ПОД РЕДАКЦИЕЙ Ф.Ф. ЛЫСЕНКО, Е.Г. КОННОВОЙ

ОЛИМПИАДЫ
МАТЕМАТИКА

6-11 классы

- теория и разобранные задачи по темам
- задачи для самостоятельного решения
- правила математического боя

Теория графов

Неравенства

Раскраски

Чётность

Игры

Принцип Дирихле

Построение примера

Инвариант

Комбинаторика

Оценка+пример

ЛЕГИОН

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, Е. Г. Конновой

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ОЛИМПИАДАМ: ОСНОВНЫЕ ИДЕИ, ТЕМЫ, ТИПЫ ЗАДАЧ

6–11 классы

Издание пятое

ТМ

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2019

ББК 74.200.58
М34

Рецензенты:

Л. С. Ольховая — учитель математики высшей квалификационной категории;

С. В. Дерезин — кандидат физико-математических наук.

Авторский коллектив:

Е. Г. Коннова, В. А. Дрёмов, С. О. Иванов, Д. И. Ханин

М34 **Математика. 6–11-е классы. Подготовка к олимпиадам: основные идеи, темы, типы задач** / под ред. Ф. Ф. Лысенко, Е. Г. Конновой. — 5-е изд. — Ростов-на-Дону: Легион, 2019. — 256 с. — (Готовимся к олимпиаде).

ISBN 978-5-9966-1325-0

Пособие предназначено учащимся, готовящимся к олимпиаде или планирующим получить высокий балл на ЕГЭ по математике, а также учителям, занимающимся внепрограммным (факультативным) математическим образованием школьников.

Книга содержит:

- **теоретические сведения и разобранные задачи** по «классическим» темам так называемой олимпиадной математики: «Чётность», «Раскраски», «Принцип крайнего», «Графы» и т. д.;
- **задачи для самостоятельного решения** по каждой теме, снабжённые ответами, указаниями и решениями в конце книги;
- **правила математического боя** — командного соревнования школьников по решению математических задач.

Рассмотренные в пособии темы традиционно представлены в заданиях Всероссийской олимпиады школьников по математике и других олимпиад, успешное выступление на которых может быть приравнено к **100 баллам** на ЕГЭ. Последняя задача ЕГЭ профильного уровня также является олимпиадной.

ББК 74.200.58

ISBN 978-5-9966-1325-0

Оглавление

Предисловие

Эта книга посвящена некоторым основным темам факультативного математического образования в 6—11-х классах. Она будет полезна прежде всего ученикам, интересующимся точными науками, и может быть использована для подготовки к олимпиадам и экзаменам, в которых содержатся задачи повышенного уровня сложности, требующие применения нестандартного, творческого подхода. Пособие предназначено также учителям, которые занимаются внепрограммным (факультативным) математическим образованием школьников.

Материал книги охватывает «классические» темы так называемой олимпиадной математики, такие как «Чётность», «Принцип Дирихле», «Раскраски», «Комбинаторика», «Принцип крайнего», «Графы», «Теория игр», «Инвариант», «Неравенства» и «Оценка + пример». Такой выбор объясняется тем, что эти темы традиционно представлены в текстах Всероссийской олимпиады школьников по математике и других олимпиад, успешное выступление на которых может быть приравнено к 100 баллам на ЕГЭ. Некоторые из этих тем могут быть представлены и в последней задаче профильного уровня ЕГЭ по математике.

По сравнению с предыдущим изданием книга дополнена главой «Задачи на построение примера», а также новыми задачами (в том числе с разобранным решением) в других главах.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать на адрес электронной почты `legionrus@legionrus.com`.

Глава I. Чётность

Известно, что целые числа бывают чётные и нечётные. Чётные числа можно записать в виде $2k$, где k — целое число, а нечётные — в виде $2k+1$.

Легко доказать или показать на примерах следующие свойства чётности для целых чисел:

1. Сумма чётных чисел чётна.
2. Сумма двух нечётных чисел чётна.
3. Сумма чётного и нечётного чисел нечётна.
4. Произведение любого числа на чётное — чётно.
5. Если произведение нечётно, то все сомножители нечётны.
6. Сумма чётного количества нечётных чисел чётна.
7. Сумма нечётного количества нечётных чисел нечётна.
8. Разность и сумма двух данных чисел — числа одной чётности.
9. Если объекты можно разбить на пары, то их количество чётно.

Чётные и нечётные числа

Задача 1.
Кузнецу заказали выковать десять мечей. Каждый меч может стоить 3, 5 или 7 златников. Могут ли они стоить в сумме 53 златника?
Решение. Сумма чётного количества нечётных чисел чётна. У нас есть 10 мечей, цена каждого меча — нечётное число, значит, их сумма должна быть чётна. Но 53 — число нечётное, поэтому получить его в виде суммы 10 нечётных чисел нельзя.

Ответ: нет.

Задача 2.
Можно ли 7 селений соединить между собой попарно так, чтобы каждое было соединено напрямую ровно с тремя другими?
Решение. При решении этой задачи используется такое соображение: если мы рассматриваем объекты типа верёвки — провода, дороги, рукопожатия, знакомства и т. д., то при любом количестве объектов число концов должно быть чётным. Предположим, что мы соединили 7 селений между собой попарно так, чтобы каждое было соединено ровно с тремя другими.

Посчитаем количество концов дорог, соединяющих эти селения. Понятно, что их число должно быть чётным. От каждого из 7 селений отходит 3 конца дорог, всего $7 \cdot 3 = 21$ конец, число нечётное, значит, нельзя 7 селений соединить между собой попарно так, чтобы каждое было соединено ровно с тремя другими.

Ответ: нет.

Задача 3.

13 команд мечников участвуют в королевском однокруговом турнире. Докажите, что в любой момент есть команда, сыгравшая чётное число встреч. (Однокруговой турнир — когда каждая команда играет с каждой ровно один раз.)

Решение. Подсчитаем, сколько встреч провела каждая команда, и просуммируем полученные числа. В общей сумме каждая игра учитывается два раза, если же подсчитать сумму игр 13 команд, сыгравших по нечётному числу встреч, результат будет нечётный. Чтобы общая сумма игр получилась чётной, хотя бы одна команда должна сыграть чётное число встреч.

Задача 4.

В секции фехтования мальчиков в 14 раз больше, чем девочек, при этом всего в секции не более 20 человек. Смогут ли они разбиться на пары?

Решение. Пусть девочек x, тогда мальчиков $14x$, всего $15x$. Но $15x < 20$, значит, $x = 1$. Мальчиков — 14, девочек — 1, а 15 человек нельзя разбить на пары.

Ответ: нет.

Чётность как инвариант

Инвариант — термин, обозначающий нечто неизменяемое. Разберём несколько задач, где не меняется чётность некоторой величины.

Задача 5.

Казначей положил на стол 6 монет, одну из них вверх орлом, другие — решкой. Можно ли все монеты положить вверх орлом, если разрешено одновременно переворачивать две монеты?

Решение. При переворачивании двух монет одновременно чётность числа монет орлом вверх не меняется. Докажем это.

Если перевернуть две монеты вверх орлом, они станут вверх решкой ($OO \to PP$), орлов стало на 2 меньше, чётность не изменится.

Если перевернуть две монеты вверх решкой, они станут вверх орлом ($PP \to OO$), орлов стало на 2 больше, чётность не изменится.

Если перевернуть одну монету вверх орлом, другую — вверх решкой ($OP \to PO$), количество орлов останется прежним. Сначала была одна монета вверх орлом, значит, их будет всегда нечётное количество, а 6 — чётно.

Ответ: нельзя.

Задача 6.

Можно ли в таблице 5×5 расставить 25 натуральных чисел, чтобы во всех строках суммы были чётные, а во всех столбцах — нечётные?

Указание. Посчитайте сумму чисел во всех строках и во всех столбцах и сравните.

Ответ: нельзя.

Задача 7.

В таблице 6×6 за 1 ход можно поменять все знаки в любой строке или в любом столбце на противоположные. Можно ли таким образом из таблицы, приведённой а) на рис. 1; б) на рис. 2, получить таблицу из одних минусов?

+	−	+	−	+	+
−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−

Рис. 1

−	−	−	−	+	−
−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−
+	+	+	+	+	−

Рис. 2

Решение. а) Рассмотрим, как меняется количество минусов за 1 ход. Допустим, мы меняем знаки в строчке. Заметим, что при этом количество минусов в других строчках остаётся неизменным. Если в изменяемой строчке было чётное количество минусов, то было и чётное количество плюсов, и после смены знаков чётность общего числа минусов в таблице не изменится. Если там было нечётное количество минусов, то было и нечётное количество плюсов, и после смены знаков чётность общего числа минусов в таблице тоже не изменится. Аналогично для столбца. Значит, если вначале было 17 минусов (нечётное число), то получить таблицу из 36 минусов нельзя, так как минусов всегда будет нечётное количество.

б) Во второй таблице (рис. 2) число минусов чётное, но получить нужную таблицу всё равно нельзя. Рассмотрим квадрат 2×2 в правом верхнем углу таблицы. Количество минусов в этом отдельно взятом кусочке меняется по тем же правилам, что и во всей таблице, причём чётность количества минусов в этой табличке 2×2 тоже не меняется — остаётся нечётной. Значит, даже в этом кусочке нельзя получить все 4 минуса.

Ответ: а) нет; б) нет.

Задача 8.

На столе стоят 16 кубков, один из них вверх дном. Можно ли все кубки поставить правильно, если можно одновременно переворачивать по 4 кубка?

Указание. Посмотрите, сколько кубков поставлено правильно сначала, сколько нужно получить в конце и как меняется чётность этого числа при каждом переворачивании. Нужно рассмотреть все 5 вариантов (все вверх дном, 3 из 4 вверх дном и т. д.) и убедиться, что чётность правильно стоящих кубков при переворачивании не изменяется. Значит, получить из нечётного числа чётное нельзя.

Ответ: нельзя.

Чётность суммы и произведения чисел

Задача 9.

На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2017, 2018. Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

Решение. Посчитаем сначала сумму всех чисел, записанных на доске. Она равна $(1 + 2018) \cdot 2018 : 2 = 2019 \cdot 1009$ — нечётному числу. Теперь посмотрим, как меняется эта сумма, если из неё взять два слагаемых и заменить их разностью этих чисел. Если эти два числа были чётные, то их сумма была чётной, их разность тоже будет чётной и чётность общей суммы не изменится. Аналогично для двух нечётных чисел. Если же одно число было чётное, а другое — нечётное, то их сумма была нечётной, их разность тоже будет нечётной и чётность общей суммы тоже не изменится. Значит, у нас могут получаться только нечётные суммы, а нуль — число чётное, и оно в конце на доске остаться не может.

Ответ: нет.

Задача 10.

На доске написаны числа 1^2, 2^2, 3^2, ..., N^2. Между ними произвольным образом расставляют знаки + и − и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 12, если $N = 12$?

б) 0, если $N = 70$?

Решение. а) Может, например:

$1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + 9^2 - 10^2 - 11^2 + 12^2 = 12.$

б) Докажем, что это невозможно. Квадрат чётного числа — число чётное, квадрат нечётного числа — число нечётное. Среди 70 последовательных чисел ровно половина — нечётные, то есть в нашей алгебраической сумме 35 нечётных чисел, остальные — чётные, значит, сумма всегда нечётна и, следовательно, не может быть равна нулю.

Ответ: а) да; б) нет.

Задача 11.

На доске написаны последовательные натуральные числа от 1 до 2015, разрешается за одну операцию любые два числа стереть и вместо них поставить их произведение. Какое наибольшее число операций можно сделать, прежде чем все числа на доске станут чётными? Какое наименьшее?

Решение. Произведение двух нечётных чисел — нечётное, произведение натурального числа на чётное — чётное. Посчитаем, какое наибольшее число операций можно сделать, прежде чем все числа на доске станут чётными. Оставим на доске одно из нечётных чисел и не будем его трогать, пока есть другие числа. Тогда только после последней операции не останется нечётных чисел. За каждую операцию число чисел уменьшается на одно (вместо двух чисел записывается одно). Значит, наибольшее возможное число операций $2015 - 1 = 2014$.

Посчитаем, какое наименьшее число операций можно сделать, прежде чем все числа на доске станут чётными. Каждой операцией мы можем убрать не более чем одно число, в том числе и нечётное. Всего нечётных чисел $\dfrac{2015+1}{2}$, значит, нужно хотя бы 1008 операций. Как можно действовать, чтобы за 1008 операций все числа на доске стали чётными:

каждым ходом умножать одно из оставшихся нечётных чисел на чётное, тогда вместо них будет появляться их чётное произведение, и ровно за 1008 операций все числа на доске станут чётными.

Ответ: 2014; 1008.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Запишите в строчку пять чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была чётная, а сумма всех чисел была нечётная.

1.2. Запишите в строчку пять чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была нечётная, а сумма всех чисел была чётная.

1.3. Можно ли записать в строчку шесть чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была чётная, а сумма всех чисел была нечётная?

1.4. Богатырь за один удар ломает бревно на три меньших. Сможет ли он разбить одно большое бревно на 12 маленьких?

1.5. В десяти коробках лежат мармеладки. В первой — 1, во второй — 2, в третьей — 3 и т. д., в десятой — 10. Саше за один ход разрешается в любые две коробки добавить по 3 мармеладки. Сможет ли Саша за несколько ходов уравнять количество мармеладок в коробках?

1.6. Загаданы три целых числа a, b, c. Разрешается выбрать любые два из них и спросить: их произведение чётное или нечётное? Всегда ли с помощью таких вопросов можно узнать, чётно или нечётно число b?

1.7. Загаданы три целых числа a, b, c. Разрешается выбрать любые два из них и спросить: их сумма чётная или нечётная? Всегда ли с помощью таких вопросов можно узнать, чётно или нечётно число b?

1.8. Загаданы четыре целых числа a, b, c, d. Разрешается выбрать любые три из них и спросить: их сумма чётная или нечётная? Всегда ли с помощью таких вопросов можно узнать, чётно или нечётно число b?

1.9. Учёный Кот посчитал сумму $1 + 3 + 5 + \ldots + 997 + 999$ и получил результат 247 013. Какова чётность данной суммы? Верный ли ответ получил Учёный Кот? Попробуйте выполнить сложение устно.

1.10. Существует ли:

а) чётное число, сумма цифр которого нечётна?

б) чётное число, произведение цифр которого нечётно?

1.11. Может ли сумма $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot M + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot K$, где M и K — натуральные числа, большие трёх, оканчиваться на 9?

1.12. У оруженосца было 5 плиток шоколада. Может ли оруженосец, поделив каждую плитку на 9, 15 или 25 кусочков, получить всего 100 кусков шоколада?

1.13. В пещере разбойников в мешках, расставленных по кругу, лежат монеты, причём в любых двух соседних мешках число монет отличается на единицу. Могут ли быть так расставлены: а) 3; б) 4; в) 98; г) 99 мешков?

1.14. Лена и Маша играют в игру: каждая из них записывает на бумажке по одному натуральному числу. Потом эти числа перемножаются, и если в результате получается чётное число, то выигрывает Лена, а если нечётное, то Маша. Может ли одна из девочек всегда выигрывать, как бы ни играла другая?

1.15. Можно ли в таблице 4×4 расставить натуральные числа таким образом, чтобы во всех строчках суммы оканчивались на 5, а во всех столбцах на 0? А в таблице 15×15?

1.16. Пять девятиногов с планеты Шуруру решили устроить турнир по армрестлингу. Смогут ли они одновременно провести поединки для всех своих ног, чтобы все ноги принимали участие и в каждом поединке встречалось ровно две ноги?

1.17. На доске написаны восемь простых чисел, каждое из которых больше двух. Может ли их сумма равняться 59?

1.18. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы значение полученного выражения было равно 2?

1.19. Можно ли подобрать 4 целых числа, сумма и произведение которых являются нечётными числами?

1.20. В десятичной записи числа семьдесят три цифры и все они единицы. Делится ли это число на 18?

1.21. В таблице 4×4 за 1 ход можно поменять все знаки в любой строке или в любом столбце на противоположные. Можно ли таким образом из таблиц, приведённых на рис. 3, получить таблицу из одних плюсов?

+ − − +	+ + + −	− + + −
− + + −	+ + + +	+ + + +
− + + −	− − + +	+ + + +
+ − − +	+ + + +	− + + −

Рис. 3

1.22. В ряд выписаны числа от 21 до 30. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

1.23. На острове Серобур обитает 13 серых и 15 бурых хамелеонов. При встрече двух хамелеонов оба одновременно меняют свой цвет. Может ли оказаться, что все хамелеоны станут одного цвета?

1.24. Чётное или нечётное число $1+2+3+\dots+1000$? Найдите значение суммы.

1.25. Кузнечик прыгает вдоль прямой на 2 м вправо или влево.

Докажите, что он:

а) может вернуться в исходную точку только после чётного числа ходов;

б) никогда не попадёт в точку, находящуюся на расстоянии в 1 м от начальной.

1.26. Все числа от 1 до 10 выписали в произвольном порядке. Затем каждое из них сложили с номером места, на котором оно находится в строке. Докажите, что по крайней мере у двух из полученных сумм совпадает последняя цифра.

1.27. Может ли прямая пересечь все стороны 13-угольника ровно по 1 разу (не проходя через вершины)?

1.28. Катя и её друзья встали в круг. Оба соседа любого из детей — одного пола. Мальчиков 5. Сколько девочек?

1.29. Могут ли попарные суммы трёх целых чисел оказаться 2006, 1998 и 2003?

1.30. На доске написаны числа $1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \dots,\ N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки $+$ и $-$ и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 8, если $N = 8$?

б) 15, если $N = 80$?

1.31. Из 20 последовательных нечётных чисел 1, 3, ... 39 выбрали 7 различных чисел, которые записали в порядке убывания. Пусть M — четвёртое по величине среди выбранных чисел, а S — среднее арифметическое этих семи чисел.

а) Может ли $S - M$ равняться $\frac{2}{7}$?

б) Может ли $S - M$ равняться $\frac{3}{7}$?

Глава II. Принцип Дирихле

Приведённые ниже рассуждения достаточно стандартны и основываются на применении свойств неравенств и методе доказательства от противного. Рекомендуется при решении простых задач этого типа проводить рассуждения, не упоминая о принципе Дирихле, так как в школьной программе нет такой темы, и при решении задач ссылки на этот принцип неоправданы.

Принцип Дирихле состоит в следующем: «Если в n клеток посадить $n+1$ зайцев, то найдётся хотя бы одна клетка, в которой находятся не менее двух зайцев».

Обобщённый принцип Дирихле: «Если в n клеток посадить $kn+1$ зайцев, то найдётся хотя бы одна клетка, в которой находятся не менее чем $k+1$ заяц».

Доказательство от противного. Предположим, что не найдётся такой клетки. Значит, в каждой клетке находится не более чем k зайцев. Тогда в n клетках — не более чем kn зайцев. Однако по условию у нас было $kn+1$ зайцев. Получилось противоречие, значит, наше предположение неверно. Следовательно, найдётся хотя бы одна клетка, в которой находятся не менее чем $k+1$ заяц.

Безусловно, начинать эту тему стоит с задач, в которых нужно работать с конкретными числами. Обязательно в процессе решения следует обращать внимание на то, что мы должны говорить «не более», «не менее», а не обсуждать «лучший» («худший») случай, так как доказать, что какой-то случай является лучшим или худшим обычно достаточно сложно.

Принцип Дирихле в арифметике и алгебре

Задача 1.

В княжеской дружине 15 полков. В них в сумме 6015 ратников. На площади помещается 400 человек. Докажите, что найдётся полк, ратники которого не поместятся на этой площади.

Решение. Предположим, что в каждом полку не более 400 ратников. Значит, в 15 полках не более $15 \cdot 400 = 6000$ ратников. Но по условию в дружине 6015 человек. Значит, найдётся полк, в котором больше 400 ратников. Поэтому ратники этого полка не поместятся на площади на 400 мест.

Задача 2.

В совете 17 парламентёров. За время заседаний часть из них поссорились между собой. Докажите, что найдутся два участника совета, которые поссорились с одинаковым количеством парламентёров.

Решение. Предположим, что все парламентёры поссорились с различным количеством своих коллег. Посчитаем, сколько может быть различных вариантов. Можно не поссориться ни с кем, поссориться с одним человеком, с двумя, с тремя и так далее до 16 (если поссорился со всеми). Всего получается 17 вариантов, но если кто-то поссорился со всеми, то не может одновременно быть парламентёра, который бы ни с кем не поссорился. Значит, остаётся 16 различных вариантов для 17 человек, и найдутся два участника совета, которые поссорились с одинаковым количеством парламентёров.

Задача 3.

В княжеской школе 5 классов. В каждом из них учится по 32 человека. Докажите, что найдутся 14 человек, дни рождения которых приходятся на один месяц.

Решение. Предположим, что в каждом месяце родилось не более 13 учеников (год рождения не учитывается). Значит, за 12 месяцев родилось не более $12 \cdot 13 = 156$ школьников. Но по условию в пяти классах этой школы обучается $5 \cdot 32 = 160$ человек. Получили противоречие. Значит, найдётся месяц, в котором родилось больше чем 13 учеников, то есть хотя бы 14.

Задача 4.

В классе учится 27 школьников, знающих (всего) 109 стихотворений. Докажите, что найдётся школьник, знающий не менее пяти стихотворений.

Решение. Предположим, что каждый школьник знает не более четырёх стихотворений. Значит, 27 школьников знают не более $4 \cdot 27 = 108$ стихотворений. Но по условию они знают 109 стихотворений. Получили противоречие. Значит, найдётся школьник, который знает хотя бы 5 стихотворений.

Задача 5.

В походе участвовало 25 ратников, каждому из которых было от 20 до 26 полных лет (на данный день). Докажите, что найдутся четыре ратника, родившихся в один год.

Решение. Различных годов рождения может быть 8. Действительно, если человеку полных 26 лет по состоянию на определённый день года n, то этот человек мог родиться в году $n-27$ или $n-26$. Аналогично если человеку полных 20 лет, то он мог родиться в году $n-21$ или $n-20$. На отрезке от $n-27$ до $n-20$ имеется 8 значений.

Предположим, что каждый год рождалось не более трёх участников похода. Значит, за 8 лет могли родиться не более $3 \cdot 8 = 24$ участников. Но, по условию, в походе участвовало 25 ратников. Получили противоречие. Значит, найдутся четыре участника похода, родившихся в один год.

Задача 6.

Докажите, что среди чисел, состоящих из цифр 3, найдётся число, делящееся на 17.

Решение. Рассмотрим 17 чисел с разным количеством цифр: 3, 33, 333, 3333, ... Предположим, что ни одно из них не делится на 17. При этом могут получаться 16 различных остатков: 1, 2, 3, ..., 16. Значит, среди наших чисел есть два числа с одинаковым остатком при делении на 17. Разность этих чисел делится на 17, и это число вида $333\ldots000\ldots$ (сначала несколько троек, потом нули). Заметим, что 10 взаимно просто с 17, значит, если с конца этого числа убрать нули, то получившееся число тоже будет делиться на 17. Но оно состоит из цифр 3. Значит, мы нашли искомое число.

Задача 7.

Докажите, что среди разностей вида $2^k - 2^p$, где k и p — различные натуральные числа, найдётся число, делящееся на 25.

Решение. Рассмотрим 24 различных степени двойки: $2^1,\ 2^2,\ 2^3, \ldots, 2^{25}$. Ни одно из них не делится на 25. При этом могут получаться 24 различных остатка: $1,\ 2, \ldots,\ 24$. Значит, среди наших степеней есть два числа с одинаковым остатком при делении на 25. Их разность делится на 25.

Задача 8.

Докажите, что из любых 65 целых чисел можно выбрать 9 так, что их сумма будет делиться на 9.

Решение. Докажем, что из 65 целых чисел можно выбрать либо 9 чисел с одинаковым остатком от деления на 9, либо 9 чисел с различными остатками. Предположим, что это невозможно, т. е. существует не более чем 8 чисел с различными остатками, и не более чем 8 чисел с одинаковым остатком, тогда чисел будет не более 64, что противоречит условию. Легко проверить, что сумма девяти чисел с одинаковыми остатками так же, как и сумма девяти чисел с разными остатками (от 0 до 8), делится на 9.

Задача 9.

10 подружек собрали 44 яблока. Докажите, что какие-то две из них собрали одинаковое число яблок.

Решение. Предположим, что все собрали различное количество яблок. Пронумеруем подружек в порядке возрастания количества собранных яблок, тогда

1-я подружка собрала 0 яблок или больше,

2-я подружка собрала 1 яблоко или больше,

. . . .

10-я подружка собрала 9 яблок или больше.

Все вместе они собрали 45 яблок или больше, что противоречит условию. Значит, какие-то две из них собрали одинаковое число яблок.

Задача 10.

Докажите, что среди любых n натуральных чисел, не делящихся на n, есть несколько чисел, сумма которых делится на n.

Решение. Рассмотрим суммы: a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Таких сумм n. Если одна из них делится на n без остатка, то эти числа искомые. В противном случае все суммы делятся на n с остатком (от 1 до $n - 1$). Так как сумм больше, чем возможных остатков, то найдутся две суммы с одинаковым остатком. Их разность будет делиться на n. Но эта разность представляет собой сумму некоторых из данных чисел.

Принцип Дирихле в геометрии

Задача 11.

На окно размером 40 см $\times$ 30 см село 25 мух. Докажите, что квадратной мухобойкой 11 см $\times$ 11 см можно прихлопнуть сразу трёх мух.

Решение. Разделим окно на 12 квадратов размером 10 см $\times$ 10 см. Если в каждом квадрате не более двух мух, то всего на окне не более $2 \cdot 12 = 24$ мух, а по условию мух 25, значит, в каком-то квадрате сидит хотя бы 3 мухи. Мухобойка закроет этот квадрат. Значит, такой мухобойкой можно прихлопнуть сразу трёх мух.

Задача 12.

На шахматной доске 8 $\times$ 8 отмечены центры всех полей. Можно ли 13 прямыми, не проходящими через отмеченные точки, разбить доску на части так, чтобы в каждой части было не более одной отмеченной точки?

Решение. Рассмотрим внешний ряд клеток доски (по периметру). Центры полей образуют квадрат 7×7, между ними 28 промежутков. Мы должны разбить доску так, чтобы все отмеченные точки попали в разные части. Значит, прямые должны пересекать все промежутки между отмеченными точками внешних квадратов. Но прямая может пересечь стороны квадрата не более чем в двух точках (случай противоположных по диагонали вершин квадрата нужно исключить), значит, нужно не менее 14 прямых. Итак, нельзя 13 прямыми разбить доску на части так, чтобы в каждой части было не более одной отмеченной точки.

Ответ: нельзя.

Задача 13.

Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 м друг от друга.

Решение. Рассмотрим вершины равностороннего треугольника со стороной 1 м. Если две точки разного цвета, то третья обязательно либо первого, либо второго цвета, значит, мы нашли две точки одного цвета.

Задача 14.

Какое максимальное количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Каждая ладья бьёт горизонталь и вертикаль, на пересечении которых стоит. Значит, на каждой горизонтали можно поставить не более одной ладьи, всего ладей будет не более восьми. Для 8 ладей можно придумать много вариантов расстановок, например, по диагонали.

Ответ: 8.

Задача 15.

Любой ли прямоугольник можно разрезать на 199 частей так, чтобы из них можно было составить квадрат?

