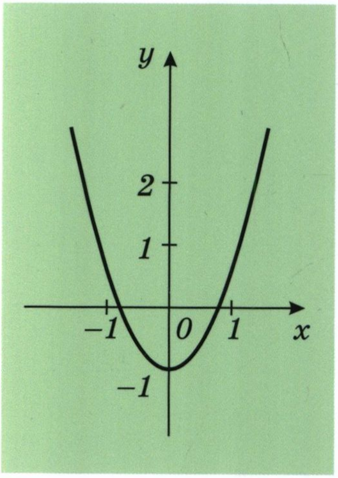
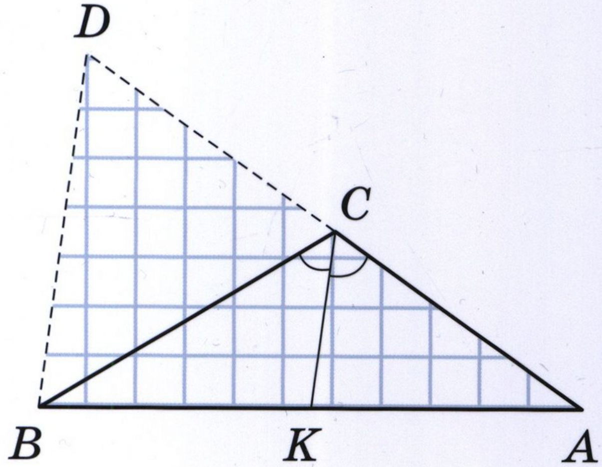
ЭДУАРД БАЛАЯН | автор более 200 книг

МАТЕМАТИКА

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ





- 650 задач
- 65 вариантов по каждому классу
- Ответы и решения

8–9

КЛАССЫ

Большая перемена

Э. Н. Балаян

МАТЕМАТИКА

Олимпиадные задачи
8–9 классы

- *650 задач*
- *65 вариантов по каждому классу*
- *Ответы и решения*

Ростов-на-Дону
Феникс
2024

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
Б20

Балаян Э. Н.

Б20 Математика : олимпиадные задачи : 8–9 классы / Э. Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2024. — 192 с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-40536-9

В предлагаемом пособии рассмотрены основные методы и приемы решения олимпиадных задач разного уровня сложности для учащихся 8–9 классов.

Пособие содержит 650 задач, разбитых на 65 вариантов по каждому классу. Каждый вариант содержит 5 задач по различным темам.

Задачи, представленные в книге, посвящены таким уже ставшим классическими темам, как делимость и остатки, инварианты, диофантовы уравнения, принцип Дирихле, тригонометрические уравнения, линейные и нелинейные системы с параметром и т. п.

Ко всем задачам даны ответы и указания, а к наиболее трудным — решения, причем некоторые задачи решены различными способами.

Большинство задач авторские.

В заключительной части книги приводятся занимательные задачи творческого характера, связанные с числовыми закономерностями. Эти задачи вызывают повышенный интерес не только у школьников, но и у преподавателей.

Пособие адресовано учащимся 8–9 классов для подготовки к олимпиадам различного уровня, учителям математики, студентам педвузов, репетиторам.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

0+

Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

МАТЕМАТИКА

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ
8-9 КЛАССЫ

Ответственный редактор *С. А. Осташов*

Формат 70 × 100/16. Бумага офсетная.
Тираж 3000 экз. Заказ № 7639.

Издатель и Изготовитель: ООО «Феникс»
Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59.

Изготовлено в России. Дата изготовления: 10.2023.
Срок годности не ограничен

Отпечатано в ООО «Принт-М»
142300, Россия, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов 1 /
Корпус Производственный Б, помещение 279, этаж 4.

ISBN 978-5-222-40536-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Роль олимпиад становится все более значимой.

Не случайно многие технические вузы проводят математические олимпиады, преследуя цель — привлечь школьников в данный вуз. Эти вузы устанавливают льготы для победителей и призеров различного уровня олимпиад.

Книга состоит из трех разделов. В разделе I приводятся условия задач для 8–9 классов. Каждый класс содержит 65 вариантов по 5 задач в каждом. Помимо школьных в пособии приведено множество задач, которые менее связаны со школьной программой, что вовсе не означает, что для их решения используются знания, выходящие за рамки школьной программы.

Автор старался привести наиболее рациональные и изящные решения, доступные школьникам, а также особо отмечать и четко формулировать те основные методы и идеи, которые наиболее часто применяются при решении задач данного типа.

Приведенные задачи также охватывают традиционные темы программы математики, по которым предлагаются задачи на олимпиадах областного уровня и выше.

В разделе II приводятся ответы, указания и решения ко многим задачам.

Раздел III содержит занимательные задачи творческого характера, связанные с удивительными числовыми закономерностями.

Цель автора — пробудить интерес к изучению математики, ведь открытие — одна из величайших радостей мыслящего человека.

Раздел I

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 КЛАСС

Вариант 1

1. Найти такое простое число p, что $p^2 + 9$ — тоже простое.

2. Решить в целых числах уравнение $x^4 = y^4 + 2y^2 + 157$.

3. Построить график функции $y = \dfrac{2|x-3|}{x-3} + 1$.

4. Сплав состоит из 83 % алюминия, 10 % цинка и 40 % олова. Чему равна масса сплава, в котором цинка взято на 2,7 кг больше, чем олова?

5. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов. Найти углы треугольника.

Вариант 2

1. Решить уравнение $2(x^2 - x + 1)^2 = x^2(8x^2 - 5x + 5)$.

2. Найти два различных числа, сумма квадратов которых была бы кубом, а сумма кубов — квадратом.

3. Найти наибольшее целое отрицательное значение x, удовлетворяющее неравенству $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > 15$.

4. Мальчики из 8 «А» обменялись рукопожатиями, кто-то подсчитал, что всего было 66 рукопожатий. Сколько мальчиков в классе?

5. Диагональ параллелограмма делит его угол в отношении 1 : 3. Найти углы параллелограмма, если длины сторон относятся как 1 : 2.

Вариант 3

1. Найти хотя бы одну пару чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = y^3$.

2. Найти два двузначных числа, куб одного из которых равен квадрату другого..

3. Разложить многочлен $x^9 + x^8 + x^7 - x^3 + 1$ на множители.

4. Смешали 30 %-й раствор соляной кислоты с 10 %-м и получили 600 г 15 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

5. Одна из диагоналей ромба равна его стороне. Найти углы ромба.

Вариант 4

1. Решить в целых числах уравнение

$$6y + 8x - 7xy = 7.$$

2. Найти остаток от деления $7^{100} + 11^{100}$ на 13.

3. Найти наименьшее значение функции $y = 4\sqrt{x-7} - |x+1|$.

4. Сколько шахматистов играли в круговом турнире, если всего было сыграно 78 партий?

5. Найти углы прямоугольного треугольника, если известно, что $a^2 + b^2 = \frac{8}{\sqrt{3}}S$, где a и b — катеты, S — площадь.

Вариант 5

1. Решить в целых числах уравнение $|x - 2| + |y - 1| = 1$.

2. Не находя x и y в отдельности, вычислить сумму $x^5y + xy^5$, если $x - y = 3$, $xy = 2$.

3. Найти наименьшее целое решение неравенства

$$\sqrt{9x^2 + 12x + 4} \le \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2}.$$

4. Арбуз весил 12 кг и содержал 99 % воды. Когда он немного усох, то стал содержать 98 % воды. Сколько теперь весит арбуз?

5. Внутри угла в 60° дана точка M, удаленная от сторон угла на 2 и 11 единиц. Найти расстояние от точки M до вершины угла.

Вариант 6

1. Является ли простым число $1 + 2^{3^{2023}}$?

2. Найти зависимость между a, b и c, если $a = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $b = x + y$, $c = x^2 + y^2$.

3. Найти дробь со знаменателем 13, которая больше 2/17, но меньше 3/17.

4. Сколько обезьян в стае, если квадрат пятой части, уменьшенной тремя, спрятались в пещере и только одна осталась на виду, взобравшись на дерево?

5. Известно, что в прямоугольном треугольнике $c^2 = a^2 + b^2$, где a и b — длины катетов, c — длина гипотенузы. Найти острые углы треугольника, если $\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Вариант 7

1. Сократить дробь $\frac{x^4+x^2-2}{x^6+8}$.

2. Доказать, что сумма $17^6 + 46^6$ делится на 37.

3. Является ли рациональным число $\sqrt{52-14\sqrt{3}}+\sqrt{3}$?

4. Из канистры отлили $\frac{1}{4}$ часть бензина, потом 10 % ее общей емкости. После этого в канистре осталось 26 л бензина. Какова емкость канистры?

5. Найти сторону квадрата, вписанного в равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 и основанием 12.

Вариант 8

1. Если x — целое число и $x \neq 1$, то будет ли целым число $\frac{x^5-5x+4}{x^2-2x+1}$?

2. Найти два числа, разность и частное которых равны 7.

3. Найти значение выражения $0{,}789^3 + 3 \cdot 0{,}789 \cdot 0{,}211 + 0{,}211^3$.

4. В коробке находятся 30 черных и белых шаров. Определить, сколько белых и черных шаров в коробке, если среди любых 12 шаров хотя бы 1 белый, а среди любых 20 — хотя бы 1 черный.

5. Найти площадь прямоугольника, основание которого вдвое больше высоты, а площадь численно равна периметру.

Вариант 9

1. Решить в натуральных числах уравнение $x^3 - 27y^3 = 37$.

2. Найти все целые числа a и b, для которых один из корней уравнения $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ равен $1+\sqrt{3}$.

3. Найти длину промежутка, на котором выполняется неравенство $\sqrt{x^2-8x+16} \le 4$.

4. Велосипедист ехал из села в город со скоростью 16 км/ч, а возвращался со скоростью 12 км/ч. Какова средняя скорость велосипедиста?

5. Середина нижнего основания трапеции является центром описанной окружности. Основания трапеции равны 4 и 32. Найти величину диагонали трапеции.

Вариант 10

1. Найти множество значений функции $y=\sqrt{6+3x-9x^2}$.

2. Найти x, если $x = y^2 - 16x^2$; $y = z^2 - 4x^2$; $z = t^2 - x^2$; $t = x - 1$.

3. Найти наименьшее значение функции $y=\dfrac{x(x-1)}{x(x-1)+3}$.

4. В меню кафе имеется 5 первых, 8 вторых и 4 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд (первое, второе и третье)?

5. В параллелограмме разность неравных сторон равна 11 см, а разность диагоналей равна 2 см. Найти длины сторон параллелограмма.

Вариант 11

1. Найти наименьшее значение функции $y=\sqrt{x-3}-|x+1|$.

2. Простым или составным является число $13^{2025} + 1$?

3. Найти корни уравнения $\dfrac{x^3-8x^2+7x}{1-x}=0$.

4. При продаже товара на 150 000 руб. получили 25 % прибыли. Сколько прибыли получили в рублях?

5. Основания равнобедренной трапеции — 11 и 17 см. Как разрезать ее на 4 равные трапеции?

Вариант 12

1. Найти трехзначное число, равное кубу цифры его единиц.

2. Найти наименьшее значение выражения

$$3x + 2y - z, \text{ если } x^2 + 4y^2 + z^2 = 6.$$

3. Упростить выражение $\sqrt{30(4-\sqrt{15})}$.

4. 45 малышей в детском саду строят из кубиков двух цветов башни высотой 5 кубиков. Доказать, что среди этих башен есть хотя бы две одинаковые.

5. От данного треугольника отрезать 4/9 его площади.

Вариант 13

1. Решить в натуральных числах уравнение $3x + 157y = 2023$.

2. Найти длину промежутка, на котором выполняется неравенство

$$\sqrt{1-4x+4x^2} \le \frac{x^2-2x-3}{x-3}.$$

3. Найти такую функцию $f(x)$, что при $x > 0$ выполняется равенство

$$f(x^2+\sqrt{x}) = x^4 + (2x^2-1)\sqrt{x} - x^2 + x.$$

4. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Если бриллиант разбить на две части, то в каком случае общая цена двух частей будет наименьшей?

5. Разделить данный угол пополам с помощью двусторонней линейки.

Вариант 14

1. Решить в целых числах уравнение $12x^2 - x^2y^2 + 11y^2 = 223$.

2. Число $\overline{a2}$ умножили на разность квадратов его цифр и получили 160. Найти это число.

3. Сократить дробь $\dfrac{a^4+a^2-2}{a^6+8}$.

4. Доказать, что в правильном треугольнике со стороной $4\sqrt{3}$ расстояние от середины средней линии до центра треугольника равно 1.

5. В классе 33 ученика, всем им вместе 430 лет. Доказать, что в классе найдутся 20 учеников, которым вместе не менее 260 лет.

Вариант 15

1. Решить в целых числах уравнение $13x^2 + 7y^2 + 11 = x^2y^2$.

2. Найти по крайней мере 19 решений уравнения $y^2 = x^2 + x^3$ в целых числах.

3. Найти область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x^2+x-6}}{x^2-4}$.

4. В семье два брата, у каждого из них по две сестры и по одному отцу. У каждой сестры по одной матери. Сколько всего человек в семье?

5. Длины сторон треугольника связаны соотношением $a^3 + b^3 = c^3$. Определить вид треугольника.

Вариант 16

1. Доказать, что при натуральном n числа вида $7^{4n+2} + 1$ составные.

2. Найти значения x и y в числе $12xy4$, если оно кратно 599.

3. Пусть $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = 3$. Чему равно значение выражения $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$?

4. Сплавлено 2 слитка золота 84-й и 64-й пробы и получено 50 г золота 76-й пробы. Сколько весил каждый из сплавленных слитков?

5. a и b — основания трапеции. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

Вариант 17

1. Найти наибольшее натуральное число, которое нельзя представить в виде $4a + 5b$, где a и b — натуральные числа.

2. Найти все точные квадраты в последовательности с общим членом $x_n = n^2 - n + 17$.

3. Не решая уравнения $x^2 - 5x - 7 = 0$, вычислить сумму кубов его корней.

4. Обувь подорожала на 20 %, а через 3 месяца подешевела на 20 %. Как изменилась цена этого товара?

5. В квадрате со стороной a середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Вычислить площадь полученного треугольника.

Вариант 18

1. Упростить выражение $\dfrac{14}{\sqrt{2}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}}$.

2. Построить график функции $y = \dfrac{|x+2|}{x+2}x$.

3. Какова последняя цифра числа $13^{2023} + 13$?

4. На день рождения Буратино подарили мешочек с конфетами: шоколадными и карамельками. Всего конфет в мешке было меньше 100, причем соотношение шоколадных и карамелек было 11 : 5. Буратино сразу же съел 20 % всех конфет, причем 25 % из них составляли карамельки. Сколько карамелек осталось в мешочке?

5. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее на 2 равнобедренных треугольника. Найти углы трапеции.

Вариант 19

1. Упростить выражение $\sqrt{75-12\sqrt{21}}$.

2. Решить уравнение $(6x^2 - 7x)^2 - 2(6x^2 - 7x) - 3 = 0$.

3. Решить неравенство $\frac{x}{|x|} \le \sqrt{9-x^2}$.

4. Отец завещал 1/3 своего состояния сыну и 2/5 — дочери; из оставшегося капитала 250 000 руб. должны были пойти на уплату долга, а 300 000 — в пользу вдовы. Каково состояние отца?

5. Доказать, что четырехугольник с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника — параллелограмм.

Вариант 20

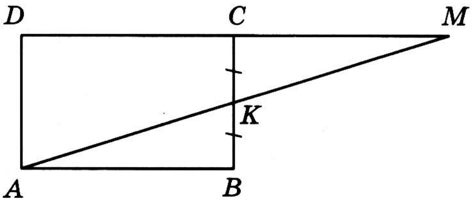
1. Решить уравнение $|x - 1| + |x - 2| = 1$.

2. Построить график функции $y = \frac{x^3}{|x|}$.

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ xy^2 + x^2y = 12. \end{cases}$

4. В классе 27 учеников. Каждый из них написал двум товарищам по записке. Может ли оказаться, что каждый из них получил нечетное число записок?

5. Найти площадь прямоугольника $ABCD$, если $S_{\Delta AMD} = 33$ см^2, $CK = BK$.



Вариант 21

1. Решить уравнение $x^2+\dfrac{4}{x^2}+\left(x+\dfrac{2}{x}\right)=23.$

2. При каких значениях x и y число вида $31x1y6$ делится на 157?

3. Построить график функции $|y|=x\sqrt{\dfrac{1}{x}}.$

4. 100 мышей за 100 дней съедают 200 кг зерна. Сколько зерна съедят 10 мышей за 10 дней?

5. Доказать, что если угол ромба равен 30°, то его сторона есть средняя пропорциональная между диагоналями.

Вариант 22

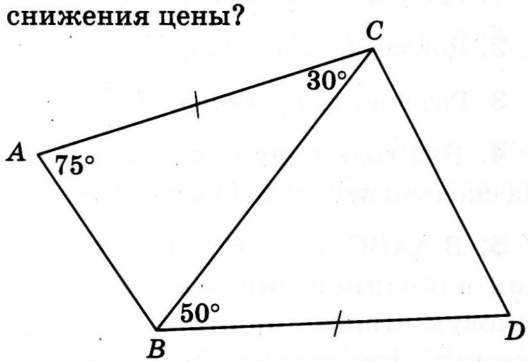
1. Вычислить $\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}.$

2. Решить неравенство $(x^2+9)(x^2-6x+8)\le 0.$

3. Построить график функции $y=\dfrac{\sqrt{x^2}+3x}{2}.$

4. Цену на книгу снизили на 10 %, в результате чего она стоит теперь 468 руб. Сколько стоила книга до снижения цены?

5. Найти $\angle D$, если $AC = BD$.



Вариант 23

1. Решить уравнение $4x^4-49x^2-4x+14=0.$

2. Решить неравенство $\sqrt{x^2-\dfrac{6x^2}{|x|}+\dfrac{3}{\operatorname{tg}^2 30^\circ}}<\dfrac{1}{2}\sin^2 30^\circ.$

3. Наименьшее общее кратное двух чисел равно 900, сумма квадратных корней из этих чисел равна 16. Найти эти числа.

4. Три цыпленка и одна утка проданы за ту же сумму, что и два гуся, а еще один цыпленок, две утки и три гуся проданы за 2500 руб. Сколько стоит каждая птица, если цены выражаются целым числом рублей?

5. В ΔABC $AC = BC$, AD — медиана, $AB = 8$, $P_{\Delta ADC} - P_{\Delta ADB} = 2$. Найти AC и BC.

Вариант 24

1. Решить уравнение $x^4 - (x - 1)(5x^2 - 4x + 4) = 0$.

2. Решить неравенство $|4x - 3| \leq 2x + 3$.

3. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $3|x| + |y + 3x + 1| \leq 7$.

4. Один человек говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 динариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько динариев у каждого?

5. Катет длиной 13 см равен радиусу описанной около треугольника окружности. Найти длину второго катета.

Вариант 25

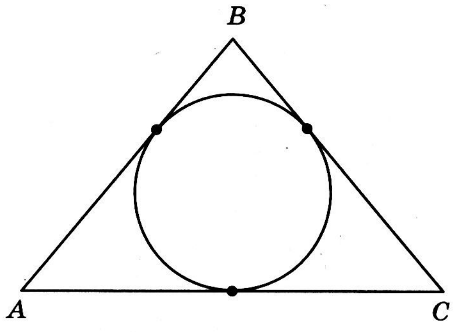
1. Решить уравнение $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 1680$.

2. Доказать, что если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, то $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$.

3. Разложить на множители многочлен $x^5 + x + 1$.

4. Два года подряд население увеличивалось на 20 % ежегодно. На сколько процентов увеличилось население за эти два года?

5. В ΔABC $AB = BC$. Точка касания вписанной окружности делит боковую сторону на отрезки, длины которых относятся как 2 : 3, считая от вершины B. Периметр треугольника равен 32. Найти радиус вписанной окружности.



Вариант 26

1. Решить уравнение $x^4 + 12x + 3 = 0$.

2. Доказать, что если $a + b + c = 1$, где $a, b, c > 0$, то

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 8abc.$$

3. Сократить дробь $\dfrac{x^3+7x^2-9x-63}{x^2+10x+21}$.

4. Два года подряд банк начисляет на вклад 10 % ежедневно. На сколько процентов увеличился вклад за эти два года?

5. На стороне CD квадрата $ABCD$ взята точка F. Биссектриса AE угла BAF пересекает сторону BC в точке E. Доказать, что $AF = BE + DF$.

Вариант 27

1. Решить уравнение $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)=\dfrac{1}{4}$.

2. Построить график функции $y = |x + 2| + |x - 2|$.

3. Числа a и b нечетные. Каким будет число $a^2 + b + 1$?

4. Найти число павлинов в стае, $\dfrac{1}{16}$ которой, умножая на себя, сидит на манговом дереве, а квадрат $\dfrac{1}{9}$ остатка вместе с 14 другими павлинами — на дереве тамала.

5. Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 6 и 8. Найти площадь треугольника.

Вариант 28

1. Вычислить $0{,}306^3 + 0{,}306 + 3 \cdot 0{,}694 \cdot 0{,}306 + 0{,}694^3 + 0{,}694$.

2. Решить уравнение $\dfrac{5x^2+13x-6}{x+3}=5x-2$.

3. При каком значении a наименьшее значение выражения $x^2 - 10x - 3a - 2$ равно 12?

4. Шариковая ручка стоит 15 руб. Какое количество таких ручек можно купить на 500 руб. после повышения цены на 20 %?

5. В равнобедренной трапеции боковые стороны равны 10, диагональ равна 17, а одно основание на 12 больше другого. Найти периметр трапеции.

Вариант 29

1. Упростить выражение $14-2\sqrt{13}$.

2. Решить систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{x^2+2x-4}{x}<2, \\ x^2 \le 16. \end{cases}$

3. Найти значение выражения $7y-13x$, если $x^2+4y^2-8x+4y+17=0$.

4. Два рыбака поймали 100 рыб, причем 7/9 улова первого составляли караси, а 5/11 улова второго — окуни. Сколько рыб поймал каждый из них?

5. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 6$ и $BC = 12$. Биссектриса $\angle ABC$ пересекает сторону AD в точке M. Найти длину BM, если известно, что BK пересекает диагональ AC в точке K и $BK = 4$.

Вариант 30

1. Решить неравенство $\dfrac{3x+2}{(x-1)^2} \ge 0$.

2. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 5x + 3 = 0$. Найти $\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}$.

3. Построить график функции $y - |y| = x - |x|$.

4. Две девочки посадили 36 цветов, причем $\dfrac{3}{5}$ цветов, посаженных первой девочкой, составляли ромашки, а $\dfrac{4}{7}$ цветов, посаженных второй девочкой, — фиалки. Сколько цветов посадила каждая из них?

5. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагональ $AC \perp BD$. Найти основание AD, если $BC = 13$, $CD = 12$.

Вариант 31

1. Решить уравнение $(x^2 + x - 3)(7 - 2x - 2x^2) = 3(1 - x - x^2)$.

2. Упростить выражение $\sqrt{75-12\sqrt{21}}$.

3. Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами быть равен 2024?

4. Цену на ботинки сначала снизили на 15 %, а затем подняли на 19 %. В итоге ее цена составила 1955 руб. Какова первоначальная цена ботинок?

5. Могут ли стороны прямоугольного треугольника иметь длины, выражающиеся нечетными натуральными числами?

Вариант 32

1. Решить уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=x^2-1$.

2. Решить неравенство $|2x-3|-|3x+7|>0$.

3. Найти 4 числа, каждое из которых на 336 меньше произведения трех остальных.

4. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля в 5 % и 40 %. Сколько нужно взять лома каждого сорта, чтобы получить 140 кг стали с содержанием никеля в 30 %?

5. В ΔABC проведены биссектрисы углов A и B, угол между ними равен 130°. Найти $\angle C$.

Вариант 33

1. Решить систему уравнений $\begin{cases}(x+y)^2(x-y)=32,\\(x^2+y^2)(x-y)=20.\end{cases}$

2. Решить неравенство $|x^2-4x+3|\le 3x-x^2$.

3. Найти наименьшее значение многочлена x^3+4x^2+6x+4.

4. Если на каждую палку сядет по 5 галок, то одна галка останется без палки, а если на каждую палку сядет по 6 галок, то одна палка останется пустой. Сколько галок, а сколько палок?

5. Основания равнобедренной трапеции равны 1 и 8. Найти радиус окружности, которая проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, касается оснований и боковых сторон трапеции.

Вариант 34

1. Решить систему уравнений $\begin{cases}x=6\sqrt{x+y},\\y=2\sqrt{x+y}.\end{cases}$

2. Решить уравнение $\sqrt{x^4 - 10x|x| + \dfrac{0,5}{0,02}} = 4.$

3. Найти наименьшее натуральное число вида $n^3 + 3n^2 - 4$, делящееся на 19.

4. Сколько стоит садовый участок треугольной формы, у которого длины сторон равны 158, 189 и 847 м, если 1 м^2 стоит 10 долларов?

5. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, в 2 раза больше высоты, опущенной на боковую сторону. Найти отношение R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

Вариант 35

1. Решить уравнение $x^3 - 9x\sqrt{x} + 8 = 0$.

2. Решить неравенство $|x + 1| - |x - 2| < 3$.

3. Найти квадратный трехчлен, график которого симметричен относительно прямой $x = -1$ и проходит через точки $A(-2;\ 2)$ и $B(2;\ 26)$.

4. Шашка может перемещаться в одном направлении по разделенной на клетки полосе, передвигаясь за один ход либо на соседнюю клетку, либо через одну. Сколько существует способов, чтобы переместить ее на 10 клеток?

5. Доказать, что куб длины гипотенузы прямоугольного треугольника больше суммы кубов длин катетов.

Вариант 36

1. Решить уравнение $\sqrt{-x} + x + 2 = 0.$

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7, \\ 3x + 2y = 23. \end{cases}$

3. Сумма двух натуральных чисел равна 2024. Если у одного из них зачеркнуть последнюю цифру, то получится второе число. Найти все такие числа.

4. Для нумерации страниц словаря потребовалось 1734 цифры. Нумерация начиналась с единицы. Сколько всего страниц в словаре?

5. В трапеции сумма углов при одном из оснований равна 90°. Доказать, что сумма квадратов боковых сторон этой трапеции равна квадрату разности ее оснований.

Вариант 37

1. Решить в натуральных числах уравнение $x+\dfrac{13}{y+\dfrac{1}{z}}=6$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3-y^3=37, \\ x^4-y^4=25(x+y). \end{cases}$

3. Доказать, что $3^{2n+2}-2^{n+1}$ делится на 7, где $n \geq 0$.

4. В одной школьной библиотеке 24 850 книг, а в другой — 55 300. Когда эти книги стали расставлять на стеллажи поровну, то в первой библиотеке осталось 154 книги, а в другой — 175. По сколько книг ставили на каждый стеллаж?

5. В прямоугольную трапецию вписана окружность, центр которой удален от концов боковой стороны на расстояния 9 и 12. Найти периметр трапеции.

Вариант 38

1. Решить уравнение $x^4+12x+3=0$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=20, \\ (x+y)(xy-1)=8. \end{cases}$

3. Доказать, что если $a+b+c$ делится на 6, то $a^3+b^3+c^3$ также делится на 6 (a, b, c — целые числа).

4. Ручные часы отстают на 5 мин в час; 5,5 ч назад они были поставлены на точное время. Сейчас на часах, показывающих точное время, 1 ч дня. Через сколько минут ручные часы покажут 1 ч дня?

5. В ΔABC $\angle C=120°$, CK — биссектриса. Доказать, что $\dfrac{1}{CK}=\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{BC}$.

Вариант 39

1. Решить уравнение $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$.

2. Найти все такие целые x, при которых дробь $\dfrac{x+7}{x-4}$ является целым числом.

3. В цехе не больше 100 рабочих, треть из них — женщины, 8 % рабочих имеют сокращенный рабочий день. Сколько в цехе рабочих? Сколько из них женщин и сколько человек имеют сокращенный рабочий день?

4. Найти все двузначные числа, которые при делении на 7 дают в остатке 5, а при делении на 19 — остаток 9.

5. В трапеции $ABCD$ точки K и F — соответственно середины BC и AD; $KF = 2$, $MN = 4$, $\angle A = 70°$, $\angle D = 20°$. Найти BC и AD.

Вариант 40

1. Пусть p — корень уравнения $x^2 - 7x + 7 = 0$. Вычислить значение выражения $p^4 - 245p + 281$.

2. При каких значениях a и b многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ обращается в точный квадрат?

3. Разложить на множители многочлен $(x - a)^4 + 4a^2$.

4. После того как туристы прошли 1 км и половину оставшегося пути, им еще осталось пройти треть всего пути и 1 км. Чему равен путь?

5. В прямоугольном треугольнике длины катета и гипотенузы равны соответственно 4 и 5. Чему равен косинус угла между высотой, проведенной к гипотенузе, и другим катетом?

Вариант 41

1. Разложить на множители многочлен $2x^2 + xy - 6y^2 + 10x - y + 12$.

2. Что больше: 24^{17} или 126^{12}?

3. При каком значении параметра a один корень уравнения $x^2 - 10x + 2a^3 = 0$ равен кубу другого?

4. Одному участнику игры было предложено 30 вопросов. За каждый правильный ответ ему начисляли 6 баллов, а за неправильный (или отсутствие ответа) снимали 10 баллов. Сколько верных ответов дал участник игры, если он набрал 68 баллов?

5. Медиана AM является диаметром окружности, пересекающей сторону AC в ее середине. Найти BC, если радиус описанной окружности ΔABC равен 13.

Вариант 42

1. Решить уравнение $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right)$.

2. Доказать неравенство $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq \sqrt[4]{ab} + \sqrt[4]{bc} + \sqrt[4]{ac}$.

3. Упростить выражение $\sqrt{10+3\sqrt{11}}+\sqrt{10-3\sqrt{11}}-2\sqrt{6-\sqrt{22}}$.

4. Сколькими способами из отрезков длиной 7 см и 12 см можно составить отрезок длиной 1 м?

5. В ΔABC на его медиане BM отмечена точка N так, что $BN : NM = 3 : 7$. Найти отношение площади ΔABN к площади ΔABC.

Вариант 43

1. Представить квадратный трехчлен $2x^2 - 5x + 6$ в виде суммы двух квадратов.

2. Сократить дробь $\dfrac{x^3-1}{x^4+x^2+1}$.

3. При каких значениях x многочлен $(19x + 99)^2 + (19x + 15)^2$ принимает наименьшее значение?

4. Под кукурузу отвели участок поля в форме прямоугольника. Через некоторое время длину этого участка увеличили на 30 %, а ширину уменьшили на 15 %. На сколько процентов изменилась площадь участка?

5. На стороне AC остроугольного ΔABC как на диаметре построена окружность, пересекающая высоту BD в точке M. Известно, что $BD = 24$, $MD = 13$, N — точка пересечения высот ΔABC. Найти BN.

Вариант 44

1. Разложить на множители многочлен $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

2. Доказать неравенство $x^4 - 2x^3 + 8x^2 - x + 13 > 0$.

3. Не решая уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, вычислить сумму кубов его корней.

4. Из числа построенных в этом году домов в одном из районов города более 94 % имеют больше пяти этажей. Какое наименьшее число домов возможно в данном случае?

5. Доказать, что если a, b, c — стороны некоторого треугольника и $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, то этот треугольник — равносторонний.

Вариант 45

1. Доказать, что число $7^{2024} - 1$ делится на 4.

2. Извлечь квадратный корень из многочлена

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12.$$

3. При каких натуральных значениях n число $n^2 - 25$ делится на $13n + 11$?

4. В свежих грибах 90 % воды, а когда их подсушили, то они стали легче на 15 кг при влажности 60 %. Сколько было свежих грибов?

5. Окружность, вписанная в ΔABC, касается его сторон в точках M, N и K. Найти углы ΔABC, если углы ΔMNK равны 55°, 45° и 80°.

Вариант 46

1. Доказать, что число $11^{11} + 12^{12} + 13^{13}$ делится на 10.

2. Является ли число, 13 % которого составляет 0,52, решением неравенства $\dfrac{x-2}{6-x} \geq 1$?

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x(x-1)(8x-y)=22, \\ x^2+7x-y=13. \end{cases}$

4. Если из числа учащихся 8 «Б» класса вычесть 21 и полученную разность умножить на 21, то получится столько же, как если бы из этого числа вычли 16 и разность умножили на 16. Сколько учеников в 8 «Б» классе?

5. На стороне AC ΔABC взята точка D так, что окружность, проходящая через точки A, B и D, касается прямой BC. Найти AD, если $AB = 8$, $BC = 12$ и $BD = 5$.

Вариант 47

1. Решить уравнение $(x + 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)^2$.

2. Доказать, что значение выражения $\dfrac{1}{7-3\sqrt{5}}+\dfrac{1}{7+3\sqrt{5}}$ есть число рациональное.

3. При каком целом значении параметра a уравнения $3x^2 - (3a - 1)x + 15 = 0$ и $6x^2 - (7a - 12)x + 15 = 0$ имеют общий корень?

4. Оксане на 3 года меньше, чем Грише вместе с его ровесником Мишей. Сколько лет Грише, когда Оксане было столько, сколько сейчас Мише?

5. Доказать, что в правильном треугольнике со стороной $4\sqrt{3}$ расстояние от середины средней линии до центра треугольника равно 1.

Вариант 48

1. Разложить на множители $x^5 + x^3 + x$.

2. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 - 3(a - 1)x + 3a + 1$ имеют разные знаки и оба по модулю меньше 5?

3. Доказать, что $(ax + by)^3 + (bx + ay)^3$ делится без остатка на

$$(a + b)(x + y).$$

4. В соревновании веселых и находчивых за каждое правильно выполненное задание начисляли 9 баллов, а за невыполненное или неверно выполненное снимали 5 баллов. Известно, что команде было предложено не больше 15 заданий и она набрала 57 баллов. Сколько заданий команда выполнила верно?

5. Биссектрисы углов трапеции делят каждое из ее оснований на 3 равные части. Найти площадь трапеции, если ее высота равна 1.

Вариант 49

1. Доказать, что уравнение $\frac{3}{1-|x|}=1$ не имеет корней.

2. Разложить на множители $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$.

3. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{6}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

4. На стоянке были легковые автомобили и мотоциклы. Мотоциклов с коляской было в 2 раза меньше, чем без коляски. Какое могло быть наибольшее число автомобилей, если всего колес у этих автомобилей и мотоциклов было 115?

5. Диагонали параллелограмма равны 16 и 12, а угол между ними равен 30°. Найти площадь параллелограмма.

Вариант 50

1. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} (x^3+1)(y^3+1)=18, \\ xy+x+y=5. \end{cases}$

3. При каких значениях x значение выражения $(x + 2)(x + 3)$ будет равно $(a + 2)(a + 3)$?

4. Когда Вова станет вдвое старше, Коля будет на 4 года моложе, чем Вика. В прошлом году Коля был вдвое моложе, чем Вика, и в 3,5 раза моложе, чем Вова. Сколько сейчас лет каждому из них?

5. Точка O, взятая внутри прямоугольника, удалена от трех его вершин на расстояния в 3; 4 и 5 единиц. Найти расстояние от этой точки до четвертой вершины.

Вариант 51

1. Разложить на множители многочлен $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$.

2. Доказать неравенство $\frac{1}{4}(a + b + c + d) \geq \sqrt[4]{abcd}$.

3. Составить биквадратное уравнение, имеющее в числе своих корней $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$.

4. Андрей моложе своего отца на 32 года, а его отец на столько же моложе своего отца (дедушки Андрея). Три года назад всем им вместе не было и 100 лет. Сколько сейчас лет каждому из них?

5. Вычислить площадь трапеции, у которой основания равны 4 и 25, а боковые — 13 и 20.

Вариант 52

1. Доказать, что произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19$ (коротко 19! и читается «19 факториал») делится на 820 125.

2. Упростить выражение $\sqrt{9x^4+12x^3-26x^2-20x+25}$.

3. При каких значениях параметра a сумма кубов корней уравнения $x^2 + (6 - a - a^2)x - a^2 = 0$ равна нулю?

4. При продаже товара на 150 000 руб. получили 25 % прибыли. Сколько прибыли получили в рублях?

5. Сумма числа сторон выпуклого многоугольника и числа его диагоналей равна 21. Определить число сторон многоугольника.

Вариант 53

1. Стороны a, b, c некоторого треугольника связаны соотношением $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$. Найти углы треугольника.

2. Разность между трехзначным числом и суммой его цифр есть полный квадрат. Найти все такие числа.

3. При каком наибольшем значении параметра a неравенство $\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} \geq -3$ выполняется для всех $x \in R$?

4. Сколько сейчас минут до полудня, если полтора часа назад в два раза больше минут было после восьми?

5. В равнобедренном ΔABC с основанием $AB = 8$ проведена медиана AD. Найти AC, если $P_{\Delta ACD} - P_{\Delta ABC} = 2$.

Вариант 54

1. Произведение четырех последовательных целых чисел равно 1680. Найти эти числа.

2. Разложить на множители многочлен

$$2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2ax - 3y = 2a + 3, \\ ax + (2a-1)y = a + 5 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

4. Отец и сын катаются по кругу на катке, время от времени отец обгоняет сына. Когда сын стал двигаться в противоположном направлении, они начали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бегает на коньках быстрее сына?

5. В равнобедренной трапеции большее основание равно 12, боковая сторона — 5, а площадь — 36. Найти верхнее основание.

Вариант 55

1. Какие две цифры можно приписать к числу 1313 справа, чтобы полученное шестизначное число делилось на 53?

2. При каких значениях параметра a уравнение $(a-2)x^2 - 4ax + 3 - 2a = 0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству $x > 2$?

3. Разложить на множители многочлен
$$(1 + 4x^2)y^2 + 2(2x - y)(1 + 2xy) + 1.$$

4. Имеются песочные часы на 3 мин и 7 мин. Надо опустить яйцо в кипящую воду ровно на 4 мин. Как это сделать с помощью данных песочных часов?

5. Доказать, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Вариант 56

1. Доказать, что разность между квадратом числа, не делящегося на 3, и единицей делится на 3.

2. Доказать, что многочлен $x^{20} + x^{10} + x^{2025}$ делится на $x^2 + x + 1$.

3. Известно, что $x + y = a$, $xy = b$. Чему равно значение $x^7 + y^7$?

4. Однажды Пифагора спросили: «Который час?» Пифагор ответил: «До конца суток осталось дважды две пятых того, что уже прошло от начала». Который был час?

5. В равнобедренную трапецию площадью 125 вписана окружность. Длина отрезка, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами, равна 8. Найти радиус вписанной окружности.

Вариант 57

1. Если x — целое число и $x \neq 1$, то будет ли целым число $\dfrac{x^5 - 5x + 4}{x^2 - 2x + 1}$?

2. Доказать, что разность между кубом натурального числа и самим числом делится на 6.

3. Вычислить $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$.

4. На вопрос о его возрасте дедушка ответил: «Число, выражающее мой возраст в годах, двузначное, равное сумме количества его десятков и квадрата единиц». Сколько лет дедушке?

5. В параллелограмме $ACBM$ $AC = 16$, $BC = 24$, CE и CF — соответственно высоты, проведенные к сторонам AM и BM, $\angle ECF = 60°$. Найти длину высоты CE.

Вариант 58

1. Верно ли, что число $2021 \cdot 2022 \cdot 2023 \cdot 2024 + 1$ является составным?

2. Найти все целые числа a и b, для которых один из корней уравнения $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ равен $1+\sqrt{3}$.

3. Доказать, что число $2^{5n+1} + 5^{n+2}$ делится на 27 при $n = 0; 1; 2; \dots$.

4. На некоторую остановку прибыли одновременно трамвай, автобус и троллейбус. По графику движения трамвай совершает полный рейс за 1,5 ч, автобус — за 2 ч, а троллейбус — за час. Через сколько времени эти машины снова встретятся на этой остановке?

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{5}$. Определить катеты, если известно, что после того как один из них увеличить на $133\frac{1}{13}\ \%$, а другой — на $16\frac{2}{3}\ \%$, сумма их длин сделается равной 14.

Вариант 59

1. Доказать, что выражение $48^n - 2 \cdot 6^n + 13^n$ кратно 7 при любом целом $n \geq 0$.

2. Построить график функции $y = (4 - x^2)^{\sqrt{-\frac{|x|}{4}}}$.

3. Шестизначное число начинается с единицы. Если ее перенести в конец числа, оно увеличится в 3 раза. Найти это число.

4. Какой год прошлого столетия был равен квадрату некоторого натурального числа и какой год в ближайшем будущем будет равен квадрату натурального числа?

5. Точка, взятая вне треугольника, соединена отрезками с его вершинами. Доказать, что сумма длин этих отрезков больше полупериметра треугольника.

Вариант 60

1. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + ax - 5a + 1 = 0$. Найти значение a, чтобы величина $x_1^2 + x_2^2$ была наименьшей.

2. Найти двузначное число, если сумма его цифр состоит из одинаковых чисел, а сумма квадратов его цифр, увеличенная на 10, равна самому числу.

3. На координатной плоскости $0xy$ изобразить геометрическое место точек, заданное неравенством $|x + y| \le 3$.

4. В некотором году 1 января пришлось на понедельник, а 1 октября — на вторник. Какой это год: простой или високосный?

5. В равнобедренном ΔABC с основанием AB проведена биссектриса AD. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AB в точке F. Найти радиус окружности, описанной около ΔADF, если $BD = a$.

Вариант 61

1. Решить уравнение

$$\frac{1}{(x+2020)(x+2021)} + \frac{1}{(x+2021)(x+2022)} + \frac{1}{(x+2022)(x+2023)} + \frac{1}{(x+2023)(x+2024)} = \frac{1}{24}.$$

2. При каких значениях a и b многочлен $x^3 + 13x^2 + ax + b$ делится на $x^2 + x + 2024$?

3. Представить в виде рациональной дроби $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$.

4. Сергей купил тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал страницы числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 2024?

5. В остроугольном ΔABC $\angle A = \alpha$, $\angle EBD = \beta$, где β — угол между медианой BE и высотой BD, проведенных к основанию AC. Найти $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta BED}$.

Вариант 62

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x}, \\ x^2y + y^2x = 20. \end{cases}$

2. Решить уравнение $1999x^2 - 2024x + 25 = 0$ наиболее рациональным способом.

3. Какое число больше: $\sqrt{2024} + \sqrt{2022}$ или $2\sqrt{2023}$?

4. Сколько шахматистов играли в круговом турнире, если всего было сыграно 78 партий?

5. В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b найти расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей.

Вариант 63

1. Построить график функции $y=\dfrac{x^2+2|x|+4}{|x^3|-8}$.

2. Решить уравнение $x^3+x+3\sqrt{2}=0$.

3. Верно ли следующее утверждение: если число p простое и $100<p<200$, то число $210-p$ также является простым числом?

4. Какое наибольшее количество месяцев одного года может иметь по 5 пятниц?

5. Точки D и E — соответственно середины сторон AC и BC ΔABC. Окружность, описанная около ΔCDE, проходит через точку M пересечения медиан ΔABC. Найти $S_{\Delta ABC}$, если $AB=10$, $AE=BD$.

Вариант 64

1. Упростить выражение $\sqrt{\sqrt{(\sqrt{10}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{10}-4)^2}}$.

2. Сократить дробь $\dfrac{(x^2+x+1)(x^2+x+5)+3}{(x^2+x+1)(x^2+x+7)+9}$.

3. Доказать, что сумма кубов семи последовательных целых чисел делится на 7.

4. В меню кафе имеется 5 первых, 8 вторых и 4 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд (первое, второе и третье)?

5. В круг радиуса R вписаны правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник. Доказать, что квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов сторон квадрата и шестиугольника.

Вариант 65

1. Доказать, что выражение $\dfrac{\sqrt{(6+\sqrt{35})^3}+\sqrt{(6-\sqrt{35})^3}}{\sqrt{(9+\sqrt{77})^3}-\sqrt{(9-\sqrt{77})^3}}$ представляет собой рациональную дробь.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases}\left(3+\dfrac{6y}{x-y}\right)^2-\left(3-\dfrac{6y}{x+y}\right)^2=80,\\ x^3y-xy^3=6.\end{cases}$

3. При каком значении параметра a существует единственная тройка чисел $(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющая равенствам $3(x+y+z)=9x^2+y^2$ и $x+2y+4z=a$?

4. Брат с сестрой решили купить альбом для марок стоимостью 2100 руб. Если брат даст 2/3 своих денег, а сестра — 3/4 своих, то этого хватит на покупку альбома. Сколько денег у брата и сколько у сестры, если у них всего 3100 руб.?

5. Доказать, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

9 КЛАСС

Вариант 1

1. Решить уравнение $4x^2+\dfrac{10}{3x}=\dfrac{61}{9}$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases}3x^2-8xy+4y^2=0,\\x^2+y^2+13(x-y)=0.\end{cases}$

3. Найти все простые числа p, такие, что $14p^2+1$ — также простые.

4. Мальчики из 9 «А» обменялись рукопожатиями, кто-то подсчитал, что рукопожатий было 78. Сколько мальчиков в классе?

5. В четырехугольнике $ABCD$ $AB=5$ см, $BC=3$ см, $AD=8$ см, $\angle A=30°$, $\angle B=120°$. Найти сторону CD.

Вариант 2

1. Решить уравнение $3\sqrt{x-2}-\dfrac{1}{9}x^2=2$.

2. Решить неравенство $\left|\dfrac{2x-5}{x+1}\right|\geq 1$.

3. Построить график функции $y=\dfrac{2|x|}{x}\sqrt{4-x}$.

4. Цена товара со 100 000 руб. дважды понижалась, каждый раз на 30 %. Какова окончательная цена товара?

5. В ΔABC $\Delta C=120°$, $BC=a$, $AC=b$. Найти длину биссектрисы CD.

Вариант 3

1. Решить уравнение $1+7+13+\ldots+x=280$.

2. Разложить на множители $(x^2-xy+y^2)^3+(x^2+xy+y^2)^3$.

3. Доказать, что 13! – 11! кратно 31.

4. Через сколько минут после того, как часы показали ровно 3 часа, минутная стрелка догонит часовую?

5. Периметр ромба содержит $2p$ см, сумма его диагоналей m см. Найти площадь ромба.

Вариант 4

1. Решить уравнение $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{2-x}+1)=2(x-1)$.

2. Сократить дробь $\dfrac{x+3-3\sqrt{x+1}}{x+1-2\sqrt{x+1}}$.

3. Найти наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{1+x}<\sqrt[3]{1-2x}$.

