|:|MC|=1:1$, $|AL|:|LD|=1:3$.



Решение. Обозначим длину отрезка AL за x, а длину отрезка KB обозначим за y. Тогда, в соответствии с условием задачи, $|LD|=3x$, $|AD|=4x$, $|AK|=2y$, $|AB|=3y$. Поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то, во-первых, $BC||AD$ и, во-вторых, $|BC|=|AD|=4x$, из чего вытекает, что $|BM|=|MC|=\dfrac{1}{2}|BC|=2x$.

Замечание. Если в задаче требуется найти отношение площадей треугольников, то удобно меньшую площадь обозначить за S и выразить через неё большую площадь, возможно используя промежуточные треугольники. Всегда полезно сначала составить план, а только потом проводить вычисления.

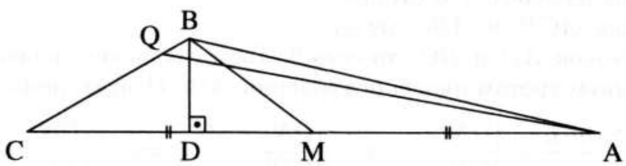
Итак, обозначим площадь треугольника KBL за S и выразим через неё последовательно площади треугольников $S_{\triangle KBL}\longrightarrow S_{\triangle ABL}\longrightarrow S_{BML}$. Теперь, пользуясь леммами 1 и 2, получаем

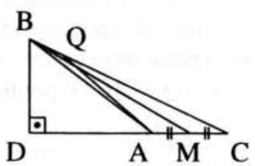
$$\frac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle KBL}}=\frac{|AB|}{|KB|}=3\Longrightarrow S_{\triangle ABL}=3S;\ \frac{S_{\triangle BML}}{S_{\triangle ABL}}=\frac{|BM|}{|AL|}=2\Longrightarrow S_{\triangle BML}=6S.$$

Следовательно, $\dfrac{S_{\triangle KBL}}{S_{\triangle BML}}=\dfrac{S}{6S}=\dfrac{1}{6}.$

Ответ. 1:6.

Пример 2. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 3, длина медианы BM равна 5. На стороне BC взята точка Q так, что $|BQ|=1$, $|QC|=5$. Найдите площадь треугольника AQC, если известно, что она больше трёх.





Решение. Сначала получим соотношение, связывающее площади треугольников ABC и AQC. Применяя к ним лемму 1, находим

$$\frac{S_{\triangle AQC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{|QC|}{|BC|}=\frac{5}{6}\quad\Longrightarrow\quad S_{\triangle AQC}=\frac{5}{6}\cdot S_{\triangle ABC}.$$

Для вычисления площади треугольника ABC нам необходимо вычислить длину его основания AC, поскольку длина его высоты BD нам уже известна. Поступим следующим образом: сначала запишем теорему Пифагора для треугольников BDM и BDC:

$$|DM|^2 = |BM|^2 - |BD|^2 = 25 - 9 = 16 \quad \Longrightarrow \quad |DM| = 4,$$

$$|DC|^2 = |BC|^2 - |BD|^2 = 36 - 9 = 27 \quad \Longrightarrow \quad |DC| = 3\sqrt{3}.$$

Далее заметим, что возможно две различных конфигурации. Если точка M лежит между точками D и C (правый чертёж), то

$$|CM| = |DC| - |DM| = 3\sqrt{3} - 4, \quad |AC| = 2|CM| = 2 \cdot (3\sqrt{3} - 4),$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| = 3 \cdot (3\sqrt{3} - 4), \quad S_{\triangle AQC} = \frac{5}{2} \cdot (3\sqrt{3} - 4) < 3.$$

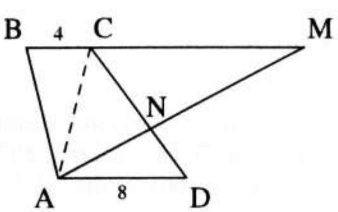
Таким образом, эта конфигурация нам не подходит. Если же точка D лежит между точками M и C (левый чертёж), то

$$|CM| = |DC| + |DM| = 3\sqrt{3} + 4, \quad |AC| = 2|CM| = 2 \cdot (3\sqrt{3} + 4),$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| = 3 \cdot (3\sqrt{3} + 4), \quad S_{\triangle AQC} = \frac{5}{2} \cdot (3\sqrt{3} + 4) > 3.$$

Ответ. $\dfrac{15\sqrt{3} + 20}{2}$.

Пример 3. В трапеции $ABCD$ на продолжении основания BC взята точка M таким образом, что прямая AM отсекает от трапеции $ABCD$ треугольник, площадь которого в 4 раза меньше площади трапеции $ABCD$. Найдите длину отрезка CM, если $|AD| = 8$, $|BC| = 4$.



Решение. Обозначим точку пересечения отрезков AM и CD буквой N. Так как треугольники AND и MNC подобны, то для ответа на вопрос задачи нам не хватает отношения $|DN| : |NC|$, которое легко получить, используя отношение площадей из условия задачи. Для того чтобы эффективно воспользоваться леммами о площадях треугольников, проведём диагональ AC. Тогда с учётом того, что $AD||BC$, по лемме 2 мы находим, что отношение площадей треугольников ACD и ABC будет равно отношению длин отрезков AD и BC, то есть 2. Таким образом, площадь треугольника ACD равна двум третям площади трапеции $ABCD$ и, по лемме 1,

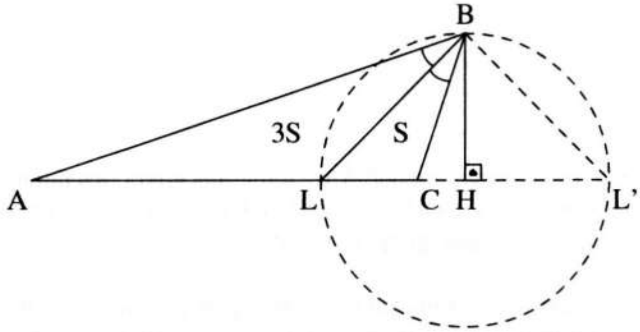
$$\frac{S_{\triangle AND}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{|DN|}{|CD|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\frac{1}{4}S_{ABCD}}{\frac{2}{3}S_{ABCD}} = \frac{|DN|}{|CD|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|DN|}{|CD|} = \frac{3}{8} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|DN|}{|NC|} = \frac{3}{5}.$$

Наконец, из подобия треугольников AND и MNC получаем

$$\frac{|AD|}{|CM|} = \frac{|DN|}{|NC|} = \frac{3}{5} \quad \Longrightarrow \quad |CM| = \frac{5}{3} \cdot |AD| = \frac{40}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{40}{3}$.

Пример 4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $|AC| = 8$, а площади треугольников ABL и BLC относятся как 3:1. Найдите длину биссектрисы BL, при которой длина высоты, опущенной из вершины B на основание AC, будет наибольшей.



Решение. По лемме 1 и по основному свойству биссектрисы мы получаем, что $3 = \dfrac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle BLC}} = \dfrac{|AL|}{|LC|} = \dfrac{|AB|}{|BC|}$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Обозначим $|BC| = x$, тогда $|AB| = 3x$, $p_{\triangle ABC} = 2x + 4$, и применим формулу Герона:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{(2x+4)(2x+4-8)(2x+4-3x)(2x+4-x)} = \sqrt{(4x^2-16)(16-x^2)}.$$

Используя свойства квадратичной функции, мы получаем, что максимум правой части достигается при $x^2 = 10$, то есть $|BC| = \sqrt{10}$, $|AB| = 3\sqrt{10}$. Теперь осталось лишь воспользоваться формулой длины биссектрисы:

$$|BL|^2 = |AB| \cdot |BC| - |AL| \cdot |LC| = 30 - 12 = 18 \quad \Longrightarrow \quad |BL| = \sqrt{18}.$$

Второй способ. Докажем, что геометрическое место точек B, удовлетворяющих условию $|AB| : |BC| = 3$, есть окружность, диаметром которой является отрезок LL', где L' – точка пересечения биссектрисы угла, смежного с углом ABC, и прямой AC. В самом деле точки L и L' принадлежат этому геометрическому месту, так как по основному свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $|AL| : |LC| = 3$, а по свойству биссектрисы внешнего угла треугольника (которое доказывается точно так же, как и свойство биссектрисы внутреннего угла, – надо дважды применить теорему синусов) $|AL'| : |L'C| = 3$. При этом расположение точек L и L' никак не зависит от расположения точки B. Наконец, заметим, что угол LBL' прямой, так как он является углом между биссектрисами смежных углов. Отсюда и следует наше утверждение.

После этого из свойств биссектрис внутреннего и внешнего угла мы получаем $|CL| = 2$, $|CL'| = 4$, $|LL|' = 6$, то есть длина радиуса окружности, на которой лежит точка B, равна 3. Отметим, что так как

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BH| \cdot |AC| = 4|BH|,$$

то площадь треугольника ABC будет максимальна тогда, когда максимальна длина высоты BH. Из геометрических соображений понятно, что наибольшая возможная длина высоты BH равна 3, причём точка H является центром нашей окружности, то есть $|LH| = 3$. Наконец, применяя теорему Пифагора в треугольнике BLH, мы находим нужную нам величину: $|BL| = \sqrt{|BH|^2 + |LH|^2} = \sqrt{18}$.

Ответ. $\sqrt{18}$.

Задачи

1. На стороне KM треугольника KLM, площадь которого равна 4, взята точка N таким образом, что $|KM| = 4|MN|$. Найдите длину отрезка LN, если длина стороны KL равна $2\sqrt{3}$, а $\widehat{KLN} = \pi/3$.

2. Центр O окружности, длина радиуса которой равна 3, лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Его катеты касаются этой окружности. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $|OC| = 5$.

3. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол ABC – прямой) взята точка D таким образом, что площади треугольников ABD и BCD соответственно в три и в четыре раза меньше площади треугольника ABC. Найдите длину отрезка BD, если $|AD| = a$, $|DC| = c$.

4. В трапеции $ABCD$ $|CD| = 12$, боковая сторона AD перпендикулярна основаниям, а её длина равна 9. Длина отрезка AO, где O – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$, равна 6. Найдите площадь треугольника BOC.

5. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр делит на части 5 м и 7 м. Найдите площадь треугольника.

6. В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AC равна 2, величина угла ACB равна $\pi/6$. Из вершины A к боковой стороне BC проведены медиана AD и биссектриса AE. Найдите площадь треугольника ADE.

7. В треугольнике FGH угол G – прямой, $|FG| = 8$, $|GH| = 2$. Точка D лежит на стороне FH, A и B – точки пересечения медиан треугольников FGD и DGH соответственно. Найдите площадь треугольника GAB.

8. Дан треугольник ABC, площадь которого равна 2. На его медианах AK, BL и CN взяты соответственно точки P, Q и R так, что $|AP| = |PK|$, $|QL| = 2|BQ|$, $|CR| : |RN| = 5 : 4$. Найдите площадь треугольника PQR.

9. Точка N лежит на гипотенузе AC прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точка M расположена на катете AB таким образом, что угол MNC прямой. Известно, что площадь треугольника MNC составляет три восьмых площади треугольника ABC. Вычислите отношение $|AN| : |NC|$.

10. Прямоугольные треугольники ABC и ABD имеют общую гипотенузу AB, длина которой равна 5. Точки C и D расположены по разные стороны от прямой AB, $|BC| = |BD| = 3$. Точка E лежит на стороне AC, $|EC| = 1$. Точка F лежит на стороне AD, $|FD| = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ECBDF$.

11. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника DEF равна 5.

12. В ромбе $ABCD$ перпендикуляр к стороне AD, восстановленный из её середины, пересекает диагональ AC в точке M, а перпендикуляр к стороне CD, восстановленный из её середины, пересекает диагональ AC в точке N. Найдите отношение площадей треугольника MND и ромба $ABCD$, если $\widehat{BAD} = \pi/3$.

13. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что $|AC| = a$, $|BC| = b$.

14. На сторонах KL и LM треугольника KLM взяты точки A и B соответственно. Отрезки KB и MA пересекаются в точке C. Найдите площадь треугольника ALC, если известно, что площади треугольников KAC, MBC и KCM равны соответственно 12, 50 и 45.

15. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E, а на стороне AD взята точка F, причём $|AC| = 3|AE|$, $|AD| = 4|AF|$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырёхугольника $ABGE$, где G – точка пересечения прямой FE и отрезка BC, равна 8.

16. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K, а на стороне BC взята точка L так, что $|AK| : |BK| = 1 : 2$, $|CL| : |BL| = 2 : 1$. Пусть Q – точка пересечения прямых AL и CK. Найдите площадь треугольника ABC, если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.

17. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M. Через точку M проведён перпендикуляр ML к стороне AC треугольника ABC (точка L – основание этого перпендикуляра). Найдите величину угла BCA, если известно, что площадь треугольника ABC равна 1, а площадь четырёхугольника $LMBC$ равна S.

18. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в 7 раз меньше площади четырёхугольника $ABDE$. Найдите $|DE|$ и длину радиуса окружности, если $|AB| = 4$, $\widehat{C} = 45^\circ$.

19. На стороне AB треугольника ABC взята точка E, а на стороне BC – точка D так, что $|AE| = 2$, $|CD| = 1$. Прямые AD и CE пересекаются в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $BDOE$, если $|AB| = |BC| = 8$, $|AC| = 6$.

20. На плоскости лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого катеты имеют длину a. Поворотом в этой плоскости данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на угол 45° получается другой равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите площадь четырёхугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.

21. Длина радиуса вписанной в равнобедренный треугольник ABC окружности равна 4, $|AC| = |BC|$. На прямой AB взята точка D, удалённая от прямых AC и BC на расстояния 11 и 3 соответственно. Найдите $\cos\widehat{DBC}$.

22. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P – середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2|CD| = 3|RD|$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника APQ, если известно, что $|AD| = 2|BC|$.

23. В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны, причём $|CD| = 2|AB|$. На сторонах AD и BC выбраны соответственно точки P и Q таким образом, что $|DP| : |PA| = 2 : 1$, $|BQ| : |QC| = 3 : 4$. Найдите отношение площадей четырёхугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

24. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC таким образом, что $|BP| : |PQ| : |QC| = 1 : 2 : 3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника таким образом, что $|AR| : |RC| = 1 : 2$. Чему равно отношение площади четырёхугольника $PQST$ к площади треугольника ABC, если S и T – точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?

25. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, проведены биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $ADOE$, если $|BC| = a$, $|AC| = b$.

26. Длина высоты трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $|AO| : |OC| = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника OEC.

27. В прямоугольном треугольнике величина меньшего из углов равна α. Прямая, перпендикулярная гипотенузе, делит этот треугольник на две части, равные по площади. Найдите, в каком отношении она делит гипотенузу.

28. Через вершину A и середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $OMCD$.

29. В треугольнике ABC градусная мера угла A равна 45°, а угол C – острый. Из середины стороны BC на сторону AC опущен перпендикуляр MN. Найдите градусные меры углов треугольника ABC, если площади треугольников MNC и ABC относятся как $1 : 8$.

30. Точка O является центром окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. Известно, что отношение площадей треугольников AOC и ABC равно $k : k + 1$. Найдите величины острых углов треугольника ABC. При каких k задача имеет решение?

31. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, $|AD| = 2|DC|$. На стороне BC взята точка E таким образом, что площадь треугольника AED равна 1. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников ABO и OED, если площадь треугольника ABD равна 3.

32. На отрезке AB лежат точки C и D, причём точка C – между точками A и D. Точка M взята так, что перпендикулярны прямые AM и MD, а также перпендикулярны прямые CM и MB. Найдите площадь треугольника CMD, если известно, что $\widehat{CMD} = \alpha$, а площади треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.

33. Точка F лежит на продолжении за точку C стороны BC параллелограмма $ABCD$. Отрезок AF пересекает диагональ BD в точке E и сторону CD в точке G. Известно, что $|GF| = 3$, $|AE| = |EG| + 1$. Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника AED?

34. Отрезок BL является биссектрисой треугольника ABC. На продолжении его стороны AC за точку C взята точка M таким образом, что угол LBM прямой. Найдите площадь треугольника CBL, если известно, что площади треугольников ABL и CBM равны 10 и 15 соответственно.

35. Точки D и E являются соответственно серединами сторон AC и BC равностороннего треугольника ABC. Точка F лежит на отрезке CD, отрезки BF и DE пересекаются в точке M. Найдите длину отрезка MF, если известно, что площадь четырёхугольника $ABMD$ составляет пять восьмых площади треугольника ABC, а $|AB| = a$.

36. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки K и L таким образом, что $|BL| = |LC|$, $|BK| = |KL|$. Точки D и F лежат соответственно на продолжениях отрезков AL и AK за точки L и K так, что $|KF| = 2|AL|$, $|LD| = |AK|$. Вычислите отношение площадей четырёхугольника $KLDF$ и треугольника ABC, если известно, что $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{ACB} = \gamma$.

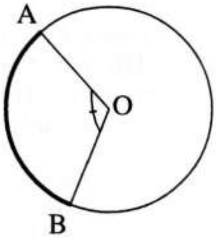
2. Окружности

2.1. Углы в окружностях

Теоретический материал

1. Центральные углы

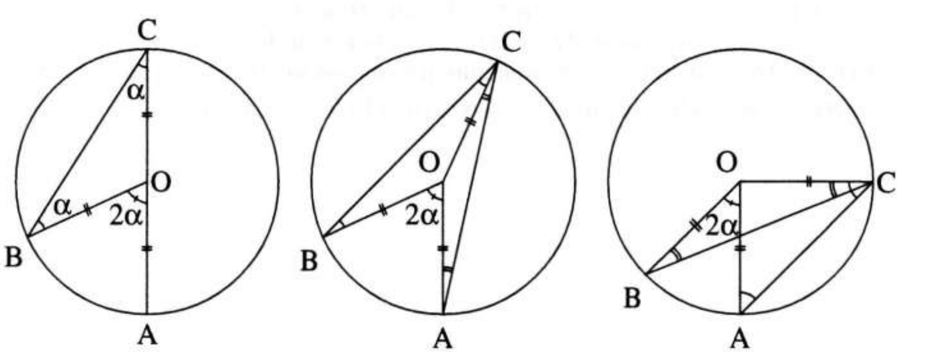
Центральный угол измеряется *дугой окружности, на которую он опирается:* $\widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$.



Этот факт вытекает из определения радианной меры угла. В самом деле, если взять окружность единичного радиуса, то радианная мера центрального угла будет в точности равна длине отсекаемой им дуги. Если же длина радиуса окружности не равна единице, то радианная мера центрального угла будет равна отношению длины дуги, отсекаемой этим углом, к длине радиуса окружности. Видно, что в любом случае есть взаимно однозначное соответствие между радианной мерой угла и длиной дуги окружности, поэтому в дальнейшем под словами **«мера дуги»** мы будем понимать отношение её длины к длине радиуса окружности.

2. Вписанные углы

*Вписанный угол, то есть угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, равен по величине половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности (*измеряется *половиной дуги окружности, на которую он опирается):* $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.



Для доказательства этого утверждения обозначим величину центрального угла AOB за 2α и рассмотрим три случая: центр окружности может лежать внутри вписанного угла, вне его или на одной из его сторон.

Если центр окружности попадает на сторону угла ACB (левый чертёж), то из того, что углы AOB и BOC смежные, вытекает, что $\widehat{BOC} = \pi - 2\alpha$, а из того, что треугольник BOC равнобедренный, имеем $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{BOC}) = \alpha$.

Если центр окружности попадает внутрь угла ACB (центральный чертёж), то в этом случае $\widehat{ACB} = \widehat{BCO} + \widehat{ACO}$. Треугольники BOC и AOC равнобедренные, поэтому

$$\widehat{BCO} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{BOC}),\ \widehat{ACO} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{AOC}) \implies$$

$$\implies \widehat{BCO} + \widehat{ACO} = \pi - \frac{1}{2}(\widehat{BOC} + \widehat{AOC}) = \pi - \frac{1}{2}(2\pi - \widehat{AOB}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \alpha.$$

Наконец, если центр окружности лежит вне угла ACB (правый чертёж), то тогда $\widehat{ACB} = \widehat{ACO} - \widehat{BCO}$. Треугольники BOC и AOC равнобедренные, значит,

$$\widehat{BCO} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{BOC}),\ \widehat{ACO} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{AOC}) \implies$$

$$\implies \widehat{ACO} - \widehat{BCO} = \frac{1}{2}(\widehat{BOC} - \widehat{AOC}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \alpha.$$

Утверждение доказано.

Отметим важные следствия этого факта:

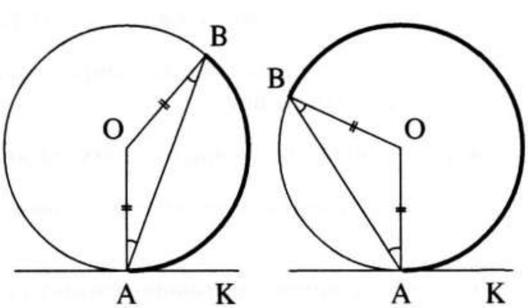
- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу (или на равные по величине дуги), равны.
- Если вписанные углы равны, то равны и дуги, на которые они опираются.
- Если две параллельные прямые пересекают окружность, то заключенные между ними дуги равны.
- Если две прямые пересекают окружность и заключенные между ними дуги равны, то прямые параллельны.

Первые два утверждения просто следуют из доказанного выше утверждения, а для доказательства двух последних достаточно вспомнить свойства и признаки параллельных прямых.

3. Углы между хордой и касательной

Угол между хордой и касательной равен по величине половине меры заключённой внутри него дуги окружности:

$$\widehat{BAK} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$



Для обоснования этого факта разберём два случая. Если угол BAK острый, то

$$\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BAK},$$

$$\widehat{AOB} = \pi - 2\cdot\widehat{OAB} = 2\cdot\widehat{BAK}.$$

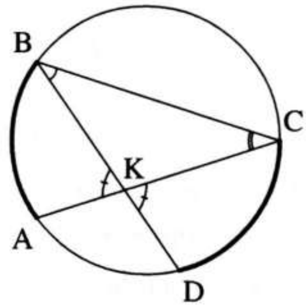
Поскольку $\widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$ (по свойству центрального угла), то $\widehat{BAK} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AB}$.

Если угол BAK тупой, то $\widehat{OAB} = \widehat{BAK} - \frac{\pi}{2}$, $\widehat{AOB} = \pi - 2\cdot\widehat{OAB} = 2\pi - 2\cdot\widehat{BAK}$. Но $\overset{\frown}{AB} = 2\pi - \widehat{AOB}$. Таким образом, $\widehat{BAK} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$. Третий случай, когда угол BAK – прямой, очевиден. Утверждение доказано.

4. Углы между пересекающимися хордами

Угол между пересекающимися хордами равен по величине полусумме мер дуг окружности, которые отсекают на окружности эти хорды:

$$\widehat{AKB} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}) = \widehat{ACB} + \widehat{CBD}.$$



Доказательство этого утверждения очевидно. Угол AKB является внешним углом треугольника CKB, поэтому его величина равна сумме величин углов ACB и CBD. Но, по свойству вписанных углов,

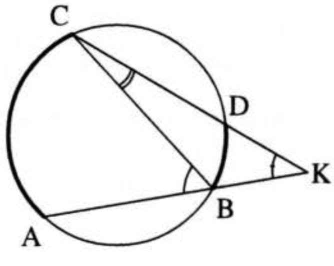
$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB},\ \widehat{CBD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}.$$

Утверждение доказано.

5. Углы между секущими

Угол между секущими, выходящими из одной точки, равен полуразности мер дуг окружности, заключенных между ними:

$$\widehat{AKC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}) = \widehat{ABC} - \widehat{BCD}.$$



Доказательство этого утверждения также весьма просто. Угол ABC является внешним углом треугольника CKB, поэтому его величина равна сумме величин углов BKC и BCK. Применяя свойство вписанных углов, получаем

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC},\ \widehat{BCK} = \widehat{BCD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}.$$

Отсюда и вытекает нужное нам соотношение.

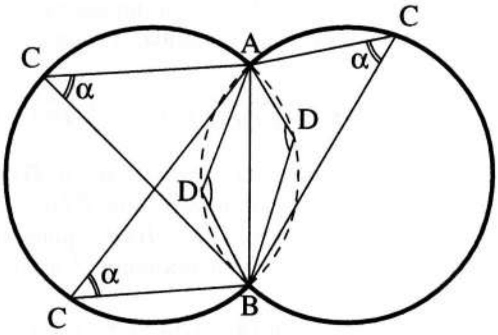
Приведём некоторые важные следствия рассмотренных утверждений:

- Синусы вписанных углов, опирающихся на одну и ту же хорду (или на равные хорды), равны.
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым.
- Если вписанный угол является прямым, то он опирается на диаметр окружности.
- Сумма величин противоположных углов выпуклого четырёхугольника, вписанного в окружность, равна π.
- Равные хорды отсекают равные дуги.

6. Теорема о четырёх точках

Укажем ещё один важный факт.

Геометрическим местом точек, из которых данный отрезок AB виден под углом заданной величины α, являются две дуги окружностей радиуса длины $\frac{|AB|}{2\sin\alpha}$, проходящих через точки A и B.



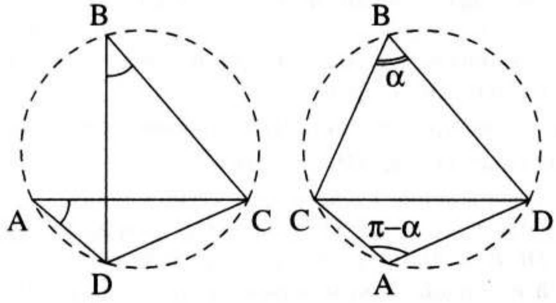
На чертеже эти дуги обозначены толстыми сплошными линиями, а произвольные точки этих дуг обозначены буквами C. Нетрудно догадаться, что *геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под углом величины $\pi - \alpha$, есть оставшиеся дуги этих окружностей*, на рисунке они обозначены пунктирными линиями, а произвольные точки этих дуг обозначены буквами D. Обоснование этого факта можно легко провести с помощью теоремы синусов и свойств вписанных углов.

Из этого утверждения непосредственно вытекает крайне важная для решения задач

Теорема о четырёх точках. Для того, чтобы точки A, B, C и D лежали на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух утверждений:

1. Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой CD и при этом $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

2. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CD и выполнено $\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = \pi$.



Наконец, рассмотрим ещё одну полезную теорему. Конфигурация, ею описываемая, встречается в случае, когда биссектриса внутреннего угла произвольного треугольника продолжается до пересечения с описанной около него окружностью.

Теорема. *Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, K – точка пересечения его диагоналей. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1. *AC – биссектриса угла BAD.*

2. $|BC| = |DC|$.

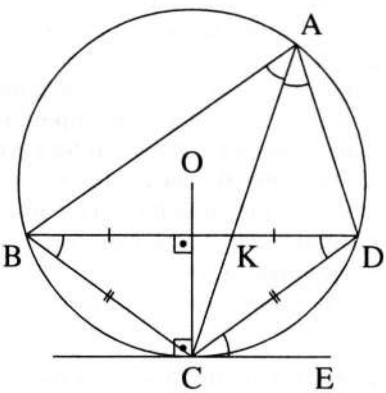
3. *Касательная, проведённая к окружности в точке C, параллельна прямой BD.*

4. *Треугольники KDC и DAC подобны (подобны и треугольники KBC и BAC).*

5. *Отрезок OC перпендикулярен отрезку BD (делит его пополам).*

Доказательство. Сначала докажем, что из утверждения 1 вытекают все остальные. По свойствам вписанных углов,

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \widehat{BDC},\ \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} = \widehat{DBC}.$$



Поскольку величины углов BAC и DAC равны, то равны и величины углов BDC и DBC. Стало быть, треугольник BDC равнобедренный, $|BC| = |DC|$, утверждение 2 вытекает из утверждения 1.

Далее, по свойству угла между касательной и хордой,

$$\widehat{DCE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} = \widehat{DBC} \overset{2.}{=} \widehat{BDC}.$$

Так как углы BDC и DCE внутренние накрест лежащие при прямых CE и BD, а их величины равны, то, по признаку параллельных прямых, $CE||BD$, то есть утверждение 3 следует из утверждения 1.

Справедливость утверждения 4 получается почти автоматически: мы уже доказали, что равны величины углов BAC, BDC, DAC и DBC, поэтому нужные нам пары треугольников подобны по двум углам.

Наконец, поскольку $CE||BD$, а $OC \perp CE$, то $OC \perp BD$. Треугольник OBD, очевидно, равнобедренный, поэтому из того, что $OC \perp BD$, вытекает, что точка пересечения отрезков OC и BD делит отрезок BD пополам.

Теперь докажем, что из каждого из утверждений 2. – 5. следует утверждение 1. Это завершит доказательство теоремы.

Если $|BC| = |DC|$, то треугольник BDC равнобедренный, $\widehat{BDC} = \widehat{DBC}$, но, по свойствам вписанных углов, $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$, $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$. Таким образом, $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$, т.е. утверждение 1 следует из утверждения 2.

Далее, если $CE||BD$, то углы DCE и CDB равны как внутренние накрест лежащие, а углы DCE и DBC равны в силу свойств вписанных углов и углов между касательной и хордой. Таким образом, треугольник BDC – равнобедренный, $|BD| = |DC|$. То есть утверждение 2 (и, по доказанному выше, утверждение 1) вытекает из утверждения 3.

Тот факт, что утверждение 1 следует из утверждения 4, практически очевиден: из подобия треугольников KDC и DAC вытекает равенство углов KDC и DAC, но, с другой стороны, углы KDC и KAB равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC.

Наконец, если $OC \perp BD$, то в силу того, что $OC \perp CE$, мы получаем $BD||CE$. Итак, из утверждения 5 вытекает утверждение 3, из которого, в свою очередь, вытекает и утверждение 1. Теорема доказана.

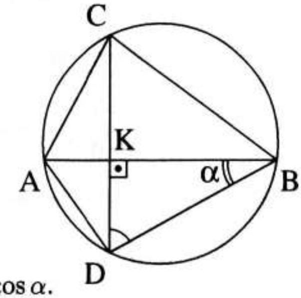
Примеры решения задач

Пример 1. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. Найдите длину диаметра этой окружности, если $AB \perp CD$, $|AD| = m$, $|BC| = n$.

Решение. Обозначим точку пересечения хорд AB и CD буквой K.

Первый способ

Обозначим величину угла ABD за α. Поскольку угол BKD прямой, то величина угла BDC равна $\pi/2 - \alpha$. Треугольники ABD и BCD оба вписаны в данную окружность, поэтому $R_{\triangle BCD} = R_{\triangle ABD} = R_0$. Запишем для этих треугольников теорему синусов:



$$2R_{\triangle ABD} = \frac{|AD|}{\sin \widehat{ABD}} \implies |AD| = 2R_0 \cdot \sin\alpha;$$

$$2R_{\triangle BCD} = \frac{|BC|}{\sin \widehat{BDC}} \implies |BC| = 2R_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R_0 \cdot \cos\alpha.$$

Наконец, возведём эти соотношения в квадрат и сложим:

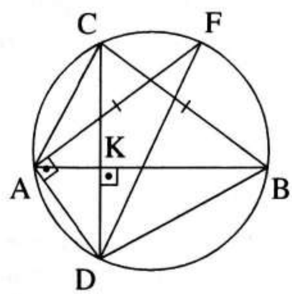
$$|AD|^2 + |BC|^2 = 4R_0^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = D_0^2.$$

Значит, искомая длина диаметра окружности равна $\sqrt{m^2 + n^2}$.

Второй способ

Применим свойство угла между пересекающимися хордами:

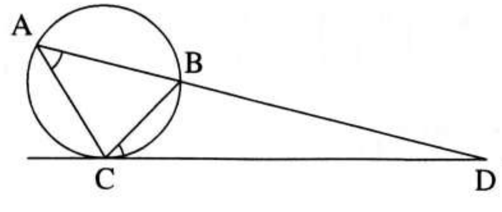
$$\frac{\pi}{2} = \widehat{AKD} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{BC} \implies \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = \pi.$$

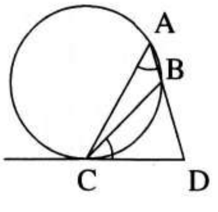


Отложим на окружности дугу AF, равную дуге BC (точка F берется так, чтобы точка A лежала между точками D и F). Тогда $|AF| = |BC|$, поскольку равные хорды стягивают равные дуги и наоборот, а, с другой стороны, $\overset{\frown}{DAF} = \pi$, значит, FD – диаметр. Отсюда получаем, что угол FAD – прямой. Наконец, из треугольника ADF по теореме Пифагора получаем, что $|FD| = \sqrt{m^2 + n^2}$.

Ответ. $\sqrt{m^2 + n^2}$.

Пример 2. Касательная, проведённая через вершину C вписанного в окружность γ треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB за вершину B в точке D. Известно, что длина радиуса окружности γ равна 2, $|AC| = \sqrt{12}$ и $\widehat{ADC} + \widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{BAC}$. Найдите длину секущей AD.





Решение. Обозначим $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$. Тогда $\widehat{ACB} = \pi - \alpha - \beta$ и, по свойству угла между касательной и хордой, $\widehat{BCD} = \alpha$. Далее заметим, что углы ABC и CBD – смежные, поэтому $\widehat{CBD} = \pi - \beta$, и из треугольника BCD находим $\widehat{ADC} = \pi - \widehat{CBD} - \widehat{BCD} = \beta - \alpha$. Теперь воспользуемся условием задачи:

$$\widehat{ADC} + \widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{BAC} \quad \Longrightarrow \quad \beta - \alpha + \pi - \alpha - \beta = 2\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

После этого применим к треугольнику ABC теорему синусов:

$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{ABC}} = 2R_{\triangle ABC} \quad \Longrightarrow \quad \sin\widehat{ABC} = \frac{|AC|}{2R_{\triangle ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, возможны два случая (оба они представлены на чертеже):

$$1.\ \widehat{ABC} = \beta = \frac{\pi}{3},\ \widehat{BAC} = \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{ADC} = \frac{\pi}{12},\ \widehat{ACD} = \frac{2\pi}{3};$$

$$2.\ \widehat{ABC} = \beta = \frac{2\pi}{3},\ \widehat{BAC} = \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{ADC} = \frac{5\pi}{12},\ \widehat{ACD} = \frac{\pi}{3}.$$

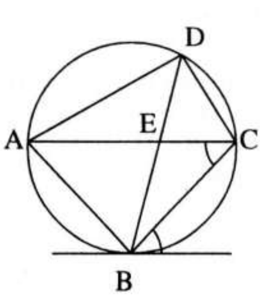
Из треугольника ADC по теореме синусов получаем

$$\frac{|AD|}{\sin\widehat{ACD}} = \frac{|AC|}{\sin\widehat{ADC}} \quad \Longrightarrow \quad |AD| = \frac{|AC|\sin\widehat{ACD}}{\sin\widehat{ADC}}.$$

Подставляя в эту формулу известную нам длину отрезка AC и найденные значения величин углов ACD и ADC, находим, что $|AD| = \dfrac{3}{\dfrac{\sqrt{6} \mp \sqrt{2}}{4}} = 3(\sqrt{6} \pm \sqrt{2})$.

Ответ. $3(\sqrt{6} \pm \sqrt{2})$.

Пример 3. В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причём касательная к окружности, проходящая через точку B, параллельна AC. Известно, что площадь треугольника DCB равна 16, $|EA| : |DA| = 3 : 4$. Найдите площадь треугольника BCE.



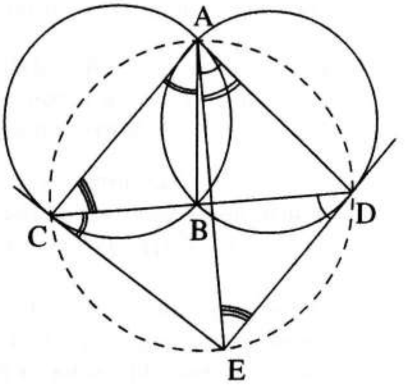
Решение. Поскольку отрезок AC параллелен касательной, проведённой через точку B, то, во-первых, углы BCA и BDC равны, а треугольники BCE и BDC подобны, и, во-вторых, DB – биссектриса угла ADC, а DE – биссектриса треугольника ACD. Пользуясь основным свойством биссектрисы треугольника и полученным подобием, имеем

$$\frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|EA|}{|DA|} = \frac{3}{4},\ \frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BDC}} = \left(\frac{|CE|}{|CD|}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Наконец, $S_{\triangle BCE} = \left(\dfrac{9}{16}\right)^2 \cdot S_{\triangle BDC} = \dfrac{9}{16} \cdot 16 = 9$.

Ответ. 9.

Пример 4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям, проведённые в точках C и D, пересекаются в точке E. Найдите длину отрезка AE, если $|AB| = 10$, $|AC| = 16$, $|AD| = 15$.



Решение. По свойству угла между касательной и хордой,

$$\widehat{BDE} = \widehat{DAB}, \quad \widehat{BCE} = \widehat{CAB}.$$

После этого заметим, что

$$\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{DAB}, \quad \widehat{CED} = \pi - \widehat{BCE} - \widehat{BDE},$$

стало быть, $\widehat{CAD} + \widehat{CED} = \pi$. Но поскольку сумма величин внутренних углов четырёхугольника равна 2π, то $\widehat{ACE} + \widehat{ADE} = \pi$. С учётом того что точки C и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB, они попадают и в разные полуплоскости относительно прямой AE. Таким образом, выполнены все условия теоремы о четырёх точках и вокруг четырёхугольника $ACED$ можно описать окружность.

Теперь, воспользовавшись свойствами вписанных углов, мы находим, что $\widehat{AED} = \widehat{ACD}$, $\widehat{DCE} = \widehat{DAE}$. Из этого вытекает подобие треугольников AED и ACB, что даёт нам

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|} \iff |AE| = \frac{|AC| \cdot |AD|}{|AB|} = 24.$$

Ответ. 24.

Задачи

1. В треугольнике ABC известно, что $|AB| = 6$, $|AB| = |BC|$. На стороне AB, как на диаметре, построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D так, что $|BD| : |DC| = 2 : 1$. Найдите длину стороны AC.

2. Найдите длину радиуса окружности, если вписанный в неё угол со сторонами, длины которых равны 1 и 2, опирается на дугу меры $2\pi/3$.

3. Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы CK треугольника ABC пересекает эту окружность в точке L, причём CL – диаметр данной окружности. Найдите отношение длин отрезков BL и AC, если известно, что $\sin\widehat{BAC} = 1/4$.

4. Диаметр AB окружности γ продолжили за точку B и на этом продолжении отметили точку C. Из точки C провели секущую, пересекающую окружность в точках D и E, считая от точки C. Известно, что $|DC| = 3$, градусные меры углов DAC и ACD равны 30° и 7° соответственно. Найдите длину диаметра окружности γ.

5. На катете AC прямоугольного треугольника ABC, как на диаметре, построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите площадь треугольника CKB, если $|AC| = b$, $\widehat{ABC} = \beta$.

6. В окружность, длина радиуса которой равна 7, вписан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Длины сторон AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD как 2:1, а $\widehat{ADC} = 120^\circ$. Найдите длины всех сторон четырёхугольника $ABCD$.

7. В треугольнике ABC $|AB| = 3$, $|AC| = 3\sqrt{7}$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Биссектриса угла ABC пересекается в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC. Найдите длину отрезка BD.

8. Диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около него. Вычислите длину диагонали AC, если $|BD| = 2$, $|AB| = 1$, $\widehat{ABD} : \widehat{DBC} = 4 : 3$.

9. В треугольнике ABC AN и CM – медианы, $\widehat{ABC} = 2\pi/3$. Окружность, проходящая через точки A, M и N, проходит также и через точку C. Длина радиуса этой окружности равна 7. Найдите площадь треугольника ABC.

10. На окружности γ расположено четыре точки A, B, C, D. Продолжение хорды AB за точку B и продолжение хорды CD за точку C пересекаются в точке E, причём $\widehat{AED} = \pi/3$. Величина угла ABD в три раза больше величины угла BAC. Докажите, что AD – диаметр окружности γ.

11. Вершины B, C и D четырёхугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O, которая пересекает сторону AB в точке F, а сторону AD – в точке E. Известно, что угол BAD прямой, длина хорды EF равна длине хорды FB, а также равны длины хорд BC, CD и ED. Найдите величину угла ABO.

12. На стороне AB треугольника ABC, как на диаметре, построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол величины $\pi/12$. Найдите величины углов треугольника ABC.

13. На сторонах острого угла с вершиной B взяты точки A и C. Одна окружность касается прямой AB в точке B и проходит через точку C. Вторая окружность касается прямой BC в точке B и проходит через точку A. Точка D – вторая общая точка этих окружностей. Известно, что $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CD| = d$. Найдите $|AD|$.

14. В окружность γ с центром в точке O вписан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Известно, что величина угла AOB в три раза больше величины угла COD. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью γ, если $|CD| = 10$.

15. Биссектрисы углов треугольника ABC, площадь которого равна 2, продолжены до точек пересечения с описанной около треугольника ABC окружностью, отличных от точек A, B, C. Эти точки образуют новый треугольник.

Найдите его площадь, если величины углов треугольника ABC равны $\pi/6$, $\pi/3$ и $\pi/2$.

16. В окружность, длина радиуса которой равна $2\sqrt{7}$, вписана трапеция $ABCD$, причём её основание AD является диаметром, а $\widehat{BAD} = \pi/3$. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P, такой, что $|AP| : |PD| = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника BPE.

17. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Проведена окружность с центром в точке D, проходящая через точку A и пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислите длину стороны AC, если известно, что $|AB| = c$, $|AM| = n$, $|AN| = m$.

18. Через точку C проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B. На большей из дуг AB взята точка D так, что $\sin\widehat{ACD}\cdot\sin\widehat{BCD} = 1/3$. Найдите расстояние от точки D до хорды AB, если известно, что $|CD| = 2$.

19. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, точка L лежит на отрезке AB и $|AL| = |LB|$. Описанная около треугольника ALO окружность пересекает прямую AC в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $\widehat{AOL} = \pi/4$, $|LK| = 8$, $|AK| = 7$.

20. В окружности проведены диаметр MN и параллельная ему хорда AB. Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q. Известно, что $|MP| = p$, $|MQ| = q$. Найдите длину диаметра MN.

21. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины A, пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Найдите длину отрезка BC, если длины отрезков AC и DC равны 1.

22. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите длину отрезка KC, если известно, что $|AK| = 6$, $|BC| = 4$.