Решение. Рассмотрим прямоугольник $1 \times 4\,000\,000$. Допустим, что мы разрезали его на 199 частей и смогли сложить из них квадрат. Разделим его на 400 прямоугольников $1 \times 10\,000$. Так как количество частей 199, то найдётся часть, попавшая хотя бы в 3 различных прямоугольника. Из них можно выбрать 2 несоседних. Значит, некоторые точки этой части находятся на расстоянии, не меньшем 10 000. Площадь квадрата равна площади прямоугольника, а сторона равна 2000. Итак, выбранная нами часть в квадрат поместиться не могла. Получилось противоречие, значит, прямоугольник размером $1 \times 4\,000\,000$ нельзя разрезать требуемым образом.

Ответ: не любой.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. В отряде лучников 22 человека. Докажите, что какие-то четверо лучников родились в один день недели.

2.2. По дороге в школу третьеклассник Коля прошёл мимо 27 деревьев. Дорога в школу заняла у него 15 минут. Докажите, что найдутся два дерева, расстояние между которыми Коля прошёл менее чем за 35 секунд.

2.3. В городе N живёт более 1 250 000 человек. На голове у каждого не более 140 000 волос. Докажите, что найдутся 9 человек с одинаковым количеством волос на голове.

2.4. Докажите, что среди любых пятнадцати натуральных чисел есть два числа, разность которых делится на 14.

2.5. Диктант написали 29 человек. Гена сделал в диктанте 11 ошибок, и никто не сделал большее количество ошибок. Докажите, что найдутся три человека, сделавшие одинаковое количество ошибок.

2.6. На картине 20 см $\times$ 15 см сидят 40 комаров. Докажите, что за один удар можно прихлопнуть не менее четырёх комаров круглой мухобойкой радиусом 5 см.

2.7. В магазин привезли 25 ящиков конфет трёх разных сортов (в каждом ящике — только один сорт). Докажите, что есть хотя бы 9 ящиков с одним и тем же сортом конфет.

2.8. Внутри равностороннего треугольника со стороной 10 отмечено пять точек. Докажите, что найдутся две из них, расстояние между которыми будет не более 5.

2.9. Каждая грань куба окрашена в чёрный или белый цвет. Докажите, что найдутся две грани куба одного цвета, имеющие общее ребро. Верно ли это для октаэдра? (Октаэдр — это правильный многогранник, все 8 граней которого треугольники и в каждой вершине сходятся по 4 грани.)

2.10. Докажите, что из любых $n+1$ натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на n.

2.11. На плоскости отмечено 25 точек, причём никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Некоторые из точек соединены отрезками. Докажите, что найдутся две точки, из которых выходит поровну отрезков.

2.12. В турнире по круговой системе (то есть каждый играет с каждым по одному разу) участвуют 55 команд. Докажите, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число игр.

2.13. В вершинах выпуклого 65-угольника расставлены натуральные числа, не превышающие 2007. Докажите, что найдутся две диагонали, для которых модули разности чисел, написанных у их концов, одинаковы.

2.14. Докажите, что для любого натурального числа k найдётся число вида $1111\ldots110000\ldots00$, делящееся на k.

2.15. Докажите, что из 82 кубиков, каждый из которых окрашен в определённый цвет, можно выбрать либо 10 одноцветных кубиков, либо 10 кубиков, окрашенных в 10 разных цветов.

2.16. В компании 16 человек. Каждому нравится 8 человек из компании. Докажите, что найдутся двое, которые нравятся друг другу.

2.17. Докажите, что среди любых шести чисел есть два, разность которых делится на 5.

2.18. В квадрат 1×1 бросили 51 точку.

а) Докажите, что найдётся прямоугольник со сторонами $1/5$ и $2/9$, содержащий не менее трёх из этих точек.

б) Докажите, что найдётся круг радиусом $1/7$, содержащий не менее трёх из этих точек.

2.19. Сто человек сидят за круглым столом, причём более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то двое мужчин сидят напротив друг друга.

2.20. Вася достаёт ботинки наугад из тёмного шкафа, в котором лежат 20 пар ботинок: 10 пар чёрных и 10 пар коричневых. Какое наименьшее количество ботинок надо вытащить, чтобы среди вытащенных наверняка оказалась пара? (На ощупь нельзя определить ни цвет ботинка, ни то, на какую ногу он надевается.)

2.21. Вася и Петя собираются в гости. Им нужно надеть носки. Они достают наугад носки из тёмного шкафа, в котором лежит 20 белых носков и 20 чёрных носков.

а) Какое наименьшее число носков нужно вытащить, чтобы наверняка получилась пара?

б) Какое наименьшее число носков нужно вытащить, чтобы наверняка получились пары для Васи и для Пети разного цвета?

Глава III. Раскраски

На олимпиадах последних лет часто встречаются задачи, объединённые одной и той же идеей — раскрасить в несколько цветов таблицу так, чтобы было видно, что какое-то условие задачи не может выполняться.

Решение задач с применением раскрасок

Задача 1.

Гостиница имеет форму квадрата 3×3, каждая клетка 1×1 — комната. Все 9 постояльцев недовольны своей комнатой и считают, что любая комната через стенку лучше, чем та, в которой они живут. Может ли хозяйка переселить их так, чтобы каждый постоялец переехал в соседнюю комнату?

Решение. Раскрасим комнаты в шахматном порядке (рис. 4). Соседние комнаты при этом окрасятся в разный цвет. При переезде цвет комнаты меняется, тогда те постояльцы, которые живут в пяти белых комнатах, должны переехать в чёрные комнаты, а их всего 4. Значит, такой обмен невозможен.

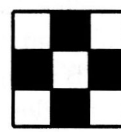


Рис. 4

Ответ: нет.

Задача 2.

Можно ли разрезать прямоугольник 10×6 на прямоугольники 1×4?

Решение. Раскрасим клетки прямоугольника в диагональном порядке в четыре цвета (рис. 5). При такой раскраске при любом расположении прямоугольника 1×4 он закрывает по одной клетке разных цветов, значит, если бы мы смогли разрезать прямоугольник на фигурки 1×4, то квадратиков каждого цвета было бы равное количество. У нас цвета 1 и 3 — по 15 клеток, цвета 2 — 16 клеток и цвета 4 — 14 клеток. Значит, данный прямоугольник разрезать нельзя.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

Рис. 5

Ответ: нет.

Задача 3.

На доске размером 8 × 8 в левом нижнем углу в виде квадрата 3 × 3 стоят 9 фишек (рис. 6). За один ход разрешается какой-нибудь одной фишке перепрыгнуть через любую другую фишку на клетку, симметричную первой фишке относительно второй (если эта клетка свободна). Двигаться подобным образом можно только по горизонтали или вертикали, но не по диагонали. Можно ли после нескольких таких ходов собрать все фишки в виде квадрата 3 × 3 в правом верхнем углу доски?

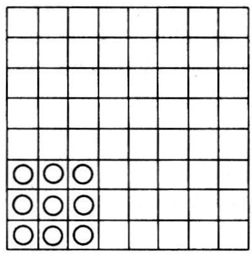


Рис. 6

Решение. Раскрасим клетки квадрата, как показано на рис. 7. При любом разрешённом перемещении фишка остаётся на поле того же цвета (нужно рассмотреть перемещения по вертикали и горизонтали). Сначала шесть фишек стояли на белых клетках, поэтому и в конце они должны будут стоять на белых клетках, а в правом верхнем углу у нас только три белых клетки. Значит, переставить нельзя.

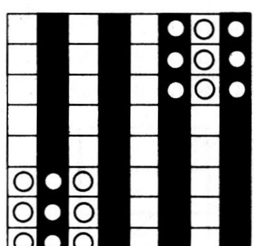


Рис. 7

Ответ: нет.

Задача 4.

Дворец имеет форму прямоугольника размером 13×15. Каждая клетка, кроме центральной, — комната дворца, а в центральной клетке находится бассейн. В каждой стене (стороне клетки), разделяющей две соседние комнаты, есть дверь. Можно ли, не выходя из дворца и не заходя в бассейн, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу?

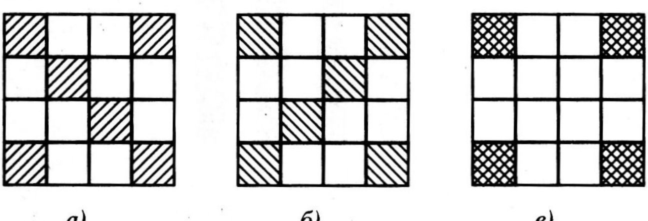
Решение. Раскрасим прямоугольник в шахматном порядке так, чтобы центральная клетка была чёрная. При этом клеток чёрного цвета будет на 1 меньше, чем белых клеток. В центральной клетке находится бассейн, поэтому чёрных комнат на 2 меньше, чем белых. При переходе через дверь мы попадаем в комнату другого цвета, т. е. цвет комнат чередуется. Поэтому разность между количеством пройденных комнат разного цвета не более единицы (т. к. путь распадается на пары клеток разного цвета, исключая, может быть, последнюю). Значит, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу, нельзя.

Ответ: нет.

Задача 5.

Квадрат 4×4 разрезали на 5 плиток размером 1×3 и одну плитку 1×1. Докажите, что плитка 1×1 лежит в одном из углов квадрата.

Решение. Раскрасим квадрат 4×4 так, как показано на рисунке 8а. Понятно, что каждая плитка 1×3 закрывает одну штрихованную и две нештрихованные клетки, а поскольку заштрихованных клеток 6, а плиток 1×3 всего 5, плитка 1×1 лежит на заштрихованной клетке. Повторив то же рассуждение для раскраски, показанной на рисунке 8б, получаем, что плитка 1×1 лежит на одной из клеток, показанных штриховкой на рисунке 8в, то есть в одном из углов квадрата.



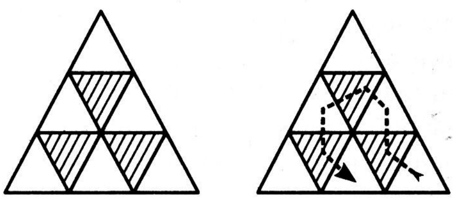
а) *б)* *в)*

Рис. 8

Задача 6.

За́мок имеет форму правильного треугольника, разделённого на 9 маленьких залов одинаковых размеров той же формы. В каждой стене между залами проделана дверь. Турист ходит по за́мку, не посещая более одного раза ни один из залов. Найдите наибольшее число залов, которое ему удастся посетить.

Решение. Раскрасим треугольник в шахматном порядке (рис. 9а). Залов одного цвета (например белого) — 6, а другого цвета (чёрного) — 3. Заметим, что в белом зале турист может находиться с самого начала или попасть в него из чёрного, поэтому он побывает не более чем в 4 белых залах. Таким образом, не менее 2 белых залов останутся непосещёнными. Пример, когда турист посетит ровно 7 залов, показан на рисунке 9б.



а) *б)*

Рис. 9

Ответ: 7 залов.

Задача 7.

Можно ли выложить прямоугольник 6×6 прямоугольниками 1×4?

Решение. Применим раскраску «в горошек» — покрасим в чёрный цвет те клетки, которые находятся на пересечении чётных вертикалей и чётных горизонталей, а остальные — в белый (рис. 10). Каждый прямоугольник занимает чётное количество чёрных клеток (0 или 2). Значит, все вместе они тоже занимают чётное число чёрных клеток. Но чёрных клеток у нас 9.

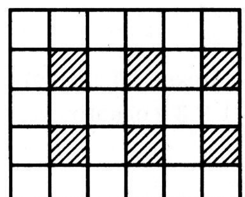


Рис. 10

Ответ: нет.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. От шахматной доски 8×8 отрезали: а) клетку $a1$; б) клетки $a1$ и $h1$; в) клетки $a1$ и $h8$. Можно ли остаток доски разрезать на «доминошки» 2×1?

3.2. В дачном посёлке 25 участков, расположенных в виде квадрата 5×5. Каждому из дачников, владеющих этими участками, нравится участок соседа (соседи — те, кто имеет общий забор). Могут ли они поменяться участками так, чтобы все 25 дачников получили нравящиеся им участки?

3.3. Из доски 8×8 вырезали угловую клетку. Можно ли получившийся остаток разрезать на прямоугольники 3×1?

3.4. Может ли Карлсон на спор с Малышом обойти шахматным конём всю шахматную доску размером 7×7 так, чтобы конь побывал на каждой клетке по одному разу и вернулся на начальную клетку?

3.5. Из шахматной доски 8×8 вырезали: а) клетку $a1$; б) клетки $a1$ и $h8$. Можно ли остаток доски обойти шахматным конём, побывав на каждой клетке по одному разу и вернувшись на прежнее место?

3.6. Можно ли разрезать квадрат 10×10 на прямоугольники 1×4?

3.7. На каждой клетке взлётного поля 7×7 стоит вертолёт. В некоторый момент времени все вертолёты взлетают и приземляются на соседние по стороне клетки. Докажите, что при этом окажется хотя бы одна пустая клетка.

3.8. Можно ли доску размером 7×12 покрыть одинаковыми фигурками из 4 клеток, одна из которых изображена на рисунке 11?

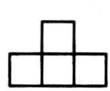


Рис. 11

3.9. Можно ли сложить квадрат 6×6 с помощью 11 прямоугольников 1×3 и одного «уголка», изображённого на рисунке 12?

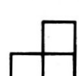


Рис. 12

3.10. Можно ли выложить прямоугольник 6×14 прямоугольниками 1×4?

3.11. За́мок имеет форму правильного треугольника, разделённого на 16 маленьких залов одинаковых размеров той же формы. В каждой стене между залами проделана дверь. Турист ходит по за́мку, не посещая более одного раза ни один из залов. Найдите наибольшее число залов, которое ему удастся посетить.

3.12. Дана ладья, которой разрешается делать ходы только длиной в одну клетку. Может ли она обойти все клетки прямоугольной шахматной доски, побывав на каждой клетке ровно один раз, и вернуться в начальную клетку, если размеры доски:

а) 4×7,

б) 5×7?

3.13. Школьник хочет вырезать из квадрата размером 6×6 наибольшее количество прямоугольников размером 1×4. Найдите это количество.

3.14. Натуральные числа от 1 до 50 расставляются в ряд в произвольном порядке. Расстановка называется плохой, если в ней можно отметить 5 чисел (не обязательно стоящих подряд), идущих в порядке убывания. Остальные расстановки называются хорошими. Докажите, что количество хороших расстановок не превосходит 16^{50}.

3.15. Квадрат 5×5 клеток разрезали на 8 плиток размером 1×3 клетки и одну плитку 1×1. Докажите, что плитка 1×1 лежит в центре квадрата.

3.16. На доске 4×4 (рис. 13) стоят белый и чёрный «баран» — фигура, которая может ходить, как показано на рисунке 14. Могут ли они через несколько ходов поменяться местами?

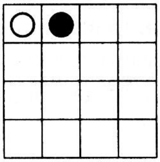


Рис. 13

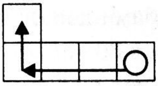


Рис. 14

Глава IV. Комбинаторика

Очень часто в процессе решения задачи нам приходится подсчитывать количество предметов, фигур, способов их разместить или выбрать. Этими и многими другими вопросами занимается такой раздел математики, как комбинаторика.

Правило умножения

Задача 1.

Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 4, 5, если цифры могут повторяться?

Решение. Выберем первую цифру. Вторую цифру можно приписать к ней, выбрав любую из четырёх заданных цифр. Получим 4 двузначных числа с выбранной первой цифрой. Так как первую цифру можно выбрать четырьмя способами, всего чисел $4 \cdot 4 = 16$.

Ответ: 16.

Задача 2.

В магазине «Лукоморье» есть 2 разных меча и 3 разных щита. Сколькими способами можно выбрать меч со щитом?

Решение. Выберем меч. В комплект к нему можно выбрать любой из 3 щитов. Получили 3 комплекта с первым мечом. Столько же комплектов со вторым мечом. Так как мечей два, число различных комплектов $2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: 6.

Задача 3.

В магазине «Лукоморье» есть 2 разных меча, 3 разных щита и 5 разных копий. Сколькими способами можно выбрать меч, щит и копьё?

Решение. Выберем один из 6 комплектов предыдущей задачи. Можно пятью способами дополнить его копьём. Тогда общее число комплектов будет $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Ответ: 30.

Лемма. (Правило умножения.) Назовём словом длиной k упорядоченный набор из k каких-нибудь символов. Допустим, что первую букву можно выбрать n_1 способами, вторую — n_2, третью — n_3, ..., последнюю — n_k способами. Тогда существует всего $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ слов.

Доказать эту лемму можно по индукции.

Задача 4.

Из города A в город B ведут 4 дороги, из города B в город C ведут 6 дорог (см. рис. 15). Сколькими способами может Илья Муромец доехать из A в C по этим дорогам?

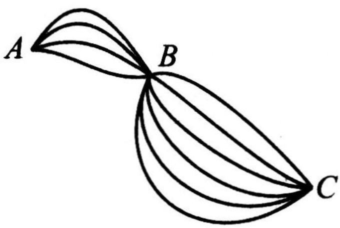


Рис. 15

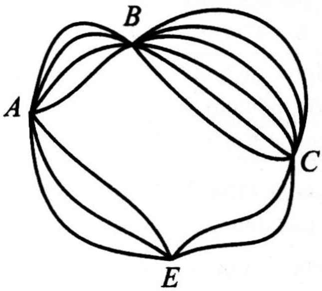


Рис. 16

Решение. От A до B можно доехать 4 способами, от B до C — 6 способами. Маршрут $A - B - C$ можно составить $4 \cdot 6 = 24$ способами.

Ответ: 24.

Задача 5.

Из города A в город B ведут 4 дороги, из города B в город C ведут 6 дорог, из A в E ведут 3 дороги, из E в C — 2 дороги (см. рис. 16). Сколькими способами можно доехать из A в C по этим дорогам?

Решение. От A до C через B можно доехать 24 способами. Аналогично от A до C через E можно доехать $3 \cdot 2 = 6$ способами. Общее число маршрутов получаем, складывая $24 + 6$.

Ответ: 30.

Задача 6.

В магазине «Лукоморье» есть 2 разных меча, 3 разных щита и 5 разных копий. Сколькими способами можно выбрать один предмет? Сколькими способами можно выбрать комплект из двух предметов?

Решение. Один предмет можно выбрать $2 + 3 + 5 = 10$ способами. Чтобы найти число способов выбрать комплект из двух предметов, посчитаем число пар «меч со щитом», их $2 \cdot 3$, потом пар «меч с копьём», их $2 \cdot 5$, и пар «щит с копьём» — $3 \cdot 5$. Всего возможных комплектов из двух предметов $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 31$.

Ответ: 10; 31.

Рассмотрим теперь несколько следствий из правила умножения.

Следствие 1. Если каждую букву слова можно выбрать m способами, то число слов длиной k равно m^k.

Первую букву можно выбрать m способами, вторую — m способами и т. д., так всего k букв.

Произведение k последовательных натуральных чисел от 1 до k обозначают $k!$ и читают «k факториал». Также по определению считается, что $0! = 1$.

Следствие 2. Число слов длиной k, которые можно составить из k различных неповторяющихся букв, равно $k!$

Первую букву можно выбрать k способами, вторую — $k-1$ способами и т. д., последняя буква — единственная оставшаяся.

Задача 7.

У богатыря квадратный щит, разбитый на клетки 3×3. Сколькими способами можно покрасить клетки щита, если каждую клетку можно покрасить в белый, красный или зелёный цвета?

Решение. Выберем первую клетку. Её можно покрасить тремя способами. Две клетки можно раскрасить $3 \cdot 3$ способами. Три клетки — $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ способами. Так как таблица 3×3 содержит 9 клеток, их можно покрасить 3^9 способами.

Ответ: 3^9.

Задача 8.

Сколькими способами можно написать пароль из 4 символов, если символом может служить любая цифра и любая из 23 букв в двух регистрах?

Решение. Цифр — 10, букв с учётом регистра — 46, всего различных символов — 56. Поэтому способов написать пароль из 4 символов — 56^4.

Ответ: 56^4.

Задача 9.

Сколько существует пятизначных чисел, состоящих из чётных цифр?

Решение. Чётных цифр пять — 0, 2, 4, 6, 8. Первая цифра в этом числе не может быть нулём, поэтому её можно выбрать 4 способами, остальные — пятью. Поэтому таких пятизначных чисел — $4 \cdot 5^4$.

Ответ: $4 \cdot 5^4$.

Задача 10.

Сколько существует чётных пятизначных чисел?

Решение. Первая цифра в этом числе не может быть нулём, поэтому её можно написать 9 способами, последняя цифра должна быть чётная, чётных цифр 5. Все остальные могут быть любыми из 10 цифр. Значит, всего пятизначных чётных чисел $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45\,000$.

Ответ: $45\,000$.

Есть ряд задач, которые удобно решать, вычислив число неподходящих нам объектов, а затем вычесть их число из общего числа объектов. Например, сюда часто относятся задачи, в формулировке которых есть слова «хотя бы один».

Задача 11.

Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Решение. Посчитаем число пятизначных чисел, в записи которых нет ни одной чётной цифры. Нечётных цифр — 5, тогда число пятизначных чисел, состоящих их нечётных цифр, равно 5^5. Всего пятизначных чисел — $9 \cdot 10^4$. Поэтому чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра, — $9 \cdot 10^4 - 5^5$.

Ответ: $9 \cdot 10^4 - 5^5$.

Задача 12.

Каких 4-значных чисел больше — тех, в которых есть цифра 5, или тех, в которых нет такой цифры?

Решение. Всего 4-значных чисел — $9 \cdot 10^3$. Чисел, в которых нет цифры 5, существует $8 \cdot 9^3$, тогда чисел, в которых есть цифра 5, существует $9 \cdot 10^3 - 8 \cdot 9^3$. Сравним $8 \cdot 9^3$ и $9 \cdot 10^3 - 8 \cdot 9^3$. Первое число больше, поэтому больше тех 4-значных чисел, в которых нет цифры 5.

Ответ: тех, где нет цифры 5.

Задача 13.

Дядька Черномор бросает игральный кубик 4 раза. Сколько возможно получить последовательностей результатов, в которых хотя бы один раз встречается двойка?

Решение. Всего возможных последовательностей — 6^4, а последовательностей, в которых нет двойки, — 5^4. Поэтому последовательностей, в которых хотя бы один раз встречается двойка, — $6^4 - 5^4$.

Ответ: $6^4 - 5^4$.

Перестановки

Рассмотрим задачи на выбор упорядоченного набора объектов.

Задача 14.

Сколько существует способов выложить в ряд 5 кубиков разного цвета?

Решение. На первое место можно положить один из пяти кубиков, на второе — один из 4 оставшихся, на третье — один из трёх и т. д., поэтому выложить в ряд 5 кубиков разного цвета можно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ способами.

Ответ: 120.

Задача 15.

Сколько существует способов составить 5-значное число, состоящее из нечётных цифр, чтобы цифры в числе не повторялись? А из чётных?

Решение. Нечётных цифр — пять, на первое место можно выбрать цифру 5 способами, на второе — 4 и т.д., на пятое место — 1 способом. Всего $5! = 120$ способов.

Чётных цифр — 5, но на первое место можно выбрать только одну из цифр — 2, 4, 6, 8. На второе место — одну из трёх оставшихся или 0 — четыре способа, на третье — три способа и т. д. Всего существует $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 4! = 96$ способов.

Ответ: 120; 96.

Задача 16.

Казначей каждый день придумывает новый пароль для царской сокровищницы. Сколькими способами он может написать 6-значный буквенный пароль, если можно использовать 10 разных букв и буквы в пароле не должны повторяться?

Решение. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ способов.

Ответ: $\frac{10!}{4!}$.

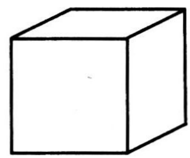
Итак, k предметов можно разложить в ряд $k!$ способами, то есть

Число перестановок из k предметов равно $k!$

Задача 17.

Сколькими способами (включая исходный) можно повернуть куб, поставив его на то же место?

Решение. Рассмотрим точку A на рисунке 17 (правый нижний угол). В точку A можно поместить любую из 8 вершин куба. При этом его можно повернуть тремя способами, не сдвигая вершину A. Всего получается 24 варианта.



A

Рис. 17

Ответ: 24.

Задача 18.

Куб распилили на 27 маленьких кубиков и раскрасили их в разные цвета. Сколькими способами можно из полученных маленьких кубиков сложить куб, если кубики можно не только менять местами, но и переворачивать?

Решение. Рассмотрим все способы, которыми можно переставить маленькие кубики, не поворачивая их. Всего есть 27! таких перестановок. Способов повернуть один маленький кубик — 24, столько же вариантов повернуть каждый из остальных кубиков. Комбинируя их между собой, получим 24^{27} способов. А общее число способов сложить куб равно $27! \cdot 24^{27}$.

Ответ: $27! \cdot 24^{27}$.

Задача 19.

p и q — различные простые числа. Сколько натуральных делителей у числа: а) pq; б) p^2q^3; в) p^7q; г) p^nq^m?

Решение. Делителем числа является любое произведение его простых множителей. Рассмотрим случай pq. Множитель p можно брать в произведение или не брать — 2 способа, множитель q можно брать или не брать — 2 способа, всего $2 \cdot 2 = 4$ способа написать произведение, т. е. получить 4 делителя числа pq.

Рассмотрим случай p^2q^3. Множитель p можно брать в произведение 2 раза, 1 раз или не брать — 3 способа, множитель q можно брать 3 раза, 2 раза, 1 раз или не брать — 4 способа, всего $3 \cdot 4 = 12$ способов написать произведение, т. е. получаем 12 делителей числа p^2q^3.

Аналогично получаем, что у числа p^7q число делителей равно $(7+1)(1+1) = 16$.

Ответ: а) 4; б) 12; в) 16.

У числа p^nq^m число делителей $(n+1)(m+1)$.

Иногда удобно подсчитать сначала число объектов, кратное числу тех объектов, которые нас интересуют.

Задача 20.

На встрече 20 богатырей обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано?

Решение. Каждый из 20 богатырей обменялся рукопожатиями с 19 соратниками, но если умножить 20 на 19, то каждое рукопожатие будет подсчитано дважды. Поэтому число рукопожатий $20 \cdot 19 : 2 = 190$.

Ответ: $20 \cdot 19 : 2 = 190$.

Задача 21.

9 детей водят хоровод. Сколько существует способов расставить их по кругу?

Решение. Сначала будем считать, что хоровод неподвижен, в нём есть первый и последний участники. Тогда его можно составить 9! способами. Но любое расположение детей и 8 хороводов, получаемых из него поворотами, надо считать одним и тем же хороводом. Поэтому существует $\frac{9!}{9} = 8!$ способов расставить детей по кругу.

Ответ: 8!.

Рассмотрим задачи, в которых среди переставляемых предметов есть одинаковые.

Задача 22.

Сколько четырёхзначных чисел можно получить, переставляя цифры числа 1223?

Решение. Представим себе сначала, что цифры «2» у нас разные — 2_1 и 2_2. Тогда мы можем получить 4! числа. Но числа, в которых отличаются лишь перестановки 2_1 и 2_2, одинаковы. Значит, полученные 24 числа разбиваются на группы по 2 одинаковых числа. Поэтому различных чисел получится в два раза меньше, т. е. 12.

Ответ: 12.

Задача 23.

Сколько шестизначных чисел можно получить, переставляя цифры числа 123 334?