4. Один из друзей всегда говорит правду, другой всегда врет, а третий — хитрец: иногда говорит правду, а иногда врет. На вопрос: «Кто Вася?» — они ответили:

Миша:

— Лжец.

Вася:

— Я хитрец!

Саша:

— Абсолютно честный.

Кто из друзей лжец, а кто — хитрец?

5. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника с острым углом в 15° составляет восьмую часть квадрата гипотенузы.

Вариант 5

1. Решить уравнение $(1+x^2)^2=4x(1-x^2)$.

2. Найти наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{x-3\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}-3}<0$.

3. Чему равно значение выражения $a^{2025}+\dfrac{1}{a^{2025}}$, если $a^2+a+1=0$?

4. Расстояние между двумя городами 250 км. Первую часть пути автомобиль проехал со скоростью в 2 раза большей средней скорости на всем пути, а вторую часть пути — со скоростью в 3 раза меньшей средней скорости на всем пути. Какова длина первой части пути?

5. Существует ли треугольник, стороны которого образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=13$?

Вариант 6

1. Решить уравнение $13x^2=x^4+2x^3+2x+1$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases}x^3-3xy^2=1,\\3x^2y-y^3=1.\end{cases}$

3. Разложить на множители $(x^2 - xy + y^2)^3 + (x^2 + xy + y^2)^3$.

4. Часы отстают каждые сутки на 5 мин. Через сколько суток они опять будут показывать верное время?

5. Диагонали прямоугольника уменьшили в 3 раза. Будет ли полученный прямоугольник подобен данному?

Вариант 7

1. Решить уравнение $\frac{3}{1+x+x^2} = 3 - x - x^2$.

2. Решить неравенство $\frac{x}{|x|} \geq \sqrt{9 - x^2}$.

3. При каком значении a ось параболы $y = x^2 + 2ax + a^2 + b$ имеет уравнение $x = -1$?

4. Сумма десяти первых членов арифметической прогрессии равна 140, а произведение $a_2 \cdot a_9 = 147$. Найти прогрессию, если она является возрастающей.

5. В ΔABC $BC = 14$ дм, BD — медиана, $\angle ABC = 45°$, $\angle CBD = 30°$. Найти AB и CD.

Вариант 8

1. Решить уравнение $x^2 + 19x - x! = 0$.

2. Разложить на множители многочлен $x^3 + y^3 + 3xy - 1$.

3. Доказать, что $19^{2024} - 1$ делится на 5.

4. Для хранения желудей их необходимо просушить. При этом они теряют 8 % своей массы. Сколько сырых желудей необходимо взять, чтобы получить 46 кг, годных для хранения?

5. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовать геометрическую прогрессию?

Вариант 9

1. Решить уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1 - x}} = 1$.

2. При каких значениях a число 3 заключено между корнями уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$?

3. Найти четырехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

4. К 119 г воды добавили 21 г соли. Сколько процентов соли в полученном растворе?

5. Точка M лежит внутри правильного ΔABC. Найти площадь треугольника, если $AM = MB = 2$ см, $CM = 1$ см.

Вариант 10

1. Решить уравнение $x^3 - x = 2023$ в целых числах.

2. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-2}}=\dfrac{1}{5-2x}$.

3. Упростить выражение $\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$.

4. В комнате стоят табуретки и стулья. У каждой табуретки по 3 ноги, у каждого стула по 4 ноги. Когда на всех табуретках и стульях сидят люди, то в комнате всего 39 ног. Сколько стульев и сколько табуреток в комнате?

5. Два угла треугольника, прилежащих к одной стороне, равны 45° и 60°. Найти отношение R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

Вариант 11

1. Сократить дробь $\dfrac{x+4-5\sqrt{x-2}}{x-3\sqrt{x-2}}$.

2. Доказать, что если $x > 0$, то $\sqrt[3]{1+x}<1+\dfrac{x}{3}$.

3. Известно, что $x=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{40}$. Найти значение выражения $x^3 - 30x$.

4. Число увеличили на 25 %. На сколько процентов надо уменьшить результат, чтобы получить исходное число?

5. На основании равнобедренного треугольника построен правильный треугольник, площадь которого в 3 раза больше площади данного. Найти углы треугольника.

Вариант 12

1. Решить уравнение $1 + x^5 = 2(1 + x)^5$.

2. Доказать, что при всяком нечетном x выражение $x^3 + 3x^2 - x - 3$ делится на 48.

3. При каком значении m корни уравнения $x^4-(3m-5)x^2+(m+1)^2=0$ составляют арифметическую прогрессию?

4. В каком количестве воды (в литрах) надо растворить 400 г соли, чтобы получить 5 %-й раствор соли?

5. В треугольник вписана окружность. Прямые, соединяющие центр окружности с вершинами, делят треугольник на части с площадями 120; 104 и 112. Найти радиус вписанной окружности.

Вариант 13

1. Решить в натуральных числах уравнение $x^3 - 8y^3 = 19$.

2. Сравнить 80^{13} и 10^{28}.

3. Решить неравенство $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geq 1$.

4. Найти пятизначное число, которое в 45 раз больше произведения своих цифр.

5. Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 6 и 8. Найти площадь треугольника.

Вариант 14

1. Решить уравнение $(x-1)^2 - x^3 = 17$.

2. Упростить выражение $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$.

3. Найти четырехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

4. Бригада из четырех рабочих укладывает трубу длиной 40 м в землю. Для подготовки траншеи решили копать по очереди с условием: каждый копает столько времени, за которое остальные трое вместе выкопали бы 3/4 траншеи. Траншея была выкопана, когда последний рабочий отработал отведенное ему время. Сколько метров траншеи они бы могли выкопать за то же время, работая вместе?

5. В ΔABC $AB = 7$, $AC = 20$, $BC = 15$. Окружность, вписанная в этот треугольник, касается его сторон в точках M, N и K. Найти $S_{\Delta MNK}$.

Вариант 15

1. Решить уравнение $2x\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}} = 20$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1} \geq 4$.

3. Дано уравнение окружности $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 1 = 0$. Найти координаты центра и радиус окружности.

4. В 9«А» классе есть ученики, занимающиеся спортом, но есть и такие, которые увлечены чтением книг. Седьмая часть спортсменов читает книги, а 25 % книголюбов смотрят спортивные передачи. В классе есть только 4 ученика, которые не занимаются спортом и не читают книг. Сколько учеников в классе, если их не менее 30, но не более 36?

5. В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды AC и BD. Найти радиус окружности, если известно, что $AB = 5$, $CD = 12$.

Вариант 16

1. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$.

2. Решить систему неравенств $\begin{cases} |x-2| \geq 3, \\ \left|\dfrac{x-1}{x}\right| < 1. \end{cases}$

3. Число $n + 2023$ делится на 2024, а число $n + 2024$ делится на 2023. Найти наименьшее число n, при котором это возможно.

4. Гриша сказал Артуру, сколько ему лет, но сообщил, что на каждый день его рождения отец бросает в копилку столько монет, сколько лет исполнится Грише. Артур оценил, что в копилке не менее 100, но не более 110 монет. Сколько лет Грише?

5. Доказать, что в прямоугольном треугольнике $r = \dfrac{1}{2}(a + b - c)$, где a и b — катеты, c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности.

Вариант 17

1. Решить уравнение $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\ldots = 16$.

2. Расставить знаки арифметических действий и скобки в выражении, состоящем из трех чисел, $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{22}$; $\dfrac{1}{23}$, так, чтобы результат вычислений был равен $\dfrac{1}{2024}$.

3. Доказать, что при всех целых n выражение $n(n^4 - 125n^2 + 4)$ кратно 120.

4. Захару вдвое больше лет, чем было Оле, когда Захару было столько лет, сколько сейчас Оле. А когда Оле будет столько лет, сколько сейчас Захару, то им в сумме будет 27 лет. Сколько лет сейчас Захару?

5. Сколько существует прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен $\sqrt{2023}$, а другой катет и гипотенуза выражаются натуральными числами?

Вариант 18

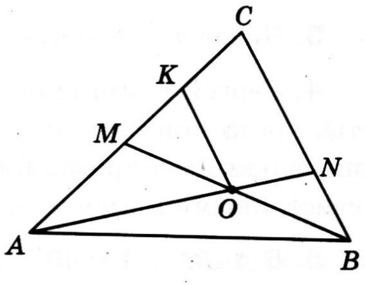
1. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{(-x)^2}+(\sqrt{-x})^2}{x^2+(-x)^2}=\dfrac{1}{2024}$.

2. Доказать, что для любого натурального n найдется такое число a, что число $an+4$ — составное.

3. При каком значении m график функции $y = 2x^2 - 3x + 17 + m$ имеет одну общую точку с осью $0x$?

4. Марианна купила 14 карандашей и 3 ластика за 277 руб. Цена карандаша отличается от цены ластика не более чем на 5 руб., причем оба предмета стоят целое число рублей. Наташа купила 1 карандаш и 1 ластик. Сколько она заплатила?

5. В ΔABC точка $M \in AC$, $N \in BC$. Прямые AN и BM пересекаются в точке O, причем $AO : ON = 9 : 3$, $BO : OM = 5 : 6$. Найти отношение $AM : MC$.



Вариант 19

1. Решить уравнение $\sqrt{23x^2+11x+4}=7x^2+7x+4$.

2. Разложить на множители многочлен $a^3(b-c)+c^3(a-b)-b^3(a-c)$.

3. Найти четырехзначное число, которое в 9 раз меньше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

4. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащего 45 % меди. Сколько килограммов чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы полученный сплав содержал 40 % меди?

5. В трапеции $ABCD$ $\angle BCD = 120°$. В этот угол вписана окружность радиуса $R = 6$, проходящая через точки A, B и D. Найти $S_{\Delta ABD}$.

Вариант 20

1. Решить уравнение $(x^2 - 5x - 8)^3 = x^2(x^2 + x - 8)$.

2. Разложить многочлен $x^{13} + x^{11} + 1$ на два множителя.

3. Освободиться от корня в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[4]{11} - \sqrt[4]{8}}$.

4. Одна часть поля засеяна овсом на $65\ \%$, а другая — на $45\ \%$. Найти, какую часть площади всего поля в процентах составляет первая часть, если все поле было засеяно овсом на $53\ \%$.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Известно, что $S_{\Delta BOC} = 6$, $S_{\Delta AOD} = 24$. Найти площадь трапеции.

Вариант 21

1. Найти все пары натуральных чисел (x, y), для которых выполняется равенство $x^2 + xy = y + 134$.

2. Найти арифметическую прогрессию, если сумма ее n членов равна $2n^2 - 3n$.

3. Числа a, b, c такие, что $(a + b + c) \cdot c < 0$. Доказать, что $b^2 > 4ac$.

4. Сергей внимательно наблюдает за часами и отслеживает моменты, когда минутная и часовая стрелки образуют угол в $55°$. Каков минимальный по продолжительности промежуток времени между двумя счастливыми моментами?

5. В ΔABC $\angle A = 30°$, $\angle C = 45°$. На стороне AC выбрана точка E так, что $\angle BEC = 60°$. Найти CE, если $AB + AE = 10$.

Вариант 22

1. Решить уравнение $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$.

2. Делится ли $2^{54} + 1$ на $2^{27} + 2^{14} + 1$?

3. Найти наименьшее целое число, дающее при делении на 2, 3, 4, 5, 6 соответственно остатки 1, 2, 3, 4, 5.

4. Оксана купила открытку, потратив менее 100 руб. Цена открытки выражается целым числом рублей. Через месяц она вернулась в книжный магазин, чтобы купить такую же открытку, и обнаружила, что она подорожала в 1,2 раза. Сколько стоила открытка первоначально?

5. Найти сумму тангенсов острых углов прямоугольного треугольника, если радиус описанной окружности относится к радиусу вписанной как 5 : 2.

Вариант 23

1. Решить уравнение $16x^2 + 9x + 117 = 24x\sqrt{x+13}$.

2. Доказать, что выражение $(5x + 7y)^3 + (7x + 5y)^3$ делится без остатка на $12(x + y)$.

3. Может ли число $1 + 2 + 3 + ... + n$ оканчиваться цифрой 9?

4. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45 % меди. Сколько килограммов меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60 % меди?

5. В равнобедренном ΔABC $(AC = BC)$ биссектрисы AE и CD пересекаются в точке O. Известно, что $S_{\Delta ACE} = 24$, $S_{\Delta BOE} = 36$. Найти $S_{\Delta ABC}$.

Вариант 24

1. Решить уравнение $1 + 4 + 7 + ... + x = 117$.

2. Делится ли число $10^n + 6^n - 3^n - 1$ на 63 при $n \in N$?

3. Упростить выражение $\dfrac{4 \cdot 36^n}{2^{2n+2} \cdot 3^{2n-3}}$.

4. Сколько сейчас минут до полудня, если 50 мин назад их было в 4 раза больше, чем после 9 утра?

5. В ромб, который разделяется диагональю на два равносторонних треугольника, вписан круг, радиус которого равен $\sqrt{3}$. Найти сторону ромба.

Вариант 25

1. Решить уравнение $x^3 + x + 3\sqrt{2} = 0$.

2. Упростить выражение $\left(\dfrac{27^x - 3^x}{9^x + 3^x}\right) + 3^{1+x}$.

3. Доказать, что выражение $9 \cdot 3^{3n+1} - 8^{n+1}$ кратно 19 при любом целом неотрицательном n.

4. У Артура на 25 % денег больше, чем у Гриши. Какую долю своих денег Артур должен отдать Грише, чтобы денег у них стало поровну?

5. В ΔABC $\angle C = 90$, O — середина гипотенузы, N — середина катета AC, M — точка пересечения биссектрисы угла B и прямой ON. Доказать, что $\angle BAC = \angle BMC$.

Вариант 26

1. При каком значении x последовательность $\sqrt{x-5}$, $\sqrt[4]{10x+4}$, $\sqrt{x+2}$ образует геометрическую прогрессию?

2. Найти все $n \in N$, для которых $2n^2 + 3n - 35$ — квадрат простого числа.

3. Известно, что $\sqrt{49-a^2} - \sqrt{24-a^2} = 5$. Чему равно значение выражения $\sqrt{49-a^2} + \sqrt{24-a^2}$?

4. Николай ехал на автомобиле в аэропорт соседнего города. Через час езды со скоростью 45 км/ч он понял, что если не увеличит скорость, то опоздает на 20 мин. Тогда он увеличил скорость и преодолел оставшуюся часть пути со средней скоростью 60 км/ч и приехал в аэропорт на 20 мин раньше, чем планировал первоначально. Чему равно расстояние от дома Николая до аэропорта?

5. В ΔABC точка D — середина AC. Отрезки BD и AM пересекаются в точке M, причем $BO = BM$. Найти MC, если $OD = 8$.

Вариант 27

1. Доказать, что если в арифметической прогрессии $S_m = S_n = 0$, то $S_{m+n} = 0$.

2. При каких значениях параметра a корни уравнения
$x^3 + ax^2 + 48x - 27 = 0$ составляют геометрическую прогрессию?

3. Показать, что многочлен $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$ есть квадрат трехчлена.

4. 1 января 2007 г. — понедельник. В каком ближайшем году 1 января вновь будет понедельником?

5. Высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки, пропорциональные числам 16 и 25. В каком отношении делит гипотенузу биссектриса прямого угла?

Вариант 28

1. Найти пятизначное число, которое от перестановки всех цифр в обратном порядке увеличивается в 9 раз.

2. Является ли число 74 членом арифметической прогрессии 4; 8; 12; 16; ...?

3. Найти наименьшее целое положительное число из области определения функции $y=\frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x^2-4}$.

4. Лодка прошла по течению реки 6 км и против течения 12 км, затратив на это столько времени, сколько ей нужно, чтобы пройти в стоячей воде 20 км. Найти отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения.

5. В ΔABC $BC = 13$, $AB = 7$. Точка M — середина AB, точка N — середина AC, BD — биссектриса $\angle B$. Найти длину KN.

Вариант 29

1. Решить уравнение $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 3x}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

2. Найти зависимость между a, b и c, если $a=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $b = x + y$, $c = x^2 + y^2$.

3. При каких значениях a и b многочлен $M(x) = ax^3 + bx^2 - 73x + 102$ делится на $x^2 - 5x + 6$ без остатка?

4. Сколько раз в течение суток угол между часовой и минутной стрелками составляет ровно 17°?

5. В ΔABC проведены медианы AF и CE так, что $AF \perp CE$. Найти площадь квадрата со стороной AC, если $AB = 42$, $BC = 36$.

Вариант 30

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x=\frac{2}{3}xy+y^2, \\ y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{18}x^2. \end{cases}$

2. Решить неравенство $(z - 1)^{10} > (z - 1)^9$.

3. Найти расстояние между осью параболы $y = -x^2 - 7x + 2$ и осью $0y$.

4. Может ли в феврале високосного года быть 5 понедельников и 5 вторников?

5. От данной трапеции отрезать треугольник, площадь которого составляет $\frac{2}{3}$ ее площади.

Вариант 31

1. Решить уравнение $\frac{1}{6x^2-5x+1}+\frac{1}{2x^2-3x+1}=3x^2-4x$.

2. Решить неравенство $\sqrt{1-4x+4x^2}\le\frac{x^2-2x-3}{x-3}$.

3. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y=x^2-ax+45$ на $[-3;+\infty)$ равно 9?

4. Медианы ΔABC пересекаются в точке O.
Доказать, что $AB^2+BC^2+AC^2=3(OA^2+OB^2+OC^2)$.

5. В ΔABC $\sin\angle C=\frac{3}{5}$, $AC=5$, $BC=4$. Найти радиус вписанной окружности, если $AB<AC$.

Вариант 32

1. Доказать, что $1+xy$ — квадрат рационального числа, если верно равенство $x^3-y^3=2xy$.

2. Вычислить без таблиц $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

3. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}$.

4. На соревнованиях по картингу на кольцевой круговой трассе спортсмен Захаров проходит круг на 3 мин быстрее спортсмена Петрова, а через час Захаров обошел Петрова ровно на круг. За сколько минут Захаров проходит круг?

5. В ΔABC $AB=BC$, точка O — середина высоты BD. Луч AO пересекает сторону BC в точке M. Найти $S_{\Delta BOM}$, если известно, что $S_{\Delta ABC}=60$.

Вариант 33

1. Доказать неравенство $\frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ при $a\ge 0$; $b\ge 0$.

2. На сколько сумма всех четных чисел первой сотни больше суммы всех нечетных чисел этой сотни?

3. Найти сумму целых чисел из области определения функции $y=\dfrac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9}$.

4. Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, зная, что их сумма равна 26, а сумма квадратов этих чисел — 364.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найти S_{ABCD}, если $S_{ABD} = 20$, $S_{ABC} = 18$ и $S_{AOB} = 12$.

Вариант 34

1. Решить уравнение $\sqrt{12-\dfrac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\dfrac{12}{x^2}}=x^2$.

2. Решить неравенство $\dfrac{x-3\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}-3}<0$.

3. Известно, что $a + b + c = 12$, $ab + ac + bc = 72$. Найти значение $a^2 + b^2 + c^2$.

4. Можно ли разложить 1000 орехов в 7 корзин, расставленных по кругу так, чтобы в любых двух корзинах число орехов отличалось на 1?

5. В равнобедренной трапеции острый угол между диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. При каком значении α диагональ трапеции в 2 раза больше высоты?

Вариант 35

1. Число $\overline{aabb}$ — точный квадрат. Найти это число.

2. Найти область определения функции $y=\sqrt{x^2-|x-6|}$.

3. Найти наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{1+x}<\sqrt[3]{1-2x}$.

4. Сумма номеров домов на одной стороне квартала равна 423. Определить номер дома, пятого от угла квартала.

5. В окружности радиуса $5\sqrt{13}$ проведены взаимно перпендикулярные хорды AB и CD, которые делятся в отношении $6 : 1$ и $2 : 3$. Найти расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.

Вариант 36

1. Доказать, что $333^{777} + 777^{333}$ делится на 10.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} + xy = 10, \\ \dfrac{y^3}{x} + xy = 2{,}5. \end{cases}$

3. Найти целые положительные x и y, если $x < 9$ и $y^2 + y = 2(30 - x)$.

4. Из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Они ехали с постоянными скоростями. С момента встречи первый велосипедист ехал до пункта В $\dfrac{2}{3}$ ч, а второй до пункта А — $\dfrac{3}{2}$ ч. Найти время от начала движения до встречи.

5. В ΔABC медиана BD вдвое меньше биссектрисы AM. Известно, что $\angle CBD = 3\angle CAM$. Найти углы ΔABC.

Вариант 37

1. Решить уравнение $x^3 + 6 = 7\sqrt[3]{7x-6}$.

2. Доказать, что $\left(1+\dfrac{7}{\sin x}\right)\left(1+\dfrac{19}{\cos x}\right) > 293$, если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

3. Сколько существует двузначных чисел, делящихся на произведение своих цифр?

4. Собрано 100 кг грибов, влажность которых равна 99 %. После сушки влажность снизилась до 96 %. Какой стала масса грибов?

5. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 8 и 10 см. Определить площадь треугольника.

Вариант 38

1. Решить уравнение $\sqrt{8x-7} + \sqrt{3x-8} = \sqrt{7x-3} + \sqrt{2x-4}$.

2. Решить неравенство $\sqrt{x^2 + \dfrac{6x^2}{|x|} + \dfrac{3}{\operatorname{tg}^2 30^\circ}} \le 8\cos^2 45^\circ$.

3. Построить график функции $|y| = \dfrac{3x^0 - \operatorname{tg} 45^\circ}{x-1}$.

4. В 46 клетках находятся 1000 кроликов. Доказать, что в каких-то двух клетках находится поровну кроликов (могут быть пустые клетки).

5. Известно, что в ΔABC $\angle A = 2\angle C$, сторона BC на 2 см больше стороны AB, $AC = 5$ см. Найти AB и BC.

Вариант 39

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+5y^2-4xy+2x-8y+5=0, \\ x^3+y^3+xy=41. \end{cases}$

2. Решить неравенство $\sqrt{9x^2-6x+x^0} > \sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

3. Исключив x и y из равенств $x-y=a$, $x^3-y^3=b$, $x^5-y^5=c$, найти зависимость между a, b и c.

4. Доказать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии q_1, q_2, q_3, ..., то $\dfrac{S}{S-q_1}=\dfrac{q_1}{q_2}$.

5. Две вершины квадрата площадью 196 см^2 лежат на окружности, а две другие вершины — на касательной к этой окружности. Найти радиус окружности.

Вариант 40

1. Доказать, что если $ab(a+b)=1$, где $a>0$, $b>0$, то $\dfrac{a}{a^3+a+1}=\dfrac{b}{b^3+b+1}$.

2. Решить уравнение $\sqrt{6-x}=(|x|+2x)^0$.

3. Вычислить $\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$.

4. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего параллельно путям со скоростью 3 км/ч навстречу поезду, за 16 с. Найти длину поезда в метрах.

5. Стороны параллелограмма равны 11 и 23, а диагонали относятся как 2 : 3. Найти длины диагоналей.

Вариант 41

1. Решить уравнение $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4$.

2. При каких значениях x значение выражения $\dfrac{x^2-3}{(x-4)^2}$ будет равно $\dfrac{a^2-3}{(a-4)^2}$?

3. Доказать, что $35\sin^2 x \geq 6\sin 2x - 1$.

4. Из бутыли, наполненной 16 %-м раствором соли, отлили 1 л и долили водой, затем отлили еще 1 л и опять долили водой. В бутыли оказался 4 %-й раствор соли. Какова вместимость бутыли?

5. Периметр прямоугольного треугольника равен 12 см. Найти радиус вписанной окружности, если известно, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию.

Вариант 42

1. Решить уравнение $\cos x + \cos\frac{3x}{4} = 2$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = xy + 61, \\ x^2 + y^2 = xy + 13. \end{cases}$$

3. Определить числа a и b так, чтобы многочлен $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ делился без остатка на многочлен $g(x) = x^2 - x + b$.

4. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, стоящих на нечетных местах, равна 36, а на четных местах — 12. Найти эту прогрессию.

5. Основание равнобедренного треугольника равно 12, а расстояние от вершины основания до точки пересечения биссектрис равно $3\sqrt{5}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

Вариант 43

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = xyz, \\ y + z = xyz, \\ z + x = xyz. \end{cases}$$

2. Решить уравнение $\sqrt{x - 2 + 2\sqrt{x-3}} = \sin x + \sqrt{x-3}$.

3. При каком целом значении a уравнения $4x^2 - (2a + 1)x - 2 = 0$ и $7x^2 + (3a - 1)x - 44 = 0$ имеют общий корень?

4. Результат контрольной работы по математике: пятерок больше, чем двоек, на 2, троек на 1 меньше, чем четверок, а четверок в 4 раза больше, чем двоек. Сколько человек получили двойки, если в классе 31 ученик?

5. В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а боковая сторона равна 10 см. Найти R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

Вариант 44

1. Найти наименьшее четырехзначное число, удовлетворяющее соотношению $\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{ab} + \overline{cd}$.

2. Решить уравнение $(3x - 1)(\sqrt{x} + 3x - 1) = 2x$.

3. Решить неравенство $|x + 1| - |x - 2| < 3$.

4. Определить, через сколько времени после того, как стрелки часов показали ровно 5 часов, минутная стрелка догонит часовую.

5. Точка D лежит на стороне AC ΔABC, где $\angle B = 120°$. В ΔBCD и ΔABD вписаны окружности с центрами O и O_1 соответственно. Найти радиус окружности, описанной около ΔBO_1O, если $O_1D = 5$, $OD = 12$.

Вариант 45

1. Доказать, что выражение $13^{2022} + 13^{2023} + 13^{2024}$ делится на 61.

2. Решить уравнение $\sqrt{2x+14+8\sqrt{2x-2}} + \sqrt{2x+2-4\sqrt{2x-2}} = 6$.

3. При каких значениях параметра a уравнение
$(x^2 - a)^2 - 10x^2 - 3x + a = 0$ имеет ровно 4 корня?

4. Стрелок 10 раз выстрелил по мишени и набрал 90 очков. Попадания были только в семерку, восьмерку, девятку и десятку. Сколько попаданий было в семерку, если десяток было четыре?

5. Две стороны треугольника равны 9 и 10 см. Окружность, проходящая через середины этих сторон и их общую вершину, касается третьей стороны. Найти площадь треугольника.

Вариант 46

1. Решить уравнение $x^6 - 2024x^2 + \sqrt{2023} = 0$.

2. Доказать, что $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$.

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 27, \\ x^2 + 4y^2 = 9. \end{cases}$

4. Цифры трехзначного числа образуют арифметическую прогрессию. Если к нему прибавить 101, то получится число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Найти трехзначное число.

5. Высота равнобедренной трапеции, равная 21, делит основание трапеции в отношении 1 : 9. Определить радиус описанного круга, если боковая сторона трапеции равна меньшему основанию.

Вариант 47

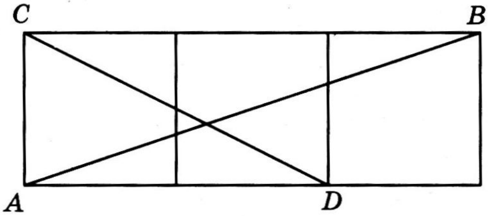
1. Решить уравнение $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 8x = \frac{1}{4}\sin 12x$.

2. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}(6+a)x+2y=3+a,\\ -4x+ay=1+a\end{cases}$ не имеет решений?

3. Найти значение выражения $\sqrt{x+24\sqrt{x-144}} - \sqrt{x-24\sqrt{x-144}}$ при $x = 2024$.

4. Рабочий день уменьшился с 8 до 7 ч. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла на 5 %?

5. Три квадрата расположены, как показано на рисунке. Найти величину угла между прямыми AB и CD.



Вариант 48

1. Решить уравнение $\cos x + \cos 7x = 2$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases}(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185,\\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65.\end{cases}$

3. Найти расстояние между осью параболы $y = -x^2 - 7x + 2$ и осью $0y$.

4. На заводе для изготовления одного электродвигателя типа А расходуется 2 кг меди и 4 кг свинца, а на изготовление одного электродвигателя типа В расходуется 3 кг меди и 5 кг свинца. Сколько электродвигателей каждого типа произведено на заводе, если известно, что израсходовали 131 кг меди и 231 кг свинца?

5. В ромб с острым углом 30° вписан круг, а круг вписан в квадрат. Найти отношение площади ромба к площади квадрата.

Вариант 49

1. Решить уравнение $\frac{x^2}{|x|}(4 - x) + (1 - |x|)(1 + |x|) = 3.$

2. Вычислить сумму: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2023\cdot 2024}.$

3. Решить уравнение $x^4 + x^3 - x + 1 = 4x^2.$

4. Сумма цифр трехзначного числа равна 17. Если из исходного числа вычесть число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 792. Найти трехзначное число.

5. В равнобедренную трапецию вписан круг. Определить радиус этого круга, если боковая сторона делится точкой касания на отрезки длиной m и n.

Вариант 50

1. Решить уравнение $\sqrt[6]{\frac{1}{2}-x}+\sqrt[6]{\frac{1}{2}+x}=1.$

2. Решить систему уравнений $\begin{cases}(x^2+y^2)xy=30,\\ x^4+y^4=82.\end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{x^7\cdot \operatorname{tg}189^\circ\cdot\sin 180^\circ}{\operatorname{tg}9^\circ}+\operatorname{ctg}45^\circ+\sqrt{x^2-4x+4}\ge 5.$

4. В сентябре завод выполнил 105 % месячного плана выпуска готовой продукции, а в октябре дал продукции на 4 % больше, чем в сентябре. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

5. Чему равен $\angle C\ \Delta ABC$, если $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$, где $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$?

Вариант 51

1. Решить в целых числах уравнение $x^2 - y^2 = 101.$

2. Существует ли квадратный трехчлен $y(x)$ с целыми коэффициентами, который в точке $x = 1$ принимает нечетное значение, а в точке $x = 3$ — четное?

3. Разложить на множители $(x + y)^5 - x^5 - y^5.$

4. При каких значениях x бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $q = x^2 + x + 1$ имеет сумму?

5. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с острым углом в $15°$ произведение катетов равно квадрату половины гипотенузы.

Вариант 52

1. Решить систему уравнений $\begin{cases}(x+y)^5 - x^5 - y^5 = -30,\\(x+y)^3 - x^3 - y^3 = -6.\end{cases}$

2. Решить неравенство $\dfrac{x^{0,4} \cdot x^{1,6} + 4\operatorname{ctg} 4° \operatorname{ctg} 94°}{|x|-2} \geq x^2.$

3. Доказать, что не существует целых чисел a, b и c, таких, что выражение $ax^2 + bx + c = 2$ при $x = 13$ и $ax^2 + bx + c = 3$ при $x = 60$.

4. Морская вода содержит 5 % соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5 %?

5. Диагонали параллелограмма разбивают его на 4 треугольника. Найти отношение площади каждого из них к площади параллелограмма.

Вариант 53

1. Решить уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} + 2\sqrt{(x-2)(x+6)} = 2(8 - x)$.

2. При каких значениях параметра a система неравенств

$\begin{cases}x^2 + 2x + a \leq 0,\\x^2 - 4x - 6a \leq 0\end{cases}$ имеет единственное решение?

3. Решить систему уравнений $\begin{cases}10(y-x) = x^4 + 9,\\\sqrt{y} + \sqrt{y-2x} = \sqrt{2}.\end{cases}$

4. Велосипедист каждую минуту проезжает на 500 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 120 км он затрачивает времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Вычислить скорость каждого из них.

5. Основания трапеции равны 4 и 16. В нее вписана и около нее описана окружность. Найти произведение радиусов вписанной и описанной окружностей.

Вариант 54

1. Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

2. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x+(a-1)y=a+3, \\ (a+2)x+2ay=6a+8 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

3. Найти значение выражения $\dfrac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\dfrac{23\pi}{12}}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}}$.

4. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45 % меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60 % меди?

5. В трапеции $ABCD$ основание $BC = \sqrt{3}$, диагонали AC и BD пересекаются в точке E, причем $BE = 1$, $AE = 2$, $\angle BAC = \angle DAC$. Найти площадь трапеции.

Вариант 55

1. Решить в целых числах уравнение $5(x^2 + y^2) = 5 + 8xy$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} y^2-xy+3y-2x+2=0, \\ y=\left(\dfrac{x^2+1}{5}\right)^4. \end{cases}$

3. О числах m, n , k и p известно, что $m > n$, $p > k$, $k = m$. Сравнить числа p и n.

4. На какое целое положительное число надо разделить 111, чтобы остаток составлял 25 % от частного?

5. В равнобедренном остроугольном ΔABC основание $AC = 24$, а расстояние от вершины B до точки M пересечения высот равно 7. Найти радиус окружности, вписанной в ΔABC.

Вариант 56

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x(x+1)(2x^2-3y^2)=12, \\ 2x+4x^2-3y^2=14. \end{cases}$

2. При каких значениях параметров m и n многочлен $2x^5 - x^4 + x^2 + mx + n$ делится без остатка на $x^3 + x + 1$?

3. Найти пятизначное число вида $\overline{abccd}$, удовлетворяющее условиям: $2c + d = b^2$, $a + b = c^2$, $10a + b = a + b + 2c + d$.

4. Смешали 30 %-й раствор соляной кислоты с 10 %-м, и получилось 600 г 15 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

5. В выпуклом пятиугольнике $MNKPE$ $\angle MNK = \angle KPE = 30°$, а каждая из сторон NK, KP и ME равна 1 и $MN + PE = 1$. Доказать, что $S_{MNKPE} = 1$.

Вариант 57

1. Решить уравнение $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{4}{3}\right) = 1$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x\sqrt{y^2-1} + y\sqrt{x^2-1} = 3\sqrt{x^2+y^2-2}, \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$

3. Доказать, что при любом целом m выражение $\frac{m^3}{6} + \frac{3m^2}{2} + \frac{13m}{3} + 4$ является целым числом.

4. Население города ежегодно увеличивается на $1/50$ наличного числа жителей. Через сколько лет население утроится?

5. В ΔABC $\angle A = 60°$, $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Найти $\angle B$.

Вариант 58

1. Решить уравнение $x + \frac{4}{x}(x-3)^3 = \sqrt{x} + 3$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 1, \\ xy = -216. \end{cases}$

3. Доказать неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$, где $a, b, c > 0$.

4. Однозначное число увеличили на 10 единиц. Если полученное число увеличить на столько же процентов, как в первый раз, то получится 72. Найти первоначальное число.

5. В трапеции $KLMT$ $LM \parallel KT$, $KL = MT$, диагональ $MK = 8$ м и $\angle MKT = 75°$. Найти площадь трапеции.

Вариант 59

1. Решить уравнение $\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} - \frac{12}{7(7x+2)} = \frac{53}{28}$.

2. Вычислить $x^3 + 3x$, если $x = \sqrt[3]{3+\sqrt{8}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}}$.

3. Числа a и b таковы, что многочлен $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + ax + b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найти значения a и b.

4. Средний возраст сотрудников фирмы, состоящей из 12 сотрудников, составляет 34 года. В фирму приняли одного нового сотрудника, после чего средний возраст сотрудников составил 33 года. Чему равен возраст нового сотрудника?

5. Найти площадь круга, вписанного в трапецию, площадь которой 125 см^2, если расстояние между точками касания боковых сторон равно 8 см.

Вариант 60

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 = 13x + 4y, \\ y^2 = 4x + 13y. \end{cases}$

2. Сократить дробь $\dfrac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}$.

3. Доказать, что для любых чисел $a \neq 0$, $b \neq 0$ выполняется неравенство $a^6 + b^6 \leq \dfrac{a^9}{b^3} + \dfrac{b^9}{a^3}$.

4. Найти площадь треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$, если известно, что произведение радиусов вписанной и описанной окружностей равно 130.

5. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle C = 45°$. Доказать, что $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}BD^2$.

Вариант 61

1. Решить уравнение $(x^2 - x - 2)^2 - x^3 = 10$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^5 + y^5 = 33y, \\ 8(x+y) = 3x^3y^2. \end{cases}$

3. Выражение $\dfrac{1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 4}}{5x - 2x^2 - 3}$ рассматривается только для целых значений x. При каком значении x это выражение имеет наибольшее значение?

4. Является ли число $5\frac{2}{3}$ членом последовательности, заданной формулой $a_n = 2n - \frac{(-1)^{n+1}}{n}$?

5. Доказать, что в прямоугольном треугольнике $r = \sqrt{S + R^2}$, где S — площадь, r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

Вариант 62

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5(x^4 + y^4) = 17(x^2 + y^2), \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$

2. При каких целых x квадратный трехчлен $x^2 + 2x - 3$ есть простое число?

3. Доказать, что если корни уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ составляют арифметическую прогрессию, то один из корней равен $-\frac{b}{3a}$.

4. Сумма двух чисел равна 1338. Найти эти числа, если известно, что они станут равными друг другу, если в конце первого числа приписать цифру 2, а в конце второго числа отбросить цифру 5.

5. Доказать, что площадь равнобедренной трапеции определяется по формуле $S = \frac{1}{2}m^2 \sin\alpha$, где m — длина диагонали, α — угол между ними.

Вариант 63

1. Решить уравнение $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{7}{8}$.

2. Найти наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{|x+2|} \le \frac{9x^2 - 24x + 16}{|3x - 4|}.$$

3. Доказать, что $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2} < 0{,}999$.

4. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 + ax^2 + 56x - 64 = 0$ составляют арифметическую прогрессию?

5. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего ΔABC, взята произвольная точка M. Отрезки AM и BC пересекаются в точке N. Доказать, что $\frac{1}{MN}=\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}$.

Вариант 64

1. Решить систему уравнений $\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=65,\\(x-y)(x^2-y^2)=5.\end{cases}$

2. Известно, что $a + b + c$ делится на 6, где a, b, c — целые числа. Доказать, что $a^5 + b^3 + c$ также делится на 6.

3. Построить график функции $y=\left(\frac{4^3\cdot 2^4}{16^2\cdot 8}\right)\cdot x^{3n+2}\cdot x^{-3n}+(-1)^{2n+1}$.

4. Пусть x_1 и x_2 — действительные корни уравнения $x^2 - 12mx + n = 0$. Числа m, x_1, x_2, n — четыре последовательных числа геометрической прогрессии. Найти x_1 и x_2.

5. Площадь квадрата, построенного на боковой стороне равнобедренного треугольника, в 4 раза больше площади треугольника. Найти R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

Вариант 65

1. Решить уравнение $1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12x}$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases}\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{4y}+\frac{5}{12z}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{5z}{12}\right)=1,\\3x+2y^2+z^3=22.\end{cases}$

3. Доказать, что если $a^3 + 7a + 19 = 0$, $b^3 + 7b + 19 = 0$, $c^3 + 7c + 19 = 0$, где $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$, то $a + b + c = 0$.

4. В классе из 30 учащихся получили на контрольной оценки «5», «4», «3», «2». Сумма полученных оценок равна 90, причем «троек» было больше, чем «пятерок» и «четверок». Кроме этого, известно, что число «четверок» кратно 5, а число «троек» кратно 7. Сколько и каких оценок получил класс?

5. Точка, взятая внутри правильного треугольника, удалена от его вершин на расстояния 3, 4 и 5 единиц. Найти сторону треугольника.

Раздел II

ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ

8 КЛАСС

Вариант 1

1. *Решение.*

Заметим, что $p^2 + 9$ нечетно, тогда p^2 и p — четные. Такое число единственное, т. е. $p = 2$.

2. $(-4; -3)$, $(-4; 3)$, $(4; -3)$, $(4; 3)$.

Указание.

Записать уравнение в виде $x^4 = (y^2 + 1)^2 + 156$, или $(x^2 + y^2 + 1)(x^2 - y^2 - 1) = 156$.

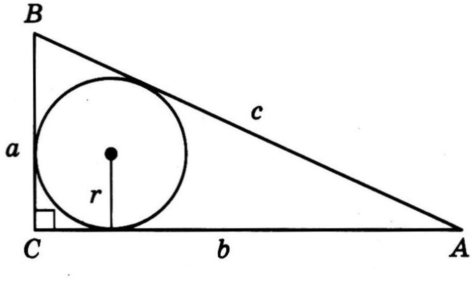
Далее учесть, что $156 = 1 \cdot 156 = 2 \cdot 78 = 3 \cdot 52 = 4 \cdot 39 = 6 \cdot 26 = 12 \cdot 13$. Из перечисленных пар подходят лишь (2; 78) и (6; 26) и т. д.

3. *Указание.*

При $x > 3$ имеем $y = 3$, при $x < 3$ получим $y = -1$.

4. 90 кг.

5. *Решение.*



Пусть $BC = a$, $AC = b$ — катеты прямоугольного ΔABC ($\angle C = 90°$), $AB = c$ — гипотенуза.

Пусть для определенности $a < b$. Согласно условию $r = \dfrac{b-a}{2}$, где r — радиус вписанной окружности. С другой стороны, $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

Следовательно, $\dfrac{b-a}{2} = \dfrac{a+b-c}{2}$, или $c = 2a$.

Но $c=\sqrt{a^2+b^2}$, тогда $\sqrt{a^2+b^2}=2a$, или $a^2 + b^2 = 4a^2$, $3a^2 = b^2$, откуда $\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Поскольку $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \angle A$, то $\operatorname{tg} \angle A = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle A = 30°$, тогда $\angle B = 60°$, т. е. углы треугольника 90°, 30°, 60°.

Вариант 2

1. $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = -1$.
Указание.

Записать уравнение в виде $\frac{2(x^2-x+1)}{x^2}=5+\frac{3x^2}{x^2-x+1}$.

Далее обозначить $\frac{x^2-x+1}{x^2}=y$ и т. д.

2. *Указание.*
Можно взять числа вида $625m^6$ и $2 \cdot 625m^6$. Например, при $m = 1$ получим $625^2 + 1250^2 = 125^3$ и $625^3 + 1250^3 = 46\,875^2$.

3. –13.

4. 12.

5. 60°, 60°, 120°, 120°.

Вариант 3

1. Например, $2^2 + 11^2 = 5^3$.

2. *Решение.*
Пусть искомые числа x и y, тогда получим уравнение $x^2 = y^3 = a$. Заметим, что a — степень с показателем 6. Но $100 \le a \le 10\,000$.

Следовательно, имеем два числа: $a = 3^6$ и $a = 4^6$. Но 3^6 не является кубом двузначного числа ($3^6 = 9^3$), значит, $a = 4^6$ и $x = 4^3 = 64$, $y = 4^2 = 16$, т. е. искомые числа 64 и 16.

3. $(x^2 + x + 1)(x^7 - x + 1)$.

4. *Решение.*
Пусть было взято x г 30 %-го и y г 10 %-го раствора. Тогда задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=600, \\ 3x+y=900, \end{cases}$$

откуда находим $x = 150$, $y = 450$, т. е. было взято 150 г 30 %-го и 450 г 10 %-го раствора.

5. 60°, 60°, 120°.

Вариант 4

1. *Указание.*

Записать уравнение в виде $(7x - 6)(7y - 8) = -49$.

2. *Решение.* $7^{100} + 11^{100} = 7^4((7^{12})^8 - 1) + 11^4((11^{12})^8 - 1) + 7^4 + 11^4$. Заметим, что $7^6 + 1$ и $11^6 + 1$ делятся на 13, следовательно, числа $7^{12} - 1$ и $11^{12} - 1$ делятся на 13. Значит, остаток от деления этого выражения на 13 равен остатку от деления $7^4 + 11^4$ на 13, который равен 12 и находится непосредственно.

3. -4.

Указание.

Ввести замену $\sqrt{x-7} = t$, где $t \geq 0$, тогда $x = t^2 + 7$, $y = 4t - |t^2 + 8|$.

Далее рассмотреть функцию $y = -((t - 2)^2 + 4)$.

4. 13 шахматистов.

Указание. $\dfrac{1}{2}x(x - 1) = 78$.

5. 30°, 60°, 90°.

Вариант 5

1. (3; 1), (1; 1), (2; 2), (2; 0).

2. 322.

3. $x = -1$.

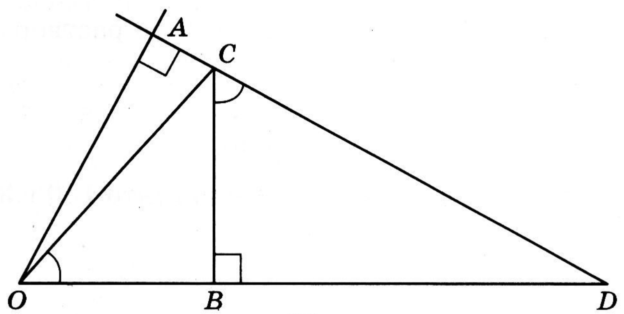
Указание.

Учесть, что $11 - 6\sqrt{2} = (3 - \sqrt{2})^2$. Далее решить неравенство $|3x + 2| \leq 3$.

4. *Решение.*

Масса «сухого вещества» арбуза составляет 1 % первоначальной массы, или $12 \cdot 0{,}01 = 0{,}12$ кг. После того как арбуз усох, масса «сухого вещества» составляла 2 % от новой массы арбуза. Новая масса будет равна $0{,}12 : 0{,}02 = 6$ кг. После того как арбуз усох, его масса уменьшилась вдвое. Значит, арбуз весит теперь 6 кг.

5. *Решение.*



Пусть $AM = 2$, $MB = 11$. Продолжим AM до пересечения в точке D со стороной DO данного угла. Так как $\angle AOD = 60°$, то $\angle D = 30°$. Из ΔOAM и ΔOAD имеем $MD = 2MB = 22$, $AD = AM + MD = 24$, тогда $OD = 2AO$, $OM = 14$.

Вариант 6

1. *Решение.*

Число 3^{2023} кратно 3, следовательно, оно имеет вид $3^{2023} = 3m$, где $m \in N$. Тогда данное число запишется в виде

$2^{3m} + 1 = (2^m)^3 + 1 = (2^m + 1)(2^{2m} - 2^m + 1)$.

Значит, исходное число является составным.

2. $2(b^2 - c) = (a^2 - b)^2$.

3. $\frac{2}{13}$.

4. *Указание.*

Задача сводится к решению уравнения $\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 = x$.

5. *Указание.*

Доказать, что $a = b$, т. е. треугольник равнобедренный и прямоугольный.

Вариант 7

1. $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 2x^2 + 4}$.

2. *Указание.*

Использовать формулу $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$.

3. Да.

4. 40 л.

Указание.

Пусть x л — емкость канистры, тогда получим уравнение $(x - 0{,}25x) - 0{,}1x = 26$, откуда $x = 40$. Значит, емкость канистры 40 л.

5. 4,8.