23. Длина стороны AB треугольника ABC равна 3, E – точка пересечения продолжения биссектрисы CD треугольника ABC с описанной около него окружностью, $|BC| = 2\cdot|AC|$, $|DE| = 1$. Найдите длину стороны AC.

24. В треугольнике ABC $\widehat{BAC} = 5\pi/12$, $|AB| = c$, $|AC| = b$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\widehat{BAM} = \pi/6$. Продолжение прямой AM пересекает окружность, описанную вокруг треугольника, в точке N. Найдите длину отрезка AN.

25. Окружность с центром в точке O, лежащей на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC, касается его катетов AB и BC. Найдите длину AC, если известно, что $|AM| = 20/9$, $|AN| : |MN| = 6 : 1$, где M – точка касания AB с окружностью, а N – точка пересечения окружности с AC, расположенная между точками A и O.

26. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Радиус OA перпендикулярен радиусу OB, а радиус OC перпендикулярен радиусу OD. Длина перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD, равна 9, $|AD| = 2|BC|$. Найдите площадь треугольника AOB.

27. В треугольнике ABC $|AB| = 3$, $\widehat{ACB} = \arcsin\frac{3}{5}$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что $\widehat{ABC} = \widehat{CML}$, площадь четырёхугольника $ABLM$ равна 2, $|LM| = 1$. Найдите длину высоты треугольника KNC, опущенной из вершины C, и площадь этого треугольника.

28. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC, прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O. Известно, что точки C, D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC, величина угла DAC в три раза больше величины угла DAB, $|AC| : |AB| = 3 : 2$. Найдите косинус величины угла ACB.

29. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность, проведённая через точки M, N и C, касается стороны AB, а длина её радиуса равна $\sqrt{2}$. Найдите $\sin\widehat{ACB}$, если $|AC| = 2$.

30. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 4, а длина стороны AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проведённой через середины сторон треугольника ABC, лежит на биссектрисе угла C. Найдите длину стороны AC.

31. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, CA – биссектриса угла C, $|AB| = |AD|$, $\widehat{BAD} = 7\pi/9$, $\widehat{BEA} = 11\pi/18$. Найдите величину угла CDB.

32. В треугольнике ABC биссектриса AD угла A и биссектриса BL угла B пересекаются в точке F. При этом оказалось, что $\widehat{LFA} = \pi/3$.

    1. Найдите величину угла ACB.

    2. Зная, что $|AB| = 2$, $\widehat{CLD} = \pi/4$, найдите площадь треугольника ABC.

33. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. При этом оказалось, что $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, а площадь круга, описанного около треугольника BCD, равна $25\pi/4$.

    1. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

    2. Зная, что $|BC| = 3$, $|AC| = 4$, $\widehat{BAD} = \pi/2$, найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

34. В трапеции $KLMN$ $LM||KN$, $\widehat{KLM} = \pi/2$. Окружность проходит через точки M и N и касается прямой KL в точке A. Найдите площадь треугольника AMN, если известно, что $|LM| = l$, $|KN| = k$, $|MN| = a$.

35. Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной

окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. $|BK| = 1$, $|CK| = 4$, а тангенс величины угла CAB равен $1/\sqrt{15}$. Найдите площадь треугольника ABC.

36. В треугольнике ABC величина угла B равна $\pi/6$. Через точки A и B проведена окружность, длина радиуса которой равна 2, касающаяся прямой AC в точке A. Через точки B и C проведена окружность, длина радиуса которой равна 3, касающаяся прямой AC в точке C. Найдите $|AC|$.

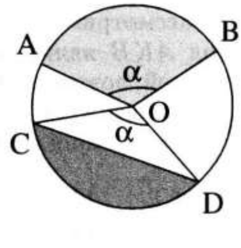
37. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке B, а вторую – в точке C. Касательная к первой окружности, проходящая через точку B, пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $|AB| = 5$ и $|AC| = 4$. Найдите длину отрезка CE и расстояние от точки A до центра окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.

2.2. Касательные, хорды, секущие

Теоретический материал

1. Площадь круга, сектора, сегмента

Приведём формулы площади круга, сектора и сегмента:

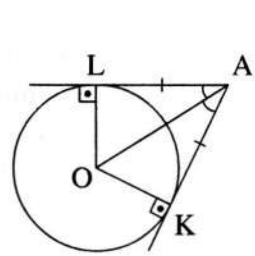


- *Площадь круга с длиной радиуса r равна πr^2.*
- *Площадь сектора величины α круга с длиной радиуса r (AOB) равна $\dfrac{r^2\alpha}{2}$.*
- *Площадь сегмента величины α круга с длиной радиуса r (CD) равна $\dfrac{r^2(\alpha - \sin\alpha)}{2}$.*

Отметим, что формулу для площади круга стоит принять за аксиому, из которой уже можно вывести формулы площади сектора и сегмента.

2. Касательные, проведённые из одной точки

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, имеют равную длину и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности: $|AL| = |AK|$, $\widehat{OAL} = \widehat{OAK}$.

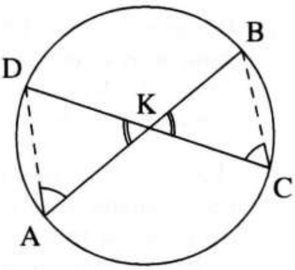


Доказательство этого утверждения тривиально: в силу того что AO – общая сторона треугольников OAK и OAL, углы OKA и OLA – прямые, а длины отрезков OK и OL равны (они оба являются радиусами окружности), прямоугольные треугольники OAK и OAL равны по гипотенузе и катету. Из этого следует, что $|AL| = |AK|$, $\widehat{OAL} = \widehat{OAK}$. Отметим, что фактически мы обосновали и такое утверждение: *центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе.*

3. Свойство пересекающихся хорд

Произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны:

$$|AK| \cdot |KB| = |CK| \cdot |KD|.$$

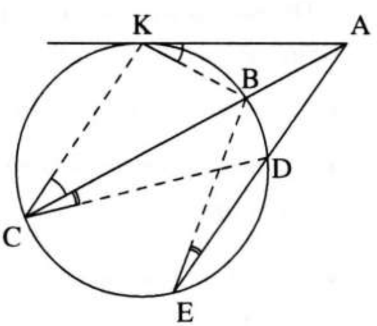


Для обоснования этого факта заметим, что углы BAD и BCD являются вписанными углами, опирающимися на одну дугу. Значит, они равны, поэтому с учётом того, что углы AKD и BKC равны как вертикальные, мы получаем, что треугольники AKD и CKB подобны (по двум углам). Из этого подобия вытекает $\frac{|AK|}{|CK|} = \frac{|KD|}{|KB|} \iff |AK| \cdot |KB| = |CK| \cdot |KD|$, что и требовалось доказать.

4. Свойство секущих

Произведение длины отрезка секущей на длину её внешней части для всех секущих, проведённых из одной точки, есть величина постоянная. Эта величина равна квадрату длины отрезка касательной, проведённой из этой же точки:

$$|AB| \cdot |AC| = |AD| \cdot |AE| = |AK|^2.$$



Рассмотрим произвольную секущую AC. Угол AKB является углом между касательной и хордой, поэтому он измеряется половиной дуги KB и равен углу KCB. Отсюда вытекает подобие треугольников AKB и ACK, что даёт нам

$$\frac{|AK|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AK|} \iff |AB| \cdot |AC| = |AK|^2.$$

Ясно, что для другой секущей AE, проведённой из точки A, можно повторить такие же рассуждения и получить тот же результат. Или можно действовать так: заметим, что углы BCD и BED равны в силу свойств вписанных углов, поэтому треугольники ACD и AEB подобны. Из этого подобия вытекает

$$\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|AB|} \iff |AB| \cdot |AC| = |AD| \cdot |AE|.$$

Утверждение доказано.

5. Свойство описанного около окружности четырёхугольника

В любом описанном около окружности четырёхугольнике суммы длин противоположных сторон равны, а центр этой окружности лежит на пересечении его биссектрис.

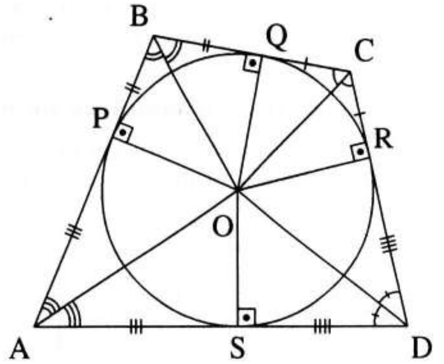
Для доказательства этого факта воспользуемся теоремой о равенстве длин отрезков касательных. Она даёт нам следующие соотношения:

$$|AP| = |AS|, \quad |BP| = |BQ|,$$

$$|CQ| = |CR|, \quad |DR| = |DS|,$$

$$\angle OAS = \angle OAP, \quad \angle OBP = \angle OBQ,$$

$$\angle OCQ = \angle OCR, \quad \angle ODR = \angle ODS.$$



Отсюда сразу вытекает, что центр вписанной в четырёхугольник окружности лежит на пересечении его биссектрис. Получить равенство сумм длин противоположных сторон тоже совсем нетрудно:

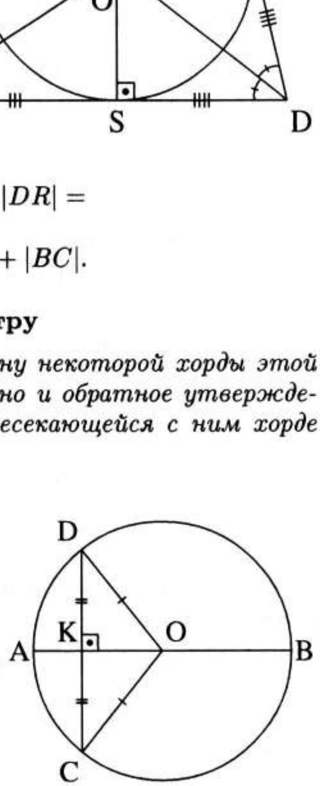
$$|AB| + |CD| = |AP| + |BP| + |CR| + |DR| =$$

$$= |AS| + |DS| + |BQ| + |CQ| = |AD| + |BC|.$$

6. Свойство хорды, перпендикулярной диаметру

Если диаметр окружности проходит через середину некоторой хорды этой окружности, то он перпендикулярен этой хорде. Верно и обратное утверждение: если диаметр окружности перпендикулярен пересекающейся с ним хорде этой окружности, то он делит её пополам.

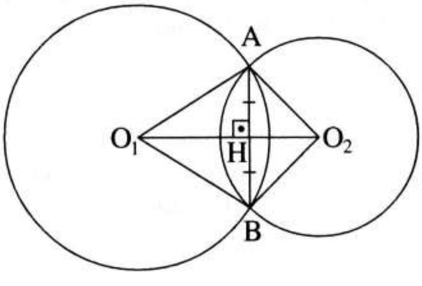
Доказать эти утверждения совсем нетрудно: если известно, что некоторая хорда делится диаметром окружности пополам, то есть $|CK| = |DK|$, то треугольники COK и DOK равны по трем сторонам, из чего вытекает равенство углов CKO и DKO. Но эти углы смежные, поэтому они оба прямые, стало быть, $AB \perp CD$.

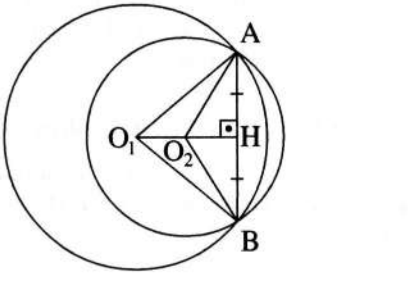


Если же известно, что некоторая хорда перпендикулярна диаметру, то есть $AB \perp CD$, то прямоугольные треугольники COK и DOK равны по гипотенузе и катету, из чего следует равенство длин отрезков CK и DK.

7. Свойство общей хорды двух пересекающихся окружностей

Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна прямой, содержащей их центры, и делится этой прямой пополам.

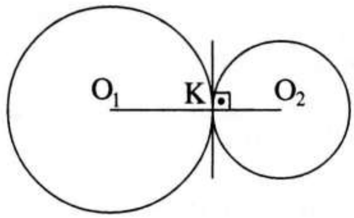


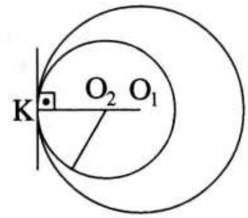


Обосновать этот факт просто: поскольку $|AO_1| = |BO_1|$, а $|AO_2| = |BO_2|$, то обе точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB, поэтому $O_1O_2 \perp AB$, $|AH| = |BH|$.

8. Свойства касающихся окружностей

Если две окружности касаются (внутренним или внешним образом), то их центры и точка касания лежат на одной прямой.



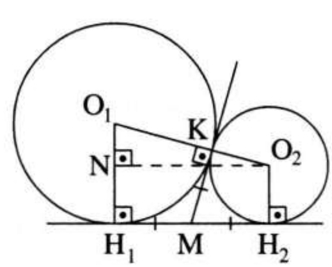


Справедливость этого утверждения вытекает из того, что радиус окружности, соединяющий её центр с точкой её касания с некоторой прямой, перпендикулярен этой прямой.

Если две окружности касаются внешним образом, то длина отрезка их общей внешней касательной, заключённого между точками касания, равна удвоенному корню из произведения длин их радиусов, а их общая внутренняя касательная делит его пополам:

$$|H_1H_2| = 2\sqrt{|O_1H_1| \cdot |O_2H_2|}, \quad |H_1M| = |H_2M|.$$

Докажем это утверждение. Положим $|O_1H_1| = R$, $|O_2H_2| = r$, будем считать, что $R \geqslant r$. Проведём отрезок O_2N, параллельный H_1H_2. Тогда $NH_1H_2O_2$ – прямоугольник,



$$|H_1H_2| = |NO_2|, \ |NH_1| = |O_2H_2| = r,$$

стало быть, $|O_1N| = |O_1H_1| - |NH_1| = R - r$. Также заметим, что в силу того, что точки O_1, O_2 и K лежат на одной прямой,

$$|O_1O_2| = |O_1K| + |O_2K| = R + r.$$

Записывая теорему Пифагора для треугольника O_1O_2N, получаем

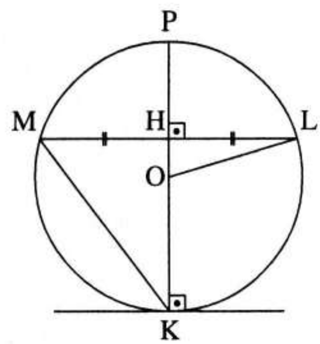
$$|H_1H_2| = |NO_2| = \sqrt{|O_1O_2|^2 - |O_1N|^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

После этого заметим, что в силу свойства касательных, проведённых из одной точки к окружности, $|KM| = |H_1M|$, $|KM| = |H_2M|$, поэтому $|H_1M| = |H_2M|$. Утверждение доказано.

Примеры решения задач

Пример 1. Касательная к окружности (K – точка касания) параллельна её хорде LM. Известно, что $|LM| = 6$, $|KM| = 5$. Найдите длину радиуса этой окружности.

Решение. Проведём диаметр этой окружности, проходящий через точку K. Поскольку K – точка касания, то он будет перпендикулярен касательной из условия задачи, а поскольку хорда LM ей параллельна, то он будет перпендикулярен и этой хорде. Обозначим точку пересечения хорды LM с этим диаметром буквой H, центр окружности обозначим буквой O, а второй конец этого диаметра обозначим буквой P.



Так как $|LM| = 6$, а хорда, перпендикулярная диаметру, делится им пополам, то $|LH| = |HM| = 3$. Из прямоугольного треугольника MKH находим

$$|KH|^2 = |KM|^2 - |HM|^2 = 16 \quad \Longrightarrow \quad |KH| = 4.$$

Теперь обозначим длину радиуса окружности буквой R, тогда

$$|KP| = 2R, \quad |HP| = |KP| - |KH| = 2R - 4.$$

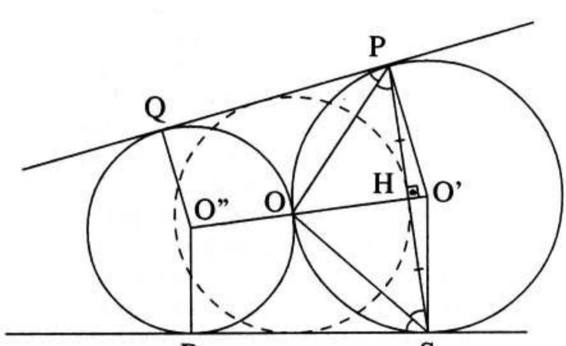
Применяя теорему о произведении длин отрезков пересекающихся хорд, получаем

$$|LH| \cdot |HM| = |KH| \cdot |HP| \quad \Longrightarrow \quad 9 = 4 \cdot (2R - 4) \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{25}{8}.$$

Ответ. $\dfrac{25}{8}$.

Пример 2. Две окружности, длины радиусов которых равны 4 и 3, касаются друг друга внешним образом. К этим окружностям проведены общие касательные PQ и RS таким образом, что точки P и S принадлежат большей окружности, а точки Q и R принадлежат меньшей окружности. Найдите длину радиуса окружности, касающейся отрезков RS, SP и PQ.

Решение. Центр окружности, касающейся отрезков RS, SP и PQ, лежит на пересечении биссектрис углов RSP и SPQ. Этот факт и будет отправной точкой решения.



Обозначим центры окружностей из условия задачи буквами O' и O'' (O' – центр окружности большего радиуса). Рассмотрим прямоугольную трапецию $O'PQO''$. Поскольку окружности касаются друг друга, то $O'O'' = 7$,

$$\cos \widehat{PO'O''} = \frac{|O'P| - |O''Q|}{|O'O''|} = \frac{1}{7}, \; \sin \widehat{PO'O''} = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Теперь строго обоснуем некоторые утверждения, которые почти очевидны из-за симметрии. Пусть L – точка пересечения прямых PQ и RS. Тогда обе окружности вписаны в угол PLS, поэтому точки O' и O'' лежат на биссектрисе этого угла, $|LP| = |LS|$. Значит, треугольник PLS равнобедренный, его биссектриса, проведённая из вершины L, является также его медианой и высотой. Это означает, что прямая $O'O''$ перпендикулярна отрезку PS и проходит через его середину (обозначим её буквой H).

С другой стороны, углы RSP и SPQ равны. Значит, если обозначить буквой O точку пересечения их биссектрис, то углы OSP и OPS также равны. Это означает, что $|OP| = |OS|$, так что точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку PS, то есть на прямой $O'O''$, и, кроме того, точка H есть точка касания отрезка PS и окружности, длину радиуса которой мы ищем. Это легко доказать от противного. Пусть эта точка касания не есть точка H, тогда обозначим её K. Треугольники OKP и OKS равны (по гипотенузе и катету), значит, $|KP| = |KS|$. Противоречие с тем, что K – не середина PS.

Теперь осталось немного посчитать и найти искомую величину $|OH|$:

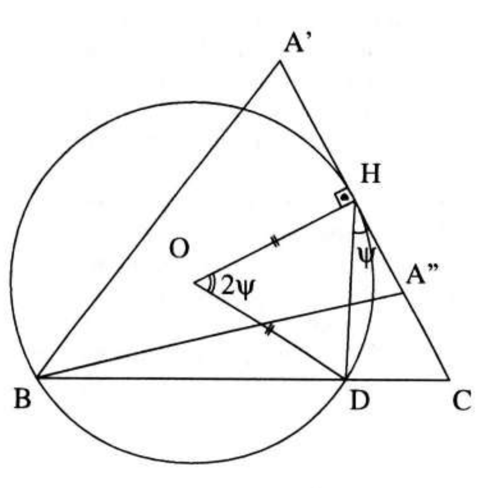
$$\operatorname{tg}\widehat{OPH} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{O'PH}\right)\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\widehat{PO'H} = \frac{\sin\widehat{PO'H}}{1+\cos\widehat{PO'H}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$|PH| = |PO'|\cdot\sin\widehat{P'OH} = \frac{16\sqrt{3}}{7},\ |OH| = |PH|\cdot\operatorname{tg}\widehat{OPH} = \frac{16\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{24}{7}.$$

Ответ. $\dfrac{24}{7}$.

Пример 3. В треугольнике ABC даны $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \beta$, $|AC| = b$. На стороне BC взята точка D так, что $|BD| = 3|DC|$. Через точки B и D проведена окружность, касающаяся стороны AC или её продолжения за точку A. Найдите длину радиуса этой окружности.

Решение. Для наглядности на чертеже отображены оба случая: точка касания прямой AC с окружностью (обозначим её буквой H) может как попадать на отрезок AC, так и не попадать. Видно, что в этой задаче сразу даны базовые элементы треугольника ABC, просят же найти достаточно экзотическую величину. Искать её будем из равнобедренного треугольника DHO. Надо найти величину угла DOH и длину отрезка DH. Будем действовать последовательно и сначала определим длины сторон треугольника ABC, записав для него теорему синусов:



$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{|AB|}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BAC}} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{b}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{|AB|}{\sin\beta} = \frac{|BC|}{\sin\alpha} \quad\Longrightarrow\quad |AB| = \frac{b\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\ |BC| = \frac{b\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Для сокращения записи полученную нами длину стороны BC обозначим буквой Q. Далее, поскольку $|BD| = 3|DC|$, то $|DC| = \frac{1}{4}Q$. Применяя теорему о произведении длины секущей на длину её внешней части, получаем

$$|CH|^2 = |CD|\cdot|BC| \quad\Longrightarrow\quad |CH|^2 = \frac{Q}{4}\cdot Q \quad\Longrightarrow\quad |CH| = \frac{Q}{2}.$$

Теперь из треугольника CDH, используя теорему косинусов, найдём длину стороны DH и величину угла CHD:

$$|DH|^2 = |CD|^2 + |CH|^2 - 2\cdot|CD|\cdot|CH|\cdot\cos\widehat{DCH} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad |DH|^2 = \frac{Q^2}{16} + \frac{Q^2}{4} - \frac{Q^2\cos\beta}{4} \quad\Longrightarrow\quad |DH| = \frac{Q}{4}\cdot\sqrt{5-4\cos\beta};$$

$$|CD|^2 = |CH|^2 + |DH|^2 - 2\cdot|CH|\cdot|DH|\cdot\cos\widehat{CHD} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{Q^2}{16} = \frac{Q^2}{4} + \frac{Q^2}{16} + \frac{Q^2}{4} - \frac{Q^2\cos\beta}{4} - \frac{Q^2\cdot\sqrt{5-4\cos\beta}}{4}\cos\widehat{CHD} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \cos\widehat{CHD} = \frac{2-\cos\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}} \quad\Longrightarrow\quad \sin\widehat{CHD} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\beta}{5-4\cos\beta}} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}}.$$

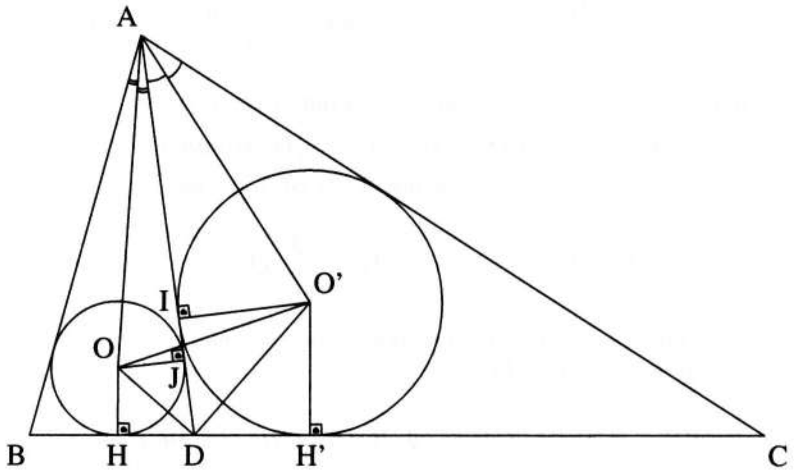
Наконец, пользуясь свойством угла, образованного касательной и хордой, имеем $\widehat{DOH} = 2\widehat{CHD}$, где O – центр окружности. С учётом этого из равнобедренного треугольника DOH находим длину радиуса окружности:

$$R = \frac{\frac{1}{2}|DH|}{\sin\frac{1}{2}\widehat{DOH}} = \frac{|DH|}{2\sin\widehat{CHD}} = \frac{\frac{Q}{4}\cdot\sqrt{5-4\cos\beta}}{2\frac{\sin\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}}} = \frac{Q(5-4\cos\beta)}{8\sin\beta}.$$

Подставляя в эту формулу полученное ранее выражение для Q, получаем ответ. Из решения видно, что ответ не зависит от того, где находится точка A.

Ответ. $\dfrac{b\sin\alpha(5-4\cos\beta)}{8\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$.

Пример 4. На стороне BC треугольника ABC взята точка D такая, что $\widehat{CAD} = 2\cdot\widehat{BAD}$. Длины радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACD и ABD, равны соответственно 8 и 4, расстояние между точками касания этих окружностей с прямой BC равно $\sqrt{129}$. Найдите $|AD|$.



Решение. Обозначим центр окружности, длина радиуса которой равна 4, буквой O, центр второй окружности обозначим буквой O'. Точки их касания с отрезком BC обозначим как H и H' соответственно, а точки их касания с отрезком AD обозначим буквами J и I. Выразим длину отрезка IJ двумя способами.

Рассмотрим прямоугольные треугольники AOJ и $AO'I$. Обозначим величину угла BAD за 2α, тогда, по условию, величина угла CAD равна 4α. Точки O и O' – центры вписанных в треугольники ABD и ACD окружностей, поэтому AO и AO' – биссектрисы углов BAD и CAD, стало быть, $\widehat{OAD} = \alpha$, $\widehat{O'AD} = 2\alpha$ и

$$|AJ| = |OJ| \operatorname{ctg} \widehat{OAJ} = 4 \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$|AI| = |O'I| \operatorname{ctg} \widehat{O'AI} = 8 \operatorname{ctg} 2\alpha = 8 \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = 4 \operatorname{ctg} \alpha - \frac{4}{\operatorname{ctg} \alpha} < 4 \operatorname{ctg} \alpha = |AJ|.$$

Значит, $|DI| > |DJ|$. Теперь заметим, что DO – биссектриса угла ADB, а DO' – биссектриса угла ADC. Известно, что угол между биссектрисами смежных углов прямой, то есть $\widehat{ODO'} = \pi/2$. Поэтому $\widehat{ODJ} = \widehat{DO'I}$. Следовательно, треугольники ODJ и $DO'I$ подобны, из чего вытекает

$$\frac{|OJ|}{|DJ|} = \frac{|DI|}{|O'I|} \implies |DJ| \cdot |DI| = 32.$$

С другой стороны, $|DH| = |DJ|$ и $|DH'| = |DI|$ по теореме об отрезках касательных, проведённых из одной точки к окружности. С учётом этого мы имеем $|DJ| + |DI| = |DH| + |DH'| = |HH|' = \sqrt{129}$. Решая полученную систему уравнений, находим

$$|DJ| = \frac{\sqrt{129} - 1}{2}, \ |DI| = \frac{\sqrt{129} + 1}{2}.$$

Поэтому $|IJ| = |DI| - |DJ| = 1$. С другой стороны, $|IJ| = |AJ| - |AI|$ и получаем

$$4 \operatorname{ctg} \alpha - 8 \operatorname{ctg} 2\alpha = 1 \implies \frac{8 - 8 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{2 \operatorname{ctg} \alpha} + 4 \operatorname{ctg} \alpha = 1 \implies \operatorname{ctg} \alpha = 4.$$

Таким образом,

$$|DJ| = \frac{\sqrt{129}-1}{2}, \quad |AJ| = 4\operatorname{ctg}\alpha = 16, \quad |AD| = |AJ| + |DJ| = \frac{31+\sqrt{129}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{31+\sqrt{129}}{2}$.

Задачи

1. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC, как на диаметре, построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D. Найдите расстояние от её центра до точки A, если $|AD| = \sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 2\pi/3$.

2. В треугольнике ABC $|AB| = 4$, градусные меры углов BAC и ABC равны 30° и 130° соответственно. На стороне AB, как на диаметре, построен круг. Найдите площадь части этого круга, лежащей внутри треугольника ABC.

3. Из точки M на окружности проведены три хорды MN, MP и MQ таким образом, что $|MN| = 1$, $|MP| = 6$, $|MQ| = 2$. При этом величины углов NMP и PMQ равны. Найдите длину радиуса этой окружности.

4. В треугольнике ABC с периметром $2p$ длина стороны AC равна a и величина острого угла ABC равна α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK.

5. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается его сторон AB, BC и AC в точках M, D и N соответственно. Вычислите длину отрезка MD, если известно, что $|NA| = 2$, $|NC| = 3$, $\widehat{BCA} = \pi/3$.

6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E. Найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A, если $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, а точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

7. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Их общая касательная касается первой окружности в точке B, а второй – в точке C. Прямая, проходящая через точки A и B, пересекает вторую окружность в точке D. Известно, что $|AB| = 5$, $|AD| = 4$. Найдите $|CD|$.

8. В окружности, длина радиуса которой равна 4, проведены хорда AB и диаметр AK, причём $\widehat{BAK} = \pi/8$. В точке B проведена касательная к этой окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C. Найдите длину медианы AM треугольника ABC.

9. В треугольнике ABC на стороне AC, как на диаметре, построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке M и сторону BC в точке N. Известно, что длина отрезка AB равна 3, длина отрезка AC равна 2, $|AM| : |MB| = 2 : 3$. Найдите длину отрезка AN.

10. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E. Найдите величину угла CDB, если $|AD| = 5$, $|AC| = 2\sqrt{7}$, $|BE| = 4$, $|BD| : |CE| = 3 : 2$.

11. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, длина радиуса которой равна 2. Угол DAB прямой, $|AB| = 5$, $|BC| = 6$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

12. Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, касается стороны BC в точке M и пересекает стороны AC и AB в точках L и K соответственно. Найдите отношение $|AC| : |AB|$, если известно, что длина отрезка CL в два раза больше длины отрезка BK, $|CM| : |BM| = 3 : 2$.

13. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причём величина угла ADC равна $2\pi/3$. Найдите длину радиуса окружности, касающейся отрезков AD, DC и дуги AC, если $|OC| = 2, |OD| = \sqrt{3}$.

14. Две окружности с радиусами разной длины касаются в точке A одной и той же прямой и расположены по разные стороны от неё. Отрезок AB – диаметр окружности меньшего радиуса. Из точки B проведены две прямые, касающиеся окружности большего радиуса в точках M и N. Прямая, проходящая через точки M и A, пересекает меньшую окружность в точке K. Известно, что $|MK| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\widehat{BMA} = \pi/12$. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных BM, BN и той дугой MN большей окружности, которая не содержит точку A.

15. Две окружности, длины радиусов которых относятся как $(9-4\sqrt{3}) : 1$, касаются друг друга внутренним образом. Проведены две равные по длине хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найдите величину угла между этими хордами.

16. Две окружности, длины радиусов которых равны 6 и 8, пересекаются в точках A и B. Через центры O_1 и O_2 этих окружностей проведена прямая; C_1 и C_2 – две из четырёх точек пересечения этой прямой с окружностями, причём точка C_1 лежит на окружности с центром O_1, а длина отрезка C_1C_2 больше 20. Найдите расстояние между точками O_1 и O_2, если произведение площадей треугольников C_1O_1A и C_2O_2B равно 336.

17. В круге, длина радиуса которого равна 1, проведены хорды AB и BC. Найдите площадь части этого круга, лежащей внутри угла ABC, если угол BAC острый, $|AB| = \sqrt{2}$ и $|BC| = 10/7$.

18. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника KLM, равна R. Через вершину L проведена прямая, перпендикулярная стороне KM. Эту прямую пересекают в точках A и B серединные перпендикуляры к сторонам KL и LM. Известно, что $|AL| = a$. Найдите $|BL|$.

19. В окружности, длина радиуса которой равна R, проведены хорда AB и диаметр AC. Хорда PQ, перпендикулярная диаметру AC, пересекает хорду AB в точке M. Известно, что $|AB| = a$, $|PM| : |MQ| = 1 : 3$. Найдите длину отрезка AM.

20. Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E таким образом, что $|CE| = |DE|$. Через точки B и C проведены две касательные к этой окружности, которые пересекаются в точке K. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника CKM, если $|AB| = 10$, $|AE| = 1$.

21. Дана окружность с центром в точке O, длина радиуса которой равна 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности. Величина угла OAK равна $\pi/3$. Найдите длину радиуса окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

22. Площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$, а длина радиуса вписанной в него окружности равна $\sqrt{15}/3$. Окружность, длина радиуса которой равна $5\sqrt{15}/9$, касается лучей, образующих угол ACB, и вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите $\operatorname{tg}\widehat{ABC}$, если наибольшей из сторон треугольника ABC является сторона AC.

23. В треугольник ABC вписана окружность γ. Касательная к этой окружности, параллельная стороне BC, пересекает сторону AB в точке D и сторону AC в точке E. Периметры треугольников ABC и ADE равны соответственно 40 и 30, $\widehat{ABC} = 2\beta$. Найдите длину радиуса окружности γ.

24. В угол с вершиной A, величина которого равна $\pi/3$, вписана окружность с центром в точке O. К этой окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C. Отрезок BC пересекается с отрезком AO в точке M. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, если $|AM| : |MO| = 2 : 3$, $|BC| = 7$.

25. Две окружности, длины радиусов которых равны R и r, пересекаются в точках A и B и касаются некоторой прямой в точках C и D; N – точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите:

    1) длину радиуса окружности, описанной около треугольника ACD;

    2) отношение длин высот треугольников NAC и NAD, опущенных из вершины N.

26. В треугольнике ABC $\widehat{BAC} = \alpha$, $|AC| = b$. Вписанная в него окружность касается сторон AB и BC в точках M и N, биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке K. Найдите расстояние от точки K до прямой AC.

27. В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найдите сумму длин второй и третьей окружностей, если длина радиуса первой равна 1, а площадь круга, ограниченного четвёртой окружностью, равна 64π.

28. На стороне OK острого угла KOM взята точка L (L между O и K). Окружность проходит через точки K и L и касается луча OM в точке M. На дуге этой окружности LM, не содержащей точку K, взята точка N. Расстояния от точки N до прямых OM, OK и KM равны m, k и l соответственно. Найдите расстояние от точки N до прямой LM.

29. На прямой взяты три точки L, M и N (M между L и N, $|LM| \neq |MN|$). На отрезках LM, MN и LN, как на диаметрах, построены полуокружности, серединами которых являются точки A, B и C соответственно. Точка C лежит по одну сторону, а точки A и B – по другую сторону от прямой LN. Найдите отношение площади фигуры, ограниченной этими тремя полуокружностями, к площади треугольника ABC.

30. В окружности γ проведены хорды KL, MN, PS. Хорды KL и PS пересекаются в точке C, хорды KL и MN пересекаются в точке A, а хорды MN и PS пересекаются в точке B, причём $|AL| = |CK|$, $|AM| = |BN|$, $|BS| = 5$, $|BC| = 4$. Найдите длину радиуса окружности γ, если величина угла BAC равна $\pi/4$.

31. Дана окружность, длина диаметра MN которой равна 16. На касательной к этой окружности в точке M отложен отрезок MP, длина которого больше 15. Из точки P проведена вторая касательная к окружности, пересекающая прямую MN в точке Q. Найдите площадь треугольника MPQ, если его периметр равен 72.

32. На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$), как на диаметре, построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, H – точка пересечения высот треугольника ABC, $|AD| = a$, $|MD| = b$. Найдите $|AH|$.

33. Три круга с центрами в точках P, Q и R попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Известно, что $\widehat{PQR} = 2\arcsin(1/3)$, а сумма длин радиусов всех трёх кругов равна $12\sqrt{2}$. Какую наибольшую длину может иметь окружность, проходящая через точки A, B, C?

34. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его основания AC в точке D и боковой стороны AB в точке E. Точка F – середина стороны AB, а точка G – точка пересечения окружности и отрезка FD, отличная от D. Касательная к окружности, проходящая через точку G, пересекает сторону AB в точке H. Найдите величину угла BCA, если известно, что $|FH| : |HE| = 2 : 3$.

35. Из точки A проведены к окружности две касательные (M и N – точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN – в точке P. Известно, что $|AB| : |BC| = 2 : 3$. Найдите $|AP| : |PC|$.

36. Две окружности с центрами A и B и длинами радиусов соответственно 2 и 1 касаются друг друга. Точка C лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей, и находится на расстоянии $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ от середины отрезка AB. Найдите площадь S треугольника ABC, если известно, что $S > 2$.

3. Четырёхугольники и многоугольники

3.1. Параллелограммы

Теоретический материал

Ломаной $A_1A_2A_3...A_n$ называется фигура, состоящая из точек A_1, A_2, ... , A_n (*вершин ломаной*) и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, ... , $A_{n-1}A_n$ (*звеньев ломаной*).

Простым многоугольником называется замкнутая ломаная без самопересечений, соседние звенья которой не лежат на одной прямой.

Поскольку в элементарной геометрии рассматриваются только простые многоугольники, в дальнейшем по умолчанию под многоугольником будет подразумеваться простой многоугольник. Случаи, когда имеется в виду многоугольник с самопересечениями, будут оговариваться отдельно.

Определение. *Параллелограммом* называется четырёхугольник, противоположные стороны которого **попарно параллельны**.

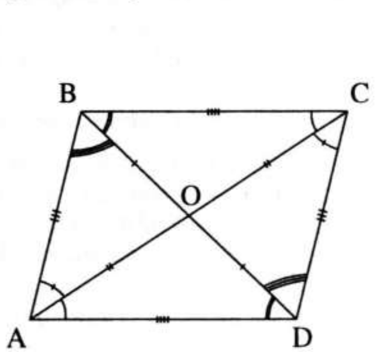
Заметим, что параллелограмм является *выпуклым* четырёхугольником (то есть лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону), его диагонали пересекаются и (как диагонали любого выпуклого многоугольника) лежат внутри него.

1. Свойства параллелограмма

Если четырёхугольник является параллелограммом, то

1. *Величины его противоположных углов равны.*
2. *Длины его противоположных сторон равны.*
3. *Его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*
4. *Треугольники, на которые он разбит диагоналями, имеют равные площади.*
5. *Сумма квадратов длин его диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон.*

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, точку пересечения его диагоналей обозначим буквой O. Поскольку $AB||CD$ и $AD||BC$, то в силу свойств внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых



$$\widehat{ACB} = \widehat{CAD},\ \widehat{ACD} = \widehat{CAB},$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{BDC},\ \widehat{CBD} = \widehat{ADB}.$$

Из этого вытекает, что, во-первых,

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{CBD} = \widehat{CDB} + \widehat{ADB} = \widehat{ADC},$$

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = \widehat{ACD} + \widehat{ACB} = \widehat{BCD}$$

и, во-вторых, треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников. Значит, $|AB| = |CD|$ и $|BC| = |AD|$. Но тогда треугольники

AOB и COD также равны по второму признаку равенства треугольников, поэтому $|AO| = |OC|$ и $|BO| = |OD|$. Из этих равенств с учётом того, что синусы величин углов AOB, BOC, COD и AOD равны (так как эти углы смежные/вертикальные), мы получаем и равенство площадей всех треугольников, на которые параллелограмм разбит своими диагоналями.

Последнее свойство проще всего доказать так: углы ABC и BAD являются внутренними односторонними при параллельных прямых BC, AD и секущей AB, поэтому сумма их величин равна π, а косинусы их величин противоположны по знаку. Записывая теорему косинусов для треугольников ABC и BAD, учитывая, что $|AD| = |BC|$, $|AB| = |CD|$, и складывая полученные соотношения, получаем

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AD|\cdot\cos\widehat{BAD} =$$

$$= |CD|^2 + |AD|^2 + 2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC},$$

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad |AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2.$$

Свойства параллелограмма доказаны.

2. Признаки параллелограмма

Если для четырёхугольника выполнено хотя бы одно из утверждений:

1. *Величины его противоположных углов равны.*
2. *Длины его противоположных сторон равны.*
3. *Две его противоположные стороны параллельны и равны по длине.*
4. *Его диагонали делятся пополам точкой их пересечения,*

то он является параллелограммом.

В дополнение к этим четырём основным признакам параллелограмма докажем ещё два вспомогательных признака.

Если для выпуклого четырёхугольника выполнено хотя бы одно из утверждений:

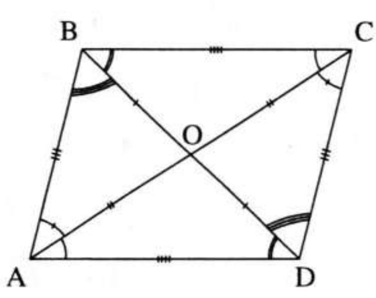
а) *Треугольники, на которые он разбит диагоналями, имеют равные площади.*

б) *Сумма квадратов длин его диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон,*

то он является параллелограммом.

Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$.

а) Пусть площади треугольников AOB, BOC, COD и DOA равны. Запишем формулы площади для треугольников AOB и BOC:



$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|OB|\cdot\sin\widehat{AOB},$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}\cdot|BO|\cdot|OC|\cdot\sin\widehat{BOC}.$$

Теперь заметим, что синусы смежных углов AOB и BOC равны, и почленно поделим друг на друга полученные соотношения. Получим $|AO| = |OC|$. Аналогично доказывается, что $|BO| = |OD|$, значит, в силу доказанного ранее, $ABCD$ – параллелограмм.

б) Доказательство последнего признака посложнее, чем предыдущие. Введём обозначения $|AO| = a$, $|BO| = b$, $|CO| = c$, $|DO| = d$, $\widehat{AOB} = \alpha$. Тогда

$$\widehat{COD} = \alpha, \quad \widehat{BOC} = \widehat{AOD} = \pi - \alpha, \quad |AC| = a + c, \quad |BD| = b + d.$$

Запишем теорему косинусов для треугольников AOB, BOC, COD и DOA:

$$|AB|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \quad |BC|^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha,$$

$$|CD|^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha, \quad |AD|^2 = a^2 + d^2 + 2ad\cos\alpha.$$

После этого, сложив полученные соотношения и воспользовавшись тем, что

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2,$$

мы получаем

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(ad + bc - ab - cd)\cos\alpha = (a + c)^2 + (b + d)^2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (a - c)^2 + (b - d)^2 - 2(a - c)(b - d)\cos\alpha = 0.$$

Если $b = d$, то из полученного уравнения вытекает, что $a = c$, то есть диагонали четырёхугольника $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам и по доказанному выше он является параллелограммом. Если $b \neq d$, то, деля обе части уравнения на $(b - d)^2$, находим

$$\left(\frac{a - c}{b - d}\right)^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{a - c}{b - d} + 1 = 0, \quad \frac{D}{4} = \cos^2\alpha - 1 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Но величина угла AOB лежит в интервале $(0, \pi)$, поэтому в случае $b \neq d$ уравнение решений не имеет. Признаки параллелограмма доказаны.

3. Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма $ABCD$ может быть вычислена по формулам

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin\widehat{BAD}, \quad S = |AD| \cdot h_1 = |AB| \cdot h_2, \quad S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\alpha,$$

где h_1 и h_2 – длины высот параллелограмма $ABCD$, проведённых к его сторонам AD и AB соответственно, а α – величина угла между его диагоналями.

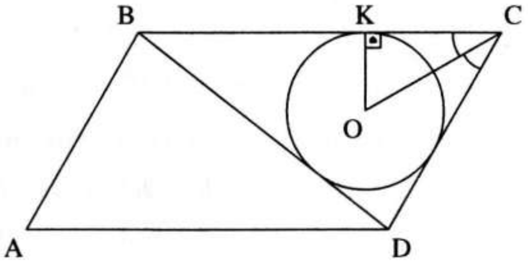
4. Вписанная и описанная окружности

В параллелограмм можно *вписать окружность* тогда и только тогда, когда он является ромбом.

Около параллелограмма можно *описать окружность* тогда и только тогда, когда он является прямоугольником.

Примеры решения задач

Пример 1. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26, величина угла ABC равна $2\pi/3$, а длина радиуса окружности, вписанной в треугольник BCD, равна $\sqrt{3}$. Найдите длины сторон параллелограмма $ABCD$, если известно, что длина стороны AD больше длины стороны AB.



Решение. Поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то $|AB| = |CD|$, $|AD| = |BC|$. С учётом этого из того, что периметр $ABCD$ равен 26, вытекает, что $|BC| + |CD| = 13$. Поэтому, если обозначить длины отрезков AD и BC за y, то длины отрезков AB и CD равны $13-y$. По условию задачи $|AD| > |AB|$, то есть $y > 13 - y \iff y > 13/2$.

Далее, поскольку прямые AB и CD параллельны, то, по свойствам внутренних односторонних углов, $\widehat{BCD} = \pi - \widehat{ABC} = \pi/3$. Записав для треугольника BCD теорему косинусов, имеем

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2\cdot|BC|\cdot|CD|\cdot\cos\widehat{BCD} \quad\Longrightarrow\quad |BD| = \sqrt{3y^2 - 39y + 169}.$$

Теперь обозначим центр окружности, вписанной в треугольник BCD, буквой O, а точку её касания со стороной BC обозначим буквой K. Тогда CO – биссектриса угла BCD, то есть $\widehat{OCK} = \pi/6$ и, по свойствам отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, делит его стороны, $|CK| = p_{\triangle BCD} - |BD|$. Наконец, из прямоугольного треугольника OCK имеем

$$|OK| = |CK|\cdot\operatorname{tg}\widehat{OCK} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{3} = \frac{13 - \sqrt{3y^2 - 39y + 169}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \sqrt{3y^2 - 39y + 169} = 7.$$

Возводя в квадрат полученное уравнение, находим

$$3y^2 - 39y + 169 = 49 \quad\Longrightarrow\quad y^2 - 13y + 40 = 0 \quad\Longrightarrow\quad y = 8 \text{ или } y = 5.$$

Ну а поскольку $y > 13/2$, то

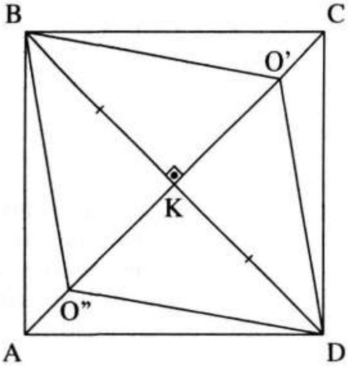
$$|AD| = |BC| = y = 8, \quad |AB| = |CD| = 13 - y = 5.$$

Ответ. $|AD| = |BC| = 8$, $|AB| = |CD| = 5$.

Пример 2. В плоскости даны квадрат $ABCD$ и точка O. Известно, что площадь квадрата $ABCD$ больше 225, $|OB| = |OD| = 13$, $|OC| = 5\sqrt{2}$. Найдите длину стороны AB и выясните, где расположена точка O – вне или внутри квадрата $ABCD$.

Решение. Обозначим середину диагонали BD буквой K и заметим, что точка O по условию задачи равноудалена от точек B и D. Это означает, что она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BD, то есть на прямой, проходящей через точку K и перпендикулярной BD. С другой стороны, $ABCD$ – квадрат, поэтому его диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке K. Из этих двух фактов следует, что точка O лежит на прямой AC.

Далее, поскольку площадь квадрата равна квадрату длины его стороны, то из условия задачи вытекает, что $|AB| = |BC| > 15$. Теперь учтем, что AB, BC и OB – наклонные, опущенные из вершины B на прямую AC, $|AB| = |BC| > |OB|$, из чего вытекает, что $|AK| = |CK| > |OK|$, стало быть, точка O лежит внутри квадрата $ABCD$.



Вообще говоря, точка O может лежать как на отрезке KC (этот вариант обозначим за O'), так и на отрезке AK (этот вариант обозначим за O''). Положим $|BK| = x > 0$, тогда $|KC| = x$,

$$|AB| = \sqrt{|BK|^2 + |KC|^2} = x\sqrt{2},$$

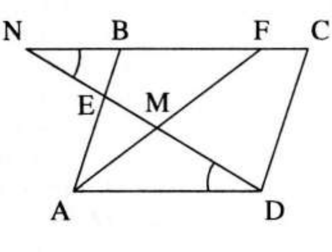
$$|O'K| = |O''K| = \sqrt{|OB|^2 - |BK|^2} = \sqrt{169 - x^2}.$$

Рассмотрим оба варианта расположения точки O. Для варианта O' в силу равенства $|KC| = |O'K| + |O'C|$ получаем уравнение $x = \sqrt{169 - x^2} + 5\sqrt{2}$, из которого нетрудно получить $x = 17/\sqrt{2}$. Тогда $|AB| = 17$, что удовлетворяет условию задачи. В другом варианте $|KC| = |O''C| - |O''K|$, что дает нам уравнение $x = \sqrt{169 - x^2} - 5\sqrt{2}$. Решением этого уравнения является $x = 7/\sqrt{2}$, но тогда $|AB| = 7$, что противоречит условию задачи.

Ответ. 17, точка O лежит внутри квадрата.

Пример 3. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F лежат соответственно на сторонах AB и BC таким образом, что $|AE| = 2|BE|$, $|BF| = 3|CF|$. M – точка пересечения прямых AF и DE. Найдите численное значение отношения $|AM| : |MF|$.

Решение. Конфигурация, описанная в этой задаче, является довольно стандартной: даны какие-то отношения длин отрезков и отношение же просят найти. В таких случаях, как правило, применяют подобие или теорему Менелая. Однако если мы ограничимся тем, что изобразим параллелограмм $ABCD$ и построим отрезки AF и DE, то на чертеже не найдется ни подобных треугольников, ни конструкции, к которой можно будет применить теорему Менелая. Поэтому придётся делать дополнительное построение, а именно продолжим прямую DE до пересечения с прямой BC в точке N.



Введём обозначения $|BE| = x$, $|CF| = y$, тогда, по условию задачи, $|AE| = 2x$, $|BF| = 3y$, $|BC| = 4y$ и, по свойствам параллелограмма, $|AD| = 4y$. Треугольники ADE и BNE подобны, что даёт нам

$$\frac{|BN|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|AE|} \implies |BN| = \frac{|AD| \cdot |BE|}{|AE|} = \frac{4y \cdot x}{2x} = 2y, \quad |FN| = |BN| + |BF| = 5y.$$

Треугольники ADM и FNM подобны, что даёт нам

$$\frac{|AM|}{|MF|} = \frac{|AD|}{|FN|} \implies \frac{|AM|}{|MF|} = \frac{4y}{5y} = \frac{4}{5}.$$

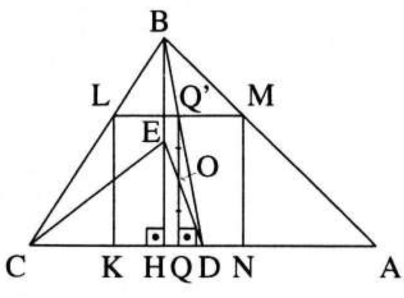
Ответ. 4 : 5.

Пример 4. В треугольник ABC вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC, одна на стороне AB и одна на стороне BC. Через середину D стороны AC и центр этого квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой BH треугольника ABC в точке E. Найдите площадь треугольника DEC, если $|AB| = 6$, $|BC| = 5$ и $|AC| = 7$.

Решение. При первом взгляде на условие этой задачи может показаться, что она чисто счётная. В самом деле, даны все длины сторон треугольника ABC, поэтому рано или поздно, так или иначе, можно вычислить все величины, присутствующие в этой задаче. Однако такой лобовой путь приведет к весьма большому объёму работы. Поэтому будем рассуждать так: запишем формулы площади треугольников ABC и DEC и вычислим их отношение:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BH|, \quad S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot |DC| \cdot |EH| \implies$$

$$\implies \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|EH|}{|BH|} \cdot \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|EH|}{2|BH|}.$$



Итак, фактически нам надо лишь найти, в каком отношении точка E делит высоту BH. Обозначим вершины квадрата буквами K, L, M и N таким образом, что точка L лежит на стороне BC, точка M лежит на стороне AB, а его центр обозначим буквой O. Проведём отрезок BD, точку его пересечения с отрезком LM обозначим буквой Q'. Так как $LM || AC$, то треугольник BLM подобен треугольнику BCA, и поскольку BD – медиана треугольника BCA, то BQ' – медиана треугольника BLM, то есть Q' – середина LM. Из этого следует, что если мы опустим перпендикуляр $Q'Q$ на сторону AC, то он будет содержать точку O, причём $|Q'O| = |OQ|$.

Далее, так как $QQ' || BH$, то треугольник DQQ' подобен треугольнику DHB, и поскольку DO – медиана треугольника DQQ', то DE – медиана треугольника DHB, то есть E – середина BH, то есть $|EH| : |BH| = 1 : 2$. Осталось получить ответ:

$$p_{\triangle ABC} = \frac{5+6+7}{2} = 9, \; S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}, \; S_{\triangle DEC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

Задачи

1. Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями длины 10 и 12.

2. В квадрат, площадь которого равна 18, вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон этого прямоугольника относятся, как 1:2. Найдите площадь прямоугольника.

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M таким образом, что $|DM| : |MC| = 2$. Найдите величину угла BAD, если известно, что $\widehat{CAM} = \alpha$.

4. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB втрое длиннее стороны BC. Внутри него лежит точка N, причём $|AN| = \sqrt{2}$, $|BN| = 4\sqrt{2}$, $|DN| = 2$. Найдите косинус величины угла BAN и площадь прямоугольника $ABCD$.

5. В ромбе $ABCD$ величина угла при вершине A равна $\pi/3$. Точка N делит сторону AB в отношении $2:1$, считая от точки A. Найдите $\operatorname{tg}\widehat{DNC}$.

6. В ромбе $ABCD$, длина стороны которого равна 6, на стороне BC взята точка E таким образом, что $|CE| = 2$. Найдите расстояние от точки E до центра ромба, если $\widehat{BAD} = \pi/3$.

7. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а длина его диагонали равна 10. На плоскости, в которой расположен прямоугольник $ABCD$, выбрана точка O так, что $|OB| = |OD| = 13$. Найдите расстояние от точки O до наиболее удалённой от неё вершины прямоугольника $ABCD$.

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки E, F, H и G являются соответственно серединами отрезков AB, BC, CD и AD; O – точка пересечения отрезков EH и FG. Известно, что $|EH| = a$, $|FG| = b$, $\widehat{FOH} = \alpha$. Найдите длины диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

9. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O. Найдите его периметр, если известно, что $|AO| = |OC| = 1$, $|BO| = |OD| = 2$.

10. В ромб, одна из диагоналей которого имеет длину 10, вписан круг площади 9π. Вычислите площадь части ромба, расположенной вне круга.

11. В параллелограмме $ABCD$ длины диагоналей AC и BD равны d_1 и d_2 ($d_1 \neq d_2$). Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $\widehat{ABC} = \alpha$.

12. Через вершину A и середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $OMCD$.

13. В параллелограмме $ABCD$ $|AB| = |BD| = 1$, а длины его диагоналей относятся как $1 : \sqrt{3}$. Найдите площадь той части круга, описанного около треугольника BDC, которая не принадлежит кругу, описанному около треугольника ADC.

14. В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла при вершине P, градусная мера которого равна 80°, пересекает сторону RS в точке L. Найдите длину радиуса окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL, если известно, что $|PQ| = 7$.

15. В параллелограмме $ABCD$ величина угла BCD равна $5\pi/6$, а длина основания AD равна 8. Найдите длину радиуса окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A, а также пересекающей основание AD на расстоянии 2 от точки D.

16. Окружность, длина диаметра которой равна $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведённой из точки C к этой окружности, равна 3, а $|AB| = 1$. Найдите все возможные значения, которые может принимать длина стороны BC.

17. В прямоугольнике $ABCD$, в котором $|AD| = 3 + 3\sqrt{2}/2$, а $|AB| = 6$, расположены две окружности. Окружность с центром в точке K, длина радиуса которой равна 2, касается сторон AB и AD. Окружность с центром в точке L, длина радиуса которой равна 1, касается стороны CD и первой окружности. Найдите площадь треугольника CLM, если M – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L.

18. Окружность, проходящая через вершины B, C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите длину отрезка AE, если $|AD| = 4$ и $|CE| = 5$.

19. В параллелограмме проведены биссектрисы всех внутренних углов. Четырёхугольник, образованный точками пересечения этих биссектрис, имеет площадь, равную двум третям площади исходного параллелограмма. Найдите отношение длин большей и меньшей сторон исходного параллелограмма.

20. Через вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E таким образом, что $|BE| = 9$. Найдите $|BD|$, если $|AB| = 3$, $|BC| = 5$.

21. Стороны ромба $EFGH$ являются гипотенузами прямоугольных равнобедренных треугольников EAF, FDG, GCH и HBE, причём все эти треугольники имеют общие внутренние точки с ромбом $EFGH$. Сумма площадей четырёхугольника $ABCD$ и ромба $EFGH$ равна 12. Найдите $|GH|$.

22. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся трёх его сторон и другой окружности каждая. Длина радиуса одной из них равна 1. Также известно, что длина одного из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания с одной из окружностей равна $\sqrt{3}$. Найдите площадь параллелограмма.

23. В ромб $ABCD$, у которого $|AB| = l$ и $\widehat{BAD} = 2\alpha$, вписана окружность. Касательная к этой окружности пересекает сторону AB в точке M, а сторону AD – в точке N. Известно, что $|MN| = 2a$. Найдите длины отрезков MB и ND, если известно, что $|MB| \leqslant |ND|$.

24. На стороне AB треугольника ABC взята точка D таким образом, что $|CD| = \sqrt{13}$ и $\sin\widehat{ACD} : \sin\widehat{BCD} = 4 : 3$. Через середину отрезка CD проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $\widehat{ACB} = 2\pi/3$, площадь треугольника MCN равна $3\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до прямой AB в два раза больше расстояния от точки N до этой же прямой. Найдите площадь треугольника ABC.

25. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 16. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника AOB, равна 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

26. В параллелограмме $ABCD$ величина угла между диагоналями AC и BD равна $\pi/6$. Известно, что $|AC| : |BD| = 2 : \sqrt{3}$. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AC, а точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите отношение площадей треугольника AB_1C_1 и параллелограмма $ABCD$.

27. Дан параллелограмм $ABCD$, $|AB| = 3$, $|AD| = \sqrt{3}+1$, $\widehat{BAD} = \pi/3$. На стороне AB взята точка K таким образом, что $|AK| : |KB| = 2 : 1$. Через точку K параллельно AD проведена прямая. На этой прямой внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка L, а на стороне AD выбрана точка M так, что $|AM| = |KL|$. Прямые BM и CL пересекаются в точке N. Найдите величину угла BKN.

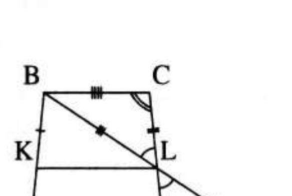
3.2. Трапеции

Теоретический материал

Определение. *Трапецией* называется четырёхугольник, две противоположные стороны которого **параллельны**. Эти стороны называются *основаниями* трапеции, а две другие его стороны называются *боковыми сторонами* трапеции.

Отметим, что трапеция является выпуклым четырёхугольником и, согласно этому определению, параллелограмм является частным случаем трапеции.

Замечание. В некоторых учебных пособиях под трапецией подразумевается четырёхугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие не параллельны.



1. Средняя линяя трапеции

Средняя линяя трапеции параллельна её основаниям, а её длина равна полусумме длин оснований трапеции.

Для доказательства этого факта рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, K – середина AB, L – середина CD. Продолжим отрезок BL за точку L до пересечения с прямой AD в точке M. Тогда углы BLC и DLM равны как вертикальные, а углы BCL и LDM равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей CD. Учитывая тот факт, что

$|CL| = |DL|$, мы получаем, что треугольники BCL и MDL равны по второму признаку равенства треугольников, что даёт нам $|BC| = |DM|$, $|BL| = |LM|$.

Стало быть, отрезок KL является средней линией треугольника ABM, поэтому, во-первых, $KL||AD$ (из чего сразу следует, что $KL||BC$) и, во-вторых, $|KL| = \frac{1}{2}|AM| = \frac{1}{2}(|AD| + |DM|) = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|)$. Утверждение доказано.

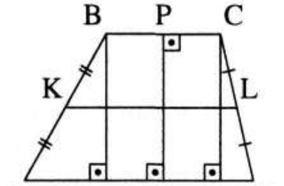
2. Высота трапеции

Длины боковых сторон трапеции можно вычислить с помощью деления длины высоты трапеции на синус величины соответствующего угла при основании трапеции:

$$|AB| = \frac{|PQ|}{\sin \widehat{BAD}}; \ |CD| = \frac{|PQ|}{\sin \widehat{CDA}}.$$

Площадь трапеции равна произведению полусуммы длин её оснований и длины её высоты:

$$S_{ABCD} = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot |PQ| = |KL| \cdot |PQ|.$$



Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, K – середина AB, L – середина CD, PQ – её высота. Для доказательства первого из приведённых утверждений достаточно опустить перпендикуляры из точек B и C на основание AD и рассмотреть соответствующие прямоугольные треугольники, учитывая, что длины проведённых перпендикуляров равны длине высоты PQ. Второе утверждение легко обосновывается с помощью рассмотрения треугольников ABD и BCD, площади которых равны $\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |PQ|$ и $\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |PQ|$ соответственно. Ну а сумма их площадей как раз равна площади трапеции $ABCD$.

3. Диагонали трапеции

Теорема. Диагонали трапеции делят её на четыре треугольника, два из которых подобны ($\triangle AOD \sim \triangle COB$), а два других равновелики ($S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$). При этом справедливы следующие соотношения:

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COB}} = \left(\frac{|AD|}{|BC|}\right)^2; \quad \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{|AD|}{|BC|}.$$

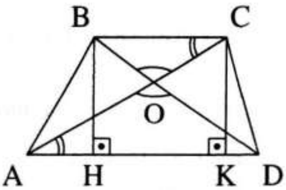
Доказательство. Поскольку прямые AD и BC параллельны, а AC – секущая, то углы CAD и ACB равны как внутренние накрест лежащие.

С другой стороны, углы AOD и COB равны как вертикальные, поэтому треугольники AOD и COB подобны по двум углам. Это дает нам следующее соотношение:

$$k = \frac{|AO|}{|OC|} = \frac{|DO|}{|OB|} = \frac{|AD|}{|BC|},$$

где k – коэффициент подобия этих треугольников. Первое из соотношений теоремы немедленно вытекает из того, что площади подобных треугольников относятся, как квадрат коэффициента их подобия.

Теперь опустим из точек B и C на прямую AD перпендикуляры BH и CK. Длины этих отрезков равны (каждая из этих длин фактически есть расстояние между параллельными прямыми AD и BC). С учётом этого, записывая формулы площади треугольников ABD и ACD, получаем



$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|BH|; \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|CK| \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}.$$

Осталось заметить, что

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD}; \quad S_{\triangle COD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD},$$

поэтому $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$. Наконец, воспользуемся тем, что углы AOD и AOB смежные, поэтому сумма их величин равна π, а их синусы равны. Значит,

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|DO|\cdot\sin\widehat{AOD}}{\frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|OB|\cdot\sin\widehat{AOB}} = \frac{|DO|}{|OB|} = \frac{|AD|}{|BC|}.$$

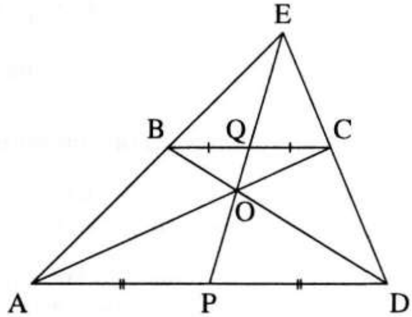
Теорема доказана.

4. Свойства точки пересечения диагоналей и точки пересечения боковых сторон трапеции

Теорема. Пусть в трапеции $ABCD$ $AD||BC$, E – точка пересечения прямых AB и CD, P и Q – середины оснований AD и BC соответственно, O – точка пересечения диагоналей. Тогда точки P, Q, O и E лежат на одной прямой.

Доказательство. Докажем, что прямая, проходящая через точки E и O, проходит также и через середины оснований трапеции.

Изначально будем считать, что точки P и Q являются всего лишь точками пересечения этой прямой с основаниями трапеции.



Поскольку прямые AD и BC параллельны, то треугольник AEP подобен треугольнику BEQ, а треугольник DEP подобен треугольнику CEQ. Из этих подобий находим

$$\frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{|EP|}{|EQ|}, \frac{|DP|}{|CQ|} = \frac{|EP|}{|EQ|} \Longrightarrow \frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{|DP|}{|CQ|}.$$

С другой стороны, треугольник AOP подобен треугольнику COQ, а треугольник DOP подобен треугольнику BOQ. Из этих подобий вытекает

$$\frac{|AP|}{|CQ|} = \frac{|OP|}{|OQ|}, \quad \frac{|DP|}{|BQ|} = \frac{|OP|}{|OQ|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AP|}{|CQ|} = \frac{|DP|}{|BQ|}.$$

Почленно разделив друг на друга полученные соотношения, получаем

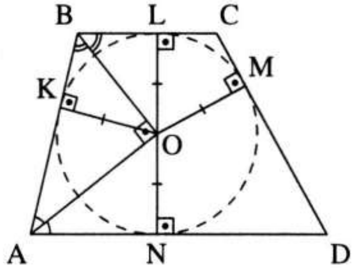
$$\frac{|CQ|}{|BQ|} = \frac{|BQ|}{|CQ|} \quad \Longrightarrow \quad |BQ| = |CQ| \quad \Longrightarrow \quad |AP| = |DP|,$$

то есть P и Q – середины оснований AD и BC соответственно. Теорема доказана.

5. Вписанная в трапецию окружность

В трапецию *можно вписать* окружность тогда и только тогда, когда сумма длин оснований трапеции равняется сумме длин её боковых сторон.

Теорема. Если в трапецию $ABCD$ $(AD||BC)$ можно вписать окружность с центром в точке O, точка O является точкой пересечения биссектрис всех внутренних углов трапеции, длина высоты трапеции $ABCD$ равна удвоенной длине радиуса этой окружности, углы AOB и COD – прямые.



Доказательство. Точки касания окружности, вписанной в $ABCD$, со сторонами AB, BC, CD и AD обозначим буквами K, L, M и N соответственно.

Тогда $|OK| = |OL| = |OM| = |ON|$, то есть точка O равноудалена от отрезков AB, BC, CD и AD, из чего следует, что точка O лежит на биссектрисе каждого из углов ABC, BCD, CDA и DAB.

Помимо этого, отметим, что $OL \perp BC$ и $ON \perp AD$. Из этого с учётом параллельности прямых AD и BC вытекает параллельность прямых OL и ON. Но у этих прямых есть общая точка O, поэтому они совпадают, то есть точки L, O и N лежат на одной прямой, перпендикулярной основаниям трапеции. Стало быть, LN – высота трапеции $ABCD$ и $|LN| = |OL| + |ON| = 2r$, где r – длина радиуса окружности, вписанной в $ABCD$.

Наконец, углы ABC и DAB являются внутренними односторонними при параллельных прямых AD и BC и секущей AB, поэтому $\widehat{ABC} + \widehat{DAB} = \pi$. AO и BO – биссектрисы углов DAB и ABC, значит,

$$\widehat{OAB} + \widehat{OBA} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{DAB} + \frac{1}{2} \cdot \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}; \quad \widehat{AOB} = \pi - (\widehat{OAB} + \widehat{OBA}) = \frac{\pi}{2}.$$

То, что угол COD тоже прямой, доказывается абсолютно аналогично. Теорема доказана.

6. Равнобедренная трапеция

Определение. *Равнобедренной трапецией* называется трапеция, боковые стороны которой равны по длине и непараллельны.

Отметим, что, давая такое определение, мы не берём в рассмотрение параллелограммы. Для всех параллелограммов, за исключением прямоугольников, приведённые ниже свойства не будут выполняться. Тем не менее, для единообразия прямоугольники мы тоже исключим из рассмотрения.

Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ $(AD||BC)$, будем считать, что $|AD| > |BC|$. Пусть BH и CK – её высоты.

Теорема. Следующие утверждения эквивалентны:

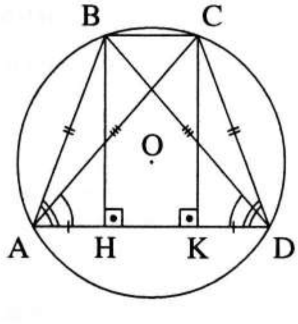
1. *Трапеция $ABCD$ – равнобедренная.*
2. *Величины углов при каком-либо из оснований трапеции $ABCD$ равны.*

3. *Длины диагоналей трапеции $ABCD$ равны.*

4. *Величины углов CAD и ADB (или CBD и ACB) равны.*

5. *Длины отрезков AH и KD равны (полуразности длин оснований AD и BC).*

6. *Около трапеции $ABCD$ можно описать окружность.*



Доказательство. Сначала докажем все свойства равнобедренной трапеции, то есть тот факт, что из утверждения 1 вытекают все остальные.

Поскольку $|AB| = |CD|$, $|BH| = |CK|$, то прямоугольные треугольники ABH и DCK равны по гипотенузе и катету, что дает нам равенство длин отрезков AH и KD. Заметим, что $BHKC$ – прямоугольник, поэтому $|HK| = |BC|$. Отсюда с учётом того, что $|AH|+|HK|+|KD| = |AD|$, немедленно вытекает $|AH| = |KD| = \frac{1}{2}(|AD|-|BC|)$. Таким образом, 1. $\Rightarrow$ 5.

Далее из равенства треугольников ABH и DCK вытекает и равенство углов BAD и ADC. Ну а поскольку сумма величин углов BAD и ABC равна π и сумма величин углов ADC и BCD равна π (по свойствам односторонних углов), то равны и углы ABC и BCD, стало быть, 1. $\Rightarrow$ 2.

Раз равны углы BAD и ADC, то равны и треугольники ABD и DCA (по двум сторонам и углу между ними). Поэтому $|AC| = |BD|$ и $\angle ADB = \angle CAD$. Но угол ADB равен углу CBD, а угол CAD равен углу ACB (по свойствам внутренних накрест лежащих углов), значит, равны и углы ACB и CBD. Итак, 1. $\Rightarrow$ 3. и 1. $\Rightarrow$ 4.

Наконец, заметим, что прямая, соединяющая середины оснований трапеции $ABCD$, им перпендикулярна. Это вытекает из того, что она проходит через точку пересечения прямых AB и CD, и равнобедренности треугольника, образованного этой точкой и точками A и D. Точка O пересечения этой прямой и серединного перпендикуляра к стороне AB и будет центром окружности, описанной около трапеции $ABCD$, так как O по построению равноудалена от всех вершин трапеции. Свойства равнобедренной трапеции доказаны.

Теперь докажем признаки равнобедренной трапеции. Пусть величины углов при каком-либо из оснований трапеции $ABCD$ равны. Тогда неминуемо равны углы BAD и ADC, что даёт нам равенство прямоугольных треугольников ABH и DCK по катету и острому углу. Отметим, что равенство этих треугольников вытекает и из того факта, что $|AH| = |KD|$. Ну а раз треугольники равны, то и $|AB| = |CD|$. Значит, 2. $\Rightarrow$ 1. и 5. $\Rightarrow$ 1.

Если равны длины отрезков AC и BD, то треугольники ACK и DBH равны по гипотенузе и катету, а если $\angle CAD = \angle ADB \iff \angle ACB = \angle CBD$, то они равны по катету и острому углу. Поэтому в любом случае $|AK| = |HD|$, но поскольку $|AK| = |AH| + |HK|$ и $|HD| = |HK| + |KD|$, то $|AH| = |KD|$. Таким образом, 3. $\Rightarrow$ 5. $\Rightarrow$ 1. и 2. $\Rightarrow$ 5. $\Rightarrow$ 1.

Наконец, если около трапеции $ABCD$ можно описать окружность, то, по свойствам вписанных углов, $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi$ и, по свойствам односторонних углов, $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} = \pi$. Значит, углы ADC и BAD равны, то есть 6. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 1. Теорема доказана.

Приведём также два свойства, касающиеся *произвольных* четырёхугольников, которые будут полезны при решении задач этого раздела.

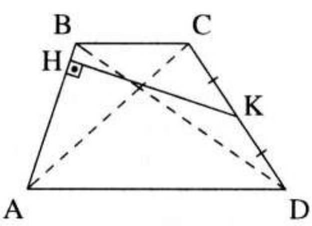
I. *Площадь произвольного выпуклого четырёхугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус величины угла между ними.*

II. *Если диагонали выпуклого четырёхугольника перпендикулярны, то суммы квадратов длин его противоположных сторон равны между собой.*

Примеры решения задач

Пример 1. В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, $|AB| = c$ и расстояние от середины отрезка CD до прямой AB равно d. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Решение. Обозначим середину отрезка CD буквой K, а основание перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую AB, обозначим буквой H. Приведём три способа решения этой задачи: первый способ основан на леммах о площадях, два других используют дополнительные построения.



Первый способ
Найдём площадь треугольника ABK:

$$S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |KH| = \frac{cd}{2}$$

Попробуем выразить площадь трапеции через площадь треугольника ABK. Из того, что $|CK| = |KD|$, следует, что $S_{\Delta AKD} = \frac{1}{2} \cdot S_{\Delta ACD}$ и $S_{\Delta BCK} = \frac{1}{2} \cdot S_{\Delta BCD}$. Поэтому

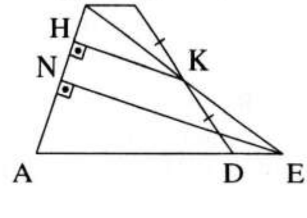
$$S_{\Delta AKD} + S_{\Delta BCK} = \frac{1}{2} \cdot (S_{\Delta ACD} + S_{\Delta BCD}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}|AD| \cdot h + \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD},$$

где h – высота трапеции. Поэтому и $S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABK} = cd.$$

Второй способ
Проведём через точки B и K прямую до пересечения с прямой AD в точке E. Поскольку прямые AD и BC параллельны, то углы KDE и KCB равны как внутренние накрест лежащие. Углы BKC и DKE равны как вертикальные. Тогда в силу того, что $|CK| = |KD|$, получаем равенство треугольников KCB и KDE (по стороне и двум прилежащим углам). Поэтому, во-первых, $|BK| = |KE|$ и, во-вторых,



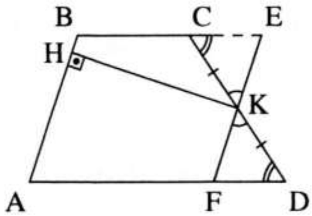
$$S_{\Delta KCB} = S_{\Delta KDE} \implies S_{ABCD} = S_{\Delta ABE}.$$

Найдём высоту треугольника ABE. Обозначим основание высоты, проведённой из точки E на сторону AB, буквой N. Тогда, очевидно, $\Delta BKH \sim \Delta BEN \implies$

$$\frac{|EN|}{|KH|} = \frac{|BE|}{|BK|} = 2 \implies |EN| = 2d \implies S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |EN| = cd.$$

Третий способ

Проведём через точку K прямую, параллельную прямой AB, и обозначим буквами E и F точки пересечения этой прямой с прямыми BC и AD соответственно. Заметим, что $ABEF$ – параллелограмм. Поскольку прямые AD и BC параллельны, то углы KCE и KDF равны как внутренние накрест лежащие. Углы CKE и DKF равны как вертикальные. Тогда в силу того, что $|CK| = |KD|$, получаем равенство треугольников CKE и DKF (по стороне и двум прилежащим углам). Поэтому

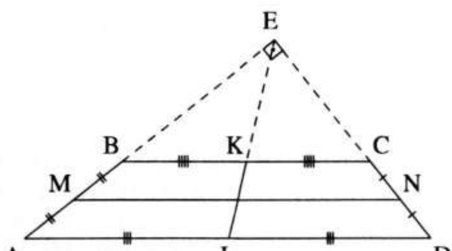


$$S_{\Delta CKE} = S_{\Delta DKF} \implies S_{ABCD} = S_{ABEF} = |AB| \cdot |KH| = cd.$$

Ответ. cd.

Пример 2. В трапеции длина средней линии равна 4, градусные меры углов при одном из оснований равны 40° и 50°. Найдите длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего их середины, равна 1.

Решение. Обозначим вершины трапеции буквами A, B, C и D, середины сторон AB, BC, CD и AD обозначим буквами M, K, N и L соответственно. Будем считать, что $AD \| BC$, $\widehat{BAD} = 40^\circ$ и $\widehat{ADC} = 50^\circ$, тогда по условию задачи $|MN| = 4$, $|KL| = 1$. Если обозначить буквой E точку пересечения прямых AB и CD, то



$$\widehat{AED} = 180^\circ - \widehat{EAD} - \widehat{EDA} = 90^\circ,$$

то есть треугольники BEC и AED – прямоугольные. Далее заметим, что EK и EL – медианы прямоугольных треугольников BEC и AED, проведённые к их гипотенузам, значит,

$$|EK| = |BK| = |KC| = \frac{|BC|}{2}, \quad |EL| = |AL| = |LD| = \frac{|AD|}{2}.$$

Наконец, точки E, K и L лежат на одной прямой, поэтому

$$|KL| = |EL| - |EK| = \frac{|AD| - |BC|}{2} \implies |AD| - |BC| = 2.$$

Второе уравнение пишется совсем просто: воспользуемся тем, что длина средней линии трапеции равна полусумме длин её оснований:

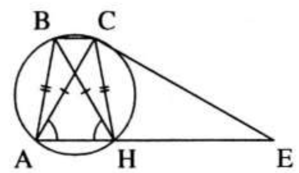
$$|MN| = \frac{|AD| + |BC|}{2} \quad \Longrightarrow \quad |AD| + |BC| = 8.$$

Наконец, из полученных уравнений находим $|AD| = 5$, $|BC| = 3$.

Ответ. 3 и 5.

Пример 3. В трапеции $ABCE$ длина основания AE равна 16, а длина боковой стороны CE равна $8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A, B, C, пересекает прямую AE в точке H. Величина угла AHB равна $\pi/3$. Найдите длину отрезка BH.

Решение. Поскольку $ABCE$ – трапеция, а CE – её боковая сторона, то прямые AE и BC параллельны, значит, и $AH||BC$. По условию задачи точки A, B, C и H лежат на одной окружности, стало быть, $ABCH$ – трапеция, вписанная в окружность. Из этого вытекает, что она равнобедренная, что, в свою очередь, даёт нам следующие соотношения:



$$|AC| = |BH|, \quad \angle AHB = \angle CAH.$$

Таким образом, нам достаточно найти длину отрезка AC, что легко делается путём применения теоремы косинусов к треугольнику ACE:

$$|CE|^2 = |AC|^2 + |AE|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AE| \cdot \cos\widehat{CAE} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 192 = |AC|^2 + 256 - 2 \cdot |AC| \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad |AC| = 8.$$

Ответ. 8.

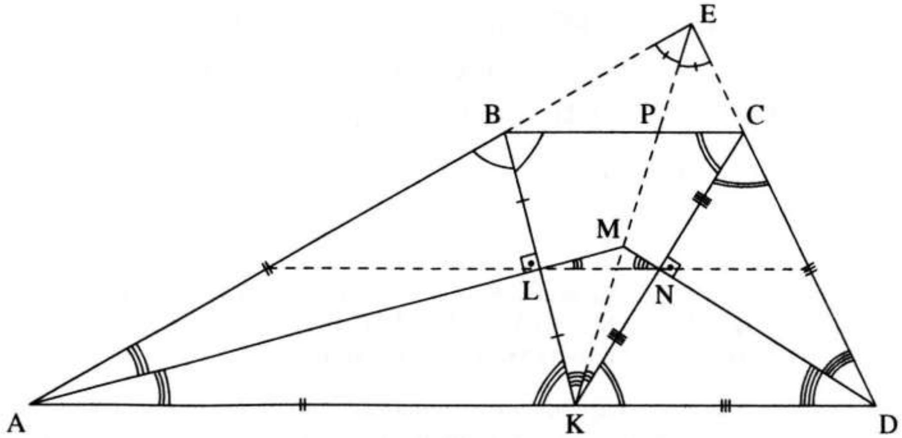
Пример 4. В трапеции $ABCD$ $AD||BC$, $|AB| = 9$, $|CD| = 5$, биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причём точка K лежит на основании AD.

а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK – сторону BC?

б) Найдите отношение $|MN| : |KL|$, если $|LM| : |KN| = 3 : 7$.

Решение. Обозначим величины углов ABC и BCD за 2α и 2β соответственно. Тогда $\widehat{BAD} = \pi - 2\alpha$ и $\widehat{ADC} = \pi - 2\beta$ (по свойству односторонних углов при параллельных прямых). Поскольку AL и BK – биссектрисы углов BAD и ABC, то $\widehat{BAL} = \pi/2 - \alpha$, $\widehat{ABK} = \alpha$, поэтому $\widehat{ALB} = \pi - \alpha - (\pi/2 - \alpha) = \pi/2$. Таким образом, AL – высота и биссектриса треугольника ABK, стало быть, во-первых, треугольник ABK — равнобедренный, $|AB| = |AK| = 9$, и, во-вторых, L – середина отрезка BK. Абсолютно аналогично доказывается, что DN – высота и биссектриса треугольника CDK, $|CD| = |KD| = 5$ и N – середина отрезка CK.

Теперь заметим, что LN – отрезок, соединяющий середины сторон BK и CK треугольника BCK, поэтому LN – его средняя линяя, из чего следует параллельность прямых LN, BC и AD. В таком случае прямая LN проходит и через середину стороны AB. Действительно, отрезок, концами которого являются точка L и точка пересечения прямых LN и AB, во-первых, параллелен прямой AB и, во-вторых, одним из его концов является середина отрезка BK. Значит, он является средней линией треугольника ABK, поэтому второй его конец – середина отрезка AB. Итак, прямая LN делит сторону AB в отношении $1:1$.



Для ответа на вторую часть первого вопроса задачи заметим, что поскольку $|AB| \neq |CD|$, то $ABCD$ – не параллелограмм, из чего вытекает, что прямые AB и CD пересекаются в точке E. Теперь докажем, что точки M и K лежат на биссектрисе угла AED.

С одной стороны, точка M лежит на биссектрисе угла EAD, поэтому она равноудалена от сторон этого угла, т.е. от прямых AE и AD. С другой стороны, точка M лежит на биссектрисе угла ADE, поэтому она равноудалена от сторон этого угла, т.е. от прямых DE и AD. Значит, точка M равноудалена от прямых AE и DE, т.е. лежит на биссектрисе угла AED. Аналогично доказывается, что точка K тоже лежит на биссектрисе угла AED.

Обозначим буквой P точку пересечения прямой EK и отрезка BC. Тогда EP – биссектриса треугольника BEC, а EK – биссектриса треугольника AED. Следовательно, по свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|BE|}{|CE|}, \quad \frac{|AK|}{|KD|} = \frac{|AE|}{|DE|}.$$

Но так как треугольники ADE и BCE подобны, то

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|DE|}{|CE|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|BE|}{|CE|}$$

и мы имеем $\quad \dfrac{|BP|}{|PC|} = \dfrac{|BE|}{|CE|} = \dfrac{|AE|}{|DE|} = \dfrac{|AK|}{|KD|} = \dfrac{9}{5}.$

Для ответа на второй вопрос задачи рассмотрим четырёхугольник $MNKL$. Так как из приведённых выше рассуждений следует, что углы MLK и MNK

прямые, то их сумма равна π и, значит, вокруг четырёхугольника $MNKL$ можно описать окружность. Тогда, по свойству вписанных углов, углы MNL и MKL равны, а углы MNL и NDK равны в силу параллельности прямых LN и AD. Следовательно, равны углы MKL и NDK. Поэтому прямоугольные треугольники MKL и KDN подобны. Отсюда получаем

$$\frac{|ML|}{|KN|} = \frac{|MK|}{|KD|}.$$

Аналогично показывается подобие треугольников KNM и ALK. Тогда

$$\frac{|MN|}{|KL|} = \frac{|MK|}{|AK|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|MN|}{|KL|} = \frac{|MK|}{|KD|} \cdot \frac{|KD|}{|AK|} = \frac{|ML|}{|KN|} \cdot \frac{|KD|}{|AK|} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{21}.$$

Ответ. а) $1:1$; $5:9$; б) $5:21$.

Задачи

1. В трапеции $KLMN$ отрезки KN и LM являются основаниями, а также известно, что $|KL| = 36$, $|MN| = 34$, $|LM| = 10$. Найдите длину диагонали LN, если косинус величины угла KLM равен $-1/3$.

2. В трапецию вписана окружность. Точка касания делит одну из боковых сторон этой трапеции на отрезки длиной 12 и 3, длина её меньшего основания равна 9. Найдите площадь трапеции.

3. В трапеции $ABCD$ отрезки AB и CD являются основаниями. Диагонали трапеции пересекаются в точке E. Известно, что $|AB| = 30$, $|CD| = 24$, $|AD| = 3$, $\widehat{DAB} = \pi/3$. Найдите площадь треугольника BEC.