Решение. Представим себе, что цифры 3 у нас разные — 3_1, 3_2 и 3_3. Тогда мы можем получить 6! чисел. Но числа, в которых отличаются лишь перестановки троек, одинаковы. Три тройки можно переставить 3! способами. Значит, полученные числа разбиваются на группы по 3! одинаковых числа. Поэтому различных чисел получится в 3! раза меньше, т. е. $\frac{6!}{3!}$.

Ответ: $\frac{6!}{3!}$.

Задача 24.

Сколько чисел можно получить, переставляя цифры числа 155 289 898?

Решение. Если считать все цифры различными, получим 9! чисел. Учитывая, что у нас две цифры 5, чисел получается в 2! раза меньше. Теперь учтём, что при перестановках трёх восьмёрок получаются группы по 3! одинаковых числа, а двух девяток — по 2!, разных слов останется $\frac{9!}{2!3!2!}$.

Ответ: $\frac{9!}{2!3!2!}$.

Задача 25.

Сколько существует способов завязать 10 русалкам по бантику, если есть 3 синих, 5 красных и 2 жёлтых бантика, и бантики одного цвета считаются одинаковыми?

Решение. Если бы все бантики были разного цвета, то бантики можно было бы завязать 10! способами. Учитывая, что среди этих способов есть одинаковые, получаем ответ $\frac{10!}{2!3!5!}$.

Ответ: $\frac{10!}{2!3!5!}$.

Размещения и сочетания

Задача 26.

Сколькими способами можно разложить 4 разных кафтана по 10 различным сундукам, если в каждом сундуке должно быть не более одного кафтана?

Решение. Первый кафтан можно положить в любой из 10 сундуков, второй — в любой из 9 оставшихся, третий — 8 способами, четвёртый — 7 способами. Тогда число способов разложить все кафтаны будет равно $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$.

Ответ: $\frac{10!}{6!}$.

> Расставить n предметов на $m \geqslant n$ мест можно $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ способами.

Задача 27.

Сколькими способами можно расставить на шахматной доске следующие белые фигуры: короля, ферзя, двух слонов и шесть коней?

Решение. Расставим 10 фигур на 64 клетках доски, считая фигуры разными. Число способов равно $64 \cdot 63 \cdot \ldots \cdot 55 = \frac{64!}{(64-10)!}$. После этого учтём, что расстановки, при которых переставлены только слоны или только кони, одинаковые. Значит, есть $\frac{64!}{(64-10)! \cdot 2! \cdot 6!}$ разных способов расставить эти фигуры на доске.

Ответ: $\frac{64!}{(64-10)! \cdot 2! \cdot 6!}$.

Задача 28.

Сколькими способами можно поселить 33 богатырей в 3 палаты по 11 человек?

Решение. Сначала посчитаем число способов разместить 33 богатырей на 33 кроватях в этих палатах. Оно равно 33!. Учитывая, что в каждой комнате 11 богатырей могли разместиться на кроватях 11! способами, но полученные при этом варианты нужно считать одним и тем же вариантом размещения по палатам, получим $\frac{33!}{(11!)^3}$ способов.

Ответ: $\frac{33!}{(11!)^3}$.

Теперь рассмотрим задачи, где нужно выбрать неупорядоченный набор объектов. Обычно формулировка звучит так: «Сколькими способами можно выбрать k предметов из n различных предметов ($k \leqslant n$)?» Число способов, которыми это можно сделать, называют числом сочетаний из n по k и обозначают C_n^k.

Задача 29.

Сколькими способами можно выбрать подарок из трёх игрушек, если у нас имеется 8 различных игрушек?

Решение. Первую игрушку можно выбрать 8 способами, вторую — 7 способами, третью — 6 способами, получаем 336 вариантов выбора. Однако один и тот же подарок при этом подсчёте учитывается несколько раз. (Например, тройка «мяч-кукла-машина» или «мяч-машина-кукла» и т. п.) Переставить 3 игрушки можно 3! способами, поэтому каждый подарок учтён 3! раз, а разных подарков получится $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = 56$.

Ответ: 56.

> Число способов выбрать k предметов из n различных предметов называют числом сочетаний.
>
> Число сочетаний из n по k равно $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Задача 30.

Сколькими способами можно выбрать команду из 6 человек, если в школе колдунов занимаются 8 мальчиков и 10 девочек?

Решение. Всего в школе колдунов 18 детей. Число способов выбрать команду равно числу сочетаний из 18 по 6, т. е. $C_{18}^6 = \frac{18!}{(18-6)! \cdot 6!}$.

Ответ: C_{18}^6.

Задача 31.

Сколькими способами можно выбрать команду из 3 мальчиков и 3 девочек, если в школе колдунов занимаются 8 мальчиков и 10 девочек?

Решение. Число способов выбрать 3 мальчиков равно числу сочетаний из 8 по 3, т. е. $C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!}$, а число способов выбрать 3 девочек равно числу сочетаний из 10 по 3, т. е. $C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}$. Таким образом, число команд из 3 мальчиков и 3 девочек равно $C_8^3 \cdot C_{10}^3 = \frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!} \cdot \frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}$.

Ответ: $C_8^3 \cdot C_{10}^3$.

Задача 32.

В школе колдунов занимаются 8 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно выбрать команду из 6 человек, в которой обязательно должны быть и мальчики, и девочки (хотя бы по одному человеку)?

Решение. Сначала посчитаем, сколько всего команд из 6 человек можно выбрать из 18 учеников школы колдунов. Их количество равно $C_{18}^6 = \frac{18!}{(18-6)!\cdot 6!}$. Потом посчитаем, сколько команд не содержат ни одной девочки. Их — $C_8^6 = \frac{8!}{(8-6)!\cdot 6!}$. Команд, в которых нет мальчиков, — $C_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!\cdot 6!}$. Таким образом, команду, в которой обязательно должны быть и мальчики, и девочки, можно выбрать $C_{18}^6 - C_8^6 - C_{10}^6$ способами.

Ответ: $C_{18}^6 - C_8^6 - C_{10}^6$.

Задача 33.

В школе колдунов занимается 18 человек. Сколькими способами можно разбить их на команды из 6 человек?

Решение. Первую команду можно выбрать C_{18}^6 способами, вторую — C_{12}^6 способами, в третью попадут 6 оставшихся человек. Но при таком подсчёте каждая тройка команд учитывалась 3! раз (число перестановок 3 команд). Поэтому получим $\dfrac{C_{18}^6 \cdot C_{12}^6}{3!}$ способов.

Ответ: $C_{18}^6 - C_8^6 - C_{10}^6$.

Для некоторых задач плодотворна идея «перегородок».

Задача 34.

Сколькими способами можно разложить 8 одинаковых мячей по 4 пронумерованным корзинам так, чтобы ни одна корзина не оказалась пустой?

Решение. Рассмотрим ряд из 8 одинаковых мячей и 3 одинаковых перегородок (см. рис. 18).

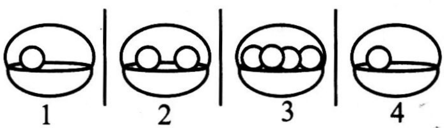


Рис. 18

Каждая расстановка перегородок между мячами соответствует расположению шаров в четырёх корзинах. Между 8 мячами 7 промежутков, и 3 перегородки в эти промежутки можно поставить C_7^3 способами.

Ответ: C_7^3.

Задача 35.

Сколькими способами можно разложить 8 одинаковых мячей по 4 пронумерованным корзинам, если некоторые корзины могут быть пустыми?

Решение. Рассмотрим ряд из 8 одинаковых мячей и 3 одинаковых перегородок — всего они занимают 11 мест. По-прежнему каждая расстановка перегородок между мячами соответствует расположению шаров в четырёх корзинах, но теперь между некоторыми перегородками мячей может и не быть. Поэтому перегородки могут стоять на любом из 11 мест, и таких рядов по 3 перегородки и 8 мячей может быть C_{11}^3 (как только мы выбрали, где расположены перегородки, мячи расположатся на оставшихся местах).

Ответ: C_{11}^3.

Задача 36.

Автобус во время рейса из Волгодонска в Зимовники сделал 5 остановок (считая Зимовники и не считая Волгодонск). В Волгодонске в него сели 32 пассажира, и никто не зашёл на следующих остановках. Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих пяти остановках, если:

а) учитывается, какие пассажиры вышли на каждой остановке;

б) учитывается лишь количество пассажиров, которые вышли на каждой остановке?

Решение. а) Первый пассажир мог выйти на одной из 5 остановок, второй тоже на одной из 5 остановок, аналогично для каждого из 32 пассажиров. Всего пассажиры могут выйти на этих остановках 5^{32} способами.

б) Назовём остановки корзинами, а пассажиров мячами. Тогда задача аналогична предыдущей: сколько существует способов выбрать места для 4 перегородок в ряду из 36 объектов (32 пассажира — «мячи» и 4 перегородки между остановками).

Ответ: а) 5^{32}; б) C_{36}^{4}.

Теперь рассмотрим несколько задач, где комбинаторная задача «замаскирована» условием.

Задача 37.

Властелин Зла обосновался на планете Гуано. После очередного передела мира он забавляется так: на своей трёхмерной карте планеты он перекрашивает 6 государств в 6 различных цветов. Каждое перекрашивание занимает у него один гуанский месяц, при этом цвета государств на карте различны. Пророчество гласит: «Если каждая страна успеет заключить с каждой другой мирный договор до того момента, когда Властелин Зла закончит последнюю возможную раскраску, то Властелина Зла удастся изгнать, иначе грядёт новая мировая война за передел мира». Как сбудется пророчество, если после 5 лет переговоров на Гуано удаётся заключить только один мирный договор? Изменится ли результат, если срок переговоров удастся снизить до 4 лет?

Решение. Посчитаем, сколько лет Властелин Зла будет занят перекрашиванием карты. $6! : 12 = 5! : 2 = 60$ лет. Теперь найдём, сколько лет пройдёт, пока все государства договорятся о мире. Каждое из 6 государств должно заключить договор с 5 государствами, а всего договоров

$6 \cdot 5 : 2 = 15$. Государствам на Гуано требуется $15 \cdot 5 = 75$ лет при времени переговоров 5 лет (и тогда начнётся новая война) и $15 \cdot 4 = 60$ лет при времени переговоров 4 года, что даёт надежду изгнать Властелина Зла.

Задача 38.

На доске 8×8 расставлено 8 красных фишек так, что никакие 2 не лежат на одной горизонтали или вертикали. На эту доску поставили наибольшее количество зелёных фишек так, чтобы никакие 2 зелёные и 2 красные фишки не находились в вершинах прямоугольника, стороны которого параллельны сторонам доски. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Количество способов расставить красные фишки — $8!$, и для каждого из них 2^{28} — количество способов расставить 28 (максимальное количество) зелёных фишек. Основная идея: каждая пара красных является вершинами ровно одного прямоугольника, таких прямоугольников 28, и каждая свободная клетка доски является угловой ровно для одного прямоугольника. Значит, в каждом таком прямоугольнике нужно поставить зелёную фишку ровно на одну из двух угловых клеток, что можно сделать двумя способами.

Ответ: $8! \cdot 2^{28}$.

Задача 39.

На столе лежит 36 шариков. Кощей и Василиса Премудрая играют в игру. Каждый из них по очереди разбивает шарики на группы (может быть, на одну), в каждой из которых равное число шариков. Число групп не может повторяться. Проигрывает тот, кто не сможет найти новое разбиение. Кто выиграет, если начал игру Кощей?

Решение. Задача сводится к нахождению количества различных делителей числа 36. Разложим его на простые множители: $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Число делителей равно $(2 + 1)(2 + 1) = 9$. Это число нечётное, значит, закончит игру тот, кто её начинал. Выиграет Кощей.

Ответ: Кощей.

Задача 40.

В охрану царя Додона входят 8 богатырей. Их суммарный возраст — 280 лет. Докажите, что из них можно выбрать троих, сумма возрастов которых не менее 105 лет.

Решение. Найдём количество возможных троек. Первого богатыря можно выбрать 8 способами, второго — семью, третьего — шестью. Значит, троек $8 \cdot 7 \cdot 6$. Теперь посчитаем количество троек, которые можно получить, переставляя троих человек. Их — $3!$. Поэтому количество различных троек богатырей — $C_8^3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$.

Теперь посчитаем, сколько раз один человек входит в эти тройки. Для этого найдём, сколько троек можно составить из оставшихся 7 человек, и вычтем полученное число из общего количества троек.

$C_7^3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$. Во все эти тройки каждый человек входит по $56 - 35 = 21$ раз. Поэтому сумма возрастов всех троек равна $280 \cdot 21 = 5880$.

Предположим, что сумма возрастов каждой тройки меньше 105. Тогда общая сумма по всем тройкам меньше $105 \cdot 56 = 5880$. Противоречие.

Заметим, что эта задача решается проще без применения комбинаторики: по принципу Дирихле получаем, что существует тройка, суммарный возраст которой не менее $\dfrac{3}{8} \cdot 280 = 105$ лет.

Задача 41.

35 малышей в детском саду строят из кубиков двух цветов башню высотой не более 4 кубиков (каждый малыш строит свою башню). Докажите, что найдутся хотя бы две одинаковые башни.

Решение. Из кубиков двух цветов высотой 1 можно построить 2 вида башен, высотой 2 кубика можно построить 2^2 башен, высотой 3 — 2^3 башен, высотой 4 — 2^4 башен. Всего различных башен можно построить не более $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$. Если построено 35 башен, то среди них найдутся хотя бы две одинаковые башни.

Задача 42.

Каждая сторона правильного треугольника разделена на 30 равных частей. Прямые, проведённые через точки деления параллельно сторонам треугольника, разбивают его на 900 маленьких треугольничков. Каково максимальное число вершин этих треугольничков, ни через какие две из которых не проведена прямая (в число проведённых прямых включаются и стороны исходного треугольника)?

Решение. Докажем, что 22 вершины выбрать нельзя. Пусть начальный треугольник ABC имеет длину стороны 30. Будем считать, что через вершины треугольника также проходят прямые, параллельные противоположным сторонам, и длина отрезков этих прямых, заключённых внутри треугольника, равна нулю. Выбросим все прямые, проходящие через выбранные точки. Пусть выбранных вершин было 22. Так как на одной прямой лежит не более одной выбранной вершины, то мы выбросили $3 \cdot 22 = 66$ прямых. Так как вначале было 93 прямых, то осталось 27 прямых. Среди отрезков этих прямых не более трёх имеют длину 0, не более трёх имеют длину 1, не более трёх имеют длину 2 и т. д. Значит, сумма длин остальных отрезков не меньше $3 \cdot (0+1+2+\ldots+7+8) = 108$. С другой стороны, сумма длин отрезков прямых, проходящих через одну вершину, равна 60. Сумма длин всех отрезков равна $3 \cdot (0+1+2+\ldots+29+30) = 3 \cdot 31 \cdot 15$, сумма длин выброшенных отрезков равна $60 \cdot 22$, тогда сумма длин оставшихся отрезков $3 \cdot 31 \cdot 15 - 60 \cdot 22 = 75 < 108$. Получили противоречие, значит, можно выбрать не более 21 точки.

Выберем 21 точку так: на стороне AB возьмём точки K и P так, что $AK = 10$, $BP = 19/2$. Вершины маленьких треугольников, лежащих на перпендикулярах к AB, проходящих через точки K и P, — искомые.

Ответ: 21.

Задача 43.

Существует ли шесть шестизначных чисел, состоящих из цифр от 1 до 6 без повторений, таких, что любое трёхзначное число, состоящее также из цифр от 1 до 6 без повторений, можно получить из одного из этих шестизначных чисел путём вычёркивания трёх цифр?

Решение. Трёхзначных чисел, состоящих из цифр от 1 до 6 без повторений, существует $6! : 3! = 120$. Из шести шестизначных чисел, состоящих из цифр от 1 до 6 без повторений, вычёркивая 3 цифры, можно получить тоже 120 чисел, значит, эти числа не должны повторяться. Нужно получить 20 трёхзначных чисел, начинающихся с цифры 1. Из шестизначного числа, где 1 стоит на первом месте, можно получить 10 таких чисел, на втором — 6, на третьем — 3, на четвёртом — 1, на пятом и шестом — ни одного такого числа. Выпишем все суммы шести таких чисел, равные 20:

$$20 = 10+10+0+0+0+0 = 10+6+1+1+1+1 = 10+6+3+1+0+0 =$$
$$= 10+3+3+3+1+0 = 6+6+3+3+1+1 = 6+6+6+1+1+0.$$

Такие же рассуждения можно провести для чисел, которые начинаются с любой другой цифры. Должно быть также ровно 20 чисел, где 1 стоит посередине. Из шестизначного числа, у которого 1 стоит на первом или последнем месте, таких чисел не получится, на втором или пятом — получится 4 таких числа, на третьем или четвёртом — 6 таких чисел. Поэтому все указанные представления числа 20, кроме $20 = 10+6+3+1+0+0$, не подходят, потому что количество чисел с 1 в середине будет не равно 20 в остальных случаях. Но и этот случай не подходит, так как найдётся пара цифр, которая в первых трёх шестизначных числах стоит после 1, но тогда они дают одно и то же число хотя бы дважды.

Докажем, что такая пара цифр найдётся. Посмотрим на первые три числа, они имеют вид 1** ***; *1* ***; **1 ***. Всего в этих числах слева от единицы находится 3 цифры. Даже если они все различные, то остаётся 2 цифры (A и B), которые в каждом из этих чисел находятся правее единицы. Вычеркнем во всех трёх числах цифры так, чтобы остались 1 и эта пара, получим либо $1AB$, либо $1BA$, но числа три, значит, пара будет одинаковой.

Следовательно, таких шести чисел не существует.

Ответ: нет.

Задача 44.

В алфавите племени Умтис две буквы — А и У.

а) Сколько 7-буквенных слов может быть в их языке?

б) Сколько 9-буквенных слов можно составить на языке племени Умтис, если буква А не может встречаться 2 раза подряд?

в) Сколько 10-буквенных слов может быть в языке этого племени, если буква А не может встречаться три раза подряд, а буква У — 2 раза подряд?

Решение. а) Каждую из букв можно выбрать двумя способами, 7-буквенных слов может быть $2^7 = 128$.

б) Обозначим за A_i количество слов из i букв, которые начинаются с буквы А, аналогично B_i — количество слов из i букв, начинающихся с буквы У. Очевидно, что A_1 и B_1 равны 1.

$A_2 = 1 = B_1$.

К первой букве А можно добавить все слова, начинающиеся с буквы У, а их B_{i-1}. $A_i = B_{i-1}$. Аналогично $B_i = A_{i-1} + B_{i-1}$, так как к первой букве У можно приписать как все слова, начинающиеся с буквы А, а их A_{i-1}, так и слова, начинающиеся с буквы У, их B_{i-1}. Итак, $A_1 = 1$, $B_1 = 1$, $A_i = B_{i-1}$, $B_i = A_{i-1} + B_{i-1} = B_{i-2} + B_{i-1}$. При этом искомая величина равна $A_9 + B_9 = B_9 + B_8 = B_{10}$.

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

в) Пусть $Q(n)$ — количество слов длиной n, которые начинаются с буквы У. Тогда $Q(n) = Q(n-2) + Q(n-3)$, т. к. если слово начинается с буквы У, то оно начинается с УАУ или УААУ, при этом $Q(1) = 1$, $Q(2) = 1$, $Q(3) = 2$. Всего количество подходящих слов обозначим $D(n)$, тогда очевидно, $D(n) = Q(n) + Q(n-1) + Q(n-2)$, т. к. слово начинается либо с У, либо с АУ, либо с ААУ. В этом случае

$$D(10) = Q(10) + Q(9) + Q(8) = Q(9) + 2Q(8) + Q(7) =$$
$$= 2Q(8) + 2Q(7) + Q(6) = 2Q(7) + 3Q(6) + 2Q(5) =$$
$$= 3Q(6) + 4Q(5) + 2Q(4) = 4Q(5) + 5Q(4) + 3Q(3) =$$
$$= 7Q(3) + 5Q(4) + 4Q(2) = 9Q(2) + 7Q(3) + 5Q(1) = 28.$$

Ответ: а) 128; б) 89; в) 28.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Дядька Черномор — большой любитель составлять числа. Сейчас он обдумывает такие вопросы: сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 4, 5, 6, 7, 8, 9, если: а) цифры могут повторяться; б) все цифры в числе разные?

4.2. Сколько чётных пятизначных чисел можно составить из цифр 4, 5, 6, 7, 8, 9, если: а) цифры могут повторяться; б) все цифры в числе разные?

4.3. Сколько пятизначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если: а) цифры могут повторяться; б) все цифры в числе разные?

4.4. В магазине «Лукоморье» выставлено на продажу 5 видов системных блоков, 7 видов мониторов, 4 вида мышек и 8 видов клавиатур. Сколькими способами в этом магазине можно выбрать комплект: а) из системного блока и монитора; б) из системного блока, мышки и клавиатуры; в) из 4 разных устройств; г) из двух разных устройств, одно из которых — системный блок?

4.5. Учёному Коту нужно спеть 11 песен, но из-за происков колдуна он забыл слова всех, кроме трёх. Сколько последовательностей длиной 11 из этих 3 песен он может составить, если петь одну и ту же песню подряд Коту не позволяет его поэтическая душа?

4.6. Сколькими способами можно покрасить 13 следов различных невиданных зверей в один из трёх цветов?

4.7. Внуки Василисы Премудрой Вася и Петя составляют 6-буквенные пароли из букв А, В, С, Д, П. Вася использует все буквы, кроме В, а Петя – все буквы, но в каждом его пароле обязательно встречается хотя бы одна буква П. Кто из мальчиков может составить больше паролей?

4.8. Сколько четырёхзначных чисел, в которых нет цифр 3 и 5, может составить Кощей?

4.9. Сколько существует четырёхзначных чисел, в которых есть хотя бы одна цифра 3 или 5?

4.10. Богатыри бросают монетку 10 раз. Сколько может быть последовательностей результатов, в которых хотя бы один раз встречается решка?

4.11. В кружок «Сказочник» к Учёному Коту ходят 16 зверей, у которых разные имена. Сколькими способами можно составить список из их имён?

4.12. В кружок ходят 16 зверей, у которых разные имена. Сколько существует способов составить список из 7 имён, если имена не должны повторяться?

4.13. В кружок ходят 16 зверей. Сколько есть способов составить из них команду для участия в сказочном бое, если в состав команды должны входить 7 зверей?

4.14. У внука Василисы Премудрой 5 игрушек. Каждый день он берёт с собой в сказочный детский сад некоторые из них. Он согласен ходить без скандала в детский сад до тех пор, пока набор взятых с собой игрушек не начнёт повторяться. Через сколько дней Василисе Премудрой придётся покупать внуку новую игрушку?

4.15. Сколькими способами (включая исходный) можно повернуть треугольную пирамиду с одинаковыми рёбрами, поставив её на то же место?

4.16. Прямоугольный параллелепипед $3 \times 4 \times 1$ распилили на 12 маленьких кубиков, и их пронумеровали. Сколькими способами можно из маленьких кубиков сложить параллелепипед, если кубики можно не только менять местами, но и переворачивать?

4.17. Сколько разных натуральных делителей имеет число 75 000?

4.18. Сколько существует способов рассадить 10 русалок за круглым столом?

4.19. На стенде отмечаются успехи класса в различных мероприятиях. За первое место дают звёздочку, за второе — квадратик и за третье — кружочек. Сколько существует способов наклеить в ряд 3 звёздочки, 2 квадратика и кружочек?

4.20. Сколько разных натуральных делителей имеет число: а) $5^{10} \cdot 7^3$; б) $11^2 \cdot 13^4 \cdot 17^6$; в) 8^0?

4.21. Сколько существует способов выбрать 5 пакетиков семян, если в магазине имеется 5 сортов огурцов, 7 сортов редиса и 10 сортов томата, если нельзя брать пакетики одного сорта?

4.22. Сколько существует способов выбрать по 3 пакетика огурцов, редиса и томата, если в магазине имеется 5 сортов огурцов, 7 сортов редиса и 10 сортов томата, если нельзя брать пакетики одного сорта?

4.23. В магазине имеется 5 сортов огурцов, 7 сортов редиса и 10 сортов томата. Сколько существует способов выбрать 5 пакетиков огурцов, редиса и томата так, чтобы в наборе обязательно встречались овощи всех трёх видов, если нельзя брать пакетики одного сорта?

4.24. Сколькими способами 20 русалок могут разделиться поровну между 4 озёрами, если русалкам важно, в какое озеро они попадут?

4.25. Сколькими способами можно разделить 20 русалок между 4 озёрами так, чтобы в каждое озеро попала хотя бы одна русалка? Неважно, в какое именно озеро попадёт каждая русалка, учитывается только их количество.

4.26. Сколькими способами можно разделить 20 русалок между 4 озёрами, если возможно, что в какое-то озеро не попадёт ни одна русалка? Неважно, в какое именно озеро попадёт каждая русалка, учитывается только их количество.

4.27. Сто жителей Лукоморья голосуют за 3 кандидатов на звание Дуба. Сколько существует различных вариантов результата голосования, если учитывается лишь количество проголосовавших за каждого кандидата?

4.28. Сколькими способами можно расставить 33 богатырей в ряд?

4.29. Сколькими способами можно расставить 33 богатырей в 3 ряда по 11 человек?

4.30. Сколькими способами можно выбрать из 33 богатырей отряд из 11 человек?

4.31. Сколькими способами можно разбить 33 богатырей на 3 отряда — передовой, охранный и засадный, если в каждом отряде по 11 человек?

4.32. В селе 3 корчмы. Сколькими способами 33 богатыря могут разойтись по корчмам на обед? Важно только количество богатырей в каждой корчме.

4.33. В алфавите племени Шашашу 6 букв.

а) Сколько можно составить 6-буквенных слов, в которых все буквы различны?

б) Сколько можно составить 6-буквенных слов, в которых одна буква встречается дважды, а все остальные различны?

в) Сколько можно составить 6-буквенных слов, в которых каждая буква встречается не более 2 раз?

Глава V. Задачи на построение примера

Многие олимпиадные задачи начинаются со слов: «Можно ли...» При этом существует две возможности:

— ответ в задаче — нельзя, и тогда нужно доказать, что нельзя;

— ответ — можно, и тогда нужно построить пример и показать, что он удовлетворяет условию задачи.

Точно так же часто ответом на вопрос: «Всегда ли...» или «Всякий ли...» является конкретный пример, когда это условие не выполняется. Такой пример в математике называют контрпримером. Если же ответ — всегда или всякий — тогда это нужно доказать.

Такого рода задачи часто называют конструктивными или задачами на построение примера. К ним можно отнести задачи на разрезание, на взвешивания, на переливания, на построение или анализ алгоритма (в том числе циклического).

Геометрические конструкции

При построении геометрического примера нужно не забывать, что многоугольники бывают не только выпуклые, фигуру можно делить на части не только по линиям сетки (если иного не оговорено в условии), если нужно поделить фигуру на части, то после разрезания не должно оставаться «лишних частей». Если фигуру нужно разделить на равные части, то эти части можно поворачивать.

Задача 1.
Может ли прямая пересечь все стороны 10-угольника ровно по одному разу (не проходя через вершины)?

Решение. Может. См. рис. 19.

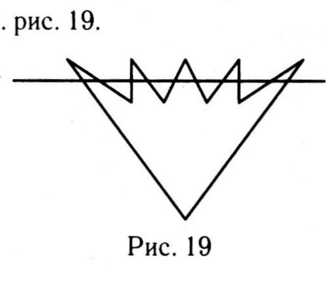


Рис. 19

Задача 2.