Вариант 8

1. Да.

Указание.

Разложить числитель дроби на множители и сократить дробь на $x^2 - 2x + 1$.

2. *Указание.*

В общем виде: если $x - y = \dfrac{x}{y} = a$, то $x = \dfrac{a^2}{a-1}$, $y = \dfrac{a}{a-1}$, где $a = 7$.

3. *Указание.*
$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$.

4. *Решение.*
Пусть было x белых и y черных шаров. Тогда имеем
$\begin{cases} x+y=30, \\ x\le 19, \\ y\le 11; \end{cases}$ $\begin{cases} x=30-y, \\ -y\ge -11, \\ x\le 19; \end{cases}$ $\begin{cases} x=30-y\ge 30-11=19, \\ x\le 19; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 19, \\ x\le 19, \end{cases}$

откуда $x = 19$. Значит, в коробке 19 белых и 11 черных шаров.

5. 18.

Вариант 9

1. *Решение.*
Записать уравнение в виде $(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2) = 37 = 1 \cdot 37$, причем $x - 3y < x < x^2 + 3xy + 9y^2$, значит, $\begin{cases} x-3y=1, \\ x^2+3xy+9y^2=37. \end{cases}$

Решая систему способом подстановки $x = 3y + 1$, получим $3y^2 + y - 4 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = -\dfrac{4}{3}$ (не подходит, так как x, $y \in N$). Если $y = 1$, то $x = 4$, т. е. пара (4; 1) является решением исходного уравнения.

2. *Решение.*
Если число $x = 1+\sqrt{3}$ — один из корней уравнения, то получим
$3(1+\sqrt{3})^3 + a(1+\sqrt{3})^2 + b(1+\sqrt{3}) + 12 = 0$,
$3(4+2\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) + a(4+2\sqrt{3}) + b(1+\sqrt{3}) + 12 = 0$,
$(4a + b + 42) + (2a + b + 18)\sqrt{3} = 0$.

Заметим, что a и b — целые числа, тогда имеем

$$\begin{cases} 4a+b+42=0, \\ 2a+b+18=0, \end{cases}$$

откуда, вычитая из I уравнения II, находим $a = -12$, тогда $b = -2a - 18 = 6$.

3. 8.

4. *Решение.*
Так как движение велосипедиста не является равномерным, то и время, затраченное туда и обратно, будет различным. Приняв расстояние

от села до города за условную единицу, найдем время движения в город по формуле $t_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{1}{16}$ (часов условно) и время движения из города $t_2 = \frac{S}{v_2} = \frac{1}{12}$ (часов условно). Путь туда и обратно равен $2S$, а общее время — $(t_1 + t_2)$, тогда $v_{\text{ср.}} = \frac{2S}{t_1 + t_2} = \frac{2 \cdot 1}{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{12}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 48}{3+4} = \frac{96}{7} = 13\frac{5}{7}$ (км/ч).

5. 24.

Вариант 10

1. *Решение.*

Заметим, что $6 + 3x - 9x^2 = \frac{25}{4} - \left(3x - \frac{1}{2}\right)^2$.

Поскольку $0 \le \frac{25}{4} - \left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{25}{4}$, то $E(y) = \left[0; \frac{5}{2}\right]$.

2. *Решение.*
$z = (x - 1)^2 - x^2 = 1 - 2x$; $y = (1 - 2x)^2 - 4x^2 = 1 - 4x$;
$x = (1 - 4x)^2 - 16x^2 = 1 - 8x$; $x = 1 - 8x$, $9x = 1$, $x = \frac{1}{9}$.

3. *Указание.*

Преобразовать данную функцию к виду $y = 1 - \frac{3}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}$, откуда $y_{\text{наим.}} = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{7}$.

4. *Указание.*
$5 \cdot 8 \cdot 4 = 160$ способами.

5. 17 см и 6 см.

Вариант 11

1. *Решение.*
Пусть $\sqrt{x-3} = t$, где $t \ge 0$, тогда $x = t^2 + 3$ и $y = t - |t^2 + 4|$. Поскольку $t^2 + 4 > 0$ при всех t, то $y = t - (t^2 + 4) = -(t^2 - t + 4) = -\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right)$.

Следовательно, наименьшее значение функции достигается при $t=\frac{1}{2}$ и $y_{\text{наим.}}=\frac{1}{2}$.

2. *Решение.*

Поскольку 2025 кратно 3, то $(2^{675})^3+1$ — составное число.

3. $x_1 = 0$, $x_2 = 7$.

4. 30 000 руб.

5. Прямоугольные трапеции с основаниями 2 см и 5 см.

Вариант 12

1. 125; 216 и 729.

Указание.

$\overline{abc} = 100a + 10b + c = c^3$, или $10(10a + b) = (c - 1)c(c + 1)$.

2. *Решение.*

Пусть $3x + 2y - z = t$, тогда $z = 3x + 2y - t$. Так как $x^2 + 4y^2 + z^2 = 5$, то $x^2 + 4y^2 + (3x + 2y - t)^2 = 5$, или после упрощений получим

$$10x^2 + 6(2y - t)x + (8y^2 + t^2 - 4yt - 5) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) рассматриваем как квадратное относительно x. Оно имеет корни, если $\frac{D}{4}\geq 0$, т. е.

$$-44y^2 + 4yt - t^2 + 50 \geq 0. \qquad (2)$$

Неравенство (2) решаем относительно y.

Аналогично имеем $\frac{D}{4}\geq 0$, или $4t^2 + 44(50 - t^2) \geq 0$, или $-40t^2 \geq -2200$, или $t^2 \leq 55$, откуда $-\sqrt{55}\leq t\leq \sqrt{55}$.

Следовательно, наименьшее значение выражения $3x + 2y - z$ равно $-\sqrt{55}$.

3. $5\sqrt{3}-3\sqrt{5}$.

4. *Решение.*

На каждом из 5 мест в башне может стоять кубик одного из двух цветов, значит, различных башен будет $2^5 = 32 < 45$, т. е. по принципу Дирихле найдутся две одинаковые башни.

5. *Решение.*

Разделить одну из сторон треугольника на 9 равных частей и соединить точки деления с противоположной вершиной. Далее учесть, что все

9 треугольников имеют одинаковую площадь (высота общая, основания равны), а площадь четырех из них составляет 4/9 площади данного треугольника.

Вариант 13

1. *Решение.* Выразим переменную x через y и выделим целую часть:

$$x=\frac{2023-157y}{3}=\frac{2022-156y+1-y}{3}=674-52y+\frac{1-y}{3}=674-52y+y_1,$$

где $y_1=\frac{1-y}{3}$, откуда $y=1-3y_1$.

Тогда $x=674-52(1-3y_1)+y_1=622+157y_1$.

Итак, $x=622+157y_1$, $y=1-3y_1$.

Так как $x\in N$ и $y\in N$, то $622+157y_1>0$ и $1-3y_1>0$, откуда $y_1>-\frac{622}{157}=-3\frac{151}{157}$ и $y_1<\frac{1}{3}$. Значит, $-3\frac{151}{157}<y_1<\frac{1}{3}$, откуда $y_1=-3$; -2; -1; 0.

Если $y_1=-3$, то $x=622-471=151$, $y=10$;

если $y_1=-2$, то $x=622-314=308$, $y=7$;

если $y_1=-1$, то $x=622-157=465$, $y=4$;

если $y_1=0$, то $x=622$, $y=1$.

Следовательно, исходное уравнение имеет 4 решения в натуральных числах: (151; 10), (308; 7), (465; 4), (622; 1).

2. 2.

3. *Решение.*

Запишем данное равенство в виде

$$f(x^2+\sqrt{x})=x^4+2x^2\sqrt{x}-(x^2+\sqrt{x})+x. \qquad (1)$$

Пусть $x^2+\sqrt{x}=t$, (2)

или $x^4+2x^2\sqrt{x}+x=t^2$. (3)

Учитывая соотношения (2) и (3), равенство (1) примет вид $f(t)=t^2-t$, или, заменяя t на x, получим $f(x)=x^2-x$.

4. *Решение.*

Пусть цена бриллианта вычисляется по формуле $y=am^2$, где m — его масса. Пусть масса первого куска равна $\left(\frac{m}{2}+x\right)$, тогда масса второго будет $m-\left(\frac{m}{2}+x\right)=\frac{m}{2}-x$.

Следовательно, общая стоимость двух кусков равна

$$a\left(\frac{m}{2}+x\right)^2 + a\left(\frac{m}{2}-x\right)^2 = a\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right).$$

Нетрудно увидеть, что эта сумма будет наименьшей, если $x = 0$, т. е. если оба куска будут иметь одинаковую массу.

5. *Указание.*

С помощью двусторонней линейки предварительно построить ромб.

Вариант 14

1. $(-2; -5)$, $(-2; 5)$, $(2; -5)$, $(2; 5)$.

Указание.

Записать уравнение в виде $(x^2 - 11)(12 - y^2) = 91$.

Далее ввести замену $x^2 - 11 = n$, где $n \in Z$, тогда $y^2 = 12 - \dfrac{91}{n}$; $x^2 = n + 11$ и т. д.

2. 32.

3. $\dfrac{a^2-1}{a^4-2a^2+4}$.

4. *Указание.*

Учесть, что в правильном треугольнике точка O является центром вписанной и описанной окружностей.

5. *Указание.*

Если только 19 учеников достигли 13 лет, то общая сумма возрастов не более $13 \cdot 19 + 12 \cdot 14$, т. е. меньше 430 лет.

Вариант 15

1. $(-3; -8)$, $(-3; 8)$, $(3; -8)$, $(3; 8)$.

Указание.

Записать уравнение в виде $(x^2 - 7)(y^2 - 13) = 102$.

Далее обозначить $x^2 - 7 = n$, где $n \in Z$, тогда $y^2 = 13 + \dfrac{102}{n}$, где $n = \pm1$, ±2, ±3, ±6, ±17, ±34, ±51, ±102.

2. *Решение.*

Запишем данное уравнение в виде $y^2 = x^2(1 + x)$. Чтобы y было числом целым при x целом, положим $1 + x = a^2$, тогда $x = a^2 - 1$ и $y = ax$, или $y = a(a^2 - 1)$.

Итак, соотношения $x = a^2 - 1$ и $y = a(a^2 - 1)$ задают бесконечную серию решений.

3. $D(y) = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$.

4. Два брата, две сестры, мать, отец, всего 6 человек.

5. *Решение.*
Если $a^2 + b^2 \le c^2$, то $a^3 + b^3 < a^2c + b^2c \le c^3$.
Значит, $c^2 < a^2 + b^2$, т. е. треугольник остроугольный.

Вариант 16

1. *Решение.*

Пусть $7^{n+\frac{1}{2}} = x$, $7^{4n+2} + 1 = \left(7^{n+\frac{1}{2}}\right)^4 + 1 = x^4 + 1$.
Но $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$, ч. т. д.

2. $x = 9$; $y = 8$.

3. 0.

4. 30 г и 20 г.

5. $\frac{1}{2}(a - b)$.

Указание.
Использовать теорему о средней линии треугольника.

Вариант 17

1. 20.

2. *Решение.*
Пусть $n^2 - n + 17 = k^2$, тогда $4n^2 - 4n + 68 = 4k^2$, или $4k^2 - (2n - 1)^2 = 67$. Заметим, что 67 — простое число, значит, $(2k + 2n - 1)(2k - 2n + 1) = 67 \cdot 1$, откуда $\begin{cases} 2k + 2n - 1 = 67, \\ 2k - 2n + 1 = 1. \end{cases}$

Складывая и вычитая уравнения системы, находим $k = 17$, $n = 17$. Следовательно, единственным точным квадратом является число $x_{41} = 17^2$.

3. 230.
Указание.
Использовать теорему Виета.

4. *Решение.*

Так как обувь подорожала на 20 %, то она стала стоить 120 %, что составляет 1,2 от первоначальной цены.

После понижения цены на 20 % она стала стоить 100 % − 20 % = 80 %, что составляет 0,8 от новой цены. Если x — первоначальная цена обуви, то после подорожания она стала стоить $1,2x$, а после снижения цены $0,8 \cdot 1,2x = 0,96x$, тогда разница между начальной и конечной ценой будет $x - 0,96x = 0,04x$, что составляет $0,04 \cdot 100 = 4$ % от начальной цены. Значит, обувь подешевела на 4 %.

5. $\frac{3}{8}a^2$.

Вариант 18

1. 7.

Указание.

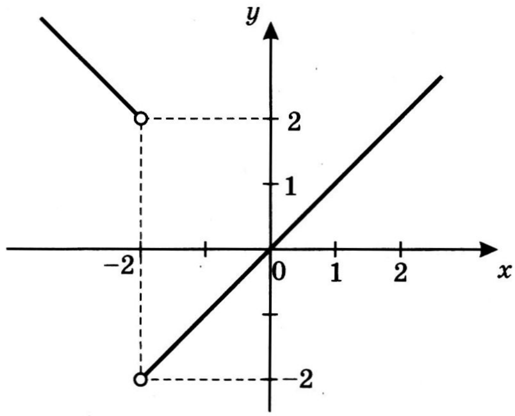
Учесть, что $6-4\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})^2$.

2. *Указание.*

$x \neq -2$.

1) Если $x > -2$, то $y = x$;

2) если $x < -2$, то $y = -x$.



3. *Решение.*

Заметим, что последняя цифра числа 13^n совпадает с последней цифрой числа 3^n. Предварительно найдем последнюю цифру числа $3^{2023} + 3$.

$3^0 = 1$; $3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$; $3^5 = 243$; $3^6 = 729$; $3^7 = 2187$.

Следовательно, 3^{4n} оканчивается на 1; 3^{4n+1} оканчивается на 3; 3^{4n+2} — на 9; 3^{4n+3} — на 7.

Так как $2023 = 4 \cdot 505 + 3$, то последняя цифра числа 3^{2023} равна 7, значит, $3^{2023} + 3$ оканчивается на 0, т. е. исходное число также оканчивается на 0.

4. *Решение.*

По условию соотношение шоколадных конфет и карамелек 11 : 5, значит, общее количество конфет должно делиться на 16. Буратино сразу съел 20 % $= \frac{1}{5}$ часть всех конфет, значит, общее число конфет кратно 5. Подходит единственное число, меньшее 100, кратное 16 и 5, — это число 80.

Если в мешочке было всего 80 конфет, то среди них $\frac{11}{16} \cdot 80 = 55$ шоколадных и $\frac{5}{16} \cdot 80 = 25$ карамелек. Буратино сразу съел $\frac{1}{5} \cdot 80 = 16$ конфет, из них $\frac{1}{4} \cdot 16 = 4$ карамельки. Следовательно, в мешочке осталась $25 - 4 = 21$ карамелька.

5. 72°, 72°, 108°, 108°.

Вариант 19

1. $3\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$.

2. $-\frac{1}{3}$; 1; $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{2}$.

Указание.

Заменой $y = 6x^2 - 7x$ данное уравнение приводится к квадратному.

3. $[-2\sqrt{2};\ 0) \cup (0;\ 2\sqrt{2}]$.

4. 2 062 500 руб.

Указание.

Задача сводится к решению уравнения

$$\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)x = 250\,000 + 300\,000.$$

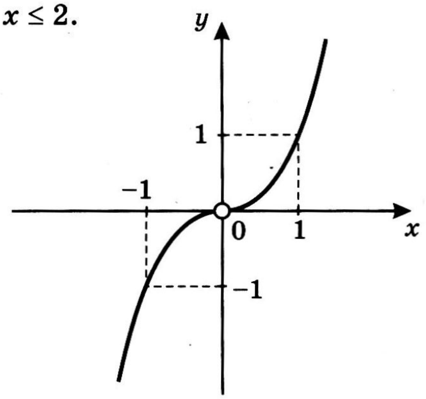
5. *Указание.*

Использовать теорему о средней линии прямоугольника.

Вариант 20

1. $1 \le x \le 2$.

2.



3. (3; 1), (1; 3).

Указание.

Умножить обе части второго уравнения на 3 и сложить с первым. Возможны и другие способы решения, например, замена $x + y = a$; $xy = b$.

4. *Решение.*

Допустим, что каждый из учеников получил нечетное количество записок. Так как всего учеников 27 — нечетно, то всеми учениками вместе получено нечетное число записок (сумма нечетного числа нечетных чисел нечетна). С другой стороны, количество полученных записок равно количеству написанных, т. е. $27 \cdot 2 = 54$. Но 54 — четное число. Противоречие.

5. *Указание.*

Показать, что $S_{ABCD} = S_{\Delta AMD} = 33$ см.

Вариант 21

1. *Указание.*

Обозначить $x + \dfrac{2}{x} = y$.

2. При $x = 2$, $y = 1$.

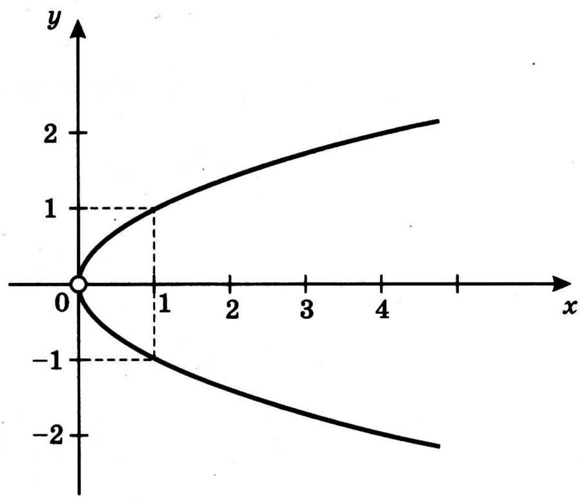
Указание.

Записать число $31x1y6$ в стандартном виде:

$N = 3 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + x \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + y \cdot 10 + 6$, где $0 \le x \le 9$; $0 \le y \le 9$.

Далее найти такие целые числа x и y, чтобы число N делилось на 157.

3.



4. *Решение.*

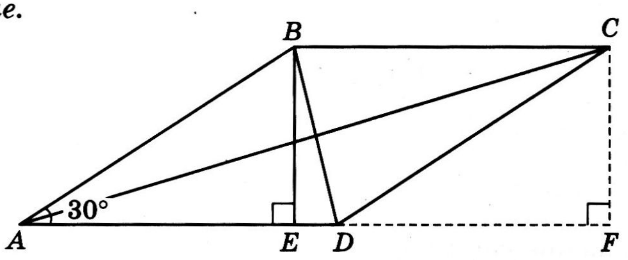
100 мышей за 100 дней — 200 кг зерна;

100 мышей за 10 дней — 20 кг зерна;

10 мышей за 10 дней — 2 кг зерна.

Значит, 10 мышей за 10 дней съедят 2 кг зерна.

5. *Решение.*



$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$. С другой стороны, $S_{ABCD} = AD \cdot BE$. Следовательно, имеем

$$AD \cdot BE = \frac{1}{2}AC \cdot BD. \quad (1)$$

Так как $\angle A = 30°$, то из ΔABE $BE = \frac{1}{2}AB$.

Но $AB = AD$, тогда $BE = \frac{1}{2}AD$. Учитывая соотношение (1), получим $AD \cdot \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AC \cdot BD$, или $AD^2 = AC \cdot BD$, ч. т. д.

Замечание. Задачу можно решить другими способами.

Вариант 22

1. 5.

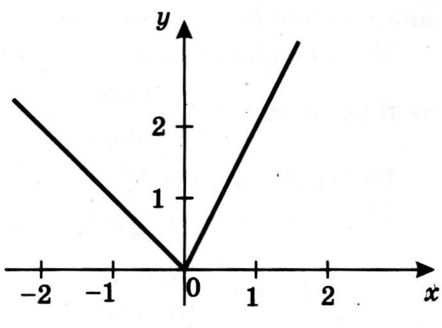
2. [2; 4].

Указание.

Учесть, что $x^2 + 9 > 0$ при всех $x \in R$.

3. *Указание.*

$\sqrt{x^2} = |x|$. Далее рассмотреть два случая $x \geq 0$ и $x < 0$.



4. *Решение.*

Пусть x руб. — первоначальная цена книги, после снижения цены на 10 % ее стоимость составила 90 % и стала равна 468 руб. Получим пропорцию $x : 468 = 100 : 90$, откуда $x = \dfrac{468 \cdot 100}{90} = 520$.

5. 65°.

Вариант 23

1. $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$; $x_3 = 0{,}5$; $x_4 = 3{,}5$.

Указание.

Записать уравнение в виде $x^2 - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}\left(x - \dfrac{7}{2}\right)$.

Можно привести другие способы решения.

2. $\left(-3\dfrac{1}{8}; -2\dfrac{7}{8}\right) \cup \left(2\dfrac{7}{8}; 3\dfrac{1}{8}\right)$.

Указание.

Рассмотреть 2 случая: 1) $x > 0$; 2) $x < 0$.

3. *Решение.*

Пусть m — наибольший общий делитель искомых чисел, x и y — частные от деления этих чисел на m. По условию

$$mxy = 900, \qquad (1)$$

$$\sqrt{mx} + \sqrt{my} = 16. \qquad (2)$$

Покажем, что mx и my — квадраты натуральных чисел:

$$\sqrt{mx} = 16 - \sqrt{my}, \text{ или } mx = 16^2 + my - 2 \cdot 16\sqrt{my}.$$

mx — натуральное число, значит, my — квадрат натурального числа, аналогично mx — квадрат натурального числа.

Из (1) следует, что mxy также квадрат натурального числа, следовательно, и числа $x = \dfrac{mxy}{my}$, $y = \dfrac{mxy}{mx}$ — квадраты натуральных чисел.

Пусть $x = a^2$, $y = b^2$, $m = c^2$, тогда из (1) и (2) имеем

$$a^2b^2c^2 = 900, \ \sqrt{c^2a^2} + \sqrt{c^2b^2} = 16,$$

$$\text{или } \begin{cases} abc = 30, \\ ac + bc = 16; \end{cases} \ \begin{cases} abc = 30, \\ c(a+b) = 16, \end{cases} \ \text{откуда } \frac{ab}{a+b} = \frac{15}{8}.$$

Дробь $\dfrac{ab}{a+b}$ несократимая, так как если x и y, a и b — взаимно простые числа, то $(ab;\ a + b) = 1$, откуда $a = 5$; $b = 3$, или $a = 3$; $b = 5$; $c = 2$.

Итак, искомые числа — 100 и 36, так как $mx = a^2c^2 = 25 \cdot 4 = 100$, $my = b^2c^2 = 9 \cdot 4 = 36$, или наоборот. Значит, искомые числа — 100 и 36.

4. Цыпленок стоит 200 руб., утка — 400 руб., гусь — 500 руб.

5. $AC = BC = 8$.

Указание.

Обозначить $CD = DB = x$, $AC = 2x$, тогда $P_1 = 3x + AD$, $P_2 = 8 + AD + x$ и т. д.

Вариант 24

1. *Указание.*

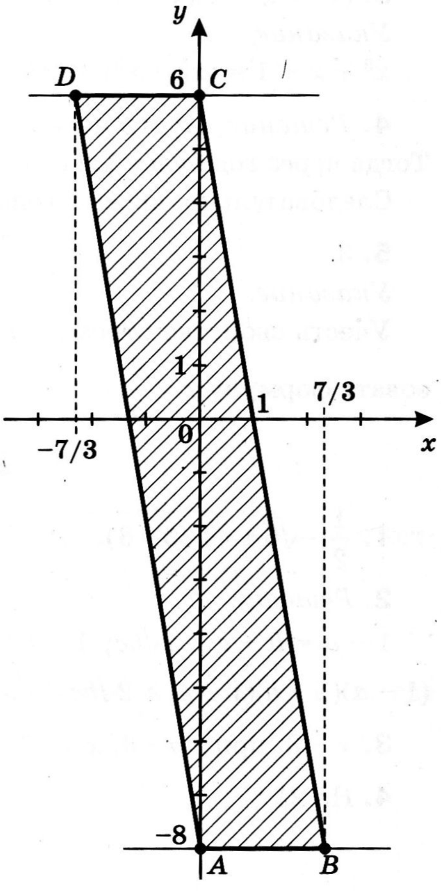
Учесть, что $x = 1$ не является корнем уравнения, и привести его к виду $\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^2 - 5\cdot\dfrac{x^2}{x-1} + 4 = 0$. Далее замена $\dfrac{x^2}{x-1} = y$ и т. д.

2. $[0; 3]$.

Указание.

Поскольку обе части неравенства неотрицательны, то после возведения в квадрат получим $(4x - 3)^2 \le (2x + 3)^2$ и т. д.

3. *Решение.*



Данное неравенство равносильно системе неравенств $|y + 3x + 1| \le 7 - 3|x|$, или $\begin{cases} y+3x+1 \le 7-3|x|, \\ y+3x+1 \ge 3|x|-7; \end{cases}$

$$\begin{cases} 3|x| \le 6-y-3x, \\ 3|x| \le y+3x+8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \le 6-y-3x, \\ 3x \ge y+3x-6; \\ 3x \le y+3x+8, \\ 3x \ge -y-3x-8; \end{cases} \qquad \begin{cases} y \le -6x+6, \\ y \le 6; \\ y \ge -8, \\ y \ge -6x-8. \end{cases}$$

Фигура, заданная на координатной плоскости исходным неравенством, представляет параллелограмм $ABCD$ с вершинами в точках $A(0;\ -8)$, $B\left(\dfrac{7}{3}; -8\right)$, $C(0;\ 6)$, $D\left(\dfrac{-7}{3};\ 6\right)$. Если AB — основание, то AC — высота параллелограмма ($AB \perp AC$). Тогда $S = AB \cdot AC = \dfrac{7}{3}\cdot 14 = \dfrac{98}{3}$.

4. *Указание.*

Задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} x+7=5(y-7), \\ y+5=7(x-5), \end{cases}$

откуда находим $x=7\dfrac{2}{17}$, $y=9\dfrac{14}{17}$.

5. $13\sqrt{3}$ см.

Указание.

Учесть, что середина гипотенузы — центр вписанной окружности.

Вариант 25

1. *Указание.*

Записать уравнение в виде $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 1680$.

Далее заменой $x^2 + 5x + 5 = y$ привести уравнение к квадратному.

2. *Указание.*

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

3. $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$.

Указание.

$x^5 + x + 1 = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$.

4. *Решение.* Пусть население составляло первоначально x человек. Тогда через год будет $1{,}2x$, а еще через год $1{,}2x + 1{,}2x \cdot 0{,}2 = 1{,}44x$.

Следовательно, через 2 года население увеличилось на 44 %.

5. 3.

Указание.

Учесть свойство отрезков касательных к окружности. Далее использовать формулу $r=\dfrac{S}{p}$.

Вариант 26

1. $\dfrac{1}{2}(-\sqrt{6} \pm \sqrt{4\sqrt{6}-6})$.

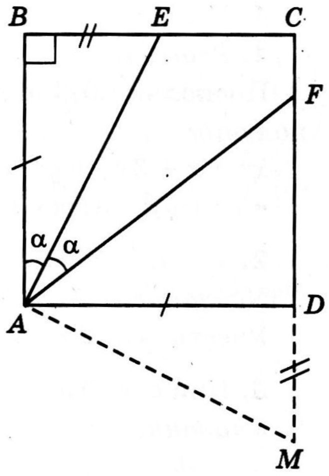
2. *Решение.*

$1 - a = b + c \geq 2\sqrt{bc}$; $1 - b = a + c \geq 2\sqrt{ac}$; $1 - c = a + b \geq 2\sqrt{ab}$, тогда $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{ab} = 8abc$.

3. $x - 3$, при $x \neq -3$, $x \neq -7$.

4. На 21 %.

5. *Решение.*



На продолжении стороны CD отложим $DM = BE$ и соединим точки A и M. Заметим, что $\Delta ABE = \Delta ADM$ по двум катетам, тогда $\angle DAM = \angle BAE = \angle EAF = \alpha$.

Кроме того, $\angle FAD = 90° - 2\alpha$, тогда $\angle FAM = 90° - 2\alpha + \alpha = 90° - \alpha = \angle AMD$.

Значит, ΔAFM — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), тогда $AF = FM = BE + DF$, ч. т. д.

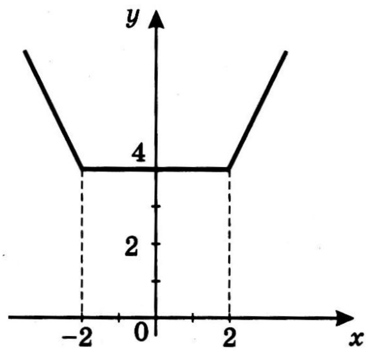
Вариант 27

1. $x_1 = 6$, $x_2 = -1{,}5$, $x_{3,\,4} = \dfrac{1}{4}(7 \pm \sqrt{193})$.

Указание.

Ввести замену $\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x} = y$.

2.



3. *Решение.*

Если a — нечетное число, то и a^2 — нечетное, тогда $a^2 + b$ будет четным (так как b — нечетное). Значит, $a^2 + b + 1$ — нечетное.

4. *Указание.*

Задача сводится к решению уравнения $\left(\dfrac{1}{16^2} + \dfrac{15^2}{9^2 \cdot 16^2}\right)x^2 + 14 = x$, где x — число павлинов в стае.

Решая уравнение, находим $x = 48$.

5. 288.

Вариант 28

1. *Решение.*

Поскольку $0{,}306 + 0{,}694 = 1$, то, обозначив $0{,}306 = x$, $0{,}694 = y$, получим

$$x^3 + x + 3xy + y^3 + y = (x^3 + y^3) + (x + 1) + 3xy =$$
$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + (x + y) + 3xy = 1^3 - 3xy \cdot 1 + 1 + 3xy = 1 + 1 = 2.$$

2. $x = 5$.

Указание.

Учесть, что $x \neq -3$.

3. При $a = -13$.

Указание.

$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ — абсцисса параболы, т. е. $x_0 = 5$, тогда $y_0 = -27 - 3a$, где $y_0 = 12$.

4. 27 ручек.

Указание.

Стоимость ручки после повышения цены на 20 % составит $15 + 15 \cdot 0{,}2 = 18$ руб.

5. 50.

Указание.

Обозначить меньшее основание через x, тогда большее основание равно $x + 12$ и т. д.

Вариант 29

1. $\sqrt{13} - 1$.

Указание.

В подкоренном выражении выделить полный квадрат.

2. $x \in [-4; -2) \cup (0; 2)$.

Указание.

Привести I неравенство к виду $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x} < 0$ и решить методом интервалов, а II неравенство записать в виде $-4 \le x \le 4$ и т. д.

3. *Решение.*

Запишем данное равенство в виде $(x^2 - 8x + 16) + (4y^2 + 4y + 1) = 0$, или $(x - 4)^2 + (2y + 1)^2 = 0$. Полученное равенство выполняется тогда и только тогда, если $x - 4 = 0$ и $2y + 1 = 0$, откуда $x = 4$, $y = -\dfrac{1}{2}$.

Значит, $7y - 13x = 7 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 13 \cdot 4 = -55{,}5$.

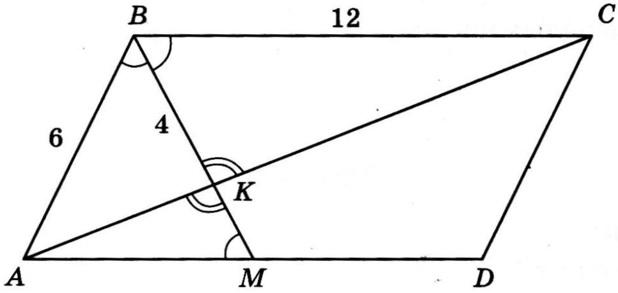
4. 45 и 55 рыб.

Решение.

Количество рыб, пойманных первым рыбаком, кратно 9, а вторым — 11. Тогда получим $9x + 11y = 100$, где $x \geq 0$, $y \geq 0$. Но $11y = 100 - 9x$, т. е. $0 \leq y < \frac{100}{11}$, откуда $y = 0, 1, 2, ..., 9$. Подходит лишь значение $y = 5$, тогда $9x + 55 = 100$, откуда $x = 5$.

Значит, первый рыбак поймал $5 \cdot 9 = 45$ рыб, а второй — $5 \cdot 11 = 55$ рыб.

5. *Решение.*



По условию BM — биссектриса $\angle ABC$, значит, $\angle ABM = \angle CBM$. Но $\angle AMB = \angle MBC$ — как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BM. Выходит, что ΔABM — равнобедренный, тогда $AM = AB = 6$.

Заметим, что $\Delta AKM \sim \Delta BKC$ (по двум углам), где $\angle BKC = \angle AKM$ — как вертикальные. Следовательно, $AM : BC = KM : BK = 1 : 2$. Но $BK = 4$ (по условию), тогда $KM = 2$ и $BM = 4 + 2 = 6$.

Вариант 30

1. $x \in \left[-\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1 +\infty)$.

Указание.

Учесть, что $x \neq 1$ и $3x + 2 \geq 0$.

2. *Решение.*

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 5$, $x_1x_2 = 3$.

Тогда $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^3}=$

$=\frac{5^3-3\cdot 3\cdot 5}{3^3}=\frac{125-45}{27}=\frac{80}{27}$.

3. *Указание.*

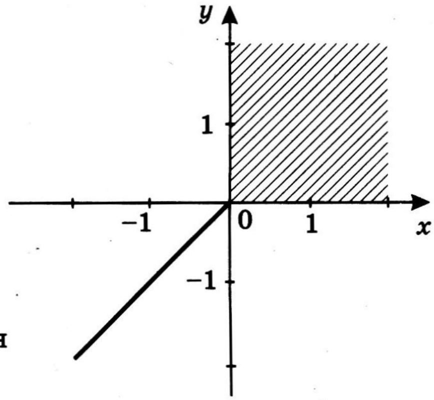
Рассмотреть всевозможные случаи:

1) $x \geq 0$, $y < 0$;

2) $x < 0$, $y < 0$;

3) $x > 0$, $y < 0$;

4) $x < 0$, $y > 0$.



4. 15 и 21.

Указание.

Задача сводится к решению уравнения $5x + 7y = 36$ в целых числах.

5. $\frac{144}{13}$.

Вариант 31

1. *Указание.*

Ввести замену $x^2 + x = y$.

2. *Указание.*

$75 - 12\sqrt{21} = (2\sqrt{7} - 2\sqrt{3})^2$.

3. *Ответ*: да, например, $x^2 + 46x + 23 = 0$, где $D = 2024$.

4. *Решение.*

Пусть x руб. — первоначальная цена ботинок. После снижения ее цена составила $0,85x$ руб., а после повышения она уже составила $0,85x \cdot 1,15 = 0,9775x$. Новая цена ботинок 1955 руб., значит, $0,9775x = 1955$, откуда $x = 2000$, т. е. первоначальная цена ботинок 2000 руб.

5. Нет.

Вариант 32

1. $x = 1$.

2. $(-10; -0,8)$.

3. 7, 7, 7, 7.

4. 100 кг, 40 кг.

5. $80°$.

Вариант 33

1. *Решение.*

I способ

Из условия следует, что $x \neq y$, тогда, разделив обе части I уравнения на II, получим $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=\frac{8}{5}$, или $5(x+y)^2 = 8(x^2+y^2)$, или

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) также можно решить различными способами:

1) рассматриваем как квадратное относительно x или y;

2) делим обе части на $x^2 \neq 0$ (или $y^2 \neq 0$);

3) разлагаем левую часть на множители способом группировки.

Разделим обе части (1) на $y^2 \neq 0$ (или $x^2 \neq 0$).

$3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+3=0$ — квадратное уравнение относительно $\frac{x}{y}$;

$\frac{D}{4} = 4^2 > 0$, $\frac{x}{y}=\frac{5\pm4}{3}$, откуда $\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$, $\frac{x}{y}=3$.

Получим 2 системы уравнений:

1) $\begin{cases}(x^2+y^2)(x-y)=20,\\ y=3x,\end{cases}$ откуда находим $x = -1$, $y = -3$;

2) $\begin{cases}(x^2+y^2)(x-y)=20,\\ x=3y;\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\ y=1.\end{cases}$

II способ

Уравнение (1) представим в виде

$(3x - y)(x - 3y) = 0$, откуда $y = 3x$, $x = 3y$ и т. д.

III способ

Запишем исходную систему в виде

$\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2)=32,\\ (x^2+y^2)(x-y)=20;\end{cases}$ $\begin{cases}x^3+x^2y-xy^2-y^3=32,\\ x^3+xy^2-x^2y-y^3=20.\end{cases}$

Складывая и вычитая уравнения системы, имеем

$\begin{cases}x^3-y^3=26,\\ x^2y-xy^2=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x^3-y^3=26,\\ 3x^2y-3xy^2=18.\end{cases}$

Вычтем из I уравнения полученной системы II:

$(x - y)^3 = 8$, $x - y = 2$, тогда

$\begin{cases}x-y=2,\\ xy(x-y)=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=2,\\ xy=3,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x=3,\\ y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\ y=-3.\end{cases}$

IV способ

$\begin{cases}(x+y)^2(x-y)=32,\\(x^2+y^2)(x-y)=20;\end{cases}$ $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=\dfrac{8}{5}$, или $1+\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{8}{5}$, или $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5}$,

или $\dfrac{x^2+y^2}{2xy}=\dfrac{5}{3}$, или $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3}$. Так как $\dfrac{10}{3}=3+\dfrac{1}{3}$, то $\dfrac{x}{y}=3$ и т. д. (см. I способ).

V способ

Пусть $y = tx$, тогда имеем:

$\begin{cases}(x+tx)(x^2-t^2x^2)=32,\\(x^2+t^2x^2)(x-tx)=20;\end{cases}$ $\dfrac{x^3(1+t)(1-t^2)}{x^3(1+t^2)(1-t)}=\dfrac{8}{5}$, или $\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2}=\dfrac{8}{5}$ и т. д.

Итак, $(-1; -3)$, $(3; 1)$ — решение исходной системы уравнений.

2. $\left[\dfrac{1}{2}; 3\right]$.

3. 1, при $x = -1$.

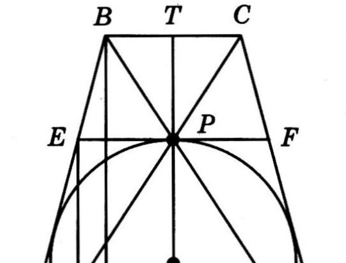
Указание.

Записать многочлен в виде $(x + 1)^3 + (x + 1)^2 + (x + 1) + 1$.

4. *Решение.*

Пусть было x галок и y палок, тогда согласно условию задачи имеем $5y + 1 = x$ и $6(y - 1) = x$. Следовательно, $5y + 1 = 6(y - 1)$, откуда $y = x$, значит, $x = 5 \cdot 7 + 1 = 36$, т. е. было 36 галок и 7 палок.

5. *Решение.*



Через точку P пересечения диагоналей AC и BD проведем $EF \parallel BC$. Известно, что $EP = PF$ ($ABCD$ — равнобедренная трапеция). Пусть $EP = PF = x$.

Из подобия ΔBEP и ΔABD, ΔDPF и ΔBCD (по двум углам) получим $\dfrac{EP}{AD}=\dfrac{BP}{BD}$;

$\dfrac{PF}{BC}=\dfrac{DP}{BD}$, или $\dfrac{x}{8}+\dfrac{x}{1}=\dfrac{BP}{BD}+\dfrac{DP}{BD}$, откуда

$x=\dfrac{8}{9}$.

В трапеции $AEFD$ по свойству касательных, проведенных из точки к окружности, имеем $AE = 4 + \dfrac{8}{9}=\dfrac{44}{9}$. Так как $PK = EM$ — как высоты трапеции $AEFD$, то $AM = 4 - \dfrac{8}{9}=\dfrac{28}{9}$.

Из ΔAEM по теореме Пифагора имеем

$$EM = \sqrt{AE^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{44}{9}\right)^2 - \left(\frac{28}{9}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{44}{9} - \frac{28}{9}\right)\left(\frac{44}{9} + \frac{28}{9}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9} \cdot 8} = \frac{4}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3},\ r_1 = \frac{1}{2}PK = \frac{1}{2}EM = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Аналогично, найдя высоту трапеции $BEFC$, имеем $r_2 = \dfrac{2}{3}$.

Итак, $r_1 = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, $r_2 = \dfrac{2}{3}$.

Вариант 34

1. *Указание.*

Сложить данные уравнения, а затем ввести замену $\sqrt{x+y} = t$, где $t \geq 0$ и т. д.

2. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

3. *Решение.*
$n^3 + 3n^2 - 4 = n(n^2 + 4n + 4) - (n^2 + 4n + 4) = (n-1)(n+2)^2$.
Отсюда видно, что полученное выражение делится на 19, если $n - 1$, или $n + 2$ делится на 19. Таким числом является число вида $19^2 \cdot 16 = 5776$.

4. Такой треугольник не существует.

5. 8 : 3.

Вариант 35

1. $x_1 = 1$; $x_2 = 4$.
Указание.

Замена $\sqrt{x^3} = y$.

2. $(-\infty; 2)$.
Указание.
Решить неравенство на промежутках:
1) $x < -1$; 2) $-1 \leq x < 2$; 3) $x > 2$.

3. *Решение.*
Из условия следует, что искомый квадратный трехчлен имеет вид

$$y = a(x+1)^2 + b. \qquad (1)$$

Так как график проходит через точки A и B, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} a(-2+1)^2+b=2, \\ a(2+1)^2+b=26; \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=2, \\ 9a+b=26. \end{cases} \qquad (2)$$

Вычитая из второго уравнения системы (2) первое, получим $8a = 24$, $a = 3$, тогда $b = -1$.

Следовательно, при $a = 3$ и $b = -1$ искомый квадратный трехчлен (1) примет вид $y = 3(x + 1)^2 - 1$.

4. *Решение.*

Шашка может переместиться на одну клетку одним способом, на две — двумя, на три — $1 + 2 = 3$, на четыре — $2 + 3 = 5$ способами и т. д. На десятую клетку она может переместиться 89 различными способами.

5. *Решение.*

Пусть a, b — длины катетов, c — длина гипотенузы.

Поскольку $c > a$, $c > b$, то $ca^2 > aa^2$ и $cb^2 > bb^2$.

Складывая почленно, имеем $ca^2 + cb^2 > aa^2 + bb^2$, или

$c(a^2 + b^2) > a^3 + b^3$. Но $a^2 + b^2 = c^2$, тогда $c^3 > a^3 + b^3$, ч. т. д.

Вариант 36

1. $x = -4$.

2. $(-9; 25)$, $(5; 4)$.

3. *Решение.*

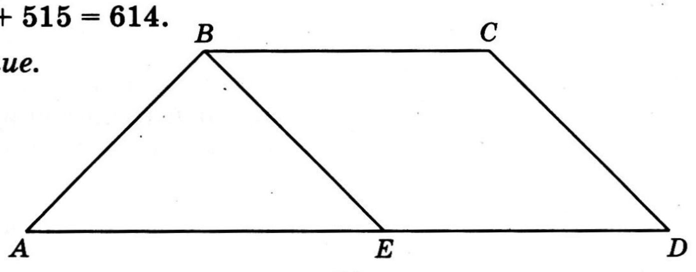
Пусть X и Y — данные натуральные числа. Пусть $Y < X$, тогда большее число $X = 10Y + k$, где k — зачеркнутая цифра, причем $0 \le k \le 9$.

Согласно условию задачи имеем $X + Y = 10Y + k + Y = 11Y + k$. Кроме того, $X + Y = 2024$, тогда $11Y + k = 2024$, следовательно, k — остаток от деления 2024 на 11, т. е. $k = 0$. Тогда $11Y = 2024$, откуда $Y = 184$ и $X = 1840$.

4. *Решение.*

Однозначных чисел использовано 9, двузначных 90 по две цифры. Так как все трехзначные числа содержат $900 \cdot 3 = 2700$ цифр, а у нас неиспользованных осталось $1734 - 189 = 1545$ цифр, то эти 1545 цифр принадлежат трехзначным числам, которых $1545 : 3 = 515$. Итого страниц $9 + 90 + 515 = 614$.

5. *Решение.*



Пусть в трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$. По условию задачи $\angle A + \angle D = 90°$. Проведем $BE \parallel CD$, тогда $\angle ABE = 90°$ (доказать) и $AE^2 = AB^2 + BE^2 = AB^2 + CD^2$. Поскольку $AE = AD - ED = AD - BC$, то $(AD - BC)^2 = AB^2 + CD^2$, ч. т. д.

Вариант 37

1. (5; 12; 1), (4; 6; 2), (3; 4; 3), (2; 3; 4).
Указание.

Записать уравнение в виде $\dfrac{z}{1+yz} = \dfrac{60-x}{13}$, где $y > 0$, $z > 0$, $1 + yz \neq 0$,

тогда $\begin{cases} 1+yz=13, \\ z=6-x; \end{cases}$ $\begin{cases} y=\dfrac{12}{z}, \\ z=6-x, \end{cases}$ где $0 < z \leq 6$, $0 < x \leq 6$.

2. (4; 3), (–3; 4).
Указание.
Записать II уравнение в виде $(x^3 - y^3) - xy(x - y) = 25$, где $x + y \neq 0$. Далее применить формулу $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = 37$ и учесть I уравнение системы.

3. *Указание.*
$A = 9^{n+1} - 2^{n+1} = (9 - 2)(9^n + 9^{n-1} \cdot 2 + \ldots + 2^n)$.

4. *Решение.*
Искомое число есть общий делитель чисел 24 850 – 154 = 24 696 и 55 300 – 175 = 55 125.
Заметим, что $24\,696 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^3$ и $55\,125 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$. Значит, общие делители есть 3, 7, 9, 21, 49, 63, 147, 441. Поскольку делитель должен быть больше остатка, то условию задачи удовлетворяет лишь число 441. Итак, на каждый стеллаж ставили по 441 книге.

5. 58,8.

Вариант 38

1. *Указание.*
Записать уравнение в виде $(x^2 + 3)^2 = 6(x - 1)^2$, откуда
$x^2 + 3 = \pm\sqrt{6}(x-1)$ и т. д.

2. (3; 1), (1; 3), (1; –3), $(-2; \pm\sqrt{5})$, $(-2; \mp\sqrt{5})$.

Указание.
Записать I уравнение в виде $(x + y)^2 + (xy - 1)^2 = 20$. Далее замена $x + y = a$, $xy - 1 = b$.