4. В трапеции $ABCD$ даны длины оснований $|AD| = 4$, $|BC| = 1$ и углы BAD и ADC, величины которых равны соответственно $\operatorname{arctg} 2$ и $\operatorname{arctg} 3$. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник BEC, где E – точка пересечения диагоналей трапеции.

5. В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $|AD| = 39$ и $|BC| = 26$, а также известны длины боковых сторон $|AB| = 5$ и $|CD| = 12$. Найдите длины её диагоналей.

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E. В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке H, $|MH| = 1$. Найдите величину угла BAD.

7. В трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана окружность с центром O. Найдите площадь трапеции, если угол DAB прямой, $|OC| = 2$, $|OD| = 4$.

8. В выпуклом четырёхугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L – прямые, а тангенс величины угла при вершине M равен $2/3$. Найдите длину диагонали NQ, если известно, что длина стороны LQ вдвое меньше длины стороны MN и на 2 больше длины стороны LN.

9. В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна стороне CD. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, причём треугольник BOC является равносторонним. Найдите длину стороны BC, если $|AB| = 5$, $|CD| = 3$.

10. В трапеции $KLMN$ $KN||LM$, LA – биссектриса угла KLM, точка A – середина отрезка MN. Длина средней линии трапеции $KLMN$ равна $\sqrt{5}$, $|AK| = 4$. Найдите $|AL|$.

11. В трапеции $ABCD$ $AD||BC$, биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M. Найдите длину отрезка AM, если известно, что треугольники ACM и ADM имеют одинаковую площадь, $|BM| = 8$, $|BC| + |AD| = 17$.

12. Непараллельные стороны трапеции перпендикулярны друг другу. Длина одной из них равна 3, а градусная мера угла, образованного ею и одной из диагоналей, равна 40°. Другая из них образует с одним из оснований такой же угол. Найдите длину средней линии этой трапеции.

13. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB||CD$, $\widehat{CAB} = 2\widehat{DBA}$, $|AC| = 5$, $|BD| = 7$.

14. Длины боковых сторон описанной около окружности трапеции равны 3 и 5. Известно, что средняя линия этой трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $5/11$. Найдите длины оснований трапеции.

15. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке E. Около треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведённая в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D, F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $|AF| = a$, $|AD| = b$. Найдите длину отрезка EF.

16. В трапеции $ABCD$ длина основания AD больше длины основания BC. Известно, что $|AD| = |CD| = 14/3$, $\widehat{BAD} = \pi/2$, $\widehat{BCD} = 5\pi/6$. На основании AD построен треугольник AED так, что точки B и E лежат по одну сторону от прямой AD, причём $|AE| = |DE|$. Длина высоты этого треугольника, проведённой из вершины E, равна $7/5$. Найдите площадь общей части трапеции $ABCD$ и треугольника AED.

17. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 4, длина основания BC равна 3, длины сторон AB и CD равны. Точки M и N лежат на диагонали BD, причём точка M расположена между точками B и N, а отрезки AM и CN перпендикулярны диагонали BD. Найдите длину отрезка CN, если $|BM| : |DN| = 2 : 3$.

18. Около окружности, длина радиуса которой равна R, описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции, параллельна основаниям трапеции. Длина этой хорды равна b. Найдите площадь трапеции.

19. В трапеции $BCDE$ $(CD||BE)$ проведена средняя линия LN (точка L лежит на стороне BC). Прямая, проходящая через точку B и перпендикулярная к стороне DE, пересекает отрезок LN в точке M, $|LM| : |MN| = 2 : 1$. Также известно, что $|BE| = 14$, $|CD| = 10$, $BC \perp BE$. Найдите площадь трапеции $BCDE$.

20. В трапеции $ABCD$ $(AD||BC)$ $|AD| = 8, |BC| = 6$, а величина угла между прямыми AB и CD равна $\operatorname{arctg} 0{,}25$. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что её диагонали перпендикулярны.

21. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана в окружность. На дуге CD взята точка E и соединена со всеми вершинами трапеции. Известно, что величина угла CED равна $2\pi/3$, $\widehat{ABE} - \widehat{BAE} = \delta$. Найдите отношение периметра треугольника ABE к длине радиуса вписанной в него окружности.

22. Точка M лежит на боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Найдите длину отрезка BM, если известно, что $\widehat{BCD} = \widehat{CBD} = \widehat{ABM} = \arccos(5/6)$, $|AB| = 9$.

23. В трапеции $ABCD$ $BC||AD$, $|BC| < |AD|$, длина диагонали BD в $4/3$ раза больше длины радиуса окружности, описанной около $ABCD$. Найдите отношение длин CD и радиуса этой окружности, если отношение площадей треугольников ABD и BCD равно 5.

24. Дана трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение длины высоты этой трапеции к длине радиуса описанной около неё окружности равно $\sqrt{2/3}$. Найдите величины углов трапеции.

25. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD, $|AB| = 5$, $|DC| = 1$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Точка K лежит на отрезке AB таким образом, что $|AK| = 2$. Прямая CK пересекает окружность в точке F, отличной от точки C. Найдите площадь треугольника OFC.

26. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка AD, если $|BC| = 2$, $|GO| = 7$, а $|GF| = 18$.

27. Известно, что трапеция $ABCD$ – равнобедренная, $AD||BC$ и $|BC| > |AD|$. Трапеция $ECDA$ также равнобедренная, причём $AE||CD$ и $|AE| > |CD|$. Найдите $|BE|$, если известно, что $|DE| = 7$, а $\widehat{CDE} + \widehat{BDA} = \arccos(1/3)$.

28. В равнобедренной трапеции, длины оснований которой равны 1 и 4, расположены две окружности, каждая из которых касается двух боковых сторон трапеции, другой окружности и одного из оснований трапеции. Найдите площадь этой трапеции.

29. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, а величины углов AED и BCD равны. Окружность, длина радиуса которой равна 17, проходит через точки C, D и E, пересекает основание AD в точке F и касается прямой BF. Найдите длины оснований и высоты трапеции $ABCD$, если $|CD| = 30$.

30. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята точка M таким образом, что $|AM| : |BM| = 2 : 3$. На противоположной стороне CD взята такая точка N, что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найдите отношение $|CN| : |ND|$, если известно, что $|BC| : |AD| = 1 : 2$.

31. В трапеции $ABCD$ $BC||AD$, $\widehat{ABC} = \pi/2$. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD – в точке N. Известно, что расстояние от точки D до прямой MC равно c, $|MC| = a$, $|BN| = b$. Найдите расстояние от точки A до прямой BN.

32. В окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{7}$, вписана трапеция. Длина её меньшего основания равна 4. Через точку этой окружности, касательная в которой параллельна одной из боковых сторон трапеции, проведена хорда, параллельная основаниям трапеции. Длина этой хорды равна 5. Найдите площадь трапеции и длину её диагоналей.

33. В окружность вписана трапеция $ABCD$, $AD||BC$, $|AD| > |BC|$. На дуге AD, не содержащей вершин B и C, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки S на прямые AD, BC, AB и CD соответственно. Известно, что $|SP| = a$, $|SQ| = b$, $|SN| = c$. Найдите отношение площадей треугольников MQS и NQS.

34. Дана трапеция $ABCD$, сторона AB которой перпендикулярна основаниям AD и BC. На стороне AB, как на диаметре, построена окружность, касающаяся стороны CD. Длина радиуса этой окружности равна $\sqrt{6}$. Другая окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{2}$, касается сторон AD и CD и пересекает первую окружность так, что длина их общей хорды равна $\sqrt{6}$, а центры окружностей расположены по разные стороны от этой хорды. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

3.3. Общие четырёхугольники и многоугольники

Теоретический материал

Сначала приведём некоторые факты и утверждения, относящиеся к четырёхугольникам.

1. Сумма величин углов четырёхугольника

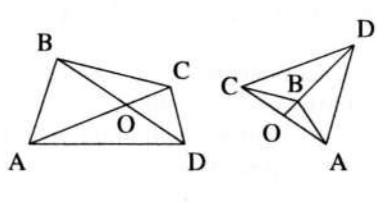
Сумма величин внутренних углов четырёхугольника равна 2π.

Для доказательства этого факта достаточно сложить суммы величин внутренних углов двух треугольников, на которые разбивается четырёхугольник одной из своих диагоналей. Для выпуклого четырёхугольника можно рассмотреть любую из его диагоналей, для невыпуклого надо рассмотреть ту диагональ, которая содержится внутри него.

2. Формула площади четырёхугольника

Площадь четырёхугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус величины угла между ними.

Для доказательства этого факта рассмотрим два случая. Если четырёхугольник $ABCD$ выпуклый (левый рисунок), то точка O пересечения его диагоналей



лежит внутри него и его площадь может быть представлена как сумма площадей треугольников AOB, BOC, COD и AOD.

Заметим, что синусы величин всех четырёх углов AOB, BOC, COD и AOD равны, так как эти углы являются либо смежными, либо вертикальными друг с другом. Обозначая величину любого из этих углов за α и пользуясь формулой площади треугольника, мы получаем

$$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|BO|\cdot\sin\alpha +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot|BO|\cdot|CO|\cdot\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot|CO|\cdot|DO|\cdot\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|DO|\cdot\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(|AO|+|CO|)\cdot(|BO|+|DO|)\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\alpha.$$

Если же четырёхугольник $ABCD$ невыпуклый (правый рисунок), то точка O (точка пересечения прямых, содержащих его диагонали) лежит вне его. Будем считать, что она попадает на продолжение диагонали BD за точку B. Тогда площадь четырёхугольника $ABCD$ равна разности площадей треугольников ACD и ABC, каждая из которых может быть представлена как сумма площадей соответствующих треугольников. Углы AOB и COB – смежные, поэтому синусы их величин равны. Обозначая величину любого из них за α и рассуждая аналогично предыдущему случаю, мы получаем

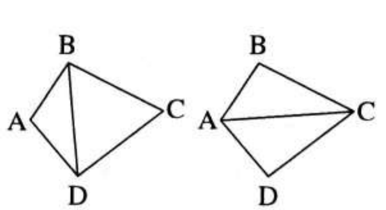
$$S_{ABCD} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle COD} - S_{\triangle AOB} - S_{\triangle COB} = \frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|DO|\cdot\sin\alpha +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot|CO|\cdot|DO|\cdot\sin\alpha - \frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|BO|\cdot\sin\alpha - \frac{1}{2}\cdot|CO|\cdot|BO|\cdot\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(|AO|+|CO|)\cdot(|DO|-|BO|)\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\alpha.$$

Формула площади четырёхугольника доказана.

Если использование доказанной формулы по каким-либо причинам затруднительно, то, если четырёхугольник выпуклый, можно поступать следующим образом: провести какую-либо из его диагоналей и посчитать по отдельности площади полученных треугольников.



Такой подход даёт нам ещё две формулы:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AD|\cdot\sin\widehat{BAD} + \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|CD|\cdot\sin\widehat{BCD},$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ABC} + \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|CD|\cdot\sin\widehat{ADC}.$$

Если четырёхугольник оказался невыпуклым, то можно поступить аналогично и провести ту его диагональ, которая лежит внутри него.

Отметим, что в силу того, что синус величины угла не превосходит 1, из этих формул вытекает следующее утверждение:

Площадь четырёхугольника не превосходит полусуммы произведений длин двух пар его смежных сторон и равна этой полусумме тогда и только тогда, когда углы, образованные этими парами, – прямые.

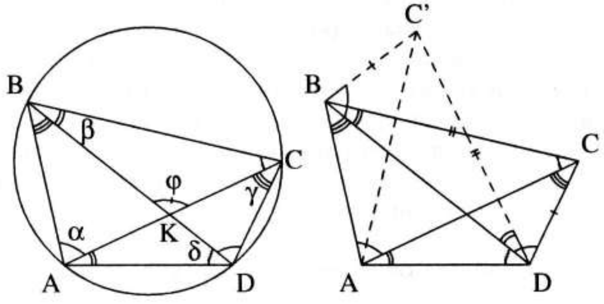
3. Окружность, описанная около четырёхугольника

Если около четырёхугольника можно описать окружность, то суммы величин его противоположных углов равны π. Верно и обратное утверждение: *если сумма величин двух противоположных углов четырёхугольника равна* π, *то около него можно описать окружность.*

Доказательство этих утверждений легко проводится с помощью свойств вписанных углов и теоремы о четырёх точках. Отметим также, что возможность описать окружность около четырёхугольника эквивалентна тому факту, что серединные перпендикуляры к его сторонам пересекаются в одной точке.

Докажем ещё одно красивое свойство вписанного четырёхугольника, а именно теорему Птолемея.

Теорема. Произведение длин диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника равно сумме произведений длин его противоположных сторон.



Доказательство. Рассмотрим вписанный в окружность четырёхугольник $ABCD$, обозначим буквой K точку пересечения его диагоналей.

Сначала заметим, что, по свойствам вписанных углов,

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBD}, \quad \widehat{ABD} = \widehat{ACD}, \quad \widehat{BCA} = \widehat{BDA}, \quad \widehat{CDB} = \widehat{CAB}$$

и, по свойству угла между пересекающимися хордами,

$$\widehat{AKB} = \widehat{CKD} = \widehat{ADB} + \widehat{CAD}, \quad \widehat{BKC} = \widehat{AKD} = \widehat{BAC} + \widehat{ACD}.$$

Вводя обозначения $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{CBD} = \beta$, $\widehat{ACD} = \gamma$, $\widehat{ADB} = \delta$, $\widehat{BKC} = \varphi$, с учётом вышесказанного имеем $\varphi = \alpha + \gamma$, $\pi - \varphi = \beta + \delta$.

Теперь рассмотрим четырёхугольник $ABC'D$, получающийся из четырёхугольника $ABCD$ переворотом треугольника BCD, то есть $|BC'| = |CD|$, $|C'D| = |BC|$. Ясно, что треугольники $BC'D$ и BCD равны по трём сторонам, поэтому, во-первых, $\widehat{C'BD} = \widehat{CDB} = \alpha$, $\widehat{C'DB} = \widehat{CBD} = \beta$ и, во-вторых, площади четырёхугольников $ABCD$ и $ABC'D$ равны.

Наконец, заметим, что

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi,$$

$$S_{ABC'D} = S_{\triangle ABC'} + S_{\triangle ADC'} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC'|\cdot\sin\widehat{ABC'} + \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|DC'|\cdot\sin\widehat{ADC'} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CD|\cdot\sin(\alpha+\gamma) + \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|BC|\cdot\sin(\beta+\delta) = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CD|\cdot\sin\varphi +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|BC|\cdot\sin(\pi-\varphi) = \frac{1}{2}\cdot(|AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC|)\cdot\sin\varphi.$$

Приравнивая друг другу правые части этих соотношений, получаем

$$|AC|\cdot|BD| = |AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC|.$$

Теорема Птолемея доказана.

4. Окружность, вписанная в четырёхугольник

Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то он выпуклый и суммы длин его противоположных сторон равны. Верно и такое утверждение: *если суммы длин противоположных сторон* **выпуклого** *четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.*

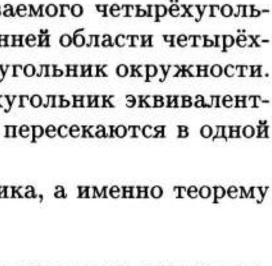
Доказательство первого из этих утверждений легко вытекает из теоремы о равенстве длин отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности. Второе утверждение доказывается по следующей схеме: обосновывается тот факт, что все четыре биссектрисы внутренних углов рассматриваемого четырёхугольника пересекаются в одной точке, которая лежит во внутренней области четырёхугольника. Эта точка и будет центром вписанной в четырёхугольник окружности. Отметим, что возможность вписать окружность в четырёхугольник эквивалентна тому факту, что все биссектрисы его внутренних углов пересекаются в одной точке.

Докажем ещё одно свойство описанного четырёхугольника, а именно теорему о его площади.

Теорема. Площадь описанного около окружности четырёхугольника равна произведению длины радиуса этой окружности на его полупериметр.

Доказательство. Рассмотрим описанный около окружности четырёхугольник $ABCD$, обозначим буквой O её центр, длину её радиуса обозначим за r, а буквами K, L, M и N обозначим точки её касания со сторонами AB, BC, CD и AD соответственно.

Тогда $|OK| = |OL| = |OM| = |ON| = r$ и, кроме того, $OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp CD$, $ON \perp AD$. Поскольку четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, то его площадь равна сумме площадей треугольников OAB, OBC, OCD и OAD. Записывая формулы площадей этих треугольников, получаем



$$S_{ABCD} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OAD} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|OK| + \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|OL| +$$

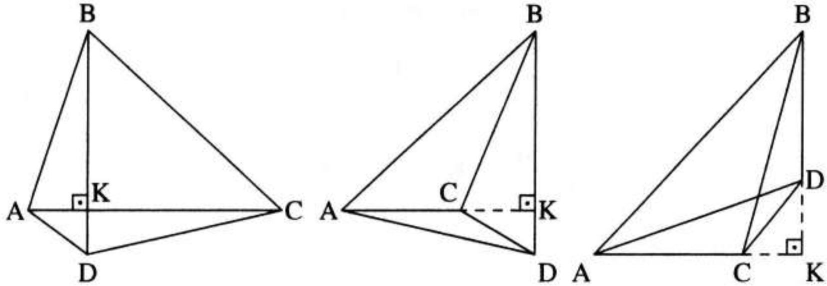
$$+\frac{1}{2}\cdot|CD|\cdot|OM| + \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|ON| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |BC| + |CD| + |AD|) \cdot r = p_{ABCD} \cdot r,$$

что и требовалось доказать.

5. Диагонали четырёхугольника

Если прямые, содержащие диагонали четырёхугольника, перпендикулярны, то суммы квадратов длин его противоположных сторон равны.



Доказательство этого факта практически очевидно. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, точку пересечения прямых, содержащих его диагонали, обозначим буквой K. На чертеже изображены все возможные случаи: выпуклый четырёхугольник, невыпуклый четырёхугольник с непересекающимися сторонами и невыпуклый четырёхугольник с пересекающимися сторонами. Записывая теорему Пифагора для треугольников ABK, BCK, CDK и ADK, получаем

$$|AB|^2 = |AK|^2 + |BK|^2, \; |CD|^2 = |CK|^2 + |DK|^2,$$

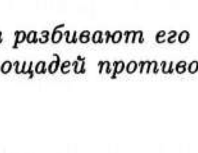
$$|BC|^2 = |BK|^2 + |CK|^2, \; |AD|^2 = |AK|^2 + |DK|^2.$$

Наконец, складывая попарно эти соотношения, получаем

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 = |AK|^2 + |BK|^2 + |CK|^2 + |DK|^2.$$

Утверждение доказано.

Диагонали выпуклого четырёхугольника разбивают его на четыре треугольника таким образом, что произведения площадей противоположных треугольников равны.



$S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$

Справедливость этого утверждения вытекает из следующих соображений: заметим, что синусы величин углов AOB, BOC, COD и AOD равны в силу того, что эти углы либо смежные, либо вертикальные друг с другом. Обозначая любую из этих величин за α и пользуясь формулой площади треугольника, получаем

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |BO| \cdot \sin\alpha, \quad S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \cdot |CO| \cdot |DO| \cdot \sin\alpha;$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |CO| \cdot \sin\alpha, \quad S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |DO| \cdot \sin\alpha.$$

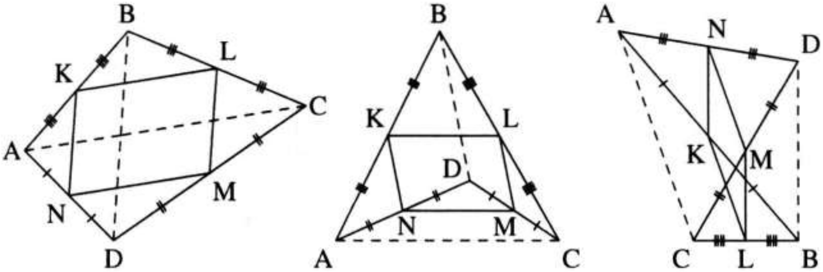
Перемножив попарно эти соотношения, получаем

$$S_{\triangle AOB} \cdot S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOC} \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{1}{4} \cdot |AO| \cdot |BO| \cdot |CO| \cdot |DO| \cdot \sin^2 \alpha,$$

что и требовалось доказать.

6. Теорема Вариньона

Четырёхугольник, вершины которого являются серединами сторон произвольного четырёхугольника, есть параллелограмм.



Рассмотрим произвольный четырёхугольник $ABCD$, буквами K, L, M и N обозначим середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно. На чертеже изображены все возможные случаи: выпуклый четырёхугольник, невыпуклый четырёхугольник с непересекающимися сторонами и невыпуклый четырёхугольник с пересекающимися сторонами. Заметим, что отрезок KL является средней линией треугольника ABC, поэтому $KL||AC$, $|KL| = \frac{1}{2}|AC|$. Отрезок же MN является средней линией треугольника ADC, поэтому $MN||AC$, $|MN| = \frac{1}{2}|AC|$. Из вышесказанного следует, что отрезки KL и MN, во-первых, параллельны и, во-вторых, равны по длине. Значит, четырёхугольник $KLMN$ является параллелограммом. Также отметим, что, рассуждая абсолютно аналогично, мы получим $|LM| = |KN| = \frac{1}{2}|BD|$. Теорема Вариньона доказана.

Замечание. Если стороны четырёхугольника $ABCD$ пересекаются, то не исключен случай совпадения середин сторон AB и CD. Тогда четырёхугольник $KLMN$ выродится в отрезок.

Теперь приведём некоторые формулы и факты, относящиеся к произвольным многоугольникам.

7. Сумма величин углов произвольного многоугольника

Сумма величин всех внутренних углов произвольного выпуклого n-угольника равна $(n-2)\pi$.

Это утверждение доказывается точно так же, как и утверждение о сумме величин внутренних углов четырёхугольника. Отметим, что приведённый факт будет справедлив и для произвольного невыпуклого многоугольника.

8. Свойства правильных многоугольников

Определение. Многоугольник, у которого равны между собой длины всех сторон и равны между собой величины всех его внутренних углов, называется *правильным*.

Отметим, что, в отличие от треугольников, в этом определении приходится требовать и равенство длин сторон, и равенство величин углов. Например, не любой ромб (так же как и не любой прямоугольник) является правильным четырёхугольником. Правильным будет четырёхугольник, который одновременно является и ромбом и прямоугольником, то есть – квадрат.

Докажем несколько соотношений, устанавливающих зависимость между величинами стандартных элементов правильных многоугольников.

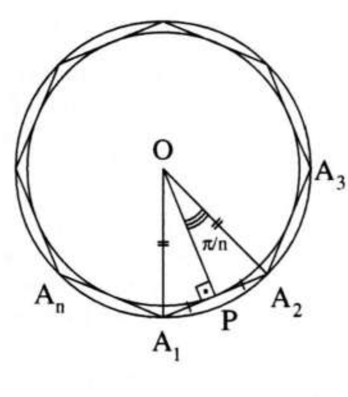
1. *Величины всех внутренних углов правильного n-угольника равны* $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$.

2. *Около правильного n-угольника можно описать окружность. Если длина его стороны равна a, то длина радиуса описанной около него окружности равна* $\dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$.

3. *В правильный n-угольник можно вписать окружность. Если длина его стороны равна a, то длина радиуса вписанной в него окружности равна* $\dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$.

4. *Площадь правильного n-угольника, длина стороны которого равна a, равна* $\dfrac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$.

Доказать все эти утверждения достаточно просто. Рассмотрим правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. Ясно, что у него n внутренних углов, их величины равны между собой, сумма этих величин равна $(n-2)\pi$, стало быть, величина каждого из его внутренних углов равна $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$.



Далее проведём биссектрисы углов $A_nA_1A_2$ и $A_1A_2A_3$, точку их пересечения обозначим буквой O. Поскольку эти углы равны, то равны и углы OA_1A_2 и OA_2A_1, то есть треугольник OA_1A_2 – равнобедренный. Теперь проведём биссектрису угла $A_2A_3A_4$. Пусть R – точка, в которой она пересекается с биссектрисой угла $A_1A_2A_3$. Рассуждая аналогично, мы получим, что треугольник RA_2A_3 тоже равнобедренный. Но поскольку углы OA_2A_1 и RA_2A_3 равны, то равны и треугольники OA_1A_2 и RA_2A_3. Из этого равенства вытекает, что $|OA_2| = |RA_2|$. А так как точки O и R обе лежат на биссектрисе угла $A_1A_2A_3$, то они совпадают. Продолжая эти рассуждения, мы, очевидно, получим, что все биссектрисы внутренних углов рассматриваемого многоугольника проходят через точку O, эта точка равноудалена от всех его сторон, стало быть, в $A_1A_2\ldots A_n$ можно вписать окружность и O – её центр. Отметим также, что попутно мы установили равенство длин всех отрезков OA_1, OA_2, $\ldots$, OA_n. Но это означает, что точка O равноудалена от всех вершин рассматриваемого многоугольника и является центром описанной около него окружности.

Наконец, рассмотрим треугольник OA_1A_2, проведём его высоту OP, которая является также и его биссектрисой, и медианой. Ясно, что отрезок OA_2 является радиусом описанной около $A_1A_2\ldots A_n$ окружности, а отрезок OP есть радиус вписанной в него окружности.

Поскольку все треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, $\ldots$, OA_nA_1 равны между собой, то равны и углы A_1OA_2, A_2OA_3, $\ldots$, A_nOA_1. Этих углов n штук, сумма их величин равна 2π, стало быть, величина каждого из них равна $2\pi/n$. После этого из прямоугольного треугольника OA_2P мы находим

$$|OA_2| = \frac{|PA_2|}{\sin \widehat{A_2OP}} = \frac{\frac{1}{2}|A_1A_2|}{\sin\left(\frac{\widehat{A_1OA_2}}{2}\right)} = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$|OP| = |PA_2|\cdot \operatorname{ctg}\widehat{A_2OP} = \frac{1}{2}|A_1A_2|\cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\widehat{A_1OA_2}}{2}\right) = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Наконец,

$$S_{\triangle A_nOA_1} = \ldots = S_{\triangle A_2OA_3} = S_{\triangle A_1OA_2} = \frac{1}{2}\cdot|A_1A_2|\cdot|OP| = \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},$$

$$S_{A_1A_2\ldots A_n} = S_{\triangle A_1OA_2} + S_{\triangle A_2OA_3} + \ldots + S_{\triangle A_nOA_1} = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Свойства правильных многоугольников доказаны.

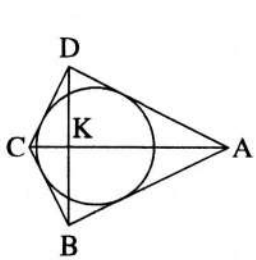
9. Многоугольник, описанный около окружности

Площадь описанного около окружности многоугольника равна произведению длины радиуса этой окружности на его полупериметр.

Доказательство этой формулы абсолютно аналогично доказательству формулы площади четырёхугольника, описанного около окружности.

Примеры решения задач

Пример 1. В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, K – точка пересечения его диагоналей. Известно, что $|AB| > |BC| > |KC|$, $|BK| = 4+\sqrt{2}$, а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 14 и 7. Найдите длину стороны CD.



Решение. В этой задаче достаточно трудно найти путь решения. Тем не менее ясно, что в треугольнике BKC нам известны три элемента, поэтому мы можем вычислить величины его углов и длины его сторон. Обозначим $|BC| = x$, $|KC| = y$, причём, по условию задачи, $x > y$. Пользуясь данным нам значением периметра треугольника BKC и формулой Герона, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 4 + \sqrt{2} = 14, \\ \sqrt{7\cdot(7-x)\cdot(7-y)\cdot(7-(4+\sqrt{2}))} = 7, \\ x > y, \end{cases}$$

решая которую, находим $|BC| = x = 6$, $|KC| = y = 4-\sqrt{2}$.

На первый взгляд кажется, что мы не сильно приблизились к отысканию искомой величины. Однако (и это главный шаг в решении) заметим, что в силу того, что

$$|BC|^2 = 36 = (4+\sqrt{2})^2 + (4-\sqrt{2})^2 = |BK|^2 + |KC|^2,$$

угол BKC – прямой. Запишем свойства четырёухгольника с взаимно перпендикулярными диагоналями и четырёхугольника, описанного около окружности:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|, \quad |AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2.$$

Возводя в квадрат первое из этих равенств и вычитая его из второго, предварительно умноженного на 2, получаем

$$(|AB| - |CD|)^2 = (|AD| - |BC|)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad ||AB| - |CD|| = ||AD| - |BC||.$$

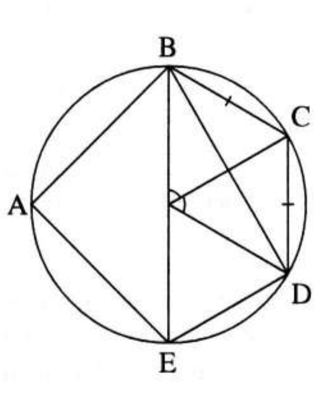
Раскрывая модули и пользуясь тем, что $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$, имеем

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} |AB| - |CD| = |AD| - |BC|, \\ |AB| + |CD| = |AD| + |BC|; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} |AB| - |CD| = |BC| - |AD|, \\ |AB| + |CD| = |AD| + |BC| \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} |AB| = |AD|, \\ |CD| = |BC|; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} |AB| = |BC|, \\ |CD| = |AD|. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Итак, мы доказали, что описанный около окружности четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями обязательно является **дельтоидом**, то есть четырёхугольником, у которого смежные стороны попарно равны по длине. В нашей же задаче по условию $|AB| > |BC|$, поэтому нам подходит только вариант $|AB| = |AD|$, $|CD| = |BC| = 6$.

Ответ. 6.

Пример 2. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность, длина радиуса которой равна 1. Известно, что $|AB| = \sqrt{2}$, $\widehat{ABE} = \pi/4$, $\widehat{EBD} = \pi/6$, а $|BC| = |CD|$. Чему равна площадь пятиугольника $ABCDE$?



Решение. Для вычисления площадей многоугольников, как правило, используется следующий подход: многоугольник делится на несколько треугольников или простых четырёхугольников, площади которых считаются по отдельности и затем суммируются.

Сначала заметим, что треугольник ABE также вписан в окружность из условия задачи. Применяя к нему теорему синусов, получаем

$$\sin \widehat{AEB} = \frac{|AB|}{2R} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и величина угла AEB равна либо $\pi/4$, либо $3\pi/4$. Второй из этих вариантов невозможен в силу того, что сумма величин углов ABE и AEB должна быть меньше, чем π. Итак, $\widehat{AEB} = \pi/4$, поэтому треугольник BAE прямоугольный и равнобедренный, $|AB| = |BE| = \sqrt{2}$, площадь этого треугольника равна 1, а BE – диаметр окружности.

Далее отметим, что угол BDE прямой, поскольку он опирается на диаметр, поэтому величина угла BED равна $\pi/3$, величина угла BCD равна $2\pi/3$ в силу свойств вписанного в окружность четырёхугольника $BCDE$, а величины углов CBD и CDB равны $\pi/6$ (поскольку треугольник BCD равнобедренный по условию задачи). Пользуясь формулой площади треугольника через длину радиуса описанной около него окружности и синусы величин его углов, находим

$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |BD| \cdot \sin \widehat{DBE} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

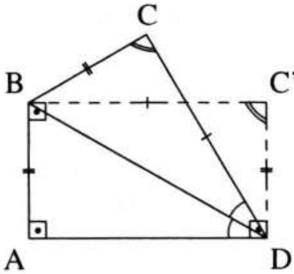
$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |BC| \cdot \sin \widehat{CBD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Наконец, $S_{ABCDE} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ABE} = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Ответ. $1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Пример 3. Известно, что площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равна среднему арифметическому произведений $|AB| \cdot |CD|$ и $|AD| \cdot |BC|$, $|BC| = 4$, $\widehat{ADC} = \pi/3$, $\widehat{BAD} = \pi/2$. Найдите длину стороны CD.

Решение. Условие про площадь четырёхугольника $ABCD$, данное в условии задачи, напоминает условие из разобранного в теоретических материалах факта о том, что площадь выпуклого четырёхугольника не превосходит полусуммы произведений его смежных сторон. Будем рассуждать следующим образом: возьмём в той же полуплоскости относительно прямой BD, где находится точка C, точку C' таким образом, что $|BC| = |C'D|$, $|CD| = |BC'|$. Тогда треугольники BCD и $DC'B$ равны по трём сторонам, поэтому равны и их площади, а, стало быть, равны и площади четырёхугольников $ABCD$ и $ABC'D$. Значит,



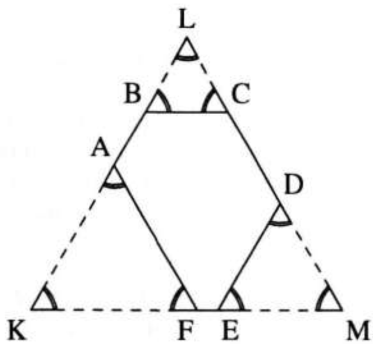
$$S_{ABC'D} = \frac{|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|}{2} = \frac{|AB| \cdot |BC'| + |AD| \cdot |C'D|}{2},$$

из чего следует, что углы ABC' и ADC' – прямые.

Далее всё достаточно просто. Поскольку угол BAD тоже прямой, то четырёхугольник $ABC'D$ является прямоугольником, поэтому $\widehat{BCD} = \widehat{BC'D} = \pi/2$, $|AB| = |C'D|$. Но тогда прямоугольные треугольники ABD и CBD равны по гипотенузе и катету, значит, равны и углы ADB и CDB. Сумма же их величин равна величине угла ADC, то есть $\pi/3$. Итак, $\widehat{CDB} = \pi/6$, и из прямоугольного треугольника CDB мы находим $|CD| = |BC| \cdot \operatorname{ctg} \widehat{BDC} = 4\sqrt{3}$.

Ответ. $4\sqrt{3}$.

Пример 4. Величины всех внутренних углов шестиугольника $ABCDEF$ равны. Известно, что $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CD| = 5$, $|EF| = 1$. Найдите длины сторон DE и AF.



Решение. Сразу вычислим величины всех внутренних углов нашего шестиугольника. Сумма этих величин равна $\pi \cdot (6-2) = 4\pi$, поэтому величина каждого из этих углов равна $2\pi/3$. Опираясь на этот факт, можно заметить, что любой треугольник, до которого достраивается шестиугольник $ABCDEF$, будет равносторонним. Действительно, если обозначить буквой K точку пересечения прямых AB и EF, буквой L – точку пересечения прямых AB и CD, а буквой M – точку пересечения прямых CD и EF, то в силу того, что $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 2\pi/3$, мы получаем, что $\widehat{LBC} = \widehat{LCB} = \pi/3$, поэтому $\widehat{L} = \pi/3$ и треугольник BLC – равносторонний. Рассуждая аналогично, мы заключаем, что треугольники AKF и DEM тоже равносторонние, $\widehat{K} = \widehat{M} = \pi/3$. Стало быть, треугольник KLM также равносторонний.

Теперь обозначим $|AF| = x$, $|DE| = y$. Тогда из вышесказанного вытекает

$$|AK| = |KF| = x, \quad |DM| = |ME| = y, \quad |BC| = |BL| = |LC| = 4.$$

Наконец, выписывая длины сторон треугольника KLM и приравнивая их друг к другу, получаем

$$|KL| = x+3+4, \quad |LM| = 4+5+y, \quad |KM| = x+1+y \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x+7 = x+y+1, \\ 9+y = x+y+1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y=6, \quad x=8.$$

Ответ. $|DE| = 6$, $|AF| = 8$.

Задачи

1. В окружность, длина радиуса которой равна 17, вписан четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и находятся на расстоянии 8 и 9 от центра окружности. Найдите длины сторон этого четырёхугольника.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка E – точка пересечения диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь четырёхугольника $ABCD$ не превосходит 4, $|AD| = 3$. Найдите длину стороны BC.

3. В выпуклом четырёхугольнике длины диагоналей равны 1 и 2. Найдите его площадь, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найдите величину угла между прямыми AB и CD.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ величина угла, под которым пересекаются отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равна $\pi/3$, а длины этих отрезков относятся как 1:3. Чему равна длина меньшей диагонали четырёхугольника $ABCD$, если длина большей равна $\sqrt{39}$?

6. В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC. Известно, что $|MN| = a$, $|BD| = b$. Найдите величину угла ABC.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина стороны AD равна 4, длина стороны CD равна 7, косинус величины угла ADC равен $1/2$, синус величины угла BCA равен $1/3$. Найдите длину стороны BC, если известно, что окружность, описанная около треугольника ABC, проходит также и через точку D.

8. Четырёхугольник $PQRS$ вписан в окружность. Его диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $|PS| = 13$, $|QM| = 10$, $|QR| = 26$. Найдите площадь четырёхугольника $PQRS$.

9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD и AOD равны соответственно 20, 40 и 60. Найдите градусную меру угла BAO, если известно, что $|AB| = 15$, $|AO| = 8$, а градусная мера угла BOA больше 31°.

10. Диагонали четырёхугольника $PQRS$, вписанного в окружность, пересекаются в точке D. На прямой PR взята точка A, $\widehat{SAD} = 50^\circ$, $\widehat{PQS} = 70^\circ$, $\widehat{RQS} = 60^\circ$. Где расположена точка A: на диагонали PR или на её продолжении? Ответ обосновать.

11. В трапецию, длины оснований которой равны 3 и 5, можно вписать окружность и около неё можно описать другую окружность. Вычислите площадь пятиугольника, образованного радиусами вписанной окружности, перпендикулярными боковым сторонам трапеции, её меньшим основанием и соответствующими отрезками боковых сторон.

12. Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности, длина радиуса которой равна $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM, если известно, что $LM||KN$, $KM||NP$, $MN||LP$, а $\widehat{LOM} = \pi/4$, где O – точка пересечения хорд LN и MP.

13. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к прямой AB, пересекает сторону CD в точке M. Докажите, что EM – медиана треугольника CED, и найдите её длину, если $|AD| = 8$, $|AB| = 4$ и $\widehat{CDB} = \alpha$.

14. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Точки L и M являются соответственно серединами сторон BC и AD. Отрезок LM содержит точку K. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность. Найдите длину радиуса этой окружности, если $|AB| = 3$, $|AC| = \sqrt{13}$ и $|LK| : |KM| = 1 : 3$.

15. В трапеции $BCDE$ $CD||BE$, $|BE| = 13$, $|CD| = 3$, $|CE| = 10$. На описанной около $BCDE$ окружности взята отличная от E точка A так, что $|AC| = 10$. Найти длину отрезка AB и площадь пятиугольника $ABCDE$.

16. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке P. Точка M является серединой отрезка AD, длина отрезка CM равна $5/4$. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $1/2$, $|AP| = 1$. Найдите длину отрезка AD, если известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

17. Параллелограммы $ABCD$ и $A'BCD'$ имеют общую сторону BC и расположены симметрично относительно прямой BC (точка A' симметрична точке A, точка D' симметрична точке D). Диагональ BD первого параллелограмма и сторона BA' второго параллелограмма лежат на одной прямой. Величина угла между диагоналями AC и $A'C$ двух параллелограммов равна $\pi/4$, площадь пятиугольника $ADCD'A'$ равна $15\sqrt{2}$. Найдите длины сторон параллелограмма $ABCD$.

18. Точки K, L и M расположены на сторонах AB, BC и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно, причём выполнены соотношения $|AK| : |BK| = |CL| : |BL| = |CM| : |DM| = 1 : 2$. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника KLM, равна $5/2$, $|KL| = 4$, $|LM| = 3$. Чему равна площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $|KM| < |KL|$?

19. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок CM, соединяющий вершину C с точкой M, расположенной на стороне AD, пересекает диагональ BD в точке K. Известно, что $|CK| : |KM| = 2 : 1$, $|CD| : |DK| = 5 : 3$, $\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = \pi$. Найдите отношение длин стороны AB и диагонали AC.

20. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, P – точка пересечения его диагоналей, $|AB| = |CD| = 5$, $|AD| > |BC|$. Длина высоты, опущенной из точки B на сторону AD, равна 3, а площадь треугольника ADP равна $25/2$. Найдите длины сторон AD и BC, а также длину радиуса окружности.

21. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что угол DAB острый, угол ADC тупой, $\sin\widehat{DAB} = 3/5$, $\cos\widehat{ABC} = -63/65$. Окружность с центром в точке O касается сторон BC, CD и AD. Найдите длину отрезка OC, если $|AB| = 25/64$, $|BC| = 793/64$, $|CD| = 25/4$.

22. В окружность, длина радиуса которой равна 2, вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K, лежащей на продолжении стороны AF таким образом, что $|KA| < |KF|$ и $|KA| = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH, пересекающая окружность в точках N и H, причём точка N лежит между точками K и H. Известно, что $|KN| = 2$, а угол NFH – тупой. Найдите величину угла HKF.

23. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами внутренних углов при вершинах B и C соответственно, $\widehat{A} = 35^\circ$, $\widehat{D} = 145^\circ$, а площадь треугольника BCE равна 11. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

24. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD – в точке O. Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD. Найдите отношение площадей

треугольника AOD и четырёхугольника $ABCD$, если $|OA| = 12$, $|OD| = 8$, $|CD| = 2$.

25. В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E, лежащей на стороне CD. Известно, что отношение длины отрезка CD к длине отрезка BC равно m. Найдите:

    1) отношение расстояний от точки E до прямых AD и BC,

    2) отношение площадей треугольников ADE и BCE.

26. Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, причём $|AD| \cdot |CE| = |DC| \cdot |AE|$, $|BD| = 6$, $\widehat{ADB} = \pi/8$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

27. На одной стороне угла O взяты точки K, L и M, а на другой его стороне – точки P, Q и R таким образом, что $KQ \perp PR$, $PL \perp KM$, $LR \perp PQ$, $QM \perp KL$. Известно, что отношение расстояния от точки O до центра вписанной в четырёхугольник $KPRM$ окружности к длине отрезка KP равно $17 : 6$. Найдите величину угла O.

4. Задачи на доказательство

Задачи, приведённые в этом разделе, очень редко можно встретить на письменном экзамене. Однако такие задачи позволяют узнать много интересных и полезных для решения задач письменных экзаменов фактов. Они также позволяют научиться видеть и доказывать полезные соотношения в треугольниках, многоугольниках и окружностях.

4.1. Треугольники

Теоретический материал

Напомним основные формулы и теоремы, связанные с треугольниками.