Зачеркните все 16 точек, изображённых на рисунке 20, шестью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя отрезков по линиям сетки.

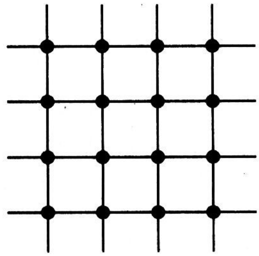


Рис. 20

Решение. См. рис. 21.

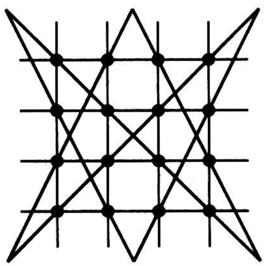


Рис. 21

Задача 3.

Разделите квадрат 3 × 3 на 8 равных частей.

Решение. Пример деления на рис. 22.

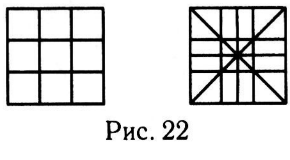
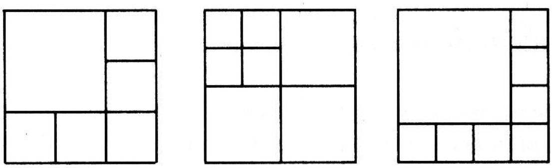


Рис. 22

Задача 4.

Разрежьте квадрат на: а) 6 квадратов; б) 7 квадратов; в) 8 квадратов. На любое ли количество квадратов, большее 8, можно разрезать квадрат?

Решение. Примеры решения на рис. 23 (а, б, в).



а б в

Рис. 23

Если мы разрежем квадрат на 4 равных квадрата, то число квадратов увеличится на 3. Значит, на любое число $N \geqslant 6$ квадратов, делящееся на 3 ($N = 3k$), можно разрезать квадрат, если сначала его разрезать на 6 квадратов, а потом последовательно разрезать какие-нибудь квадраты на 4 равных квадрата, прибавляя тем самым необходимое число квадратов. Понадобится разрезать $(3k - 6) : 3 = k - 2$ квадрата.

Аналогично на любое число $N \geqslant 7$ квадратов, делящееся на 3 с остатком 1 ($N = 3k + 1$) или с остатком 2 ($N = 3k + 2$), можно разрезать квадрат, если сначала его разрезать на 7 или 8 квадратов, а потом последовательно $k - 2$ раза разрезать какой-нибудь квадрат на 4 равных квадрата.

Ответ: да.

Задача 5.

Разложите 8 монет в центры клеток доски 4×4, чтобы ни на какой прямой не лежали 3 монеты (монеты считать точечными). Докажите, что 9 монет таким образом разложить нельзя.

Решение. На каждой горизонтали может лежать не более двух монет, следовательно, монеты можно разложить в количестве не более удвоенного количества строк. Значит, 9 монет разложить таким образом нельзя. Пример для 8 монет представлен на рис. 24.

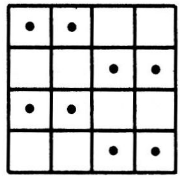


Рис. 24

Задачи на переливания

Также типичный пример конструктивных задач — задачи на переливания. Они традиционно вызывают трудности с записью решения. Поэтому нужно обратить особое внимание на рациональную запись решения (в виде схемы или таблицы).

Задача 6.

Можно ли, имея лишь два сосуда 4 и 3 л, набрать из водопроводного крана ровно 1 л воды?

Решение. Наливаем доверху из водопровода воду в 4-литровый сосуд, отливаем из него 3 л воды в 3-литровый сосуд. В 4-литровом сосуде останется 1 литр воды.

Ответ: да.

Задача 7.

Можно ли, имея лишь два сосуда 3 и 5 л, набрать из водопроводного крана ровно 4 л воды?

Решение. В отличие от предыдущей задачи, подробная запись решения будет слишком длинной, поэтому попробуем записать решение в виде таблицы.

Пусть «н» обозначает «налить из водопровода доверху», «п» — «перелить из сосуда 3 л в сосуд 5 л», «в» — «вылить всё из сосуда».

Сосуд 3 л	0	н	3	п	0	н	3	п	1		1	п	0	н	3	п	0
Сосуд 5 л	0		0		3		3		5	в	0		1		1		4

В результате в сосуде вместимостью 5 л оказалось 4 л воды.

Ответ: да.

Можно и не писать действия, достаточно следить за объёмом воды в каждом сосуде. Можно, конечно, описывать процесс переливания не в таблице, а словами.

Задачи на взвешивания

Ещё один раздел конструктивных задач — это задачи на взвешивания. В таких задачах обычно под словами «чашечные весы без гирь» подразумеваются весы без стрелок, на которых можно только сравнивать грузы на двух чашках. При решении задач на взвешивания полное решение задачи должно содержать рассмотрение всех возможных вариантов.

Задача 8.

Среди девяти монет одна — фальшивая. Она отличается от настоящих монет весом, известно, что она легче настоящих. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь обнаружить фальшивую монету?

Решение. Первое взвешивание. На одну чашку весов кладём три монеты, на другую — другие три монеты. Возможны два варианта.

А) Весы в равновесии, тогда фальшивая монета среди оставшихся трёх монет.

Б) Одна из чашек выше, тогда фальшивая монета среди монет, лежащих на этой чашке.

Второе взвешивание. Берём три монеты, среди которых фальшивая. На чашки весов кладём по одной монете, третья монета остаётся. Возможны два варианта.

А) Весы в равновесии, тогда фальшивая монета — оставшаяся.

Б) Одна из чашек выше, тогда фальшивая монета лежит на этой чашке.

Задача 9.

Имеются 5 мешочков, в каждом по 50 монеток. В одном из них все монетки весят по 9 г, во втором — по 10 г, в третьем — по 11 г. Гном хочет определить, где какой мешочек, при помощи весов, которые умеют определять вес положенного на них груза, но ломаются от веса 50 г и больше. Как ему это сделать за одно взвешивание, не ломая весы?

Решение. Обозначим мешочки I, II и III. Возьмём из мешочка I три монеты, из мешочка II — одну монету. Если весы покажут $9 \cdot 3 + 10 = 37$ г, то в мешочке I монетки весят по 9 г, в мешочке II — по 10 г и в мешочке III — по 11 г. Все возможные случаи рассмотрим в таблице.

Весы показывают (г)	Вес монеты в I мешочке	Вес монеты во II мешочке	Вес монеты в III мешочке
37	9	10	11
38	9	11	10
39	10	9	11
41	10	11	9
42	11	9	10
43	11	10	9

Задача 10.

Среди четырёх монет одна — фальшивая. Она отличается от настоящих монет весом, однако неизвестно, легче она или тяжелее настоящих. Масса настоящей монеты 5 г. Имеется одна гиря массой 5 г. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах обнаружить фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее настоящих?

Решение. Первое взвешивание. На одну чашку весов кладём монеты 1 и 2, на другую — монету 3 и гирю. Возможны три варианта.

А) Весы в равновесии, тогда фальшивая монета 4, и вторым взвешиванием можно определить, легче она или тяжелее настоящей, например, сравнив её с гирей.

Б) Чашка с гирей тяжелее, тогда фальшивая монета на весах, причём если это монета 3, то она тяжелее настоящей, а если это монета 1 или монета 2, то она легче настоящей. При втором взвешивании мы на одну чашку весов кладём монету 1 и монету 3, а на вторую — монету 4 и гирю.

Если они равны, то монеты 1 и 3 настоящие и, значит, фальшивая монета 2 и она легче настоящих.

Если монеты 1 и 3 легче, то фальшивая монета 1 и она легче настоящих.

Если монеты 1 и 3 тяжелее, то фальшивая монета 3 и она тяжелее настоящих.

В) Чашка с гирей легче, тогда фальшивая монета на весах, причём если это монета 3, то она легче настоящей, а если это монета 1 или монета 2, то она тяжелее настоящей. При втором взвешивании мы на одну чашку весов кладём монеты 1 и 3, а на вторую — монету 4 и гирю.

Если они равны, то монеты 1 и 3 настоящие и, значит, фальшивая монета 2 и она тяжелее настоящих.

Если монеты 1 и 3 легче, то фальшивая монета 3 и она легче настоящих.

Если монеты 1 и 3 тяжелее, то фальшивая монета 1 и она тяжелее настоящих.

Построение алгоритма, задачи с числами

Задача 11.

В клетки таблицы по некоторому правилу записали несколько чисел. Определите, что это за правило, и заполните три последние клетки таблицы.

а)

1	4	9	16	25			

б)

5	3	8	11	19			

в)

1	4	2	6	3	8	4			

Решение. а) $1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, ..., 6^2 = 36, 7^2 = 49, 8^2 = 64$.
б) $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$.
в) числа на нечётных местах увеличиваются на 1, а числа на чётных местах увеличиваются на 2.

Ответ: а) 36, 49, 64; б) 30, 49, 79; в) 10, 5, 12.

Задача 12.

Старейший магический квадрат был составлен в Китае. Первое изображение на черепаховом панцире датируется 2200 г. до н. э. В девяти клетках этого квадрата вписаны числа от 1 до 9.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Другой магический квадрат был составлен в Индии в I в. н. э. Сравните суммы чисел в строчках, столбцах и диагоналях квадратов и скажите, в чём заключается магическое свойство этих квадратов.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Решение. Суммы чисел в строках, столбцах и диагоналях равны. Во втором квадрате расставлены числа от 1 до 16.

Задача 13.

Можно ли в таблице 3×3, следуя шахматным правилам, конём:

а) попасть из угловой клетки в диагонально противоположную;

б) обойти все клетки доски?

Решение. а) Да, например (цифры показывают порядок движения по полям):

1		3
4		
	2	5

Попробуйте придумать свой вариант решения.

б) Нет, конь никогда не попадёт в центральную клетку, достаточно нарисовать его маршрут, начиная с любой клетки, кроме центральной. С неё он вообще не может сделать ход, значит, не сможет попасть на центральную ни с какой другой клетки.

Ответ: а) да; б) нет.

Задача 14.

Существует ли шесть различных ненулевых действительных чисел, чья сумма равна их произведению?

Решение. В этой задаче решение сводится к построению примера. Возьмём пять любых чисел, например: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$. Пусть шестое число x. По условию, сумма $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+x$ равна произведению $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot x$. После решения уравнения получим x: $1+2+3+4+5+x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot x$, $15+x = 120x$, $x = \dfrac{15}{119}$.

Ответ: Да, существуют, например: 1; 2; 3; 4; 5; $\dfrac{15}{119}$.

Задача 15.

В лифте 100-этажного дома работают лишь кнопки подъёма на 7 этажей и спуска на 9 этажей. Докажите, что с помощью этих кнопок можно добраться: а) с первого этажа на второй; б) со второго этажа на первый; в) с любого этажа на любой другой.

Решение. а) $1 - 8 - 15 - 6 - 13 - 4 - 11 - 2$.

б) $2 - 9 - 16 - 7 - 14 - 5 - 12 - 3 - 10 - 1$.

в) Заметим, что если мы можем подняться на один этаж и спуститься на один этаж, то, проделав необходимые для этого шаги K раз, мы поднимемся или спустимся на K этажей. Чтобы подняться на один этаж или спуститься на один этаж ($K \to K+1$; $K \to K-1$), нужно проделать указанную последовательность действий, прибавляя к номеру этажа K. Такого рода перемещения возможны, если в доме хотя бы $K + 14$ этажей.

Чтобы попасть на один из верхних этажей (N), надо сначала попасть на этаж $N-14$. А чтобы уехать с верхних этажей, надо сначала спуститься на 18 этажей.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Отметьте на листе бумаги 11 точек и проведите 6 прямых так, чтобы на каждой прямой оказалось ровно по четыре отмеченных точки.

5.2. Можно ли расположить на плоскости 8 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

5.3. Внутри круга отметили точку. Разрежьте круг на две части так, чтобы из них можно было составить новый круг, у которого отмеченная точка будет в центре.

5.4. По углам квадратного пруда стоят четыре столба. Как расширить его, не убирая столбов, чтобы площадь увеличилась в два раза, а форма осталась квадратной? Столбы должны остаться на суше.

5.5. Разрежьте треугольник (см. рис. 25) на четыре треугольные части так, чтобы любые две из них прилегали друг к другу, то есть имели общий отрезок границы.

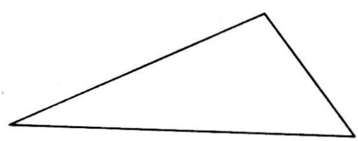


Рис. 25

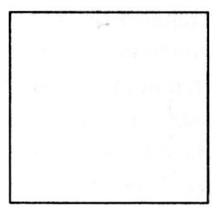


Рис. 26

5.6. Разрежьте прямоугольник (см. рис. 26) на пять прямоугольных частей так, чтобы эти части были попарно различны и никакие 2 стороны различных прямоугольных частей не совпадали.

5.7. Изображённую на рисунке 27 фигуру разрежьте на четыре одинаковые части двумя способами.

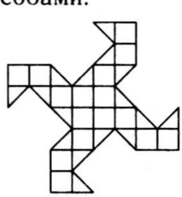


Рис. 27

5.8. Изображённую на рисунке 28 фигуру разрежьте на пять одинаковых частей.

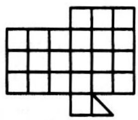


Рис. 28

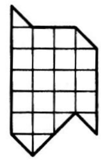


Рис. 29

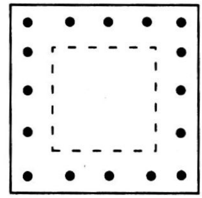


Рис. 30

5.9. Изображённую на рисунке 29 фигуру разрежьте на пять одинаковых частей.

5.10. Разрежьте квадрат на 9 прямоугольников так, чтобы никакие стороны прямоугольников не совпадали.

5.11. Нарисуйте шестиугольник, который можно разрезать одним прямолинейным разрезом на 4 треугольника.

5.12. Нарисуйте пятиугольник, который можно разрезать одним прямолинейным разрезом на 3 треугольника.

5.13. Нарисуйте шестиугольник, который можно разрезать одним прямолинейным разрезом на 3 треугольника.

5.14. Вдоль стен квадратного бастиона требовалось расставить 16 часовых. Сержант расставил их по 5 человек на стену, как на рисунке 30. Затем пришёл прапорщик и велел расставить их по 6 человек на стену. А после этого пришёл лейтенант и приказал расставить их по 7 человек на стену. Сержанту удалось выполнить все эти приказы. Как он это сделал?

5.15. Нарисуйте две пересекающиеся прямые и 5-угольник так, чтобы каждая вершина 5-угольника лежала ровно на одной из этих прямых.

5.16. Нарисуйте две пересекающиеся прямые и 11-угольник так, чтобы каждая вершина 11-угольника лежала ровно на одной из этих прямых.

5.17. Можно ли нарисовать на листе бумаги четыре равных квадрата и две перпендикулярные прямые так, чтобы квадраты не перекрывались (и не касались) и каждая прямая пересекала каждый квадрат по отрезку (не по одной точке)?

5.18. Как от куска шнура длиной 4 метра отрезать кусок длиной 3 метра без линейки?

5.19. В клетки таблицы по некоторому правилу записали несколько чисел. Определите, что это за правило, и заполните три последние клетки таблицы.

а)

102	101	99	95	87	71	.	.	.

б)

1	3	7	15	31	63	.	.	.

в)

2	1	2	2	4	8	.	.	.

г)

31	33	36	30	41	27	46	.	.	.

5.20. Разрешается расставить цифры 2, 3, 5 и 7 в любом порядке и расставить между какими угодно из них знаки арифметических действий $+$, $-$, $\cdot$, $:$ и скобки (например, так: $(3 + 75) : 2$). Получите выражение, значение которого равняется: а) 6; б) 108.

5.21. В клетках таблицы расставьте целые числа так, чтобы их сумма в каждой строке была равна 40, а в каждом столбце 15.

5.22. Цифрами 1, 3, 5, 0 запишите наибольшее и наименьшее шестизначное число. Каждую цифру нужно использовать не менее одного раза.

5.23. Напишите наибольшее и наименьшее семизначное число, все цифры которого различны.

5.24. Семья из четырёх человек подошла ночью к мосту (с одной стороны) и хочет перейти через него. У них есть только один фонарик, без которого невозможно и шагу ступить. Мост выдерживает только двух человек. Папа может перейти мост — за 1 минуту, мама — за 2 минуты, малыш — за 5 минут, бабушка — за 10 минут. Как им всем перейти мост за 17 минут?

5.25. В гостиницу на неделю приехал путешественник. У него вместо денег нашлась лишь серебряная цепочка из 7 звеньев (см. рис. 31).

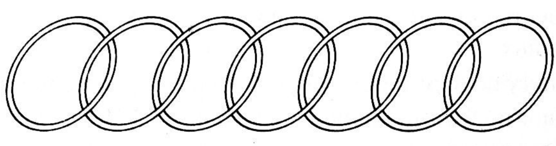


Рис. 31

Хозяин требует платить по одному звену в день без задержек, готов давать сдачу ранее полученными кусками цепочки, но вперёд плату не берёт. Путешественник распилил на цепочке всего одно звено так, что ему удалось расплачиваться все 7 дней. Как он это сделал?

5.26. Есть лифт 100-этажного дома, в котором хулиган Вася сломал все кнопки, кроме двух — подъём на 6 этажей и спуск на 3 этажа. Сможет ли Вася добраться на лифте с первого этажа: а) на семьдесят девятый; б) на восьмидесятый?

5.27. Докажите, что в 16-этажном доме в лифте, где работают всего две кнопки — подъём на 7 этажей и спуск на 9 этажей — можно добраться на лифте с любого этажа на любой другой.

5.28. На доске в строчку написаны двенадцать пятёрок. Расставьте между некоторыми из них знак «+» так, чтобы получившаяся сумма стала равна 600.

5.29. Можно ли записать по кругу шесть чисел (не обязательно положительных) так, чтобы среди них не было одинаковых и чтобы каждое число равнялось сумме двух своих соседей?

5.30. Найдите одно из решений ребуса:

ТРИ + ТРИ = ДЫРА, ТРИ − ТРИ = А.

(Напоминаем, что одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры в двух равенствах одновременно, а разными — разные.)

5.31. Найдите одно из решений ребуса:

ТРИ + ТРИ + ТРИ + ТРИ = ДЫРА, ТРИ × И = ДЫРА.

(Напоминаем, что одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры в двух равенствах одновременно, а разными — разные.)

5.32. В записи $0*1*2*4*8*16*32*64 = 45$ вместо звёздочек поставьте знаки «+» или «−» так, чтобы равенство стало верным.

5.33. Можно ли разложить несколько слив по 6 тарелкам так, чтобы на каждой тарелке была хотя бы одна слива, на любых двух тарелках было вместе либо 5, либо 6, либо 7 слив и все три варианта встречались?

5.34. Есть шесть книжных полок длиной 1 м каждая. Можно ли расставить на них:

а) 51 книгу по 6 см толщиной и 99 книг по 3 см толщиной;

б) 50 книг по 6 см толщиной и 100 книг по 3 см толщиной;

в) 49 книг по 6 см толщиной и 100 книг по 3 см толщиной?

5.35. Докажите, что любую целочисленную сумму свыше 8 туксов (тукс — денежная единица страны Закидонии) можно набрать, используя лишь трёхтуксовые и пятитуксовые монеты.

5.36. Можно ли записать в ряд: а) 14, б) 15 чисел так, чтобы сумма любых пяти подряд идущих чисел была равна 10, а сумма всех чисел была равна 60? Числа не обязательно должны быть положительные.

5.37. Напишите все четырёхзначные числа, в записи которых могут быть только цифры 3 и 5 и которые делятся на 5. Сколько таких чисел существует?

5.38. Перед вами последовательность чисел, начинающаяся с 1. Каждое следующее число образовано из предыдущего по очень простому правилу.

1,
11,
21,
1211,
111221,
312211,
13112221,
1113213211, ...

Попробуйте понять, что это за правило, и напишите следующее число последовательности. Эту замечательную последовательность придумал известный математик Джон Конвей.

5.39. В квадрате 3×3 расставьте числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 так, чтобы сумма чисел в каждой строке, столбце и диагонали была одинакова.

5.40. Придумайте, как в квадрате из 9 клеток расставить по три тройки, двойки и единицы, чтобы в каждом горизонтальном и вертикальном ряду они встречались по одному разу.

5.41. Числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 запишите в клетки квадрата 3×3 так, чтобы их произведения по всем вертикалям, горизонталям и диагоналям были равны.

5.42. Существует ли восемь различных целых чисел, чья сумма равна их произведению?

5.43. Можно ли натуральные числа от 1 до 13 разбить на несколько групп (в группе может быть и одно число) так, чтобы суммы чисел внутри каждой группы были равны?

5.44. Можно ли натуральные числа от 1 до 32 разбить на несколько групп так, чтобы произведения внутри каждой группы были равны?

5.45. У хозяйки есть рычажные весы и гиря в 100 г. Как за 4 взвешивания она может отвесить 1 кг 500 г сахара?

5.46. Как определить из трёх монет одну фальшивую за одно взвешивание на чашечных весах без гирь, если она легче настоящей?

5.47. Как определить из 8 монет одну фальшивую, если она тяжелее настоящей, за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

5.48. Среди 20 монет имеется одна фальшивая. Найдите её за три взвешивания на чашечных весах без гирь, если известно, что она легче настоящей.

5.49. Имеется 552 гири весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 552 г. Разложите их на три равные по весу кучки.

5.50. Есть 1 золотая, 3 серебряных и 5 бронзовых медалей. Известно, что одна из них фальшивая, легче настоящей. Настоящие медали из одного металла весят одинаково (а из разных — не одинаково). Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую медаль?

5.51. Как разделить поровну 8 литров молока, если молоко находится в 8-литровом ведре и имеется два пустых бидона 3 л и 5 л?

5.52. Как, имея 2 сосуда ёмкостью 5 л и 9 л, набрать из водоёма ровно 3 л воды?

5.53. У Кролика есть двенадцатилитровая банка мёда. Он решил половину отдать Винни-Пуху. Как это сделать, если у них есть ещё только пустые пятилитровая и семилитровая банки?

5.54. Как, имея лишь два сосуда 4 л и 9 л, налить из водопроводного крана 6 л воды?

5.55. Имеются два бикфордова шнура. Шнуры при поджигании горят неравномерно, но каждый полностью сгорает за одну минуту. Как с помощью этих шнуров отмерить:

а) 30 секунд;

б) 45 секунд?

Глава VI. Неравенства в задачах

Алгебраические неравенства

Задача 1.

Среди котов Лукоморья каждый седьмой — учёный, а среди учёных Лукоморья каждый восьмой — кот. Кого в Лукоморье больше: учёных или котов?

Решение. Пусть количество котов, которые одновременно являются учёными, равно N, тогда всего котов $7N$, а учёных всего $8N$. Для положительных N выполняется неравенство $7N < 8N$, поэтому учёных в Лукоморье больше, чем котов.

Ответ: учёных.

Задача 2.

Существует ли два различных натуральных числа, чья сумма равна их произведению?

Решение. Предположим, указанные числа существуют. Через m обозначим большее из них, через n — меньшее (то есть, $m > n$). Рассмотрим два возможных случая: $n = 1$ и $n \geqslant 2$.

При $n = 1$ получаем $mn < m + n$, так как $mn = m$, а $m + n = m + 1$. Следовательно, в этом случае равенство $m + n = mn$ невозможно.

При $n \geqslant 2$ получаем $mn \geqslant 2m = m + m > m + n$. Следовательно, и в этом случае равенство $m + n = mn$ невозможно.

Ответ: нет, не существуют.

Задача 3.

По кругу расставлены 120 положительных чисел (не обязательно целых). Сумма любых 35 чисел, стоящих подряд, равна 56. Докажите, что каждое из расставленных чисел меньше 8.

Решение. Среди данных чисел выберем любое, обозначим его через a_1 и докажем что $a_1 < 8$. Остальные числа обозначим через $a_2, a_3, ..., a_{120}$ (в порядке обхода по часовой стрелке от числа a_1).

Из условия следует, что любые числа x и y, между которыми расположены 34 других (обозначим их сумму через s), равны, поскольку $x + s = s + y = 56$.

Будем обходить круг по часовой стрелке шагами по 35 чисел. Поскольку $35 \cdot 7 = 120 \cdot 2 + 5$, то на седьмом шаге мы окажемся на 5 чисел дальше исходного, то есть на числе a_6. Значит, равны любые числа, чьи номера отличаются на 5. $a_1 = a_6 = a_{11} = a_{16} = a_{21} = a_{26} = a_{31}$. Таким образом, если $a_1 \geqslant 8$, то $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16} + a_{21} + a_{26} + a_{31} = 7a_1 \geqslant 56$ и $a_1 + a_2 + ... + a_{35} > 56$. Следовательно, $a_1 < 8$.

Задача 4.

Требуется перевезти некоторое количество зерна. Логисты подсчитали, что если зерно поместить в вагоны грузоподъёмностью 80 т, то один вагон останется неполным. Если же загрузить это зерно в вагоны по 30 т, то потребуется на 12 вагонов больше, но они будут загружены полностью. Сколько весит зерно?

Решение. Пусть для перевозки зерна нужно x вагонов по 30 т, тогда вес зерна $M = 30x$. С другой стороны, $x - 13$ вагонов по 80 т не хватит, а $x - 12$ вагонов не заполнятся полностью. Получается двойное неравенство $80(x-13) < M < 80(x-12)$. Решаем его: $80(x-13) < 30x$; $x < 20{,}8$; $30x < 80(x - 12)$; $x > 19{,}2$. Так как число вагонов x является целым, то $x = 20$, а вес зерна 600 т.

Ответ: 600 т.

Задача 5.

Что больше: 45^{30} или 7^{60}?

Решение. $7^{60} = (7^2)^{30} = 49^{30} > 45^{30}$.

Ответ: 7^{60}.

Задача 6.

Что больше: 5^{900} или 2^{2100}?

Решение. $5^{900} = (5^3)^{300} = 125^{300}$; $2^{2100} = (2^7)^{300} = 128^{300}$. Поэтому $5^{900} < 2^{2100}$.

Ответ: 2^{2100}.

Задача 7.

Что больше: 99! или 50^{99}?

Решение. $99! = 50 \cdot (49 \cdot 51) \dots (1 \cdot 99)$.
$(50 - n) \cdot (50 + n) = 50^2 - n^2 < 50^2$, следовательно, $99! < 50^{99}$.

Ответ: 50^{99}.

Задача 8.

Что больше: $\frac{2010}{2011}$ или $\frac{2011}{2012}$?

Решение. $\dfrac{2010}{2011} = 1 - \dfrac{1}{2011}$; $\dfrac{2011}{2012} = 1 - \dfrac{1}{2012}$. $\dfrac{1}{2011} > \dfrac{1}{2012}$, поэтому $\dfrac{2010}{2011} < \dfrac{2011}{2012}$.

Ответ: $\dfrac{2011}{2012}$.

Задача 9.

Что больше: $20\,112\,011 \cdot 20\,112\,013$ или $20\,112\,012^2$?

Решение. Для чисел n и k (где $k \neq 0$) выполняется неравенство $n^2 > (n-k)(n+k)$, так как $n^2 > n^2 - k^2$. Тогда $20\,112\,011 \cdot 20\,112\,013 = (20\,112\,012 - 1)(20\,112\,012 + 1) < 20\,112\,012^2$.