3. *Указание.*

$a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c) = a(a^2 - 1) + b(b^2 - 1) + c(c^2 - 1) =$
$= (a - 1)a(a + 1) + (b - 1)b(b + 1) + (c - 1)c(c + 1).$

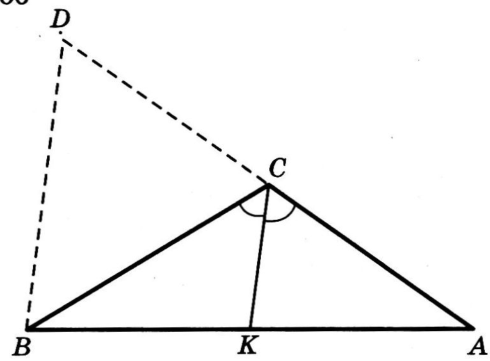
Далее учесть, что произведение трех последовательных чисел делится на 6 и т. д.

4. *Решение.*

За 1 ч = 60 мин ручные часы «отсчитывают» 55 мин. Им надо «отсчитать» 5,5 ч. Это они сделают за 6 ч ($5{,}5 \cdot 60 : 55 = 6$). Значит, 1 ч дня они покажут через 0,5 ч, или 30 мин, так как $6 - 5{,}5 = 0{,}5$ (ч) = 30 мин.

5. *Решение.*

I способ



Проведем через вершину B прямую $BD \parallel CK$. Заметим, что ΔBCD — равносторонний (доказать). Из подобия ΔACK и ΔADB (по двум углам) имеем

$$\frac{BD}{CK} = \frac{AD}{AC} = \frac{AC + CD}{AC} = 1 + \frac{CD}{AC}.$$

Разделив обе части на $BD = CD = BC$, получим требуемое.

II способ

Поскольку $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACK} + S_{\Delta BCK}$, то получим $\frac{1}{2}AC \cdot BC \sin 120° = \frac{1}{2}AC \cdot CK \sin 60° + \frac{1}{2}CK \cdot BC \sin 60°$, где $\sin 120° = \sin 60°$, тогда $AC \cdot BC = AC \cdot CK + CK \cdot BC$.

Разделив обе части на $AC \cdot BC \cdot CK \neq 0$, получим $\frac{1}{CK} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}$, ч. т. д.

Вариант 39

1. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$.

Указание.

Записать уравнение в виде $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$.

2. -7; 3; 5; 15.

Указание.

Записать дробь в виде $\frac{x + 7}{x - 4} = 1 + \frac{11}{x - 4}$.

3. *Решение.* Поскольку 8 % $= \frac{2}{25}$, то число рабочих в цехе должно быть кратно 25. По условию треть рабочих — женщины, значит, число рабочих кратно 3. Таким числом, не превышающим 100, является $25 \cdot 3 = 75$, т. е. число рабочих — 75, женщин будет $75 : 3 = 25$, а с сокращенным рабочим днем — 6 ($75 : 25 = 3$; $3 \cdot 2 = 6$, или $75 \cdot 0{,}08 = 6$).

4. 47.

5. $AD = 6$, $BC = 2$.

Указание.

Предварительно доказать, что если в трапеции сумма углов при основании равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.

Вариант 40

1. *Решение.*

Так как p — корень уравнения, то $p^2 - 7p + 7 = 0$, тогда $p^4 - 245p + 281 = (p^2 - 7p + 7)(p^2 + 7p + 42) - 13 = 0 - 13 = -13$.

2. При $a_{1,2} = \pm 8$, $b_1 = 18$; $b_2 = 14$.

Указание.

Так как многочлен 4-й степени может быть квадратом только квадратного многочлена, то имеем $x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1 = (mx^2 + nx + p)^2$.

Далее раскрыть скобки и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x.

3. $(x^2 + a^2)(x^2 - 4ax + 5a^2)$.

4. *Решение.*

После того как туристы прошли 1 км, половина оставшегося пути составляет треть всего пути и 1 км, а значит, весь оставшийся путь составляет $\frac{2}{3}$ всего пути и 2 км.

Таким образом, весь путь составляет $\frac{2}{3}$ всего пути и $2 + 1 = 3$ км, а это значит, что 3 км составляет $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ всего пути. Тогда весь путь равен $3 \cdot 3 = 9$ км.

5. 0,8.

Вариант 41

1. $(x + 2y + 3)(2x - 3y + 4)$.

Указание.

Представить данное выражение в виде $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2)$. Далее перемножить эти многочлены, а затем сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x и y.

2. *Решение.*

$24^{17} < 25^{17} = 5^{34}$; $126^{12} > 125^{12} = 5^{36}$. Значит, $24^{17} < 126^{12}$.

3. *Решение.*

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Пусть $x_1 = x_2^3$, тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 \cdot x_2 = 2a^3, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2^3 + x_2 = 10, \\ x_2^4 = 2a^3. \end{cases} \qquad (1)$$

Заметим, что $x_2 = 2$ — корень I уравнения системы (1), тогда $(x_2 - 2)(x_2^2 + x_2 + 5) = 0$, откуда $x_2 = 2$ — единственный корень, так как уравнение $x_2^2 + x_2 + 5$ не имеет действительных корней ($D < 0$).

Если $x_2 = 2$, то из II уравнения системы (1) находим $2a^3 = 2^4$, откуда $a = 2$.

4. *Решение.*

Пусть было x верных ответов, тогда неверных — $(30 - x)$. Получим уравнение $6x - 10 \cdot (30 - x) = 68$, откуда $x = 23$. Значит, участник дал 23 верных ответа.

5. 26.

Указание.

Показать, что ΔAMC — равнобедренный, где $AM = MC$ и $\Delta AMN = \Delta MNC$ (по двум катетам), где ON — радиус окружности, описанной около ΔAMN, N — середина AC.

Вариант 42

1. $x_1 = -2$; $x_2 = 6$; $x_{3,\,4} = 3 \pm \sqrt{21}$.

2. *Указание.*

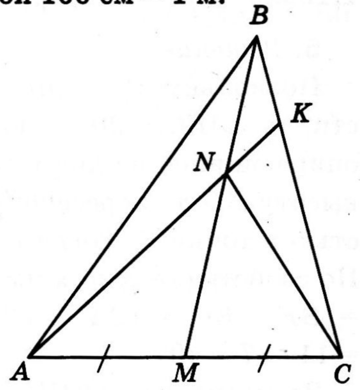
Использовать неравенство $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

3. 2.

4. *Решение.*

Пусть отрезков по 7 см было x, а по 12 см — y, тогда получим $7x + 12y = 100$, откуда $x = \dfrac{100-12y}{7}$. Так как $x, y \in N$, то x будет натуральным лишь при $y = 6$, тогда $x = 4$, т. е. из данных отрезков можно единственным образом составить отрезок длиной 100 см = 1 м.

5. *Решение.*



Известно, что медиана треугольника делит его на 2 равновеликих (равных по площади) треугольника, т. е.

$S_{\Delta ABM} = S_{\Delta BMC} = \dfrac{1}{2} S_{\Delta ABC}$.

По условию задачи $\dfrac{BN}{NM} = \dfrac{3}{7} = \dfrac{S_{\Delta ABN}}{S_{\Delta AMN}}$,

следовательно,

$$S_{\Delta ABN} = \frac{3}{7} S_{\Delta AMN}. \qquad (1)$$

$S_{\Delta ABM} = S_{\Delta ABN} + S_{\Delta AMN} = \dfrac{3}{7} S_{\Delta AMN} + S_{\Delta AMN} = \dfrac{10}{7} S_{\Delta AMN}$.

Заметим, что $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ABM} = \dfrac{20}{7} S_{\Delta AMN}$. (2)

Учитывая соотношения (1) и (2), находим

$\dfrac{S_{\Delta ABN}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{3}{7} S_{\Delta AMN} : \dfrac{20}{7} S_{\Delta AMN} = \dfrac{3}{20} = 0{,}15.$

Вариант 43

1. $\left(\sqrt{2}x - \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\sqrt{\dfrac{23}{8}}\right)^2$.

2. $\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$.

3. При $x = -3$.

Указание.

Записать многочлен в виде

$$(19x + 99)^2 + (19x + 15)^2 = 2 \cdot 19^2x^2 + 2 \cdot 19 \cdot 114x + (99^2 + 15^2).$$

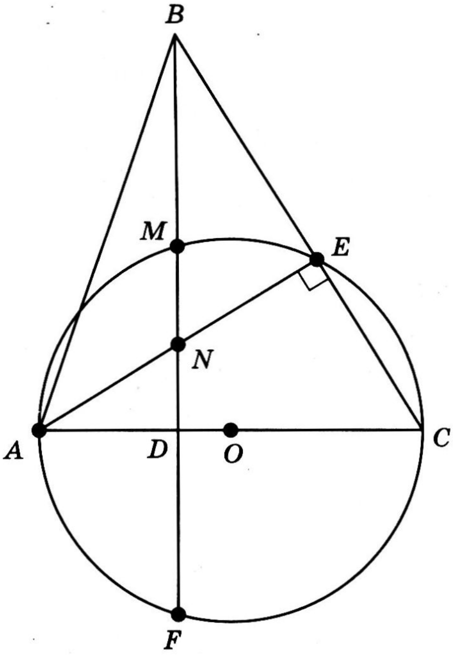
Далее применить формулу $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, где x_0 — абсцисса вершины параболы.

4. *Решение.*

Пусть длина участка x, ширина — y, тогда xy — площадь участка. После увеличения длины на 30 % она стала равна $1{,}3x$, а после уменьшения ширина стала равна $0{,}85y$, а площадь участка стала равна $1{,}3x \cdot 0{,}85y = 1{,}105xy$. Значит, площадь увеличилась на $1{,}105xy - xy = 0{,}105xy$, что составляет 10,5 %.

5. *Решение.*

Поскольку AC — диаметр окружности, то $\angle AEC = 90°$ — как вписанный, опирающийся на диаметр. Продолжим высоту BD до пересечения с окружностью в точке F. Тогда $MD = DF = 13$. По свойству секущих имеем $BM \cdot BF = BE \cdot BC = (24 - 13)(24 + 13) = 11 \cdot 37 = 407$.



Заметим, что $\Delta BEN \sim \Delta BDC$ — как прямоугольные, имеющие общий $\angle CBD$, тогда $\dfrac{BE}{BD} = \dfrac{BN}{BC}$, откуда

$$BN = \frac{BE \cdot BC}{BD} = \frac{407}{24}.$$

Вариант 44

1. $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

2. *Указание.*

$(x^2 - x)^2 + (7x^2 - x + 13) > 0$ и т. д.

3. 35.

4. *Решение.*

Наименьшее число домов будет в том случае, если наибольший возможный процент домов, имеющих не больше пяти этажей, составляет наименьшее число домов. Это возможно, если 5 %, т. е. 1/20 часть, составляет один дом. Тогда всех домов будет $1 \cdot 20 = 20$.

5. *Указание.*

Умножить обе части равенства на 2 и выделить полные квадраты.

Вариант 45

1. *Указание.*

Учесть, что $a^{2n} - 1$ делится на $a^2 - 1$.

2. *Решение.*

Пусть $x+\dfrac{1}{x}=t$, тогда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$. Обозначив данное выражение через A, получим $A = (t^2 - 2)^2 - 4t^2 + 12 = (t^2 - 4)^2$, тогда $\sqrt{A} = |t^2 - 4| =$
$=\left|\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-4\right|=\left|\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\right| = \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$.

3. *Решение.*

Пусть $\dfrac{n^2-25}{13n+11}=k$, где $k \in N$. Тогда $n^2 -25 = k(13n + 11)$, или
$n^2 - 13kn - (11k + 25) = 0$.

Решая полученное квадратное уравнение, получим

$$n = \frac{1}{2}(13k \pm \sqrt{169k^2+44k+100}.$$

Заметим, что $(13k + 1)^2 < 169k^2 + 44k + 100 < (13k + 3)^2$. Значит, дискриминант $D = (13k + 2)^2$, тогда $n = \dfrac{1}{2}(13k\pm(13k + 2))$, откуда $n = (26k + 2) = 13k + 1$ (второе значение n не удовлетворяет условию задачи).

Искомое значение n найдем из того, что должно выполняться условие $(13k + 2)^2 = 169k^2 + 44k + 100$, откуда находим $k = 12$.

Следовательно, $n = 13 \cdot 12 + 1 = 157$.

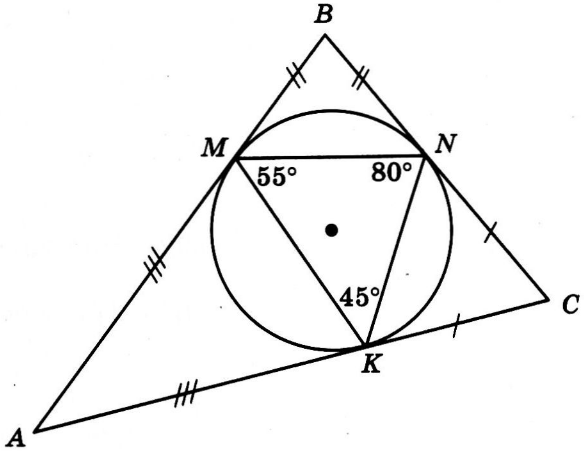
4. *Решение.*

Если свежих грибов было x кг, то сухой массы в них $0{,}1x$ кг. После подсушивания сухой массы стало 40 %, а воды — 60 %. Значит, при влажности 60 % грибов стало $0{,}1x \cdot 100\ \% : 40\ \% = \dfrac{1}{4}x$ (кг), а испарилось $\dfrac{3}{4}x$ кг, что составляет 15 кг. Значит, $\dfrac{3}{4}x=15$, откуда $x = 20$ (кг).

5. *Решение.*

По свойству касательных, проведенных из точки, взятой вне окружности, имеем $BM = BN$, $AM = AK$ и $CN = CK$. Значит, ΔBMN, ΔAMK и ΔCKN — равнобедренные.

$\angle MKN = \dfrac{1}{2}\cup MN$, а $\angle BMK$ образован хордой и касательной, значит, он равен половине величины дуги, которую заключает, т. е. $\angle MKN =$



$= \angle BMN = \angle BNM = 45° \Rightarrow \angle ABC = 90°$. Аналогично из ΔAMK и ΔCKN находим $\angle BAC = 180° - (80° + 80°) = 20°$ и $\angle ACB = 70°$.

Вариант 46

1. Оканчивается нулем.

Указание.

Показать, что число 11^{11} оканчивается цифрой 1, число 12^{12} — цифрой 6, 13^{13} — цифрой 3.

2. Да.

3. $(-1; -19)$, $\left(\dfrac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}; 2 \pm 12\sqrt{5}\right)$, $(2; 5)$.

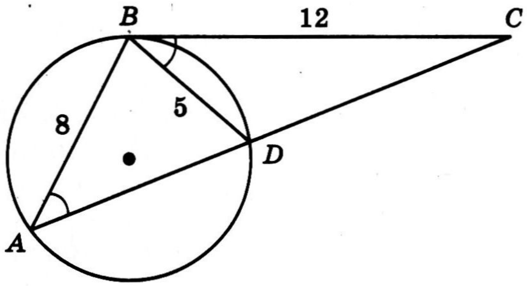
4. 37 учеников.

Указание.

Пусть в 8 «Б» классе x учеников, тогда получим уравнение

$$(x - 21) \cdot 21 = (x - 16) \cdot 16.$$

5. *Решение.*



Заметим, что $\angle CBD = \frac{1}{2}\cup BD$ и $\angle BAD = \frac{1}{2}\cup BD$ (как вписанный угол).

Значит, $\angle CBD = \angle BAD$. Выходит, что $\Delta BAD \sim \Delta ABC$ по двум углам ($\angle C$ — общий).

Тогда $\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{CD}=\frac{AC}{BC}=\frac{8}{5}$, $CD = \frac{5}{8}BC = \frac{5}{8} \cdot 12 = 7{,}5$; $AC = \frac{8}{5}BC = $

$= \frac{8}{5} \cdot 12 = 19{,}2$.

Следовательно, $AD = AC - CD = 19{,}2 - 7{,}5 = 11{,}7$.

Вариант 47

1. *Решение.*

Заметим, что $x = 1$ не является корнем уравнения, тогда, умножив обе части уравнения на $(x-1)^2 \neq 0$, получим

$(x-1)(x+1)((x-1)(x^3+x^2+x+1)) = ((x-1)(x^2+x+1))^2$, или

$(x^2-1)(x^4-1) = (x^3-1)^2$, или $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$, или $x^2(x-1)^2 = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_1 = 1$ (не подходит). Итак, $x = 0$ — корень исходного уравнения.

2. 3,5.

3. При $a = 5$.

Указание.

Выразить из каждого уравнения параметр a через x, а затем сравнить правые части полученных выражений.

4. *Решение.*

Пусть Грише и Мише по x лет, тогда Оксане $(2x-3)$ лет. Оксане было x лет $(x-3)$ года тому назад $(2x-3-x = x-3)$. Но столько лет тому назад Грише было $(x-(x-3)) = 3$ года.

5. *Указание.* Учесть, что в правильном треугольнике точка O является центром вписанной и описанной окружностей.

Вариант 48

1. $x(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

2. При $a \in \left(-\frac{11}{18}; -\frac{1}{3}\right)$.

Указание.

Рассмотреть функцию $y = x^2 - 3(a-1)x + 3a + 1$.

Условие задачи выполняется, если

$$\begin{cases} y(0)<0, \\ y(5)>0, \\ y(-5)>0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3a+1<0, \\ 25-15(a-1)+3a+1>0, \\ 25+15(a-1)+3a+1>0, \end{cases}$$

откуда находим $-\dfrac{11}{18}<a<-\dfrac{1}{3}$.

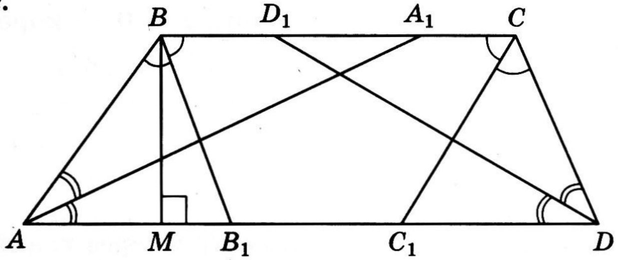
3. *Указание.*

Преобразовать делитель $(ax + by) + (bx + ay)$.

4. *Решение.*

Пусть выполнено верно x заданий, а неверно или не выполнено y заданий. Тогда получим уравнение $9x - 5y = 57$, откуда $x = \dfrac{1}{9}(57 + 5y)$. Поскольку $x \in N$, то $(57 + 5y)$ кратно 9. Наименьшее значение $y = 3$, при этом $x = 8$. Так как $8 + 3 = 11$ и $11 < 15$, то найденное значение x удовлетворяет условию.

5. *Решение.*



Пусть AD — большее основание трапеции $ABCD$. AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 — биссектрисы ее внутренних углов. По условию $AB_1 = B_1C_1 = C_1D$ и $BD_1 = D_1A_1 = A_1C$ (это единственный возможный случай выполнения условия).

Пусть $BC = 3x$. Так как AA_1 и BB_1 — биссектрисы соответствующих углов A и B, то $BA_1 = AB = AB_1$ ($\angle BA_1A = \angle A_1AD = \angle BAA_1$; $\angle ABB_1 = \angle B_1BC = \angle BB_1A$). Значит, $AB = 2x$, $AD = 6x$ и трапеция — равнобедренная. Проведем высоту BM, тогда $AM = \dfrac{6x-3x}{2} = \dfrac{3x}{2}$.

Из ΔABM $AB^2 - AM^2 = BM^2$, или $4x^2 - \dfrac{9x^2}{4} = 1$, или $7x^2 = 4$,

откуда $x = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Следовательно, $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AD + BC) \cdot MB = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{12}{\sqrt{7}} + \dfrac{6}{\sqrt{7}}\right) \cdot 1 = \dfrac{9}{\sqrt{7}}$.

Вариант 49

1. *Решение.*
$1 - |x| \neq 0$, т. е. $x \neq \pm 1$. Тогда $1 - |x| = 3$, или $|x| = -2$ — нет корней.

2. *Указание.*
Положить $x^2 + x + 1 = y$.

3. $1{,}5(3\sqrt{2} - 4)(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$.

4. *Решение.*
Если мотоциклов с коляской x, то без коляски $2x$. Пусть автомобилей было y, тогда всего колес $3x + 2x \cdot 2 + 4y = 7x + 4y$. По условию $7x + 4y = 115$, откуда $y = \dfrac{115 - 7x}{4}$. При $x = 1$, $y = 27$ — наибольшее число автомобилей.

5. 48.
Указание.
$S = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей, φ — угол между ними.

Вариант 50

1. *Решение.*
$n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 = 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$ — делится на 3.

2. (2; 1), (1; 2).

3. *Указание.*
Решить уравнение $(x + 2)(x + 3) = (a + 2)(a + 3)$, откуда $x_1 = a$, $x_2 = -a - 5$.

4. *Решение.*
Пусть в прошлом году Коле было x лет, тогда Вике — $2x$ и Вове — $3{,}5x$. Сейчас Коле $(x + 1)$ лет, Вике — $(2x + 1)$ лет, Вове — $(3{,}5x + 1)$. Вова станет вдвое старше через $(3{,}5x + 1)$ лет, тогда Коле будет $(4{,}5x + 2)$ лет, так как $(x + 1) + (3{,}5x + 1) = 4{,}5x + 2$, а Вике — $(2x + 1) + (3{,}5x + 1) = 5{,}5x + 2$. По условию имеем $(5{,}5x + 2) - (4{,}5x + 2) = 4$, откуда $x = 3$. Значит, Коле сейчас 5, Вике — 9, Вове — 15 лет.

5. $4\sqrt{2}$.

Вариант 51

1. $(x-2)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

2. *Решение.*

Известно, что $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$, тогда $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} \geq \sqrt{abcd}$.

Но $\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$, значит, $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} \leq \left(\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \right)^2 = \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^2$.

Таким образом, $\sqrt{abcd} \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^2$, откуда

$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{1}{4}(a+b+c+d)$, ч. т. д.

3. $x^4-5x^2+6=0$.

4. *Решение.*

Пусть Андрею сейчас x лет, тогда его отцу $(x+32)$ года, а дедушке — $(x+64)$ года. Три года назад им соответственно было $(x-3)$, $(x+29)$ и $(x+61)$ лет. Согласно условию $(x-3)+(x+29)+(x+61)<100$, или $3x<13$, откуда $x<4\frac{1}{3}$. Поскольку $x-3>0$, т. е. $x>3$, то $x=4$. Значит, Андрею 4 года, его отцу 36 лет и дедушке 68 лет.

5. 174.

Вариант 52

1. *Решение.*

Заметим, что $820\,125 = 3^8 \cdot 5^3$. В произведение 19! число 3 входит 8 раз (по одному разу во множители 3; 6; 12; и 15 и по два раза во множители 9 и 18), значит, 19! делится на 3^8. Аналогично 19! делится на 5^3, а это значит, что 19! делится и на произведение этих чисел.

2. $|3x^2+2x-5|$.

3. *Указание.*

Применить теорему Виета. Согласно условию $x_1^3+x_2^3=0$, или $(a^2+a-6)^3+3a^2(a^2+a-6)=0$, откуда $a^2+a-6=0$, или $(a^2+a-6)^2+3a^2=0$ — нет корней. Значит, $a_1=-3$; $a_2=2$.

4. 30 000 руб.

5. *Указание.*

Пусть x — число сторон (а значит, и вершин) многоугольника, тогда получим уравнение $\frac{1}{2}x(x-3)+x=21$, откуда находим $x=7$.

Вариант 53

1. 60°, 60°, 60°.

Указание.

Умножить обе части равенства на 2, затем выделить полные квадраты.

2. *Указание.*

$(100a+10b+c)-(a+b+c)=x^2$, или $9(11a+b)=x^2 \Rightarrow 11a+b=y^2$, где $0<a\le 9$, $0\le b\le 9$; $11\le 11a+b\le 108$.

Для y^2 возможны значения 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100. Из этих значений получим всего 70 чисел.

3. *Решение.*

Заметим, что $x^2-x+1>0$ для всех $x\in R$, так как $D<0$ и I коэффициент положителен.

Тогда получим равносильное неравенство $x^2+ax-2\ge -3(x^2-x+1)$, или $4x^2+(a-3)x+1\ge 0$.

Полученное неравенство выполняется для всех x, если $D\le 0$, т. е. при $(a-3)^2-16\le 0$, $|a-3|\le 4$, откуда $-1\le a\le 7$, тогда $a=7$ — наибольшее значение.

4. 50 минут.

Решение.

Сейчас 11.10, полтора часа назад было 9.40 — это 1 ч 40 мин, или 100 мин после восьми, т. е. в 2 раза больше, чем сейчас до полудня.

5. $AC=10$.

Вариант 54

1. −8; −7; −6; −5 или 5; 6; 7; 8.

2. $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)$.

3. При любом a, кроме $a=0$ и $a=-0{,}25$.

4. В 1,5 раза быстрее.

5. 6.

Вариант 55

1. *Решение.*

Искомое шестизначное число имеет вид $1313xy$, где x — цифра десятков, y — единиц. Кроме того, $10 \le \overline{xy} \le 99$.

Имеем $1313xy = 131\,300 + \overline{xy} = 2477 \cdot 53 + (19 + \overline{xy})$.

Отсюда видно, что $19 + \overline{xy}$ кратно 53, если $\overline{xy} = 53 - 19 = 34$, или $\overline{xy} = 2 \cdot 53 - 19 = 87$.

Итак, $x = 3$, $y = 4$, или $x = 8$, $y = 7$.

2. При $a \in (-5/6; 2)$.

3. $(2xy - y + 1)(2xy - y + 4x + 1)$.

4. *Решение.*

Пускаем одновременно песочные часы на 3 и 7 мин. Как только пересыплется песок в 3-минутных часах, бросаем яйцо в кипящую воду. Из 7-минутных часов песок будет сыпаться еще 4 мин, сколько и требуется.

5. *Указание.*

Отрезки, соединяющие середины сторон четырехугольника, параллельны диагоналям и равны ее половине (как средние линии треугольников).

Вариант 56

1. *Указание.*

Число, не делящееся на 3, имеет вид $3m + 1$ или $3m + 2$.

2. *Решение.*

Заметим, что $x^{20} + x^{10} + x^{2025} = x^2((x^3)^6 - 1) + x((x^3)^3 - 1) + ((x^3)^{675} - 1) + (x^2 + x + 1)$. Поскольку $(x^3)^n - 1$ делится на $x^3 - 1$, а значит, и на $x^2 + x + 1$, то данный многочлен делится на $x^2 + x + 1$.

3. $a^7 - 7a^5b + 14a^3b^2 - 7ab^3$.

4. *Решение.*

Встреча произошла в 1 ч 20 мин после полудня, или в 13 ч 20 мин.
На все сутки приходится 9/5 или 1,8.

Значит, $24 : 1{,}8 = 13$ ч $+ \dfrac{1}{3}$ ч $= 13$ ч 20 мин.

5. $r = 5$.

Вариант 57

1. Да.

Указание.

Разложить числитель дроби на множители и сократить дробь на $x^2 - 2x + 1$.

2. *Решение.*

Пусть $a \in N$, тогда $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1)$ делится на 6 как произведение трех последовательных натуральных чисел.

3. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

4. *Решение.*

Пусть дедушке $10x + y$ лет, тогда $10x + y = x + y^2$, или $9x = y(y - 1)$, откуда $x=\dfrac{y(y-1)}{9}$. Так как $0 < x \le 9$, $0 \le y \le 9$, то подходит значение $y = 9$, тогда $x = 8$, т. е. дедушке 89 лет.

5. $8\sqrt{3}$.

Вариант 58

1. Верно.

Указание.

Ввести замену $x = 2021$.

2. *Решение.*

Если число $x=1+\sqrt{3}$ один из корней уравнения, то получим

$$3(1+\sqrt{3})^3+a(1+\sqrt{3})^2 + b(1+\sqrt{3}) + 12 = 0.$$

После упрощений получим $(4a + b + 42)(2a + b + 18)\sqrt{3} = 0$. Заметим, что a и b — целые числа, тогда имеем

$$\begin{cases}4a+b+42=0,\\2a+b+18=0,\end{cases}$$

откуда, вычитая из I уравнения II, находим $2a + 24 = 0$, $a = -12$, тогда $b = -2a + 18 = 6$.

Итак, $a = -12$, $b = 6$.

3. *Указание.*

Записать выражение в виде $6^n(8^n - 1^n) + (13^n - 6^n)$.

Далее учесть, что разность одинаковых степеней делится на разность их оснований.

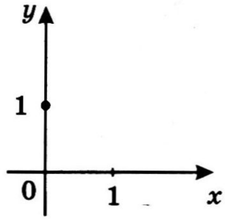
4. Через 6 часов.

5. 3 и 6.

Вариант 59

1. *Указание.*

Записать выражение в виде $6^n(8^n - 1^n) + (13^n - 6^n)$.



2. *Решение.*

$-\dfrac{|x|}{4} \geq 0 \Rightarrow x = 0$, тогда $y = 1$.

3. *Указание.*

$3 \cdot (100\,000 + x) = 10x + 1$, откуда $x = 42\,857$, а само число — $142\,857$.

4. $1936 = 44^2$; $2025 = 45^2$.

5. *Решение.*

Пусть a, b, c — стороны треугольника, $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр, x, y, z — расстояния от точки до вершин. Используя неравенства треугольника, имеем $x + y > c$, $y + z > b$, $x + z > a$.

Сложив почленно неравенства, получим $2(x + y + z) > a + b + c$, или $x + y + z > \dfrac{1}{2}p$, ч. т. д.

Вариант 60

1. $a = -5$.

2. *Решение.*

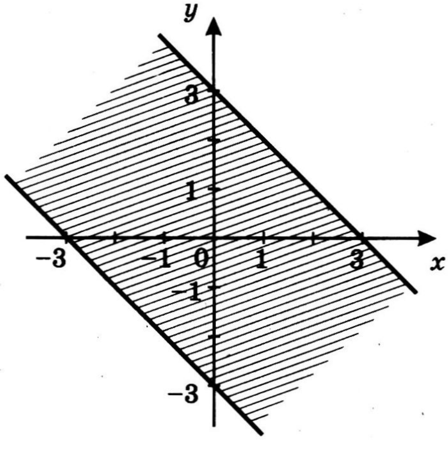
По условию $x + y = \overline{aa}$ и $x^2 + y^2 + 10 = \overline{xy}$, где $\overline{xy} = 10x + y$. Заметим, что соотношение $x + y = \overline{aa}$ выполняется лишь при $a = 1$, так как сумма двух однозначных чисел не превышает 18, а по условию сумма цифр данного числа состоит из одинаковых чисел.

Итак, $x + y = 11$ и $x^2 + y^2 + 10 = 10x + y$. Выражая y через x и подставляя во второе уравнение, получим $2x^2 - 31x + 120 = 0$, откуда $x_1 = 8$, $x_2 = 7{,}5$ (не подходит).

Если $x = 8$, то $y = 3$, тогда 83 — искомое число.

3. *Указание.*

$$\begin{cases} y \leq 3 - x, \\ y \geq -3 - x. \end{cases}$$



Искомым геометрическим местом точек является закрытая полоса, ограниченная прямыми $y = 3 - x$ и $y = -3 - x$.

4. *Указание.*

Високосный. В обычном году 1 января и 1 октября приходятся на один день недели.

5. *Указание.*

Из точки $D \in BC$ провести $DE \parallel AC$, тогда E — центр описанной около ΔADF окружности, значит, $EA = ED = EF = R$. Далее доказать, что ΔDEB и ΔAED — равнобедренные, $BD = DE = AE = FE = R = a$.

Вариант 61

1. *Указание.*

$x_1 = -2012$, $x_2 = -2032$. Учесть, что $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Далее обозначить $x + 2022 = y$.

2. *Решение.*

Очевидно, что при делении многочлена III степени на многочлен II степени получим многочлен I степени. Так как в делимом и делителе коэффициенты при старших неизвестных равны по единице, то частное будет иметь вид $x + c$, т. е. получим

$x^3 + 13x^2 + ax + b = (x^2 + x + 2024)(x + c)$, или

$x^3 + 13x^2 + ax + b = x^3 + (1 + c)x^2 + (2024 + c)x + 2024c$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим

$$\begin{cases} 1+c=13, \\ 2024+c=a, \\ 2024c=b; \end{cases} \quad \begin{cases} c=12, \\ a=2036, \\ b=24\,288. \end{cases}$$

Значит, $a = 2036$, $b = 24\,288$.

3. $\frac{x-1}{2x-1}$.

4. *Решение.*

Не могло. Так как на каждом листе есть четная и нечетная страницы (последовательные страницы), то сумма чисел на одном листе нечетна. Сумма 25 чисел также нечетна, а у Васи получилась четная. Противоречие.

5. $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1$.

Вариант 62

1. (4; 1), (1; 4).

Указание.

Ввести замену $x\sqrt{y} = u$; $y\sqrt{x} = v$, где u; $v \geq 0$.

2. $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{25}{1999}$.

Указание.

Учесть, что $1999 - 2024 + 25 = 0$.

3. *Решение.*

$(\sqrt{2024} + \sqrt{2022})^2 = 4046 + 2\sqrt{2024 \cdot 2022} =$

$= 4046 + 2\sqrt{2023^2 - 1} < 4046 + 2\sqrt{2023^2} = (2\sqrt{2023})^2$, т. е. второе число больше.

4. 13 шахматистов.

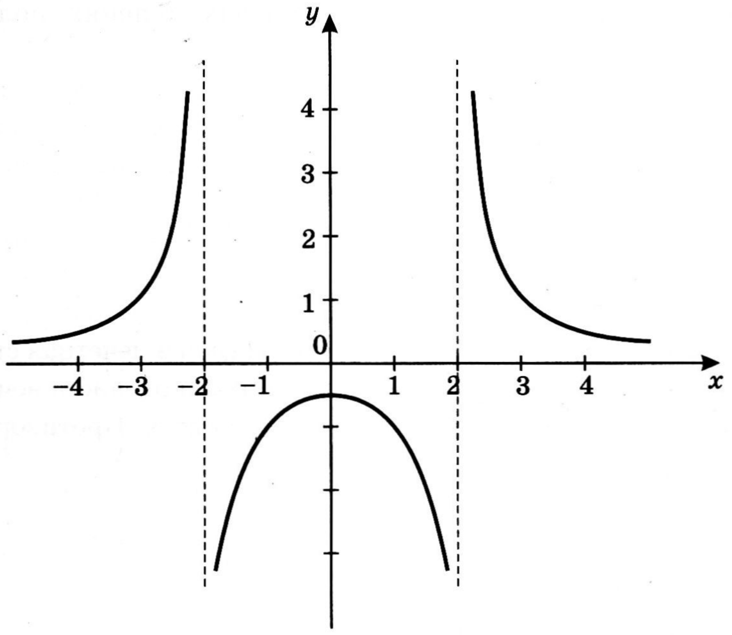
Указание.

$\dfrac{1}{2}x(x-1) = 78.$

5. $\dfrac{b(b-a)}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$, $b > a$.

Вариант 63

1. *Указание.*



Рассмотреть два случая:

1) $\begin{cases} x \ge 0,\ x \ne \pm 2, \\ y = \dfrac{1}{x-2}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 0,\ x \ne \pm 2, \\ y = -\dfrac{1}{x+2}. \end{cases}$

2. *Указание.*

Замена $x = y\sqrt{2}$ приводит к уравнению $2y^3 + y + 3 = 0$, левая часть которого разлагается на множители $(y + 1)(2y^2 - 2y + 3) = 0$, откуда $y = -1$ — единственный корень, тогда $x = -\sqrt{2}$ — корень исходного уравнения.

3. Утверждение верно.

Указание.

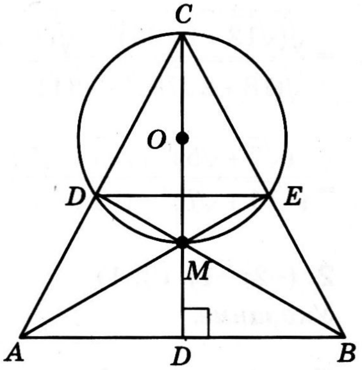
Перебрать все 19 возможных случаев.

4. 5 месяцев.

Указание.

Обычный год при этом должен начинаться с пятницы, а високосный — с четверга или пятницы.

5. *Решение.*



Так как $AE = BD$, то $AC = BC$. Но тогда и $CD = CE$, а по свойству медиан $MD = ME = \dfrac{1}{3}AE = \dfrac{1}{3}BD$. Значит, $\Delta CDM = \Delta CEM$.

Из равенства треугольников следует, что $\angle CDM = \angle CEM$. По свойству четырехугольника $CDME$, вписанного в окружность, имеем $\angle CDM + \angle CEM = 180° \Rightarrow \Rightarrow \angle CDM = \angle CEM = 90°$. Следовательно, $\Delta CDB = \Delta ABD$ (по двум катетам). Но тогда $AB = BC$, т. е. ΔABC — равносторонний. Значит, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где $a = 10$, т. е. $S_{\Delta ABC} = 25\sqrt{3}$.

Вариант 64

1. 1.

Указание.

Учесть, что $\sqrt{x^2} = |x|$.

2. $\dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 4}$.

Указание.

Ввести подстановку $x^2 + x + 1 = y$ и т. д.

3. *Указание.*

$(x-3)^3 + (x-2)^3 + \dots + (x+3)^3 = 7x(x^2+12)$.

4. *Указание.*

$5 \cdot 8 \cdot 4 = 160$ способами.

5. *Указание.*

Использовать соотношения $a_3 = R\sqrt{3}$, $a_4 = R\sqrt{2}$ и $a_6 = R$.

Вариант 65

1. *Решение.*

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2^3}$.

$$\frac{\sqrt{2^3}\left(\sqrt{(6+\sqrt{35})^3}+\sqrt{(6-\sqrt{35})^3}\right)}{\sqrt{2^3}\left(\sqrt{(9+\sqrt{77})^3}-\sqrt{(9-\sqrt{77})^3}\right)} = \frac{\sqrt{(\sqrt{12}+2\sqrt{35})^3}+\sqrt{(\sqrt{12}-2\sqrt{35})^3}}{\sqrt{(\sqrt{18}+2\sqrt{77})^3}-\sqrt{(\sqrt{18}-2\sqrt{77})^3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{12}+2\sqrt{35})^3}+\sqrt{(7-2\sqrt{35}+5)^3}}{\sqrt{(18+2\sqrt{77})^3}-\sqrt{(11-2\sqrt{77}+7)^3}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^{2\cdot 3}}+\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^{2\cdot 3}}}{\sqrt{(\sqrt{11}+\sqrt{7})^{2\cdot 3}}-\sqrt{(\sqrt{11}-\sqrt{7})^{2\cdot 3}}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^3+(\sqrt{7}-\sqrt{5})^3}{(\sqrt{11}+\sqrt{7})^3-(\sqrt{11}-\sqrt{7})^3} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$ — рациональная дробь.

2. $(-2; -1)$, $(2; 1)$.

Указание.

Преобразовать I уравнение к виду $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2 - \left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2 = \dfrac{80}{9}$ и обозначить $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2 = t$.

3. При $a = -\dfrac{15}{16}$.

Указание.

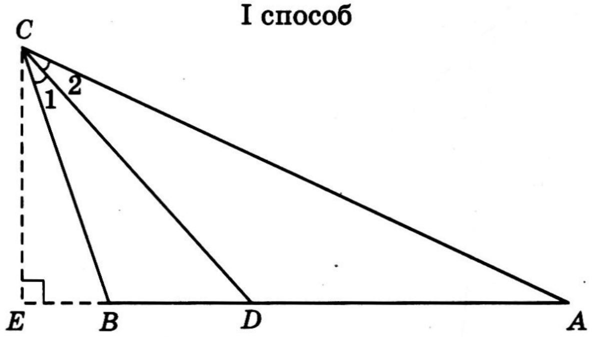
Записать первое уравнение в виде $3\left(x+y+\dfrac{a}{4}-\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}\right) = 9x^2 + y^2$, или

$\left(6x-\dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(2y-\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{45}{16} - 3a = 0$, откуда $\dfrac{45}{16} + 3a = 0$ и т. д.

4. У брата 1500 руб., у сестры — 1600 руб.

5. *Решение.*

I способ



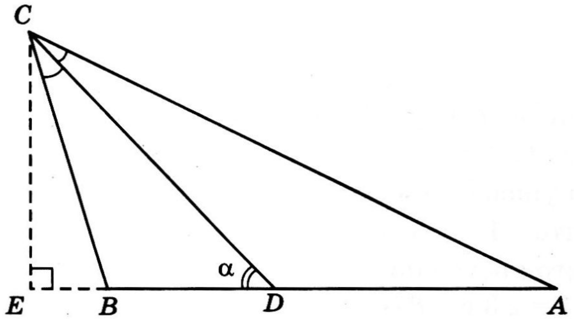
Пусть CD — биссектриса. Заметим, что CE — общая высота для ΔCBD и ΔACD, тогда

$$\frac{BD}{DA}=\frac{S_{\Delta CBD}}{S_{\Delta CDA}}. \qquad (1)$$

С другой стороны, $\angle 1 = \angle D$, тогда $\dfrac{S_{\Delta CBD}}{S_{\Delta CDA}}=\dfrac{CB\cdot CD}{CD\cdot CA}=\dfrac{CB}{CA}$. $\qquad$ **(2)**

Сравнивая (1) и (2), имеем $\dfrac{BD}{DA}=\dfrac{CB}{CA}$, ч. т. д.

II способ

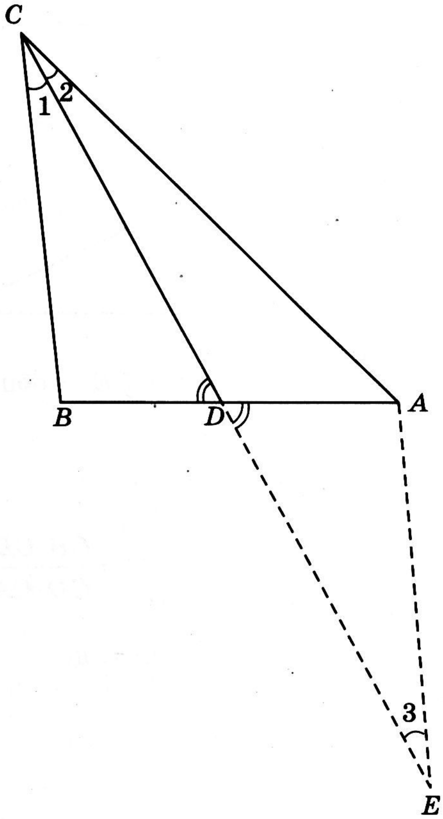


Пусть $\angle BDC = \alpha$, тогда $\angle ADC = 180° - \alpha$. Из ΔBCD по теореме синусов имеем $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{\sin\angle BCD}{\sin\alpha}$, а из ΔACD получим

$$\frac{AD}{AC}=\frac{\sin\angle ACD}{\sin(180°-\alpha)}=\frac{\sin\angle ACD}{\sin\alpha}.$$

Так как CD — биссектриса, то $\angle BCD = \angle ACD$. Значит, $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{AD}{AC}$, ч. т. д.

III способ



Продолжим биссектрису CD до пересечения в точке E с прямой $AE \parallel BC$. Тогда $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AE и секущей CE). Кроме того, $\angle 1 = \angle 2$, так как CD — биссектриса. Выходит, что $\angle 1 = \angle 3$, т. е. ΔCAE — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника) и $AE = AC$; $\Delta AED \sim \Delta BCD$ (по двум углам), так как $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle BDC = \angle ADE$ — как вертикальные. Следовательно, $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$, ч. т. д.

9 КЛАСС

Вариант 1

1. *Указание.*

Записать уравнение в виде $4x^2 - \frac{25}{9} = 4 - \frac{10}{3x}$, откуда находим $x_1 = \frac{5}{6}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = -\frac{3}{2}$.

2. $\left(-\frac{26}{5}; -\frac{13}{5}\right)$, (0; 0), (2; 3).

Указание.

Записать I уравнение в виде $(x - 2y)(3x - 2y) = 0$ и т. д.

3. *Решение.*

Если $p \neq 3$, то $14p^2 + 1$ делится на 3. И действительно, $p = 3k + 1$, или $p = 3k - 1$, тогда $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$ или $p^2 = 9k^2 - 6k + 1$, а это значит, что остаток от деления числа p^2 на 3 равен 1. Следовательно, $14p^2 + 1$ делится на 3 при любом p, не делящемся на 3, т. е. не является простым числом. Если же $p = 3$, то число $14p^2 + 1 = 127$ — простое.

4. 13.

5. $\sqrt{113 - 64\sqrt{3}} \approx 1{,}5$ см.

Вариант 2

1. $x_1 = 3$, $x_2 = 6$.

Указание.

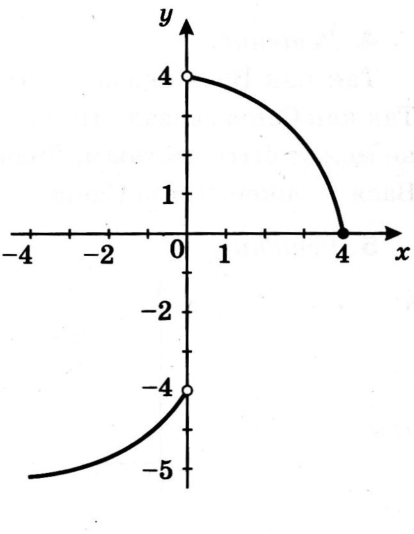
$y = \frac{1}{9}x^2 + 2$, тогда $x = \frac{1}{9}y^2 + 2$. Далее вычесть из I уравнения II.

2. $(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{4}{3}\right] \cup [6; +\infty)$.

3. *Решение.*

Рассмотреть 2 случая:

1) $\begin{cases} 0 < x \leq 4, \\ y = 2\sqrt{4 - x}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 0, \\ y = -2\sqrt{4 - x}. \end{cases}$



4. 49 000 руб.

5. $\frac{ab}{a+b}$.

Вариант 3

1. $x = 55$.

2. $2(x^2 + y^2)(x^4 + 5x^2y^2 + y^4)$.

3. *Решение.*

$13! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 13 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 11 \cdot (12 \cdot 13) = 11! \cdot 12 \cdot 13;$

$13! - 11! = 11! \cdot (12 \cdot 13 - 1) = 11! \cdot 5 \cdot 31$ — кратно 31.

4. *Решение.*

Поскольку скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой, то, обозначив через x время, пройденное часовой стрелкой, $12x$ — минутной, и учитывая, что первоначально между стрелками было ровно 15 мин, получим уравнение $12x = x + 15$, откуда $x = 1\frac{4}{11}$, тогда минутная догонит часовую через $15 + 1\frac{4}{11} = 16\frac{4}{11}$ мин.

5. $\frac{1}{4}(m^2 - p^2)$ см^2.