- *Условие существования треугольника:* если даны три отрезка с длинами a, b, c, то для того, чтобы существовал треугольник со сторонами a, b, c, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

  Здесь и ниже a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – соответствующие противоположные им углы.

- *Монотонно возрастающая зависимость сторон от углов:* если даны стороны треугольника a, b, c, то для того, чтобы они удовлетворяли неравенствам $a \geq b \geq c$, необходимо и достаточно выполнение неравенств $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

- *Теорема о сумме углов треугольника:* для углов треугольника α, β, γ справедливо равенство $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

- *Теорема о биссектрисах:* все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка есть центр вписанной окружности.

- *Теорема о медианах:* все медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в соотношении $2:1$, считая от вершины.

- *Теорема о высотах:* все высоты треугольника пересекаются в одной точке.

- *Теорема о серединных перпендикулярах:* все серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка есть центр описанной окружности.

- *Теорема косинусов:* для сторон и углов треугольника имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$

- *Теорема синусов:* для сторон и углов треугольника имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

  где R – радиус описанной вокруг треугольника окружности.

- *Теорема о биссектрисе:* биссектриса угла α треугольника делит противолежащую сторону a на прилежащие к сторонам b и c отрезки a_b и a_c, которые пропорциональны b и c:
$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}.$$

- *Теорема Фалеса:* если при пересечении сторон угла параллельными прямыми на одной стороне угла отсекаются равные между собой отрезки, то и на другой стороне угла отсекаются также равные между собой отрезки.

- *Обобщённая теорема Фалеса:* при пересечении сторон угла параллельными прямыми на сторонах угла отсекаются пропорциональные отрезки.

- *Формулы длины биссектрисы:*
$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}, \quad l_a^2 = bc - a_b \cdot a_c,$$
здесь a_b, a_c – отрезки из теоремы о биссектрисе.

- *Формула длины медианы:*
$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}.$$

- *Признаки подобия треугольников:* два треугольника подобны по двум углам, по двум сторонам и углу между ними, по трём сторонам.

  Напомним, что в подобных треугольниках отношение длин соответствующих сторон, биссектрис, медиан, высот равно k – коэффициенту подобия. Отношение площадей подобных треугольников равно k^2.

Примеры решения задач

Пример 1. Дан треугольник ABC. Доказать, что
$$\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \leq \frac{3}{2}.$$

Решение. Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma = \pi - \alpha - \beta$, тогда
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 =$$
$$= -2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 \leq \frac{3}{2},$$
что и требовалось доказать.

Пример 2. Существует ли треугольник с углами

$$\operatorname{arctg} 2,\ \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right),\ \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)?$$

Решение. Для того чтобы существовал такой треугольник, надо, чтобы

$$\operatorname{arctg} 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) = \pi.$$

Для того чтобы доказать равенство

$$\operatorname{arctg} 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \pi - \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right),$$

достаточно показать, что косинус левой части равен косинусу правой и обе части лежат в пределах от нуля до π. Для левой части равенства справедливо

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) < \frac{2\pi}{3},$$

поскольку

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) < \frac{\pi}{6}.$$

Для правой части равенства справедливо

$$0 < \pi - \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) < \frac{\pi}{2}, \quad \text{так как} \quad \frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) < \pi.$$

Теперь вычислим значение косинуса от левой и правой частей равенства, получим

$$\cos\left(\operatorname{arctg} 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \frac{1}{5\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \cos\left(\pi - \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Следовательно, такой треугольник существует.

Ответ. Существует.

Пример 3. В прямоугольном треугольнике длины сторон – натуральные взаимно простые числа. Доказать, что длина гипотенузы – нечётное число, а длины катетов имеют разную чётность.

Решение. Пусть m и k – длины катетов прямоугольного треугольника; n – длина гипотенузы; m, n, k – взаимно простые числа и $n^2 = m^2 + k^2$.

Пусть n – чётное число, то есть $n = 2l$. Из равенства $m^2 + k^2 = 4l^2$ следует, что m и k имеют одинаковую чётность. Причём чётными они быть не могут, так как по условию являются взаимно простыми.

Значит, $m = 2l_1 + 1,\ k = 2l_2 + 1$ и

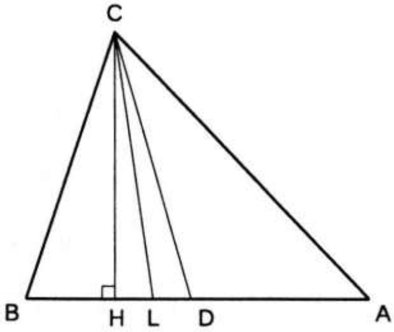
$$4l^2 = (2l_1+1)^2 + (2l_2+1)^2 \iff 4l^2 = 4l_1^2 + 4l_2^2 + 4l_1 + 4l_2 + 2.$$

Это невозможно, так как левая часть уравнения делится на 4, а правая – нет.

Следовательно, $n = 2l + 1$, но тогда числа m и k должны иметь разную чётность.

Пример 4. Доказать, что если в треугольнике из одной вершины проведены медиана, биссектриса и высота, то биссектриса лежит между медианой и высотой.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, где высота CH, биссектриса CL и медиана CD проведены к стороне AB. Если $BC = AC$, то CH, CL и CD совпадают. Пусть для определенности $AC > BC$.



По свойству биссектрисы

$$\frac{BL}{AL} = \frac{BC}{AC} < 1 \quad \Longrightarrow \quad BL < AL,$$

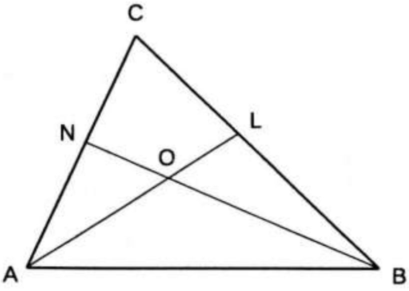
следовательно, точка L лежит между точками B и D, так как $BD = AD$. Поскольку

$$AC > BC \quad \Longrightarrow \quad \angle CBA > \angle CAB,$$

то $\angle BCH < \angle ACH$, следовательно, $\angle BCH < \angle BCL$ и точка H лежит между точками B и L, так как $\angle BCL = \angle ACL$.

Пример 5. Докажите, что площадь треугольника меньше единицы, если длины всех биссектрис меньше единицы.

Решение. Поскольку высота в треугольнике всегда меньше соответствующей биссектрисы, то



$$h_a < l_a < 1, \quad h_b < l_b < 1, \quad h_c < l_c < 1.$$

Докажем, что все стороны треугольника меньше двух. Пусть биссектрисы AL и BN треугольника ABC пересекаются в точке O.

Из неравенства треугольника для $\triangle ABO$ следует, что

$$AB < AO + BO < AL + BN < 2.$$

Аналогично получаем, что $BC < 2$ и $AC < 2$. Оценим площадь ΔABC

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a < \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1,$$

то есть $S_{ABC} < 1$.

Задачи

1. Какого вида треугольник, у которого высоты $3, 4, 5$?
2. Доказать, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный.
3. Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Доказать, что этот треугольник равнобедренный.

4. Доказать, что если у треугольника равны две медианы, то он равнобедренный.

5. Пусть длины сторон прямоугольного треугольника – натуральные числа. Доказать, что длина одного из катетов кратна трём.

6. Доказать, что все прямоугольные треугольники, стороны которых образуют арифметическую прогрессию, подобны «египетскому» треугольнику (длины его сторон равны 3, 4, 5).

7. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника. Доказать, что

$$2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) > a^4 + b^4 + c^4.$$

8. Доказать, что если медиана и высота, проведённые из одной вершины треугольника, делят его угол на три равные части, то треугольник – прямоугольный.

9. Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

10. Две биссектрисы у треугольника равны. Доказать, что он равнобедренный.

11. Доказать, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон равна боковой высоте.

12. В треугольнике ABC угол A – прямой. Из вершины A проведены медиана AM, высота AH и биссектриса AL. Доказать, что AL – биссектриса в треугольнике AMH.

13. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом, противолежащим основанию, равнобедренный треугольник имеет наибольшую площадь.

14. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом, противолежащим основанию, равнобедренный треугольник имеет наибольший периметр.

15. Доказать, что сумма медиан треугольника
    а) меньше P,
    б) больше $\dfrac{3}{4}P$, где P – периметр треугольника.

16. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри (или на стороне) треугольника, до трёх его сторон заключена между наибольшей и наименьшей его высотами. Найти точку в треугольнике, сумма расстояний от которой до сторон наибольшая.

17. Какого вида треугольник, у которого медианы 3, 4 и 5?

18. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Доказать, что

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

19. Доказать, что для любого треугольника справедливо неравенство $h_a \le \sqrt{p\cdot(p-a)}$.

20. Доказать, что для любого треугольника справедливо неравенство
$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

4.2. Многоугольники

Теоретический материал

Напомним основные формулы и теоремы.

У параллелограмма

- противоположные стороны равны;
- противоположные углы равны;
- диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
- сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон.

У трапеции

- средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме;
- сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна π.

У прямоугольника

- диагонали равны.

У ромба

- диагонали перпендикулярны и являются биссектрисами соответствующих углов.

У произвольного выпуклого n-угольника

- сумма углов равна $\pi(n-2)$.

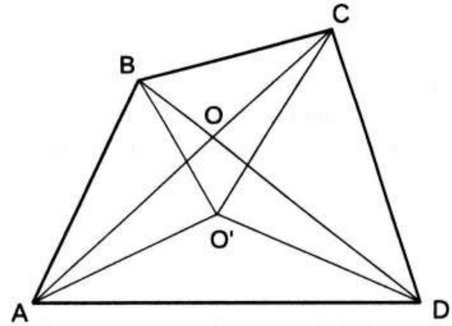
Признаки параллелограмма. Четырёхугольник является параллелограммом, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- противоположные стороны попарно равны;
- противоположные углы попарно равны;
- диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
- две противоположные стороны равны и параллельны.

Примеры решения задач

Пример 1. Внутри выпуклого четырёхугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин четырёхугольника минимальна.

Решение. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O.



Расстояние от точки O до вершин четырёхугольника равно

$$AO + BO + CO + DO = AC + BD.$$

Рассмотрим произвольную точку O_1, лежащую внутри четырёхугольника. Имеем

$$AO_1 + O_1C \geq AC, \quad BO_1 + O_1D \geq BD,$$

следовательно,

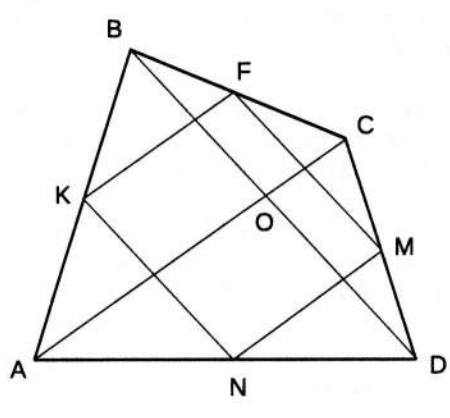
$$AO_1 + O_1C + BO_1 + O_1D \geq AC + BD,$$

то есть точка пересечения диагоналей четырёхугольника есть та точка, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

Ответ. Точка пересечения диагоналей.

Пример 2. Доказать, что если соединить середины сторон выпуклого четырёхугольника, то получится параллелограмм. Когда этот параллелограмм будет ромбом? Квадратом?

Решение. Пусть точки K, F, M и N – середины соответственно сторон AB, BC, CD и AD четырёхугольника $ABCD$.



Отрезок KF – средняя линия треугольника ABC, отрезок MN – средняя линия треугольника ADC, значит,

$$KF \parallel AC, \quad KF = \frac{1}{2}AC, \quad MN \parallel AC, \quad MN = \frac{1}{2}AC,$$

следовательно,

$$KF \parallel MN, \quad KF = MN$$

и четырёхугольник $KFMN$ – параллелограмм.

Если диагонали четырёхугольника равны $(AC = BD)$, то параллелограмм $KFMN$ будет ромбом. Если диагонали ещё и взаимно перпендикулярны, то ромб $KFMN$ будет квадратом.

Задачи

1. Доказать, что если каждая из диагоналей выпуклого четырёхугольника делит его на равновеликие треугольники, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

2. В равнобедренной трапеции диагональ имеет длину 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, а другое равно 5?

3. Доказать, что из всех прямоугольников с данной диагональю наибольшую площадь имеет квадрат.

4. Какой четырёхугольник с диагоналями d_1 и d_2 имеет максимальную площадь?

5. Доказать, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырёхугольник – трапеция.

6. Доказать, что биссектрисы углов, прилежащих к одной из непараллельных сторон трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции (или её продолжении).

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ с диагоналями AC и BD на стороны CD и AB опущены соответственно высоты AE и DF. Известно, что $AE \geq BD$, $DF \geq AC$, $AD = 2 \cdot AB$. Найти меры углов четырёхугольника $ABCD$.

8. В выпуклом четырёхугольнике $KLMN$ с диагоналями LN и KM на стороны MN и KL опущены соответственно высоты KP и NQ. Известно, что $KP \geq LN$, $NQ \geq KM$, $KL = 3$, $KN = 5$. Найти KM.

9. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, у которого $AB + BD \leq AC + CD$. Сравните длины отрезков AB и AC.

4.3. Окружности

Теоретический материал

Напомним основные утверждения об углах в окружностях:

- *центральный угол* равен по величине мере дуги окружности, на которую он опирается;
- *вписанный угол* равен по величине половине меры дуги окружности, на которую он опирается;
- *угол, составленный секущими к окружности,* равен полуразности мер дуг, на которые он опирается;
- *угол, составленный пересекающимися хордами,* равен полусумме мер дуг, на которые он опирается;
- *угол, составленный касательной и хордой,* измеряется половиной меры дуги, стягиваемой этой хордой.

Полезные следствия:

- вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны;
- вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду (или на равные хорды), равны или в сумме равны π;
- вписанный угол является прямым тогда и только тогда, когда он опирается на диаметр.

Теоремы о касательных, хордах и секущих:

- отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности;
- произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны;
- квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину её внешней части.

Теоремы о вписанных и описанных окружностях:

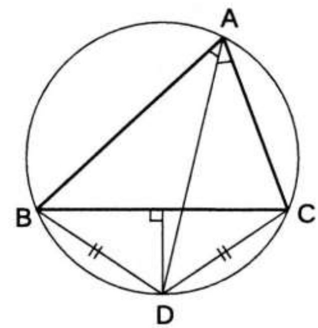
- вокруг произвольного треугольника можно описать окружность, центром этой окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;
- в произвольный треугольник можно вписать окружность, центром этой окружности является точка пересечения биссектрис треугольника;
- для того чтобы вокруг четырёхугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных углов были равны π;

- для того чтобы в четырёхугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин противоположных сторон были равны;

- для того чтобы вокруг трапеции можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы эта трапеция была равнобедренной.

Примеры решения задач

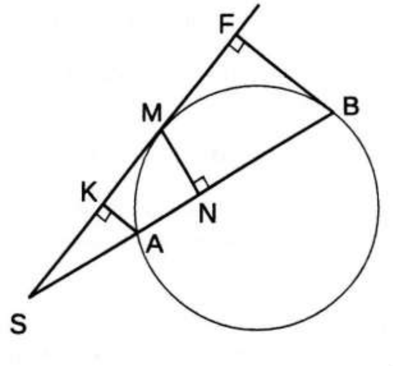
Пример 1. Доказать, что если из вершины A неравнобедренного треугольника ABC проведена биссектриса, а из середины BC восстановлен перпендикуляр, то точка их пересечения лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.



Решение. Пусть D – точка пересечения биссектрисы угла BAC треугольника ABC с описанной окружностью. Из равенства углов BAD и CAD следует, что $BD = CD$ и треугольник BDC равнобедренный. Следовательно, перпендикуляр, опущенный из точки D на отрезок BC, делит его пополам.

Пример 2. Доказать, что расстояние от точки окружности до хорды круга есть среднее пропорциональное между расстояниями от концов хорды до касательной к окружности в этой точке.

Решение. Если хорда AB параллельна касательной, проведённой в точке M, то все три расстояния равны и утверждение задачи справедливо. Рассмотрим случай, когда продолжение хорды AB и касательной в точке M пересекаются. Обозначим точку пересечения S; MN – расстояние от точки M до хорды AB; AK и BF – расстояния от концов хорды до касательной. Требуется доказать, что $MN = \sqrt{BF \cdot AK}$.



Треугольник SKA подобен треугольнику SFB, тогда $\dfrac{AS}{SB} = \dfrac{AK}{BF}$. Треугольник SAK подобен треугольнику SMN, следовательно, $\dfrac{AS}{SM} = \dfrac{AK}{MN}$ и $MN = \dfrac{SM}{AS}AK$.

По свойству касательной и секущей

$$SM = \sqrt{SA \cdot SB}.$$

Откуда получаем, что

$$MN = \frac{SM}{AS}AK = \sqrt{\frac{SB}{AS}}AK = \sqrt{\frac{BF}{AK}}AK = \sqrt{BF \cdot AK}.$$

Пример 3. Доказать, что если четырёхугольник вписан в окружность, то произведение его диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон (теорема Птолемея).

Решение. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Введём обозначения:

$$AB = b,\ AD = a,\ BC = c,\ CD = d,\ AC = d_1,\ BD = d_2.$$

Надо доказать, что $d_1 d_2 = ac + bd$. Проведём отрезок AA_1, параллельный BD, тогда четырёхугольник AA_1DB – трапеция и $A_1D = AB = b$, $A_1B = AD = a$. Треугольник DA_1B равен треугольнику DAB по трём сторонам. Тогда

$$S_{DA_1B} = S_{DAB},$$

$$S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{BAD}, \quad S_{A_1BCD} = S_{BCD} + S_{BA_1D},$$

то есть $S_{ABCD} = S_{A_1BCD}$. Пусть $\angle DOA = \varphi$, тогда, с одной стороны,

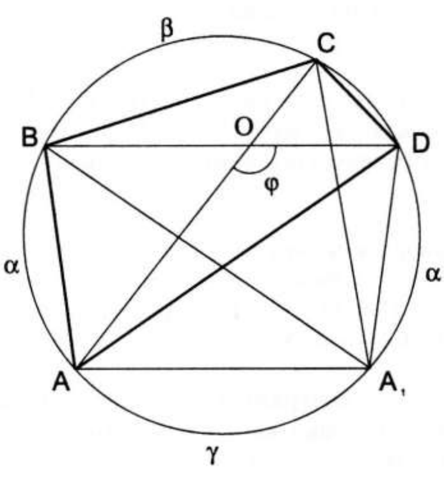
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$$

и, с другой стороны,

$$S_{ABCD} = S_{A_1BCD} = S_{A_1BC} + S_{A_1CD} =$$

$$= \frac{1}{2}A_1B \cdot BC \cdot \sin\angle A_1BC + \frac{1}{2}A_1D \cdot CD \cdot \sin\angle A_1DC =$$

$$= \frac{1}{2}ac \cdot \sin\angle A_1BC + \frac{1}{2}bd \cdot \sin\angle A_1DC.$$



Для того чтобы доказать равенство $d_1 d_2 = ac + bd$, нам достаточно показать, что $\angle A_1DC = \varphi$. Обозначим

$$\smile AB = \smile A_1D = \alpha, \quad \smile BC = \beta, \quad \smile AA_1 = \gamma,$$

тогда по свойству вписанных углов

$$\angle A_1DC = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2},$$

а по свойству углов между пересекающимися хордами получаем

$$\angle AOD = \varphi = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

Значит, $\angle A_1DC = \varphi$. Тогда $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(ac + bd) \cdot \sin\varphi$, откуда следует, что $d_1 d_2 = ac + bd$.

Задачи

1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.

2. В круг вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций равны.

3. Может ли у треугольника со сторонами меньше 1 радиус описанной окружности быть больше 100?

4. Доказать, что касательные к двум пересекающимся окружностям, проведённые из любой точки продолжения их общей хорды, равны между собой.

5. В окружности проведены равные пересекающиеся хорды. Доказать, что соответствующие части этих хорд, на которые они делятся точкой пересечения, равны.

6. Через точки пересечения двух окружностей P и P' проводятся произвольные прямые, пересекающие окружности. Через точки пересечения этих прямых с окружностями проводятся прямые m и m'. Доказать, что m параллельна m'.

7. К двум непересекающимся окружностям проведены две общие внешние касательные и внутренняя. Точки M и N – точки касания внешней касательной с окружностями, а P и Q – точки пересечения внутренней касательной с внешними. Доказать, что $MN = PQ$.

8. К двум окружностям с центрами O_1 и O_2, касающимся внешним образом в точке A, проведена общая касательная BC (B и C – точки касания). Доказать, что угол BAC – прямой.

4.4. Площади

Теоретический материал

Напомним основные формулы.

- *Площадь треугольника:*

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a, \quad S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\gamma, \quad S = p \cdot r, \quad S = \frac{abc}{4R},$$

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$$

где a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – соответствующие противоположные им углы; h_a, h_b, h_c – высоты; проведённые к сторонам; p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной в треугольник окружности; R – радиус описанной около треугольника окружности.

- *Площадь параллелограмма:*

$$S = a \cdot h_a, \quad S = a \cdot b \cdot \sin\gamma,$$

где a и b – стороны параллелограмма; γ – угол, образованный сторонами a и b; h_a – высота, проведённая к стороне a.

- *Площадь трапеции:*

$$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h,$$

где a, b – длины оснований трапеции, а h – её высота.

- *Площадь произвольного четырёхугольника:*

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi,$$

где d_1, d_2 – длины диагоналей четырёхугольника, а φ – угол между ними.

Примеры решения задач

Пример 1. Существует ли треугольник, у которого две высоты больше 100, а площадь меньше 1?

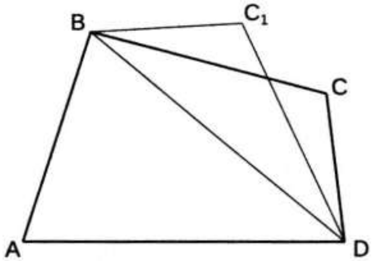
Решение. Пусть $h_a > 100$ и $h_b > 100$. Так как $a > h_b$, то $a > 100$ и

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a > \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 5000.$$

Ответ. Не существует.

Пример 2. Пусть a, b, c, d – последовательные стороны произвольного выпуклого четырехугольника. Доказать, что его площадь $S \le \dfrac{ac+bd}{2}$.

Решение. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ стороны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$.



Построим треугольник BDC_1 такой, что $BC_1 = CD = c$, $DC_1 = BC = b$. Площадь четырёхугольника ABC_1D равна площади четырехугольника $ABCD$. Пусть $\angle ABC_1 = \alpha$, $\angle ADC_1 = \gamma$, тогда

$$S_{ABCD} = S_{ABC_1D} = S_{ABC_1} + S_{ADC_1} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC_1 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC_1 \cdot \sin\gamma =$$

$$= \frac{ac \cdot \sin\alpha + bd \cdot \sin\gamma}{2} \le \frac{ac+bd}{2}.$$

Задачи

1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что для его площади S имеет место неравенство $S \le \dfrac{1}{2}(ab + cd)$. В каких случаях это неравенство обращается в равенство?

2. Все стороны выпуклого четырёхугольника меньше 7. Доказать, что его площадь строго меньше 50.

3. В треугольнике ABC заданы длины двух его сторон a и b. Доказать, что для его площади S справедливо неравенство $S \le \dfrac{a^2+b^2}{4}$. В каком случае это неравенство обращается в равенство?

4. Может ли уменьшиться площадь треугольника при увеличении всех его сторон?

5. Задачи на построение

Задачи на построение нельзя встретить на письменном экзамене. Однако такие задачи позволяют узнать много интересных и полезных для решения задач письменных экзаменов фактов. Они также позволяют научиться видеть и доказывать полезные соотношения в треугольниках, многоугольниках и окружностях.

5.1. Алгебраический метод

Теоретический материал

Решение задачи на построение состоит в описании последовательности операций, которые надо проделать циркулем и линейкой, чтобы получить нужную фигуру.

С помощью циркуля можно

- провести окружность с центром в любой точке плоскости радиусом, равным длине заданного отрезка;
- найти точки пересечения проведённой окружности с любым заданным объектом плоскости (прямой, окружностью и т.п.).

С помощью линейки можно

- провести прямую через две заданные точки;
- найти пересечение проведённой прямой с любым заданным объектом плоскости.

Общая схема решения задач на построение такова.

- Анализ — считаем, что искомая фигура построена, рисуем её, исследуем геометрические свойства, которые могут подсказать способ её построения.
- Построение — указывается последовательность действий, дающих искомую фигуру.
- Доказательство — приводится обоснование того, что построено именно то, что требовалось (в большинстве случаев это следует из самого построения).
- Исследование — определяются условия, при которых существует решение задачи, анализируется число различных решений.

Приведём список элементарных построений, которые будут использоваться при решении задач:

1) поделить отрезок на n равных частей;
2) поделить угол пополам;
3) провести через данную точку перпендикуляр к данной прямой;
4) провести через данную точку прямую, параллельную данной прямой;
5) построить треугольник по трём сторонам;
6) построить треугольник по двум сторонам и углу между ними;
7) построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

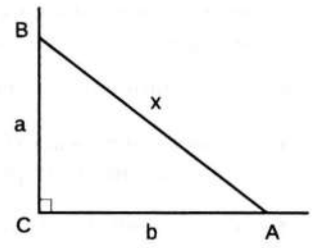
Если какое-либо из элементарных построений вызывает у вас трудности, повторите соответствующий материал в школьном учебнике.

Алгебраический метод решения задач на построение заключается в построении искомых элементов по формулам, выражающим их зависимость от заданных элементов.

Большинство задач этого вида решается с помощью комбинирования основных четырёх формул, приведённых ниже.

Примеры решения задач

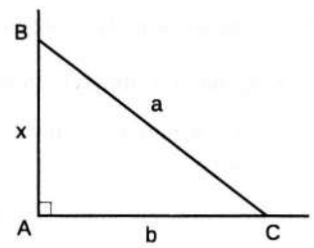
Пример 1. Построение отрезка $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, где a и b – заданные отрезки.



Решение. Построим прямой угол и на его сторонах отложим катеты a и b. Соединив полученные точки A и B, по теореме Пифагора получим

$$x = AB = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Пример 2. Построение отрезка $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, где a и b – заданные отрезки.

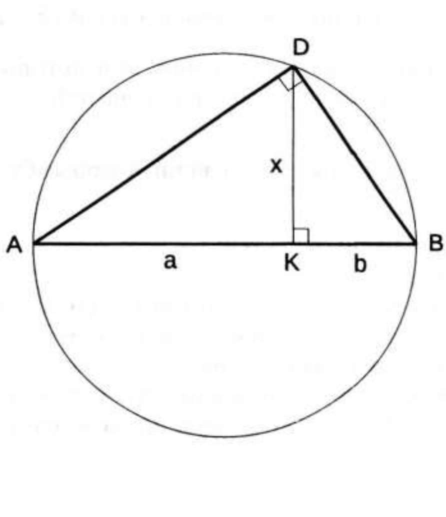


Решение. Построим прямой угол и на одной из его сторон отложим катет b. Из полученной точки C раствором циркуля, равным a, сделаем засечку на другой стороне угла. Второй катет построенного треугольника по теореме Пифагора равен

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Пример 3. Построение отрезка $x = \sqrt{ab}$, где a и b – заданные отрезки.

Решение. Отложим на прямой отрезки $AK = a$, $KB = b$ (точки A и B находятся по разные стороны от точки K) и построим окружность на отрезке AB, как на диаметре.

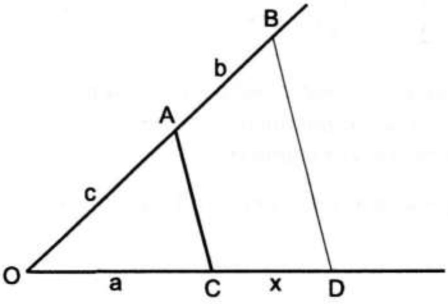


Из точки K восстановим перпендикуляр до пересечения с окружностью в точке D. В прямоугольном треугольнике ADB отрезок DK будет высотой, проведённой из прямого угла к гипотенузе. Следовательно, $DK = \sqrt{AK \cdot BK} = \sqrt{ab}$.

Пример 4. Построение отрезка $x = \dfrac{ab}{c}$, где a, b и c – заданные отрезки.

Решение. На сторонах произвольного угла с вершиной O отложим отрезки $OA = c$, $AB = b$, $OC = a$. Через точку B проведём прямую, параллельную AC, которая пересечёт другую сторону угла в точке D.

По теореме Фалеса имеем $\dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{x}$, откуда $x = \dfrac{ab}{c}$.



Пример 5. Найти геометрическое место точек, расстояния от которых до двух данных точек A и B находятся в заданном отношении $m : n \neq 1$.

Решение. В следующем параграфе будет предложено геометрическое решение этой задачи. Сейчас решим её с помощью алгебраического метода.

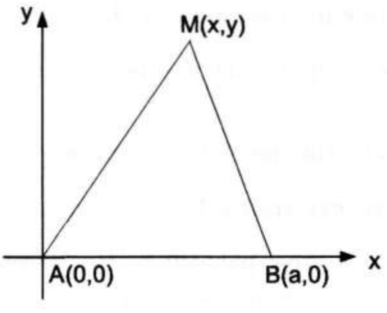
Обозначим длину отрезка AB через a, отношение $m : n$ через k. Примем точку A за начало координат и прямую AB за ось x.

Точка M с координатами (x, y) принадлежит искомому ГМТ $\iff$

$$\iff \quad \frac{AM}{MB} = k \quad \iff \quad \frac{x^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = k^2.$$

Домножим равенство на знаменатель и сгруппируем слагаемые по степеням x. Поделив полученное уравнение на коэффициент перед x^2, получим

$$x^2 - \frac{2ak^2}{k^2 - 1} \cdot x + y^2 + \frac{a^2k^2}{k^2 - 1} = 0 \quad \iff \quad \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^2}{(k^2 - 1)^2}.$$



Мы получили уравнение окружности радиуса $\dfrac{ak}{|k^2-1|}$ с центром на прямой AB на расстоянии $\dfrac{ak^2}{|k^2-1|}$ от точки A справа, если $k>1$, и слева, если $k<1$. Полученная окружность называется *окружностью Аполлония.*

Пример 6. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, выходящей из общей вершины данных сторон.

Решение. Пусть даны a, b, m_c, тогда

$$m_c{}^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}, \quad \text{откуда} \quad c = \sqrt{2a^2+2b^2-4m_c^2}.$$

Для того чтобы построить отрезок длины c, сначала построим отрезки $x=\sqrt{2}a$, $y=\sqrt{2}b$, потом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и, наконец, $c=\sqrt{z^2-(2m_c)^2}$. В результате осталось построить треугольник по трём сторонам.

Замечание. Геометрическое решение этой задачи будет приведено в одном из следующих параграфов.

Задачи

1. Дан отрезок a. Построить отрезок $x=a\cdot\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$.
2. Даны отрезки a, b, c. Построить отрезок $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
3. Дан отрезок a. Построить отрезок $x=a\cdot\sqrt[4]{2}$.
4. Даны отрезки a, b. Построить отрезок $x=\dfrac{a^{1995}}{b^{1994}}$.
5. Даны два отрезка: длины 1 и длины a. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длины $x=\sqrt[4]{a^3-4a^2+3a}$.
6. Даны отрезки a, b. Построить отрезок $x=\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$.
7. Построить треугольник ABC, если известна биссектриса BD и отрезки AD и DC, на которые она делит противоположную сторону.
8. Построить треугольник по основанию a, h_a и $\sqrt{b^2-c^2}$.
9. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.
10. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и сумме катетов s.
11. Дан угол в 19°, построить угол в 1°.
12. Дан отрезок длины a и угол, равный α. Построить отрезки длины $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$, $\dfrac{a}{\cos\alpha}$, $\dfrac{a}{\sin\alpha}$, $a\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $a\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

13. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Через вершину A с помощью циркуля и линейки провести такую прямую, что сумма расстояний от точек B и C до этой прямой равна $\sqrt{2}$.

14. Дан ΔABC. Построить отрезок DE с концами на сторонах AB и BC так, что $DE \parallel AC$ и DE виден из середины AC под прямым углом.

15. Построить угол, равный трём градусам.

16. С помощью циркуля и линейки разделите угол 54° на три равные части.

17. Провести прямую, параллельную диагонали и пересекающую две смежные стороны данного прямоугольника так, чтобы его площадь разделилась в отношении $1:3$.

5.2. Метод геометрических мест точек

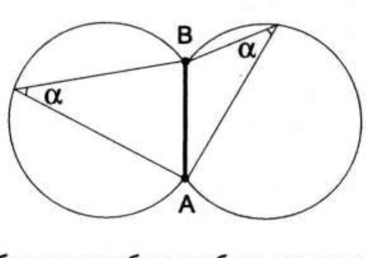
Теоретический материал

Геометрическим местом точек плоскости (пространства) с данным свойством называется множество всех точек плоскости (пространства), обладающих этим свойством.

При решении задач на геометрические места точек (сокращённо ГМТ) должно быть предъявлено множество и доказано, что каждая точка этого множества обладает заданным свойством, а любая другая точка не обладает.

В дальнейшем под ГМТ в данном пособии будет подразумеваться ГМТ плоскости. Простейшими примерами ГМТ являются следующие:

- ГМТ, удалённых на расстояние R от данной точки O, – это окружность радиуса R с центром в точке O;
- ГМТ, равноудалённых от точек A и B, – это серединный перпендикуляр к отрезку AB;
- ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α, – это объединение двух дуг окружностей радиуса $R = \frac{AB}{2\sin\alpha}$ с центрами на серединном перпендикуляре к отрезку AB, лежащими на расстоянии $R\cos\alpha$ от прямой AB.



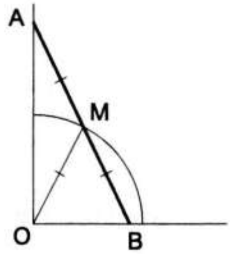
При построении ГМТ бывает удобно разбить данное свойство на более простые и найти соответствующие более простые ГМТ. Пересечением этих множеств будет множество точек, для которых одновременно выполняются все свойства, то есть искомое ГМТ.

Помимо задач на нахождение ГМТ в этом параграфе будут рассмотрены задачи на построение циркулем и линейкой, решаемые методом ГМТ.

Примеры решения задач

Пример 1. По сторонам прямого угла скользит отрезок заданной длины a. Какую кривую при этом описывает середина этого отрезка?

Решение. Пусть M – середина отрезка $AB = a$, скользящего по сторонам прямого угла.



Так как медиана в прямоугольном треугольнике равна половине гипотенузы, то $OM = AB/2 = a/2$. То есть точка M удалена от точки O на расстояние $a/2$ и, следовательно, принадлежит четверти дуги окружности радиуса $a/2$ с центром в точке O.

Теперь покажем, что произвольная точка этой дуги является серединой гипотенузы длины a некоторого прямоугольного треугольника.

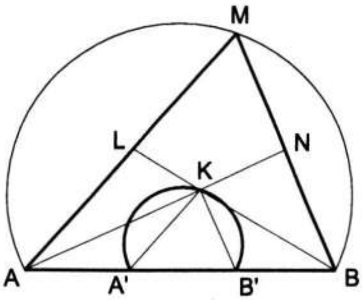
Для этого из произвольной точки M данной дуги сделаем засечку радиусом $a/2$ на стороне прямого угла. Получим точку A. Обозначим через B точку пересечения прямой AM со второй стороной прямого угла. Покажем, что $AB = a$. Пусть $\angle OAB = \alpha$, тогда $\angle AOM = \alpha$ и $\angle MOB = 90^\circ - \alpha = \angle ABO$. Следовательно, ΔOMB равнобедренный и $MB = OM = a/2$. То есть ΔABO имеет гипотенузу длины a, что и требовалось доказать.

Пример 2. По данной дуге окружности «бегает» точка M. Хорда AB – фиксирована. Какие кривые при этом пробегает в треугольнике AMB точка пересечения медиан треугольника?

Решение. Пусть дуга AB вмещает углы, равные α. Обозначим через K точку пересечения медиан треугольника AMB и проведём через неё прямые, параллельные сторонам угла AMB. Получим $\angle A'KB' = \angle AMB = \alpha$.

Так как медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, то по теореме Фалеса

$$AA' = \frac{1}{3}AB \text{ и } BB' = \frac{1}{3}AB,$$



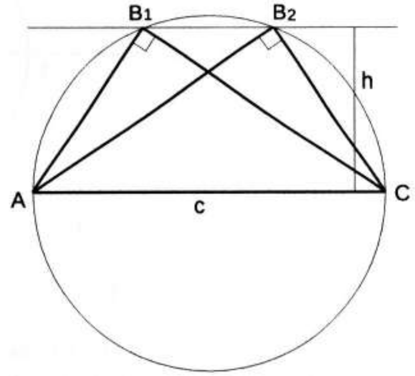
следовательно, $A'B' = AB/3$. Таким образом, точка пересечения медиан лежит на дуге $A'B'$, вмещающей углы, равные α.

Верно и обратное. Если взять произвольную точку на дуге $A'B'$ и рассмотреть два соответствующих подобных треугольника, то эта точка будет точкой пересечения медиан большего из них.

Следовательно, дуга $A'B'$ есть геометрическое место точек пересечения медиан треугольника AMB.

Пример 3. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу.

Решение. Построим окружность с диаметром, равным гипотенузе, и проведём прямую параллельно диаметру на расстоянии, равном высоте. Точка пересечения этой прямой с окружностью даст вершину B_1 треугольника AB_1C, причём угол AB_1C будет прямым, так как опирается на диаметр.



При $h = c/2$ получим единственную точку B_1.

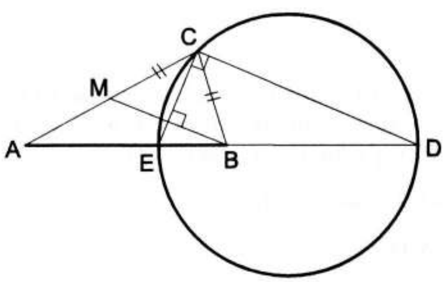
При $0 < h < c/2$ получим две точки и, следовательно, два равных симметричных треугольника AB_1C и AB_2C.

Если $h > \dfrac{c}{2}$, то задача не имеет решения.

Пример 4. Найти геометрическое место точек, расстояния от которых до двух данных точек A и B находятся в заданном отношении $m:n$.

Решение. В предыдущем параграфе было приведено решение этой задачи, полученное алгебраическим методом. Сейчас решим задачу геометрически.

Пусть $m > n$ (при $m = n$ искомое ГМТ является серединным перпендикуляром к отрезку AB).



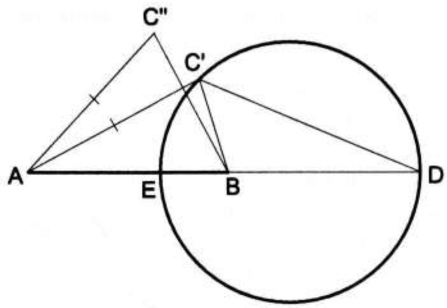
Рассмотрим точки $E \in AB$ и $C \notin AB$ такие, что $AE : EB = AC : CB = m : n$.

Отрезок CE является биссектрисой ΔABC, так как делит противолежащую сторону в отношении прилежащих сторон. Проведём $CD \perp CE$ и $BM \parallel CD$. Треугольник ΔBMC равнобедренный, так как его биссектриса CE будет одновременно и высотой. Следовательно, $CB = CM$ и

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CM} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n},$$

то есть положение точки D на прямой AB не зависит от выбранной нами точки C. Важно только, что $AC : CB = m : n$. Поскольку $\angle ECD = 90^\circ$, то точка C лежит на окружности с диаметром ED. Значит, если $AC : CB = m : n$, то точка C лежит на окружности, построенной на ED, как на диаметре.

Теперь возьмём произвольную точку C' на этой окружности и покажем, что $AC' : C'B = m : n$.



Обозначим длину отрезка AC' через d и рассмотрим треугольник $\Delta AC''B$, у которого

$$AC'' = d \quad \text{и} \quad BC'' = d \cdot \frac{n}{m}.$$

Так как $AC'' : C''B = m : n$, то точка C'' лежит на построенной окружности. Но в верхней полуплоскости существует только одна точка на окружности с диаметром ED, находящаяся на расстоянии d от точки A. Следовательно, точки C'' и C' совпадают, что и требовалось доказать.

Таким образом, искомое ГМТ – окружность, построенная на отрезке ED, как на диаметре.

Замечание. Полученную окружность называют *окружностью Аполлония*, а точки A, E, B и D, лежащие на одной прямой и удовлетворяющие равенству

$$AE : EB = AD : DB,$$

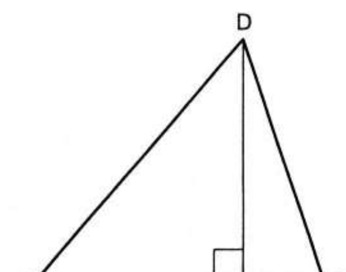
называют *гармоническими точками.*

Пример 5. Доказать, что геометрическим местом точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек M и N есть величина постоянная, является прямая, перпендикулярная отрезку MN.

Решение. Пусть точка D такова, что

$$MD^2 - ND^2 = a^2$$

(где a^2 есть заданная в условии постоянная величина) и E – её проекция на отрезок MN.



Из прямоугольных треугольников MDE и NDE получим

$$ME^2 = MD^2 - DE^2, \; NE^2 = ND^2 - DE^2$$

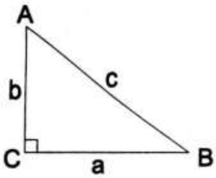
и, следовательно,

$$ME^2 - NE^2 = MD^2 - ND^2 = a^2.$$

Таким образом, мы нашли на отрезке MN точку E такую, что $ME^2 - EN^2 = a^2$. Так как D – произвольная точка из искомого ГМТ, то все точки ГМТ лежат на перпендикуляре к отрезку MN, восстановленному из точки E.

Аналогично (с помощью теоремы Пифагора) показывается, что любая точка на перпендикуляре обладает требуемым свойством.

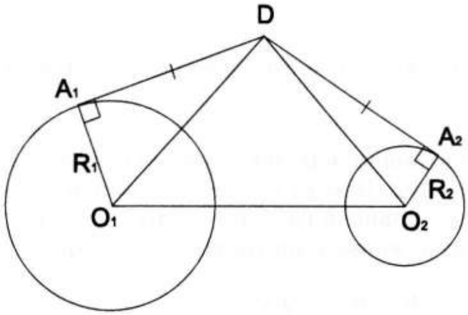
Замечание. Для того чтобы получить точку E (основание перпендикуляра), построим вспомогательный прямоугольный треугольник ABC с катетом a. Гипотенузу и второй катет выберем такими, чтобы выполнялось условие $c+b>MN$.