Ответ: $20\,112\,012^2$.

Задача 10.

Докажите неравенство $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$ для любых положительных a и b.

Решение. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2 = \dfrac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \dfrac{(a-b)^2}{ab} \geqslant 0$ для любых положительных a и b. Тогда $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$.

> Если $a > 0,\ b > 0$, то $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$, причём равенство выполняется только при $a = b$.

Мы получили очень полезное неравенство — сумма двух положительных взаимно обратных чисел не меньше двойки. Нередко его удобно использовать при решении задач.

Задача 11.

У продавца конфет есть рычажные весы, которые имеют плечи не совсем одинаковой длины, и гиря весом 1 кг. Покупатель хотел купить 2 кг конфет. Так как весы показывают не совсем точно, продавец первый килограмм взвесил на одной чаше весов, а второй — на другой. Кто выиграл, покупатель или продавец?

Решение. Пусть длины рычагов весов p_1 и p_2, вес груза при уравновешенных весах m_1 и m_2. Тогда $p_1 m_1 = p_2 m_2$. Если гирю 1 кг положить на первую чашу весов, получим $p_1 \cdot 1 = p_2 m_2$, $m_2 = \dfrac{p_1}{p_2}$. Если гирю 1 кг положить на вторую чашу весов, получим $p_1 m_1 = p_2 \cdot 1$, $m_1 = \frac{p_2}{p_1}$. Общий вес, полученный покупателем, равен $m_2 + m_1 = \frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \geqslant 2$. Выиграл покупатель.

Ответ: покупатель.

Задача 12.

Докажите, что для всех положительных a и b выполняется неравенство $\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab$. При каких a и b неравенство превращается в равенство?

Решение. $a^2+b^2 \geqslant 2ab$; $a^2+b^2-2ab \geqslant 0$; $(a-b)^2 \geqslant 0$, причём неравенство превращается в равенство при $a = b$.

Ответ: при $a = b$.

$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab.$	Если $a > 0,\ b > 0$, то $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$

Задача 13.

Докажите, что для всех положительных a и b выполняется неравенство $2a + b \geqslant 2\sqrt{2ab}$. При каких a и b неравенство превращается в равенство?

Решение. $2a + b \geqslant 2\sqrt{2ab}$. Обозначим $\sqrt{2a} = x, \sqrt{b} = y$. Получилось неравенство $x^2+y^2 \geqslant 2xy$, доказанное в предыдущей задаче. Неравенство превращается в равенство при $x = y$, то есть при $b = 2a$.

Ответ: при $b = 2a$.

Задача 14.

Прямоугольный участок около водохранилища с трёх сторон огорожен забором (четвёртая сторона — берег, поэтому там забор не нужен). Длина забора 200 метров. Какую наибольшую площадь может иметь этот участок?

Решение. Обозначим размер участка вдоль берега водохранилища a, а размер поперёк берега — b. Тогда длина забора $L = a + 2b = 200$ м, а площадь участка $S = ab$. Выразим a из первого уравнения и подставим во второе: $S = (L-2b) \cdot b = bL - 2b^2 = -2\left(b^2 - \frac{bL}{2} + \frac{L^2}{16}\right) + \frac{L^2}{8} = \frac{L^2}{8} - 2\left(b - \frac{L}{4}\right)^2 \leqslant \frac{L^2}{8} = 5000$ м^2. Неравенство превращается в равенство при $b = \frac{L}{4}$, поэтому $S = 5000$ м^2 является наибольшей возможной площадью.

Ответ: 5000 м^2

Задача 15.

Докажите, что при постоянной сумме двух чисел их произведение тем больше, чем ближе числа друг другу.

Например, $5 + 5 = 4 + 6 = 3 + 7$ и $5 \cdot 5 > 4 \cdot 6 > 3 \cdot 7$.

Решение. Пусть сумма чисел равна $2S$, а разность — $2d$, тогда произведение чисел $P = (S - d)(S + d) = S^2 - d^2$, из этого выражения видно, что чем больше разность чисел d, тем меньше их произведение при фиксированной сумме.

Задача 16.

Два различных положительных числа отличаются менее чем на 0,01. Могут ли их квадратные корни отличаться менее чем на 0,01?

Решение. Могут. Пусть $\sqrt{a} = 1$, $\sqrt{b} = 1{,}001$. Тогда $a = 1, b = 1{,}002\,001$. Разность и чисел a и b, и их корней менее чем 0,01.

Ответ: да.

Задача 17.

Два положительных числа отличаются менее чем на 0,01. Могут ли их квадраты отличаться более чем на 10?

Решение. Могут. Возьмём, например, такие числа a и b, что $a - b = 0{,}002$, $a + b = 20\,000$, то есть $a = 10\,000{,}001$, $b = 9\,999{,}999$. Тогда $a - b < 0{,}01$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 0{,}002 \cdot 20\,000 = 40 > 10$.

Ответ: да.

Геометрические неравенства

Теперь рассмотрим некоторые геометрические неравенства.

Неравенство треугольника в геометрии и смежных дисциплинах — это одно из свойств расстояния. Если даны три точки A, B и C, то для расстояний между ними выполняется неравенство $AC \leqslant AB + BC$, причём равенство достигается только тогда, когда точка B лежит на отрезке AC. В частности, если ABC — треугольник, то $AC < AB + BC$ (см. рис. 5).

Длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других.

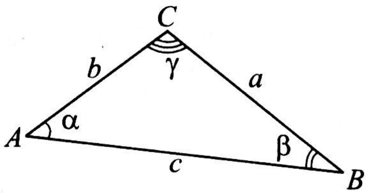


Рис. 5

Евклид в Началах доказывает неравенство треугольника следующим образом. Сначала доказывается теорема о том, что внешний угол треугольника больше внутреннего угла, с ним не смежного. Далее выводится теорема, что против большей стороны треугольника лежит больший внутренний угол. Затем методом от противного доказывается теорема о том, что против большего внутреннего угла треугольника лежит бóльшая сторона. Из этой теоремы выводится неравенство треугольника.

Если длины трёх отрезков удовлетворяют трём (всевозможным) неравенствам треугольника, то из этих отрезков можно составить треугольник.

Обратное неравенство треугольника

Следствием неравенства треугольника является неравенство
$AC - AB \leqslant BC$.

Задача 18.

a, b, c — стороны треугольника. $a = 3{,}17$; $b = 0{,}75$; c — целое число. Найдите c.

Решение. Из неравенства треугольника $c < a + b$; $c < 3{,}17 + 0{,}75$; $c < 3{,}92$; но из обратного неравенства треугольника $c > a - b$, т.е. $c > 3{,}17 - 0{,}75$; $c > 2{,}42$. Так как c — целое число, то оно равно 3.

Ответ: 3.

Задача 19.

Докажите, что в четырёхугольнике диагональ меньше половины периметра.

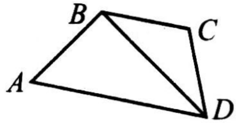


Рис. 6

Решение. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$ (см. рис. 6). Из неравенства треугольника $BD < BC + CD$, $BD < BA + AD$, тогда $2BD < BC + CD + DA + AB$; $BD < \frac{P_{ABCD}}{2}$.

Задача 20.

Докажите, что в четырёхугольнике любая сторона меньше суммы остальных.

Решение. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Из неравенства треугольника $AB < AD + DB$; $BD < BC + CD$, отсюда
$AB < AD + BC + CD$.

Примечание. Вообще, для любых четырёх точек A, B, C и D выполняется неравенство $AD \leqslant AB + BC + CD$. Аналогичное утверждение справедливо и для большего числа точек.

Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего её концы.

Задача 21.

M и P — точки внутри выпуклого четырёхугольника. Докажите, что расстояние между ними меньше половины периметра четырёхугольника.

Решение. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$ (см. рис. 7). Продлим отрезок MP до пересечения со сторонами четырёхугольника — K и T.

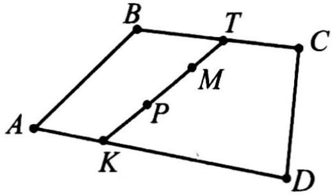


Рис. 7

$KT > PM$. Пусть точки K и T лежат на противоположных сторонах исходного четырёхугольника. Так как в четырёхугольнике любая сторона меньше суммы остальных (предыдущая задача), то $KT < KD+DC+CT$,

$KT < KA+AB+BT$, получаем $2KT < P_{ABCD}$ и $PM < KT < \frac{P_{ABCD}}{2}$.

Аналогично доказывается для случая, когда прямая PM пересекает соседние стороны четырёхугольника или проходит через его вершину.

Задача 22.

Есть 7 прутьев, каждый из которых длиннее 9 см, но короче 1 м. Докажите, что из трёх из них можно составить треугольник.

Решение. Предположим, что треугольник составить нельзя. Берём 2 самых коротких прута, их длина больше 9 см. Следующий по длине прут должен быть больше $9 + 9 = 18$ см, иначе можно составить треугольник. Четвёртый больше $18+9 = 27$, пятый больше $27+18 = 45$, шестой больше $45 + 27 = 72$, и последний будет больше $72 + 45 = 117$ сантиметров, что больше метра. Получили противоречие.

Задача 23.

Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы двух сторон, к которым она не проведена.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC (см. рис. 8). Продлим медиану CM так, что $CM = MK$. Четырёхугольник $ACBK$ — параллелограмм, т.к. его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Тогда по свойству сторон параллелограмма $KA = BC$ и $KA + AC = BC + AC$. В треугольнике KAC длина стороны $CK < KA + AC$, значит, $CM = 0{,}5KC < 0{,}5(BC + AC)$.

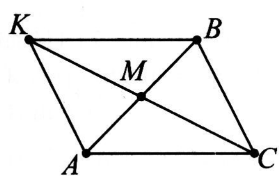


Рис. 8

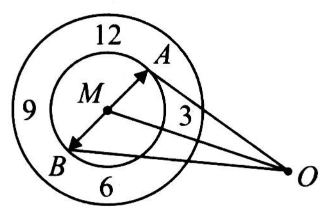


Рис. 9

Задача 24.

На столе лежат несколько разных, но правильно идущих механических часов. Докажите, что найдётся момент времени, когда сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок будет больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

Решение. Рассмотрим два момента времени, когда минутные стрелки часов с центром M направлены в противоположные стороны (см. рис. 9).

Тогда если составить треугольник с вершинами O (центр стола), A и B (конец минутной стрелки), то OM — медиана и $2 \cdot OM \leqslant OA + OB$ (причём равенство выполняется, только если минутная стрелка лежит на луче OM, поэтому если выбрать момент времени, отличный от этого, неравенство превращается в строгое). Складывая такие неравенства для каждых часов, получаем $2 \times$ (сумма расстояний до центров) $<$ (сумма расстояний до концов минутных стрелок в положении A) $+$ (сумма расстояний до концов минутных стрелок для положения B). Значит, хотя бы в одном из этих двух положений сумма расстояний до концов минутных стрелок больше, чем сумма расстояний до центров.

Задача 25.

На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрали точку D, а на продолжении AC за вершину C — точку E так, что $AD = CE$. Докажите, что $BD + BE > AB + BC$.

Решение. На продолжении стороны AB за точку A отложим отрезок AF, равный AB (см. рис. 10). Углы A и C при основании треугольника ABC равны, поэтому равны и смежные с ними углы FAD и BCE. Треугольник ADF равен треугольнику EBC по двум сторонам и углу между ними. Значит, $DF = BE$. Применив неравенство треугольника к треугольнику FDB, получим, что $AB + BC = BF < BD + DF = BD + BE$. Получаем $BD + BE > AB + BC$, что и требовалось доказать.

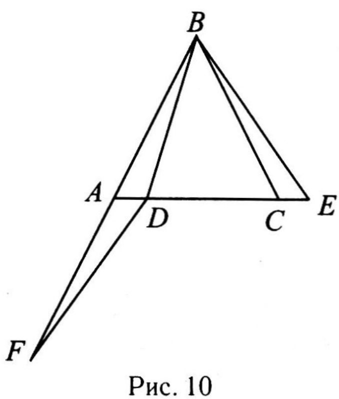


Рис. 10

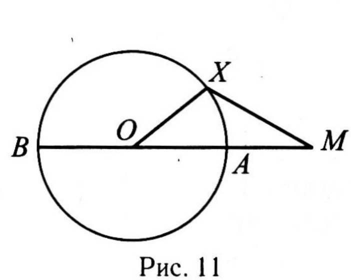


Рис. 11

Задача 26.

Радиус окружности равен 20 см. Найдите разницу между наибольшим и наименьшим расстояниями от точек окружности до данной точки, лежащей вне окружности.

Решение. Пусть M — данная точка (см. рис. 11), O — центр окружности, AB — её диаметр, принадлежащий прямой OM (A между O и M), X — произвольная точка окружности. Тогда $MX + OX \geqslant OM = OA + AM$. Поэтому $MX \geqslant AM$. Аналогично находим, что $MX \leqslant MB = MA + AB = MA + 40$. Видим, что MB и MA — наибольшее и наименьшее расстояния соответственно.

Ответ: 40 см.

Задача 27.

В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AB и BC соответственно выбраны точки M и N так, что угол AOC в два раза больше угла MON, где точка O — центр описанной окружности. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

Решение. Рассмотрим рисунок 12. Построим точки K и L так, чтобы $OK = OM$, $OL = ON$ и углы $\angle MOB = \angle KOA$, $\angle NOB = \angle COL$. При этом треугольник AOK будет равен треугольнику BOM, а треугольник COL — треугольнику BON по двум сторонам и углу между ними. Поскольку $\angle KOL = \angle AOC - (\angle AOK + \angle LOC) = \angle AOC - \angle MON$ и $\angle MON = \angle AOC - \angle MON$, то $\angle KOL = \angle MON$, $OK = OM$, $OL = ON$ и треугольник KOL равен треугольнику MON. Поэтому $KL = MN$. Следовательно,
$P_{MBN} = BM + MN + NB = AK + KL + LC \geqslant AC$.

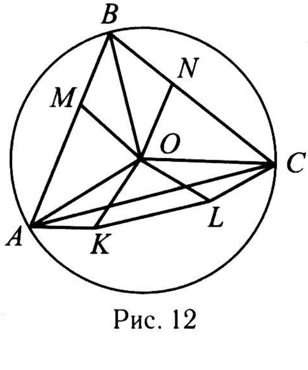


Рис. 12

Соотношения между сторонами и углами треугольника

Теорема. В треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол, и обратно, напротив большего угла лежит бóльшая сторона.

Следствие 1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

Следствие 2. Расстояние от точки до прямой меньше наклонной, проведённой из той же точки.

Следствие 3. В треугольнике против равных углов лежат равные стороны.

Задача 28.

Среди всех треугольников с данной суммой медиан найдите тот, у которого сумма высот наибольшая.

Решение. Длина медианы, проведённой к стороне треугольника, не меньше длины высоты, проведённой к той же стороне (см. рис. 13).

Если высота BH не совпадает с медианой BM, то она короче медианы, потому что в прямоугольном треугольнике MHB гипотенуза больше катета. Поэтому сумма высот треугольника не превышает суммы медиан. Значит, сумма высот треугольника наибольшая, когда медианы совпадают с высотами, что выполняется только для равностороннего треугольника.

Ответ: равносторонний треугольник.

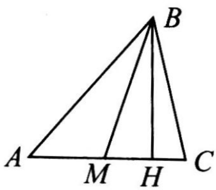


Рис. 13

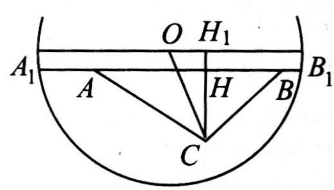


Рис. 14

Задача 29.

Внутри круга радиуса R расположен треугольник. Площадь треугольника превышает R^2. Докажите, что треугольник содержит центр круга.

Решение. Предположим, что треугольник не содержит центра круга. Рассмотрим рис. 14. Пусть AB — ближайшая к центру окружности сторона треугольника. $AB \leqslant A_1B_1$, $A_1B_1 < A_1O + OB_1$. Тогда

$AB < 2R$. Проведём диаметр, параллельный A_1B_1. Высота треугольника $CH < CH_1 \leqslant OC \leqslant R$. $S_{ABC} = 0{,}5AB \cdot CH < 0{,}5 \cdot R \cdot 2R = R^2$. По условию $S_{ABC} > R^2$, значит, наше предположение неверно и треугольник содержит центр круга.

Задача 30.

Высóты треугольника — целые числа, радиус вписанной окружности равен 1. Докажите, что треугольник правильный.

Решение. Пусть стороны треугольника равны a, b, c. К ним соответственно проведены высоты h_a, h_b, h_c. Так как диаметр окружности, вписанной в треугольник, равен 2, то длина каждой высоты больше 2. Следовательно, длина каждой высоты не меньше 3, так как по условию длины высот являются целыми числами.

Если все высоты равны 3, то из формул площади треугольника $S = \dfrac{ah_a}{2} = \dfrac{bh_b}{2} = \dfrac{ch_c}{2}$ получим $a = b = c$, то есть треугольник равносторонний.

Предположим, что одна из высот треугольника больше 3. Пусть для определённости $h_a > 3$. Из формулы площади треугольника через полупериметр и радиус r вписанной окружности получаем $\dfrac{a+b+c}{2} \cdot r = S = \dfrac{ah_a}{2}$, $a + b + c = ah_a > 3a$. Так как $h_b \geqslant 3$, $h_c \geqslant 3$, то таким же методом получим $a + b + c \geqslant 3b$ и $a + b + c \geqslant 3c$. Складывая последние два неравенства с неравенством $a + b + c > 3a$, получим $3(a + b + c) > 3a + 3b + 3c$. Противоречие. Следовательно, каждая из высот равна 3 и треугольник равносторонний.

Задача 31.

Из любых ли 10 отрезков можно выбрать три, из которых можно составить треугольник?

Решение. Попробуем построить контрпример. Чтобы треугольник нельзя было составить из трёх отрезков, они должны сильно отличаться по длине друг от друга. Поэтому, для того чтобы подобрать 10 отрезков с нужным нам свойством, надо взять какую-нибудь очень быстро растущую последовательность чисел. Например, 1, 2, $2^2, \ldots, 2^9$. Из отрезков такой длины нельзя выбрать три отрезка, составляющих треугольник, так как если $k < m < n$, то $2^k + 2^m < 2^m + 2^m = 2^{m+1} \leqslant 2^n$, и неравенство треугольника не выполнено.

Ответ: нет.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Четыре села́ расположены в вершинах выпуклого четырёхугольника. В каком месте следует построить корчму, чтобы сумма расстояний от неё до всех четырёх сёл была наименьшей?

6.2. Избушки Кощея и Бабы-яги расположены: а) по разные стороны; б) по одну сторону от прямолинейной просеки. В каком месте просеки надо построить убежище, чтобы сумма расстояний от него до этих избушек была наименьшей?

6.3. Две деревни расположены по разные стороны от реки, берега которой — параллельные прямые. В каком месте реки следует построить Калинов мост, перпендикулярный берегам, чтобы длина пути из одной деревни в другую была наименьшей?

6.4. Богатырь охраняет территорию воеводства, имеющего форму острого угла. Он начинает свой дозор в одной из внутренних точек этого угла, хочет побывать на каждой стороне угла и вернуться в исходную точку. Как ему это сделать, пройдя наименьшее расстояние?

6.5. Богатырь нанялся охранять воеводство, форма которого представляет собой квадрат. Ему предлагают нести дозор на одной из двух застав. Первая застава находится в середине одной из сторон квадрата. Вторая застава — в точке, которая делит сторону квадрата в отношении 1 : 2. Богатырь каждый день должен побывать на каждой из остальных сторон и вернуться в исходную точку. Как ему это сделать, пройдя наименьшее расстояние? Какой из этих путей короче?

6.6. Домовой сидит в вершине деревянного куба. Как ему переползти в противоположную вершину куба, двигаясь по самому короткому пути? Домовой может ползать по всей поверхности куба, а не только по его рёбрам.

6.7. На полу стоит бочка с круглым дном и вертикальными стенками (дно — внизу). На внешней стенке бочки сидит муравей, а на внутренней стенке находится капля варенья. Как муравью добраться до этого варенья, пройдя наименьший путь?

6.8. В середине ребра правильного тетраэдра сидит жук, который хочет переползти на середину противоположной грани. Какой путь будет кратчайшим? Жук может ползти только по поверхности тетраэдра.

6.9. Ладья плывёт из города Аз до города Буки по течению реки, а затем возвращается против течения (скорость течения и собственная скорость ладьи постоянны). Потратит ли она на весь путь больше или меньше времени, чем на равный путь по озеру?

6.10. Что больше: 2^{30} или 3^{20}?

6.11. Что больше: 215^{33} или 50^{50}?

6.12. Что больше: $n!$ или n^n?

6.13. Что больше: количество цифр в числе 3^{200} или 100?

6.14. Что больше: 100^{100} или $50^{50} \cdot 150^{50}$?

6.15. Что больше: $1\,234\,567 \cdot 1\,234\,569$ или $1\,234\,568^2$?

6.16. Что больше: $\dfrac{12\,345}{76\,543}$ или $\dfrac{12\,346}{76\,544}$?

6.17. Докажите неравенство $\dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \dots + \dfrac{1}{100\cdot 101} < \dfrac{1}{2}$.

6.18. Сравните $\dfrac{1+3^{2010}}{1+3^{2011}}$ и $\dfrac{1+3^{2011}}{1+3^{2012}}$.

6.19. Докажите: а) $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dots - \dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{100}$;

б) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dots - \dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{100} < \dfrac{2}{5}$.

6.20. Докажите, что $z + \dfrac{1}{z} \geqslant 2$ для любого положительного z.

6.21. Докажите, что из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

6.22. Докажите, что из всех прямоугольников данной площади наименьший периметр имеет квадрат.

6.23. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 4, а вторая — 8. Чему равна третья сторона?

6.24. Все стороны треугольника меньше 1. Может ли его площадь быть больше 1000?

6.25. Все стороны треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 1?

6.26. Сумма нескольких положительных чисел больше 10. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,1?

6.27. Сумма нескольких положительных чисел меньше 10. Может ли сумма их квадратов быть больше 1000?

6.28. Сумма двух положительных чисел меньше 0,1. Может ли произведение этих чисел быть больше 1000?

6.29. Сумма двух положительных чисел больше 1000. Может ли произведение этих чисел быть меньше 0,1?

6.30. Все стороны прямоугольника увеличили на 10 м. Может ли его площадь увеличиться меньше чем на 0,1 м^2?

6.31. Стороны прямоугольника увеличили на 0,1 м. Может ли его площадь увеличиться больше чем на 10 м^2?

6.32. Два положительных числа отличаются более чем на 10. Могут ли их квадраты отличаться менее чем на 0,1?

6.33. Два положительных числа отличаются менее чем на 0,1. Могут ли их квадраты отличаться более чем на 10?

6.34. Длина стороны AC треугольника ABC равна 3,8. Длина стороны AB — 0,6. Найдите длину стороны BC, если известно, что она выражается целым числом.

6.35. На данной прямой AB найдите точку, сумма расстояний от которой до двух данных точек M и N была бы наименьшей.

6.36. Точки A и B лежат внутри окружности. Докажите, что длина отрезка AB меньше диаметра.

6.37. Точки A и B лежат внутри окружности. Докажите, что длина отрезка AB меньше половины длины окружности.

6.38. Окружность лежит внутри треугольника. Докажите, что любая высота треугольника больше диаметра окружности.

6.39. Докажите, что любой отрезок с концами на разных сторонах треугольника не больше наибольшей из сторон треугольника.

6.40. AM — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AB > MB$ и $AC > MC$.

6.41. AM — биссектриса треугольника ABC, сторона AB больше стороны AC. Докажите, что $BM > CM$ и $\angle BMA > \angle CMA$.

6.42. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A, а из вершины C проведён перпендикуляр CH к этой прямой. Докажите, что периметр треугольника BCH больше периметра треугольника ABC.

6.43. Две стороны треугольника не равны друг другу. Докажите, что медиана, проведённая из их общей вершины, составляет с меньшей из сторон больший угол.

6.44. Внутри треугольника ABC взята такая точка K, что A равноудалена от K и B. Докажите, что $AC > AB$.

6.45. В треугольнике каждая из двух его высот не меньше стороны, к которой она проведена. Докажите, что треугольник равнобедренный и прямоугольный.

6.46. Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах треугольника BC, CA и BA и делят их в отношении $5 : 1$. A_1 лежит ближе к B, B_1 ближе к C, C_1 к A . Докажите, что из отрезков AA_1, BB_1, CC_1 можно составить треугольник.

6.47. Докажите, что биссектриса треугольника, проведённая из общей вершины двух сторон a и b, меньше $\dfrac{2ab}{a+b}$.

6.48. Из любых ли 100 палочек можно выбрать три, из которых можно составить треугольник? (Ломать палочки нельзя!)

6.49. Докажите, что медиана AM в треугольнике ABC по длине меньше, чем $\dfrac{AB+AC}{2}$.

6.50. Докажите, что медиана AM в треугольнике ABC по длине больше, чем $\dfrac{AB+AC-BC}{2}$.

6.51. В войске герцога Икторна 1000 гоблинов. Любые два гоблина либо дружат, либо враждуют, либо незнакомы. Гоблины — существа малообщительные, разговаривают только с друзьями. К тому же все они в плохом настроении, поскольку у каждого гоблина любые два его друга враждуют, а любые два врага дружат. Докажите, что для того, чтобы всё войско узнало о предстоящем наступлении на Данвин, герцог должен сообщить об этом не менее чем 200 гоблинам.

6.52. Наследство состоит из нескольких бриллиантов и оценивается в 1 000 000 долларов. Известно, что его можно разделить на 5, а можно и на 8 равных частей. Какую наибольшую стоимость может иметь самый маленький бриллиант?

6.53. Гриб называем плохим, если в нём больше 11 червяков. Червяк тощий, если он съел не более $\dfrac{1}{5}$ гриба, в котором живёт. Четверть всех грибов в лесу плохие. Каждый червяк живёт на одном грибе, не перемещаясь на другие. Докажите, что не менее трети всех червяков тощие.

Глава VII. Принцип крайнего

Для решения многих задач бывает полезно рассмотреть какой-нибудь «крайний», «граничный», «экстремальный» элемент, то есть элемент, при котором некоторая величина принимает наибольшее или наименьшее значение, например, наибольшую или наименьшую сторону треугольника, наибольшее или наименьшее расстояние и т. д. Этот метод решения задач называют принципом крайнего; название это часто встречается, но оно всё же не общепринятое. Иногда этот метод называют «принципом узких мест».

К этому же методу иногда относят задачи, где приходится упорядочивать ряд чисел по возрастанию (убыванию) или находить асимптоты.

Одним из случаев принципа крайнего является метод экстремального контрпримера: предполагаем, что утверждение задачи неверно. Тогда существует «экстремальный» в некотором смысле контрпример. Если же выяснится, что его можно ещё уменьшить или увеличить, то получится необходимое противоречие.

Рассмотрим некоторые задачи, которые можно решить этим методом.

Выбор наибольшего или наименьшего значения

Задача 1.

В клетках таблицы 6×6 стоят числа так, что каждое число равно среднему арифметическому своих соседей (чисел в клетках с общими сторонами). Сумма чисел в нижней строке равна 30. Чему равна сумма чисел в угловых клетках?