Вариант 4

1. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{25}$.

Указание.

$2(x - 1) = 2(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$.

2. $\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1}}$.

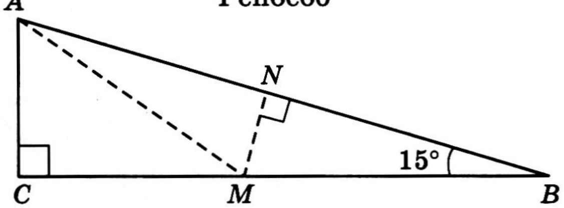
3. $x = -1$.

4. *Решение.*

Так как Вася сказал, что он хитрец, то он не может быть честным. Так как Саша сказал, что Вася абсолютно честный человек, то Саша тоже не может быть честным. Значит, правду сказал Миша. Это означает, что Вася — лжец, тогда Саша — хитрец.

5. *Решение.*

I способ



Пусть $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$. Проведем AM так, чтобы $\angle BAM = 15°$, тогда $\angle AMC = \angle MAB + \angle B = 30°$ (по свойству внешнего угла), $AM = 2AC = 2b$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

Значит, и $MB = 2b$. Построим $MN \perp AB$, тогда $\Delta MNB \sim \Delta ACB$ и $\frac{MB}{AB} = \frac{BN}{BC}$, или $\frac{2b}{c} = \frac{c}{2a}$, откуда $ab = \frac{1}{4}c^2$, и так как $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab$, то $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{8}c^2$, ч. т. д.

II способ

$a = c\cos 15°$, $b = c\sin 15°$, тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2 \sin 15° \cos 15° =$
$= \frac{1}{4}c^2(2\sin 15° \cos 15°) = \frac{1}{4}c^2 \cdot \sin 30° = \frac{1}{8}c^2$, ч. т. д.

Вариант 5

1. *Решение.*

I способ

Запишем уравнение в виде
$(x^4 + 4x^3 + 4x^2) - 2x^2 - 4x + 1 = 0$, или
$(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) \cdot 1 + 1 = 0$, или
$(x^2 + 2x - 1)^2 = 0$, $x^2 + 2x - 1 = 0$, откуда находим $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

II способ

Из условия следует, что $x \neq 0$, тогда имеем
$1 + 2x^2 + x^4 = 4x - 4x^3$, или $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$.
Разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$:
$x^2 + 4x + 2 - 4 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$, или $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$.

Пусть $x - \frac{1}{x} = y$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$.

Получим уравнение $y^2 + 2 + 4y + 2 = 0$ или $(y + 2)^2 = 0$, откуда $y = -2$. Учитывая замену $x - \frac{1}{x} = y$, получим $x - \frac{1}{x} = -2$, или $x^2 + 2x - 1 = 0$, откуда находим $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

III способ

Вычтем из обеих частей уравнения $4x^2$:
$(1 + x^2)^2 - 4x^2 = 4x(1 - x^2) - 4x^2$, или $1 - 2x^2 + x^4 = 4x(1 - x^2) - 4x^2$, или
$(1 - x^2)^2 = 4x(1 - x^2) - 4x^2$.

Полученное уравнение запишем в виде

$4x^2 - 4x(1 - x^2) + (1 - x^2)^2 = 0$, или $(2x - (1 - x^2))^2 = 0$, $x^2 + 2x - 1 = 0$ и т. д.

2. $x = 15$.

Указание.

Ввести замену $\sqrt{x} = y$, где $y \geq 0$. Далее разложить на множители числитель и знаменатель дроби.

3. *Решение.*

Если $a^2 + a + 1 = 0$, то $a + \frac{1}{a} = -1$, тогда $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = -1$;

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right) = -1 \cdot (-1) - (-1) = 2;$$

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = -1;$$

$$a^5 + \frac{1}{a^5} = -1;\ a^6 + \frac{1}{a^6} = 2;\ a^7 + \frac{1}{a^7} = -1 \text{ и т. д.}$$

Из этих соотношений видно, что для показателей степени, кратных 3, значение выражения равно 2, а в остальных случаях равно -1. Поскольку 2025 кратно 3, то значение выражения равно 2.

4. *Решение.*

Пусть длина первой части пути x км. Тогда согласно условию задачи имеем

$$v_{\text{ср.}} = \frac{S}{t} = \frac{S}{\dfrac{x}{2v_{\text{ср.}}} + \dfrac{S - x}{\frac{1}{3}v_{\text{ср.}}}} = \frac{2v_{\text{ср.}} \cdot S}{6S - 5x},$$

где $v_{\text{ср.}}$ — средняя скорость автомобиля на всем пути, t — время прохождения автомобилем всего пути.

Упростив уравнение, имеем $x = \frac{4}{5}S = \frac{4}{5} \cdot 250 = 200$ (км).

5. Существует, например, со сторонами 25; 38 и 51 ед.

Вариант 6

1. $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$.

2. $\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

3. $2(x^2 + y^2)(x^4 + 5x^2y^2 + y^4)$.

4. Через 144 сут.

5. *Указание.*
Если угол между диагоналями останется без изменения.

Вариант 7

1. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_{3,\,4} = \pm 1$.
Указание.
Ввести замену $1 + x + x^2 = y$.

2. $[-2\sqrt{2};\ 0) \cup (0;\ 2\sqrt{2}]$.

3. При $a = 1$.

4. $a_1 = 5$, $d = 2$.
Указание.
Учесть, что $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9$. Остается решить систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 + d = 7, \\ a_1 + 8d = 21. \end{cases}$$

5. *Указание.* Достроить ΔABC до параллелограмма $ABCE$. Далее применить теорему синусов. После преобразований находим

$AB = 7\sqrt{2}$ дм, $BD = \dfrac{7}{2}(1+\sqrt{3})$ дм.

Вариант 8

1. *Решение.*
Заметим, что $x \neq 0$, тогда $x + 19 = (x - 1)!$.
Пусть $x - 1 = y$, тогда $x = y + 1$ и $y + 20 = y!$. (1)
Очевидно, что $y = 4$ — корень уравнения (1). Учитывая, что $y!$ возрастает быстрее, чем $y + 20$, то при $y > 4$ уравнение (1) корней не имеет. Следовательно, $y = 4$ — единственный корень (1), тогда $x = y + 1 = 5$ — единственный корень исходного уравнения.

2. $(x + y - 1)(x^2 - xy + y^2 + x + y + 1)$.

3. *Указание.*
Учесть, что a^{2k-1} делится на $a^2 - 1$.

4. 50 кг.
Указание.
Пусть необходимо взять x кг сырых желудей. При сушке теряется $0{,}08x$, остается $x - 0{,}08x = 0{,}92x = 46$, откуда находим $x = 50$ (кг).

5. Могут, если знаменатель прогрессии $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Вариант 9

1. $x = \frac{16}{25}$.

2. При $a \in (2;\ 4)$.

3. 4567.

4. 15 %.

Указание.

Солевой раствор составляет 119 + 21 = 140 (г), в котором 21 г соли. Тогда 21 · 100 % : 140 = 15 %.

5. $\frac{1}{8}(9\sqrt{3} + 3\sqrt{15})$ см^2.

Вариант 10

1. Нет решений.

Указание.

Левая часть уравнения $x^3 - x = (x - 1)x(x + 1)$ кратна 6.

2. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Указание.

Умножить числитель и знаменатель дроби в левой части уравнения на $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-2}$.

3. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

4. *Решение.*

Пусть в комнате x табуреток и y стульев, тогда всего ног будет $3x + 2x + 4y + 2y = 5x + 6y$. Так как всего 39 ног, то получим уравнение $5x + 6y = 39$, где $x \in N$, $y \in N$. Тогда $5x = 39 - 6y \geq 5$, или $6y \leq 34$, $y \leq 5\frac{2}{3}$, т. е. $y = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$. Но $39 - 6y = 5x$ — кратно 5, тогда $y = 4$, $x = 3$, т. е. в комнате 3 табуретки и 4 стула.

5. $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$.

Вариант 11

1. *Указание.*

Ввести замену $\sqrt{x-2}=y$.

2. *Решение.*

Возведем обе части неравенства в куб:

$$1+x<1+3\cdot\frac{x}{3}+3\cdot\frac{x^2}{9}+\frac{x^3}{27}=\left(1+\frac{x}{3}\right)^3\Rightarrow\sqrt[3]{1+x}<1+\frac{x}{3}.$$

3. *Решение.*

Пусть $x=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{40}=y+z$, где $y^3=25$, $z^3=40$ и $yz=\sqrt[3]{25\cdot 40}=\sqrt[3]{10^3}=10$.

Тогда $x^3-30x=x(x^2-30)=(y+z)(y^2+2yz+z^2-3yz)=$
$=(y+z)(y^2-yz+z^2)=y^3+z^3=25+40=65$.

4. На 30 %.

5. 30°, 30°, 120°.

Вариант 12

1. $x=-1$.

2. *Указание.*

Разложить данный многочлен на множители и учесть, что x имеет вид $2n+1$.

3. При $m=\dfrac{5}{19}$ и $m=-25$.

4. 7,6 л.

5. 8.

Указание.

Если x, y, z — стороны треугольника, r — радиус вписанной окружности, то задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} rx=214,\\ ry=208,\\ rz=240.\end{cases}$$

Далее выразить x, y, z через r.

Вариант 13

1. (3; –1).

Указание.

Учесть, что $x-2y<x<x^2+2xy+4y^2$.

2. $80^{13} < 10^{28}$.

Указание.

$80^{13} < 81^{13} = 3^{52} < 3^{56} = (3^4)^{14} = 9^{28} < 10^{28}$.

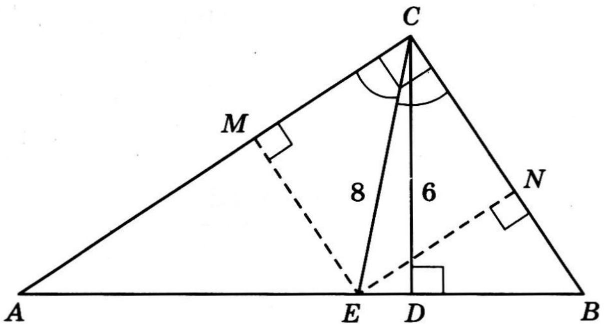
3. $(-\infty; 0)$.

4. *Решение.*

$\overline{abcde} = 45abcde$, тогда все цифры числа нечетные, в противном случае оно кратно 10, но тогда $e = 0$, значит, и само число равно 0. Значит, $e = 5$, следовательно, искомое число кратно 25 и $d = 7$ (2 — четное).

Заметим, что $a + b + c + 12$ делится на 9, тогда $a + b + c = 15$. Кроме того, $45 \cdot 35 \cdot abc < 100\,000$, т. е. $abc \le 63$, откуда подходит число 77 175.

5. *Решение.*



Пусть в ΔABC $\angle C = 90°$, CE — биссектриса, CD — высота. Из точки E опустим перпендикуляры EM и EN на катеты AC и BC. Поскольку CE — биссектриса, то $EN = EM$, тогда $EMCN$ — квадрат.

Из ΔCME, где $CE = 8$, находим $ME = \dfrac{CE}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$, $EN = ME = 4\sqrt{2}$.

Пусть $BC = x$, $AC = y$.

Тогда $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACE} + S_{\Delta CEB} = \dfrac{1}{2}y \cdot 4\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}x \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(x + y)$. (1)

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}xy$. (2)

Сравнивая (1) и (2), имеем $2\sqrt{2}(x + y) = \dfrac{1}{2}xy$, или $32(x + y)^2 = x^2y^2$.

Наконец, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CD = 3\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{2}xy$, откуда $36(x^2 + y^2) = x^2y^2$.

Имеем систему уравнений
$$\begin{cases} 32(x + y)^2 = x^2y^2, & (3) \\ 36(x^2 + y^2) = x^2y^2. & (4) \end{cases}$$

Заметим, что для нахождения искомой площади ΔABC нет необходимости находить в отдельности x и y.

Из уравнения (3) и (4) находим $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{x^2y^2}{32}-2xy, \\ x^2+y^2=\dfrac{x^2y^2}{36}. \end{cases}$

Сравнивая правые части системы, получим $\dfrac{x^2y^2}{32}-2xy=\dfrac{x^2y^2}{36}$, или $x^2y^2\left(\dfrac{1}{32}-\dfrac{1}{36}\right)=2xy$, или $\dfrac{1}{8\cdot 36}xy=2$, откуда $xy=2\cdot 8\cdot 36$.

Значит, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}xy=8\cdot 36=288$.

Вариант 14

1. $x=-2$.
Указание.
Записать уравнение в виде $(x-1)^2-9=x^3+8$.

2. $3+\sqrt{2}$.

3. 4567.

4. *Решение.*
Допустим, что во время копания траншеи одним рабочим остальные не отдыхали, а продолжали копать траншею для следующих труб. Тогда к моменту времени, когда четвертый рабочий закончил копать 40 м, будет прокопано $4\cdot\dfrac{3}{4}\cdot 40=120$ м траншеи дополнительно. Следовательно, вся бригада выкопала $120+40=160$ (м).

5. 3,36.
Указание.
Использовать свойство касательной к окружности и формулу Герона.

Вариант 15

1. $x_{1,2}=\pm 8$.

2. $1<x\le 2$.

3. $(-1; 3)$, $r=3$.

4. *Решение.*

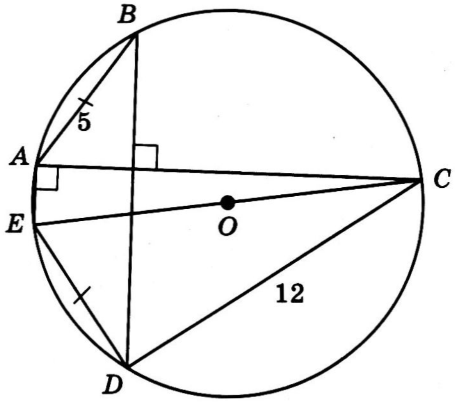
Пусть x — число спортсменов, y — число книголюбов, z — число спортсменов, которые любят читать книги.

По условию $z = \frac{x}{7} = \frac{y}{4}$, или $\begin{cases} x = 7z, \\ y = 4z, \end{cases}$ где $x, y, z \in Z$.

Общее число учеников в классе $n = x + y - z + 4 = 10z + 4$, где $n \in [30; 36]$. Получим $30 \le 10z + 4 \le 36$, или $26 \le 10z \le 32$, откуда $z = 3$, тогда $n = 10 \cdot 3 + 4 = 34$ (ученика).

5. *Решение.*

I способ



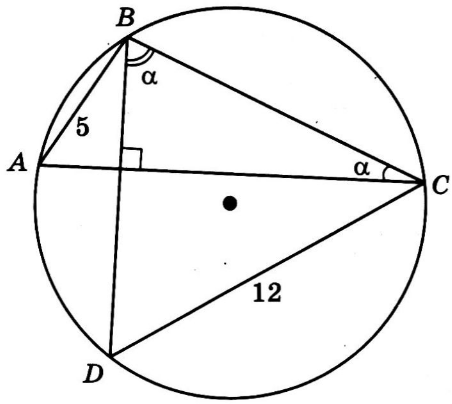
Соединим точку C с центром O окружности и проведем отрезок AE. Поскольку CE — диаметр окружности, то $\angle CAE = 90°$ — как вписанный угол, опирающийся на диаметр.

Так как $AC \perp BD$ (по условию) и $AC \perp AE$, то $ABDE$ — трапеция, т. е. $AE \parallel BD$ и $AB = DE = 5$.

Из ΔCDE, где $\angle CDE = 90°$, $CD = 12$, $DE = 5$, находим $CE = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$, тогда

$R = \frac{1}{2}CE = 6{,}5$.

II способ



Пусть $\angle ACB = \alpha$, $\angle CBD = \beta$.

Из ΔABC $\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R$, или $\frac{5}{\sin\alpha} = 2R$.

Аналогично из ΔBDC $\frac{12}{\sin\beta} = 2R$.

Значит, $\frac{5}{\sin\alpha} = \frac{12}{\sin\beta}$.

Но $\sin\beta = \cos\alpha$. Получим

$\frac{5}{\sin\alpha} = \frac{12}{\cos\alpha}$, откуда $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$.

Известно, что $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$,

или $1 + \frac{144}{25} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, или $\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{169}{25}$, откуда $\sin\alpha = \frac{5}{13}$.

Учитывая, что $\dfrac{5}{\sin\alpha}=2R$, получим $2R = 13$, откуда $R = 6{,}5$.

Вариант 16

1. *Решение.*

I способ

Запишем уравнение в виде $\sqrt[3]{x+45}=1+\sqrt[3]{x-16}$. (1)

Возведем обе части уравнения (1) в куб:

$$x + 45 = 1 + 3\sqrt[3]{x-16}+3\sqrt[3]{(x-16)^2} + x - 16, \text{ или}$$

$$\sqrt[3]{(x-16)^2}+\sqrt[3]{x-16} - 20 = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) — квадратное относительно $\sqrt[3]{x-16}$.

Заменой $\sqrt[3]{x-16}=y$ уравнение (2) приводится к квадратному вида $y^2 + y - 20 = 0$, корни которого $y_1 = -5$, $y_2 = 4$.

Если $y = -5$, то $\sqrt[3]{x-16}=-5$, $x - 16 = -125$, $x_1 = -109$.

Если $y = 4$, то $\sqrt[3]{x-16}=4$, $x - 16 = 64$, $x_2 = 80$.

II способ

Возведем обе части уравнения в куб, используя формулу

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$$

Тогда получим $x+45-(x-16)-3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}\,(\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$, или $61 - 3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}\cdot 1 = 1$, или $\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=20$, получим $(x + 45)(x - 16) = 8000$, или $x^2 + 29x - 8720 = 0$, откуда находим $x_1 = -109$, $x_2 = 80$.

III способ

Пусть $x + 45 = a^3$, $x - 16 = b^3$, тогда получим $a^3 - b^2 = 61$. Кроме того, $a - b = 1$.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} a^3-b^3=61, \\ a-b=1. \end{cases}$

Полученную систему можно решить разными способами, например:

$\begin{cases} (a-b)^3-3ab(a-b)=61, \\ a-b=1, \end{cases}$ $\begin{cases} a-b=1, \\ ab=20, \end{cases}$ откуда находим две пары решений:

$\begin{cases} a=5, \\ b=4; \end{cases}$ или $\begin{cases} a=4, \\ b=-5 \end{cases}$ и т. д.

2. $[5; +\infty)$.

3. *Решение.*

Согласно условию имеем систему уравнений

$$\begin{cases} n+2023=2024m, \\ n+2024=2023k. \end{cases} \qquad (1)$$

Вычтем из I уравнения II: $2024m - 2023k = -1$, где m, $k \in Z$.

Решая полученное уравнение в целых числах, имеем $m = -1 + 2023p$, $k = -1 + 2024p$. Следовательно, уравнение (1) примет вид

$n + 2023 = 2024(-1 + 2023p) = -2024 + 2024 \cdot 2023p$, откуда $n = -2023 - 2024 + 2024 \cdot 2023p$.

Наименьшее натуральное n получим при $p = 1$:

$n = -2023 - 2024 + 2024 \cdot 2023 = -2024 + 2023 \cdot (2024 - 1) = -2024 + 2023^2 = -2024 + 4\,092\,529 = 4\,090\,505$.

4. *Указание.*

Имеем арифметическую прогрессию

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, или $100 \le \dfrac{1+n}{2} \cdot n \le 110$, откуда находим $n = 14$, т. е. Грише 14 лет.

5. *Решение.*

I способ

$S_\Delta = \dfrac{1}{2}ab$; с другой стороны, $S_\Delta = pr = \dfrac{1}{2}(a + b + c)r$, откуда

$\dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2}(a + b + c)r$, или

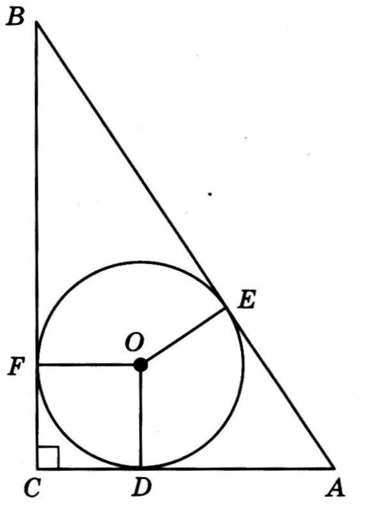
$$r = \frac{ab}{a+b+c}. \qquad (1)$$

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, или $(a + b)^2 - 2ab = c^2$, значит, $2ab = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$, тогда (1) примет вид

$$r = \frac{2ab}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b-c}{2}.$$

Итак, $r = \dfrac{1}{2}(a + b - c)$, ч. т. д.

II способ



Из центра O вписанной окружности проведем радиусы OD, OE и OF в точки касания, тогда $OD \perp AC$, $OF \perp BC$ и $OE \perp AB$. Следовательно, $CFOD$ — квадрат, тогда $OD = OE = OF = r$, $AD = AC - CD = b - r$, $BF = BC - FC = a - r$.

Но $AD = AE$ и $BF = BE$ — как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки. Значит, $AE = b - r$, $BE = a - r$ и $AB = AE + BE$, или $c = (b - r) + (a - r)$, откуда $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, ч. т. д.

Вариант 17

1. $x = 4$.

Указание.

Левую часть уравнения записать в виде $x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdot \ldots = x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$.

Далее использовать формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

2. *Решение.*

Разложив 2024 на множители, можно заметить, что $2024 = 4 \cdot 22 \cdot 23$, тогда имеем $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{22} \cdot \frac{1}{23} = \frac{1}{2024}$ или $\left(\frac{1}{22} - \frac{1}{23}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2024}$.

3. *Решение.*

$n(n^4 - 125n^2 + 4) = n(n^4 - 5n^2 + 4) - 120n^3 =$
$= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) - 120n^3 = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) - 120n^3$ — кратно 120.

4. *Решение.*

Пусть x лет — текущий возраст Захара, y — Оли. Тогда получим систему уравнений $\begin{cases} x = 2(y - (x - y)), \\ x + (x - y) + y + (x - y) = 27, \end{cases}$ или $\begin{cases} 3x - y = 27, \\ x = 2(2y - x), \end{cases}$ откуда $x = 12$, $y = 9$, т. е. Захару 12 лет.

5. *Решение.*

Пусть a, b — катеты, c — гипотенуза. Пусть для определенности $b = 2023$, тогда по теореме Пифагора имеем $a^2 + 2023 = c^2$, или $c^2 - a^2 = 2023$, или $(c - a)(c + a) = 2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$.

Число 2023 можно представить как произведение двух множителей $1 \cdot 2023 = 7 \cdot 289 = 17 \cdot 119$, где $a < c$, т. е. получим всего 3 варианта.

Вариант 18

1. *Решение.*

ОДЗ: $-x > 0$, т. е. $x < 0$, тогда $\sqrt{(-x)^2} = |x| = -x$, $(\sqrt{-x})^2 = -x$.

Уравнение примет вид $\frac{-x + (-x)}{2x^2} = \frac{1}{2024}$, или $-\frac{2x}{2x^2} = \frac{1}{2024}$, откуда $x = -2024$.

2. *Указание.*

Достаточно взять $a = n + 4$, тогда $an + 4 = (n + 4)n + 4 =$
$= n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$ — составное.

3. *Указание.*

$D = b^2 - 4ac = 0$, или $9 - 4(17 + m) = 0$, откуда $m = -15{,}875$.

4. *Решение.* Пусть x руб. — стоимость карандаша, y — ластика. Тогда получим уравнение $14x + 3y = 277$, где $x, y \in N$.

Выразим y через x и выделим целую часть:

$$y = \frac{277 - 14x}{3} = 92 - 5x + \frac{x+1}{3}.$$

Пусть $\frac{x+1}{3} = x_1$, тогда $x = 3x_1 - 1$, $y = 92 - 5(3x_1 - 1) + x_1$, или $y = 97 - 14x_1$. Итак, $x = 3x^1 - 1$, $y = 97 - 14x_1$, где $x_1 \in N$. Цена карандаша отличается от цены ластика не более чем на 5 руб., поэтому подходит значение $x_1 = 6$, тогда $x = 13$ (руб.) — цена ластика, $y = 17$ (руб.) — цена карандаша.

5. *Решение.*

I способ

Пусть $AC = b$. Проведем $OK \parallel BC$, тогда $CK = \frac{3}{12}b = \frac{1}{4}b$, $MK = \frac{6}{5}CK =$
$= \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{4}b = \frac{3}{10}b.$

Значит, $CM = CK + MK = \frac{1}{4}b + \frac{3}{10}b = \frac{11}{20}b$, тогда
$AM = AC - CM = b - \frac{11}{20}b = \frac{9}{20}b.$

Следовательно, $AM : MC = \frac{9}{20}b : \frac{11}{20}b = 9 : 11$.

II способ

Пусть $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$, тогда $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AC} = x\vec{b}$, где x — искомый коэффициент. По правилу треугольника $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON} =$
$= \frac{9}{12}\overrightarrow{AN} + \frac{6}{11}\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) + \frac{6}{11}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}(\vec{c} + y \cdot \overrightarrow{BC}) + \frac{6}{11}(x\vec{b} - \vec{c}) =$
$= \frac{3}{4}(\vec{c} + y \cdot (\vec{b} - \vec{c})) + \frac{6}{11}(x\vec{b} - \vec{c}) = \left(\frac{3}{4}y + \frac{6}{11}x\right)\vec{b} + \left(\frac{9}{44} - \frac{3}{4}y\right)\vec{c}.$

$$\begin{cases}\frac{3}{4}y+\frac{6}{11}x=x,\\ \frac{9}{44}-\frac{3}{4}y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{3}{4}y-\frac{5}{11}x=0,\\ \frac{9}{44}-\frac{3}{4}y=0.\end{cases}$$

Складывая уравнения, находим $\frac{5}{11}x=\frac{9}{44}$, откуда $x=\frac{9}{20}$, тогда $\overrightarrow{AM}=\frac{9}{20}\overrightarrow{AC}$. Значит, $AM : AC = 9 : 11$.

Вариант 19

1. $x_1 = -1$, $x^2 = -\frac{4}{7}$.

Указание.

Решить заменой $y = 7x^2 + 7x + 4$.

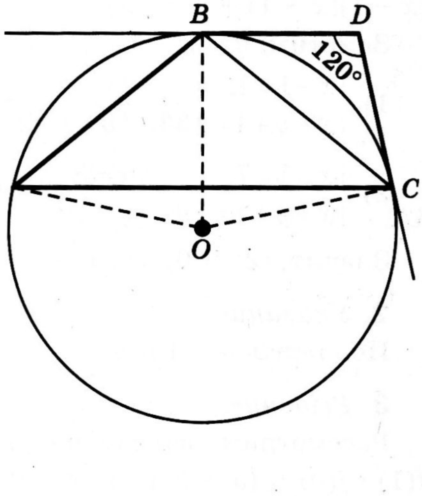
Далее применить способ группировки.

2. $(a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c)$.

3. 1089.

4. 1,5 кг.

5. *Решение.*



По свойству касательных $CB = CD$, тогда $\angle CBD = \angle CDB = 30°$. Так как $BC \perp BO$ и $CD \perp OD$, то $\angle BOD = 180° - 120° = 60°$.

Поскольку $BO = OD = OA = R$, то $\angle OBA = \angle OBD = 60°$ и $AB = BD = R = 6$, $\angle ABD = 120°$.

Значит, $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot BD \cdot \sin 120° =$

$= \frac{1}{2}R^2 \sin 60° = \frac{1}{2}\cdot 36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$, где

$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 20

1. $x_1 = -1$, $x_2 = 8$.

Указание.

Разделить обе части уравнения на $x^3 \neq 0$ и ввести замену $x - 5 - \frac{8}{x} = y$.

2. $(x^2 + x + 1)(x^{11} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

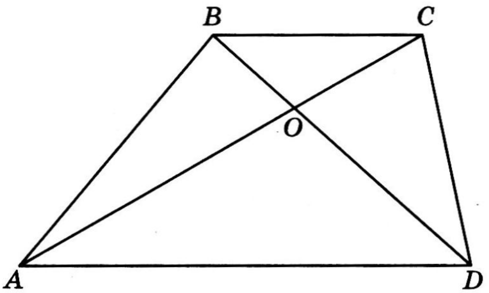
Указание.

Показать, что данный многочлен делится на $x^2 + x + 1$.

3. $\frac{1}{3}(\sqrt[4]{11} + \sqrt[4]{8})(\sqrt{11} + \sqrt{8})$.

4. 40.

5. *Решение.*



$\Delta BOC \sim \Delta AOD$ (по двум углам), тогда $\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{24}{6} = 4 = k^2$, откуда $k = 2$.

Значит, точка O делит диагонали в отношении $2 : 1$, т. е. $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD} = 2S_{\Delta BOC} = 12$. Тогда $S_{ABCD} = 6 + 24 + 12 + 12 = 54$.

Вариант 21

1. *Решение.*

Запишем уравнение в виде $x^2 - 1 + xy - y = 133$, или $(x - 1)(x + 1) + y(x - 1) = 133$, или $(x - 1)(x + y + 1) = 7 \cdot 19$.

Заметим, что $x - 1 < x + y + 1$, тогда возможны варианты:

1) $\begin{cases} x-1=1, \\ x+y+1=133; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=130; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-1=7, \\ x+y+1=19; \end{cases}$ $\begin{cases} x=8, \\ y=10. \end{cases}$

Значит, (2: 130), (8; 10) — решение исходного уравнения.

2. *Указание.*

Положить $n = 1$ и $n = 2$.

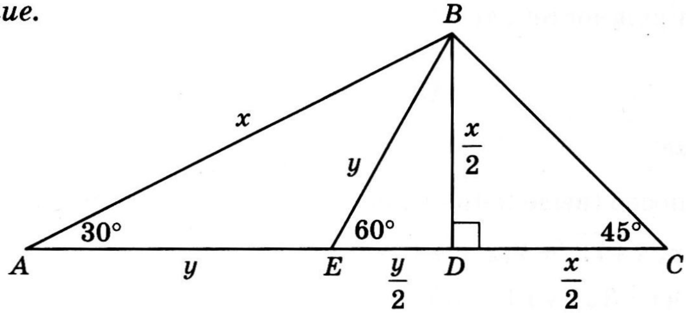
3. *Решение.*

Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$. Заметим, что $f(1) \cdot f(0) = (a + b + c) \cdot c < 0$. Следовательно, на концах отрезка [0; 1] функция принимает значения разных знаков, поэтому ее график пересекает ось $0x$, а значит, $D = b^2 - 4ac > 0$, т. е. $b^2 > 4ac$, ч. т. д.

4. *Решение.*

Заметим, что минутная стрелка движется со скоростью 360° в час, а часовая — 30° в час, поэтому относительная скорость движения минутной стрелки относительно часовой составляет 330° в час. За минимальный промежуток между двумя моментами минутная стрелка относительно часовой должна преодолеть $55° \cdot 2 = 110°$, на что потребуется $\frac{110°}{330°}$ ч $= \frac{1}{3}$ ч $= 20$ мин.

5. *Решение.*



Проведем высоту BD. Так как $\angle C = 45°$, то $\angle CBD = 90° - 45° = 45°$, т. е. ΔBCD — равнобедренный и прямоугольный. В ΔBED $\angle BED = 60° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle EBD = 30°$.

По условию задачи $\angle A = 30°$, $\angle C = 45°$, тогда $\angle ABC = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

Значит, $\angle ABE = \angle ABC - (\angle EBD + \angle CBD) = 105° - (30° + 45°) = 30°$.

Значит, ΔABE — равнобедренный с основанием AB.

Пусть $AB = x$, $AE = y$, тогда $x + y = 100$ (по условию).

Но $ED = \frac{1}{2}BE = \frac{y}{2}$, $BD = \frac{1}{2}AB = CD = \frac{x}{2}$.

Выходит, что $CE = BD + CD = \frac{y}{2} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(x + y) = 5$.

Вариант 22

1. $x_1 = 1$, $x_2 = 5{,}5$.

2. Делится.

Указание.

Положить $2^{13} = x$, тогда $2^{54} + 1 = 4x^4 + 1$; $2^{27} + 2^{14} + 1 = 2x^2 + 2x + 1$ и т. д.

3. 59.

4. *Решение.*

Пусть Оксана в первый раз заплатила $(10x + y)$ руб., а во второй — $(10y + x)$. Тогда получим уравнение $10y + x = 1{,}2(10x + y)$, или $10y + x = 12x + 1{,}2y$, $8{,}8y = 11x$, $55x = 44y$, откуда $5x = 4y$.

Значит, $x = 4$, $y = 5$, т. е. открытка стоила 45 руб.

5. $\frac{25}{12}$.

Указание.

Если x и y — катеты, R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей, то $x^2 + y^2 = 4R^2$, $2r = x + y + 2R$ и т. д.

Вариант 23

1. *Решение.*

I способ (выделение в левой части полного квадрата)

$16x^2 - 24x\sqrt{x+13} + 9(x + 13) = 0$, или

$(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3\sqrt{x+13} + 3^2(x + 13) = 0$, или

$(4x - 3\sqrt{x+13})^2 = 0$, $4x = 3\sqrt{x+13}$, $x > 0 \Rightarrow$ из исходного уравнения, так как $16x^2 + 9x + 117 > 0$ при любом $x \in R$ и $x + 13 \geq 0$. Далее имеем $16x^2 + 9(x + 13) = 0$, или $16x^2 - 9x - 117 = 0$, откуда получим $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{39}{16} < 0$.

Итак, $x = 3$ — единственный корень исходного уравнения.

II способ (замена переменной)

$16x^2 - 24x\sqrt{x+13} + 9(x + 13) = 0$.

Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{x+13} \neq 0$:

$$16 \cdot \frac{x}{\sqrt{x+13}} + 9 \cdot \frac{\sqrt{x+13}}{x} - 24 = 0.$$

Далее замена $\frac{x}{\sqrt{x+13}} = y$, где $x > 0$, тогда $y > 0$ и т. д.

III способ (приведение к однородному)

$\sqrt{x+13} = y$, тогда $9x + 117 = 9(x + 13) = 9y^2$, и данное уравнение примет вид $16x^2 - 24xy + 9y^2 = 0$, или $(4x - 3y)^2 = 0$ и т. д.

2. *Указание.*

$12(x + y) = (5x + 7y) + (7x + 5y)$.

3. *Решение.*

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$. Искомая сумма может оканчиваться на 0, 1, 3, 5, 6, 8. Так что цифрой 9 оканчиваться не может.

4. 13,5 кг.

5. 210.

Вариант 24

1. $x = 25$.

2. Делится при $n = 2k$, $k \in N$.

Указание.

Рассмотреть два случая:

1) $n = 2k$; 2) $n = 2k + 1$.

3. 27.

4. *Решение.*

Сейчас 11:34, 50 мин назад было 10:44 — это 1 ч 44 мин или 104 мин после восьми, т. е. в 4 раза больше, чем сейчас до полудня.

5. 4.

Вариант 25

1. $x = -\sqrt{2}$.

Указание.

Обозначить $x = y\sqrt{2}$, тогда получим уравнение $2y^3 + y + 3 = 0$, где $y = -1$ — корень уравнения и т. д.

2. *Указание.*

Обозначить $y = 3^x$.

3. *Указание.*

Записать данное выражение в виде $27^{n+1} - 8^{n+1}$, откуда и следует требуемое.

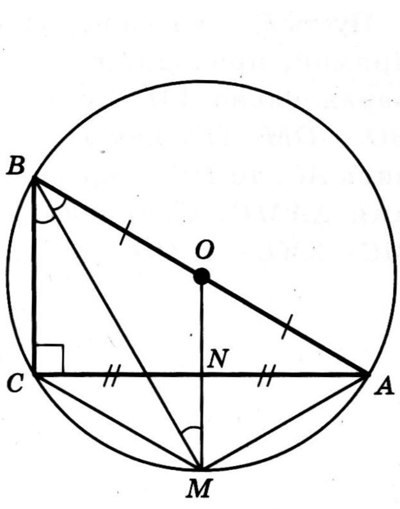
4. *Решение.*

Пусть у Гриши x руб., тогда у Артура $1{,}25x$ руб. Чтобы денег у них стало поровну, Артур должен отдать Грише $0{,}125x$ руб., что составит 10 % его денег.

5. *Решение.*

Поскольку O — середина AB и N — середина AC, то ON — средняя линия ΔABC. Значит, $BC \parallel ON$ и $\angle OMB = \angle MBC$ — как накрест лежащие.

Но $\angle CBM = \angle OBM$, так как BM — биссектриса (по условию), тогда $\angle OMB = \angle OBM$, т. е. ΔBOM — равнобедренный, $BO = MO$. Так как $\angle C = 90°$, то AB — диаметр описанной окружности, ΔABM — прямоугольный, $\angle BAC = \angle BMC$ — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же $\cup BC$.



Вариант 26

1. *Указание.*

$(\sqrt[4]{10x+4})^2=\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x+2}$, где $x \geq 5$. Решая полученное уравнение, находим $x_1 = 14$, $x_2 = -1$ (не подходит).

2. *Решение.*

Поскольку $2n^2 + 3n - 35 = (2n - 7)\cdot(n + 5)$, где $n = 3{,}5$ и $n = -5$ — корни трехчлена, то $(2n - 7)(n + 5) = p^2$, где p — простое число.

В этом случае $2n - 7 = 1$, откуда $n = 4$, или $2n - 7 = n + 5$, $n = 12$.

В обоих случаях число p^2 — квадрат простого числа.

Итак, $n = 4$ и $n = 12$.

3. 5.

Указание.

Пусть $\sqrt{49-a^2}+\sqrt{24-a^2}=x$. Далее перемножить это равенство с исходным.

4. *Решение.*

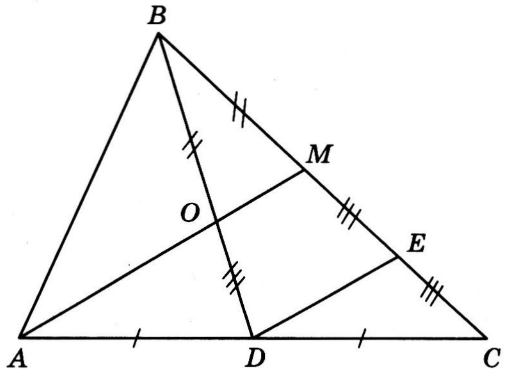
Пусть x км — расстояние от дома до аэропорта; так как 20 мин $=\dfrac{1}{3}$ ч, то получим уравнение $x = 45 + 45\left(t+\dfrac{1}{3}\right) = 45 + 60\left(t-\dfrac{1}{3}\right)$, или $3\left(t+\dfrac{1}{3}\right)=4\left(t-\dfrac{1}{3}\right)$, откуда $t=\dfrac{7}{3}$.

Значит, $x = 45 + 45\left(\dfrac{7}{3}+\dfrac{1}{3}\right) = 45 + 45\cdot\dfrac{8}{3} = 45 + 120 = 165$.

Итак, расстояние от дома Николая до аэропорта — 165 км.

5. *Решение.*

Пусть E — точка пересечения прямой, проходящей через D параллельно AM. По условию $BO = OM$. Так как D — середина AC, то DE — средняя линия ΔAMC. Следовательно, $MC = 2ME = 2\cdot OD = 16$.



Вариант 27

1. *Указание.*

Найти сумму m, n и $m + n$ членов.

2. При $a = -16$.

3. *Указание.*

Показать, что данный многочлен имеет вид $(x^2 + Bx + Ca^2)^2$. Далее раскрыть скобки в обеих частях равенства, упростить и сравнить коэффициенты при x^3 и x, откуда находим $B = 5a$, $C = 5$, т. е. получим $(x^2 + 5ax + 5a^2)^2$.

4. Четверг.

5. 4 : 5.

Вариант 28

1. 10 989.

2. *Решение.*

По условию $a_1 = 4$, $d = 4$. Если число $a_n = 74$ является членом арифметической прогрессии, то $a_n = a_1 + (n - 1)d$, или $74 = 4 + (n - 1) \cdot 4$, откуда находим $n = 21,5$, что невозможно, так как $n \in N$. Значит, число 74 не является членом данной прогрессии.

3. 3.

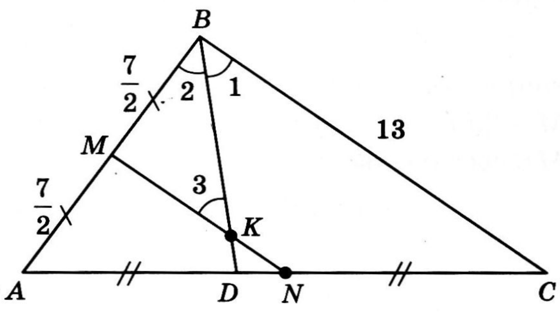
4. *Решение.*

Пусть x км/ч — собственная скорость, а y км/ч — скорость течения. Согласно условию имеем уравнение $\frac{6}{x+y}+\frac{12}{x-y}=\frac{20}{x}$, где $x > y$, $x > 0$.

После упрощений получим $x^2 - 3xy - 10y^2 = 0$, откуда $x_1 = 5y$, $x_2 = -2y$ (не подходит, так как $x > 0$).

Если $x = 5y$, то $\frac{x}{y}=5$.

5. *Решение.*



Так как M — середина AB, N — середина AC, то MN — средняя линия ΔABC, тогда $BC \parallel MN$ и $MN = \frac{13}{2}$. Заметим, что $\angle 1 = \angle 3$ — как накрест лежащие при параллельных прямых BC и MN и секущей BD. Но $\angle 1 = \angle 2$ (по условию), значит, $\angle 2 = \angle 3$, т. е. ΔMBK — равнобедренный и $MK = MB = \frac{7}{2}$.

Значит, $KN = MN - MK = \frac{13}{2} - \frac{7}{2} = 3$, $KN = 3$.

Вариант 29

1. $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Указание.

Преобразовать уравнение к виду $|\cos 3x| = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$.

2. $2(b^2 - c) = (a^2 - b)^2$.

3. *Решение.*

Заметим, что $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, тогда многочлен $M(x)$ делится без остатка на $(x - 2)$ и $(x - 3)$. Согласно теореме Безу имеем

$$\begin{cases} M(2) = 8a + 4b - 146 + 102, \\ M(3) = 27a + 9b - 219 + 102; \end{cases} \quad \begin{cases} 8a + 4b = 44, \\ 27a + 9b = 117; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + b = 11, \\ 3a + b = 13, \end{cases}$$

откуда $3a - 2a = 13 - 11$, т. е. $a = 2$, $b = 7$.

4. *Решение.*

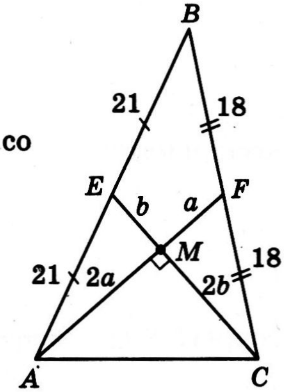
От 0:00 до 12:00 часовая стрелка сделает 1 полный оборот, а минутная — 12 таких оборотов. Значит, за это время минутная стрелка догонит часовую 11 раз. Между двумя последовательными встречами стрелок угол между ними два раза составит 17°. Следовательно, между полуночью и полднем $11 \cdot 2 = 22$ раза между стрелками будет нужный угол, а за сутки таких моментов будет в 2 раза больше, т. е. 44 раза.

5. *Решение.*

Пусть M — точка пересечения медиан CE и AF. Пусть $MF = a$, $ME = b$, тогда $AM = 2a$ и $CM = 2b$ (по свойству медиан). Из прямоугольных ΔCMF и ΔAME соответственно имеем

$$\begin{cases} a^2 + 4b^2 = 18^2, \\ 4a^2 + b^2 = 21^2. \end{cases}$$

Складывая полученные равенства, имеем
$5(a^2 + b^2) = 324 + 441$, или $a^2 + b^2 = 153$.
Следовательно, $AC^2 = (2a)^2 + (2b)^2 = 4(a^2 + b^2)$.
Так как $a^2 + b^2 = 153$ и AC^2 — площадь квадрата со стороной AC, то $AC^2 = 153 \cdot 4 = 612$.



Вариант 30

1. (0; 0), (–9; 3), (3; 1), (–12; 6).
Указание.

Записать систему в виде $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}xy + y^2, \\ 2y - \dfrac{1}{3}x = \dfrac{1}{9}x^2, \end{cases}$ а затем почленно сложить.

2. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

3. –3,5.

4. Не может.
Указание.
Только в феврале високосного года может быть 5 понедельников и по 4 остальных дня недели, т. е. в сумме — 29 дней.

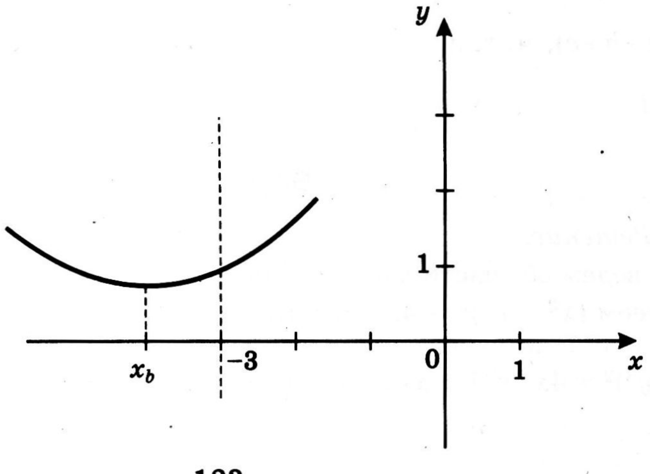
5. *Указание.*
Обратить трапецию в равновеликий треугольник, для чего продолжить нижнее основание на длину верхнего.

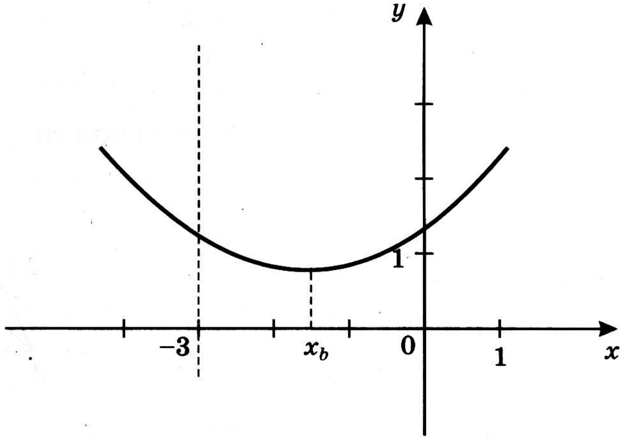
Вариант 31

1. $\frac{1}{3}(2 \pm \sqrt{7})$.