По теореме Пифагора $a^2 = c^2 - b^2$. Сделаем засечки радиусами b и c из точек N и M. Обозначим точку пересечения этих дуг через D и опустим перпендикуляр из D на MN. Основанием этого перпендикуляра будет искомая точка E.

Пример 6. Доказать, что геометрическим местом точек, касательные из которых к двум данным окружностям равны, является прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей (эта прямая называется *радикальной осью* двух окружностей).

Решение. Рассмотрим окружности с центрами O_1 и O_2 радиусов R_1 и R_2. Пусть DA_1 и DA_2 – равные касательные, проведённые к окружностям из точки D.



Из прямоугольных треугольников ΔO_1A_1D и ΔO_2A_2D получим

$$A_1D^2 = O_1D^2 - R_1^2, \quad A_2D^2 = O_2D^2 - R_2^2, \quad \text{откуда}$$

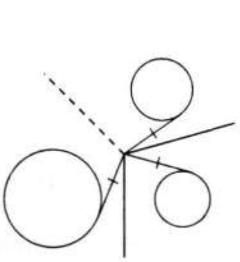
$$O_1D^2 - O_2D^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Следовательно, точка D такова, что разность квадратов расстояний от неё до O_1 и O_2 есть величина постоянная.

Согласно предыдущей задаче, множество всех таких точек есть прямая, перпендикулярная отрезку O_1O_2.

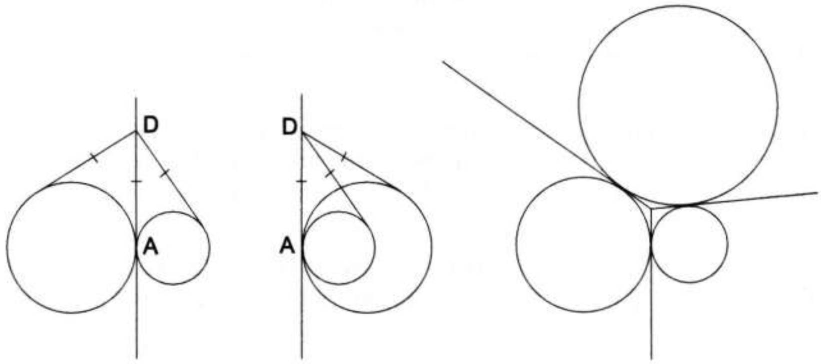
Замечание. Три радикальные оси любых трёх попарно взятых окружностей пересекаются в одной точке, называемой *радикальным центром*.

Для объяснения этого факта достаточно рассмотреть точку пересечения двух радикальных осей. Поскольку она принадлежит двум радикальным осям, касательные из неё ко всем трём окружностям равны. Следовательно, она принадлежит и третьей радикальной оси.



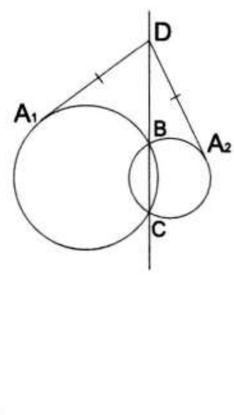
Рассмотрим способы построения радикальной оси в зависимости от взаимного расположения окружностей.

1) Если окружности касаются друг друга, то радикальная ось проходит через точку касания, так как в этом случае касательные, проведённые из точки D, равны отрезку общей касательной DA.



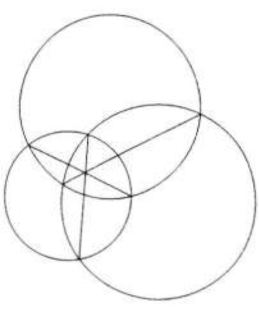
Следствие. Три общие касательные трёх попарно касающихся окружностей пересекаются в одной точке.

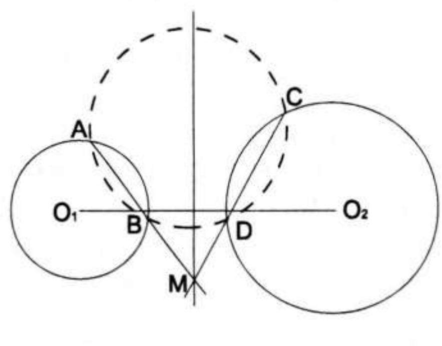
2) У пересекающихся окружностей радикальная ось проходит через точки пересечения. В этом случае касательные, проведённые из точки D, равны в силу того, что квадрат касательной равен произведению длин секущих, то есть



$$DA_1^2 = DB \cdot DC = DA_2^2.$$

Следствие. Три общие хорды трёх попарно пересекающихся окружностей пересекаются в одной точке.





3) Если окружности не пересекаются, то для построения радикальной оси будем использовать вспомогательную окружность, пересекающую две данные. Пусть M – точка пересечения прямых, содержащих общие хорды AB и CD. Это есть радикальный центр трёх окружностей. Следовательно, точка M принадлежит

радикальной оси двух данных окружностей. Найдя таким же образом ещё одну точку или опустив перпендикуляр на линию центров O_1O_2, найдём искомую радикальную ось.

Задачи

1. По данной дуге окружности «бегает» точка M. Хорда AB фиксирована. Какую кривую при этом пробегает в треугольнике AMB точка пересечения высот?
2. Построить треугольник по заданной стороне, противолежащему ей углу и проведённой к ней высоте.
3. По сторонам прямого угла скользит гипотенуза прямоугольного треугольника. Найти геометрическое место вершин прямого угла этого треугольника.
4. Построить треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из этих сторон.
5. Построить треугольник по α, a, r.
6. Построить треугольник по α, r, R.
7. Построить треугольник по a, r, R.
8. Построить треугольник по α, β, r.
9. Построить треугольник по заданной стороне a, противолежащему ей углу α и проведённой к ней медиане m_a.
10. Построить параллелограмм по углу и диагоналям.
11. Построить треугольник по стороне, высоте, опущенной на эту сторону, и медиане другой стороны.
12. Дана окружность и точка A, лежащая вне круга, ограниченного окружностью. Построить касательные к окружности, проходящие через эту точку.
13. Построить треугольник по заданным α, h_a, l_a.
14. Построить треугольник по заданным $\alpha, a, b : c$.
15. Провести общую внешнюю касательную к двум данным окружностям (то есть даны их центры и радиусы).
16. На сторонах угла даны два отрезка AB и CD и точка M внутри угла. Найти геометрическое место точек N таких, что $S_{ABN} + S_{CDN} = S_{ABM} + S_{CDM}$.
17. По окружности «бегает» дуга данной длины CD, хорда AB задана, $CD < AB$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых AC и BD.
18. Через точку A внутри окружности проводятся всевозможные хорды. Найти геометрическое место середин этих хорд.
19. Найти на стороне угла точку, из которой данный отрезок AB, лежащий на другой стороне угла, виден под наибольшим углом.

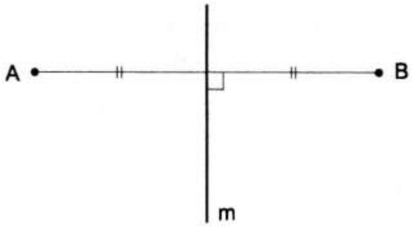
5.3. Метод симметрии и спрямления

Теоретический материал

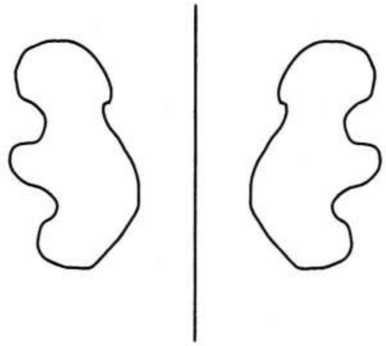
В случаях, когда нужную фигуру сразу построить затруднительно, бывает удобно преобразовать её в другую фигуру, которую построить легче.

В этом параграфе будут рассмотрены задачи, решаемые с помощью преобразования фигур методом симметрии и спрямления.

Точки A и B называются *симметричными относительно прямой* m, если отрезок $AB \perp m$ и делится этой прямой пополам. Прямую m называют *осью симметрии.* Точку B называют *отражением точки* A и наоборот.



Фигуры, все точки которых являются симметричными относительно прямой m, называются *симметричными относительно этой прямой.*



Метод симметрии заключается в следующем. Считаем, что нужная фигура построена, и отражаем часть фигуры (точку, прямую, окружность) относительно некоторой оси. Изменённую фигуру подчиняем тем же условиям, которым должна удовлетворять исходная фигура, и решаем новую задачу уже известными способами.

В ряде задач метод симметрии приводит к спрямлению ломаных линий в прямые. Метод спрямления состоит в следующем. Считаем задачу решённой и в полученном чертеже некоторую ломаную линию заменяем прямой. Таким образом исходная задача заменяется новой – более простой. После построения новой фигуры определяется, в какой точке надо согнуть выпрямленную линию, чтобы вернуться к исходной задаче.

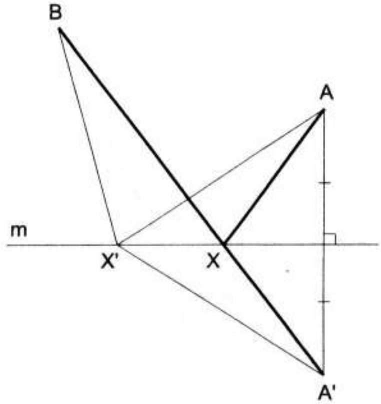
Метод спрямления особенно часто применим в задачах, где дана сумма или разность частей некоторой ломаной линии.

Примеры решения задач

Пример 1. Дана прямая m и две точки A и B по одну сторону от неё. Найти на прямой m точку X такую, что сумма расстояний AX и BX минимальна.

Решение. Рассмотрим точку A', симметричную точке A относительно прямой m. Обозначим через X точку пересечения отрезка $A'B$ с прямой m. Имеем

$$AX + XB = A'X + XB = A'B.$$



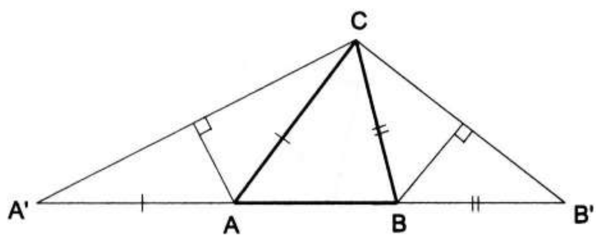
Для любой другой точки $X' \in m$ будет выполняться

$$AX' + X'B = A'X' + X'B > A'B.$$

Следовательно, искомая точка X – это точка пересечения отрезка $A'B$ с прямой m.

Пример 2. Построить треугольник по периметру P и двум углам α и β.

Решение. Пусть треугольник ABC с данными $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, $P_{ABC} = P$ уже построен. На прямой AB отложим отрезки $AA' = AC$ и $BB' = BC$.



Треугольники $AA'C$ и $BB'C$ равнобедренные с углами при основании соответственно $\dfrac{\alpha}{2}$ и $\dfrac{\beta}{2}$. Следовательно, у треугольника $A'B'C$ сторона $A'B' = P$ и $\angle A' = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle B' = \dfrac{\beta}{2}$.

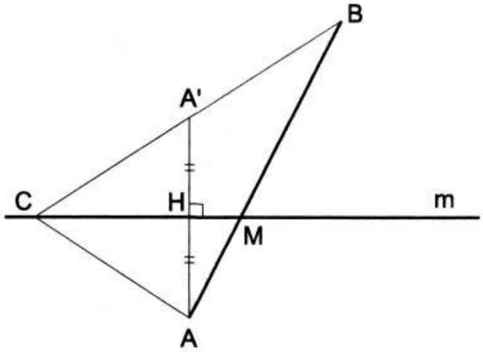
Таким образом, для того чтобы построить ΔABC, сначала нам надо построить $\Delta A'B'C$ по стороне и двум прилежащим углам, потом провести к сторонам $A'C$

и $B'C$ серединные перпендикуляры, которые пересекут $A'B'$ соответственно в точках A и B.

Построенный треугольник ABC будет удовлетворять заданным условиям, то есть $P_{ABC} = P$ и $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$.

Пример 3. Даны отрезок AB и прямая, пересекающая его. Построить треугольник ABC, биссектриса которого принадлежит данной прямой.

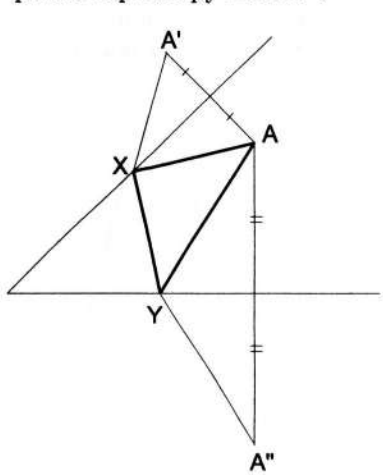
Решение. Построим отражение точки A относительно прямой m. Проведём через B и полученную точку A' прямую, которая пересечёт исходную прямую m в точке C.



Пусть H – точка пересечения отрезка AA' с прямой m. Прямоугольные треугольники ΔACH и $\Delta A'CH$ равны друг другу и, следовательно, $\angle ACM = \angle BCM$.

Пример 4. Внутри угла дана точка A. Найти такое положение точек X и Y на сторонах угла, чтобы периметр треугольника AXY был минимальным.

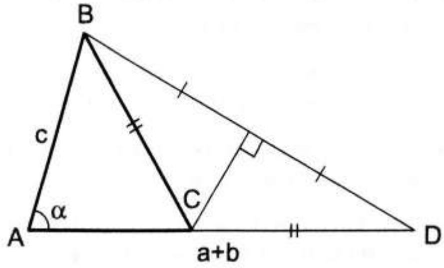
Решение. Пусть A' и A'' – отражения точки A относительно сторон угла. Длина ломаной $A'XYA''$ равна периметру ΔAXY.



Так как ломаная имеет минимальную длину в случае, когда является отрезком, то искомые точки X, Y – это точки пересечения отрезка $A'A''$ со сторонами угла.

Пример 5. Построить треугольник, зная α, c и $a+b$.

Решение. От отрезка $AD = a + b$ отложим под углом α отрезок $AB = c$. В качестве вершины C возьмём точку пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BD с отрезком AD.



Так как отрезки BC и DC равны между собой, то построенный треугольник ΔABC удовлетворяет всем данным в условии задачи требованиям.

Задачи

1. Построить треугольник, зная P, α и h_a.

2. Даны две окружности и между ними прямая. Начертить равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины были на окружностях, а одна из высот лежала на данной прямой.

3. Дана прямая m и две точки A и B по одну сторону от неё. Найти на m такую точку X, чтобы AX составлял с m угол, вдвое больший, чем BX.

4. Внутри угла даны точки A и B. Построить равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной стороне угла, вершина – на другой, а боковые стороны проходят через точки A и B.

5. Дана прямая AB и две окружности, лежащие по одну сторону от прямой. Найти на прямой AB точку, касательные из которой составляют с этой прямой равные углы.

6. Точки A и B расположены между параллельными прямыми m и n. Постройте точки $M \in m$, $N \in n$ так, чтобы длина ломаной $AMNB$ была наименьшей.

7. В данную окружность вписать прямоугольник, зная разность основания и высоты.

8. Построить треугольник по стороне, прилежащему углу и разности остальных сторон.

9. Построить четырёхугольник $ABCD$, зная его стороны, если диагональ AC делит угол A пополам.

10. Найти сумму перпендикуляров, опущенных на стороны равнобедренного треугольника из точки, взятой на основании.

11. Найти сумму перпендикуляров, опущенных из точки, взятой внутри равностороннего треугольника, на его стороны.
12. На окружности даны точки A и B. Отыскать на ней точку X такую, что $AX + BX = a$, где a заданный отрезок.
13. На окружности даны точки A и B. Отыскать на ней точку X такую, что $AX - BX = a$, где a заданный отрезок.
14. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных пересекающихся прямых равна заданному отрезку.
15. На данной прямой найти такую точку, что разность расстояний от неё до сторон данного угла равна данному отрезку.
16. Провести окружность, касающуюся двух данных окружностей, так, чтобы радиусы, проведённые из центра искомой окружности к точкам касания, образовывали данный угол.
17. Построить равнобедренный треугольник, зная его боковую сторону a и сумму высоты с основанием s.
18. Построить треугольник по a, $m_b + b$ и $\angle(m_b, b)$.
19. Построить треугольник по b, c и $\beta - \gamma$.

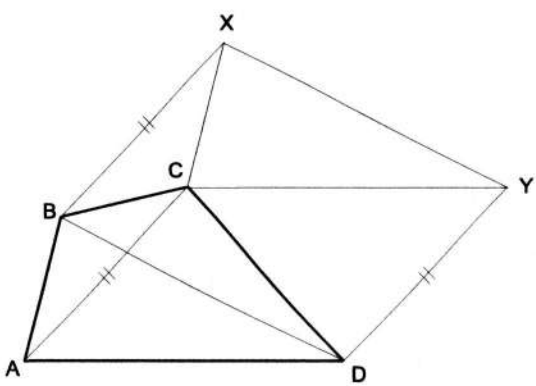
5.4. Метод параллельного переноса

Теоретический материал

В этом параграфе будут рассмотрены задачи, решаемые с помощью параллельного переноса. В таких задачах часть фигуры переносят параллельно самой себе так, чтобы новую фигуру было легче построить, чем искомую.

После построения новой фигуры надо сделать обратный параллельный перенос, чтобы вернуться к исходной задаче.

Многие задачи на построение четырёхугольников можно решить с помощью построения вспомогательного параллелограмма, стороны которого параллельны и равны диагоналям искомого четырёхугольника. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Перенесем диагональ AC параллельно самой себе в отрезки BX и DY. Полученный параллелограмм $BXYD$ будет обладать следующими свойствами.



1) Стороны и угол параллелограмма $BXYD$ равны диагоналям и углу между ними в исходном четырёхугольнике.

2) Расстояния от точки C до вершин параллелограмма $BXYD$ равны сторонам исходного четырёхугольника.

3) Углы между отрезками, соединяющими точку C с вершинами параллелограмма $BXYD$, равны углам исходного четырёхугольника.

4) Площадь параллелограмма вдвое больше площади четырёхугольника.

5) Диагонали параллелограмма вдвое больше отрезков, соединяющих середины сторон AB и CD, BC и AD; угол между диагоналями равен углу между этими отрезками.

6) Углы $\angle XCD$ и $\angle BCY$ дополняют углы между противоположными сторонами AB и CD, BC и AD до $180°$.

Докажем эти свойства.

1) Стороны параллелограмма параллельны и равны диагоналям четырёхугольника, следовательно, угол параллелограмма равен углу между этими диагоналями.

2) Отрезки BC и CD являются сторонами четырёхугольника. Отрезки CX и CY параллельны и равны сторонам AB и AD, поскольку $ABXC$ и $ACYD$ – параллелограммы.

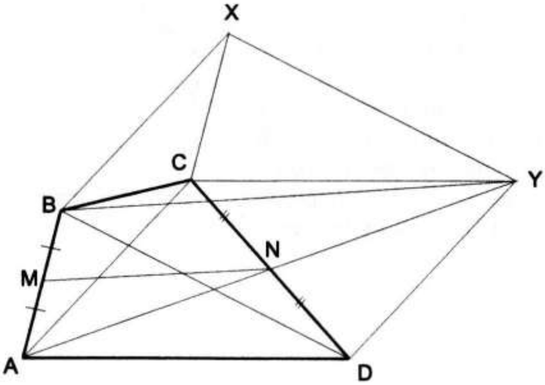
3) Углы $\angle BCX = \angle ABC$ и $\angle DCY = \angle CDA$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых. Углы $\angle XCY = \angle BAD$ как углы с параллельными сторонами.

4) Обозначим диагонали $ABCD$ через d_1, d_2 и угол между ними через α. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha, \quad S_{BXYD} = d_1 d_2 \sin\alpha,$$

откуда $S_{BXYD} = 2S_{ABCD}$.

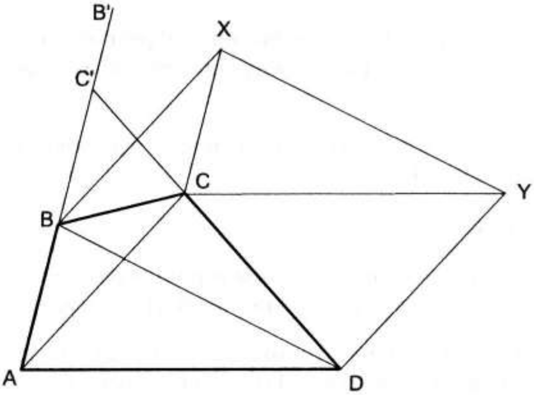
5) Пусть отрезок MN соединяет середины сторон AB и CD.



Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то N есть точка пересечения диагоналей параллелограмма $ACYD$, а отрезок MN есть средняя линия ΔABY.

Следовательно, $MN = BY/2$, что и требовалось доказать.

6) Пусть C' есть точка пересечения продолжений сторон AB и CD, а B' взята на продолжении BC' за точку C'. Равенство углов $\angle XCD = \angle CC'B'$ следует из параллельности прямых AB' и CX.



Замечание. В случае, когда стороны BC и AD параллельны (то есть $ABCD$ – трапеция), ломаная BCY выпрямляется.

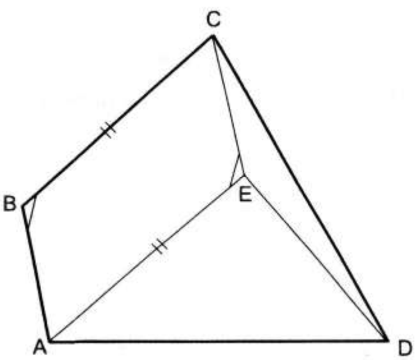
Примеры решения задач

Пример 1. Построить четырёхугольник, зная его углы и две противоположные стороны.

Решение. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ даны углы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и стороны BC и AD. Перенесём BC параллельно самой себе в AE.

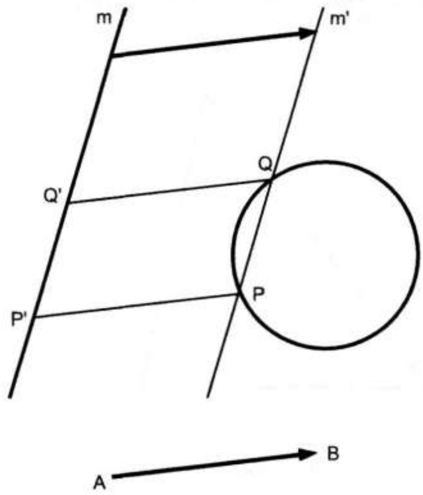
В ΔAED стороны AE и AD известны, а угол $\angle EAD = \alpha - \angle BAE = \alpha - (\pi - \beta)$. Следовательно, этот треугольник мы построить можем.

Точку C можно получить как точку пересечения луча, отложенного от прямой AD под углом δ, и луча, отложенного от прямой AE под углом β. Затем, переместив отрезок AE вдоль EC, получим точку B.



П р и м е р 2. Построить отрезок, равный и параллельный данному так, чтобы один конец лежал на данной прямой, другой – на данной окружности.

Р е ш е н и е. Пусть даны прямая m, отрезок AB и окружность.



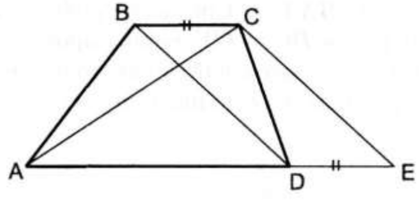
Сдвинем прямую m на вектор AB, получим прямую $m' \parallel m$.

Через точки пересечения m' с окружностью проведём прямые, параллельные AB. Четырёхугольник $PQQ'P'$ – параллелограмм, причём $PP' \parallel QQ' \parallel AB$ и $PP' = QQ' = AB$. Следовательно, PP' и QQ' – искомые отрезки.

Задача может иметь одно решение, два решения или не иметь решений вообще.

П р и м е р 3. Построить трапецию по двум диагоналям и двум основаниям.

Р е ш е н и е. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Перенесём диагональ BD вдоль основания BC. Получим параллелограмм $BCED$.



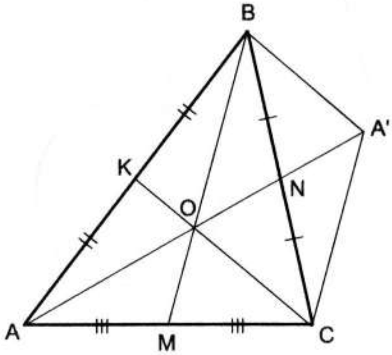
В треугольнике ΔACE стороны AC и CE равны диагоналям, основание AE равно сумме оснований трапеции. Следовательно, ΔACE можно построить по трём сторонам. После этого отложим отрезок ED (равный BC) и найдём вершину D. Потом, достроив ΔCDE до параллелограмма, получим вершину B.

П р и м е р 4. Построить треугольник по трём его медианам.

Р е ш е н и е. Пусть медианы $BM = m_b$, $AN = m_a$ и $CK = m_c$ треугольника ABC пересекаются в точке O. Перенесём отрезок BO параллельно самому себе в отрезок $A'C$.

Так как медианы в треугольнике точкой пересечения делятся в отношении 2 к 1, то в параллелограмме $OBA'C$ стороны

$$OB = \frac{2}{3}m_b, \quad BA' = OC = \frac{2}{3}m_c.$$



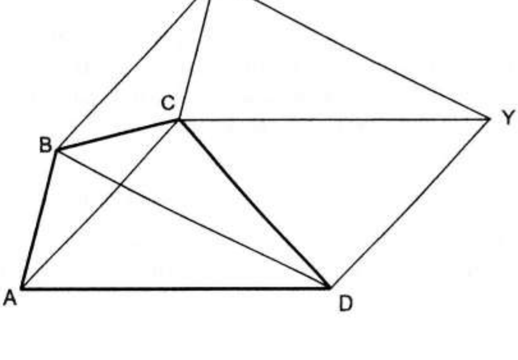
Кроме того, поскольку в параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам,

$$OA' = 2ON = \frac{2}{3}m_a.$$

Таким образом, треугольник OBA' мы можем построить по трём сторонам. Затем, достроив его до параллелограмма $OBA'C$, получим вершину C. Далее, отложив отрезок $AO = OA'$, получим вершину A.

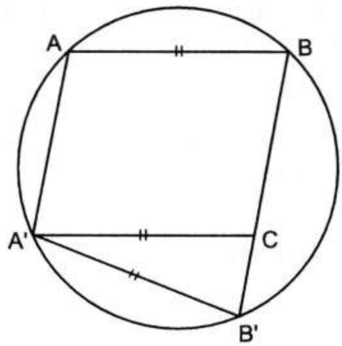
Пример 5. Построить четырёхугольник, зная две диагонали, угол между ними и две противолежащие стороны.

Решение. Зная две диагонали и угол между ними, мы можем построить вспомогательный параллелограмм $BXYD$. Согласно свойству 2 (сформулированному в теоретической части), отрезки BC и CY равны противолежащим сторонам четырёхугольника, и точку C мы можем найти как точку пересечения дуг соответствующих радиусов. Достроив ΔCYD до параллелограмма, получим вершину A.



Пример 6. Через две точки, данные на окружности, провести две параллельные хорды, разность которых равна данной величине.

Решение. Пусть A и B – заданные на окружности точки, а $AA' \parallel BB'$ – хорды с заданной разностью. Трапеция $ABB'A'$ является равнобокой, так как она вписана в окружность. Перенесём AA' параллельно в отрезок BC. Получим параллелограмм $ABCA'$. В итоге получаем $AB = A'C = A'B'$.



Треугольник, равный треугольнику $\Delta A'B'C$, можно построить по трём сторонам. После этого надо отложить от AB угол, равный углу $\angle A'CB'$. Так мы найдем точку B'. Точку A' можно получить как точку пересечения прямой, параллельной BB', с окружностью.

Замечание. Если в условии задачи дана сумма (разность) отрезков или углов, надо так преобразовать исходную фигуру, чтобы эта величина входила в преобразованную фигуру.

Задачи

1. Построить трапецию по четырём сторонам.

2. Между двумя окружностями[3] провести отрезок, делящийся пополам в данной точке A.

3. Построить треугольник, зная $m_a, m_c, \angle(m_b, a)$.

4. Через точку A внутри угла провести прямую так, чтобы отрезок, заключённый между сторонами, делился точкой A пополам.

5. Построить трапецию, зная диагонали, угол между ними и одну из боковых сторон.

6. Построить четырёхугольник, зная две диагонали, две противолежащие стороны и угол между ними.

7. Через данную точку M провести прямую так, чтобы разность расстояний до неё от двух данных точек A и B была равна данной длине.

[3]Имеется в виду, что один конец отрезка лежит на одной окружности, второй – на другой.

8. В данный остроугольный треугольник вписать прямоугольник с наименьшей диагональю (одна сторона прямоугольника лежит на основании треугольника).

9. Даны три параллельные прямые. Провести через данную точку секущую так, чтобы разность отрезков между параллелями была равна заданной величине.

10. Построить трапецию $ABCD$, зная боковую сторону CD, угол между диагоналями, расстояние между параллельными сторонами и отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

11. Построить треугольник по b, c и m_a.

12. Построить четырёхугольник, зная его стороны и отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон.

13. Построить четырёхугольник, зная четыре его стороны и угол между двумя противоположными сторонами.

14. Построить биссектрису угла, вершина которого недоступна.

15. Даны две точки A и B и между ними две параллели m и n. Провести между этими параллелями в известном направлении отрезок CD так, чтобы сумма $AC + CD + BD$ была минимальной.

16. На окружности даны две точки A и B. В данном направлении провести хорду XY так, чтобы сумма хорд AX и BY была равна заданной величине.

17. Построить прямоугольник с данной стороной так, чтобы стороны его проходили через четыре заданные точки.

18. Даны две окружности и прямая. Провести секущую параллельно этой прямой, отсекающую в окружностях хорды, сумма которых равна заданному отрезку длины s.

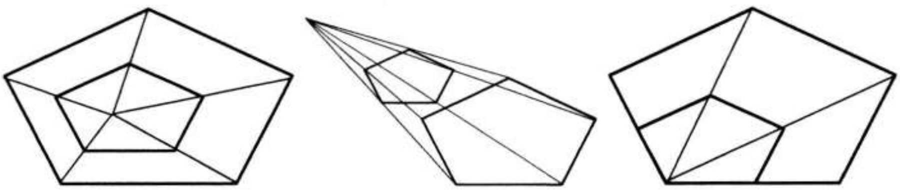
5.5. Метод подобия

Теоретический материал

Два многоугольника называются *подобными*, если равны их соответствующие углы, а соответствующие стороны пропорциональны.

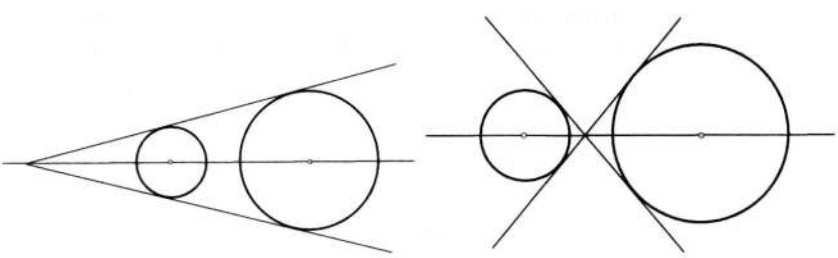
Если два подобных многоугольника расположены так, что их соответствующие стороны параллельны, то прямые, соединяющие вершины равных углов, пересекаются в одной точке. Эта точка называется *центром гомотетии* или *центром подобия*, а многоугольники называются *гомотетическими*. Отношение расстояний от центра подобия до соответствующих вершин гомотетических многоугольников равно коэффициенту их подобия.

Центр подобия может лежать внутри многоугольников, может – вне, может совпадать с одной из вершин или принадлежать одной из сторон.

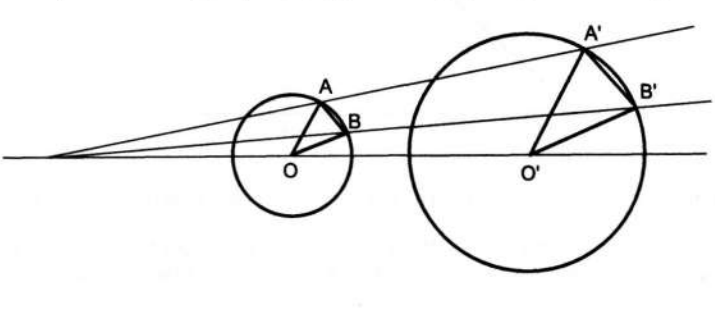


Центром подобия двух окружностей называется точка пересечения их общих внешних касательных. Центр подобия лежит на линии центров окружностей. Отношение расстояний от центра подобия до центров окружностей равно отношению радиусов.

Точка пересечения внутренних касательных к двум окружностям называется *обратным центром подобия*, который обладает аналогичными свойствами.



Любые две секущие, проведённые через центр подобия окружностей, пересекают окружности таким образом, что треугольники ΔABO и $\Delta A'B'O'$ будут гомотетическими (соответствующие радиусы и хорды параллельны).

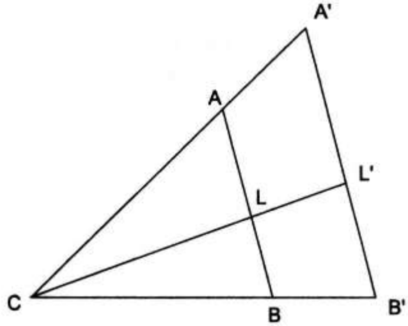


Метод подобия заключается в том, что сначала мы строим фигуру, ещё не удовлетворяющую всем условия задачи, но подобную искомой фигуре. Потом, используя остальные условия, преобразуем построенную фигуру в искомую.

Примеры решения задач

Пример 1. Построить треугольник по двум углам и биссектрисе третьего угла.

Решение. Пусть даны углы α, β и отрезок l_c. Построим произвольный треугольник $\Delta A'B'C$ с двумя данными углами.

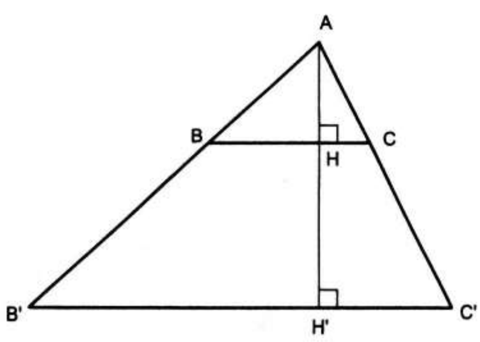


Проведём в нём биссектрису CL' и отложим на ней отрезок $CL = l_c$. Через точку L проведём прямую, параллельную $A'B'$. Углы и биссектриса полученного треугольника ΔABC равны заданным.

Пример 2. Построить треугольник по α, β и $a + h_a$.

Решение. Построим треугольник $AB'C'$ по двум углам α, β и его высоте $h_{a'} = a + h_a$, проведённой к стороне $B'C' = a'$. Искомый треугольник ABC подобен треугольнику $AB'C'$ и

$$\frac{h_a}{h_{a'}} = \frac{a + h_a}{a' + h_{a'}}.$$

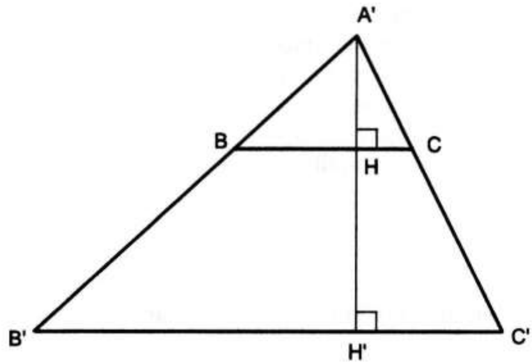


Следовательно, $h_a = \dfrac{h_{a'}^2}{a' + h_{a'}}$. Построим точку H на прямой AH' на расстоянии h_a от точки A и через точку H проведём прямую, параллельную прямой $B'C'$. Построенный треугольник ABC удовлетворяет заданным условиям.

Пример 3. Построить треугольник по трём высотам h_a, h_b, h_c.

Решение. Возьмём произвольный отрезок p и построим $\Delta A'B'C'$ со сторонами $a' = \dfrac{p^2}{h_a}$, $b' = \dfrac{p^2}{h_b}$ и $c' = \dfrac{p^2}{h_c}$.

Пусть S – площадь искомого треугольника, тогда его стороны $a = \dfrac{2S}{h_a}$, $b = \dfrac{2S}{h_b}$, $c = \dfrac{2S}{h_c}$. Следовательно, искомый треугольник и $\Delta A'B'C'$ подобны.



Для того чтобы построить искомый треугольник $A'BC$ с высотами h_a, h_b, h_c, достаточно в треугольнике $A'B'C'$ на прямой $A'H'$ отложить отрезок $A'H = h_a$ и через точку H провести прямую BC, параллельную $B'C'$.

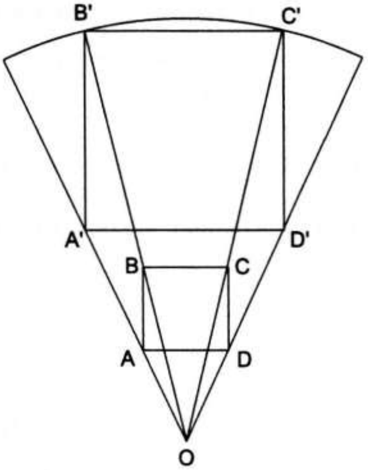
Задача имеет решение, если существует треугольник, построенный из отрезков $\dfrac{1}{h_a}, \dfrac{1}{h_b}, \dfrac{1}{h_c}$.

Пример 4. Дан отрезок длины $\sqrt{5}$. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длины 2.

Решение. Построим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = a$, $BC = 2a$, где a – произвольный отрезок. Тогда гипотенуза $AC = a\sqrt{5}$.

На гипотенузе AC отложим отрезок CD, равный $\sqrt{5}$, и из точки D опустим перпендикуляр DH. Из подобия треугольников DHC и ABC получаем, что $\dfrac{CH}{BC} = \dfrac{DC}{AC}$, следовательно, $CH = 2$.

Пример 5. В круговой сектор вписать квадрат.



Решение. Пусть точка O – центр заданного сектора. Построим вспомогательный квадрат $ABCD$, две вершины которого (A и D) лежат на радиусах сектора на равном расстоянии от точки O. Проведём прямые OB и OC, они пересекут дугу сектора в точках B' и C'. Далее проведём $B'A' \perp B'C'$ и $C'D' \perp B'C'$. Четырёхугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ подобны (один получается из другого с помощью гомотетии с центром в точке O), следовательно, $A'B'C'D'$ также является квадратом, причём квадратом, вписанным в данный сектор.

Задачи

1. Построить треугольник по двум углам и высоте, проведённой из третьего угла.

2. Построить окружность, касающуюся сторон данного угла и проходящую через заданную внутри него точку.

3. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Построить точку $S \in BC$, точку $Q \in AC$ и точку $P \in AB$ так, чтобы треугольник SQP был равносторонним.

4. В данный треугольник вписать квадрат.

5. Построить треугольник по α, β, r.

6. Через данную точку провести прямую, отсекающую от двух данных окружностей хорды, пропорциональные их радиусам.

7. Дан угол ABC и точка M внутри него. Найти на стороне BC точку X, равноудалённую от AB и точки M.

8. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Провести прямую, пересекающую отрезок AC в точке X, а отрезок BC – в точке Y таким образом, что $AX = XY = YB$.

9. Даны две окружности и на них по точке. Провести две равные окружности, касающиеся в данных точках данных окружностей и между собой.

10. Через данную точку A провести к двум данным окружностям секущую, отсекающую в окружностях
а) равные хорды;
б) хорды, длины которых находятся в заданном соотношении.

11. Построить треугольник, зная β, l_b и $AD : DC$, где BD – высота.

12. Даны три концентрические окружности. Провести секущую ABC так, чтобы точки A, B и C лежали на разных окружностях и $AB = BC$.

13. Через две точки, лежащие вне данной окружности, провести окружность, касающуюся заданной окружности.

14. Даны две окружности с центрами в точках O и O'. Через центр их подобия S проведены касательная и секущая. Касательная касается окружностей в точках C и C' соответственно, секущая отсекает от окружностей хорды AB и $A'B'$. Доказать, что $CS \cdot C'S = AS \cdot B'S = BS \cdot A'S$.

15. Через данную точку A провести окружность, касающуюся двух данных окружностей.

5.6. Метод поворота и смешанные задачи

Теоретический материал

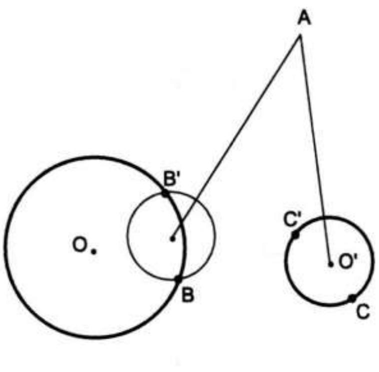
В этом параграфе рассматриваются задачи, решаемые с помощью поворота фигуры (или её части) относительно некоторой неподвижной точки плоскости (центра поворота).

Также приводятся задачи, не попадающие однозначно ни под один из предложенных ранее типов задач, и задачи, решение которых требует комбинирования нескольких методов.

Примеры решения задач

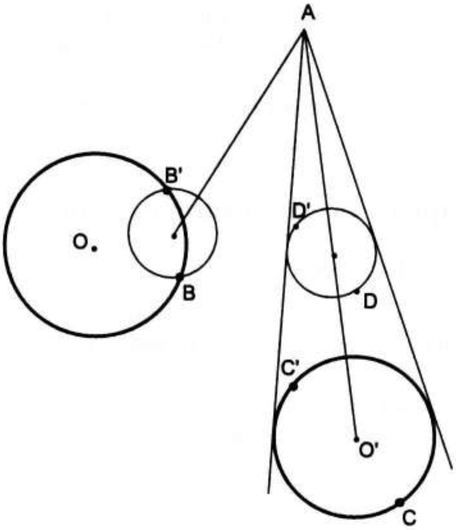
Пример 1. Даны две окружности и точка A. Построить равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) с данным углом при вершине A так, чтобы вершины B и C лежали на окружностях.