Решение. Рассмотрим наибольшее число, написанное в таблице. Все его соседи не больше его, поэтому если хоть одно из соседних чисел меньше выбранного числа, то и среднее арифметическое соседей будет меньше выбранного, что противоречит условию задачи. Значит, все соседи этого числа равны этому числу, и их соседи тоже им равны. Получаем, что все числа равны. 6 чисел в нижней строке равны по $30 : 6 = 5$, значит, сумма чисел в угловых клетках равна 20.

Ответ: 20.

Задача 2.

В таблице 12×12 расставлены натуральные числа. В каждой строке подчеркнули наибольшее натуральное число (или одно из наибольших, если их несколько), а в каждом столбце — наименьшее (или

одно из наименьших). Оказалось, что все подчёркнутые числа подчёркнуты два раза. Докажите, что все числа в таблице равны.

Решение. Выберем самое большое число в таблице. Оно подчёркнуто, потому что это самое большое число в строке. Дано, что оно подчёркнуто 2 раза, значит, оно является самым маленьким (или одним из наименьших) числом в столбце. Но если оно самое большое в таблице и при этом одно из наименьших в столбце, то все числа в этом столбце равны и являются наибольшими в таблице.

Выберем самое маленькое число в таблице. Оно подчёркнуто, потому что это наименьшее число в столбце. Дано, что оно подчёркнуто 2 раза, значит, это наибольшее (или одно из наибольших) число в строке. Но если оно наименьшее в таблице и при этом одно из наибольших в строке, то все числа в этой строке равны и являются наименьшими в таблице.

Рассмотрим теперь число, расположенное на пересечении столбца с наибольшими числами и строки с наименьшими. Все эти числа равны, значит, наибольшее из чисел таблицы равно наименьшему.

Задача 3.

Докажите, что уравнение $m^2 + n^2 = 3(z^2 + t^2)$ неразрешимо в целых положительных числах.

Решение. Предположим противное, т. е. что существуют четвёрки положительных целых чисел (m, n, z, t) — решения такого уравнения. Рассмотрим решение, для которого выражение $m^2 + n^2$ минимально. Если их несколько, рассмотрим любое. Из уравнения следует, что 3 является делителем числа $m^2 + n^2$. Отсюда получаем, что 3 является делителем m и n (это следует из того, что остаток от деления квадрата любого целого числа на 3 равен 0 или 1). Таким образом, $m = 3m_1$, $n = 3n_1$. Следовательно, $z^2 + t^2 = 3(m_1^2 + n_1^2)$.

Заметим, что мы получили четвёрку чисел (z, t, m_1, n_1), для которых $z^2 + t^2 < m^2 + n^2$, а уравнение отличается от исходного только обозначениями. Получили противоречие, следовательно, решения исходного уравнения в целых положительных числах не существует.

Задача 4.

Докажите бесконечность множества простых чисел вида $4m + 3$.

Решение. Предположим противное, т. е. что множество простых чисел вида $4m + 3$ конечно. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — его элементы.

Возьмём число $a = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_n^2 + 2$. Покажем, что остаток от деления a на 4 равен 3. Найдём остаток от деления на 4 произведения пары чисел вида $4m+3$. $(4m_1+3)\cdot(4m_2+3) = 4\cdot(4m_1m_2+3m_1+3m_2+2)+1$, т. е. остаток равен 1. Таким образом, остаток от деления p_i^2 на 4 равен 1. Аналогично можно доказать, что остаток от деления на 4 произведения любого количества сомножителей вида $4k+1$ будет равен 1. Таким образом, остаток от деления a на 4 будет равен 3.

Разложим a на простые сомножители. По построению оно не делится на 2 и на все простые множители вида $4m+3$. Следовательно, оно раскладывается на сомножители вида $4m+1$ (все простые числа, кроме 2, нечётные и имеют вид $4m+1$ или $4m+3$). Как произведение чисел, делящихся на 4 с остатком 1, a также должно делиться на 4 с остатком 1, но оно делится на 4 с остатком 3. Получили противоречие. Значит, предположение о конечности множества простых чисел вида $4m+3$ неверно.

Задача 5.

В вершинах куба стоят числа, среди которых есть 0 и 1. На каждом шаге все числа заменяются на среднее арифметическое чисел, стоящих в вершинах, соединённых ребром с данной вершиной. Через 10 таких шагов во всех вершинах числа оказались равны исходным. Найдите, какими могли быть исходные числа.

Решение. Пусть M_i — максимальное число на данном шаге, а m_i — минимальное. Тогда выполняется следующее соотношение:

$M_0 \geqslant M_1 \geqslant \dots \geqslant M_{10}$. Так как после десятого шага числа оказались равны исходным, то $M_0 = M_1 = \dots = M_{10} = M$. Аналогично $m_0 = m_1 = \dots = m_{10} = m$.

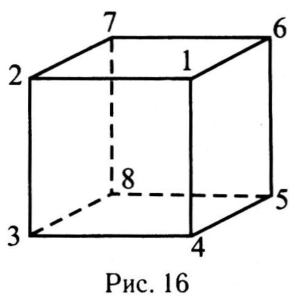


Рис. 16

Занумеруем вершины куба так, чтобы рёбра соединяли числа разной чётности (см. рис. 16). Пусть в первой вершине после десятого шага стоит максимальное число, тогда после девятого шага в вершинах, соседних с 1 (вершины 2, 6, 4), были числа, равные максимальному. После восьмого шага должны были быть равны максимальному числа во всех вершинах с нечётными номерами. Аналогично можно получить, что все исходные числа, стоящие в вершинах одинаковой чётности, равны.

По условию, среди исходных чисел были 0 и 1. Таким образом, возможны две исходные расстановки:

а) в чётных вершинах единицы, в нечётных — нули;

б) в чётных вершинах нули, в нечётных — единицы.

Ответ: 2 расстановки, указанные в решении.

Задача 6.

На кольцевом треке 10 велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с различными постоянными скоростями в одну сторону. Если после старта велосипедисты оказываются одновременно в одной точке, назовём это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы один раз, при этом никакие три не встретились одновременно. Докажите, что до полудня у каждого велосипедиста было не менее 25 встреч.

Решение. Пусть S — длина трека, $v_1 < v_2 < \ldots < v_{10}$ — скорости велосипедистов, $u = \min(v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_{10} - v_9)$. Велосипедисты с номерами i, j $(i < j)$ встречаются через время $\dfrac{S}{v_j - v_i}$. Самый большой из таких промежутков равен $\dfrac{S}{u}$, и для того чтобы встретились каждые два велосипедиста, нам необходимо ждать не меньше этого промежутка. Поскольку $v_j - v_i \geqslant (j - i)u$, то за это время велосипедисты с номерами i, j встретятся не менее $(j - i)$ раз. Таким образом, суммарное количество встреч велосипедиста с номером k не меньше суммы $(k-1)+(k-2)+\ldots+1 = \dfrac{k(k-1)}{2}$ и $1+2+\ldots+(10-k) = \dfrac{(10-k)(11-k)}{2}$. $\dfrac{k(k-1)}{2} + \dfrac{(10-k)(11-k)}{2} = k^2 - 11k + 55$. Минимальное количество встреч, равное 25, получается для велосипедистов с номерами 5 и 6.

Задача 7.

У гнома есть чашечные весы без гирь и 8 алмазов. Он хочет знать, верно ли, что два алмаза всегда тяжелее одного. Как ему гарантированно проверить это а) за 19 взвешиваний; б) за 13 взвешиваний?

Решение. Чтобы проверить это, необходимо и достаточно сравнить вес самого тяжёлого и двух самых лёгких алмазов (здесь и далее понятия «лёгкий» и «тяжёлый» следует понимать в смысле нестрогих неравенств, то есть для равных по весу двух алмазов мы произвольным образом объявим одного из них более лёгким).

а) Чтобы узнать, какой из восьми алмазов самый тяжёлый, достаточно 7 взвешиваний. За ещё 6 взвешиваний мы найдём самый лёгкий алмаз, и ещё за 5 мы найдём самый лёгкий среди оставшихся шести алмазов. Теперь мы знаем два самых лёгких и самый тяжёлый алмаз и последним взвешиванием сравниваем их. Всего нужно $7+6+5+1 = 19$ взвешиваний.

б) Разобьём алмазы на 4 пары и найдём более тяжёлый в каждой паре. Из каждой пары возьмём более лёгкий алмаз. Эти 4 алмаза снова разобьём на две пары. Найдём наиболее лёгкий алмаз в каждой из двух пар, а затем сравним эти два найденных алмаза. Таким образом мы найдём самый лёгкий алмаз среди всех. Занумеруем алмазы числами от 1 до 8 так, чтобы последнее взвешивание показало $m_1 \leqslant m_5$, два проведённых до того взвешивания показали $m_1 \leqslant m_3$ и $m_5 \leqslant m_7$, а при самом первом разбиении было $m_1 \leqslant m_2, m_3 \leqslant m_4, m_5 \leqslant m_6, m_7 \leqslant m_8$.

Самый лёгкий алмаз уже найден (это m_1). Найдём второй по лёгкости алмаз. Кандидатами на эту роль являются m_2, m_3 и m_5. Двух взвешиваний достаточно, чтобы определить легчайший алмаз из этой тройки.

Теперь нужно найти самый тяжёлый алмаз. Кандидатами являются m_2, m_4, m_6 и m_8. Самый тяжёлый среди них можно найти за 3 взвешивания.

Уже было использовано $4 + 3 + 2 + 3 = 12$ взвешиваний. Последним 13-м взвешиванием мы кладём на одну чашу весов самый тяжёлый алмаз, а на другую — два наиболее лёгких.

Деление на части

Задача 8.

Покажите, как любой четырёхугольник разрезать на три фигуры, каждая из которых является трапецией или параллелограммом.

Решение. Пусть B — наибольший внутренний угол данного четырёхугольника $ABCD$ (см. рис. 17). Проведём разрез BM из вершины B, параллельный стороне AD (точка M попадёт внутрь четырёхугольника).

Из точки M проводим разрезы MN и MK, параллельные сторонам BC и CD соответственно.

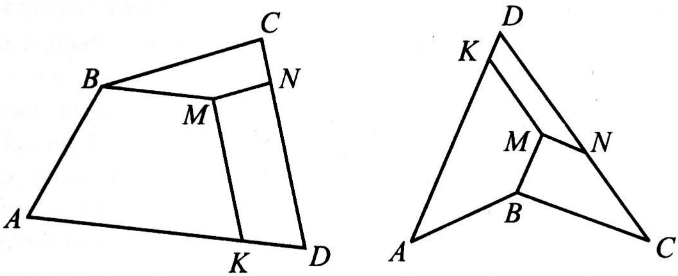


Рис. 17

Задача 9.

На тарелке лежат 9 разных кусочков пирога. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?

Решение. Обозначим массы кусочков в порядке возрастания: $m_1, m_2, \ldots$, m_9. Налево положим 1-й, 3-й, 5-й и 7-й кусочки, а направо — 2-й, 4-й, 6-й и 8-й. Тогда $m_1 + m_3 + m_5 + m_7 < m_2 + m_4 + m_6 + m_8$ (неравенство строгое, потому что кусочки разные). А если налево добавить 9-й кусочек, то $m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9 > m_2 + m_4 + m_6 + m_8$. Следовательно, достаточно разрезать 9-й кусочек, самый тяжёлый.

Ответ: да.

Задача 10.

По периметру круглого коврика диаметром $\frac{n}{\pi}$ метров расположено n цветочков. Если на концах некоторой дуги находятся цветочки, то количество остальных цветочков на этой дуге меньше, чем длина дуги в метрах. Докажите, что коврик можно разрезать на n равных секторов так, что в каждом куске будет по цветочку.

Решение. Примем некоторую точку окружности за начало отсчёта. Пусть a_i — длина дуги от начала отсчёта до i-го цветочка по часовой стрелке. Рассмотрим числа $b_i = a_i - i$. Из условия следует, что $|b_m - b_k| < 1$ для любых m, k (достаточно рассмотреть две дуги, на которые m-й и k-й цветочек разбивают периметр коврика). Пусть b_s — наименьшее из них, тогда $0 \leqslant b_i - b_s < 1$ для любого i (подумайте, почему). Отсюда следует, что найдётся такое x, что $x < b_i < x+1$ для всех i. Очевидно, что разрез по радиусам, проведённым в точки с координатами $x, x+1, \ldots, x+n-1$, — искомый.

Принцип крайнего и теория графов

Задача 11.

В железнодорожной системе некоторой страны с любой станции можно проехать на любую (возможно, с пересадками). Докажите, что можно так выбрать станцию и закрыть её на ремонт (без права проезда через неё), что по-прежнему можно будет проехать с любой оставшейся на любую оставшуюся.

Решение. Очевидно, что если можно найти станцию, из которой выходит только один путь, то её можно закрыть на ремонт. Если такой станции нет, то перекроем наибольшее количество путей так, чтобы от любой станции всё равно можно было добраться до любой другой. Понятно, что после этого не будет ни одного замкнутого маршрута. Покажем, что теперь можно найти станцию, из которой выходит ровно один тоннель. Начнём с любой станции и будем перемещаться по путям так, чтобы не возвращаться на ту же станцию, с которой только что пришли. Мы не сможем попасть на одну станцию дважды, иначе получился бы замкнутый маршрут. Значит, дойдя до определённой станции, мы не сможем продолжить маршрут, и это означает, что из неё выходит только один путь. Станцию на конце этого пути можно закрыть на ремонт.

Задача 12.

В обществе любителей рыбной ловли любые двое знакомых не имеют общих знакомых, а любые двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что в этом обществе все имеют одинаковое число знакомых.

Решение. Пусть у человека B наибольшее число знакомых (знакомые $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$). Покажем, что у каждого из них есть хотя бы n знакомых. Отсюда докажем то, что у всех людей в обществе ровно по n знакомых.

Например, рассмотрим b_1. b_1 и b_j имеют общего знакомого B, значит, они незнакомы и имеют ещё одного общего знакомого c_{1j}. Итого, b_1 имеет в множестве знакомых хотя бы B, $c_{12}, c_{13} \dots c_{1n}$. Это n человек, теперь докажем, что все они различны между собой. B по определению отличен от всех других. c_{1k} и c_{1j} тоже не могут совпадать, так как иначе c_{1k} имел бы с B трёх общих знакомых b_1, b_k и b_j. Итак, все n найденных знакомых различны, то есть знакомых не меньше n, и следовательно, ровно n.

Таким образом, мы показали, что все знакомые B также имеют по наибольшему числу знакомых n. Но тогда и их знакомые имеют по n знакомых. А любой человек из общества либо знаком с B, либо незнаком с B, но тогда знаком с двумя из его знакомых, то есть в любом случае мы доказали, что он имеет n знакомых.

Задача 13.

У Пети всего 28 одноклассников. У каждых двух из 28 различное число друзей в этом классе. Сколько у Пети друзей в этом классе?

Решение. У одноклассников Пети может быть 0, 1, 2, $\dots$, 28 друзей — всего 29 вариантов. Но, если кто-то дружит со всеми, то у каждого ученика не меньше одного друга. Поэтому либо есть такой, кто дружит со всеми, либо есть такой, кто не дружит ни с кем. В обоих случаях остаётся 28 вариантов: 1, 2, $\dots$, 28 или 0, 1, $\dots$, 27. Обозначим того, у кого больше всего друзей через A, а того, у кого их меньше всего, — через B. В первом случае A дружит со всеми, а B — только с одним человеком, т. е. только с A. Во втором случае B не дружит ни с кем, а A дружит со всеми, кроме одного, т. е. со всеми, кроме B. Итак, в каждом из случаев A дружит с Петей, а B — нет. Переведём A и B в другой класс. Как мы уже видели, A дружит со всеми из оставшихся, а B — ни с кем из оставшихся. Поэтому после перевода у каждого стало на одного друга меньше (среди одноклассников). Значит, у оставшихся Петиных одноклассников снова будет разное число друзей среди одноклассников. Теперь снова переведём самого «дружелюбного» и самого «нелюдимого» в другой класс и т. д. Повторяя эти рассуждения 14 раз, мы переведём в другой класс 14 пар школьников, в каждой из которых ровно один Петин друг. Итак, у Пети 14 друзей в классе.

Ответ: 14.

Задача 14.

В гостинице бесконечное число номеров: $\dots$, -2, -1, 0, 1, 2, $\dots$ В некоторых из них живут музыканты, их конечное число. В некоторый момент два музыканта, живущие в соседних номерах n и $n+1$, решают, что они мешают друг дугу, и расселяются в номера $n-1$

и $n+2$ (если эти номера свободны). Докажите, что рано или поздно переселения прекратятся.

Решение. Предположим, что существует бесконечная последовательность переселений. Выберем бесконечную последовательность, в которой участвует наименьшее количество музыкантов. Пусть в этой последовательности участвует N музыкантов, и пусть A — минимальный номер среди занятых в начальный момент комнат. Так как количество музыкантов наименьшее, то каждый из них должен переселяться бесконечно много раз (если с некоторого момента музыкант перестаёт переселяться, можно уменьшить количество музыкантов). Так как самый правый музыкант может двигаться только вправо, то он окажется в комнатах со сколь угодно большими номерами. Но для этого необходимо, чтобы и второй справа музыкант тоже побывал в комнатах со сколь угодно большими номерами. Рассуждая аналогично, получим, что и все остальные музыканты побывают в комнатах со сколь угодно большими номерами. Значит, в какой-то момент самый левый музыкант окажется в комнате с номером, большим A, что невозможно, так как он переезжает только в комнаты с меньшими номерами.

Задача 15.

В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. Известно, что в каждой из деревень общее число женихов и невест не превосходит половины от общего числа женихов и невест всего района. Докажите, что всех этих молодых людей можно поженить так, что в каждой паре муж и жена будут из разных деревень.

Решение. Возьмём деревню, в которой больше всего женихов и невест (N человек).

Во-первых, мы можем составить пару, в которой один из поженившихся будет из этой деревни (так как в других деревнях тоже хоть кто-то есть, а всего женихов и невест поровну).

Во-вторых, если мы эту пару зафиксируем и уберём этих жениха и невесту из рассмотрения, то условие задачи сохранится. Действительно, общее число людей было не менее $2N$, в каждой деревне их не больше, чем N, есть три варианта:

а) число людей $2N$ и есть другая деревня с N людьми. Тогда мы взяли по 1 человеку из каждой, и в них осталось поровну;

б) число людей больше чем $2N$. Тогда мы взяли двух человек и осталось хотя бы $2N$, а в деревнях не больше чем по N;

в) людей $2N$ и нет других деревень с N людьми. Тогда осталось $(2N - 2)$ человек и не более чем по $(N - 1)$ в каждой из деревень.

В любом случае условие задачи сохранилось, а число не поженившихся людей уменьшилось. Значит, действуя таким образом, мы сможем уменьшать число не поженившихся до нуля.

Принцип крайнего в геометрии

Задача 16.

На плоскости отмечены несколько точек. Может ли на каждом отрезке, соединяющем отмеченные точки, лежать ещё хотя бы одна отмеченная точка?

Решение. Выберем самый короткий отрезок AB. Если бы на нём лежала точка C, то выполнялось бы условие $|AC| < |AB|$, что противоречит выбору AB.

Ответ: нет.

Задача 17.

Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадёт на сторону.

Решение. Рассмотрим самый короткий перпендикуляр EF (см. рис. 18). Пусть он падает на продолжение стороны — например, CA. Но многоугольник выпуклый, значит, продолжение стороны лежит вне многоугольника, и EF пересекает какую-то сторону (например, AB). Тогда перпендикуляр к той стороне, которую он пересекает, будет ещё короче, т. к. перпендикуляр короче наклонной, проведённой из той же точки. Но мы предположили, что EF — самый короткий перпендикуляр. Значит, предположение неверно и хотя бы один перпендикуляр — самый короткий — попадёт на сторону.

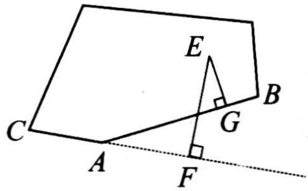


Рис. 18

Задача 18.

На плоскости проведены несколько (не менее трёх) прямых, среди которых нет параллельных, а также никакие три прямые не проходят через одну точку. Проведённые прямые разбивают плоскость на несколько частей. Докажите, что для любой из этих прямых найдётся прилегающая к ней часть плоскости в форме треугольника.

Решение. Выберем некоторую прямую f и среди точек пересечения прямых рассмотрим наиболее близкую к f (но не лежащую на ней) и обозначим её A. Пусть прямые, проходящие через A, пересекают f в точках B и C. Покажем, что треугольник ABC — искомый. Предположим, что это не так и какая-то прямая пересекает треугольник ABC. Но тогда она пересекает одну из сторон AB или AC, и эта точка ближе к f, чем A, что противоречит выбору A. Значит, предположение неверно, и ABC — искомая часть.

Задача 19.

На плоскости даны 2010 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдётся треугольник с вершинами в этих точках, не содержащий ни одной из оставшихся точек.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC наименьшей площади. Тогда он не может содержать других точек: если внутри него лежит точка D (см. рис. 19), то площадь ADB меньше, что противоречит выбору треугольника. Значит, треугольник ABC не содержит ни одной из оставшихся точек.

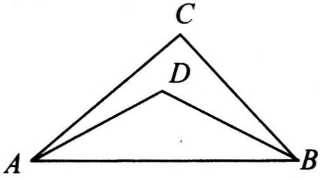


Рис. 19

Задача 20.

На столе лежат несколько одинаковых монет. Докажите, что найдётся монета, касающаяся не более трёх других.

Решение. В плоскости стола выберем произвольно направление «вверх». Выберем монету, центр которой находится ниже всех, а если таких будет несколько, то выберем среди них самую правую. Обозначим её центр за O (см. рис. 20) и проведём горизонтальную прямую OX. Тогда все другие центры должны попасть в верхнюю полуплоскость, т. е. выше прямой OX, или на луч OY.

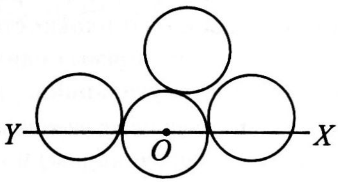


Рис. 20

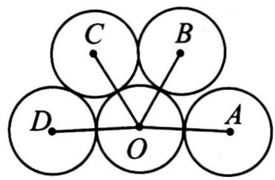


Рис. 21

Предположим, что монета с центром O касается хотя бы четырёх монет (см. рис. 21) с центрами A, B, C, D (лучи OA, OB, OC, OD идут по часовой стрелке). Так как монеты с центрами A и B касаются монеты с центром O, то AB — наибольшая сторона в треугольнике ABO и $\angle AOB \geqslant 60°$, и аналогично $\angle BOC \geqslant 60°$ и $\angle COD \geqslant 60°$. В силу выбора точки O, угол AOD должен быть меньше $180°$. Но, с другой стороны, $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD \geqslant 180°$.

Задача 21.

На плоскости отмечено несколько точек. Докажите, что найдётся точка, у которой среди отмеченных точек имеется не более трёх ближайших.

Решение. Пусть d — минимальное расстояние между парами точек. Выберем точки, у которых расстояние до ближайших соседей равно d, и докажем, что одна из этих точек имеет трёх или менее ближайших соседей.

Проведём вокруг выбранных точек окружности радиусом $\frac{d}{2}$. Все остальные точки не являются ближайшими соседями к выбранным, и их можно не учитывать. Для каждой точки касание её окружности с другой будет означать, что центр этой окружности является ближайшим соседом.

Из условия предыдущей задачи известно, что существует окружность, которой касается не более трёх окружностей, т. е. существует и точка, имеющая не более трёх ближайших соседей.

Задача 22.

На плоскости дано m точек, не лежащих на одной прямой. Докажите, что можно найти ломаную линию без пересечений с вершинами в этих точках.

Решение. Среди всех возможных ломаных, проходящих через данные m точек, рассмотрим ломаную наименьшей длины. Предположим, что в этой ломаной два звена ломаной AB и CD пересекаются, и пусть эти 4 точки идут в порядке A, B, C, D. Тогда мы можем удалить из ломаной отрезки AB и CD, заменив их на AC и BD. Тогда полученная ломаная также проходит через все точки. В выпуклом четырёхугольнике $ACBD$ AB и CD — диагонали, а AC и BD — противолежащие стороны (см. рис. 22).

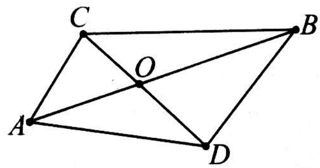


Рис. 22

$AC < CO + OA$, $BD < BO + OD$ (неравенство треугольника).

Значит, $AC + BD < AB + CD$ и длина новой ломаной строго меньше длины прежней. Но мы предположили, что прежняя ломаная имела наименьшую длину, налицо противоречие. Таким образом, ломаная наименьшей длины не имеет пересечений.

Задача 23.

На полях шахматной доски расставлены целые числа, причём никакое число не встречается дважды. Докажите, что есть пара соседних (имеющих общую сторону) клеток, числа в которых отличаются не менее чем на 5.

Решение. Пусть наименьшее число на доске равно A, а наибольшее — B. Рассмотрим клетки, в которых написаны эти числа. Начав из одной из них и переходя на соседние, мы не более чем за 14 ходов дойдём до другой. Предположим, что числа в соседних клетках отличаются не более чем на 4. Получим $B - A \leqslant 14 \cdot 4 = 56$. Тогда число в каждой клетке доски лежит на отрезке от A до $A + 56$, всего 57 вариантов, и значит, числа не могут быть попарно различны. Получили противоречие, из которого следует, что предположение неверно, и два соседних числа с разницей не меньше 5 найдутся.

Задача 24.

Докажите, что если длины всех сторон треугольника не больше 1, то его площадь не больше $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Решение. Рассмотрим треугольник наибольшей площади и докажем, что он равносторонний. Предположим, что у него есть две равные стороны $AB = BC < 1$ (см. рис. 23).

Тогда, очевидно, можно выбрать точку B' так, что $AB' = B'C = 1$ и треугольник $AB'C$ содержит треугольник ABC и, следовательно, имеет большую площадь, что противоречит выбору треугольника ABC. Предположим, что у него есть две неравные стороны $1 \geqslant AB > BC$ (см. рис. 24).

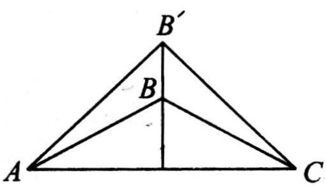


Рис. 23

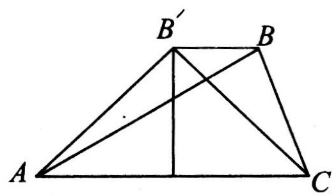


Рис. 24

Обозначим за B' проекцию точки B на серединный перпендикуляр к AC. Имеем $CB' = AB' < AB \leqslant 1$, а площади треугольников ABC и $AB'C$ равны в силу параллельности BB' и AC. Получили предыдущий случай, значит, площадь снова не наибольшая. Отсюда видим, что если площадь наибольшая, то треугольник равносторонний со сторонами длиной 1, а его площадь равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Задача 25.

Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

Решение. Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$ (см. рис. 25).

Выберем диагональ наибольшей длины — пусть это будет AC. Из её концов выходят диагонали AD и CE, пересекающиеся в точке M. Тогда из этих трёх диагоналей можно составить треугольник.

Это следует из неравенства треугольника: в силу выбора AC имеем $|AC| + |CE| > |AC| \geqslant |AD|$ и аналогично $|AC| + |AD| > |CE|$. А из неравенства для треугольника ACM имеем
$|AC| < |AM| + |MC| < |AD| + |CE|$.