2. $0 \le x \le 2$.

3. *Решение.*





Имеем две возможности расположения вершин параболы:

1) $x_b = a < -3$. Тогда наименьшее значение функции $y = x^2 - 4ax + 45$ достигается в точке $x = -3$.

Имеем $y(-3) = 9 + 12a + 45 = 9$, откуда $a = -\dfrac{15}{4}$.

2) $x_b \geq -3$. Тогда наименьшее значение функции на $[-3; +\infty)$ достигается при $x = a$.

Получим $y(a) = a^2 - 4a^2 + 45 = 9$; $a^2 = 12$, $a = 2\sqrt{3}$.

4. *Решение.*

Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b})$, $\overrightarrow{BO} = \dfrac{1}{3}(\vec{a} - \vec{c})$,

$\overrightarrow{CO} = \dfrac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$.

Значит, $(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2) - 3(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 -$

$-\dfrac{1}{3}((\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{b} - \vec{c})^2 + (\vec{c} - \vec{a})^2) = \dfrac{1}{3}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{c}) =$

$= \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, ч. т. д.

5. 1.

Вариант 32

1. *Решение.*

Возведем обе части данного равенства в квадрат, полагая, что $xy \neq 0$.

Имеем $(x^3 - y^3)^2 = 4x^2y^2$, или $(x^3 - y^3)^2 + 4x^3y^3 = 4x^2y^2 + 4x^3y^3$, или

$(x^3 + y^3)^2 = 4x^2y^2(1 + xy)$, откуда $1 + xy = \left(\dfrac{x^3 + y^3}{2xy}\right)^2$, ч. т. д.

2. $\frac{1}{8}$.

Указание.

Умножить и разделить данное выражение на 2 sin 20°, а затем применить формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

3. $(\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

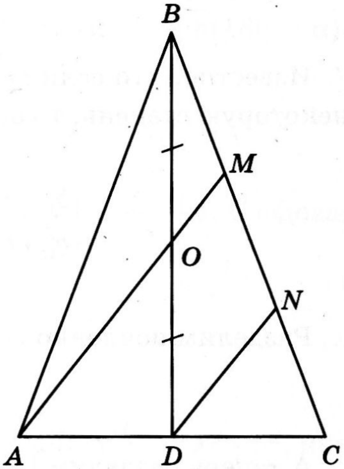
4. *Решение.*

Пусть Петров прошел x кругов за 1 час, тогда Захаров — $(x+1)$ круг. Пусть длина круга равна 1, тогда получим уравнение

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{20},\ \text{где 3 мин} = \frac{1}{20}\ \text{ч.}$$

После упрощений получим уравнение $x^2+x-20=0$, откуда $x_1=4$, $x_2=-5$ (не подходит). Если $x=4$, то $x+1=5$. Значит, Захаров за 60 мин проходит 5 кругов, т. е. за 60 : 5 = 12 мин.

5. *Решение.*



Из точки D проведем $DN \parallel AM$. Заметим, что в ΔAMC DN — средняя линия, значит, в ΔBDN OM — средняя линия ΔBDN, тогда $BM = MN = NC$ (по теореме Фалеса).

Так как $BM=\frac{1}{3}BC$, $BO=\frac{1}{2}BD$, то

$$S_{\Delta BOM}=\frac{1}{6}S_{\Delta BDC}=\frac{1}{12}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{12}\cdot 60=5.$$

Вариант 33

1. *Решение.*

$$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2\ge 0.$$

2. На 50.

3. 4.

4. *Решение.*

I способ

Пусть b_1, b_2, b_3 — искомые числа, образующие возрастающую геометрическую прогрессию. Согласно условию имеем систему

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 26, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1^2(1+q+q^2)^2 = 676, \\ b_1^2(1+q^2+q^4) = 364. \end{cases}$$

Разделим почленно I уравнение на II:

$$\frac{(1+q+q^2)^2}{1+q^2+q^4} = \frac{13}{7}. \qquad (1)$$

Заметим, что $1 + q^2 + q^4 = (1 + q^2)^2 - q^2 = (1 + q^2 + q)(1 + q^2 - q)$.

Тогда уравнение (1) примет вид $\dfrac{1+q+q^2}{1+q^2-q} = \dfrac{13}{7}$, или $6q^2 - 20q + 6 = 0$, или $3q^2 - 10q + 3 = 0$, откуда $q_1 = 3$, $q_2 = \dfrac{1}{3}$.

Поскольку прогрессия возрастающая (по условию), то $q = 3$, тогда $b_1 = \dfrac{26}{1+q+q^2} = 2$.

II способ

Известно, что если все члены геометрической прогрессии возвести в некоторую степень, то опять получим геометрическую прогрессию.

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 26, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{b_1(1-q^3)}{1-q} = 26, \\ \dfrac{b_1^2(1-q^6)}{1-q^2} = 364. \end{cases}$$

Разделим почленно II уравнение на I:

$$\frac{b_1(1+q^3)}{1+q} = 14.$$

А теперь разделим I уравнение системы на полученное:

$\dfrac{(1-q^3)(1+q)}{(1+q^3)(1-q)} = \dfrac{13}{7}$, или $\dfrac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \dfrac{13}{7}$ и т. д. (см. I способ).

III способ

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 26, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases} \quad \begin{cases} (b_1 + b_2 + b_3)^2 = 26^2, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases}$$

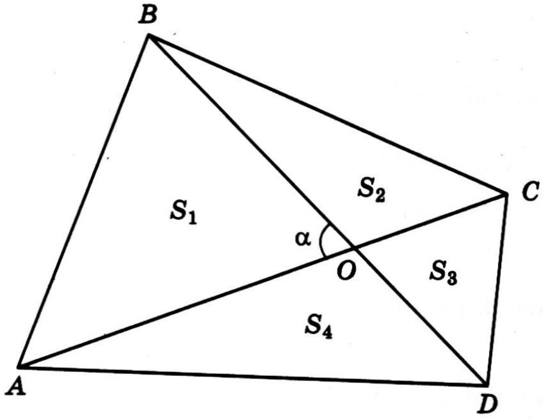
$$\begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2b_1b_2 + 2b_1b_3 + 2b_2b_3 = 676, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases}$$

$364 + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) = 676$, или $b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = 156$.

Но $b_2^2 = b_1b_3$, тогда $b_1b_2 + b_2^2 + b_2b_3 = 156$, $b_2(b_1 + b_2 + b_3) = 156$ или $b_2 \cdot 26 = 156$, откуда $b_2 = 156 : 26 = 6$ и т. д.

Итак, $b_2 = 6$, $q = 3$.

5. *Решение.*



Докажем, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

Пусть $\angle AOB = \alpha$, тогда $S_1 = \dfrac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin\alpha$,

$S_2 = \dfrac{1}{2}(BO \cdot CO \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \dfrac{1}{2} BO \cdot CO \cdot \sin\alpha$, где $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$,

$S_3 = \dfrac{1}{2} CO \cdot DO \cdot \sin\alpha$, $S_4 = \dfrac{1}{2} AO \cdot DO \cdot \sin\alpha$.

Значит, $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

По условию $S_2 = 6$ и $S_4 = 8$. Тогда $12S_3 = 6 \cdot 8$, откуда $S_3 = 4$. Следовательно, $S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 12 + 6 + 4 + 8 = 30$.

Вариант 34

1. *Решение.*

Замена $\sqrt{x^2 - \dfrac{12}{x^2}} = y$, где $y \geq 0$, приводит к уравнению $\dfrac{12}{x^2} = x^2 - y^2$, при котором исходное уравнение примет вид $\sqrt{12 - x^2 + y^2} = x^2 - y^2$, или

$12 - x^2 + y^2 = x^4 - 2x^2y + y^2$, $2y = \dfrac{x^4 + x^2 - 12}{x^2}$.

Запишем полученное равенство в виде $2y = \left(x^2 - \dfrac{12}{x^2}\right) + 1$.

Но $x^2 - \dfrac{12}{x^2} = y^2$, тогда $y^2 - 2y + 1 = 0$, или $(y - 1)^2 = 0$, откуда $y = 1$.

Значит, $x^2 - \dfrac{12}{x^2} = 1$, или $x^4 - x^2 - 12 = 0$, откуда $x^2 = 4$, $x^2 = -3$.

Если $x^2 = 4$, то $x_{1,2} = \pm 2$; если $x^2 = -3$, то корней нет.

Итак, $x_{1,2} = \pm 2$ — корни исходного уравнения.

2. (1; 16).

Указание.

Заменой $\sqrt{x}=y$, где $y \geq 0$, данное неравенство приводится к виду $\frac{(y-4)(y+1)}{(y+3)(y-1)}<0$ и решается методом интервалов.

3. 0.

Указание.

Возвести обе части равенства в квадрат.

4. *Решение*

Нет, так как иначе корзины с четным и нечетным количеством орехов должны чередоваться, т. е. корзин должно быть четное число.

5. При $\alpha = 60°$.

Вариант 35

1. 7744.

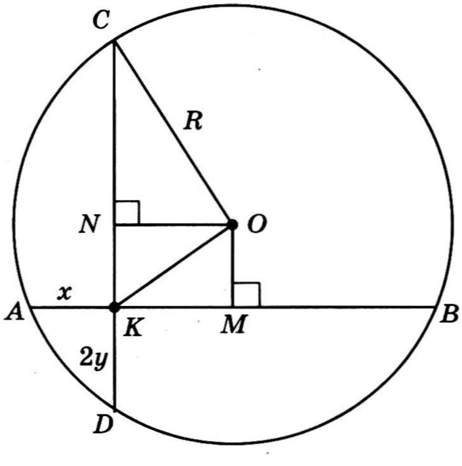
2. $(-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$.

3. $x = -1$.

4. *Решение.*

Пусть n — число домов, a — первый и b — последний номера домов. Так как номера домов возрастают на 2, то имеем возрастающую арифметическую прогрессию, тогда $S_n = \frac{a+b}{2} \cdot n = 423$. Но $423 = 3 \cdot 3 \cdot 47$, и так как $n \geq 5$, то $n = 9$. Значит, номер пятого (среднего) дома равен 47.

5. *Решение.*



Пусть O — центр окружности, $OC = R = 5\sqrt{13}$, $AB \perp CD$ (по условию). Пусть $AK = x$, $BK = 6x$, $DK = 2y$, $CK = 3y$.

Так как AB и CD — пересекающиеся хорды, то $AK \cdot BK = CK \cdot DK$, или $x \cdot 6x = 2y \cdot 3y$, или $6x^2 = 6y^2$, $x^2 = y^2$, значит, $x = y$. Проведем серединные перпендикуляры OM и ON, тогда $AB = 7x$; $CD = 5y = 5x$; $NK = CK - CN = 3x - \frac{1}{2}CD = 3x - \frac{5x}{2} = \frac{x}{2}$;

$MK = BK - BM = 6x - \frac{1}{2}AB = 6x - \frac{7x}{2} = \frac{5x}{2}.$

Из ΔOMK $OK^2 = MK^2 + OM^2 = MK^2 + NK^2 = \left(\frac{5x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{26x^2}{4}.$ **(1)**

Из ΔCON $CN^2 + ON^2 = R^2$, или $\left(\frac{1}{2}CD\right)^2 + MK^2 = R^2$, или

$\left(\frac{5x}{2}\right)^2 + \left(\frac{5x}{2}\right)^2 = R^2$, $50x^2 = 4R^2$, $x^2 = \frac{4R^2}{50}.$

Учитывая (1), получим $OK^2 = \frac{26}{4} \cdot \frac{4R^2}{50} = \frac{13R^2}{25}$,

$OK = \frac{R\sqrt{13}}{5} = \frac{5\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}}{5} = 13.$

Вариант 36

1. *Указание.*

Записать данное выражение в виде $333^{777} + 777^{333} = (333^{777} + 7^{777}) + (777^{333} - 7^{333}) - (7^{777} - 7^{333})$. Далее учесть, что сумма нечетных степеней делится на сумму оснований, а разность любых целых степеней делится на разность оснований.

Наконец, $7^{777} - 7^{333} = 7^{333} \cdot (7^{4 \cdot 111} - 1) = 7^{333} \cdot (2401^{111} - 1)$ — кратно 10.

2. *Решение.*

I способ

Перемножив уравнения системы, получим

$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 25$, или $(x^2 + y^2)^2 = 25$.

Так как $x^2 + y^2 > 0$, то $x^2 + y^2 = 5$. **(1)**

Исходную систему запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{x}{y}(x^2 + y^2) = 10, \\ \frac{x}{y}(x^2 + y^2) = \frac{5}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Разделив почленно I уравнение системы (2) на II, имеем

$$\frac{x^2}{y^2} = 4, \text{ или } x^2 = 4y^2. \quad (3)$$

Из соотношений (1) и (2) получим

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 = 4y^2, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_{1,2} = \pm 2, \\ y_{1,2} = \pm 1. \end{cases}$$

II способ

Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10y, \\ y^2 + x^2y = 2{,}5x; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x^2 + y^2) = 10y, \\ y(x^2 + y^2) = 2{,}5x, \end{cases} \text{ где } x \neq 0,\ y \neq 0.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x}{y} = \frac{4y}{x}, \text{ или } x^2 = 4y^2,\ x = \pm 2y.$$

Имеем две системы:

$$1) \begin{cases} x = 2y, \\ x^3 + xy^2 = 10y; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = -2y, \\ -8y^3 - 2y^3 = 10y. \end{cases}$$

Из системы 1) находим $x_{1,2} = \pm 2$, $y_{1,2} = \pm 1$.

Система 2) не имеет решений.

Итак, решением исходной системы являются пары чисел $(-2; -1)$ и $(2; 1)$.

3. *Решение.*

Из условия следует, что $4y^2 + 4 = 8(30 - x)$, или $(2y + 1)^2 = 241 - 8x$. Значит, $241 - 8x$ может принимать значения 233, 225, 217, 209, 201, 193, 185, 177, из которых полным квадратом является 225.

Тогда $x = 2$, $y = 7$.

4. *Решение.*

Пусть v_1 и v_2 — соответственно скорости I и II велосипедистов, t — время до встречи. I велосипедист проедет до встречи v_1t, а II — путь v_2t.

По условию задачи $\frac{v_2t}{v_1} = \frac{2}{3}$ (ч) = 40 (мин) и $\frac{v_1t}{v_2} = \frac{3}{2}$ (ч) = 90 (мин).

Получим систему уравнений

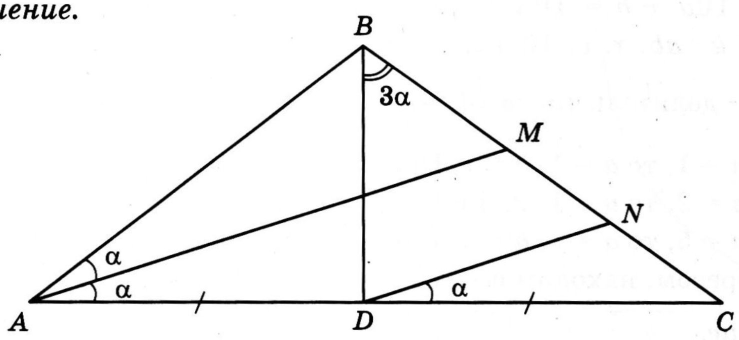
$$\begin{cases} \dfrac{v_2t}{v_1} = 40, \\ \dfrac{v_1t}{v_2} = 90; \end{cases} \quad \begin{cases} v_2t = 40v_1, \\ v_1t = 90v_2; \end{cases}$$

$$\frac{v_2t}{v_1t} = \frac{40v_1}{90v_2}, \text{ или } \frac{v_2}{v_1} = \frac{4v_1}{9v_2}, \text{ или } 4v_1^2 = 9v_2^2, \text{ т. е. } \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}.$$

Так как $\frac{v_1t}{v_2} = 90$, то $\frac{3}{2}t = 90$, $t = 90 \cdot \frac{2}{3} = 60$.

Следовательно, время от начала движения до встречи 60 мин = 1 ч.

5. *Решение.*



Пусть $\angle BAM = \angle CAM = \alpha$, где AM — биссектриса. Из точки D проведем $DM \parallel AM$. Так как BD — медиана, то $AD = DC$ и DN — средняя линия ΔAMC. Значит, $DN = \frac{1}{2}AM = BD$ (по условию задачи). Тогда ΔBDN — равнобедренный с основанием BN и $\angle DBN = \angle BND = 3\alpha$. Заметим, что $\angle BND$ — внешний угол ΔCND, т. е. $\angle BND = \angle C + \angle CDN$, или $3\alpha = \alpha + \angle C$, откуда $\angle C = 2\alpha = \angle BAC$.

Выходит, что ΔABC — равнобедренный, где медиана BD является и высотой, т. е. ΔBCD — прямоугольный, тогда $3\alpha + 2\alpha = 90°$, откуда $\alpha = 18°$. Следовательно, в ΔABC $\Delta A = \angle C = 36°$, $\angle B = 3\alpha \cdot 2 = 6\alpha = 108°$.

Вариант 37

1. $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.
Указание.

Заменой $y = \sqrt[3]{7x-6}$ уравнение преобразуется в систему $\begin{cases} x^3+6=7y, \\ y^3+6=7x, \end{cases}$

которая легко решается вычитанием.

2. *Решение.*

$$\left(1+\frac{7}{\sin x}\right)\left(1+\frac{19}{\cos x}\right) > 293,\ 1+\frac{7}{\sin x}+\frac{19}{\cos x}+\frac{7\cdot 19\cdot 2}{2\sin x\cos x} =$$

$$= 1+\frac{7}{\sin x}+\frac{19}{\cos x}+\frac{266}{\sin 2x} > 1+7+19+266 = 293,\ \text{ч. т. д.}$$

3. *Решение.*

Пусть $\overline{ab} = 10a + b$ — двузначное число, где a — цифра десятков, b — единиц. Согласно условию имеем $10a + b = k \cdot ab$, или $b = a(kb - 10) \Rightarrow$ $\Rightarrow b$ кратно a. Итак, $b = ma$, где a и b — однозначны, поэтому и m — однозначно.

Так как $10a + b = 10a + ma = a(10 + m)$ и $10a + b = k \cdot ab$, то $f(10 + m) = k \cdot ab$, т. е. $10 + m = kb$, или $10 + b \cdot ma$, $m(ka - 1) = 10$, значит, m — делитель числа 10, тогда $m = 1; 2; 5$; $ka = \dfrac{10}{m} + 1$.

1) Если $m = 1$, то $a = 1$, $b = 1$. Искомое число 11.

2) Если $m = 2$, то $a = 1, 2, 3$ и $b = 2, 4, 6$. Получим числа 12, 24, 36.

3) Если $m = 5$, то $a = 1$, $b = 5$, т. е. получим число 15.

Таким образом, находим всего 5 чисел: 11, 12, 24, 36, 15,

4. *Решение.*

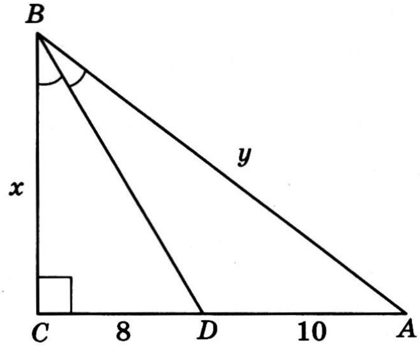
Масса грибов без воды составляет 1 % от 100 кг, т. е. 1 кг. После сушки 1 кг грибов есть уже 4 % от новой массы, которую обозначим как x кг. Получим пропорцию

x кг — 100 %,

1 кг — 4 %, откуда $x = 100 : 4 = 25$.

Значит, масса грибов стала 25 кг.

5. *Решение.*



Пусть $BC = x$, $AB = y$. По свойству биссектрисы угла треугольника имеем $\dfrac{x}{y} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$.

$AC = CD + AD = 18$. Из ΔABC по теореме Пифагора получим $y^2 - x^2 = 18^2$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 18^2, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{5}{4}x, \\ \left(\dfrac{5}{4}x\right)^2 - x^2 = 18^2. \end{cases}$$

$\dfrac{25}{16}x^2 - x^2 = 18^2$, $\dfrac{9}{16}x^2 = 18^2$, $\dfrac{3}{4}x = 18$, откуда $x = 18 \cdot \dfrac{4}{3} = 24$.

Следовательно, $S = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC$, или $S = \dfrac{1}{2} \cdot 18 \cdot 24\text{-}216$ (см^2).

Вариант 38

1. $x = 3$.

Указание.

Записать уравнение в виде $\sqrt{8x-7} + \sqrt{2x-4} = \sqrt{7x-3} + \sqrt{3x-8}$.

Такая форма записи обусловлена тем, что $(8x - 7) + (2x - 4) = (7x - 3) + (3x - 8)$. Это дает возможность значительно упростить уравнение.

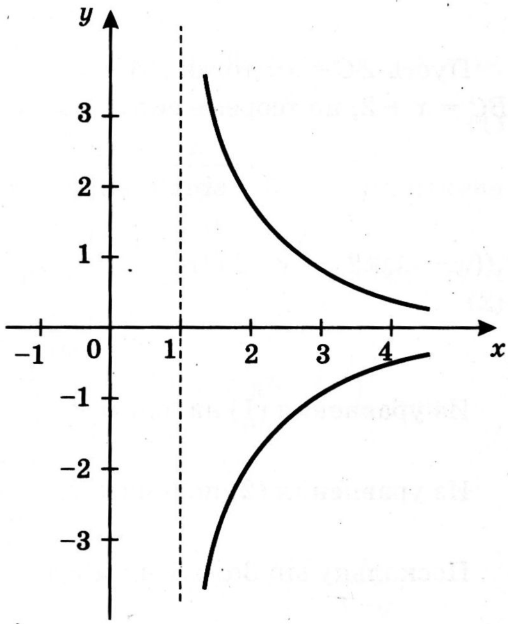
2. $0 < x \le 1$; $-1 \le x < 0$.

3. *Решение.*

$x \ne 0$, $x \ne 1$.

$|y| = \dfrac{3 \cdot 1 - 1}{x-1} = \dfrac{2}{x-1}$.

1) $\begin{cases} y > 0, \\ y = \dfrac{2}{x-1}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y < 0, \\ y = \dfrac{2}{1-x}. \end{cases}$



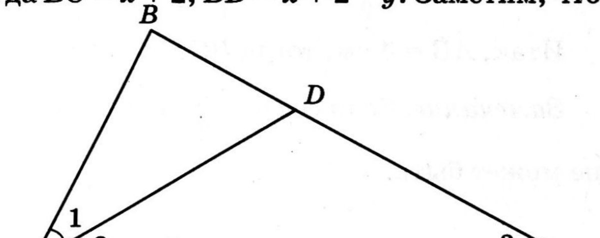
4. *Решение.*

Допустим противное. Тогда общее количество кроликов будет не меньше чем $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 45 = \dfrac{1}{2} \cdot 45 \cdot 46 = 1035 > 1000$.

5. *Решение.*

I способ

Проведем биссектрису AD угла A, тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, т. е. $AD = DC$. Пусть $AB = x$, $AD = DC = y$, тогда $BC = x + 2$, $BD = x + 2 - y$. Заметим, что $\Delta ABD \sim \Delta ABC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle 1 = \angle 3$).



Из подобия имеем

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$, или

$\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{x+2-y}{x+2} = \dfrac{y}{5}$.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{y}{5}, \\ \dfrac{x+2-y}{x+2} = \dfrac{y}{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy, \end{cases}$ откуда, вычитая из I уравнения II, получим $5y - 10 = 2y$, $y = \dfrac{10}{3}$, тогда $5x = \dfrac{10}{3}x + \dfrac{20}{3}$, откуда $x = 4$.

Значит, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

II способ

Пусть $\angle C = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 180° - 3\alpha$. Полагая, что $AB = x$, $BC = x + 2$, по теореме синусов имеем

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{x+2}{\sin 2\alpha}=\frac{5}{\sin(180°-2\alpha)}, \text{ или}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{x+2}{\sin 2\alpha}, & (1)\\ \dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{5}{\sin 3\alpha}. & (2)\end{cases}$$

Из уравнения (1) находим $\frac{x+2}{x}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$, или $1 + \frac{2}{x} = 2\cos\alpha$. (3)

Из уравнения (2) получим $x=\frac{5\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Поскольку $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, то $x=\frac{5}{3-4\sin^2\alpha}$.

Учитывая (3), имеем $1 + \frac{6-8\sin^2\alpha}{5} = 2\cos\alpha$, или

$8\cos^2\alpha - 10\cos\alpha + 3 = 0$, откуда $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Если $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, то, учитывая (3), имеем $x = 4$.

Если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, то $1 + \frac{2}{x} = 1$, что невозможно.

Итак, $AB = 4$ см, тогда $BC = x + 2 = 6$ (см).

Замечание. Если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, то $\alpha = 60°$, тогда $\angle C = 60°$, $\angle A = 120°$, чего не может быть.

Вариант 39

1. (3; 2).

Указание.

Записать I уравнение системы в виде $x^2 - 2(2y - 1)x + (5y^2 - 8y + 5) = 0$. Далее полученное уравнение рассмотреть как квадратное относительно x.

2. $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Указание.

Записать неравенство в виде $|3x + 1| > |\sqrt{3}+1|-\sqrt{3}$ и т. д.

3. *Решение.*

Известно, что $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$. Так как $x - y = a$, $x^3 - y^3 = b$, то $a^3 + 3axy = b$, откуда $xy = \dfrac{b-a^3}{3a}$. (1)

Далее имеем $(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$, откуда $x^5 - y^5 = (x - y)^5 + 5x^4y - 10x^3y^2 + 10x^2y^3 - 5xy^4$, или $c = a^5 + 5xy(x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3)$, или $c = a^5 + 5xy((x^3 - y^3) - 2xy(x - y))$,

$$c = a^5 + 5xy(b - 2axy). \quad (2)$$

Учитывая (1), равенство (2) примет вид

$c = a^5 + 5 \cdot \dfrac{b-a^3}{3a} \cdot \left(b - 2 \cdot \dfrac{b-a^3}{3a}\right)$, или $c = a^5 + \dfrac{5(b-a^3)(b+2a^3)}{9a}$, или

$9ac = 9a^6 + 5b^2 + 5a^3b - 10a^6$, $a(a^5 + 9c) = 5b(a^3 + b)$.

4. *Указание.*

$S = \dfrac{q_1}{1-q}$, где q — знаменатель прогрессии, тогда $S - q_1 = \dfrac{q_2}{1-q}$.

Разделив I равенство на II, получим требуемое.

5. 8,75 см.

Вариант 40

1. *Указание.*

Заменить $1 = ab(a + b)$ и подставить в знаменатели дробей. Возможны и другие способы.

2. $x = 5$.

3. 4.

4. 280 м.

Указание.

1 км/ч = 5/18 м/с.

5. 20 и 30.

Указание.

Использовать формулу $x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2)$, где x, y — длины диагоналей, a, b — длины сторон.

Вариант 41

1. $x_1 = 16$, $x_2 = 96$.

Указание.

Заменой $\begin{cases} \sqrt[4]{97-x} = a, \\ \sqrt[4]{x-15} = b, \end{cases}$ где $a \geq 0$, $b \geq 0$, получим $\begin{cases} a+b=4, \\ a^4+b^4=82 \end{cases}$ и т. д.

Возможны другие способы решений.

2. $x_1 = a$, $x_2 = \dfrac{24-19a}{19-8a}$.

3. *Указание.*

Привести неравенство к виду $(6 \sin x - \cos x)^2 > 0$.

4. *Решение.*

Пусть x л — вместимость бутыли, в ней $x \cdot 0{,}16$ — соли и $x \cdot 0{,}84$ — воды. 1 л смеси содержит 0,16 л соли и 0,84 л воды. Когда вылили 1 л, в новом растворе стало $(x \cdot 0{,}16 - 0{,}16)$ соли, а когда долили водой, то в 1 л нового раствора содержалось $\dfrac{x \cdot 0{,}16 - 0{,}16}{x}$ соли. Затем опять долили водой.

Окончательно соли останется $(x \cdot 0{,}16 - 0{,}16) - \dfrac{x \cdot 0{,}16 - 0{,}16}{x} = 0{,}04x$.

После упрощений получим уравнение

$4(x-1)^2 = x^2$, откуда $x = 2$, т. е. вместимость бутыли 2 л.

5. 1 см.

Вариант 42

1. $8\pi m$, $m \in Z$.

Указание.

Учесть, что $|\cos \alpha| \le 1$.

2. (4; 1), (1; 4).

3. 1) $a = -7$, $b = -1$; 2) $a = -12$, $b = -2$.

4. $b_1 = 32$, $q = \dfrac{1}{3}$.

5. 6,25.

Вариант 43

1. (0; 0; 0), $(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$.

2. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \ge 2$.

Указание.

Привести уравнение к виду $|\sqrt{x-3}+1| = \sin x + \sqrt{x-3}$.

3. При $a = 3$.

4. 3 двойки.

Указание.

Пусть x — количество «2», $x + 2$ — количество «5», $4x$ — количество «4», $4x - 1$ — количество «3».

Получим уравнение $x + (x + 2) + 4x + 4x - 1 = 31$ и т. д.

5. 25/8.

Вариант 44

1. 1099.

2. $x_1 = \frac{1}{6}(1+\sqrt{13})$, $x_2 = \frac{1}{9}$.

Указание.

Записать уравнение в виде $3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right) + 9\left(x+\frac{1}{9x}\right) - 8 = 0$ и затем ввести замену $\sqrt{x}-\frac{1}{3\sqrt{x}}=t$.

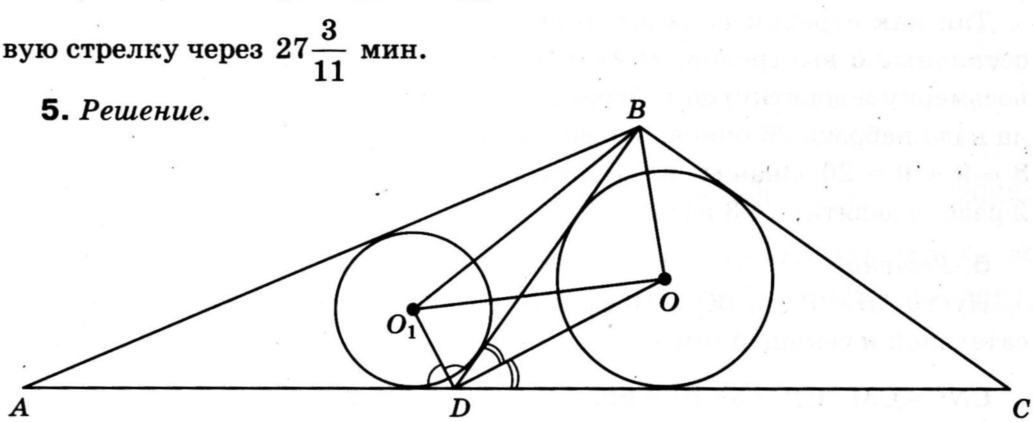
3. $(-\infty; 2)$.

4. *Решение.*

Скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой. Пусть y минут — время, через которое стрелки часов встретятся.

Тогда за это время часовая стрелка переместится на x мин, а минутная стрелка — на $12x$ мин. Учитывая, что первоначально между минутной и часовой стрелками было 25 мин, получим систему уравнений $\begin{cases} y=12x, \\ y=x+25, \end{cases}$ откуда $12x = x + 25$, $x = \frac{25}{11}$. Тогда $y = \frac{25}{11} + 25 = 25\left(\frac{1}{11}+1\right) = 25 \cdot \frac{12}{11}=\frac{300}{11}=27\frac{3}{11}$, т. е. минутная стрелка догонит часовую стрелку через $27\frac{3}{11}$ мин.

5. *Решение.*



Поскольку центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, то O_1D и OD являются биссектрисами $\angle ADB$ и $\angle BDC$. Но угол между биссектрисами смежных углов прямой, т. е. $\angle O_1DO = 90°$. Значит, ΔO_1DO — прямоугольный, где $O_1D = 5$, $OD = 12$. По теореме Пифагора $O_1O = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.

Заметим, что BO_1 и BO — биссектрисы $\angle ABD$ и $\angle CBD$ соответственно, тогда имеем $\angle O_1BO = \angle OBD + \angle O_1BD = \frac{1}{2}\angle CDB + \frac{1}{2}\angle ABD =$

$= \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$.

Из ΔO_1BO по теореме синусов имеем

$$\frac{O_1O}{\sin O_1BO} = \frac{OB}{\sin BO_1O} = \frac{BO_1}{\sin BOO_1} = 2R, \text{ или } \frac{13}{\sin 60°} = 2R, \text{ откуда}$$

$$R = \frac{13}{2\sin 60°} = \frac{13}{\sqrt{3}}.$$

Итак, $R = \frac{13}{\sqrt{3}}$.

Вариант 45

1. *Указание.*

Вынести за скобку степень с наименьшим показателем.

2. [1; 3].

Указание.

Ввести замену $y = \sqrt{2x - 2}$, где $y \geq 0$. Можно решить иначе, например, выделить полный квадрат под каждым подкоренным выражением.

3. При $a > -2,25$.

4. *Решение.*

Так как стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку в остальные 6 выстрелов, то за 3 выстрела (по одному разу в семерку, восьмерку и девятку) он наберет 24 очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела надо набрать 26 очков, что возможно при единственной комбинации $8 + 9 + 9 = 26$. Значит, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку — 2 раза, в девятку — 3 раза.

5. *Решение.*

Пусть $AB = 9$ см, $BC = 10$ см, $AK = BK$ и $CM = MB$. По теореме о касательной и секущей имеем

$$CN^2 = CM \cdot CB = 5 \cdot 10 = 50,\ AN^2 = AK \cdot AB = \frac{9}{2} \cdot 9 = \frac{81}{2} = 40,5.$$

$CN = 5\sqrt{2}$, $AN = 9/\sqrt{2}$.

Тогда $AC = AN + CN = 5\sqrt{2} + 9/\sqrt{2} = 19/\sqrt{2}$.

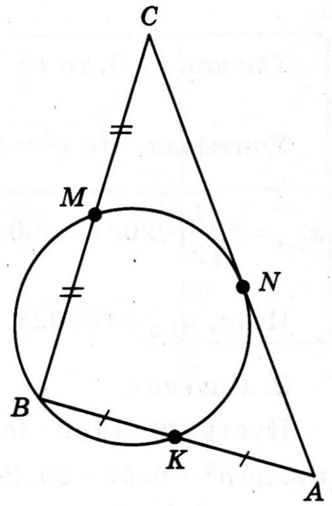
$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где

$p = \dfrac{1}{2}(9 + 10 + 19/\sqrt{2}) =$

$= \dfrac{1}{2}(19 + 19/\sqrt{2}) = \dfrac{19}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})$,

$p - a = \dfrac{19}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}) - 9 =$

$= \dfrac{19 + 19\sqrt{2} - 18\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{19+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$;



$p - b = \dfrac{19}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}) - 10 = \dfrac{19 + 19\sqrt{2} - 20\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{19-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$;

$p - c = \dfrac{19}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}) - \dfrac{19}{\sqrt{2}} = \dfrac{19 + 19\sqrt{2} - 38}{2\sqrt{2}} = \dfrac{19\sqrt{2} - 19}{2\sqrt{2}} = \dfrac{19}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)$.

Следовательно, $S_{\Delta ABC} = \sqrt{\dfrac{19}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})\cdot\dfrac{19+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{19-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{19}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)} =$

$= \dfrac{1}{8}\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(19+\sqrt{2})(19-\sqrt{2})} = \dfrac{1}{8}\sqrt{(2-1)(361-2)} = \dfrac{1}{8}\sqrt{359}$.

Итак, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{359}}{8}$ (см^2).

Вариант 46

1. *Решение.*

Запишем уравнение в виде $x^6 - 2023x^2 - x^2 + \sqrt{2023} = 0$, или

$x^2(x^4 - 2023) - (x^2 - \sqrt{2023}) = 0$, или

$x^2(x^2 - \sqrt{2023})(x^2 + \sqrt{2023}) - (x^2 - \sqrt{2023}) = 0$.

Вынесем общий множитель за скобки:

$(x^2 - \sqrt{2023})(x^4 + x^2\sqrt{2023} - 1) = 0$, откуда

$x^2 - \sqrt{2023} = 0$, или $x^4 + x^2\sqrt{2023} - 1 = 0$, $x^2 = \sqrt{2023}$, $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2023}$.

Уравнение $x^4 + \sqrt{2023}x^2 - 1 = 0$ — биквадратное. Пусть $x^2 = t$, где $t \ge 0$, тогда получим уравнение $t^2 + \sqrt{2023}t - 1 = 0$, $D = 2023 + 4 = 2027$,

$t_{1,2} = \dfrac{-\sqrt{2023} \pm \sqrt{2027}}{2}$.

Так как $t \geq 0$, то $t = \dfrac{\sqrt{2027} - \sqrt{2023}}{2}$.

Учитывая, что $x^2 = t$, получим $x^2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2027} - \sqrt{2023})$, откуда

$x_{3,4} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{2027} - \sqrt{2023})}$, подходит корень $x = \sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{2027} - \sqrt{2023})}$.

Итак, $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2023}$, $x_3 = \sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{2027} - \sqrt{2023})}$.

2. *Решение.*

Пусть $20 + 14\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^3$. Возведем обе части в куб и запишем в виде $a^3 + 6ab^2 = 20$; $3a^2b + 2b^3 = 14$. Решив полученную систему, находим $a = 2$, $b = 1$ и т. д.

Возможны другие способы решения.

3. (0; 1,5), (3; 0).

4. 147.

5. 16.

Вариант 47

1. $x = \dfrac{\pi n}{8}$, $n \in Z$.

2. При $a = -4$.

Указание.

Данная система не имеет решений, если $\dfrac{6+a}{-4} = \dfrac{2}{a} \neq \dfrac{3+a}{1+a}$.

3. 24.

Указание.

Обозначить $\sqrt{x - 144} = y$.

4. *Указание.*

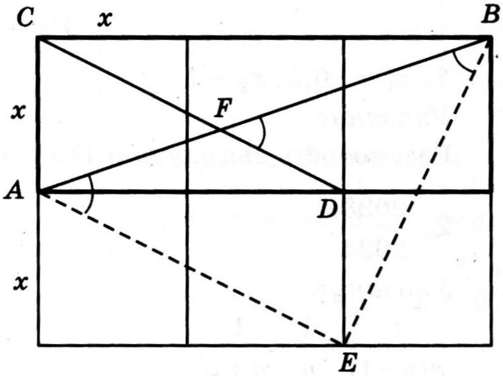
Пусть производительность труда увеличена на x %. Согласно условию получим уравнение $\dfrac{7}{8}(1 + 0{,}01x) = 1{,}05$, откуда $x = 20$ %.

5. *Решение.*

Пусть сторона квадрата x, тогда $AE = BE = x\sqrt{5}$ и $AB = \sqrt{5x^2 + 5x^2} = x\sqrt{10}$.

Из ΔABE, где $\angle BAE = \angle ABE = \alpha$, $\angle AEB = \beta$, по теореме косинусов имеем $10x^2 = 5x^2 + 5x^2 - 2x\sqrt{5}\cos\beta$, т. е. $\cos\beta = 0$, $\beta = 90°$, тогда $\angle BAE = \angle BFD = 45°$.

Замечание. Задачу можно решить иначе, применив скалярное произведение векторов AB и CD.



Вариант 48

1. $2\pi n$, $n \in Z$.

2. *Указание.*

Сложить уравнения системы и найти значение $x^2 + y^2$, после чего подставить в первое уравнение.

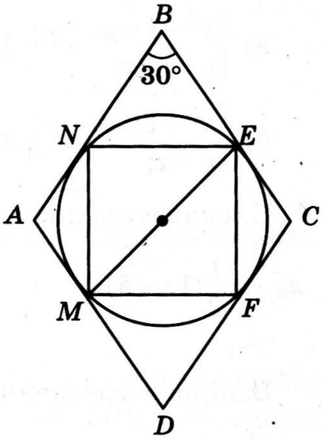
3. $-3{,}5$.

4. *Указание.*

Задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 131, \\ 4x + 5y = 231, \end{cases}$ где x и y — количество электродвигателей соответственно типа А и В.

5. *Решение.*

Пусть $AB = x$ — сторона ромба, тогда $S_{ABCD} = x^2 \sin\angle B = \dfrac{1}{2}x^2$, $S_{ABCD} = x \cdot h$, где h — высота ромба, значит, $\dfrac{1}{2}x^2 = xh$, откуда $h = \dfrac{1}{2}x$, тогда $d = h = \dfrac{x}{2}$ — диаметр окружности.



Следовательно, $ME = d = \dfrac{x}{2}$ — длина диагонали квадрата $MNEF$, тогда $MN = \dfrac{ME}{\sqrt{2}} = \dfrac{x}{2\sqrt{2}}$.

$S_{MNEF} = MN^2 = \dfrac{x^2}{8}$, $S_{ABCD} : S_{MNEF} = \dfrac{1}{2}x^2 : \dfrac{x^2}{8} = \dfrac{1}{2}x^2 \cdot \dfrac{8}{x^2} = 4$.

Вариант 49

1. $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 1$.

Указание.

Рассмотреть два случая: 1) $x > 0$; 2) $x < 0$ и т. д.

2. $\dfrac{2023}{2024}$.

Указание.

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

3. *Решение.*

I способ

Запишем уравнение в виде $(x^2 - 1)^2 + x(x^2 - 1) - 2x^2 = 0$. (1)

Пусть $x^2 - 1 = y$, тогда получим $y^2 + yx - 2x^2 = 0$ — однородное уравнение II степени.

Уравнение (1) можно решить разными способами:

1) разделить обе части на x^2 (или y^2);

2) разложить левую часть на множители способом группировки, представив $yx = 2xy - xy$;

3) как квадратное относительно переменной y, считая $x = \text{const}$.

Имеем $y_1 = -2x$, $y_1 = x$.

Учитывая замену $x^2 - 1 = y$, получим

а) $\begin{cases} x^2-1=y, \\ y=-2x; \end{cases}$ $x^2 - 1 = -2x$, $x^2 + 2x - 1 = 0$, откуда $x_{1,\,2}=-1\pm\sqrt{2}$;

б) $\begin{cases} x^2-1=y, \\ y=x; \end{cases}$ $x^2 - x - 1 = 0$, $x_{3,\,4}=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$.

Следовательно, исходное уравнение имеет 4 корня: $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$; $x_{3,\,4}=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$.

II способ

Запишем уравнение в виде $x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1 = 2x^2$.

Прибавим к обеим частям уравнения по $\dfrac{1}{4}x^2$:

$\left(x^2+\dfrac{1}{2}x\right)^2-2\left(x^2+\dfrac{1}{2}x\right)+1=\dfrac{9}{4}x^2$, или $\left(x^2+\dfrac{1}{2}x-1\right)^2=\dfrac{9}{4}x^2$, откуда получим 2 уравнения:

1) $x^2+\dfrac{1}{2}x-1=\dfrac{3}{2}x$, или $x^2 - x - 1 = 0$, $x_{1,\,2}=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$;

2) $x^2+\frac{1}{2}x-1=-\frac{3}{2}x$, или $x^2+2x-1=0$, $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{2}$.

III способ

Так как $x\neq 0$, то, разделив обе части уравнения на $x^2\neq 0$, получим $x^2+x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$, или $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)=4$. Далее заменой $x-\frac{1}{x}=y$, $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ уравнение приводится к квадратному $t^2+t-2=0$, откуда $t_1=-2$, $t_2=1$ и т. д.

IV способ

Исходное уравнение представим в виде
$x^2(x^2+2x-1)-x(x^2+2x-1)-(x^2+2x-1)=0$, или
$(x^2+2x-1)(x^2-x-1)=0$, откуда
1) $x^2+2x-1=0$; 2) $x^2-x-1=0$ и т. д.

4. 971.

Указание.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} a+b+c=17, \\ \overline{abc}-\overline{cba}=792. \end{cases}$

5. $\sqrt{mn}$.

Вариант 50

1. *Решение.*

I способ

Легко заметить, что $\cos x=\pm\frac{1}{2}$ удовлетворяет данному уравнению, тогда $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ и $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

При других возможных значениях слева имеем сумму иррациональных чисел, а справа — число 1. Следовательно, других решений данное уравнение не имеет, т. е. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ и $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

II способ

Область определения уравнения равносильна системе неравенств

$\begin{cases}\frac{1}{2}-\cos x\geq 0,\\ \frac{1}{2}+\cos x\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\cos x\leq \frac{1}{2},\\ \cos x\geq -\frac{1}{2};\end{cases}$ откуда $-\frac{1}{2}\leq \cos x\leq \frac{1}{2}.$

При $\cos x = \pm\frac{1}{2}$ имеем $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ и $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

III способ

Пусть $\sqrt[6]{\frac{1}{2}-\cos x}=u$, $\sqrt[6]{\frac{1}{2}+\cos x}=v$, где $u\geq 0$, $v\geq 0$.

Тогда $\frac{1}{2} - \cos x = u^6$, $\frac{1}{2} + \cos x = v^6$, кроме того, исходное уравнение примет вид $u + v = 1$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases}u+v=1,\\ \frac{1}{2}-\cos x=u^6,\\ \frac{1}{2}+\cos x=v^6;\end{cases}\qquad \begin{cases}u+v=1,\\ u^6+v^6=1.\end{cases}$$

Заметим, что если u и v — дробные числа, то $u^6 < u$, $v^6 < v$, значит, u и v — целые числа. Тогда имеем две возможности:

1) $\begin{cases}u=0,\\ v=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}u=1,\\ v=0.\end{cases}$

Следовательно, $\cos x = \frac{1}{2}$, или $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, и $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Оба решения можно объединить в виде $x = \frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$, $k \in Z$.

2. $(\pm 3; \pm 1)$, $(\pm 1; \pm 3)$.

Указание.

Возвести I уравнение в квадрат и учесть II уравнение.

3. $(-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$.

4. На 7,1 %.

5. *Решение.*

Поскольку $a + b + c \neq 0$, то, умножив обе части равенства на $a + b + c$, получим $\frac{(a+c)+b}{a+c}+\frac{(b+c)+a}{b+c}=3$, или $1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{a}{b+c} = 3$, или $\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}=1$, откуда $c^2 = a^2 + b^2 - ab$.

Но $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$ (по теореме косинусов), тогда $\cos\angle C = \frac{1}{2}$, откуда $\angle C = 60°$.

Вариант 51

1. $x = 51$, $y = 50$.

Указание.

Учесть, что 101 — простое число.

2. Нет.

Указание.

$y(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

$y(3) - y(1) = 24a + 4b$ — четное, а по условию должно быть нечетным.