Решение. Пусть O, O' – центры данных окружностей и α – данный угол. Повернём окружность в центром O' относительно точки A на угол α. Обозначим через B и B' точки пересечения новой окружности с окружностью с центром в O и совершим обратный поворот новой окружности в окружность с центром в O'. Точки B и B' перейдут при этом в некоторые точки C и C'. Таким образом мы получили два треугольника ΔABC и $\Delta AB'C'$, удовлетворяющие условиям задачи.



Замечание. Если точки B и B' совпадают, то задача имеет одно решение. Если построенная окружность не пересекает окружность с центром в точке O, то решений нет.

Пример 2. Даны две окружности, треугольник и точка A. Построить треугольник ABC, подобный данному так, чтобы вершины B и C лежали на окружностях.



Решение. Пусть O, O' – центры данных окружностей и пусть дан треугольник с углом α и прилежащими сторонами b и c. Сначала для окружности с центром в O' построим гомотетичную окружность с центром гомотетии в точке A и коэффициентом гомотетии $k = c/b$. Эту окружность повернём относительно точки A на угол α и, как и в предыдущем примере, получим точки B и B'. Совершив обратный поворот, получим точки D и D', а совершив обратную гомотетию, найдём искомые C и C'.

Пример 3. Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежат на трёх данных параллельных прямых.

Решение. Пусть a, b, c – три данные параллельные прямые.

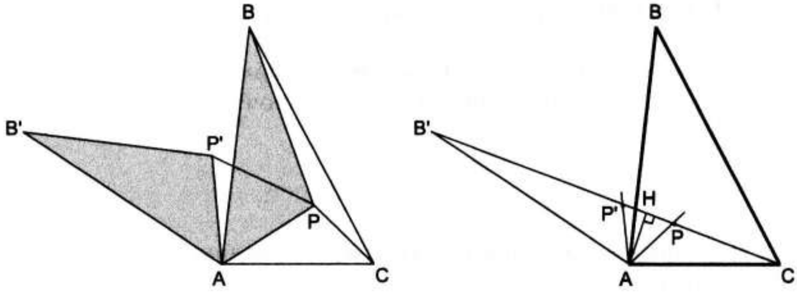
Рассмотрим произвольную точку $B \in b$ и повернём относительно неё прямую c на 60°, получим прямую c' и точку $A \in a$. При обратном повороте A перейдёт в $C \in c$. Треугольник ΔABC равносторонний, так как по построению $BA = BC$ и $\angle B = 60^\circ$.

Пример 4. В треугольнике найти точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

Решение. Рассмотрим произвольную точку P внутри треугольника ABC. Повернем ΔABP относительно точки A на 60°, получим $\Delta AB'P'$. При этом $B'P' = BP$ и $PP' = AP$ (так как $\Delta APP'$ равносторонний), следовательно,

$$BP + AP + CP = B'P' + P'P + PC,$$

то есть сумма расстояний от точки P до вершин треугольника равна длине ломаной $B'P'PC \geq B'C$. Минимальное значение длины ломаной равно $B'C$ при $P, P' \in B'C$.

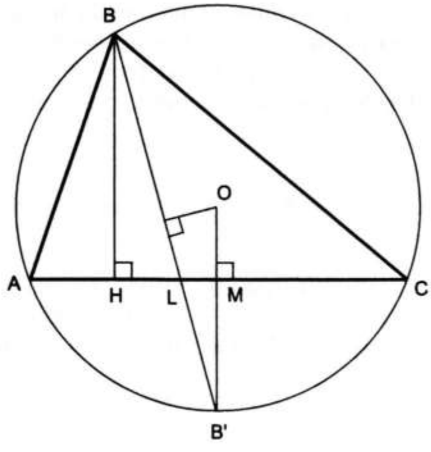


Следовательно, для построения искомой точки P надо сначала построить точку B' (повернуть отрезок AB относительно A на 60°). Точки P и P' должны быть расположены на отрезке $B'C$ таким образом, чтобы треугольник $\Delta APP'$ был равносторонним, поэтому должны лежать на лучах, отложенных от перпендикуляра AH под углом 30°.

Замечание. Если один из углов исходного треугольника больше 120°, то луч, отложенный от AH под углом 30°, пересекает отрезок $B'C$ в точке, не лежащей внутри треугольника. В этом случае искомая точка P совпадает с вершиной тупого угла.

Пример 5. Построить треугольник по заданным отрезкам медианы, биссектрисы и высоты, проведённым из одной вершины.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC с данными высотой BH, биссектрисой BL и медианой BM. Продолжим биссектрису BL до пересечения с описанной окружностью в точке B' (так как $\angle ABB' = \angle CBB'$, то B' – середина дуги AC). Теперь через точку M проведём перпендикуляр к хорде AC. Точка B' (середина дуги) и точка O (центр описанной окружности) принадлежат этому серединному перпендикуляру.



Таким образом, для того чтобы построить ΔABC, сначала надо построить треугольник BHM (по заданным гипотенузе BM и катету BH), потом на отрезке MH отметить точку L (биссектриса всегда лежит между медианой и высотой) и найти точку B' как точку пересечения перпендикуляра к прямой HM в точке M и прямой BL.

Центр окружности O есть точка пересечения прямой MB' и серединного перпендикуляра к хорде BB'. Вершины A и C есть точки пересечения этой окружности с прямой HM.

Задачи

1. Даны три параллельные прямые. Построить квадрат, три вершины которого лежат на этих прямых.

2. Даны прямая и окружность. Построить окружность, касающуюся данной окружности и прямой в данной точке.

3. Даны две окружности. Провести к ним через заданную точку две секущие, пересекающиеся под заданным углом и отсекающие
   а) равные хорды;
   б) хорды, длины которых находятся в заданном отношении.

4. В данный параллелограмм $ABCD$ вписать равнобедренный треугольник APQ ($AP = AQ$) с данным углом при вершине A.

5. Построить четырёхугольник, вписываемый в окружность, зная его стороны a, b, c и d.

6. Провести через заданную точку прямую, отсекающую от данной окружности хорду заданной длины.

7. При помощи циркуля и линейки построить окружность, проходящую через две данные точки и отсекающую от данной окружности хорду данной длины.

8. Провести через точку B пересечения двух окружностей прямую, высекающую из окружностей равные хорды.

9. Через точку A внутри угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник минимального периметра.

10. Даны три точки. Построить окружности, попарно касающиеся в этих точках.

11. Построить треугольник, зная a, h_a и $\angle(m_b, c)$.

12. Через вершину выпуклого четырёхугольника провести прямую, которая делит его площадь пополам.

6. Стереометрия

6.1. Введение

Приведём основные стереометрические определения, связанные с взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве.

Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

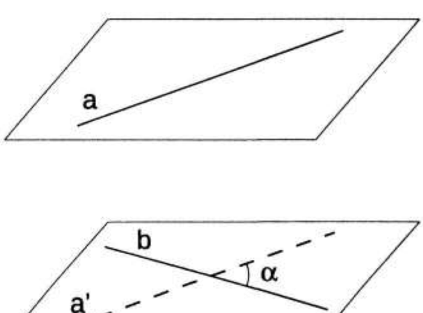
Скрещивающиеся прямые

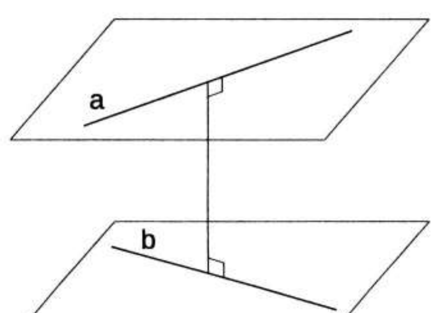
Прямые, которые не лежат в одной плоскости и не пересекаются, называются *скрещивающимися*.

Угол между скрещивающимися прямыми определяется как угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку.

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, концы которого лежат на этих прямых, перпендикулярный к ним (такой отрезок существует и притом только один).

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра (оно же является и расстоянием между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые).

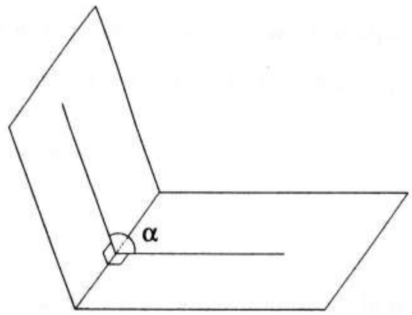




Двугранный угол

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями (*гранями*) с общей ограничивающей их прямой (*ребром двугранного угла*).

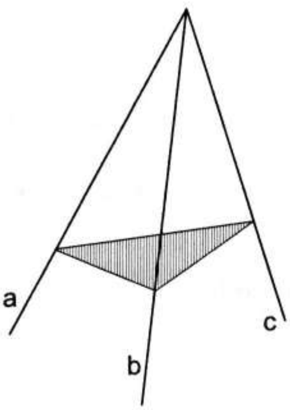
Двугранный угол измеряется своим *линейным углом*, то есть углом между перпендикулярами к ребру, восстановленными в обеих плоскостях из одной точки.

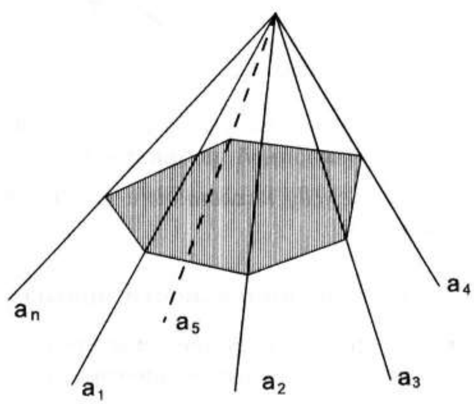


Многогранный угол

Трёхгранным углом (abc) называется фигура, составленная из трёх плоских углов (ab), (bc) и (ac), не лежащих в одной плоскости. Эти углы называются *гранями трёхгранного угла*, а их стороны – *рёбрами*. Общая вершина плоских углов называется *вершиной трёхгранного угла*. Двугранные углы, образованные гранями трёхгранного угла, называются *двугранными углами трёхгранного угла*.

Аналогичным образом определяется понятие *n-гранного угла* $(a_1a_2...a_n)$ – как фигуры, составленной из n плоских углов (a_1a_2), (a_3a_3),...,(a_na_1).





Многогранный угол называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону каждой из ограничивающих его плоскостей.

З а м е ч а н и е 1. Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.

З а м е ч а н и е 2. Сечением выпуклого n-гранного угла плоскостью, не проходящей через вершину, является выпуклый n-угольник.

З а м е ч а н и е 3. В выпуклом многогранном угле сумма плоских углов не превосходит $360°$.

Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве

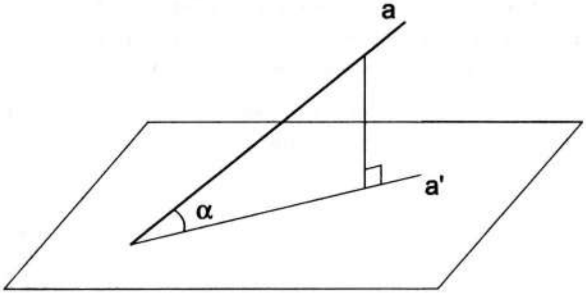
Прямая *перпендикулярна* плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости.

Две плоскости *перпендикулярны*, если соответствующий двугранный угол является прямым.

Наклонная

Наклонной, проведённой к данной плоскости, называется прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная ей. Точка пересечения наклонной и плоскости называется *основанием наклонной.*

Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.



Проекцией наклонной на плоскость называется прямая, состоящая из проекций всех точек наклонной на данную плоскость.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и её проекцией.

Теоремы о параллельности прямых и плоскостей

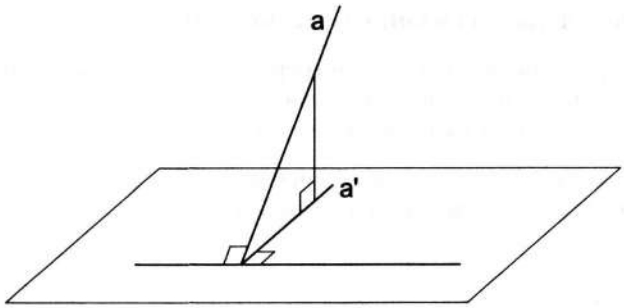
- Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны друг другу (*транзитивность параллельности прямых*).
- Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости (*признак параллельности прямой и плоскости*).
- Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (*признак параллельности плоскостей*).
- Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны (*теорема о параллельных плоскостях*).
- Если плоскость содержит прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту другую плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна первой прямой.

Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей

- Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*).

- Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны (*признак перпендикулярности плоскостей*).

- Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость тогда и только тогда, когда эта прямая перпендикулярна самой наклонной (*теорема о трёх перпендикулярах*).



- Два различных перпендикуляра к одной и той же плоскости параллельны.

- Две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

- Перпендикуляр к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящий через линию пересечения этих плоскостей, целиком лежит во второй плоскости.

Замечание. Последняя теорема имеет важное следствие: если каждая из двух непараллельных плоскостей перпендикулярна третьей плоскости, то прямая пересечения этих двух плоскостей также перпендикулярна этой третьей плоскости.

6.2. Многогранники

Теоретический материал

Многогранником называется тело, ограниченное в пространстве конечным числом плоскостей.

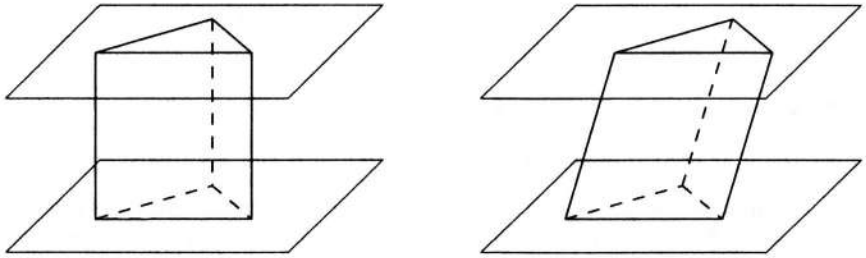
Многогранник называется *выпуклым*[4], если он лежит по одну сторону от каждой из ограничивающих его плоскостей.

Общая часть поверхности многогранника и ограничивающей его плоскости называется *гранью многогранника*[5], стороны граней – *рёбрами многогранника*, а вершины – *вершинами многогранника.*

Основные определения, связанные с призмами

N *-угольной призмой* называется многогранник, две грани которого – равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях (*основания призмы*), а остальные грани – параллелограммы (*боковые грани*).

Призма называется *прямой*, если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям; в противном случае призма называется *наклонной.*



Прямая призма называется *правильной*, если её основаниями являются правильные многоугольники.

Призма, основанием которой является параллелограмм, называется *параллелепипедом.*

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом.*

Прямоугольный параллелепипед с равными рёбрами называется *кубом.*

Высотой призмы называется перпендикуляр, проведённый из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

Основные утверждения, связанные с призмами

Объём произвольной призмы: $V = SH$, где S – площадь основания, H – высота призмы.

[4]В дальнейшем мы будем рассматривать только выпуклые многогранники.

[5]Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

Объём прямоугольного параллелепипеда: $V = abc$, где a, b, c – длины трёх рёбер, выходящих из одной вершины.

Объём куба: $V = a^3$, где a – длина ребра куба.

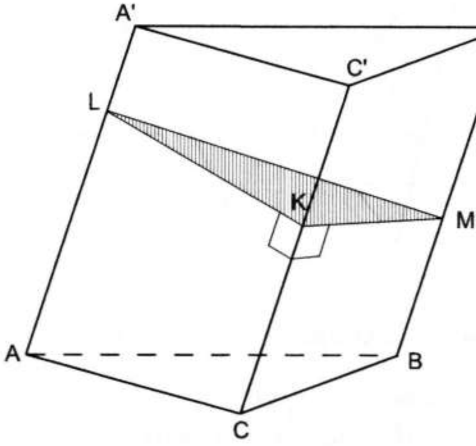
Свойства параллелепипеда:

- противолежащие грани попарно равны и параллельны;
- все четыре диагонали пересекаются в одной точке (центре симметрии параллелепипеда) и делятся этой точкой пополам.

В отличие от прямой призмы, рёбра наклонной призмы не перпендикулярны основаниям, поэтому иногда бывает удобно провести сечение призмы плоскостью, перпендикулярной рёбрам. В этом случае справедливы следующие формулы.

Объём наклонной призмы: $V = S_{\text{п}}L$, где $S_{\text{п}}$ – площадь перпендикулярного сечения, L – боковое ребро призмы.

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = P_{\text{п}}L$, где $P_{\text{п}}$ – периметр перпендикулярного сечения.



З а м е ч а н и е. Приведённые формулы справедливы и для прямой призмы, причём в качестве перпендикулярного сечения можно использовать основание призмы.

Основные определения, связанные с пирамидами

N-угольной пирамидой называется многогранник, одной гранью которого является n-угольник (*основание пирамиды*), остальными – треугольники (*боковые грани*), у которых только одна общая вершина (*вершина пирамиды*).

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания пирамиды.

Пирамида называется *правильной*, если её основание – правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.

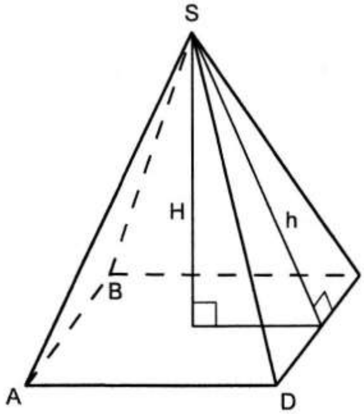
Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется *апофемой.*

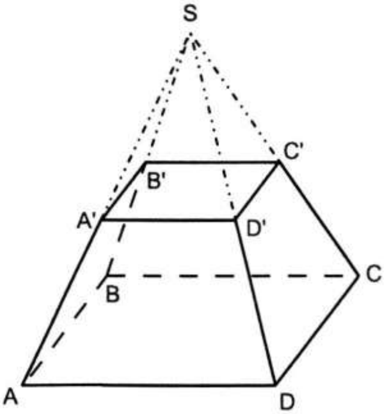
Усечённой пирамидой называется многогранник, отсекаемый от пирамиды плоскостью, параллельной основанию, и расположенный между плоскостью сечения и плоскостью основания исходной пирамиды.

Усечённая пирамида называется *правильной*, если она является частью правильной пирамиды.

Высотой усечённой пирамиды называется перпендикуляр, проведённый из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

Апофемой правильной усечённой пирамиды называется высота боковой грани (трапеции).





Основные утверждения, связанные с пирамидами

Объём произвольной пирамиды: $V = \dfrac{1}{3}SH,$
где S – площадь основания, H – высота пирамиды.

Объём произвольной усечённой пирамиды: $V = \dfrac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right),$
где S_1 и S_2 – площади оснований, H – высота пирамиды.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды: $S_{\text{бок}} = \dfrac{1}{2}Pl,$
где P – периметр основания, l – апофема.

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды:
$S_{\text{бок}} = \dfrac{1}{2}(P_1 + P_2)\,l,$ где P_1 и P_2 – периметры оснований, l – апофема.

Основные сведения о тетраэдрах

Тетраэдром называется треугольная пирамида.

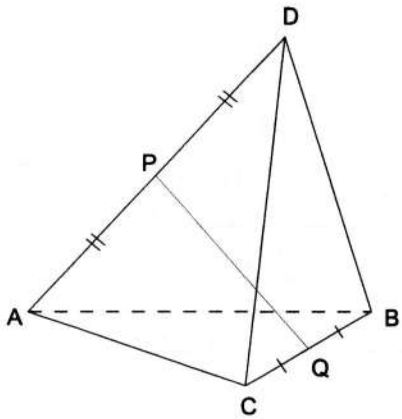
Тетраэдр называется *правильным*, если все его рёбра равны.

Тетраэдр называется *прямоугольным*, если все три его плоских угла при какой-либо его вершине прямые.

Два ребра, имеющие в качестве одного из своих концов общую вершину, называются *смежными*. Два несмежных ребра называются противоположными (или *скрещивающимися*).

Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, называемой *центроидом*, и делятся этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершины.

Бимедианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий середины противоположных рёбер. Бимедианы пересекаются в одной точке (центроиде тетраэдра) и делятся этой точкой пополам.



Высотой тетраэдра называется перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположную грань. Если высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке, то тетраэдр называется *ортоцентрическим*.

Приведём также некоторые полезные сведения относительно расположения основания высоты тетраэдра.

- Основание высоты тетраэдра является центром окружности, описанной около основания тогда и только тогда, когда длины всех боковых рёбер равны между собой (или все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом).

- Основание высоты тетраэдра является центром окружности, вписанной в основание тогда и только тогда, когда все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом.

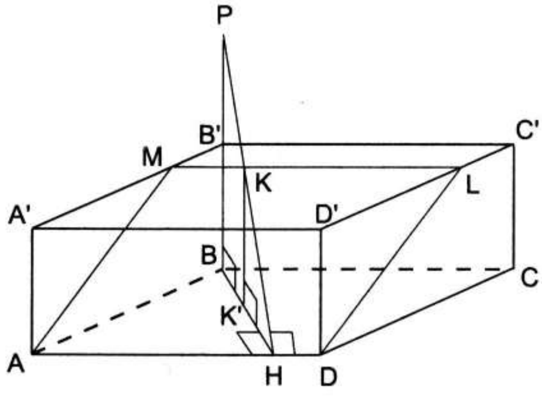
З а м е ч а н и е. Приведённые утверждения справедливы и для произвольной пирамиды.

Примеры решения задач

Пример 1. Высота прямой призмы 1м, её основанием служит ромб со стороной 2м и острым углом 30°. Через сторону основания проведена секущая призму плоскость, наклонённая к плоскости основания под углом 60°. Найти площадь сечения.

Решение. Рассмотрим прямую призму $ABCDA'B'C'D'$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ с углом $\angle BAD = 30^\circ$ и стороной, равной 2м. Высота ромба $BH = AB \cdot \sin 30^\circ = 1$. Отложим на прямой BB' отрезок $BP = \sqrt{3}$, тогда в прямоугольном треугольнике ΔBHP угол $\angle BHP = 60^\circ$.

Заметим, что отрезок BH является проекцией наклонной HP и $BH \perp AD$, следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах $HP \perp AD$. Это значит, что плоскость, проходящая через прямые AD и HP, наклонена к плоскости основания под углом 60°. Построим сечение призмы этой плоскостью.



Так как секущая плоскость должна пересекать две параллельные плоскости по параллельным прямым, то искомая плоскость пересекает верхнее основание призмы по отрезку $ML \parallel AD \parallel A'D'$.

Из параллельности противолежащих сторон четырёхугольника $A'D'LM$ следует, что он является параллелограммом и $ML = A'D' = 2$. А из параллельности и равенства отрезков ML и AD следует, что искомое сечение $ADLM$ также является параллелограммом.

Для того чтобы найти его площадь, нам необходимо вычислить длину высоты KH, где K есть точка пересечения отрезков ML и HP. Опустим из точки K перпендикуляр на отрезок BH и рассмотрим точку K' – основание этого перпендикуляра. Из прямоугольного треугольника $K'KH$ получим:

$$\frac{K'K}{KH} = \sin 60^\circ \iff \frac{1}{KH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff KH = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

В результате искомая площадь равна

$$S_{ADLM} = AD \cdot KH = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Задачи

1. В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d, образует с боковыми гранями углы β и γ. Найти объём параллелепипеда.

2. Объём правильной треугольной призмы равен V. Угол между диагоналями двух боковых граней, проведёнными из одной вершины, равен α. Определить сторону основания призмы.

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$ и $AA' = 2$. Найдите угол между прямой AC' и прямой, проходящей через середины рёбер AA' и $B'C'$.

4. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, в нём через вершину B' проведена диагональ. Найти отношение площади сечения этого куба плоскостью, перпендикулярной указанной диагонали и проходящей через её середину, к площади его полной поверхности.

5. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Найти высоту пирамиды.

6. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды?

7. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD. На отрезке SD взята точка K так, что $SK : KD = 1 : 2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\frac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $\frac{4}{\sqrt{13}}$. Найти объём пирамиды.

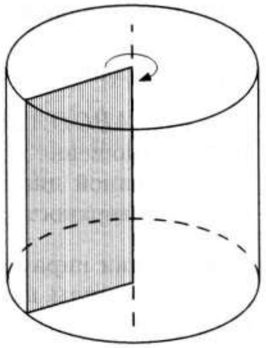
8. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

6.3. Тела вращения

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на вычисление элементов цилиндра, конуса, шара и задачи, связанные с описанными и вписанными цилиндрами, конусами, шарами. Приведём основные определения и теоремы.

Основные определения, связанные с цилиндром



Цилиндром (точнее, прямым круговым цилиндром) называется фигура, полученная вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Поверхность цилиндра состоит из *оснований цилиндра* – двух равных кругов, лежащих в параллельных плоскостях, и *боковой поверхности.*

Отрезок с одним концом на окружности одного основания, с другим концом на окружности другого основания, перпендикулярный плоскостям оснований, называется *образующей цилиндра.*

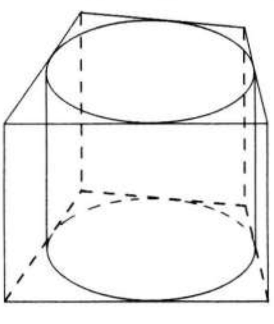
Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований.

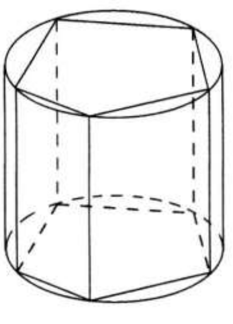
Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось, называется *осевым сечением.*

Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проходящему через эту образующую, называется *касательной плоскостью цилиндра.*

Цилиндр называется *вписанным в призму*, если его основания вписаны в основания призмы и грани призмы касаются его боковой поверхности. В этом случае призма называется *описанной около цилиндра* (левый рисунок).

Цилиндр называется *описанным около призмы*, если его основания описаны около оснований призмы и рёбра призмы являются его образующими. В этом случае призма называется *вписанной в цилиндр* (правый рисунок).





Основные утверждения, связанные с цилиндром

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$.

Объём цилиндра: $V = \pi R^2 H$.

Здесь R – радиус основания цилиндра, H – высота цилиндра.

Напомним также, что

- сечением цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, является прямоугольник;
- плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

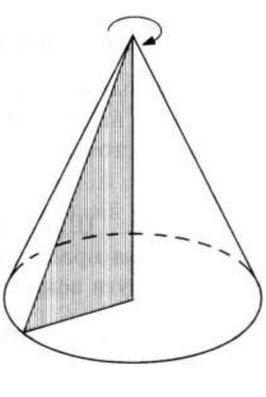
Основные определения, связанные с конусом

Конусом (точнее, прямым круговым конусом) называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.

Поверхность конуса состоит из *основания конуса* (круга) и *боковой поверхности* (кругового сектора).

Отрезок с одним концом в вершине конуса, с другим концом на окружности основания называется *образующей конуса.*

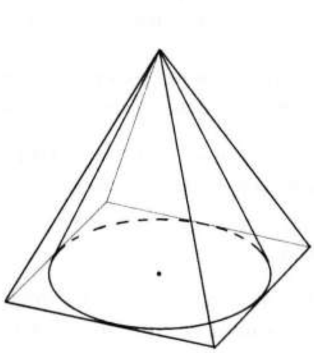
Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания. Основание высоты прямого кругового конуса совпадает с центром основания.

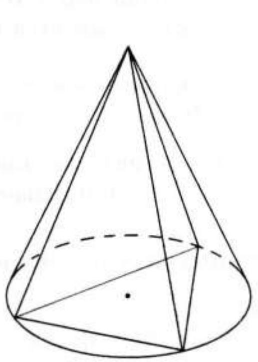


Осью конуса называется прямая, проходящая через вершину конуса и центр основания. Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось, называется *осевым сечением.*

Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная осевому сечению, проходящему через эту образующую, называется *касательной плоскостью конуса.*

Конус называется *вписанным в пирамиду*, если его основание вписано в основание пирамиды и грани пирамиды касаются его боковой поверхности. В этом случае пирамида называется *описанной около конуса* (левый рисунок).





Конус называется *описанным около пирамиды*, если его основание описано около основания пирамиды и боковые рёбра пирамиды являются его образующими. В этом случае пирамида называется *вписанной в конус* (правый рисунок).

Плоскость, перпендикулярная оси конуса, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется *усечённым конусом.*

Основные утверждения, связанные с конусом

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = \pi RL.$

Объём конуса: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H.$

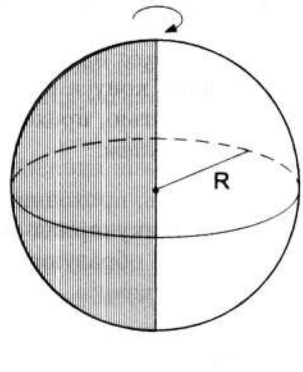
Здесь R – радиус основания, L – образующая, H – высота конуса.

Напомним также, что

- сечением конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, является равнобедренный треугольник;
- плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает его боковую поверхность по окружности.

Основные определения, связанные с шаром

Шаром называется тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся от данной точки (*центр шара*) на расстоянии, не большем данного (*радиус шара*).



З а м е ч а н и е. Шар, так же как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра.

Граница шара называется *шаровой поверхностью* или *сферой.*

Плоскость, проходящая через точку, лежащую на сфере, и перпендикулярная радиусу, проведённому в эту точку, называется *касательной плоскостью.*

Прямая, проходящая через точку сферы перпендикулярно к радиусу, проведённому в эту точку, называется *касательной прямой* или просто *касательной.*

Многогранник называется *вписанным в шар*, если все его вершины лежат на поверхности шара. В этом случае шар называется *описанным около многогранника.*

Многогранник называется *описанным около шара*, если все его грани касаются шара. В этом случае шар называется *вписанным в многогранник.*

Основные теоремы, связанные с шаром

Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку касания. Через любую точку сферы проходит бесконечное число касательных, причём все они лежат в касательной плоскости шара.

Любая диаметральная плоскость (плоскость, проходящая через диаметр) является плоскостью симметрии шара. Центр шара является его центром симметрии.

Площадь поверхности сферы: $S = 4\pi R^2$, где R – радиус сферы.

Объём шара: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Центром шара, вписанного в многогранник, является точка пересечения плоскостей, делящих двугранные углы многогранника пополам.

Если многогранник вписан в шар, то вокруг каждой из его граней можно описать окружность. Центр описанного шара есть точка пересечения перпендикуляров к граням, проведённых через центры этих окружностей.

Для каждого тетраэдра существует вписанный и описанный шар, причём

$$V = \frac{1}{3}Sr,$$

где V – объём тетраэдра, S – площадь его полной поверхности, r – радиус вписанного шара.

Вокруг любой правильной пирамиды можно описать шар, причём центр описанного шара будет лежать на высоте пирамиды.

В любую правильную пирамиду можно вписать шар, причём центр вписанного шара будет лежать на высоте пирамиды, а точки касания шара с боковыми гранями – на соответствующих апофемах.

Вокруг любой правильной призмы можно описать шар, причём центром этого шара будет середина высоты, проведённой через центры оснований призмы.

Сечением шара плоскостью является круг. Его центр есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Линия пересечения двух сфер есть окружность.

Части шара

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

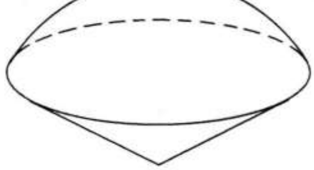
Шаровым слоем называется часть шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар.

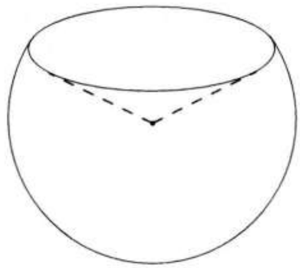
Шаровым сектором называется тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, который имеет общее основание с сегментом и вершину в центре шара.

Замечание. Шаровой сектор получается из шарового сегмента и конуса следующим образом. Если шаровой сегмент меньше полушара, то он дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основанием является основание сегмента. Если же сегмент больше полушара, то конус из него удаляется.

Основные формулы для шарового сегмента:

- площадь боковой поверхности: $S = 2\pi RH$;





- объём: $V = \pi H^2 \left(R - \dfrac{H}{3}\right)$,
  где R – радиус шара, H – высота сегмента.

Основные формулы для шарового слоя:

- площадь боковой поверхности: $S = 2\pi RH$;
- объём: $V = \dfrac{\pi H}{6}\left(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2\right)$,
  где R – радиус шара, R_1 и R_2 – радиусы оснований, H – высота слоя.

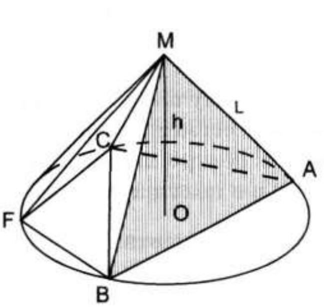
Основные формулы для шарового сектора:

- площадь боковой поверхности: $S = 2\pi RH$;
- объём: $V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 H$,
  где R – радиус шара, H – высота сектора.

Примеры решения задач

Пример 1. Дан конус с вершиной M, радиус основания которого равен 6. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, AMC, CMB равны 90° каждый. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, так, что объём пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB.

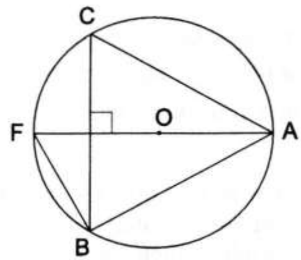
Решение. Рассмотрим конус с радиусом основания $R = 6$, высотой h и наклонной l. Пирамида $ABCM$ вписана в конус, следовательно, её боковые рёбра равны l.



Так как по условию задачи углы при вершине M равны 90° каждый, то боковые грани являются равными равнобедренными прямоугольными треугольниками. Следовательно, рёбра основания пирамиды $ABCM$ равны между собой и треугольник ABC – равносторонний.

Определим положение точки F на окружности основания конуса из условия максимальности объёма пирамиды $MABFC$:

$$V_{MABFC} = \frac{h}{3} \cdot S_{ABFC} = \frac{h}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AF \cdot \sin\angle(BC, AF) \leq \frac{h}{6} \cdot BC \cdot 2R.$$



Максимум достигается в случае, когда AF является диаметром и угол между диагоналями четырёхугольника $ABFC$ прямой.

Для того чтобы найти искомое расстояние от точки F до плоскости MAB, подсчитаем объём тетраэдра $ABFM$ двумя способами. С одной стороны,

$$V_{ABFM} = \frac{h}{3} \cdot S_{\Delta ABF} = \frac{\sqrt{l^2 - R^2}}{3} \cdot \frac{BF \cdot AB}{2},$$

где отрезки $BF = R$, $AB = \sqrt{3}R$ (как катеты прямоугольного треугольника ABF с острым углом $\angle AFB = 60^\circ$ и гипотенузой $AF = 2R$), а образующая конуса $l = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = R\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Следовательно,

$$V_{ABFM} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}R^2 - R^2}}{3} \cdot \frac{R \cdot \sqrt{3}R}{2} = \frac{R^3}{2\sqrt{6}} = 18\sqrt{6}.$$

С другой стороны,

$$V_{ABFM} = \frac{x}{3} \cdot S_{\Delta MAB},$$

где $S_{\Delta MAB} = \dfrac{l^2}{2} = \dfrac{3R^2}{4} = 27$, а x – искомое расстояние от точки F до плоскости MAB, следовательно,

$$V_{ABFM} = \frac{x}{3} \cdot 27 = 18\sqrt{6} \quad \Longrightarrow \quad x = 2\sqrt{6}.$$

Ответ. $2\sqrt{6}$.

Задачи

1. Плоское сечение SAB, проходящее через вершину S прямого кругового конуса, имеет площадь $60\,\text{см}^2$. Точки A и B, лежащие на окружности основания конуса, делят её длину в отношении $1:5$. Найти объём конуса, если угол $\angle SAB$ равен $\arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)$.

2. Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной 6. Одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания и равно 4. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

3. Угол в осевом сечении прямого кругового конуса равен α. Через его вершину под углом β к оси конуса ($\beta < \dfrac{\alpha}{2}$) проведена плоскость. Найти угол x между двумя образующими конуса, по которым проведённая плоскость пересекает его поверхность.

4. Ребро куба равно a. Найти объём прямого кругового цилиндра, вписанного в куб так, что осью его является диагональ l куба, а окружности оснований касаются тех диагоналей граней куба, которые не имеют общих точек с диагональю l куба.

5. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

6. В треугольной пирамиде длины двух непересекающихся рёбер равны 12 и 4, а остальные рёбра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Найти расстояние от центра сферы до ребра длины 12.

7. Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы радиуса 4 с центром в точке O. Найти угол BAC, если известно, что площадь треугольника OBC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

6.4. Комбинации тел

Задачи

1. В сферу радиуса R вписан прямой круговой цилиндр. Найти наибольшее значение площади боковой поверхности цилиндра и отношение его высоты к радиусу сферы в этом случае.

2. В прямой круговой конус вписан шар. Отношение объёма конуса и шара равно двум. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

3. В правильную треугольную пирамиду помещены три шара так, что первый шар касается всех боковых граней пирамиды и второго шара, второй шар касается боковых граней пирамиды и третьего шара, а третий шар касается боковых граней, основания пирамиды и второго шара. Какую долю объёма пирамиды занимают три шара, если её боковые грани наклонены к основанию под углом α?

4. Сфера радиуса 2 касается плоскости в точке A. В той же плоскости лежит основание конуса. Прямая, проходящая через центр основания конуса (точку C) и точку сферы, диаметрально противоположную точке A, проходит через точку M. Точка M является точкой касания сферы и конуса (их единственная общая точка). Найдите высоту конуса, если $AC = 1$.

5. Основанием правильной пирамиды является равносторонний треугольник со стороной a, а высота, опущенная на это основание, равна H, причём все шесть рёбер пирамиды касаются некоторой сферы. Найти радиус этой сферы.

6. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD. Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB. Площадь боковой поверхности конуса равна $9\pi\sqrt{3}$. Найдите длину ребра тетраэдра.

7. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $DC = 9$, ребро $DB = AD$, а ребро AC перпендикулярно к грани ABD. Сфера радиуса 2 касается грани ABC, ребра DC, а также грани ABD в точке пересечения её медиан. Найти объём пирамиды.

8. Отрезок PN – диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объём пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN, если T – середина ребра ML.

Ответы

АЛГЕБРА

1.1

7. $n = 5k + 2,\ k = 0; 1; 2; \ldots$
11. Нет.
14. $n = 6l + 1,\ n = 6l + 2,\ l \in \mathbb{N}$.
17. $n = 33m,\ m \in \mathbb{N}$.

1.2

1. $(1; k),\ k \in \mathbb{Z};\ (l; 1),\ l \in \mathbb{Z}$.
2. $(0; 0),\ (-1; 0)$.
3. Решений нет.
7. $(0; 0)$.
8. $(1; 2),\ (2; 1)$.
9. $(0; -1; 0),\ (6; -1; 0),\ (0; 1; 0),\ (6; 1; 0)$.
10. $(0; 0)$.
11. $(0; 0),\ (2; 2)$.
12. $(1; 2; 2),\ (2; 2; 1),\ (2; 1; 2)$.
13. $(2; 1)$.
14. $(0; \pm 2),\ (3; \pm 5),\ (4; \pm 7)$.
15. $(1; 1),\ (2; 3)$.
16. $(2; 3; 1),\ (3; 2; 1),\ (1; 2; 3),$
$(1; 3; 2),\ (2; 1; 3),\ (3; 1; 2)$.
17. $(0; 0; 0)$.

1.3

1. 3.
3. $-1;\ 0$.
11. Да.
13. $n = 5p + 1,\ p \in \mathbb{Z}$.
15. $n = 3k,\ n = 3k + 1,\ k \in N$.
17. Нет.
18. $(0; 0)$.

1.4

3. Нет.
4. $p = -2,\ q = -2$.
5. Нет.
6. Девятки.
7. $x = y = 0$.
8. Да.
13. 9.
14. 2.

1.5

1. $10^{\log_9 3} > 7^{\log_4 2}$.
2. $\log_4 7 > \log_{1/3} 2$.
3. $\log_{11} 12 > \log_{12} 13$.
4. $\log_2 \pi + \log_\pi 2 > 2$.
5. $\log_2 5 > \log_3 5$.
6. $\log_2 3 > \log_3 2$.
7. $\log_{11} 119 < \log_{15} 227$.
8. $4^{\sqrt{\log_4 5}} = 5^{\sqrt{\log_5 4}}$.
9. $3^{40} > 4^{30}$.
10. $\sqrt[9]{9!} > \sqrt[8]{8!}$.
11. $\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \sin 5 > 0$.
12. $\sqrt{2\cos 2 + 4\cos 1 + 3} - 2\cos 1 > \dfrac{1}{2}$.
13. $\lg(\operatorname{arctg} 2) > 0$.
14. $\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{5}{8}$.
15. $\sin 3 > \sin 3^\circ$.
16. $\sin\dfrac{\pi}{7} < \sqrt{\dfrac{2}{7}} < \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$.
17. $\log_2 3 > \log_5 8$.
18. $\log_3 7 > \log_7 27$.
19. $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$.
20. $\sin 31^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ$.
21. $\operatorname{tg} 55^\circ > 1,4$.
22. $10^{\sqrt{11}} > 11^{\sqrt{10}}$.
23. $\sqrt[3]{40} + 1 < \sqrt[3]{88}$.
24. $\log_2 14 < \sqrt{15}$.
25. $\log_{189} 1323 > \log_{63} 147$.
26. Первое число больше.

2.1

3. 0.
4. 6.
5. $-\dfrac{\pi}{7}$.
6. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

7. $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
8. $\dfrac{12}{37}$.
9. 7.
10. 15.
11. 1.
12. $\dfrac{2+2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$.
13. $-\dfrac{12+5\sqrt{3}}{26}$.
14. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
15. $\sqrt{\dfrac{3}{11}}$.
16. $4\pi - 10$.
17. $14 - 4\pi$.
19. x.
20. $\dfrac{2b}{a}$.

2.2

2. $\dfrac{\pi}{4} < \arcsin\dfrac{1}{3} + \arccos\dfrac{2}{3}$.
3. $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{10}$; 0; $\operatorname{ctg}\dfrac{9\pi}{10}$.
4. $\pm\cos\dfrac{\pi}{18}$; $\pm\cos\dfrac{5\pi}{18}$.
5. $\operatorname{arctg} 3^{\frac{1}{\pi}} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
6. 0.
7. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.
8. $[1;+\infty)$.
9. $\pi + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
10. $\pm\dfrac{\pi}{14}$.
11. $\dfrac{\pi}{16}$; $\dfrac{3\pi}{16}$.
12. При $k=1$;
$\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi-\pi\sqrt{7}}{4}; \cos\dfrac{\pi+\pi\sqrt{7}}{4}\right)$.
13. $\left[\dfrac{-5-2\sqrt{3}}{26}; 0\right]$.
14. $[-3;-2)\cup\{1\}$.