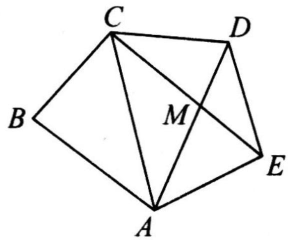


Рис. 25

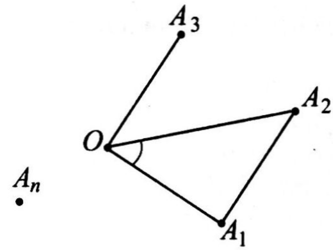


Рис. 26

Задача 26.

В некоторой стране 100 аэродромов, причём все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается самолёт и летит на ближайший к нему аэродром. Докажите, что ни на один аэродром не может прилететь более пяти самолётов.

Решение. Рассмотрим аэродром с наибольшим количеством прилетевших самолётов O, и пусть аэродромы, откуда они взлетели, находятся в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (см. рис. 26), пронумерованных согласно порядку обхода против часовой стрелки вокруг точки O.

Рассмотрим две последовательные точки, например A_1 и A_2. Так как O — ближайшая к ним обеим, то $|A_1A_2| > |OA_1|$ и $|A_1A_2| > |OA_2|$. Значит, в треугольнике OA_1A_2 сторона A_1A_2 наибольшая, а лежащий напротив неё угол $A_1OA_2 > 60°$ градусов. Значит, $360° = \angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \ldots + \angle A_nOA_1 > n \cdot 60°$, откуда $n < 6$. Значит, $n \leqslant 5$, что и требовалось доказать.

Задача 27.

В плоской Вселенной летает несколько круглых планет. Докажите, что из любой точки Вселенной астроном видит некоторую планету полностью (то есть другие планеты её даже частично не загораживают).

Решение. Пусть астроном находится в точке O. Проведём касательные ко всем планетам и выберем планету A с наименьшей длиной касательной f.

Предположим, что есть планета B, которая её частично загораживает, и пусть длина касательной, проведённой к ней, равна l (см. рис. 27).

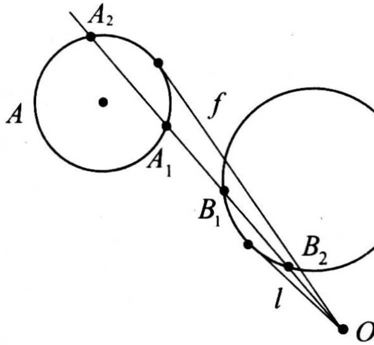


Рис. 27

Проведём из точки O луч в том направлении планеты A, которое закрыто планетой B. Пусть он пересекает поверхность планеты B в точках B_1 и B_2 (B_2 ближняя к O), а поверхность A — в A_1 и A_2 (A_1 ближняя). Так как планеты не могут пересекаться, то точки лежат на луче в порядке O, B_2, B_1, A_1, A_2. Тогда $|OB_1| > l \geqslant f > |OA_1| \geqslant |OB_1|$, чего не может быть. Если же B перегораживает обзор только на одну точку из A, то из точки O выходит общая касательная к обоим кругам и $l < f$, также противоречие.

Задача 28.

Путешественник отправился из своего родного города A в самый удалённый от него город страны B, оттуда — в самый удалённый от B город C и т. д. Докажите, что если C и A — разные города и все расстояния между городами попарно различны, то путешественник никогда не вернётся домой.

Решение. Рассмотрим последовательность расстояний, пройденных путешественником: AB, BC, CD, ... Расстояние до каждого следующего города не меньше чем до предыдущего: $AB < BC \leqslant CD \ldots$. Пусть за несколько шагов путешественник вернулся в город A, тогда $AB < BC \leqslant \ldots \leqslant NA$, т. е. $AB < NA$, но по условию из города A путешественник отправился в самый дальний город и расстояние AB максимальное.

Задача 29.

Треугольник разрезали на несколько выпуклых многоугольников так, что среди них нет треугольников. Докажите, что среди них найдётся два многоугольника с одинаковым числом сторон.

Решение. Выберем среди многоугольников тот, у которого наибольшее число сторон n. Если таких два, то задача решена. На любой из сторон треугольника лежит не более одной его стороны. Тогда на сторонах треугольника не лежит хотя бы $(n-3)$ сторон. С каждым из остальных многоугольников он может иметь не более одной общей стороны или её части, значит, этих остальных многоугольников хотя бы $(n-3)$. Получилось, что треугольник разрезали хотя бы на $(n-2)$ многоугольника, у каждого из которых не более n, но не менее 4 сторон. Таких многоугольников с различным числом сторон не более $(n-3)$, значит, среди $(n-2)$ многоугольников найдётся два многоугольника с одинаковым числом сторон.

Задача 30.

Докажите, что любой выпуклый многоугольник площадью 1 можно поместить в прямоугольник площадью 2.

Решение. Пусть AB — максимальный отрезок среди всех сторон и диагоналей многоугольника (см. рис. 28). Проведём через точки A и B прямые, перпендикулярные отрезку AB. Из построения отрезка AB следует, что весь многоугольник содержится в полосе, образованной этими прямыми. Проведём прямые CD, EF, параллельные AB (одна из проведённых прямых может совпасть с AB), проходящие через некоторые вершины P и Q многоугольника и обладающие тем свойством, что многоугольник находится по одну сторону относительно каждой из них. Опустим из точек P и Q перпендикуляры PP_1 и QQ_1 на AB. Площадь исходного многоугольника больше или равна сумме площадей треугольников APB и AQB, т. е. $\frac{1}{2}AB \cdot PP_1 + \frac{1}{2}AB \cdot QQ_1 = \frac{1}{2}CD \cdot CE$. Отсюда следует, что площадь прямоугольника $EFDC$, содержащего исходный многоугольник, не превосходит 2.

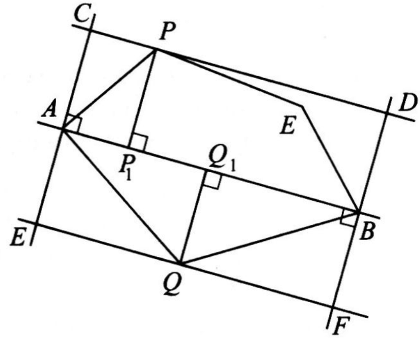


Рис. 28

Задачи для самостоятельного решения

7.1. На плоскости задано множество точек M, такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего некоторые две другие точки из M. Докажите, что множество M бесконечно.

7.2. На каждой стороне произвольного четырёхугольника, как на диаметре, построена окружность. Докажите, что четыре построенных круга полностью покроют четырёхугольник.

7.3. На плоскости проведено n ($n \geqslant 3$) попарно непараллельных прямых, причём через точку пересечения любых двух из них проходит ещё одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

7.4. На плоскости расположено n точек, причём площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площадью 4.

7.5. У богатыря Алёши всего 16 однополчан. У каждых двух из 16 различное число друзей в этом полку. Сколько друзей у Алёши?

7.6. Семь колдунов сделали вместе 100 магических шаров, причём никакие двое не сделали одинакового числа магических шаров. Докажите, что есть трое колдунов, сделавших вместе не менее 50 магических шаров.

7.7. а) Кощей разложил 57 золотых по 7 сундукам, причём во всех сундуках разное число золотых (при этом один из сундуков мог остаться пустым). Докажите, что в каких-то трёх сундуках вместе не менее 30 золотых.

б) Кощей разложил 37 золотых по 8 сундукам, причём во всех сундуках разное число золотых (при этом один из сундуков мог остаться пустым). Докажите, что в каких-то двух сундуках золотых больше, чем в каких-то пяти.

7.8. На шабаш собрались ведьмы, среди которых есть подруги. Оказалось, что любые две из них, имеющие на шабаше равное число подруг, не имеют общих подруг. Докажите, что найдётся ведьма, которая имеет ровно одну подругу из числа участников шабаша.

7.9. Докажите, что для любого целого числа n, $n > 1$, число

$1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n}$ не является целым.

7.10. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2011}$ не имеет решений в целых числах, не равных нулю.

7.11. В некоторой стране 300 гор, причём все попарные расстояния между ними различны. С каждой горы поднимается дракон и летит на ближайшую к нему гору. Докажите, что ни на одну гору не может прилететь больше пяти драконов.

7.12. На столе лежат монеты разного радиуса. Докажите, что есть монета, касающаяся не более пяти других.

7.13. На сторонах квадрата расставлено 2011 чисел, причём каждое равно среднему арифметическому двух соседних с ним чисел. Докажите, что все числа равны.

7.14. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что найдётся ладья, бьющая не более двух других.

7.15. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющих одинаковое число знакомых в этой компании.

7.16. Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50?

7.17. Пусть элементами таблицы $n \times n$ являются нули и единицы. Пусть при этом выполнено следующие условие: если на некотором месте таблицы записан нуль, то сумма чисел столбца и строки, содержащих этот нуль, не меньше n. Докажите, что сумма всех n^2 чисел не меньше $\frac{n^2}{2}$.

7.18. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

7.19. Докажите бесконечность множества простых чисел вида $6m + 5$.

7.20. Существуют ли четыре числа, попарные разности между которыми равны 20, 20, 30, 40, 50 и 60?

7.21. В футбольной секции, кроме Артёма, занимается 6 человек. У каждых двух из этих шести различное число друзей в секции. Сколько друзей у Артёма?

7.22. На каждой из 15 сторожевых башен, расстояния между которыми попарно различны, находится по дозорному, который наблюдает ближайшую к нему башню. Докажите, что какую-то башню никто не наблюдает.

7.23. Байкер выезжает из своего родного города и отправляется в самый дальний от него город страны, затем — в город, самый дальний от этого города, и так далее. Расстояния между всеми городами различны. Докажите, что если байкер не вернулся в родной город после второго перехода, то он никогда в него не вернётся.

7.24. Можно ли на плоскости расположить 1000 спичек так, чтобы каждая спичка обоими концами упиралась строго внутрь других спичек?

7.25. В турнире по волейболу, прошедшем в один круг, 20 процентов всех команд не выиграли ни одной игры. Сколько было команд?

7.26. В Конгрессе у каждого конгрессмена не более трёх врагов (вражда взаимна). Докажите, что Конгресс можно разделить на две палаты так, что у каждого конгрессмена в своей палате будет не более одного врага.

7.27. Круг разделили 20 радиусами на 20 равных секторов: 10 синих и 10 зелёных. В синие сектора, начиная с некоторого, Иван Царевич подряд записывает против хода часовой стрелки числа от 1 до 10. В зелёные сектора, начиная с некоторого, Баба-яга записывает те же числа и таким же образом, но по ходу часовой стрелки. Если Иван Царевич найдёт полукруг, в котором записаны все числа от 1 до 10, Баба-яга даст ему волшебный клубок. Докажите, что Иван Царевич не останется без клубка.

7.28. Тридцать три богатыря выстроены прямоугольником по 3 человека в каждом поперечном ряду и по 11 человек в каждом продольном ряду. В каждом продольном ряду выбран самый высокий богатырь, а затем из отобранных трёх человек выбран самый низкий. С другой стороны, в каждом поперечном ряду выбран самый низкий богатырь, а затем среди отобранных одиннадцати выбран самый высокий. Кто из них двоих окажется выше?

7.29. В метро города N с любой станции можно проехать на любую другую. Докажите, что можно так выбрать станцию и закрыть её на ремонт (без права проезда через неё), что по-прежнему можно будет проехать с любой оставшейся станции на любую оставшуюся.

7.30. На плоскости проведено 60 прямых, причём никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. По этим прямым плоскость разрезана на куски. Докажите, что среди кусков найдётся не менее 20 треугольников.

7.31. На бесконечной плоской льдине сидит конечное число рыболовов, причём любая прямая, проходящая через двух из данных рыболовов, содержит ещё одного данного рыболова. Докажите, что все данные рыболовы сидят на одной прямой. Размер рыболова не учитывается.

7.32. На плоскости даны четыре точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что хотя бы один из треугольников с вершинами в этих точках не является остроугольным.

7.33. Докажите, что для любых 10 точек на плоскости найдётся пять непересекающихся отрезков, концы которых совпадают с данными точками.

7.34. Внутри круга радиуса 1 сидят восемь мух. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 1.

7.35. Учёный кот изобрёл машину, которая четвёрку чисел (a, b, c, d) превращает в четвёрку $(a - b; b - c; c - d; d - a)$. Докажите, что если в исходной четвёрке не все числа равны, то после некоторого числа нажатий кнопки одно их чисел получится больше 2012.

7.36. Шесть кругов расположены на плоскости так, что некоторая точка O лежит внутри каждого из них. Докажите, что один из этих кругов содержит центр некоторого другого.

7.37. На плоскости дано бесконечное множество прямоугольников, вершины каждого из которых расположены в точках с координатами $(0, 0)$, $(0, m)$, $(n, 0)$, (n, m), где n и m — целые положительные числа (свои для каждого прямоугольника). Докажите, что из этих прямоугольников можно выбрать два так, чтобы один содержался в другом.

7.38. Дано десять различных натуральных чисел. Все они дают в сумме 56. Найдите эти числа и докажите, что других нет.

7.39. В четырёх заданных точках на плоскости расположены прожекторы, каждый из которых может освещать прямой угол. Стороны этих углов могут быть направлены на север, юг, запад или восток. Докажите, что эти прожекторы можно направить так, что они осветят всю плоскость.

7.40. На плоскости даны 2011 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдётся

а) треугольник с вершинами в этих точках, не содержащий ни одной из оставшихся точек;

б) окружность, проходящая через три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек.

7.41. На плоскости дано $n > 3$ точек, причём не все они лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек.

7.42. На плоскости дано конечное множество многоугольников (не обязательно выпуклых), каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, имеющая общие точки со всеми этими многоугольниками.

7.43. На плоскости расположено несколько точек, все попарные расстояния между которыми различны. Каждую из этих точек соединяют с ближайшей. Может ли при этом получиться замкнутая ломаная?

Глава VIII. Инвариант

Инвариант и полуинвариант

Инвариант — термин, используемый в математике и физике, а также в программировании, обозначает нечто неизменяемое.

Все задачи, объединённые условным названием «инвариант», имеют следующий вид: даны некоторые объекты, над которыми разрешается выполнять определённые операции. Как правило, в задаче спрашивается, можно ли при помощи этих операций из одного объекта получить другой? Если можно, то нужно привести пример, как это сделать. Если нельзя, нужно доказать, что это невозможно.

Задача 1.
На доске написано двенадцать плюсов и тринадцать минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них минус, если они разные, и плюс в противном случае. Какой знак останется на доске после выполнения двадцати четырёх таких операций?

Рассмотрим три различных способа *решения* этой задачи.

1-й способ. Заметим, что в результате разрешённой операции число минусов либо не меняется, либо уменьшается на два. Следовательно, чётность числа минусов остаётся неизменной. Но первоначально число минусов было нечётным. Поэтому на доске останется знак «$-$».

2-й способ. Заменим каждый «$+$» числом 0, а каждый «$-$» числом 1. Заметим, что сумма двух стираемых чисел будет иметь ту же чётность, что и число, записываемое вместо них. Так как вначале сумма всех чисел была нечётной, то последнее оставшееся на доске число будет нечётным. Следовательно, на доске останется знак «$-$».

3-й способ. Заменим каждый «$+$» числом 1, а каждый «$-$» числом -1. Тогда разрешённая операция аналогична такой: стираются любые два числа и записывается их произведение. Видим, что произведение всех написанных на доске чисел остаётся неизменным. Так как вначале произведение равнялось -1, то в конце останется число -1, то есть знак «$-$».

Ответ: «$-$».

В каждом из рассмотренных способов есть величина (соответственно чётность количества минусов, чётность суммы чисел, произведение написанных чисел), которая не менялась при выполнении разрешённых операций. Такую величину в математике и называют инвариантом (например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади — площадь будет являться инвариантом).

В качестве инварианта могут выступать самые разные величины: чётность, сумма, произведение, остаток по некоторому модулю и т. д.

Если значения инварианта для начального и конечного объекта не равны, то ответ на поставленный вопрос отрицателен. Если же выбранный инвариант принимает одинаковые значения в начале и конце процесса, то это вовсе не означает, что начальный и конечный объекты могут быть получены друг из друга с помощью указанных операций: ясно только, что данный инвариант не может быть использован в этой задаче для отрицательного ответа на поставленный вопрос.

Наиболее часто встречаются следующие инварианты: остаток по некоторому модулю, раскраска, выделение части объекта, алгебраическое выражение, полученное из условия задачи.

Иногда применяется такое понятие, как ***полуинвариант*** — величина, которая в процессе изменения может только увеличиваться (уменьшаться).

Задача 2.

В одной вершине куба написано число 1, в остальных — нули. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться, чтобы все числа делились на $N > 1$?

Решение. Раскрасим вершины куба в шахматном порядке, чтобы на концах каждого ребра были вершины разного цвета. После этого сумма чисел в четырёх белых вершинах всегда будет отличаться на 1 от суммы чисел в чёрных вершинах, так как и к тем, и к другим прибавляется по единице. Если же все числа делятся на N, то и суммы четырёх таких чисел будут делиться на N, и поэтому не смогут отличаться на 1.

Ответ: нет.

Задача 3.

Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 27 монет?

Решение. После каждого такого размена количество монет увеличивается на 4, при этом остаток при делении на 4 у числа монет остаётся неизменным. Сначала у нас была 1 монета, значит, остаток всегда будет 1. У числа 27 при делении на 4 остаток 3, таким образом нельзя разменять одну монету на 27 монет.

Ответ: нет.

Задача 4.

Хулиган Вася порвал стенгазету, причём каждый попадающийся ему кусок он рвал на четыре части. Могло ли получиться 2009 кусков? А если каждый кусок рвался на 4 или 10 частей?

Решение. Нет. Количество кусков каждый раз изменяется на 3 или на 9, то есть остаток при делении на 3 является инвариантом. Первоначально была одна газета, значит, количество кусков должно иметь остаток 1 по модулю 3, а 2009 делится на 3 с остатком 2.

Ответ: нет в обоих случаях.

Задача 5.

На доске написано несколько букв A, B и C. Разрешается стереть две разные буквы и вместо них написать одну из этих трёх букв, отличную от стёртых. В результате нескольких таких операций на доске осталась одна буква. Докажите, что она не зависит от порядка, в котором производились действия.

Решение. Несложно увидеть, как влияет одна такая операция на количество букв каждого вида: стирая букву, мы уменьшаем количество букв этого вида на 1, дописывая — увеличиваем. Так как в каждой операции количество букв каждого вида изменяется ровно на 1, то тем самым меняется и их чётность. Значит, если чётность была в начале одинаковой, то одинаковой она останется и в конце. Но, согласно условию задачи, в итоге двух видов букв вообще не осталось (т. е. в конце их осталось 0 — чётное число), а третьего вида осталась одна буква (т. е. нечётное число). Таким образом, чётность количества букв оставшегося типа отличалась в конце (а значит, и в начале) от чётности количества букв двух других типов. Поэтому, вне зависимости от порядка действий, в конце останется буква того типа, чётность количества которого отличается от двух остальных.

Задача 6.

В ряд выписаны числа 1, 2, 3, ..., 100. Можно менять местами любые два числа, между которыми стоит ровно одно. Можно ли получить ряд 100, 99, 98, ..., 2, 1?

Решение. Заметим, что при разрешённых операциях меняются местами либо только чётные числа, либо только нечётные. При этом чётные числа всегда будут находиться на чётных местах. Значит, нельзя получить ряд, в котором на первом месте стоит 100.

Ответ: нет.

Задача 7.

На бесконечной шашечной доске на соседних клетках по диагонали стоят две шашки белого цвета. Можно ли поставить на доску чёрную шашку и произвольное количество белых шашек так, чтобы чёрная шашка «съела» все стоящие на доске белые шашки одним ходом?

Решение. Пронумеруем горизонтали шашечной доски так, чтобы одна из данных белых шашек стояла на линии с номером 2, а другая — с номером 3 (горизонтали нумеруются по порядку, в том числе и отрицательными числами) (рис. 29). При «съедании» любой белой шашки чёрная шашка перемещается на две горизонтали вверх или вниз, чётность номера линии при таком её перемещении не изменяется. Поскольку две данные белые шашки находятся на горизонталях разной чётности, то одним ходом их «съесть» невозможно.

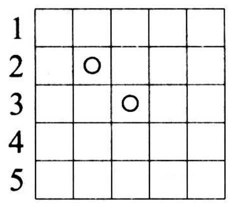


Рис. 29

Ответ: нет.

Задача 8.

К числу можно прибавлять сумму его цифр. Можно ли за несколько шагов получить из тройки число 20 092 009?

Решение. При каждом шаге число увеличивается на сумму цифр. Заметим, что число и сумма его цифр имеют одинаковый остаток при делении на 3. Тройка делится на 3 без остатка, значит, числа, которые можно получить из неё такой операцией, тоже будут делиться на 3.

Ответ: нет.

Задача 9.

Из Астрахани в Москву везли 80 т персиков, которые содержали 99% воды. По дороге они усохли и стали содержать 98% воды. Сколько тонн персиков привезли в Москву?

Решение. В этой задаче инвариантом выступает вес «сухого остатка», т.е. разница между весом персиков и весом содержащейся в них воды. В Астрахани в персиках содержался 1%, то есть 0,8 т «сухого остатка», в Москве эти 0,8 т составляли уже 2% от привезённых персиков. Тогда вес персиков $0{,}8 : 2 \cdot 100 = 40$ т. Вес уменьшился вдвое!

Ответ: 40.

Задача 10.

На доске выписаны числа от 1 до 100. Разрешается стереть два числа k, m и вместо них записать число $km + k + m$. Эта операция выполняется до тех пор, пока на доске не останется одно число. Определите его.

Решение. Докажем, что последнее число не зависит от порядка выполнения операции. Действительно, $km + k + m = (k+1)(m+1) - 1$, поэтому величина M, равная произведению всех выписанных на доске чисел, увеличенных на 1, остаётся постоянной, и последнее оставшееся число будет равно $M - 1$.

Ответ: $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 101 - 1 = 101! - 1$

Задача 11.

Дана таблица 8×8, в которой записаны числа от 1 до 64 (рис. 30). Закрашиваются 8 клеток так, что в каждой горизонтали и в каждой вертикали есть ровно одна закрашенная клетка. Докажите, что сумма чисел, записанных в этих 8 клетках, не зависит от набора закрашенных клеток.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Рис. 30

Решение. Пронумеруем столбцы в таблице слева направо цифрами от 1 до 8. Тогда числа первой строки представим в виде суммы 0 и номера столбца; числа, записанные во второй строке, как (8 + № столбца); в третьей строке: (16 + № столбца) и т. д. Поскольку в каждой строке и в каждом столбце закрашено ровно по одной клетке, то, независимо от выбора, сумма восьми чисел набора равна $(0 + 8 + 16 + \ldots + 56) + (1 + 2 + \ldots + 8) = 260$.

Задача 12.

Круг разделили на 6 секторов, в каждом лежит орех. За ход можно один орех передвинуть в соседний сектор. Можно ли собрать все орехи в одном секторе ровно за 20 ходов?

Решение. Пусть мы смогли собрать все орехи в одном секторе. Раскрасим сектора в шахматном порядке, при этом покрасим сектор, на котором лежат все орехи, в белый цвет. За каждый ход меняется цвет поля, на котором лежал один из орехов. За 20 ходов орехи поменяли цвет всего 20 раз. Заметим, что орехи, вначале лежащие в секторах белого цвета, должны были сделать чётное число ходов, чтобы попасть в указанный сектор. Те три ореха, что лежали в чёрных секторах, должны были сделать нечётное число ходов. Значит, сумма ходов должна была быть нечётной, что неверно для 20.

Ответ: нет.

Задача 13.

Круг разделён на 6 секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

Решение. Занумеруем сектора по кругу числами от 1 до 6 и для любой расстановки фишек рассмотрим величину S — сумму номеров секторов, в которых стоят данные нам 6 фишек (с учётом кратности). Очевидно, что при сдвиге фишки в соседний сектор соответствующее ей слагаемое в сумме S меняет чётность. Значит, если сдвигаются одновременно две фишки, то чётность величины S не меняется. Для начальной расстановки $S = 21$. Если же все фишки находятся в одном секторе с номером N, то $S = 6N$ — чётное число. Следовательно, из исходной расстановки нельзя получить расстановку, в которой все 6 фишек находятся в одном секторе.

Ответ: нет.

Задача 14.

Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 8k - 1$.

Решение. Рассмотрим остатки полных квадратов при делении на 8. Квадрат чётного числа может давать остатки 0 и 4, а нечётного — всегда даёт остаток 1, так как $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$. Сумма остатков трёх полных квадратов может быть или чётной, или 1, или 3, или 5. Но $8k - 1$ делится на 8 с остатком 7. Значит, это уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Задача 15.

Дан выпуклый четырёхугольник с диагоналями 10 см и 7 см. Докажите, что при разрезании такого четырёхугольника нельзя получившимися кусками замостить квадрат 6 см $\times$ 6 см.

Решение. Площадь такого четырёхугольника равна $5 \cdot 7 \sin y \leqslant 35$ (y — угол между диагоналями). Поэтому площадь фигуры, равносоставленной данному четырёхугольнику, не может превышать 35. Площадь же квадрата 6×6 равна 36.

Задачи для самостоятельного решения

8.1. В столовой стоят 50 стаканов, из них 25 — вверх дном. Сможет ли дежурный, переворачивая по 4 стакана, получить все стаканы стоящими правильно, то есть на донышке?

8.2. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 2009$. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них разность этих чисел. Можно ли добиться того, чтобы все числа на доске были нулями?

8.3. а) Можно ли операциями «прибавить 4» и «умножить на 3» получить из единицы число 1990? б) Какие числа можно получить?

8.4. Иван Царевич имеет два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу 21 голову, а второй — 4 головы, но тогда у Змея Горыныча отрастает 2008 голов. Заметим, что если у Змея Горыныча осталось, например, лишь три головы, то рубить их ни тем, ни другим мечом нельзя. Может ли Иван Царевич отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов?

8.5. На шахматной доске разрешается за один ход перекрашивать все клетки в одной строке или в одном столбце. Может ли после нескольких ходов остаться ровно одна белая клетка?

8.6. Круг разделён на 6 секторов, в которых по часовой стрелке стоят числа: а) 1, 0, 0, 0, 0, 0; б) 1, 0, 1, 0, 0, 0. Можно прибавлять по единице к числам из любых двух соседних секторов. Можно ли сделать все числа равными?

8.7. В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы — У и Ы, причём этот язык обладает интересным свойством: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ и УЫУУ, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не меняется при добавлении в любое место слова буквосочетаний УУ, ЫЫУУЫЫ и УЫЫУ.

а) Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и УЫУЫ имеют одинаковый смысл?

б) Одинаковый ли смысл у слов УЫЫ и УЫУ?

8.8. В алфавите имеются только две буквы — А и Я. Комбинации букв АЯ и ЯЯЯ, ЯА и ААЯ, ЯЯ и ААА в любом слове можно заменять друг на друга. Можно ли из слова АЯЯ получить слово ЯАА?

8.9. Фирма «Monster» плодит монстров. Если в настоящий момент у монстра m ручек и n ножек, то через минуту у него станет $(2n-m)$ ручек и $(2m-n)$ ножек. Когда число ручек или ножек у монстра становится отрицательным, монстр погибает. Сколько ручек и ножек должно быть у монстра, чтобы он существовал вечно?