3. $5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

4. При $-1 < x < 0$.

5. *Указание.*

Из второго конца гипотенузы провести прямую внутри треугольника под углом 15° к гипотенузе.

Вариант 52

1. $(2; 1)$, $(-1; 2)$, $(-1; 1)$.

Указание.

$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$. Далее замена $x + y = a$, $xy = b$.

2. $(-2; 0)$.

Указание.

Преобразовать неравенство к виду $\frac{x^2-4}{|x|-2} \geq x^2$. Далее рассмотреть 2 случая: 1) $x \geq 0$; 2) $x < 0$.

3. *Решение.*

При $x = 13$ имеем $a \cdot 13^2 + b \cdot 13 + c = 2$, а при $x = 60$ получим $a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c = 3$.

Вычитая из II равенства I, находим $a(60^2 - 13^2) + b(60 - 13) + c = 1$, а если a и b — целые, то 1 делится на $60 - 13 = 47$, что неверно.

4. 70 кг.

5. 1 : 4.

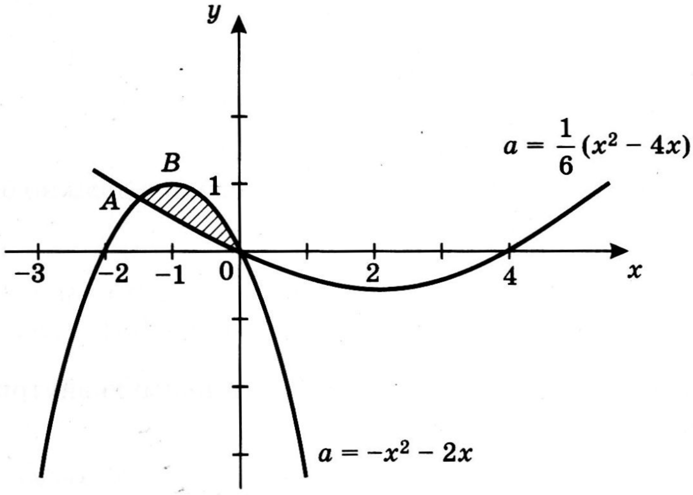
Вариант 53

1. $x = 3$.

Указание.

Представить уравнение в виде $(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6})^2 + (\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}) = 20$. Далее замена $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=y$, где $y > 0$.

2. *Решение.*



На плоскости $x0a$ изобразим параболы $a = -x^2 - 2x$ и $a = \frac{1}{6}(x^2 - 4x)$.

Как видно из рисунка, точки, координаты которых удовлетворяют данной системе, лежат ниже параболы $a = -x^2 - 2x$ и выше параболы $a = \frac{1}{6}(x^2 - 4x)$.

Решая уравнение $-x^2 - 2x = \frac{1}{6}(x^3 - 4x)$, найдем абсциссы точек пересечения парабол: $-6x^2 - 12x = x^2 - 4x$, или $7x^2 + 8x = 0$, $x(7x + 8) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{8}{7}$.

Если $x_1 = 0$, то $a_1 = 0$; если $x_2 = -\frac{8}{7}$, то $a_2 = -\left(\frac{64}{49} - \frac{16}{7}\right) = \frac{48}{49}$.

Итак, параболы пересекаются в точках $O(0;\ 0)$ и $A\left(-\frac{8}{7};\ \frac{48}{49}\right)$.

Заметим, что точка A расположена левее вершины первой параболы $B(-1;\ 1)$. Горизонтальная прямая пересекает заштрихованную область по единственной точке, если она проходит через точки O и B, т. е. при $a = 0$ и $a = 1$.

3. (1; 2), (−1; 0), (2; 4,5), (−2; 0,5).

4. 30 и 60 км/ч.

5. $5\sqrt{41}$.

Вариант 54

1. *Указание.*
Умножить обе части уравнения на 4 и прибавить по единице.

2. При $a = 2$ и $a = -1$.
Указание.
Выразить из I уравнения x через y и подставить во II уравнение.

3. 1.

4. 13,5 кг.

5. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Указание.
Использовать подобие ΔBEC и ΔAED, а затем теорему косинусов в ΔABE.

Вариант 55

1. (±1; 0), (0; ±1).

2. (2; 1).
Указание.
Разложить на множители левую часть I уравнения системы.

3. $p > n$.

4. *Решение.*

Пусть x — делитель, r — остаток, тогда $3r$ — частное и $111 - r = 3rx$, откуда $x = \frac{111 - r}{3r}$. Так как x — целое, то подходит значение $r = 3$. Тогда получим $x = \frac{111 - 3}{3 \cdot 3} = 12$.

5. 6.

Вариант 56

1. $\left(-3; \pm\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$, $(2; \pm\sqrt{2})$.

2. *Указание.*

Имеет место тождество

$(x^3 + x + 1)(ax^2 + bx + c) = 2x^5 - x^4 + x^2 + mx + n.$

Далее раскрыть скобки и сгруппировать слагаемые при одинаковых степенях. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим $a = 2$, $b = -1$, $a + c = 0$, откуда $m = -3$, $n = -2$.

3. 13 225.

4. 150 г и 450 г.

5. *Указание.*

Учесть, что ΔMNK и ΔKPE вместе составляют ΔMKE. Тогда площадь пятиугольника равна двум площадям ΔMKE, т. е. равна $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$.

Вариант 57

1. $\pi + 2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

2. $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

3. *Указание.*

Преобразовать данное выражение к виду $\frac{1}{6}(m + 2)(m + 3)(m + 4)$, откуда и следует требуемое.

4. Приблизительно через 55 лет.

5. 75°.

Указание.

Использовать теоремы синусов и косинусов.

Вариант 58

1. $x = 4$.

Указание.

Умножить обе части уравнения на x, а затем разделить на $(x-3)^3 \neq 0$. Далее замена $\frac{\sqrt{x}}{x-3} = y$ и т. д.

2. $(27; -8)$, $(-8; 27)$.

3. *Решение.*

$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$; $b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2$; $a^4 + c^4 \geq 2a^2c^2$. Складывая полученные неравенства и учитывая, что $a^2 + c^2 \geq 2ac$, получим требуемое.

4. 2.

5. 16 м^2.

Указание.

Использовать формулу $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \cdot \sin\varphi$, где $d_1 = d_2$ и φ — угол между диагоналями.

Вариант 59

1. $x = 2$.

Указание.

Представить уравнение в виде $\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} - \frac{x+2}{7x+2} = \frac{7}{2}$.

Далее замена $\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} = y$ и т. д.

2. *Решение.*

Пусть $\sqrt[3]{3+\sqrt{8}} = a$, тогда $x = a - \frac{1}{a}$.

Значит, $x^3 + 3x = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = a^3 - \frac{1}{a^3} = (3+\sqrt{8}) - \frac{1}{3+\sqrt{8}} =$

$$= \frac{(3+\sqrt{8})^2 - 1}{3+\sqrt{8}} = \frac{8+6\sqrt{8}+8}{3+\sqrt{8}} = \frac{16+6\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}} = \frac{(16+6\sqrt{8})(3-\sqrt{8})}{9-8} =$$

$$= (16+6\sqrt{8})(3-\sqrt{8}) = 4\sqrt{2}.$$

3. *Решение.*

Пусть $(x^2 + Ax + B)^2 = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + ax + b$.

Раскрывая скобки, получим

$x^4 + 2Ax^3 + (A^2 + 2B)x^2 + 2ABx + B^2 = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + ax + b$.

Теперь сравним коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{cases} 2A=2, \\ A^2+2B=5, \\ 2AB=a, \\ B^2=b; \end{cases} \quad \begin{cases} A=1, \\ 1+2B=5, \\ 2\cdot 1\cdot B=a, \\ b=B^2; \end{cases} \quad \begin{cases} A=1, \\ B=2, \\ a=4, \\ b=2^2=4. \end{cases}$$

Итак, $a = 4$, $b = 4$.

4. *Решение.*

Сумма возрастов сотрудников первоначально была равна $12 \cdot 34$, а после принятия нового сотрудника стала равна $13 \cdot 33$. Следовательно, возраст нового сотрудника равен $13 \cdot 33 - 12 \cdot 34 = 21$ год.

5. 25π см^2.

Указание.

Соединить точку касания и вершины оснований трапеции с центром окружности.

Вариант 60

1. $(0; 0)$, $(12; -3)$, $(-3; 12)$, $(17; 17)$.

Указание.

Вычесть из I уравнения II.

2. $\frac{7}{5}(x^2 + xy + y^2)$.

3. *Решение.*

Так как $a \neq 0$, $b \neq 0$, то, умножив обе части данного неравенства на $a^3b^3 \neq 0$, получим $a^9b^3 + a^3b^9 \leq a^{12} + b^{12}$, или $(a^3 - b^3)(a^9 - b^9) \geq 0$, откуда $(a^3 - b^3)^2(a^6 + a^3b^3 + b^6) \geq 0$ — верно при любых $a \neq 0$, $b \neq 0$. Значит, верно и равносильное ему исходное неравенство.

4. 336.

Указание.

Использовать формулы $R=\frac{abc}{4S}$ и $r=\frac{S}{p}$. Далее обозначить стороны треугольника $a = x$, $b = x + 2$, $c = x + 4$, тогда $\frac{abc}{4p}=\frac{x(x+4)}{6}=130$ и т. д.

5. *Решение.*

Продолжим AD до пересечения с BC в точке E. Так как $\angle A = \angle B = 45°$, то $\angle AEB = 90°$, значит, ΔABE — равнобедренный и прямоугольный.

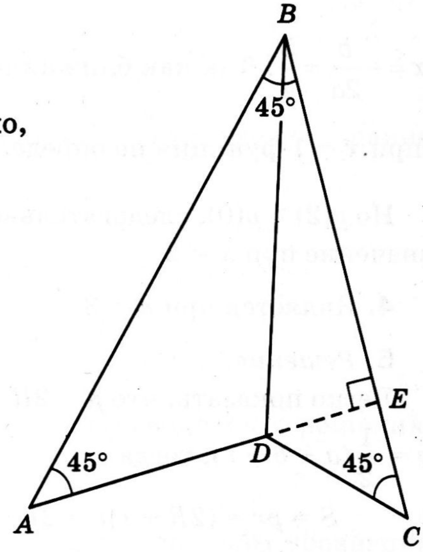
Аналогично в ΔDEC $DE = CE$, $\angle EDC = \angle C = 45°$.

Пусть $AE = BE = x$, $DE = CE = y$, тогда $S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}x^2$, $S_{\Delta DFC} = \frac{1}{2}y^2$.

Значит, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Но в ΔDEB $x^2 + y^2 = BD^2$, следовательно,

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD^2$, ч. т. д.



Вариант 61

1. *Указание.*

Записать уравнение в виде $(x^2 - x - 2)^2 - 3^2 = x^3 + 1$.

2. $(0; 0)$, $(\pm 2; \pm 1)$, $(\pm\sqrt[4]{2}; \pm 2\sqrt[4]{2})$.

Указание.

Пара $(0; 0)$ — решение системы. Пусть $xy \neq 0$, тогда, перемножив обе части системы, а затем разделив на $x^3y^3 \neq 0$, получим

$$8\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^3}{x^3}\right) = 99.$$

Далее замена $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$, $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$,

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = t^3 - 3t \text{ и т. д.}$$

3. *Решение.*

Пусть $y = \frac{1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 4}}{5x - 2x^2 - 3}$, или $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 4} - 1}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 4} + 1}$.

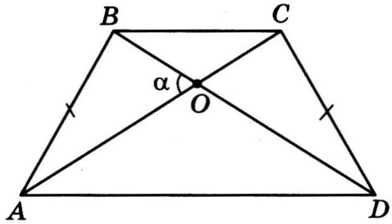
Пусть $2x^2 - 5x + 4 = t$, где $t > 0$ при всех $x \in R$, так как $D < 0$ и $a > 0$. Следовательно, $E(t) \in (0; +\infty)$.

Заметим, что функция $f(x) = f(t(x)) = \frac{1}{\sqrt{t} + 1}$ убывающая, тогда свое наибольшее значение она получит при наименьшем значении t, т. е. при

$x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{5}{4}$. Так как ближайшими к $x=\dfrac{5}{4}$ целыми числами будут 0 и 2 (при $x = 1$ функция не определена), то $y(0)=\dfrac{1}{3}$ и $y(2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

Но $y(2) > y(0)$, следовательно, исходное выражение имеет наибольшее значение при $x = 2$.

4. Является при $n = 3$.



5. *Решение.*

Легко показать, что $p = 2R + r$, где $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$, тогда

$$S = pr = (2R + r)r = 2R \cdot r + r^2.$$

Следовательно, $S + R^2 = (2Rr + r^2) + R^2 = (R + r)^2$, или $R + r = \sqrt{S+R^2}$, откуда $r = \sqrt{S+R^2} - R$, ч. т. д.

Вариант 62

1. $(\pm2; \pm1)$, $(\pm1; \pm2)$.

Указание.

Выразить $x^4 + y^4$ через xy, а из II уравнения $x^2 + y^2 = 7 - xy$ и т. д.

2. При $x = -4; -2; 0; 2$.

3. *Решение.*

Между корнями x_1, x_2 и x_3 данного уравнения существует зависимость

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}. \qquad (1)$$

По условию задачи $x_1 + x_3 = 2x_2$, тогда, учитывая (1), имеем $2x_2 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, или $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$, ч. т. д.

4. 13 и 1325.

5. *Решение.*

Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = CD$, $AC = BD = m$ и $\angle AOB = \alpha$, $AO = x$, $CO = y$.

Заметим, что $S = 2S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD} = 2 \cdot \dfrac{1}{2}xy\sin\alpha + \dfrac{1}{2}y^2\sin(180° - \alpha) + \dfrac{1}{2}x^2\sin(180° - \alpha) = xy\sin\alpha + \dfrac{1}{2}y^2\sin\alpha + \dfrac{1}{2}x^2\sin\alpha = \dfrac{1}{2}(x + y)^2\sin\alpha = \dfrac{1}{2}m^2\sin\alpha$, где $x + y = AC = BD = m$.

Итак, $S = \frac{1}{2} m^2 \sin \alpha$, ч. т. д.

Замечание. Если $\alpha = 90°$, то $AC \perp BD$, тогда $S = \frac{1}{2} m^2$, где m — длина диагонали.

Вариант 63

1. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.
Указание.
Заменой $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{x+1} = b$ исходное уравнение сводится к решению системы $\begin{cases} a^3 - b^3 = \frac{7}{8}, \\ \frac{a-b}{ab} = 1, \end{cases}$ откуда новой заменой $2ab = t$ получим уравнение $t^3 + 6t - 7$, где $t = 1$ — корень уравнения, так как $1 + 6 - 7 = 0$ и т. д.

2. $x = -1$.
Указание.
Рассмотреть 3 случая:
1) $x < -2$; 2) $-2 < x < \frac{4}{3}$; 3) $x > \frac{4}{3}$.

3. *Решение.* $\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; ...; $\frac{1}{1000^2} < \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}$.
Складывая полученные неравенства, получим
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2} < 1 - \frac{1}{1000} = 0{,}999.$$

4. *Указание.*
Левую часть уравнения записать в виде $x^3 + ax^2 + 56x - 64 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x - m)(x - mq)(x - mq^2)$. Далее раскрыть скобки и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x. Решив систему, находим $a = -14$.

5. *Решение.*
На продолжении отрезка BM за точку M возьмем точку D, так что $MD = CM$. Тогда ΔCDM — правильный и $CD \parallel MN$.
Значит, $BM : MN = BD : DC = (BM + CM) : CM$, т. е. $\frac{1}{BM} = \frac{1}{MN} + \frac{1}{CM}$.

Вариант 64

1. *Указание.*

Записать систему в виде $\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2)=65,\\(x+y)(x-y)^2=5.\end{cases}$

Далее ввести замену $(x-y)^2=a$, $x+y=b$. Тогда получим $a=1$, $b=5$, после чего находим две пары решений: (3; 2), (2; 3).

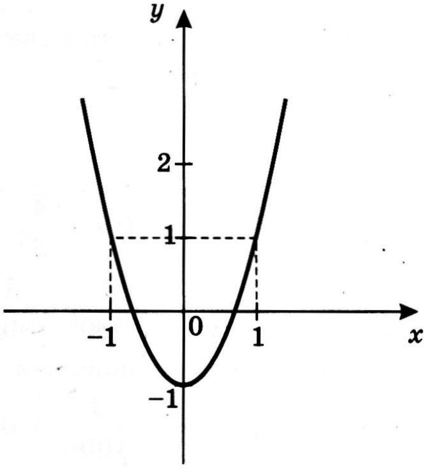
2. *Решение.*

Так как $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ — произведение трех последовательных целых чисел кратно 2 и 3, то оно кратно 6, тогда $a^5-a=(a^2+1)(a^3-a)$ и b^3-b кратно 6.

Значит, делится на 6 и $a+b+c+(a^5-a)+(b^5-b)=a^5+b^3+c$, ч. т. д.

3. *Указание.*

После преобразований получим $y=2x^2-1$.



4. (−4; 16), (3; 9).

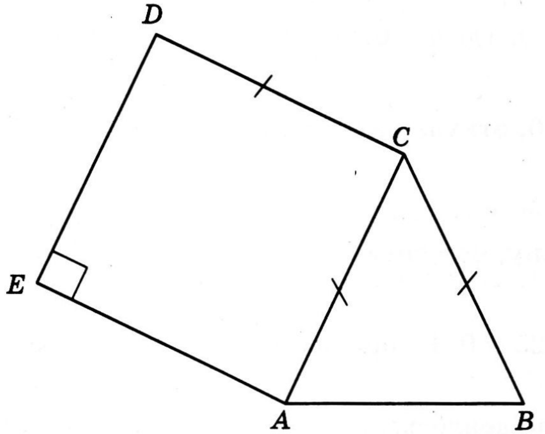
Указание.

Если числа m, x_1, x_2 и n образуют геометрическую прогрессию, то $\begin{cases}x_1^2=mx_2,\\x_2^2=nx_1,\end{cases}$ откуда $m=\dfrac{x_1^2}{x_2}$, $n=\dfrac{x_2^2}{x_1}$. Далее применить теорему Виета.

5. *Решение.*

Пусть $AC=BC=CD=x$. По условию $x^2=4S_{\Delta ABC}$.

Но $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}x^2\sin\angle C$, тогда $x^2=2x^2\sin\angle C$, откуда $\sin\angle C=\dfrac{1}{2}$, $\angle C=30°$, $\angle A=\angle B=75°$. По следствию из теоремы синусов имеем $\dfrac{AB}{\sin\angle C}=2R$, откуда $R=y$.



Известно, что $S_\Delta = p \cdot r$, где $p = \dfrac{1}{2}(2x + y)$, тогда $r = \dfrac{x^2}{2(2x+y)}$,

$$\frac{R}{r} = \frac{2y(2x+y)}{x^2}. \quad (1)$$

Но $\cos \angle A = \dfrac{0{,}5y}{x} = \cos 75°$, или $y = 2x \cos 75°$, тогда равенство (1) примет вид

$$\frac{R}{r} = 8 \cos 75° \cdot (1 + \cos 75°). \quad (2)$$

$\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$,

тогда (2) примет вид

$$\frac{R}{r} = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)\right) = (\sqrt{3}-1)(2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1) =$$
$$= 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4 = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1).$$

Вариант 65

1. *Решение.*

I способ

Запишем уравнение в виде $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12}$. **(1)**

Возведем обе части (1) в квадрат:

$$\left(x^2 + \frac{x^2}{x^2-1}\right) + \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1225}{144}, \text{ или } \frac{x^4}{x^2-1} + 2 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1225}{144}. \quad (2)$$

Пусть $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=y$, где $y>0$, тогда уравнение (2) примет вид

$y^2+2y-\dfrac{1225}{144}=0$, откуда находим $y_1=\dfrac{25}{12}$, $y_2=-\dfrac{49}{12}$ (не удовлетворяет условию $y>0$).

Учитывая замену, получим $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{25}{12}$, или $\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{625}{144}$,

$144x^4-625x^2+625=0$. Решая полученное уравнение, находим $x_1=\dfrac{5}{3}$,

$x_2=\dfrac{5}{4}$. Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

II способ

Пусть $\sqrt{x^2-1}=y$, где $y>0$, тогда $x^2=y^2+1$ и уравнение (1) примет вид $1+\dfrac{1}{y}=\dfrac{35}{12x}$. **(3)**

Возведем обе части (3) в квадрат:

$1+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1225}{144x^2}$, и так как $x^2=y^2+1$, то имеем $1+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1225}{144(y^2+1)}$,

или $y+2+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1225y}{144(y^2+1)}$, $y>0$.

Полученное уравнение запишем в виде

$$y+\frac{1}{y}+2=\frac{1225}{144\left(y+\dfrac{1}{y}\right)}. \qquad (4)$$

Заменой $y+\dfrac{1}{y}=t$ уравнение (4) приводим к виду $t^2+2t-\dfrac{1225}{144}=0$ и т. д., как в I способе.

Замечание. Исходное уравнение можно решить заменой $x=\dfrac{1}{\sin t}$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. *Решение.*

Преобразуем I уравнение системы:

$12\left(\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{4y}+\dfrac{5}{12z}\right)\cdot 12\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{5z}{12}\right)=144$, или

$$\left(\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}\right)(4x + 3y + 5z) = 144, \text{ или}$$

$$12\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+20\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right) + 15\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) = 94. \qquad (1)$$

Но $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$, $\frac{x}{z}+\frac{z}{x} \geq 2$; $\frac{y}{z}+\frac{z}{y} \geq 2$, тогда равенство (1) выполняется при условии, что $x = y = z = 2$. При этих значениях II уравнение исходной системы примет вид

$$x^3 + 2x^2 + 3x = 22. \qquad (2)$$

Так как число 2 — корень уравнения (2), то
$x^2(x - 2) + 4x(x - 2) + 11(x - 2) = 0$, или $(x - 2)(x^2 + 4x + 11) = 0$, откуда $x = 2$ — единственный корень. Тогда $x = y = z = 2$, т. е. исходная система имеет единственное решение.

3. *Решение.*

$$a^3 + 7a + 19 = 0, \qquad (1)$$
$$b^3 + 7b + 19 = 0, \qquad (2)$$
$$c^3 + 7c + 19 = 0. \qquad (3)$$

Вычтем из (1)–(2): $a^3 - b^3 + 7(a - b) = 0$.
Так как $a - b \neq 0$, то $a^2 + ab + b^2 + 7 = 0$. (4)
Теперь вычтем из (1)–(3):
$a^3 - c^3 + 7(a - c) = 0$, $a - c \neq 0$, тогда

$$a^2 + ab + c^2 + 7 = 0. \qquad (5)$$

Аналогично получим $a^2 + ab + b^2 + 7 - (a^2 + ac + c^2 + 7) = 0$, или $a(b - c) + (b^2 - c^2) = 0$, $b - c \neq 0$, значит, $a + b + c = 0$, ч. т. д.

4. *Решение.*

Обозначим через x, y, z, u соответственно количество «двоек», «троек», «четверок» и «пятерок». Согласно условию имеем

$$\begin{cases} x+y+z+u=30, & (1)\\ 2x+3y+4z+5u=90. & (2) \end{cases}$$

Кроме того, $u < z < y$. (3)

По условию z кратно 5 и y кратно 7. Из (3) $\Rightarrow y \neq 0$, $z \neq 0$. Из равенств (1) и (2) исключим x:

$$\begin{cases} 2x+2y+2z+2u=60, \\ 2x+3y+4z+5u=90, \end{cases} \text{ откуда получим } y + 2z + 3u = 30. \qquad (4)$$

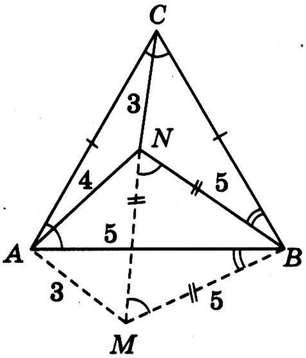
Так как z кратно 5 и $z \neq 0$, то из (4) $\Rightarrow z = 5$, или $z = 10$.

1) Если $z = 5$, то (4) примет вид $y + 3u = 20$. Так как $y \neq 0$ и y кратно 7, то $y = 7$ или 14. Но если $y = 7$, то $3u = 13$ — не подходит, так как u — целое число. Если $y = 14$, то $u = 2$, тогда $x = 9$.

2) Если $z = 10$, то $y + 3u = 10$. Так как $y \neq 0$ и y кратно 7, то с учетом условия $z < y$ следует, что при $z = 10$ должно быть $y > z$ и уравнение $y + 3u = 10$ не имеет решения при указанных ограничениях. Итак, $x = 9$, $y = 14$, $z = 5$, $u = 2$, т. е. «пятерок» — 2, «четверок» — 5, «троек» — 14, «двоек» — 9.

5. *Решение.*

I способ



Пусть N — точка внутри правильного треугольника ABC, где $CN = 3$, $AN = 4$, $BN = 5$.

1) Построим равносторонний ΔBMN так, чтобы точки M и N находились по разные стороны от AB.

2) Соединим точки A и M.

3) $\Delta ABM = \Delta CBN$ (по двум сторонам и углу между ними), так как $AB = BC$ (по условию), $BN = BM$ (по построению), $\angle CBN = \angle ABM$.

4) Из равенства треугольников ABM и $CBN \Rightarrow CN = AM = 3$.

5) В ΔANM $AM = 3$, $AN = 4$, $MN = 5$, значит, ΔANM — прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора, так как $3^2 + 4^2 = 5^2$).

$$\cos\angle ANM = \frac{AM}{MN} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\angle ANM = \frac{3}{5}.$$

6) Из ΔANB по теореме косинусов имеем

$AB^2 = AN^2 + BN^2 - 2AN \cdot BN \cdot \cos\angle ANB$, где $\cos\angle ANB = \cos(\alpha + 60°)$, $\alpha = \angle ANM$.

Значит, $\cos(\alpha + 60°) = \cos\alpha \cdot \cos 60° - \sin\alpha \cdot \sin 60° =$

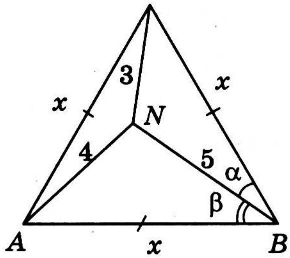
$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{10}(4 - 3\sqrt{3}).$$

Тогда $AB^2 = 16 + 25 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{1}{10}(4 - 3\sqrt{3}) = 41 - 4(4 - 3\sqrt{3}) = 25 + 12\sqrt{3}$,

откуда $AB = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

Ответ: $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

II способ



Пусть $\angle CBN = \alpha$, $\angle ABN = \beta$, $AB = BC = AC = x$.

Из ΔBCN по теореме косинусов имеем

$CN^2 = BC^2 + BN^2 - 2BC \cdot BN \cdot \cos\alpha$, или

$9 = x^2 + 25 - 10x\cos\alpha$, откуда

$$\cos\alpha = \frac{x^2+16}{10x}. \qquad (1)$$

Аналогично из ΔABN получим $AN^2 = AB^2 + BN^2 - 2AB \cdot BN \cdot \cos\beta$,

или $16 = x^2 + 25 - 10x\cos\beta$, откуда $\cos\beta = \dfrac{x^2+9}{10x}$. $\qquad (2)$

Заметим, что $\alpha + \beta = 60°$, так как ΔABC — правильный, тогда $\alpha = 60° - \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \cos(60° - \beta) = \cos 60° \cdot \cos\beta + \sin 60° \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta. \qquad (3)$$

Равенство (3) запишем в виде

$$\cos\alpha - \frac{1}{2}\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta. \qquad (4)$$

Теперь возведем обе части равенства (4) в квадрат:

$\cos^2\alpha - \cos\alpha\cos\beta + \dfrac{1}{4}\cos^2\beta = \dfrac{3}{4}\left(1-\cos^2\beta\right)$, откуда получим

$$\cos^2\alpha - \cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = \frac{3}{4}. \qquad (5)$$

Учитывая соотношения (1) и (2), равенство (5) примет вид

$\left(\dfrac{x^2+16}{10x}\right)^2 - \dfrac{x^2+16}{10x} \cdot \dfrac{x^2+9}{10x} + \left(\dfrac{x^2+9}{10x}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$, или

$$\left(x^2+16\right)^2 - \left(x^2+16\right)\left(x^2+9\right) + \left(x^2+9\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot 100x^2.$$

После дальнейших преобразований получим биквадратное уравнение $x^4 - 50x^2 + 193 = 0$, откуда $\left(x^2\right)_{1,2} = 25 \pm 12\sqrt{3}$. Значение $x^2 = 25 - 12\sqrt{3}$ не подходит, поскольку из неравенства треугольника следует, что $2x = AC + BC > NA + NB = 9$.

Значит, $x^2 > \dfrac{81}{4} > 20$, т. е. $x^2 = 25 + 12\sqrt{3}$, откуда $x = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

Ответ: $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

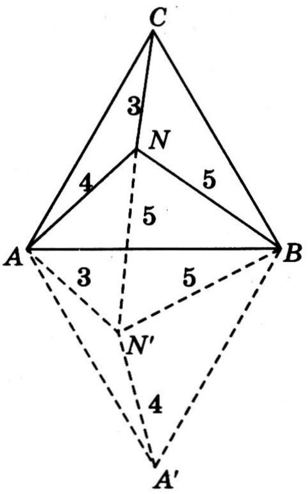
III способ

По условию ΔABC — правильный.

N — данная точка, $CN = 3$, $AN = 4$, $BN = 5$.

Повернем ΔABC на $60°$ относительно вершины B так, чтобы вершина C попала в A, при этом образ A обозначим A', образ N — N'. Так как $\Delta BNN'$ — правильный, то $NN' = 5$. Заметим, что $\Delta ACN = \Delta AA'N'$ (по трем сторонам), значит, ΔANN_1 — прямоугольный ($5^2 = 3^2 + 4^2$), $\angle NAN' = 90°$.

Следовательно, $\angle CAN + \angle N'AA' = 120° - 90° = 30°$, $\angle ACN + \angle CAN = 30°$, $\angle ANC = 180° - 30° = 150°$.



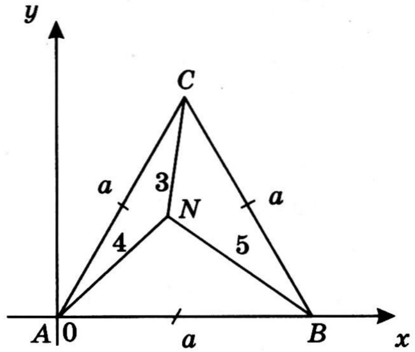
Из ΔANC по теореме косинусов имеем $AC^2 = AN^2 + CN^2 - 2AN \cdot CN \cdot \cos \angle ANC$, или $AC^2 = 16 + 9 - 24 \cdot \cos 150°$.

Но $\cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (косинусы смежных углов отличаются знаком).

Значит, $AC^2 = 25 - 24 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 25 + 12\sqrt{3}$, откуда $AC = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

Ответ: $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

IV способ



Пусть $AB = BC = AC = a$, $A(0,0)$ — начало координат. Ось Ox содержит сторону AB, а ось $Oy \perp Ox$.

Тогда $B(a;\ 0)$, $C\left(\dfrac{a}{2};\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, где

$$y_C = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} =$$

$= \sqrt{\dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $N(x;\ y)$ — точка, взятая внутри ΔABC.

По условию $AN = 4$, $BN = 5$, тогда $AN^2 = 16$, $BN^2 = 25$.

Получим систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, & (1) \\ (x-a)^2 + y^2 = 25. & (2) \end{cases}$$

Вычтем из уравнения (2) уравнение (1):

$(x - a)^2 - x^2 = 9$, или $a^2 - 2ax = 9$, откуда находим $x = \dfrac{a^2 - 9}{2a}$. (3)

Так как $CN = 3$, то $CN^2 = 9$.

Но $CN^2 = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9$, или $x^2 - ax + \dfrac{a^2}{4} + y^2 - ay\sqrt{3} + \dfrac{3a^2}{4} = 9$.

Так как $x^2 + y^2 = 16$, то получим $7 + a^2 = ax + ay\sqrt{3}$, откуда

$y = \dfrac{a^2 + 7 - ax}{a\sqrt{3}}$. Учитывая равенство (3), имеем $y = \dfrac{a^2 + 23}{2a\sqrt{3}}$.

Значит, $N\left(\dfrac{a^2-9}{2a};\ \dfrac{a^2+23}{2a\sqrt{3}}\right)$.

Из равенства (1) $y^2 = 16 - x^2$, или $\left(\dfrac{a^2+23}{2a\sqrt{3}}\right)^2 = 16-\left(\dfrac{a^2-9}{2a}\right)^2$, или

$\dfrac{a^4+46a^2+529}{4a^2\cdot 3} = 16-\dfrac{a^4-18a^2+81}{4a^2}$, или

$a^4 + 46a^2 + 529 = 192a^2 - 3a^4 + 54a^2 - 243$, или

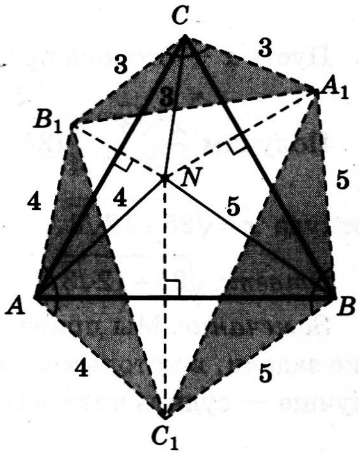
$4a^4 - 200a^2 + 772 = 0$, или $a^4 - 50a^2 + 193 = 0$,

$D/4 = 25^2 - 193 = 625 - 193 = 432$, $\left(a^2\right)_{1,2} = 25\pm\sqrt{432} = 25\pm 12\sqrt{3}$, откуда

$a^2 = 25+12\sqrt{3}$, $a=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$ (см. II способ).

Ответ: $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$.

V способ



Пусть N — точка внутри ΔABC, причем $AN = 4$, $BN = 5$, $CN = 3$.

Отобразим точку N симметрично относительно сторон AB, BC и AC (как показано на рисунке).

Рассмотрим точки A_1, B_1 и C_1, симметричные точке N относительно соответственно прямых BC, AC и AB.

Заметим, что ΔAB_1C_1, ΔBA_1C_1 и ΔA_1CB_1 — равнобедренные, где $AB_1 = AC_1 = 4$, $B_1C = A_1C = 3$, $A_1B = BC_1 = 5$ и $\angle B_1AC_1 = \angle A_1BC_1 = \angle A_1CB_1 = 120°$.

Тогда $S_{\Delta AB_1C_1} = \dfrac{1}{2}AB_1\cdot AC_1\cdot\sin 120° = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\sin 60° = 4\sqrt{3}$.

Аналогично $S_{\Delta A_1CB_1} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ и $S_{\Delta A_1BC_1} = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$.

Теперь найдем стороны $\Delta A_1B_1C_1$ по теореме косинусов:

$A_1B_1^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot\cos 120° = 18-18\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 27$, откуда $A_1B_1 = 3\sqrt{3}$.

Аналогично находим $B_1C_1 = 4\sqrt{3}$ и $A_1C_1 = 5\sqrt{3}$.

Зная стороны $\Delta A_1B_1C_1$, находим $S_{\Delta A_1B_1C_1}$ по формуле Герона:

$S_{\Delta A_1B_1C_1}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{1}{2}(A_1B_1+B_1C_1+A_1C_1)=6\sqrt{3}$, тогда $p-a=6\sqrt{3}-3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$; $p-b=6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$; $p-c=6\sqrt{3}-5\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

Значит, $S_{\Delta A_1B_1C_1}=\sqrt{6\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=6\cdot(\sqrt{3})^2=18$.

Следовательно, площадь шестиугольника $AB_1CA_1BC_1$ будет равна

$$S=4\sqrt{3}+\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{25\sqrt{3}}{4}+18=\frac{50\sqrt{3}}{4}+18.$$

Заметим, что $S_{\Delta AB_1C}=S_{\Delta ANC}$, $S_{\Delta BA_1C}=S_{\Delta BNC}$ и $S_{\Delta AC_1B}=S_{\Delta ANB}$.

Выходит, что площадь шестиугольника вдвое больше $S_{\Delta ABC}$, т. е. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\left(\frac{50\sqrt{3}}{4}+18\right)=\frac{1}{4}(25\sqrt{3}+36)$.

Пусть x — сторона правильного ΔABC, тогда $S_{\Delta ABC}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Получим $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}(25\sqrt{3}+36)$ или $x^2=\frac{25\sqrt{3}+36}{\sqrt{3}}=25+\frac{36}{\sqrt{3}}=25+12\sqrt{3}$, откуда $x=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$.

Ответ: $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$.

Замечание. Мы привели 5 различных способов решения одной и той же задачи, в которых заложены красивые идеи и методы. Какой способ лучше — судить читателю.

Раздел III

МАГИЯ ЧИСЕЛ

Удивительные равенства

1. Число 12345679.

Если умножить это число на число, кратное 9, то получим число с одинаковыми цифрами:

$12\,345\,679 \cdot 9 = 111\,111\,111$;

$12\,345\,679 \cdot 18 = 222\,222\,222$;

$12\,345\,679 \cdot 27 = 333\,333\,333$;

$12\,345\,679 \cdot 81 = 999\,999\,999$.

2. Игра с цифрами.

$123 - 45 - 67 + 89 = 100$ (минимальное число знаков 3).

$98 - 76 + 54 + 3 + 21 = 100$ (минимальное число знаков 4).

3. Арифметический курьез: $2^5 \cdot 9^2 = 2592$.

4. Число 100:

$91 + \frac{5823}{647} = 100$; $94 + \frac{1578}{263} = 100$;

$96 + \frac{1428}{357} = 100$.

Во всех случаях употреблены все натуральные числа от 1 до 9 включительно. Существуют и другие равенства.

5. Сумма равна произведению:

$2 + 2 = 2 \cdot 2$; $3 + 1{,}5 = 3 \cdot 1{,}5$; $11 + 1{,}1 = 11 \cdot 1{,}1$;

$21 + 1\frac{1}{20} = 21 \cdot 1\frac{1}{20}$ и т. д.

6. Разность равна произведению:

$1 - 0{,}5 = 1 \cdot 0{,}5$; $6 - \frac{6}{7} = 6 \cdot \frac{6}{7}$;

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ и т. д.

7. Интересное произведение:

$6 \cdot 21 = 126$ — произведение записано цифрами сомножителей, но в обратном порядке.

Аналогично $3 \cdot 51 = 153$.

Существуют ли аналогичные произведения?

8. Интересное сокращение дроби $\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$.

Равенство верное, хотя так сокращать нельзя.

Аналогично $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$; $\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}$.

Можно ли подобрать еще такую правильную дробь?

9. Разные действия, один результат:

$2 + 2 = 2 \cdot 2$;

$1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$;

$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$;

$1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5$;

$1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3$;

$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ и т. д.

Можно составить группы из 6 или 7 и т. д. чисел.

10. Сумма двух дробей равна 1:

$0{,}5 + \frac{1}{2} \cdot (9 - 8) \cdot (7 - 6) \cdot (4 - 3) = 1$.

Аналогично $\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1$.

Во всех случаях употреблены все цифры от 0 до 9 (по одному разу). Можно ли составить аналогичные равенства?

11. Все цифры различные:

$1738 \cdot 4 = 6952$;	$483 \cdot 12 = 5796$;
$1963 \cdot 4 = 7852$;	$297 \cdot 18 = 5346$;
$198 \cdot 27 = 5346$;	$157 \cdot 28 = 4396$;
$138 \cdot 42 = 5796$;	$186 \cdot 39 = 7254$.

12. $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$.

Составить аналогичное равенство из этих же чисел в том же порядке, используя лишь знаки сложения.

13. Равные дроби: $\frac{41}{77} = \frac{4141}{7777} = \frac{414141}{777777}$.

14. Сумма смешанных дробей равна 100.

Например: $78\frac{3}{6} + 21\frac{45}{90} = 100$, или $50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100$.

Здесь также каждая цифра употреблена 1 раз. Возможны другие решения.

15. Сумма и произведение чисел каждой пары отличаются только расположением цифр:

$9 + 9 = 18$; $24 + 3 = 27$; $47 + 2 = 49$;
$9 \cdot 9 = 81$; $24 \cdot 3 = 72$; $47 \cdot 2 = 94$.
$263 + 2 = 265$; $497 + 2 = 499$;
$263 \cdot 2 = 526$; $497 \cdot 2 = 994$;

16. Особое число: 13 452 — искомое число; $13 \cdot 4 = 52$.
Таким же свойством обладает число 947 658, так как $94 \cdot 7 = 658$.

17. Новые суммы и произведения:

$49\,997 + 2 = 49\,999$; $4997 + 2 = 4999$;
$49\,997 \cdot 2 = 99\,994$; $4997 \cdot 2 = 9994$;
$2963 + 2 = 2965$; $29\,963 + 2 = 29\,965$;
$2963 \cdot 2 = 5926$; $29\,963 \cdot 2 = 59\,926$.

18. Удивительное равенство:

$989\,010\,989 \cdot \underline{123\,456\,789} = 122\,100\,120\,\underline{987\,654\,321}$.

19. Использовать три из четырех арифметических действий:

$7 + 1 = 8$; $9 - 6 = 3$; $4 \cdot 5 = 20$.
Использованы все 10 цифр.

20. Произведение двузначных чисел не изменится, если в каждом из сомножителей переставить цифры:

$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$; $24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$;
$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36$; $24 \cdot 84 = 42 \cdot 48$;
$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48$; $26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$;
$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$; $36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$;
$23 \cdot 96 = 32 \cdot 69$; $46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$.
Аналогичным свойством обладают еще 4 пары чисел. Найдите их.

21. Для трехзначных чисел:

$102 \cdot 402 = 201 \cdot 204$; $102 \cdot 603 = 201 \cdot 306$;
$112 \cdot 422 = 211 \cdot 224$; $112 \cdot 633 = 211 \cdot 336$;
$122 \cdot 442 = 221 \cdot 244$; $122 \cdot 663 = 221 \cdot 366$;
$132 \cdot 462 = 231 \cdot 264$; $132 \cdot 693 = 231 \cdot 396$;
$142 \cdot 482 = 241 \cdot 284$; $103 \cdot 602 = 301 \cdot 206$.
Таких равенств всего 60. Интересно найти общее решение.

22. Равенство вида $\overline{ab} + \overline{ba} = \overline{cd} + \overline{dc}$:

$32 + 23 = 14 + 41$; $52 + 25 = 16 + 61$;
$42 + 24 = 15 + 51$; $43 + 34 = 52 + 25 = 16 + 61$;
$52 + 25 = 34 + 43$; $19 + 91 = 28 + 82 = 37 + 73 = 46 + 64$.
Остальные равенства найдите самостоятельно.

23. Двузначные числа, оканчивающиеся на 9:

$19 = 1 \cdot 9 + 1 + 9$; $39 = 3 \cdot 9 + 3 + 9$;

$29 = 2 \cdot 9 + 2 + 9$; $49 = 4 \cdot 9 + 4 + 9$ и т. д.

Аналогично для многозначных чисел:

$849 = 84 \cdot 9 + 84 + 9$;

$13\,759 = 1375 \cdot 9 + 1375 + 9$;

$1\,111\,119 = 111\,111 \cdot 9 + 111\,111 + 9$;

$131\,313\,139 = 13\,131\,313 \cdot 9 + 13\,131\,313 + 9$ и т. д.

Обобщить на случай многозначных чисел.

24. Числа вида $\overline{abb} \cdot \overline{ccd} = \overline{bba} \cdot \overline{dcc}$:

$112 \cdot 422 = 211 \cdot 224$; $223 \cdot 966 = 322 \cdot 669$;

$122 \cdot 442 = 221 \cdot 244$; $233 \cdot 996 = 332 \cdot 699$;

$224 \cdot 844 = 422 \cdot 448$; $334 \cdot 866 = 433 \cdot 668$;

$244 \cdot 884 = 442 \cdot 488$; $344 \cdot 886 = 443 \cdot 688$.

Всего таких равенств 18. Попробуйте найти.

25. Числа вида $\overline{aaa} \cdot \overline{bb} = \overline{bbb} \cdot \overline{aa}$:

$111 \cdot 22 = 222 \cdot 11$; $222 \cdot 33 = 333 \cdot 22$;

$111 \cdot 33 = 333 \cdot 11$; $222 \cdot 44 = 444 \cdot 22$;

$111 \cdot 44 = 444 \cdot 11$; $222 \cdot 55 = 555 \cdot 22$ и т. д.

26. Числа вида $\overline{ab} - \overline{cd} = a + b + c + d$:

$30 - 18 = 3 + 0 + 1 + 8$;

$31 - 18 = 3 + 1 + 1 + 8$;

$41 - 27 = 4 + 1 + 2 + 7$;

$53 - 36 = 5 + 3 + 3 + 6$;

$66 - 45 = 6 + 6 + 4 + 5$;

$79 - 54 = 7 + 9 + 5 + 4$;

$83 - 63 = 8 + 3 + 6 + 3$;

$95 - 72 = 9 + 5 + 7 + 2$ и т. д.

27. Равенство $a \cdot b^3 = a^3 : b$.

Например: $4 \cdot 2^3 = 4^3 : 2$; $9 \cdot 3^3 = 9^3 : 3$.

Есть ли еще подобные равенства?

28. Равенство $\overline{ab} - c = a \cdot b \cdot c$.

Например: $18 - 2 = 1 \cdot 8 \cdot 2$;

$26 - 2 = 2 \cdot 6 \cdot 2$;

$12 - 4 = 1 \cdot 2 \cdot 4$.

Найдите еще такие равенства.

29. Равенство $\overline{abc} = \overline{ab}^2 + c$.

$100 = 10^2 + 0$; $\quad$ $103 = 10^2 + 3$;

$101 = 10^2 + 1$; $\quad$ $104 = 10^2 + 4$;

$102 = 10^2 + 2$; $\quad$ $105 = 10^2 + 5$ и т. д.

30. Равенство $\overline{ab} = a^2 + a + b$.

$90 = 9^2 + 9 + 0$; $\quad$ $92 = 9^2 + 9 + 2$;

$91 = 9^2 + 9 + 1$; $\quad$ $93 = 9^2 + 9 + 3$ и т. д.

31. Равенство $\overline{ab} = a + b + b^2$.

Например: $13 = 1 + 3 + 3^2$.

Существует ли еще число подобного вида?

32. Равенство $\overline{ab} = a^3 + a + b$.

Например: $30 = 3^3 + 3 + 0$;

$31 = 3^3 + 3 + 1$;

$32 = 3^3 + 3 + 2$ и т. д.