2.3

1. $(-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{R}$.
3. $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
4. $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$.
5. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \pi + 2\pi m,\ n,m\in\mathbb{Z}$.
6. $\left[-\dfrac{\pi}{4} - \pi n; \dfrac{\pi}{4} - \pi n\right]\cup\left[-\dfrac{\pi}{4};\infty\right), n\in\mathbb{N}$.
7. $\mathbb{R}$.
8. $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
9. $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{6};\pi\right]$.
10. $\left(-\dfrac{7\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[0,\dfrac{\pi}{12}\right)$.
11. $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
12. $-\dfrac{\pi}{3}$.
13. $\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n,\quad \dfrac{17\pi}{12} + 2\pi m$;
$n,m\in\mathbb{Z}$.
14. $\left(0;\dfrac{\pi}{8}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{8}\right)\cup$
$\cup\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{8}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{7\pi}{8}\right)$.

2.4

1. $|x|>1,\quad x\ne\dfrac{\pi k}{2},\quad k\in\mathbb{Z}, k\ne 0$.
2. $\dfrac{\pi}{4} + \pi k \le x < \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k = \pm1, \pm2, \ldots$
и $\sqrt{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.
3. $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.
4. $\left[\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$; $n\in\mathbb{Z}$.
5. $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \operatorname{arctg} 2 + 2\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.
6. $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{2\pi}{3};\pi\right)$.
7. $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

8. $[0,6;1]$.
9. $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{120}{169}\right]$.
10. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ -\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi m}{2};\ n,\ m\in\mathbb{Z}$.
11. $\pi+\arcsin\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
12. $\dfrac{\pi}{12}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{12}+2\pi m;\quad k,m\in\mathbb{Z}$.
13. $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.
14. $-\dfrac{12}{5}\le a\le 0$.
15. $[-13;-4\pi)\bigcup\left(-4\pi;-\dfrac{11\pi}{3}\right)\bigcup$ $\left(-\dfrac{7\pi}{3};-2\pi\right)\bigcup\left(-2\pi;-\dfrac{5\pi}{3}\right)\bigcup$ $\bigcup\left(-\dfrac{\pi}{3};-1\right]$.
16. $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\dfrac{\pi}{3}+\pi n\right]\bigcup\left\{\dfrac{3}{2}\right\}\bigcup$ $\bigcup\left[\dfrac{2\pi}{3}+\pi m;\dfrac{3\pi}{4}+\pi m\right);$ $n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}_0$.

3.1

1. $(0,1;\ 0,01)$, $(100;\ 10)$.
2. $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$.
3. $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.
4. $(-1;\ 1)$.
5. $(-2;\ -2)$.
6. $[-2;-1)\cup[0;1]$.
7. $\left(\dfrac{3}{4};7\right]$.
8. $(9;\ 1)$.
9. $\left\{-5;\ -\dfrac{4}{5};\ 2\right\}$.
10. $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.
11. $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.
12. 2.
13. $(2-\sqrt{2};\ 1]\cup[3;\ 2+\sqrt{2})$.
14. $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$.
15. $(0;\ \pm1)$.
16. $(2;\ -1)$, $\left(\dfrac{12}{7};\ -\dfrac{1}{7}\right)$.
17. $(-1;\ 1;\ -2), (-1;\ 1;\ 2)$.
18. Решений нет.
19. $(-1;-1;-1)$.
20. $(2;\ 1)$.
21. $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.
22. $x\in\mathbb{R}$.
23. $x\in\left[3;\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{1+\sqrt{37}}{2};+\infty\right)$.
24. $\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi(k_1+l_1);\right.$ $\left.-\dfrac{\pi}{3}+\pi(k_1-l_1);2\pi k_1\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3}+\pi(k_2+l_2);\right.$ $\left.\dfrac{\pi}{3}+\pi(k_2-l_2);2\pi k_2\right)$, $\left(\dfrac{2}{3}\pi+\pi(m_1+n_1);\right.$ $\left.\dfrac{\pi}{3}+\pi(m_1-n_1);\pi+2\pi m_1\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi(m_2+n_2);\right.$ $\left.\dfrac{2\pi}{3}+\pi(m_2-n_2);\pi+2\pi m_2\right);$ $n_1,n_2,l_1,l_2,m_1,m_2,k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.
25. $(-2;\ 2), (2;\ -2)$, $(2\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$.

3.2

1. $\left(\dfrac{3}{7};\ \dfrac{11}{7}\right)$.
2. $(-3;-2)\cup\{-1\}\cup(0;1)$.
3. $(-4;\ -2)$, $(0;\ -2)$.
4. -1.
5. $-4\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}$.
6. $(x+4-\sqrt{6})(x+4+\sqrt{6})(x+2)(x+6)$.
7. $1\pm\sqrt{3}$, $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
8. $(1;2;3)$, $(-1;-2;-3)$.
9. $(1;3)$, $(3;1)$.
10. $(3+\sqrt{10};\ -3+\sqrt{10})$, $(3-\sqrt{10};\ -3-\sqrt{10})$, $(3;\ 2)$, $(-2;\ -3)$.
11. $(2;1)$, $(-2;-1)$, $\left(\dfrac{7}{2\sqrt{2}};-\dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{7}{2\sqrt{2}};\dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)$.

12. $\left(-\infty;\ -1-\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3}+1}\right)\cup$
$\cup\left(-1+\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3}+1};\ +\infty\right)$.

13. $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

14. $(-\infty;-\sqrt{5}-2)\cup(-\sqrt{5}+2;0)\cup$
$\cup(0;\sqrt{5}-2)\cup(\sqrt{5}+2;+\infty)$.

16. $(15;\ 10)$, $(10;\ 15)$.

17. $(-\infty;\ -2)\cup(0;\ +\infty)$.

18. $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{4}$.

3.3

1. 50.
2. -34.
3. -5; 5.
4. -4; 1.
5. $1/3$.
6. $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{25}\right)$, $\left(\frac{1}{25};\frac{1}{9}\right)$.
7. $[5;10]$.
8. $(-\infty;\ -1]\cup\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup[0;\ +\infty)$.
9. $\{-3\}\cup(1;\ +\infty)$.
10. $\{0\}\cup(16;\ +\infty)$.
11. $\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{8}\right)$.
12. $x=1-\sqrt{(a-1)^2+4}$ и
$x=1+\sqrt{(a+2)^2+4}$ при $a<-2$;
$x=1-\sqrt{(a-1)^2+4}$ и
$x=1-\sqrt{(a+2)^2+4}$ при
$-2\le a<-1/2$;
$x=-3/2$ при $a=-1/2$;
$x=1-\sqrt{(a-1)^2+4}$ и
$x=1-\sqrt{(a+2)^2+4}$ при
$-1/2<a\le 1$;
$x=1+\sqrt{(a-1)^2+4}$ и
$x=1-\sqrt{(a+2)^2+4}$ при $a>1$;
при $a=-1/2$ уравнение имеет только один корень.
13. $\left[\frac{27-4\sqrt{66}}{9};\ \frac{8-\sqrt{85}}{3}\right]\cup$
$\cup\left[\frac{17+\sqrt{349}}{6};\ \frac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]$.
14. $(\sqrt[3]{4};\ 9)$.
15. $(1;\ 1)$, $\left(\frac{5}{2};\ -2\right)$.

3.4

1. 0; 1.
2. 10; $10^{-\frac{5}{4}}$.
3. 1; 4.
4. $\pm\sqrt{-\log_2\frac{6-\sqrt{26}}{2}}$; в другом виде
$\pm\sqrt{\log_2\frac{6+\sqrt{26}}{5}}$.
5. $-1\pm\sqrt{2}$.
6. -1; $\frac{2}{3}$.
7. 3; 81.
8. 2^{-8}, 2^{27}.
9. $\left(\frac{2}{3};\ 1\right)\cup(1;\ 2]$.
10. $-\frac{1}{4}$.
11. $\left(-1;\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[1;\ \frac{7}{3}\right)$.
12. $[-1;\ 1)\cup(1;\ 3]$.
13. $[1;\ 5)\cup(10;\ +\infty)$.
14. $[-\log_3 2;\ 0)\cup\left(\frac{1}{2}\log_3 2;\ 1\right]$.
15. $(0;3]$.
16. $\frac{3}{2}$; $\frac{36}{25}$.
17. $(5;\ 0)$, $\left(\frac{1}{5};\ 2\right)$.
18. $(-\infty;\ 0)\cup(\log_3 2;\ 1)$.
19. $(3;\ -2)$.
20. $\left(\log_2(\sqrt{6}-2);\log_3\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)$.
21. $(5;\ 2)$, $\left(\frac{93}{2};\ \frac{33}{2}\right)$.
22. ± 1.

3.5

1. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

2. $x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.
3. $(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi n,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;$ $n, k \in \mathbb{Z}$.
4. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
5. $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \frac{\pi k}{2};\ n, k \in \mathbb{Z}$.
6. 3 корня.
7. $x = \frac{4}{\sqrt{13}};\ y = \frac{6}{\sqrt{13}};\ z = \frac{9}{\sqrt{13}};$ $v = \frac{6}{\sqrt{13}}$.
8. $(\sqrt{\pi};\ \pm\sqrt{\pi}),\ \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}; \pm\frac{\sqrt{7\pi}}{2}\right)$.
9. Нет решений.

4.1

1. $\frac{5}{7}$.
2. В 2 раза.
3. $\frac{18}{29}$.
4. 2,1 кг.
5. 45 минут.
6. 48 минут.
7. В 2 раза.
8. 28 млн. т.

4.2

1. 8 книг.
2. 3.
3. $[15, +\infty)$.
4. 6 насосов; нет.
5. 36.
6. 40 минут и 1 час соответственно.
7. 50 км/ч.

4.3

1. 1 набор за 4 рубля и 16 наборов по 6 рублей.
2. 11000 тыс. р. и 12600 тыс. р.
3. 10500 тыс. р. и 12600 тыс. р.
4. 10 человек.
5. 8, 56, 392.
6. 432 человека.
7. 20 рейсов.
8. При шести членах; -66.
9. 300 или 600 шт.
10. 156 домов.

5.1

1. $[1; 3]$.
2. $-\frac{1}{2}$.
3. $c > 0$.
4. $q \leq 0$.
5. $(p^2 + 2q)^2 - 2q^2$.
6. $y^2 + (p^3 - p^2 - 3pq + 2q)\, y - (p^2 - 2q)(p^3 - 3pq) = 0$.
7. Минус.
8. $(-\infty; 20]$.
9. 0; 1.
10. $(3 - 2\sqrt{3}; 2\sqrt{15} - 6)$.
11. $\pm\sqrt{3}$.
12. $\{0\} \cup [3; +\infty)$;
    если $m = 0$, то $x = 0$;
    если $m = 3$, то $x = \frac{9}{2} > 0$;
    если $m > 3$, то два положительных корня;
    если $0 \neq m < 3$, то нет решений.
13. $\{0\} \cup (2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{5})$.
14. $1 - \sqrt{2};\ 5 + \sqrt{10}$.

5.2

1. $\left(\frac{16}{17}; 2\right)$.
2. $(-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11})$.
3. $\left(-\frac{16}{7}; -1\right)$.
5. $(-\infty; 20]$.
6. -3.
7. -8.
8. $[-3; 3]$.
9. $\left\{-\sqrt{2}\right\} \cup (-1; 1)$.

10. $\left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$.
11. $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$.
12. $\left(0; \frac{1}{8}\right)$.
13. $(-\infty; -3) \cup (1; 6)$.
14. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$.
15. 1) $\left(1; \frac{2+\sqrt{13}}{4}\right)$; 2) $\frac{7}{3}$.
16. $(-\sqrt[3]{36}; -3] \cup \left(0; \frac{\sqrt[3]{9}}{2}\right)$.
17. $[2; 4) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\} \cup \left\{\frac{5}{3}\right\}$.
18. $(-6; 7)$.

5.3

1. -3.
2. -5.
3. 1.
4. $p = 3$.
7. Прямая $q = -ap - a^2$.
9. $-\frac{82}{9}$.
10. $(-\infty; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$.
11. 2; A.
12. $(-\infty; -2-\sqrt{6}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.
13. $[2; +\infty)$.
14. $\left(-\frac{13}{4}; 3\right)$.
15. Если $k = -1$, то
$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$;
если $k = 0$, то $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
если $k = 1$, то
$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{7}-1}{2} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.
16. 1.
17. $k \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
18. $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right) \bigcup \left(\frac{3}{4}; \frac{33}{32}\right]$.
19. $(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$.

6.1

1. πn, $n \in \mathbb{Z}$.
2. ± 2; 0.
3. 1.
4. 2.
5. 2.
6. $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$;
$\pm\frac{2\pi}{3} - 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$.
7. Нечётная.
10. $\frac{\pi}{2}$.
11. 2π.

6.2

1. $(-\infty; -2]$.
2. $[-1; +\infty)$.
3. $[0; 3]$.
4. $\left(-\frac{5}{3}; +\infty\right)$.
5. $(1; 8]$.
6. $[-3; 0]$.
7. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
8. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
9. $1 - 2\pi$.
10.
11. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
12. $(-\infty; 0)$.
13. $\frac{2}{3}$.
14. 7.
15. 3.
16. $-1; 3$.
17. $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$.
18. $1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$.
19. $\left(2\pi - \frac{1}{8}; +\infty\right)$.

6.3

1. Нет.
2. $f(x) = -x^2 - 4x + c,\ c \in \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{3}{4x} - \dfrac{x^2}{4}$.
4. $f(x) = \dfrac{5}{8x^2} - \dfrac{x^3}{8}$.
5. 99 решений; $x_n = \dfrac{n}{99}$, $n = 0, 1, 2, \ldots 98$.
6. $[2; +\infty)$.
7. $0;\ \dfrac{1}{3};\ \dfrac{2}{3}$.
8. $\dfrac{3}{7}$.
9. -2.
10. 25.
11. $9,2$.
12. 42.
13. Три корня.
14. Пять корней.
15. Два нуля.
16. Два нуля.
17. $f(x) = -\log_3\left(\dfrac{-x}{3}\right)$ при $x < 0$. Корни уравнения $-\dfrac{1}{9};\ 81$.
18. $1 + 8n,\ 7 + 8k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.
19. $-\dfrac{1}{2} + 8k,\ k \in \mathbb{Z}$.
20. $[\,3\sqrt{2}\,;\,6\,]$.
21. 1.
22. -1.

6.4

1. $4;\ \dfrac{19}{4}$.
2. $2; \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.
3. При $a = -2$ $x \in \left\{2;\ \dfrac{6}{5};\ \dfrac{10}{3}\right\}$; при $a = -\dfrac{1}{2}$ $x \in \left\{-\dfrac{1}{5};\ 0;\ \dfrac{1}{3}\right\}$.
4. $[1; 3]$.
5. $[2; 3) \cup (3; 4]$.
6. $\left(\dfrac{217 - 5\sqrt{415}}{29}; \dfrac{180 + 2\sqrt{415}}{29}\right)$.
7. $a = 4; b \in \left(-3 - \sqrt{45}; 3 - \sqrt{45}\right) \cup$ $\cup \left(\sqrt{45} - 3; \sqrt{45} + 3\right)$.
8. $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.
9. $\pm\sqrt{2}$.
10. $\left(-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
11. $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
12. $[0; 1) \cup (1; 2] \cup \{3\}$.
13. $0;\ \dfrac{9 + \sqrt{81 + 12\pi}}{2}$.
14. $\pm\dfrac{1}{6};\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.
15. 27.
16. -112.
17. $[1;\ 1,5] \cup [2,5;\ 3]$.

7.1

1. Решений нет.
2. $-1; 2$.
3. 3.
4. $y_{\min} = 0,\ y_{\max} = 1$.
5. $y_{\min} = \dfrac{2}{3},\ y_{\max} = 2$.
6. $[-1; 0) \cup [1; +\infty)$.
7. $y_{\min} = 1,\ y_{\max} = \sqrt{2}$.
8. $(0;\ 1),\ (1;\ 0)$.
9. $(0;\ 0)$.
10. Решений нет.
11. 8.
12. $0;\ 1$.
13. $(4; -3; 0),\ (2; -1; 2)$.
14. $4{,}25$.
15. $(1; -1)$.

7.2

1. $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; 1\right),\ \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; -1\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
2. 3.

3. -1; -2.
4. $(-2; \pi k)$, $\left(2; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. $\pi/4$.
6. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. $(0; 1)$.
8. $\left(\pm\frac{\pi}{4} + \pi n;\ 1\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
9. $\left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
10. Решений нет.
11. Решений нет.
12. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
13. 0.
14. $(-2; -4)$, $(-1; -3)$.
15. $-\frac{5\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{12}$.
16. $\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot (2k - 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.
17. $a = 4l - 1$, $l \in \mathbb{Z}$.
18. 0,99.
19. $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{23\pi}{12}$.
20. πn, $n \in \mathbb{Z}$.
21. $\left(1; -\frac{\pi}{2}\right)$.
22. $\left(\frac{3}{82}; +\infty\right)$.
23. $(-1; 2)$, $(-1; -2)$.
24. $(1; 256{,}5; 128)$, $(-1; -256{,}5; -128)$.
25. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
26. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7.3

1. Решений нет.
2. 0.
3. $\left\{\frac{3}{2}\right\} \cup (2; +\infty)$.
4. $x \in (0; 1) \cup \{2\}$ при $\alpha = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x \in (0; 1)$ при остальных α.
6. -1.
7. $\left[1; \frac{\pi}{3}\right]$.
8. Решений нет.
9. 2.
10. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 0{,}1\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
11. $(3; +\infty)$.
12. $(-2; 1)$.
13. При $a = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ $x = \frac{\sqrt{3} - 5}{2}$; при $a = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ $x = \frac{-\sqrt{3} - 5}{2}$.
14. 1.
15. $-\frac{3}{4}$.
16. $(-\infty; +\infty)$.
17. 0.
18. При $a = \frac{1}{3}$ $x = 1$, при остальных значениях a решений нет.
19. $(-1; -3)$, $(3; -3)$.
20. 2.
21. При $a \neq 0$ $x = 0$; при $a = 0$ $x = 0$ и $x = -1$.
22. 2.
23. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
24. 5.

8.1

14. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
17. Не имеет.
18. Да.

8.3

7. $2^{x-1} + 2^{y-1} \geq \sqrt{2^{x+y}}$.
21. Нет.

9.1

1. $(3; 3; 3)$
2. $-\frac{\sqrt{5}a}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{5}a}{2}$.
3. $2\sqrt{2}$.
4. $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.
5. $p = 9$; $[-1; 3]$.
6. $[3 - \sqrt{6}; 2] \cup [5; 3 + \sqrt{6}]$.

7. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
8. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
9. При $b = -\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{8}}; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$;
при $b = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{8}}; \frac{\pi}{4} + \pi m\right)$, $m \in \mathbb{Z}$;
при остальных значениях параметра решений нет.

9.2

1. 2.
2. 1.
3. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 0; $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
4. $-3; 9$.
5. $2 - \sqrt{2}$; $2 + \sqrt{2}$.
6. $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$; 0; $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.
7. $-1; 2$.
8. $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{32}$.

9.3

1. $[-1; 1]$.
2. $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.
3. $(-\infty; 0]$.
4. $\frac{5}{2}$.
5. $(0; \sqrt{35}]$.
6. $\left[-\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$.
7. $\left[-\frac{7}{2}; +\infty\right)$.
8. $(-\infty; -\sqrt{13}] \cup \left[\frac{11}{3}; +\infty\right)$.

9.4

1. $(-\infty; -99]$.
2. -1.
3. $-\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.
4. 1.
5. $\frac{1}{16}$.
6. $u = 6$, $v = 4$.
7. $[3; 5]$.
8. $a = -2$; $b = 4; 5; 6; \ldots$;
$a = -1$; $b = 3; 4; 5\ldots$
9. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \cup (\sqrt{2}; 2)$.

ГЕОМЕТРИЯ

1.1

1. $|AC| > |BK|$.
2. $|AB| = 5$.
3. Длины боковых сторон равны $\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$, длина основания равна $\frac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$.
4. $\frac{c \sin 2\alpha}{\sqrt{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)}$.
5. $|BL| > |BG|$.
6. $|AC| = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{5}}$.
7. $\sqrt{15 + 6\sqrt{3}}$.
8. $|AB| = 1 + 6\sqrt{2}$, $|BC| = 5\sqrt{3}$, $|AC| = 2$.
9. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}$ и $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}$.
10. $\frac{b}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma}$.
11. $\sqrt{\frac{2}{4 - \pi}}$.
12. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.
13. $\frac{\pi}{2}$.
14. $\frac{200}{3}$.
15. $\frac{6}{5}$.
16. 10.
17. 3 и 4 или $\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}}$ и $\sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{\frac{45}{2}}$.
18. $\operatorname{arctg} 3$.

19. $\dfrac{3\pi}{8}$.
20. $|BN| < |CL|$.
21. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\varphi \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi - 8}}{4}\right)$,

$\varphi \in [\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}; \pi/2)$.
22. 12.
23. $\dfrac{\sqrt{25a^2 + 36b^2}}{10}$.
24. $h\sqrt{2}$.
25. $\dfrac{8\sqrt{10}}{3}$.
26. $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.
27. $\dfrac{9\sqrt{65}}{5}$ или $\sqrt{25 + \dfrac{96}{\sqrt{17}}}$.
28. $|AC| = \sqrt{7}$.
29. $\dfrac{5\sqrt{13}}{12}$.
30. 6.
31. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.
32. $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha(2\cos 2\alpha + 1)^2$.
33. 40.
34. $\dfrac{12}{5}$.
35. 25.

1.2

1. $\dfrac{3(\sqrt{3} \pm 1)}{2}$.
2. $\dfrac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.
3. $10\sqrt{3}$.
4.
5. $\dfrac{\pi}{3}$.
6. $\sqrt{2}$.
7. а) $\dfrac{|AM|}{|MC|} = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$.

б) $|AM| = \dfrac{4\sqrt{2}}{5+4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{41 - 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$,

$|MC| = \dfrac{5}{5+4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{41 - 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$.
8. $\dfrac{5}{13}\sqrt{119}$.
9. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.
10. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$.
11. $R\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$.
12. 2.
13. $\dfrac{a\sin(\alpha+\beta)(4 - 3\cos^2\beta)}{12\sin\alpha\sin\beta}$.
14. 11.
15. $\widehat{BOC} = 112{,}5^\circ$.
16. $\dfrac{23}{17}$.
17. $|AB| = |BC| = 4 + 2\sqrt{3}$,

$|AC| = 6 + 4\sqrt{3}$.
18. $\dfrac{91(6-\sqrt{6})}{30}$.
19. $\dfrac{25}{3}$.
20. $3 + 6\sqrt{6}$.
21. 5.
22. $\dfrac{15}{4}$.
23. $6\sqrt{\dfrac{3}{19}}$.
24. $|AC| = |BC| = 2 + \sqrt{2}$,

$|AB| = 2 + 2\sqrt{2}$.
25. 1.
26. $2\sqrt{\dfrac{183}{7}}$.
27. $\dfrac{78 - 30\sqrt{2}}{17}$.
28. $\dfrac{8}{5}$.
29. $\dfrac{39}{24}$.
30. $\widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 2\arcsin\dfrac{\sqrt{8k^2+1} - 1}{4k}$,

$\widehat{ABC} = \pi - 4\arcsin\dfrac{\sqrt{8k^2+1} - 1}{4k}$,

задача имеет решение при всех $k > 0$.
31. 1.
32. 6.
33. 4.

34. $1+\sqrt{6}$, $\quad 2\sqrt{10}$.
35. $5\sqrt{5}$.
36. $\dfrac{1}{2k}$.

1.3

1. $\sqrt{\dfrac{2S}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}}$.
2. $\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$.
3. 1.
4. $\sqrt{2c^2+\dfrac{c^3}{b}}$.
5. $S=\dfrac{1}{\sqrt{abcd}}$, где
$a=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$, $b=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}$,
$c=\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$, $d=-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$.
6. 30.
7. 18.
8. $\dfrac{12}{5}$.
9. $3-\sqrt{3}$.
10. $\sqrt{7}$.
11. $\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}$.
12. $\dfrac{\pi}{28}$.
13. $\dfrac{15}{16}\sqrt{7}$.
14. $30^\circ, 90^\circ$.
15. $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\pi}{3}-\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
16. $\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)$.
17. $\arccos\dfrac{4m^2-b^2-c^2}{2bc}$.
18. $\dfrac{\pi}{3}$.
19. $\dfrac{8\sqrt{15}}{3}$.
20. $\arccos\dfrac{3}{5}, \arccos\dfrac{4}{5}$.
21. $2\sqrt{10}-5$.
22. $3(\sqrt{2}-1)$.
23. $\dfrac{\sqrt{190}}{2}$.
24. $6\sqrt{19}$.
25. $|NA|=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$, $|NB|=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $|NC|=R$.
26. $\dfrac{\sqrt{c^2k^2+c^2h^2\pm 2ckh\sqrt{c^2-k^2}}}{k}$.
27. $\dfrac{7\sqrt{3}h^2}{12}$, $\dfrac{7\sqrt{3}h^2}{30}$, $\dfrac{(-13\sqrt{3}+\sqrt{627})h^2}{120}$.
28. $|AB|=\dfrac{\sqrt{l^2(p+q)^2+4p^2q^2}}{2q}$,
$|BC|=\dfrac{\sqrt{l^2(p+q)^2+4p^2q^2}}{2p}$,
$|AC|=\dfrac{\sqrt{l^2(p^2-q^2)^2+4p^2q^2(p+q)^2}}{2pq}$.
29. $\dfrac{3\pi}{10}$.
30. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.
31. $R_{\triangle ADC}=\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$, $R_{\triangle ADC}>\dfrac{13}{2}$.
32. 5.
33. $a\dfrac{\sqrt{3r^2-a^2}}{6}$.
34. $\dfrac{|BC|}{|CA|}=\dfrac{l+m}{l+k}$, $\dfrac{|LC|}{|CO|}=\dfrac{k+l+m}{l}$.
35. $\dfrac{2}{3}$.
36. $\sqrt{\dfrac{b^2}{2}-a^2}$.

1.4

1. $202,8$.
2. 15.
3. $\dfrac{24}{7}$.
4. $\dfrac{12}{7}$.
5. $\dfrac{\pi}{6}$.
6. $\dfrac{27}{8}$.
7. $3\sqrt{3}$.
8. $\dfrac{2pq+q^2}{p+q}$.
9. 18.
10. $\sqrt{a^2+ab}$.

11. $n : m$.
12. 10.
13. $18 : 7$.
14. $5 : 2$.
15. $2\sqrt{7}$.
16. $1 : 1$.
17. $\frac{2}{3}\sqrt{145}$.
18. $|AE| : |EC| = \dfrac{xy-1}{y+1}$,

    $|BD| : |DC| = \dfrac{xy-1}{x+1}$.
19. $|QR| = 3$, $\widehat{QRP} = \arccos\left(\dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{12}\right)$.
20. $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.
21. $2\sqrt{3}$.
22. $|BE| = 9$, $P_{\Delta ABC} = 45$.
23. 5.
24. $\sqrt{b^2 - d^2}$.
25. $6\sqrt{3}$.
26. $\dfrac{\sqrt{105}}{4}$.
27. $25\sqrt{3}$.
28. $\dfrac{96}{25}$.
29. $4\sqrt{10} - 2\sqrt{15}$.
30. $\dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{7} + 1}$.
31. $64, 80, 100$ и $80, 100, 125$.

1.5

1. 2.
2. $\dfrac{147}{8}$.
3. $\sqrt{\dfrac{3a^2 + 8c^2}{35}}$.
4. $\dfrac{108}{5}$.
5. $\dfrac{16}{3}$ м^2 или $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$ м^2.
6. $\dfrac{2\sqrt{3} - 3}{6}$.
7. $\dfrac{16}{9}$.
8. $\dfrac{1}{6}$.
9. $1 : 3$.
10. $\dfrac{228}{25}$.
11. 60.
12. $1 : 6$.
13. $\dfrac{3ab}{4}$.
14. 24.
15. 24.
16. $\dfrac{7}{4}$.
17. $\arccos\sqrt{2 - 2S}$.
18. $|DE| = \sqrt{2}$, длина радиуса окружности равна $\sqrt{5}$.
19. $\dfrac{189\sqrt{55}}{88}$.
20. $\dfrac{(\sqrt{2} - 1)a^2}{2}$.
21. $\dfrac{3}{4}$.
22. $\dfrac{10}{3}$.
23. $\dfrac{19}{44}$.
24. $\dfrac{5}{24}$.
25. $\dfrac{S}{2} \cdot \dfrac{b^2 + 3ab}{(a+b)(2a+b)}$.
26. $\dfrac{48}{5}$.
27. $\left(\sqrt{2} - \cos\alpha\right) : \cos\alpha$.
28. $\dfrac{5}{12}$.
29. $\widehat{ACB} = 45^\circ$, $\widehat{ABC} = 90^\circ$.
30. $\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}k}\right) - \dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}k}\right)$;

    $k \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$.
31. 9.
32. $\dfrac{S_1 + S_2 - \sqrt{(S_1 + S_2)^2 - 4S_1S_2\sin^2\alpha}}{2}$.
33. $\dfrac{1}{6}$.
34. 5.

35. $\dfrac{a\sqrt{7}}{12}$.

36. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{d}{4}+\dfrac{1}{2d}$, где
$a=\sin(\beta+\gamma),\ b=\cos\beta,\ c=\sin\gamma,$
$d=\sqrt{\dfrac{a^2+16c^2-8abc}{4a^2+16c^2-16abc}}$.

2.1

1. $2\sqrt{6}$.
2. 1.
3. $\sqrt{15}$.
4. $4\sqrt{3}\sin 7^\circ$.
5. $\dfrac{b^2\cos^3\beta}{2\sin\beta}$.
6. $|AB|=|BC|=7\sqrt{3},\ |CD|=\sqrt{21},$ $|AD|=2\sqrt{21}$.
7. $4\sqrt{3}$.
8. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.
9. $7\sqrt{3}$.
11. $\dfrac{3\pi}{7}$.
12. $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{3},\ \widehat{ABC}=\dfrac{5\pi}{12},\ \widehat{ACB}=\dfrac{\pi}{4}$ или $\widehat{BAC}=\dfrac{5\pi}{12},\ \widehat{ABC}=\dfrac{\pi}{3},\ \widehat{ACB}=\dfrac{\pi}{4}$.
13. $d\left(\dfrac{c}{a}\right)^2$.
14. $50\pi(2+\sqrt{2})$.
15. $\sqrt{3}+1$.
16. $3\sqrt{3}$.
17. $\dfrac{nc}{m}$.
18. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
19. $56\sqrt{2}$.
20. $\sqrt{pq}$.
21. $\sqrt{2}$.
22. 2.
23. $\sqrt{3}$.
24. $\dfrac{2c+\sqrt{2}b}{\sqrt{3}+1}$.
25. $\sqrt{5}+\dfrac{1}{4}$.
26. $\dfrac{45}{2}$.
27. $h_{KN}=\dfrac{1}{2},\ S_{\triangle KNC}=\dfrac{3}{4}$.
28. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.
29. $\dfrac{1}{2}$.
30. 10.
31. $\dfrac{5\pi}{18}$.
32. $\widehat{ACB}=\pi/3,\ S_{\triangle ABC}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
33. $R_{\triangle ABC}=\dfrac{5}{2},\ S_{ABCD}=\dfrac{234}{25}$.
34. $\dfrac{\sqrt{a^2kl}}{2}$.
35. $\dfrac{5+\sqrt{15}}{4}$.
36. $\sqrt{6}$.
37. $|CE|=6, d=2$.

2.2

1. $\sqrt{7}$.
2. $\dfrac{3\sqrt{3}+2\pi}{3}$.
3. $2\sqrt{\dfrac{34}{15}}$.
4. $\dfrac{1}{2}(p-a)^2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.
5. $5\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.
6. $\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$.
7. 6.
8. $2(\sqrt{6}+\sqrt{3})$.
9. $\dfrac{24}{\sqrt{145}}$.
10. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.
11. $\dfrac{300}{17}$.
12. $9:8$.
13. $2\sqrt{21}-9$.
14. $4\sqrt{3}+10\pi$.

15. $\frac{\pi}{6}$.
16. $2\sqrt{2}+6$.
17. $\frac{49+20\sqrt{6}}{98}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{49}\right)$. Возможны и другие формы записи.
18. $\frac{R^2}{a}$.
19. $\frac{4aR^2}{16R^2-3a^2}$.
20. $\frac{27}{4}$.
21. $\frac{6-4\sqrt{2}}{3}$.
22. $-\sqrt{15}$.
23. $\frac{15}{3\operatorname{ctg}\beta+4\operatorname{tg}\beta}$.
24. $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.
25. 1) $\sqrt{Rr}$; 2) $\sqrt{\frac{r}{R}}$.
26. $\frac{b\sin\alpha}{2}$.
27. 12π.
28. $\frac{mk}{l}$.
29. π.
30. $\sqrt{53}$ или $\sqrt{13}$.
31. 216.
32. $\frac{a^2-b^2}{a}$.
33. 6π.
34. $\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$.
35. 4 : 7.
36. $\frac{15\sqrt{2}}{8}$.

3.1

1. $\frac{61\sqrt{3}}{4}$.
2. 8.
3. $2\operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}\alpha)$.
4. $\cos\widehat{BAN}=\frac{7}{\sqrt{65}}$, $S_{ABCD}=\frac{78}{5}$.
5. $\frac{9\sqrt{3}}{11}$.
6. $\sqrt{13}$.
7. $7\sqrt{\frac{29}{5}}$.
8. $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$ и $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$.
9. $4\sqrt{5}$.
10. $\frac{75}{2}-9\pi$.
11. $\frac{d_2^2-d_1^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$.
12. $\frac{5}{12}$.
13. $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{18}$.
14. $7\cos 40^\circ\cdot\operatorname{tg}20^\circ$.
15. $10\pm4\sqrt{3}$.
16. $\frac{3(\sqrt{5}\pm1)}{2}$.
17. $\frac{12\sqrt{2}-15}{4}$.
18. $\frac{16}{5}$.
19. 3 : 1.
20. $\frac{34}{9}$.
21. $2\sqrt{3}$.
22. $\frac{4(3+2\sqrt{3})}{3}$.
23. $|MB|=a+l^2\sin^2\alpha-$ $-\sqrt{a^2+2al\sin^2\alpha-l^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$, $|ND|=a+l^2\sin^2\alpha+$ $+\sqrt{a^2+2al\sin^2\alpha-l^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$.
24. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.
25. $\frac{1728}{25}$ или $\frac{192}{17}$.
26. $\frac{1}{4}$ или $\frac{5}{4}$.
27. $\frac{7\pi}{12}$.

3.2

1. 36 или $8\sqrt{19}$.
2. 162.
3. $10\sqrt{3}$.
4. $\frac{18}{25+2\sqrt{130}+\sqrt{445}}$.

5. $|AC| = 3\sqrt{89}$, $|BD| = 2\sqrt{349}$.
6. $\dfrac{2\pi}{3}$.
7. $\dfrac{72}{5}$.
8. $2\sqrt{13}$.
9. $\dfrac{15}{7}$.
10. 2.
11. 15.
12. $\dfrac{3}{2\sin 10^\circ \sin 40^\circ}$.
13. $\dfrac{42\sqrt{51}}{25}$.
14. 1 и 7.
15. $\sqrt{a^2 - ab}$.
16. $49\left(\sqrt{3} - \dfrac{5}{3}\right)$.
17. $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.
18. $\dfrac{8R^3}{b}$.
19. 96.
20. 42.
21. $2\sqrt{3} \cdot \dfrac{2\cos\frac{\delta}{2} + 1}{2\cos\frac{\delta}{2} - 1}$.
22. 15.
23. $\dfrac{8}{\sqrt{61}}$.
24. $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$.
25. $\dfrac{19\sqrt{3}}{52}$.
26. $\dfrac{22}{7}$.
27. $\dfrac{14}{3}$.
28. $\dfrac{15}{\sqrt{2}}$.
29. Длины оснований равны $\dfrac{255}{8}$ и $\dfrac{960}{17}$, длина высоты равна $\dfrac{450}{17}$.
30. $3:29$.
31. $\dfrac{bc}{a}$.
32. Длины диагоналей равны 5, площадь равна $\dfrac{975\sqrt{3}}{196}$.
33. $\dfrac{ab}{c^2}$.
34. $\dfrac{6(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\sqrt[4]{3}}$.

3.3

1. $\sqrt{848 \pm 64\sqrt{13}}$, $\sqrt{308 \pm 64\sqrt{13}}$.
2. 3.
3. 1.
4. $\dfrac{\pi}{2}$.
5. $\sqrt{21}$.
6. $\arcsin\dfrac{a}{b}$.
7. $\dfrac{\sqrt{37}(2\sqrt{6} - 1)}{3\sqrt{3}}$.
8. 319.
9. 30°.
10. На продолжении.
11. $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$.
12. 4.
13. $2\sqrt{4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + 3}$.
14. $\dfrac{3}{2}$.
15. $|AB| = 3$, $S_{ABCDE} = \dfrac{4098}{61}$.
16. $\dfrac{\sqrt{54} - 2}{4}$.
17. $|AD| = |BC| = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $|AB| = |CD| = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$.
18. $\dfrac{189}{25}$.
19. $5:9$.
20. $|AD| = 10$, $|BC| = 2$, $R = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.
21. $\dfrac{\sqrt{130}}{2}$.
22. $\arccos\sqrt{\dfrac{11}{14}} - \arccos\dfrac{7}{2\sqrt{14}}$.
23. 22.

24. 2.
25. 1) $1:1$, 2) $m-1$.
26. $9\sqrt{2}$.
27. $\arcsin\dfrac{1}{3}$.

4.1

1. Тупоугольный.
17. Остроугольный.

4.2

2. Нет.
4. Четырёхугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны.
7. $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$, $\angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$.
8. $KM = 4$.
9. $AB < AC$.

4.3

3. Да.

4.4

1. Равенство достигается, когда $\angle B = \angle D = 90^\circ$.
3. Неравенство обращается в равенство, если a и b – равные катеты прямоугольного треугольника.
4. Может.

6.2

1. $d^3\sin\beta\sin\gamma\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\gamma}$.
2. $\dfrac{2\sqrt[3]{V\sin(\alpha/2)}}{\sqrt[6]{3(2\cos\alpha-1)}}$.
3. $\arccos\dfrac{29}{7\sqrt{19}}$.
4. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.
5. $\dfrac{21\sqrt{15}}{10}$.
6. $3:5$.
7. 216.
8. 45°, $2/\sqrt{3}$.

6.3

1. $32\pi\sqrt{78}$ см^3.
2. 4.
3. $2\arccos\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$.
4. $\pi a^3\sqrt{3}/18$.
5. 1.
6. $\dfrac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}$.
7. $\dfrac{5\pi}{12}$.

6.4

1. $2\pi R^2$, $\sqrt{2}$.
2. 2.
3. $\dfrac{4\sqrt{3}\pi\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{9\,\mathrm{tg}\,\alpha}\left(1+\mathrm{tg}^6\dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^{12}\dfrac{\alpha}{2}\right)$.
4. $\dfrac{4}{15}$.
5. $\dfrac{a\sqrt{3H^2+a^2}}{3H}-\dfrac{a^2}{2\sqrt{3}H}$.
6. 12.
7. 36.
8. $1/\sqrt{6}$.

Литература

1. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (2000–2002, 2003, 2004 гг.). – М.: Механико-математический факультет МГУ.

2. *Галеев Э. М.* Подготовка к ЕГЭ по математике. Задания типа В и С. – М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2009. – 96 с.

3. *Глазков Ю. А., Варшавский И. К., Гаиашвили М. Я.* Математика. Единый государственный экзамен. Решение задач группы В. – М.: Экзамен, 2009. – 382 с.

4. *Денищева Л. О., Бойченко Е. М., Глазков Ю. А. и др.* Единый государственный экзамен 2003–2004: Контрольные измерительные материалы: Математика. – М.: Просвещение, 2003. – 191 с.

5. *Денищева Л. О., Рязановский А. Р., Семенов П. В., Сергеев И. Н.* ЕГЭ 2008. Математика. Федеральный банк экзаменационных материалов. – М.: Эксмо, 2008. – 240 с.

6. *Золотарёва Н. Д., Попов Ю. А., Семендяева Н. Л., Федотов М. В.* Математика: Сборник задач по базовому курсу (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). – М.: Фойлис, 2010. – 236 с.

7. Математика. Задачи вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М. В. Ломоносова с ответами и решениями (1999–2004 гг.) / Сост. Е. А. Григорьев. – М.: Издательство УНЦ ДО, 2005. – 399 с.

8. *Сергеев И. Н.* Математика. Единый государственный экзамен. Задания типа С. – М.: Экзамен, 2009. – 318 с.

9. *Федотов М. В., Золотарёва Н. Д.* Геометрия. Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ. – М.: МАКС Пресс, 2009. – 132 с.

10. *Федотов М. В., Разгулин А. В.* Алгебра. Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 260 с.

11. *Федотов М. В., Хайлов Е. Н.* Задачи устного экзамена по математике.– М.: МАКС Пресс, 2002. – 144 с.

УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ

МАТЕМАТИКА

ИМЕЕТСЯ В ПРОДАЖЕ:

Золотарёва Н. Д. ***Математика. Полный курс для девятиклассников с решениями и указаниями*** *: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. – 4-е изд. – 2022. – 704 с. : ил. – (ВМК МГУ – школе).*

Настоящее пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения задач. Пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

Рекомендуется школьникам при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ (базовый уровень и первая часть профильного уровня), учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

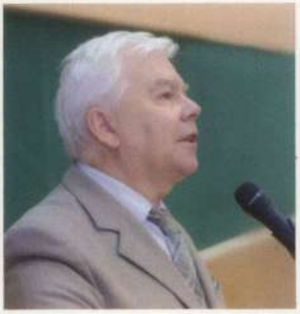
ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ЛАБОРАТОРИЯ ЗНАНИЙ»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

Для заметок

Для заметок

ВМК МГУ – ШКОЛЕ



Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

- на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;
- для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;
- сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

Президент факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАН ***Е. И. Моисеев***

Сайт факультета ВМК МГУ:

http://www.cs.msu.ru

ISBN 978-5-93208-389-5

9 785932 083895