33. Равенство $\overline{aa} = a + a + a^3$.

Например: $33 = 3 + 3 + 3^3$.

Сколько таких чисел?

34. Равенство $\overline{ab} = a^2 + b^2 + b$.

$13 = 1^2 + 3^2 + 3$; $\quad$ $24 = 2^2 + 4^2 + 4$;

$55 = 5^2 + 5^2 + 5$; $\quad$ $84 = 8^2 + 4^2 + 4$.

$93 = 9^2 + 3^2 + 3$;

35. Равенство $\overline{ab} = a \cdot b + b^2$.

$24 = 2 \cdot 4 + 4^2$; $\quad$ $45 = 4 \cdot 5 + 5^2$.

36. Равенство $\overline{abc} = \overline{(ab)^2} - c^2$.

$147 = 14^2 - 7^2$ — единственное равенство.

37. Равенство $\overline{ab} = a^2 + b^2 - (a + b)$.

$36 = 3^2 + 6^2 - (3 + 6)$.

Найдите еще одно число, обладающее подобным свойством.

38. Интересные суммы:

$$\begin{array}{r} 173 \\ +\quad 4 \\ \hline 177 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85 \\ +\ 92 \\ \hline 177 \end{array}$$

Здесь использованы цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 двумя группами по 4 цифры так, чтобы суммы оказались равны между собой.

39. 12 = 13?

Рассмотрим верное равенство

$24 + 36 - 60 = 26 + 39 - 65$, или

$12 \cdot (2 + 3 - 5) = 13 \cdot (2 + 3 - 5)$.

Так как произведения равны и вторые сомножители равны, то 12 = 13. Где ошибка?

40. Все цифры от 1 до 9 включительно:

$1 = 1^{23456789}$; $2 = \dfrac{13458}{6729}$; $3 = \dfrac{17469}{5823}$;

$4 = \dfrac{15768}{3942}$; $5 = \dfrac{13485}{2697}$; $6 = \dfrac{17658}{2943}$;

$7 = \dfrac{16758}{2394}$; $8 = \dfrac{25496}{3187}$; $9 = \dfrac{57429}{6381}$.

41. Трехзначное число, делящееся на квадрат суммы своих цифр:

$\dfrac{162}{(1+6+2)^2} = 2$; $\dfrac{243}{(2+4+3)^2} = 3$;

$\dfrac{324}{(3+2+4)^2} = 4$; $\dfrac{392}{(3+9+2)^2} = 2$;

$\dfrac{405}{(4+0+5)^2} = 5$; $\dfrac{512}{(5+1+2)^2} = 8$;

$\dfrac{605}{(6+0+5)^2} = 5$; $\dfrac{648}{(6+4+8)^2} = 2$;

$\dfrac{810}{(8+1+0)^2} = 10$; $\dfrac{972}{(9+7+2)^2} = 3$.

42. Равные дроби:

$\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{79}{158}$; $\dfrac{3}{6} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{29}{58}$;

$\dfrac{3}{6} = \dfrac{9}{18} = \dfrac{27}{54}$; $\dfrac{2}{6} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{58}{174}$.

В каждом случае использованы все цифры от 1 до 9 включительно.

43. Число 2 438 195 760 составлено из всех десяти цифр так, что оно делится на все числа от 2 до 18. Существуют еще 3 таких числа. Найдите их.

44. Квадраты двузначных чисел и их перестановки:

$12^2 = 144$; $13^2 = 169$;

$21^2 = 441$; $31^2 = 961$.

Как видим, сами числа и их квадраты отличаются лишь перестановкой цифр.

45. Квадраты трехзначных чисел и их перестановки:

$102^2 = 10\,404$; $112^2 = 12\,544$; $122^2 = 14\,484$;
$201^2 = 40\,401$; $211^2 = 44\,521$; $221^2 = 48\,841$.
$103^2 = 10\,609$; $113^2 = 12\,769$;
$301^2 = 90\,601$; $311^2 = 96\,721$;

46. Красивое равенство $81 = (8 + 1)^2$.

47. Квадрат-палиндром $836^2 = 698\,896$.

Полученное число — четное. Его можно читать как слева направо, так и наоборот.

Среди всех квадратов, имеющих четное число цифр, палиндромический квадрат — наименьший.

48. Тройки и семерки.

Число 3 333 377 733 — наименьшее, которое делится на 3 и 7. Кроме того, сумма цифр $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 7 + 7 + 7 + 3 + 3 = 42$ также делится на 3 и на 7.

49. Сумма простых чисел:

$$\begin{array}{r} 61 \\ +\,283 \\ 47 \\ 59 \\ \hline 450 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 47 \\ 61 \\ 89 \\ +\,2 \\ 3 \\ 5 \\ \hline 207 \end{array}$$

При сложении использованы лишь простые числа. Каждая из 9 цифр использована 1 раз.

50. Представить число 222 с помощью цифр от 1 до 9 включительно, используя знаки «+» и «−» (без скобок).

$123 + 4 + 5 - 6 + 7 + 89 = 222$;
$1 + 234 + 5 + 6 - 7 - 8 - 9 = 222$;
$1 + 234 + 56 - 78 + 9 = 222$.

Все числа расположены последовательно.

51. Число 100 наименьшим количеством разных цифр (используя знак «+», без скобок):

$1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100$;
$1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100$.

52. Равенство вида $\overline{ab} = a^2 + b^3$.

$63 = 6^2 + 3^3$.

Существуют ли еще числа подобного вида?

53. Пятая степень суммы цифр трехзначного числа равна квадрату этого числа: $243^2 = (2 + 4 + 3)^5$.

54. Четырехзначное число, равное четвертой степени суммы его цифр: $2401 = (2 + 4 + 0 + 1)^4$. Сколько решений имеет задача?

55. Совершенные числа.

Так называются натуральные числа, равные сумме всех своих делителей, не считая самого числа.

Наименьшим совершенным числом является 6:

$6 = 1 + 2 + 3$.

За ним следует число 28:

$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$,

далее число 496:

$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$.

Эти (и другие) числа могут быть найдены по формуле

$P = 2^{p-1}(2^p - 1)$, где p — простое число.

В настоящее время известно 51 совершенное число, из которых последние 17 найдены с помощью теста Лукаса–Лемера. До сих пор неизвестно, существует ли хотя бы одно нечетное совершенное число. По последним сообщениям Брайена Такхермана из IBM (американская фирма, выпускающая вычислительное оборудование), нечетное совершенное число должно иметь по крайней мере 36 знаков.

56. Дружественные числа.

Если сумма делителей одного из двух чисел равна второму числу и наоборот, то такие числа называют дружественными.

Наименьшая пара (220; 284) известна древним грекам:

$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$; $284 = 2^2 \cdot 71$.

Суммами их делителей являются соответственно

$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$;

$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

После греков пару чисел (17 296; 18 416) открыл марокканский ученый Ибн аль-Банна (1256–1321) и переоткрыл ее в 1636 г. Пьер Ферма (1601–1665):

$17\,296 = 2^4 \cdot 23 \cdot 47$; $18\,416 = 2^4 \cdot 1151$.

А вот пару дружественных чисел (63 020; 76 084) обнаружил в 1867 г. 16-летний итальянец Никколо Паганини.

К настоящему времени открыто более 600 пар дружественных чисел (бóльшая часть с помощью ЭВМ). Не было найдено случая, когда одно число четное, а другое нечетное, хотя поиски чисел такого вида проводились среди всех чисел $n \leq 3 \cdot 10^9$.

57. Аликвотные дроби — это дроби, у которых числитель равен 1.

Например: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$;

$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$.

Существует интересный способ представления таких дробей.

58. Три девятки:

$999 \cdot 426 = \underline{425}\,574$; $\quad 999 \cdot 107 = \underline{106}\,893$;

$999 \cdot 963 = \underline{962}\,037$.

Как видно, первые три цифры произведения есть умножаемое число, уменьшенное на 1, а остальные три цифры дополняют найденные три цифры до 9.

59. Число Шахерезады 1001.

С точки зрения математики оно обладает целым рядом интереснейших свойств:

1) это наименьшее натуральное четырехзначное число, которое можно представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел:

$1001 = 10^3 + 1^3$;

2) число 1001 состоит из 77 чертовых дюжин:

$1001 = 77 \cdot 13$;

из 91 цифры одиннадцать или 143 семерок (7 — магическое число):

$1001 = 91 \cdot 11$; $1001 = 143 \cdot 7$;

3) если считать, что год равен 52 неделям, то 1001 ночь состоит:

$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ года $(52 \cdot 7 + 52 \cdot 7 + 26 \cdot 7 + 13 \cdot 7)$;

4) на свойствах числа 1001 основан признак делимости на 7, на 11, на 13.

60. Еще одно свойство числа 1001:

$295 \cdot 1001 = 295\,295$; $\quad 768 \cdot 1001 = 768\,768$.

При умножении числа Шахерезады на трехзначное число получается умноженное число, записанное дважды.

61. Число 10 101. Оно, как и число 1001, дает удивительный результат при умножении, но не трехзначных чисел, а двузначных:

$76 \cdot 10\,101 = 767\,676$; $\quad 11 \cdot 10\,101 = 111\,111$;

$29 \cdot 10\,101 = 292\,929$.

Каждое двузначное число, умноженное на 10 101, дает в результате само число, написанное трижды.

62. Число 10 001. Оно представляет собой произведение только двух простых чисел.

$10\,001 = 73 \cdot 137.$

63. Число 111 111.

$111\,111 = 3 \cdot 37\,037 = 7 \cdot 15\,873 = 11 \cdot 10\,101 = 13 \cdot 8547 = 37 \cdot 3003 =$
$= 21 \cdot 5291 = 33 \cdot 3367.$

64. Квадраты чисел, состоящих из единиц:

$11^2 = 121;$

$111^2 = 12\,321;$

$1111^2 = 1\,234\,321;$

$11\,111^2 = 123\,454\,321;$

$111\,111\,111^2 = 12\,345\,678\,987\,654\,321.$

Как видим, средняя цифра показывает количество единиц, а от нее влево и вправо цифры уменьшаются последовательно до единицы.

65. Числовая пирамида.

$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$
$$12 \cdot 8 + 2 = 98$$
$$123 \cdot 8 + 3 = 987$$
$$1234 \cdot 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \cdot 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \cdot 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \cdot 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \cdot 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \cdot 8 + 9 = 987654321$$

66. Свойства числа 9.

$20 = 9 \cdot 2 + 2;$ $\quad 7000 = 999 \cdot 7 + 7;$

$50 = 9 \cdot 5 + 5;$ $\quad 13\,000 = 999 \cdot 13 + 13;$

$300 = 99 \cdot 3 + 3;$ $\quad 190\,000 = 999 \cdot 19 + 19.$

Как видим, всякое число, записанное цифрой со многими нулями, равно произведению этой цифры на число, состоящее из стольких девяток, сколько нулей после этой цифры, увеличенному на ту же цифру.

67. Другие свойства числа 9.

$1 \cdot 9 + 2 = 11;$ $\quad 9 \cdot 9 + 7 = 88;$

$12 \cdot 9 + 3 = 111;$ $\quad 98 \cdot 9 + 6 = 888;$

$123 \cdot 9 + 4 = 1111;$ $\quad 987 \cdot 9 + 5 = 8888;$

....

$123\,456\,789 \cdot 9 + 9 =$ $\quad 987\,654\,321 \cdot 9 - 1 =$

$= 111\,111\,11;$ $\quad = 888\,888\,888.$

68. Числа, полученные в качестве квадратов единиц.

$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12\,321$$
$$1111^2 = 1\,234\,321$$
$$11\,111^2 = 123\,454\,321$$

$$1 + 2 + 1 = 2^2$$
$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 5^2$$

69. Число 143.

$28 \cdot 143 = 4004;$	$3591 \cdot 143 = 513\,513;$
$315 \cdot 143 = 45\,045;$	$5495 \cdot 143 = 785\,785;$
$2464 \cdot 143 = 352\,352;$	$6993 \cdot 143 = 999\,999.$

Итак, при умножении числа 143 на какое-нибудь число, кратное 7, получим число, состоящее из двух одинаковых чисел.

70. Свойство числа 7.

$$9 \cdot 7 = 63$$
$$99 \cdot 77 = 7623$$
$$999 \cdot 777 = 776\,223$$
$$9999 \cdot 7777 = 77\,762\,223$$
$$99\,999 \cdot 77\,777 = 7\,777\,622\,223$$

71. Число зверя 666.

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2;$$
$$666 = 1^6 - 2^6 + 3^6;$$
$$666 = 6 + 6 + 6 + 6^3 + 6^3 + 6^3;$$
$$666 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 36;$$
$$666^3 = 333^3 + 444^3 + 555^3.$$

Последнее равенство получено из равенства

$$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3.$$

72. Квадрат в любую сторону.

$113^2 = 12\,769$	$96\,721 = 311^2$
$112^2 = 12\,544$	$44\,521 = 211^2$
$122^2 = 14\,884$	$48\,841 = 221^2$
$1212^2 = 1\,468\,944$	$4\,498\,641 = 2121^2$
$1112^2 = 1\,236\,544$	$4\,456\,321 = 2111^2$

73. Числа Смита.

Так называются числа, у которых сумма цифр равна сумме цифр разложения этого числа на простые множители.

Например, 4 937 775.

$$4\,937\,775 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 65\,837.$$

Сумма цифр числа — 42.

Сумма цифр произведения — 42.

Другие числа Смита: 4; 22; 27; ...

74. Число 13 452.

$13 \cdot 4 = 52$, т. е. число, образованное первыми двумя цифрами, умноженное на среднюю цифру, дает число, образованное двумя последними цифрами.

75. Число 947 658.

$94 \cdot 7 = 658$ — аналогично числу 13 452.

76. Числа 39 157 и 57 139.

$$39 \cdot 57 - 1 = 57 \cdot 39 - 1 = 2222.$$

77. Число 273 863.

$$273\,863 \cdot 365 = 99\,959\,995.$$

Аналогично $64\,253 \cdot 365 = 23\,452\,345$.

78. Число 8 101 265 822 784.

Чтобы разделить это число на 8, достаточно переставить первую цифру числа в конец:

$$8\,101\,265\,822\,784 : 8 = 1\,012\,658\,227\,848.$$

79. Задача о десяти цифрах.

2 438 195 760; 4 753 869 120;
3 785 942 160; 4 876 391 520.

Все четыре числа составлены из всех 10 цифр так, что все они делятся на числа от 2 до 18.

80. Число 1 026 753 849.

$$1\,026\,753\,849 = 32\,043^2.$$

Это число — наименьший квадрат, содержащий все 10 цифр от 0 до 9, причем каждую цифру — лишь по одному разу.

81. Число 9 814 072 356.

$$9\,814\,072\,356 = 99\,066^2.$$

Это число — наибольший квадрат, содержащий все 10 цифр от 0 до 9, причем каждую цифру — лишь по одному разу.

82. Числа 567 и 854.

$567^2 = 321\,489; \qquad 854^2 = 729\,316.$

Эти числа и только они содержат вместе со своими квадратами по одному и только одному разу каждую из девяти цифр, исключая нуль.

83. Число 207.

$$207 = 2 + 3 + 5 + 47 + 61 + 89.$$

Это число простое, составленное из девяти цифр, исключая нуль, причем сумма этих чисел минимальна.

84. Числа, равные сумме кубов своих цифр.

$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3; \qquad 371 = 3^3 + 7^3 + 1^3;$
$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3; \qquad 407 = 4^3 + 0^3 + 7^3.$

Таких чисел всего 4.

85. Всегда квадрат.

$$11 + 4 + 1 = 16 = 4^2$$
$$1111 + 44 + 1 = 1156 = 34^2$$
$$111\,111 + 444 + 1 = 111\,556 = 334^2 \text{ и т. д.}$$

86. Числовые треугольники.

$$+\begin{array}{r} 5 \\ 65 \\ 465 \\ 9\,465 \\ 19\,465 \\ \hline 29\,465 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 8 \\ 48 \\ 648 \\ 9\,648 \\ 89\,648 \\ 189\,648 \\ \hline 289\,648 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 7 \\ 17 \\ 417 \\ 3\,417 \\ 53\,417 \\ 453\,417 \\ 7\,453\,417 \\ 67\,453\,417 \\ 567\,453\,417 \\ 3\,567\,453\,417 \\ 73\,567\,453\,417 \\ \hline 77\,777\,777\,777 \end{array}$$

87. Свойство числа 803.

$$803 = (8 + 0 + 3)(8^2 + 0^2 + 3^2).$$

Существует еще трехзначное число, обладающее указанным свойством. Найдите его!

88. Удивительные свойства числа 666.

$666 = 1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89;$

$666 = 123 + 456 + 78 + 9;$

$666 = 9 + 87 + 6 + 543 + 21.$

В правых частях приведенных равенств все натуральные числа от 1 до 9 включительно, записанные в порядке возрастания, а в последнем — в порядке убывания.

89. Равны ли суммы чисел?

$$+\begin{array}{l} 123456789 \\ 12345678 \\ 1234567 \\ 123456 \\ 12345 \\ 1234 \\ 123 \\ 12 \\ 1 \end{array} \qquad\qquad +\begin{array}{r} 1 \\ 21 \\ 321 \\ 4321 \\ 54321 \\ 654321 \\ 7654321 \\ 87654321 \\ 987654321 \end{array}$$

90. «Шкатулка равенств».

$$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 = \\ = 2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22;$$

$$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = \\ = 2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2;$$

$$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = \\ = 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3;$$

$$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 23^4 = \\ = 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4;$$

$$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 23^5 = \\ = 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5.$$

91. Верные равенства с одинаковыми цифрами.

$42 : 3 = 4 \cdot 3 + 2;$ $\qquad$ $4 \cdot 3^3 = 4^3 : 2 = 34 - 2;$

$5^{6-2} = 625;$ $\qquad$ $(8 + 9)^2 = 289;$

$63 : 3 = 6 \cdot 3 + 3;$ $\quad 2^{10} - 2 = 1022;$

$95 : 5 = 9 + 5 + 5;$ $\quad 2^{8-1} = 128.$

$(2 + 7) \cdot 2 \cdot 16 = 272 + 16;$

92. Узоры чисел.

$$147 \cdot (14 + 7) = 14^3 + 7^3;$$
$$148 \cdot (14 + 8) = 14^3 + 8^3;$$
$$111 \cdot (11 + 1) = 11^3 + 1^3;$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1 + 2 + 3) = 1^3 + 2^3 + 3^3.$$

93. Снежинки-цифры.

$$16 = 4^2$$
$$1156 = 34^2$$
$$111\,556 = 334^2$$
$$11\,115\,556 = 3334^2$$
$$1\,111\,155\,556 = 33\,334^2 \text{ и т. д.}$$

94. Все цифры от 0 до 9 включительно.

$$9 = \frac{97524}{10836} = \frac{95823}{10647} = \frac{57429}{06381} =$$
$$= \frac{95742}{10638} = \frac{75249}{08361} = \frac{58239}{06471}.$$

Попытайтесь составить и другие однозначные числа из всех десяти цифр.

95. Куб из суммы семи последовательных чисел.

$10 + 23 + 36 + 49 + 62 + 75 + 88 = 7^3;$

$13 + 25 + 37 + 49 + 61 + 73 + 85 = 7^3;$

$16 + 27 + 38 + 49 + 60 + 71 + 82 = 7^3;$

$19 + 29 + 39 + 49 + 59 + 69 + 79 = 7^3;$

$22 + 31 + 40 + 49 + 58 + 67 + 76 = 7^3;$

$25 + 33 + 41 + 49 + 57 + 65 + 73 = 7^3;$

$28 + 35 + 42 + 49 + 56 + 63 + 70 = 7^3.$

96. Равные дроби.

$$\frac{13}{77} = \frac{1313}{7777} = \frac{131313}{777777}.$$

На чем основано равенство этих дробей?

97. Число 512.

$$512 = (5 + 1 + 2)^3.$$

Существуют ли еще трехзначные числа, обладающие указанным свойством?

98. Удивительные равенства.

$$(1+9+8+9)^2 - 1\cdot 9\cdot 8\cdot 9 = 9^2;$$
$$(1+9+8+8)^2 - 1\cdot 9\cdot 8\cdot 8 = 10^2;$$
$$(1+9+8+7)^2 - 1\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 11^2;$$
$$(1+9+8+6)^2 - 1\cdot 9\cdot 8\cdot 6 = 12^2;$$
$$(1+9+8+5)^2 - 1\cdot 9\cdot 8\cdot 5 = 13^2;$$
$$(1+9+8+4)^2 - 1\cdot 9\cdot 8\cdot 4 = 14^2;$$
$$(1+9+8+3)^2 - 1\cdot 9\cdot 8\cdot 3 = 15^2;$$
$$(1+9+8+2)^2 - 1\cdot 9\cdot 8\cdot 2 = 16^2;$$
$$(1+9+8+1)^2 - 1\cdot 9\cdot 8\cdot 1 = 17^2.$$

Замечание 1. Понятно, что условию задачи удовлетворяют также перестановки чисел.

Замечание 2. Существуют ли еще аналогичные числа, состоящие из бо́льшего количества последовательных четырехзначных чисел? Это уже другая (более сложная) задача.

Замечание 3. Среди трехзначных чисел вышеуказанным свойством обладают числа от 881 до 889 включительно.

99. Число 4913.

$$(4+9+1+3)^3 = 4913.$$

100. Свойства числа 2012.

$$2012 = 45^2 - 13;$$
$$2012 = 4\cdot 502 + 1 + 3.$$

В правых частях все цифры различны.

$$2012 = 33^2 + 27^2 + 13^2 + 5^2.$$

Таких пар можно составить 39.

$2012 = 17^2 + 17^0 + 41^1 + 41^2;$

$2012 = 23^2 + 23^0 + 38^1 + 38^2;$

$2012 = 45^2 - 13$ (все цифры от 1 до 5);

$2012 = 4\cdot 502 + 1 + 3$ (все цифры от 1 до 5);

$2012 = 2\cdot 2\cdot 503$ | Произведение из трех простых чисел.

101. Произведения из трех простых чисел.

$$2013 = 3\cdot 11\cdot 61;$$
$$2014 = 2\cdot 19\cdot 53;$$
$$2015 = 5\cdot 13\cdot 31.$$

102. Числа Армстронга.

Это числа, равные сумме кубов своих цифр. Трехзначные числа были рассмотрены в № 84.

Среди четырехзначных чисел существуют 3 числа, обладающие указанным свойством:

$$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4;$$
$$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4;$$
$$9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4.$$

Среди пятизначных чисел также существуют 3 числа:

$$54\,748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5;$$
$$92\,727 = 9^5 + 2^5 + 7^5 + 2^5 + 7^5;$$
$$93\,084 = 9^5 + 3^5 + 0^5 + 8^5 + 4^5 \text{ и т. д.}$$

103. Свойства числа 142 857.

Это число совпадает с периодически повторяющейся последовательностью цифр, стоящих в дробной части числа $\frac{1}{7}$, записанного в десятичной форме.

$$\frac{1}{7} = 0{,}\underline{142\,857}\,142\ \ldots$$
$$142\,857 \cdot 2 = 285\,714;$$
$$142\,857 \cdot 3 = 428\,571;$$
$$142\,857 \cdot 4 = 571\,428;$$
$$142\,857 \cdot 5 = 714\,285;$$
$$142\,857 \cdot 6 = 857\,142.$$

Как видим, произведение записано теми же цифрами, представленными в циклическом порядке.

Кроме того, $142\,857 \cdot 7 = 999\,999$.

104. Числа словами.

В этой фразе двадцать восемь букв.

Девять слов назад это предложение еще не началось.

105. Удивительное число 2 100 010 006.

Число, первая цифра которого показывает, сколько в этом числе единиц, вторая — сколько двоек, третья — сколько троек, ... , десятая — сколько нулей.

106. Верные равенства.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

Например, $\frac{3}{3}-\frac{4}{2}=\frac{3-4}{3-2}$;

$\frac{8}{2}-\frac{9}{3}=\frac{8-9}{2-3}$;

$\frac{6}{3}-\frac{8}{2}=\frac{6-8}{3-2}$;

$\frac{6}{2}-\frac{8}{4}=\frac{6-8}{2-4}$ и т. д.

Хотя так выполнять вычитание дробей нельзя, однако все равенства верные.

107. Интересное сокращение $\dfrac{5\frac{3}{4}}{4\frac{3}{5}}=\frac{5}{4}$.

Действительно, $5\frac{3}{4}:4\frac{3}{5}=\frac{23}{4}:\frac{23}{5}=\frac{5}{4}$.

Аналогично $\dfrac{7\frac{4}{13}}{13\frac{4}{7}}=\frac{7}{13}$ и т. д.

108. Любопытные равенства.

$23 = 12^2 - 11^2$;

$15 = 8^2 - 7^2$;

$17 = 9^2 - 8^2$;

....

$2013 = 1007^2 - 1006^2 = 337^2 - 334^2 = 97^2 - 86^2 = 47^2 - 14^2$.

Аналогично

$2015 = 1008^2 - 1007^2 = 203^2 - 198^2 = 84^2 - 71^2 = 48^2 - 17^2$ и т. д.

109. Числа, у которых равны между собой сумма, произведение и частное.

Эти числа 0,5 и −1.

Действительно, $0,5 + (-1) = -0,5$;

$0,5 \cdot (-1) = -0,5$ и $0,5 : (-1) = -0,5$.

Эти числа могут быть получены из равенств

$$a+b=ab=\frac{a}{b}.$$

110. Интересное число 3 333 377 733.

Само число и сумма его цифр делятся на 3 и 7, причем это число является наименьшим:

$3\,333\,377\,733 : 3 = 1\,111\,125\,911;$

$3\,333\,377\,733 : 7 = 476\,196\,819;$

$(3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 7 + 7 + 7 + 3 + 3) : 3 = 42 : 3 = 14;$

$(3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 7 + 7 + 7 + 3 + 3) : 7 = 42 : 7 = 6.$

111. Число 1 026 753 849.

Это число — наименьший квадрат, содержащий все 10 цифр от 0 до 9 включительно, причем каждую цифру по одному разу.

$$1\,026\,753\,849 = 32\,043^2.$$

112. Число 9 814 072 356.

Это число — наибольший квадрат, содержащий все 10 цифр от 0 до 9 включительно, причем каждую цифру по одному разу.

$$9\,814\,072\,356 = 99\,066^2.$$

113. Все цифры разные.

$$567^2 = 321\,489;$$
$$854^2 = 729\,316.$$

114. Красивые равенства.

$$11 + 4 + 1 = 16 = 4^2;$$
$$1111 + 44 + 1 = 1156 = 34^2;$$
$$111\,111 + 444 + 1 = 111\,556 = 334^2 \text{ и т. д.}$$

115. Интересные равенства.

$$13\,000 = 999 \cdot 13 + 13;$$
$$9000 = 999 \cdot 9 + 9;$$
$$50 = 9 \cdot 5 + 5.$$

Как видим, число, записанное цифрой со многими нулями, равно произведению этого числа на число, состоящее из стольких девяток, сколько нулей стоит после этой цифры, увеличенному на ту же цифру.

116. Удивительные свойства числа 9.

$$9 \cdot 9 + 7 = 88$$
$$98 \cdot 9 + 6 = 888$$
$$987 \cdot 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \cdot 9 + 4 = 88\,888$$
$$98\,765 \cdot 9 + 3 = 888\,888$$
$$987\,654 \cdot 9 + 2 = 8\,888\,888$$
$$9\,876\,543 \cdot 9 + 1 = 88\,888\,888$$
$$98\,765\,432 \cdot 9 + 0 = 888\,888\,888$$
$$987\,654\,321 \cdot 9 - 1 = 8\,888\,888\,888$$

117. Интересное возведение в квадрат.

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9801$$
$$999^2 = 998\,001$$
$$9999^2 = 99\,980\,001$$
$$99999^2 = 9\,999\,800\,001$$

118. Представление числа 7 при помощи цифр 1, 2, 3.

$7 = 3^2 - 2;$ $\quad 7 = 2^{2^2} - 3^2;$

$7 = 2^3 - 1;$ $\quad 7 = 3^3 - 2^2 - 2^{2^2}.$

119. Квадратный трехчлен Эйлера.

При $x = 0, 1, 2, \ldots, 79$ квадратный трехчлен $x^2 - 79x + 1601$ дает лишь простые числа: например, при $x = 0$ получим число 1601 — простое.

При $x = 1$ $\quad 1^2 - 79 \cdot 1 + 1601 = 1523$ — простое.

При $x = 2$ $\quad 2^2 - 79 \cdot 2 + 1601 = 1447$ — простое.

……………………………………………………………………

При $x = 79$ $\quad 79^2 - 79 \cdot 79 + 1601 = 1601$ — простое.

Аналогичными свойствами обладают квадратные трехчлены

$$2x^2 + 29 \ (x = 0, 1, \ldots, 28)$$

$$\text{и } x^2 + x + 41 \ (x = 0, 1, \ldots, 39).$$

120. Закономерности простых чисел.

7 772 777	2221	19	
7 774 777	3331	199	
7 778 777	4441	1999	
77 716 777	6661	199 999	
88 801	11 113	55 501	66 601
88 807	11 131	55 511	66 617
88 811	11 311	55 529	66 629
88 813	311 111	55 541	66 643
88 817	131 111	55 547	66 653
88 819	113 111	55 579	66 683
		55 589	66 697

121. Магические квадраты Серпиньского.

569	59	449
239	359	479
269	659	149

17	317	397	67
307	157	107	227
127	277	257	137
347	47	37	367

Сумма чисел каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали одна и та же. В первом случае она равна 1077, а во втором — 798.

Кроме того, все числа в волшебных квадратах — простые.

122. Равенство из четырех квадратов.

Существует сколько угодно равенств, у которых и в левой, и в правой частях по четыре квадрата.

Например:

$$2014^2 + 2013^2 + 2030^2 + 2031^2 = 2021^2 + 2010^2 + 2023^2 + 2034^2;$$

$$2014^3 + 2013^3 + 2030^3 + 2031^3 = 2021^3 + 2010^3 + 2023^3 + 2034^3.$$

Интересно бы узнать, как они получены.

123. Некоторые числовые равенства.

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 = 31 \cdot (1 + 3 + 5 + 7);$$
$$1^4 + 3^4 + 5^4 + 7^4 = 37 \cdot (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2);$$
$$1^5 + 3^5 + 5^5 + 7^5 = 1261 \cdot (1 + 3 + 5 + 7);$$
$$1^7 + 3^7 + 5^7 + 7^7 = 56\,491 \cdot (1 + 3 + 5 + 7);$$
$$1^9 + 3^9 + 5^9 + 7^9 = 2\,645\,401 \cdot (1 + 3 + 5 + 7);$$
$$1^{10} + 3^{10} + 5^{10} + 7^{10} = 3\,479\,761 \cdot (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2);$$
$$1^{11} + 3^{11} + 5^{11} + 7^{11} = 126\,645\,751 \cdot (1 + 3 + 5 + 7).$$

124. Еще серия красивых равенств.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4);$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4);$$
$$1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 = 130 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 13 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3);$$
$$1^6 + 2^6 + 3^6 + 4^6 = 489 \cdot (1 + 2 + 3 + 4);$$
$$1^7 + 2^7 + 3^7 + 4^7 = 187 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3);$$
$$1^9 + 2^9 + 3^9 + 4^9 = 28\,234 \cdot (1 + 2 + 3 + 4);$$
$$1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + 4^{10} = 110\,865 \cdot (1 + 2 + 3 + 4);$$
$$1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + 4^{11} = 43\,735 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3);$$
$$1^{13} + 2^{13} + 3^{13} + 4^{13} = 6\,871\,138 \cdot (1 + 2 + 3 + 4).$$

125. Двузначное число, равное количеству букв в его названии.

Этим числом является 11.

126. Наименьшее двузначное число, квадрат которого оканчивается на три одинаковые цифры.

Этим свойством обладает число 38, так как $38^2 = 1444$.

127. После некоторого натурального числа 12 последующих чисел — составные.

Это числа 115, 116, 117, ... , 126. Всего 12 последовательных натуральных чисел.

128. Трехзначное число, равное сумме своих факториалов.

Факториалом числа n называется произведение натуральных чисел от 1 до n включительно.

! — знак факториала.

Таким свойством обладает число 145, так как

$145 = 1! + 4! + 5!;$

$1! = 1;$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 4!5 = 120.$

Тогда $1 + 24 + 120 = 145$.

129. Трехзначное число, равное кубу суммы своих цифр.

Это число 512, так как $512 = (5 + 1 + 2)^3 = 8^3$.

130. Четырехзначное число, равное четвертой степени суммы его цифр.

Этим свойством обладает число 2401, так как

$2401 = (2 + 4 + 0 + 1)^4 = 7^4$.

131. Два красивых равенства.

$4913 = (4 + 9 + 1 + 3)^3 = 17^3;$

$5832 = (5 + 8 + 3 + 2)^3 = 18^3;$

$19\,683 = (1 + 9 + 6 + 8 + 3)^3 = 27^3.$

Есть еще одно число, обладающее указанным свойством, дающее куб двузначного числа. Найдите его.

132. Удивительные равенства.

$$122^2 + 597^2 = 13^5;$$

$$33\,802^2 + 8839^2 = 5^{13};$$

$$2^2 + 11^2 = 5^3 \text{ и т. д.}$$

Таких равенств можно привести сколько угодно.

133. Четыре действия арифметики.

$$1\ 2\ 3 = 1;$$
$$1\ 2\ 3\ 4 = 1;$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5 = 1;$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 = 1;$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 = 1;$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 = 1;$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 1.$$

Расставьте между цифрами знаки «+», «–», «·», «:» и скобки (если понадобятся), чтобы в каждом ряду получилось по 1.

В случае необходимости две рядом стоящие цифры можно считать двузначным числом.

134. Снежинки-цифры.

$$16 = 4^2$$
$$1156 = 34^2$$
$$111\,556 = 334^2$$
$$11\,115\,556 = 3334^2$$
$$1\,111\,155\,556 = 33\,334^2 \text{ и т. д.}$$

135. Учетверенная сумма четырех квадратов.

$4 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 10^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2;$

$4 \cdot (7^2 + 3^2 + 1^2 + 4^2) = 15^2 + 4^2 + 2^2 + 6^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2.$

136. Упятеренная сумма пяти квадратов.

$5 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) =$
$= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 15^2;$

$5 \cdot (5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2) =$
$= 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2 + 6^2 + 8^2 + 45^2.$

Таких равенств можно привести сколько угодно. Случай, когда утроенную сумму трех квадратов можно представить в виде четырех квадратов, рассматривал еще Льюис Кэрролл в книге «История с узелками», изданной в 1973 г.

137. Удевятеренная сумма девяти квадратов.

$9 \cdot (1^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 +$
$+ 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 +$

$+ 5^2 + 5^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2 + 6^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 11^2 +$
$+ 11^2 + 13^2 + 66^2$.

Представляет интерес обобщение задачи на случай n-й суммы из n квадратов (*прим. авт.*).

138. Представление числа 100 с помощью девяти разных цифр.

$97 + (5 + 3) : 8 + 6 : 4 + 1 : 2 = 100;$

$75 + 24 + 9 : 18 + 3 : 6 = 100;$

$95\frac{1}{2} + 4\frac{38}{76} = 100;$

$24\frac{3}{6} + 75\frac{9}{18} = 100$ и т. д.

139. Представление числа 100 с помощью всех десяти цифр.

$$78\frac{3}{6} + 21\frac{45}{90} = 100.$$

Есть еще четыре способа. Найдите их.

140. Расположение цифр 1, 2, ..., 9 двумя группами по четыре цифры в каждой, при котором суммы чисел, составленных из цифр каждой группы, равны между собой.

Например:

1) $172 + 5 = 177,$
$84 + 93 = 177;$

2) $172 + 5 = 177,$
$83 + 94 = 177.$

Есть и другие варианты решения. Найдите их.

141. Восстановите числитель и знаменатель дробей

$$\frac{15}{?} - \frac{?}{3} = \frac{1}{2}.$$

Например: $\frac{15}{2} - \frac{21}{3} = \frac{1}{2}$; $\frac{15}{10} - \frac{3}{3} = \frac{1}{2}$.

Есть еще два решения. Найдите их.

142. Какая дробь больше: $\frac{13}{23}$ или $\frac{133}{233}$?

Поскольку $1 - \frac{13}{23} = \frac{10}{23}$, а $1 - \frac{133}{233} = \frac{100}{233}$, то $\frac{10}{23} = \frac{100}{230} > \frac{100}{233}$, т. е. первая дробь больше.

143. Верное равенство $13 = 17$.

Запишем верное равенство

$26 + 39 - 65 = 34 + 51 - 85$, или

$13 \cdot (2 + 3 - 5) = 17(2 + 3 - 5)$, или,

сократив обе части на $2 + 3 - 5$, получим

$13 = 17$. Где ошибка?

144. Расставьте цифры от 1 до 9 включительно в пустые клетки так, чтобы равенство было верным.

$$\square \cdot \square\square = \square\square\square = \square\square \cdot \square$$

Решение: $6 \cdot 29 = 174 = 58 \cdot 3$.

Как видим, все цифры разные и равенство верное.

145. Задача Г. Дьюдени.

Четыре числа, сумма каждой пары которых и сумма которых представляет собой точные квадраты:

$10430 + 3970 = 120^2$; $3970 + 2114 = 78^2$;
$10430 + 2114 = 112^2$; $3970 + 386 = 66^2$;
$10430 + 386 = 104^2$; $2114 + 386 = 50^2$;
$10430 + 3970 + 2114 + 386 = 130^2$.

По мнению Г. Дьюдени (классика занимательной математики), приведенные числа — наименьшие.

Представляет интерес общее решение задачи (*прим. авт.*).

146. Сумма любых двух натуральных чисел из четырех является полным квадратом:

$1058 + 6338 = 86^2$; $1058 + 10823 = 109^2$;
$1058 + 13826 = 122^2$; $6338 + 10823 = 131^2$;
$6338 + 13826 = 142^2$; $10823 + 13826 = 157^2$.

147. Все цифры различные:

$1738 \cdot 4 = 6952$; $438 \cdot 12 = 5796$;
$1963 \cdot 4 = 7852$; $296 \cdot 18 = 5346$;
$198 \cdot 27 = 5346$; $157 \cdot 28 = 4396$;
$138 \cdot 42 = 5796$; $186 \cdot 39 = 7254$.

148. Интересное извлечение корней:

$\sqrt{121}=12-1$; $\sqrt{64}=6+\sqrt{4}$;

$\sqrt{49}=4+\sqrt{9}=9-\sqrt{4}$; $\sqrt{169}=16-\sqrt{9}=\sqrt{16}+9$;

$\sqrt{81}=8+1$;

$\sqrt{256}=2\cdot5+6$; $\sqrt{324}=3\cdot(2+4)$;

$\sqrt{11\,881}=118-8-1$; $\sqrt{1936}=-1+9+36$

и т. д.

149. Последовательность девяти квадратов:

$2^2+5^2+8^2+\ldots+25^2+26^2=48^2$;
$4^2+10^2+16^2+\ldots+50^2+52^2=96^2$ и т. д.

150. Последовательность одиннадцати квадратов:

$18^2+19^2+20^2+\ldots+27^2+28^2=77^2$;
$36^2+38^2+40^2+\ldots+54^2+56^2=154^2$ и т. д.

151. Один куб равен сумме трех кубов:

$937^3=118^3+268^3+929^3$;
$2096^3=42^3+980^3+2022^3$;
$1048^3=21^3+490^3+1011^3$ и т. д.

152. Коллекция сумм и кубов:

$87+6+69=27+38+97=162$;
$87^3+6^3+69^3=27^3+38^3+97^3=987\,228$.
Кроме того, $(87^3+6^3+69^3):(87+6+69)=$
$=(27^3+38^3+97^3):(27+38+97)=6094$;
$131+274+428=104+326+403$;
$131^3+274^3+428^3=104^3+326^3+403^3$ и т. д.

153. Сумма кубов целых чисел равна квадрату их суммы:

$1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2$;
$1^3+2^3+2^3+3^3+4^3+6^3=(1+2+2+3+4+6)^2$.

Проблема нахождения таких чисел связана с задачей французского математика Лиувилля: найти целые числа a, b, c, d, ... , сумма кубов которых равна квадрату их суммы, т. е.

$$a^3+b^3+c^3+\ldots=(a+b+c+\ldots)^2.$$

Среди чисел могут быть и равные.

Сам математик нашел остроумный способ нахождения таких чисел.

154. Теорема Никомаха.

$$1^3 = 1;$$
$$2^2 = 3 + 5;$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11;$$
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19;$$
$$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29.$$

Сумма каждой группы равна кубу номера группы.

155. Пять кубов:

$25^3 + 26^3 + 27^3 + 28^3 + 29^3 = 315^2.$

156. Двенадцать кубов:

$14^3 + 15^3 + 16^3 + \ldots + 23^3 + 24^3 + 25^3 = 312^2.$

157. Два куба:

$7^3 = 343;$ $512 - 343 = 169 = 13^2;$
$8^3 = 512;$ значит, $8^3 - 7^3 = 13^2.$

158. Разность квадратов:

$617\,284^2 - 617\,283^2 = 1\,234\,567.$

159. Разность кубов:

$642^3 - 641^3 = 1\,234\,567.$

160. Арифметическая прогрессия:

$482 + 3362 = 62^2;$ $482 + 6242 = 82^2;$
$3362 + 6242 = 98^2.$

Числа 482, 3362, 6242 образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2880$.

161. Геометрическая прогрессия:

$1 + 7 + 49 + 343 = 20^2;$
$1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 11^2.$

162. Интересные свойства чисел 2013 и 2014.

Простые делители числа 2013 — 3, 11 и 61.
Простые делители числа 2014 — 2, 19 и 53.
$2013 + 3 + 11 + 61 = 2088;$
$2014 + 2 + 19 + 53 = 2088.$
Вот такое удивительное совпадение!

163. Свойства числа 2015:

1) $2015 = 3^2 + 6^2 + 11^2 + 43^2$.

2) Число 2015 встречается в десятичной части числа π, по крайней мере на следующих трех позициях:

$$\pi = 3{,}14159\ldots7952311\ 2015\ 0432932\ldots$$

$$4231179\ 2015\ 3464977\ldots4625370\ 2015\ 7821573\ldots$$

3) Аналогично для числа e (основание натурального логарифма):

$$e = 2{,}71828\ldots1573624\ 2015\ 9350785\ldots$$

$$0863812\ 2015\ 9808943\ldots7060715\ 2015\ 8982529\ldots$$

164. Красивая закономерность.

2015 — число Лукаса–Кармайкла.

Простые делители: 5, 13 и 31.

Удивительно, но число 2016 делится на 5 + 1; 13 + 1 и 31 + 1!

165. Удивительное равенство:

$$2019 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 5^4 + 6^4.$$

166. Сумма квадратов:

$$2022 = 2^2 + 13^2 + 43^2;$$
$$2022 = 11^2 + 26^2 + 35^2;$$
$$2022 = 5^2 + 29^2 + 34^2;$$
$$2022 = 7^2 + 23^2 + 38^2;$$
$$2022 = 10^2 + 31^2 + 31^2.$$

167. Сумма кубов:

$$2022 = 3^3 + 3^3 + 5^3 + 8^3 + 11^3.$$

168. Цифра 8:

$$2022 = 88 \cdot (8 + 8 + 8) - 88 - (8 + 8) : 8.$$

169. Цифра 9:

$$2022 = 999 + 999 + 9 + 9 + 9 - (9 + 9 + 9) : 9.$$

170. По убывающей шкале:

$$2022 = 9 \cdot (8 + 7) \cdot (6 + 5 + 4) - 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0.$$

171. Сумма двух последовательных простых чисел:

$$2022 = 1009 + 1013.$$

172. С цифрами 7, 8 и 9:

$$2023 = 777 + 777 + 77 \cdot 7 - 77 + 7;$$

$$2023 = 888 + (8 + 8 + 8) \cdot (8 + 8) - (8 + 8) - 8 : 8;$$

$$2023 = 999 + 999 + 9 + 9 + 9 - (9 + 9) : 9.$$

173. Пифагорова тройка:

$$2023^2 = 952^2 + 1785^2.$$

174. Цифры те же:

$$2023 = (2 + 0 + 2 + 3)(2^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2)^2.$$

175. Все цифры простые:

$$2023 = (2 + 3) \cdot (5 + 7) \cdot (11 + 13 + 17) - 19 \cdot 23.$$

176. Сумма симметричных чисел:

$$2023 = 252 + 1771 = 77 + 505 + 1441 =$$
$$= 88 + 494 + 1441 = 99 + 373 + 1551.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балаян Э. Н.* Геометрия. Задачи на готовых чертежах для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ. — Ростов н/Д: Феникс, 2023.

2. *Балаян Э. Н.* Геометрия. Научись решать задачи различными способами. — Ростов н/Д: Феникс, 2022.

3. *Балаян Э. Н.* Лучшие олимпиадные задачи по математике: 7–9 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2019.

4. *Балаян Э. Н.* Научись решать уравнения различными способами. — Ростов н/Д: Феникс, 2022.

5. *Балаян Э. Н.* Репетитор по математике для старшеклассников и абитуриентов. — Ростов н/Д: Феникс, 2022.

6. *Клименко Д. В.* Задачи по математике для любознательных. — М.: Просвещение, 1992.

7. *Мамонтова Г. Г.* Математика. Подготовка к тестированию. — Минск: Новое знание, 2005.

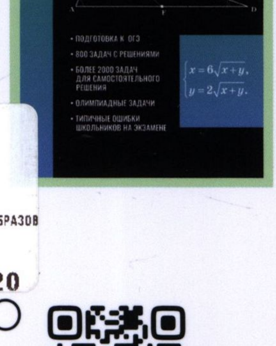
СОДЕРЖАНИЕ

В предлагаемом пособии рассмотрены основные методы и приемы решения олимпиадных задач разного уровня сложности для учащихся 8–9 классов. Пособие содержит 650 задач, разбитых на 65 вариантов по каждому классу. Каждый вариант содержит 5 задач по различным темам.

Задачи, представленные в книге, посвящены таким уже ставшим классическими темам, как делимость и остатки, инварианты, диофантовы уравнения, принцип Дирихле, тригонометрические уравнения, линейные и нелинейные системы с параметром и т. п.

Ко всем задачам даны ответы и указания, а к наиболее трудным — решения. Большинство задач авторские.

Пособие адресовано учащимся 8–9 классов для подготовки к олимпиадам различного уровня, учителям математики, студентам педвузов, репетиторам.



ISBN 978-5-222-40536-9
9 785222 405369
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФЕНИКС
ХОРОШИЕ КНИГИ