8.10. На доске написаны числа от 1 до 20. Можно любую пару чисел (x, y) заменить на число $x+y+5xy$. Может ли в конце получиться 20 082 009?

8.11. 6 детей из 6-го класса стоят по кругу, и на каждом из них сидит комар. Время от времени какие-то 2 комара перелетают на соседнего ребёнка — один по часовой стрелке, а другой — против. Могут ли все комары собраться на одном несчастном?

8.12. На доске написаны числа от 1 до 20. Можно пару чисел (x, y) заменить на $x+y+xy$. Какое число останется после 19 операций?

8.13. В квадрате 10×10 стоят 100 ненулевых чисел. Можно менять знак у чисел в любом столбце или строке.

а) Всегда ли можно сделать все числа положительными?

б) Всегда ли можно сумму в каждом столбце сделать неотрицательной?

8.14. На доске написаны числа от 1 до 2009. Можно любую пару чисел (a, b) заменить на число a^2-b^2. Можно ли добиться, чтобы в конце (после 2008 операций) остался ноль?

8.15. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются 2 хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

8.16. а) В квадрате 4×4 клетка, соседняя по стороне с угловой, — чёрная, а остальные — белые. Можно перекрашивать все клетки любого столбца, строки или диагонали (не обязательно главной). Докажите, что такими операциями нельзя получить целиком белый квадрат.

б) То же для квадрата 8×8, у которого закрашена любая неугловая клетка.

8.17. На столе лежит куча из 1001 камня. Первый ход состоит в том, что из кучи выкидывают камень, а затем делят её на две. Каждый следующий ход состоит в том, что из какой-либо кучки, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из кучек снова делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучки, состоящие из трёх камней?

8.18. Докажите, что числа вида $2009n + 3$ и $2009n + 4$ нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

8.19. На доске выписано несколько чисел. Разрешается стереть два числа k, m и вместо них записать число $k \cdot m/(k + m)$.

Эта операция выполняется до тех пор, пока на доске не останется одно число. Докажите, что оно не зависит от порядка выполнения операции.

8.20. Весь комплект домино выложили по правилам игры. Известно, что первой стоит пятёрка. Какая цифра стоит последней?

8.21. В клетках таблицы 3×3 стоят нули. Разрешается прибавлять по единице ко всем клеткам любого квадрата 2×2. Можно ли получить данную таблицу (рис. 31)?

4	9	5
10	18	12
6	13	7

Рис. 31

8.22. В одном углу квадрата: а) 4×4, б) 3×3 стоит минус, в остальных — плюсы. Можно заменять все знаки в любом столбце или строке на противоположные. Можно ли получить таблицу из одних плюсов?

8.23. На доске написано 100 плюсов и 100 минусов. Можно заменять любые 2 минуса на плюс, плюс и минус на минус, два плюса на плюс. Докажите, что знак, который останется в конце, не зависит от порядка операций.

8.24. В ряд выписаны числа от 1 до 1991. Разрешается брать любые 4 подряд записанных числа и переставлять их в обратном порядке. Можно ли такими операциями получить ряд 1991, 1990, ..., 2, 1?

8.25. В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: A, B и C. Две амёбы любых двух разных типов могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Каков её тип, если исходно амёб типа A было 20 штук, типа B — 21 штука и типа C — 22 штуки?

8.26. Докажите, что уравнение $15x^2 - 7y^2 = 9$ не имеет решений в целых числах.

8.27. Докажите, что уравнение $x^2 - 7y = 10$ не имеет решений в целых числах.

Глава IX. Игры

Обычно в задачах, объединённых под названием «игры», два человека играют по правилам, заданным условиями задачи. Как правило, если не сказано иное, ходы делаются по очереди, игроки не могут пропустить ход. Вопрос чаще всего таков: кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнёр и как он должен играть? Это значит, нужно найти такой способ игры для одного из игроков, что независимо от игры другого он выигрывает. Указанный способ игры для одного из игроков называется выигрышной стратегией этого игрока. Необходимо не только сформулировать стратегию, но и доказать, что она ведёт к выигрышу. Ясно, что выигрышная стратегия (если она есть) может быть только у одного из игроков. Предполагается, что игроки не жульничают, что они одинаково умны и никто из них не будет поддаваться.

Игры-шутки

Игры-шутки — это игры, в которых исход не зависит от того, как делают ходы игроки. В таких задачах не нужно описывать стратегию, нужно лишь доказать, что выиграет тот или другой игрок.

Задача 1.
В таблице 6×9 двое по очереди зачёркивают по две клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. В этой игре выигрывает начинающий. Всего возможно 27 ходов, ведь в таблице 54 клетки. Последний ход нечётный, значит, его сделает первый игрок.

Ответ: первый.

Задача 2.
На столе 4 кучки с орехами, в двух — по 20 орехов, в двух других — по 15. За ход разрешено любую кучку разделить на две меньшие. Проигрывает тот, кто делает последний ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. В начальный момент на столе 4 кучки орехов, с каждым ходом число кучек увеличивается на одну. В момент окончания игры на столе 70 кучек по одному ореху. Значит, было сделано 66 ходов, последний ход сделает второй игрок, он проиграет.

Ответ: первый.

Задача 3.

На доске написано 20 единиц и 10 двоек. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковые, написать двойку, а если разные — единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра — единица, то выиграл первый игрок, если двойка — то второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Заметим, что чётность числа единиц на доске после каждого хода не изменяется. Действительно, если стёрли разные цифры и вместо них написали 1, то число единиц не изменилось. Если стёрли две одинаковые цифры и написали двойку, то число единиц либо не изменилось, либо уменьшилось на две. То есть независимо от того, как будут ходить игроки, число единиц не будет увеличиваться и будет чётно, значит, когда останется одна цифра, то это будет двойка. Поэтому выиграет второй игрок. Игра конечна, потому что число цифр при каждом ходе уменьшается.

Ответ: второй.

Задача 4.

Примерный ученик Саша купил тетрадь из 96 листов и пронумеровал страницы от 1 до 192. Хулиган Вася вырвал из тетради какие-то 25 листов. Саша предложил ему поиграть в такую игру: Вася вырывает ещё один любой лист из тетради, они складывают номера страниц на этих листах, и если получится чётный результат, то Вася покупает ему новую тетрадь, а если нечётный, то Саша решает за него контрольную по математике. Придётся ли Васе покупать Саше тетрадь?

Решение. Придётся. Сумма номеров страниц на одном листе всегда нечётна, вырванных листов чётное число, и сумма будет чётна.

Ответ: да.

Задача 5.

Числа от 1 до 25 выписаны в ряд. Двое по очереди ставят между ними плюсы и минусы. Когда поставлены все знаки, вычисляют значение выражения. Если ответ чётный, побеждает первый игрок, если нечётный, — второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Среди этих чисел 13 нечётных, а алгебраическая сумма нечётного числа нечётных чисел нечётна. Общий результат будет всегда нечётным, какие бы знаки ни расставили. Значит, всегда будет выигрывать второй игрок.

Ответ: второй.

Задача 6.

В клетчатом квадрате 5×5 центральная клетка (вместе с её границей) закрашена. Два игрока по очереди закрашивают ещё не закрашенные клетки. Клетки закрашиваются вместе с границей. Игрок проигрывает, если после его хода на любом луче с началом в центральной клетке есть хотя бы одна закрашенная точка, помимо начала луча. Кто из игроков может выиграть независимо от игры соперника?

Решение. Выигрывает второй игрок.

Рассмотрим момент, когда любой ход ведёт к проигрышу, то есть закрашивание любой незакрашенной клетки ведёт к тому, что на любом луче с началом в центральной клетке окажется закрашенная точка (помимо начала луча). В этот момент на каком-то луче l с началом в центральной клетке ещё нет закрашенных точек. Луч l пересекает границу квадрата 3×3 (рис. 32) в некоторой точке (назовём её X).

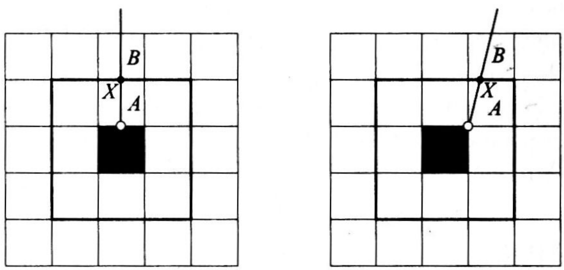


Рис. 32

Тогда найдутся соседние по стороне клетки A и B (где B примыкает стороной к границе квадрата 5×5, а A не примыкает), на границе которых находится X. (Другими словами, точку X, лежащую на границе, включают хотя бы две клетки, одна из которых касается границы квадрата 5×5 (B), а другая не касается (A), как показано на рисунке 32.) Луч l пересекает клетки A и B, поэтому они не закрашены. Для расположения пары клеток A, B существует два варианта (с точностью до поворотов и симметрии), и для каждого из этих вариантов есть луч с началом в центральной клетке, пересекающий только клетки A и B. Поэтому если кроме этих клеток есть ещё хотя бы одна незакрашенная, то её можно закрасить, не проигрывая. Таким образом, в рассматриваемый нами момент незакрашенной остаётся только пара клеток A и B. Следовательно, к этому моменту времени было сделано $24 - 2 = 22$ хода, то есть последний ход сделал второй игрок, а значит, первый игрок проиграет.

Ответ: второй.

Задача 7.

На доске написаны числа 25 и 36. Играют двое. За ход разрешается написать положительную разность двух каких-либо уже имеющихся чисел, которая ещё не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Заметим, что в этой игре любая позиция, которая может быть достигнута вообще, будет достигнута при игре вне зависимости от ходов игроков. Покажем, что могут быть достигнуты все числа от 1 до 36.

1-й ход: $36 - 25 = 11$, на доске 25, 36, 11.

2-й ход: $25 - 11 = 14$ ($36 - 11 = 25$, $36 - 25 = 11$, эти числа уже были, поэтому такие ходы делать нельзя), на доске 25, 36, 11, 14.

Рано или поздно игроки получат число 3 ($14 - 11 = 3$ или другим способом), потому что они могут продолжать игру, пока не получат все возможные числа. Но тогда они получат и 1, так как $11 - 3 - 3 - 3 = 2$, $3 - 2 = 1$. Получив 1, они могут получить все числа от 1 до 36, которых ещё не было. Так как повторяться им нельзя и два числа было изначально, то у них будет ровно **34** хода, т. е. игру закончит второй и выиграет.

Ответ: второй.

Симметрия

Во многих задачах применяется одна из основных идей нахождения выигрышных стратегий — идея осевой или центральной симметрии.

Нужно помнить, что если очередному симметричному ходу может помешать ход, сделанный противником, то стратегия не может считаться выигрышной. Например, если игрок предлагает осевую симметрию, а его соперник может своим ходом занять две клетки, симметричные относительно этой оси. Или если по правилам игры предыдущий ход соперника запрещает сделать симметричный ход (например, симметричное поле будет находиться «под боем»).

Задача 8.

На столе лежат в один ряд: а) 37 пирожных; б) 34 пирожных. Оля и Петя играют в игру: за один ход разрешается съесть одно пирожное или два лежащих рядом. Выиграет тот, кто съест последнее пи-

рожное. Кто выиграет при правильной игре в каждом из пунктов, если первой ходит Оля?

Решение. а) Выигрывает Оля. Первым ходом она должна съесть центральное (19-е) пирожное, а после этого «ходить» — брать пирожные — центрально симметрично.

б) Выигрывает Оля. Первым ходом она должна взять два центральных пирожных (17-е и 18-е, если считать слева (или справа)), а затем ходить центрально симметрично. Во всех случаях, согласно такой стратегии, после каждого хода Оли пирожные будут расположены симметрично, но в любой симметричной паре они не будут лежать рядом, и их нельзя будет взять одним ходом. Значит, последнее пирожное достанется Оле.

Ответ: а) Оля; б) Оля.

Задача 9.

Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном двадцатиугольнике. Из одной вершины можно проводить не более одной диагонали. Запрещается проводить диагонали, пересекающиеся с нарисованными ранее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он проводит диагональ, соединяющую диаметрально противоположные вершины двадцатиугольника. Тогда двадцатиугольник разбивается на две части, в каждой из которых 9 вершин, причём из одной части в другую диагонали идти не могут, так как они не должны пересекать первую диагональ. Поэтому теперь первому игроку достаточно отвечать на ходы второго игрока симметричными ходами в другой половине двадцатиугольника.

Ответ: первый.

Задача 10.

По кругу расставлено 100 фишек. За ход разрешается взять одну фишку или сразу две фишки, если они изначально стояли рядом. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Будем считать, что фишки равномерно расставлены на окружности. Разделим круг чертой так, чтобы по разные стороны от черты стояло одинаковое число фишек (это можно сделать, так как число фишек чётно, рис. 33). Если первый игрок берёт какие-то фишки, то второй берёт фишки, симметричные фишкам первого относительно центра круга. Например, если первый возьмёт фишки D и C, то второй — E и F, если первый возьмёт фишку C, то второй — фишку F. Тогда после каждого хода второго остаётся чётное число фишек, и оно постоянно уменьшается, значит, в конце концов, фишек не останется и второй выиграет.

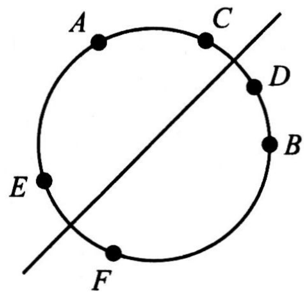


Рис. 33

Если бы число фишек было нечётно, то второй всё равно обладал бы выигрышной стратегией. Если первый игрок первым ходом возьмёт 1 фишку, то второй должен взять пару фишек, между которыми лежит точка, симметричная относительно центра фишке взятой первым игроком. Если первый игрок первым ходом возьмёт две фишки, то второму нужно взять одну, симметричную точке между двумя уже взятыми фишками. Тем самым задача сведётся к предыдущей.

Разберём неправильную стратегию, которая часто приводится при решении исходной задачи, когда предлагается делать ходы симметрично показанной на рисунке 33 прямой. Докажем, что симметрия относительно прямой не годится. Действительно, при такой осевой симметрии перед последним ходом 1-го игрока возможен вариант оставшихся фишек C и D, они симметричны, но 1-й игрок может их забрать сразу, одним ходом, и выиграет.

Ответ: второй.

Задача 11.

На доске 6 $\times$ 6 двое по очереди делают разрезы вдоль сторон клеток (каждым ходом — одна сторона, стороны на границе доски (таких 24) резать не разрешается). Выигрывает тот, кто первым разрежет доску на 2 (или более) части (вырезать дырку тоже считается победой). Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Выигрывает второй игрок, каждым ходом либо заканчивая игру (если это возможно), либо (если это невозможно) делая ход, центрально симметричный предыдущему ходу соперника.

Ответ: второй.

Задача 12.

Дана доска 11×11. Двое по очереди ставят на неё королей так, чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

Решение. Первому игроку надо первым ходом поставить короля в центр доски, а дальше ставить королей симметрично фигурам второго относительно центра доски. Он выиграет, потому что после хода второго симметричная клетка не занята и не под боем (так как оставшиеся пары симметричных клеток находятся не ближе чем на 3 клетки друг от друга). Штриховкой (рис. 34) указаны клетки, на которые уже нельзя ставить фигуры, учитывая, что короли бьют друг друга, если находятся на клетках, имеющих общий угол или сторону.

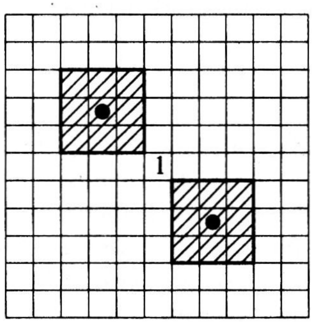


Рис. 34

(Осевая симметрия здесь не годится, т. к. противник может поставить короля так, что серый квадрат накроет ось симметрии.)

Ответ: первый.

Задача 13.

Даны два ящика яблок: в одном — 38 яблок, в другом — 52 яблока. За один ход разрешается взять любое количество яблок, но только из одного какого-нибудь ящика. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

Решение. Первый игрок первым ходом уравнивает количество яблок в ящиках, а потом повторяет все ходы за вторым, но только в другом ящике. То есть если второй взял сколько-то яблок из одного ящика, то первый берёт столько же яблок из другого ящика. Он сможет это сделать, т. к. каждый раз перед ходом второго яблок в ящиках поровну. Таким образом, яблоки закончатся после хода первого, и выиграет первый.

Ответ: первый.

Задача 14.

Имеется шоколадка 8×11. Играют двое. Первый ломает шоколадку на две части, затем второй ломает одну из частей ещё на две и т. д. Выигрывает тот, кто отломит дольку 1×1. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Первый игрок первым ходом ломает шоколадку на две одинаковые части 4×11, а потом каждый ход повторяет действия противника, ломая при этом так же, но другую часть шоколадки, до тех пор, пока второй не отломит полоску со стороной 1 (но не дольку, дольку нельзя отломить раньше, чем полоску). Таким образом, первый от этой полоски отламывает дольку 1×1 и выигрывает.

Ответ: первый.

Задача 15.

Правила игры в «Сумасшедшие крестики-нолики» совпадают с обычными, но игрок имеет право при очередном ходе ставить любой знак (крестик или нолик). Победу одерживает тот, кто первым закончит ряд из трёх одинаковых фигур (знаков). Кто из них выиграет наверняка — первый или второй?

Решение. Выиграет первый. Для этого он должен первым ходом поставить крестик в центральную клетку. Далее первый игрок своим очередным ходом заканчивает игру, если может. Если это невозможно, первый игрок ходит симметрично (относительно центра) последнему ходу второго игрока.

Ответ: первый.

Разбиение на пары, группы, фигуры

Задача 16.

Фишка находится на поле a1 шахматной доски (8×8 клеток). Двое по очереди двигают её на одну клетку по горизонтали или вертикали. На поля, на которых фишка уже побывала, ходить нельзя. Кто не

может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Замостим доску прямоугольниками 1×2 клетки (любым способом). Выигрывает первый игрок с помощью следующей стратегии: каждым своим ходом он должен передвигать фишку во вторую клетку прямоугольника 1×2 (в котором стоит фишка), тогда второй игрок каждый раз вынужден будет ходить в новый прямоугольник, давая возможность первому сделать очередной ход.

Ответ: выигрывает первый.

Задача 17.

В корзинке 44 банана. Двое по очереди забирают по 1, 2, 5 или 6 бананов. Проигрывает тот, а) кто взял последний банан; б) кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. а) Разобьём возможные ходы на две группы: $1-6$ и $2-5$. Первым ходом первый игрок должен взять один банан, а потом дополнять ход второго ходом из той же группы, но другого числа. Тогда после хода первого игрока всегда будет оставаться число бананов, делящееся на 7 с остатком 1. И последним ходом второй будет вынужден взять последний банан.

б) Первым ходом первый игрок берёт 2 банана, а потом действует по той же стратегии, что и в а). Тогда он сможет забрать последние бананы, потому что после его хода всегда будет оставаться число бананов, делящееся на 7 без остатка.

Ответ: в обоих случаях выигрывает первый.

Задача 18.

Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычёркивает 9 чисел (по своему выбору) из последовательности 1, 2, ..., 100, 101. После одиннадцати таких вычёркиваний останутся 2 числа. Первому игроку присуждается столько очков, какова положительная разница между этими оставшимися числами. Докажите, что первый игрок всегда сможет набрать по крайней мере 55 очков, как бы ни играл второй.

Решение. Первым ходом нужно вычеркнуть 9 чисел от 47 до 55. Остальные числа разбиваются на пары: $1-56$, $2-57$, ..., $46-101$. После каждого хода второго игрока первый может вычеркнуть числа таким образом, чтобы в каждой паре были вычеркнуты либо оба числа, либо ни одного. Таким образом, в конце останется пара чисел, разность которых равна 55.

Задача 19.

Двое играющих по очереди вычёркивают одно число из ряда 1, 2, ..., 27 до тех пор, пока не останется два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выиграл первый, иначе — второй. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Выигрывает первый игрок.

Разобьём эти числа на пять групп:

1) 5, 10, 15, 20, 25
2) 1, 6, 11, 16, 21, 26
3) 2, 7, 12, 17, 22, 27
4) 3, 8, 13, 18, 23
5) 4, 9, 14, 19, 24

Любое число первой группы делится на пять без остатка, числа второй группы при делении на пять дают в остатке единицу, числа третьей группы — двойку, числа четвёртой группы — тройку, числа пятой группы — четвёрку. Заметим, что остаток от деления суммы всех этих чисел на пять равен трём (сумма чисел первой группы делится на 5, суммы чисел четвёртой и пятой групп тоже делятся на пять, т. к. в каждой из этих групп по пять чисел, дающих в остатке одно и то же число, сумма чисел второй группы при делении на пять даёт в остатке единицу, а сумма чисел третьей группы — двойку. А $2 + 1 = 3$).

Выигрышная стратегия такова. Первым своим ходом первый игрок стирает число 27. Теперь остаток от деления суммы на 5 равен единице. После этого хода во второй группе шесть чисел, во всех остальных — по пять. Если второй игрок стирает число из третьей группы, то первый игрок следующим ходом стирает число из четвёртой группы, и наоборот. При этом сумма уменьшается на $(5k+2)+(5p+3) = 5(k+p+1)$, то есть на кратное пяти число. Поэтому остаток от деления суммы на пять в результате этих двух ходов не меняется. Как только второй игрок в первый раз стирает число в одной из первых двух групп, первый игрок стирает какое-нибудь число в другой из них. Но это он делает только один раз. (Рано или поздно этот случай наступит, так как всего в первой и второй группах одиннадцать чисел, а в итоге остаться должно только два. Следовательно, второму игроку в какой-то момент придётся стереть число в одной из этих групп.) При этом остаток от деления суммы на пять уменьшится на единицу, количество чисел в первой группе станет чётным, а количества чисел во второй и в пятой группах сравняются.

Если второй игрок стирает число из пятой группы, то первый стирает число из второй группы, и наоборот (кроме случая, описанного в предыдущем пункте). При этом сумма уменьшается на $(5k + 1) + (5p + 4) = 5(k + p + 1)$, то есть на кратное пяти число. Следовательно, остаток от деления суммы на пять в результате этих двух ходов не меняется.

Если второй игрок стирает число из первой группы, оставляя в ней нечётное количество чисел, то первый игрок стирает ещё одно число из первой группы. При этом остаток от деления суммы на пять не изменится, т. к. каждое число из первой группы делится на пять.

Итак, изначально остаток от деления суммы на пять был равен трём, после первого хода он стал единицей, а потом ровно один раз уменьшился на единицу, т. е. полученная в итоге сумма оказалась кратной пяти, чего и нужно было достичь первому игроку.

Другое решение, менее подробное:

1. Делим на группы по признаку остатков при делении на 5 (как в прошлом решении) и нумеруем группы цифрами от 0 до 4 в соответствии с этими остатками.

2. Заметим, что для выигрыша первому игроку подойдут варианты пар остатков $1/4$, $2/3$ и $0/0$. Заметим также, что проблема использования симметрии теперь только в том, что у нас 2 лишних числа — по одному из групп 1 и 2.

3. Предложим первым ходом взять число из группы, например, 1. При взятии вторым игроком чисел не из группы 0 первому игроку следует брать из парной группы; если из 0, то добирать второе лишнее из группы 2, или парное из группы 0, если лишнее уже взято. Если у нас нет пары, значит, все числа из групп 2 и 3 выбраны и просто берём число из группы 0.

Ответ: выигрывает первый игрок.

Дополнение до особой позиции

Одна из распространённых идей решения задач раздела «Игры» — это идея особых позиций.

Дадим определение: позиция называется особой, если игрок, делающий ход из неё, проигрывает при правильной игре противника. Все остальные позиции назовём неособыми. Из любой особой позиции можно попасть только в неособые. Из любой неособой позиции можно попасть хотя бы в одну особую. Таким образом, игрок, имеющий возможность ходить всегда в особые позиции, выигрывает.

Задача 20.

В коробке лежат 53 леденца. За один ход можно взять 1, 2, 3 или 4 леденца. Кто выиграет при правильной игре, если победителем считается тот, кто берёт последнюю конфету?

Решение. Рассмотрим момент, когда игра заканчивается. Проигрывает тот, кому нечего брать, значит, 0 конфет — особая позиция. В неё можно попасть из позиций 1, 2, 3, 4 конфеты, значит, они неособые. Особой тогда будет позиция 5, поскольку из неё можно попасть только в неособые. В позицию 5 можно попасть из позиций 6, 7, 8, 9, поэтому они неособые. Далее аналогично находим особые позиции 10, 15, $\ldots$, $5n$. Значит, первый игрок первым ходом получает позицию вида $5n$ (забирая 3 леденца), а потом каждый раз переходит в особые позиции.

Ответ: первый.

Задача 21.

Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его натуральных делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. В этой игре выигрывает тот, кто получит единицу, значит, 1 — особая позиция. В неё можно попасть из позиции 2, она неособая. 3 — особая позиция, так как из неё можно попасть только в неособые позиции 0 и 2. В 3 можно попасть из 4 и 6, они неособые. Аналогично особыми позициями являются все нечётные числа. Все чётные числа являются неособыми. Действительно, из нечётной позиции можно попасть только в чётную, так как все делители нечётного числа нечётны. Из любой чётной позиции всегда можно попасть в нечётную, выбрав в качестве делителя число 1. Побеждает первый, если он каждым ходом будет уменьшать число так, чтобы получать нечётные числа.

Ответ: первый.

Задача 22.

Даны две кучки по 7 и 13 камней. Играют двое. За ход можно взять любое количество камней от 1 до 4, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

Решение. Особые позиции в этой игре будем записывать как пары чисел, равные числу камней в каждой из двух кучек. Первой особой позицией является $(0, 0)$, т. к. игрок, делающий ход из этой позиции, проигрывает. Отметим неособые позиции, из которых можно попасть в позицию $(0, 0)$.

Это $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(0,4)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(4,0)$ (см. таблицу а). Тогда позиции $(5,0)$, $(0,5)$ и $(1,1)$ — особые, т. к. из них можно попасть только в неособые. Отметим следующие неособые позиции (см. таблицу б). Представим дальнейший перебор позиций в виде последовательных таблиц (см. таблицы в, г).

Начальная позиция $(13,7)$ — неособая (см. таблицу г), значит, первый игрок имеет выигрышную стратегию. Первым ходом он берёт из кучки с 13 камнями 1 камень, перейдя в позицию $(12,7)$. Далее каждым своим ходом он переводит игру в особую позицию.

а)

7											
6											
5											
4	н										
3	н										
2	н										
1	н										
0	о	н	н	н	н						
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

б)

7	н										
6	н										
5	о	н	н	н	н						
4	н	н				н					
3	н	н				н					
2	н	н				н					
1	н	о	н	н	н	н					
0	о	н	н	н	н	о	н	н	н	н	
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

в)

7	н	н												
6	н	о	н	н	н	н								
5	о	н	н	н	н	о	н							
4	н	н	н			н	н							
3	н	н	н			н	н							
2	н	н	о	н	н	н	н							
1	н	о	н	н	н	н	о	н	н	н	н			
0	о	н	н	н	н	о	н	н	н	н	о	н	н	н
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**

г)

7	н	н	о	н	н	н	н	о	н	н	н	н	о	н
6	н	о	н	н	н	н	о	н	н	н	н	о	н	н
5	о	н	н	н	н	о	н	н	н	н	о	н	н	н
4	н	н	н	н	о	н	н	н	н	о	н	н	н	н
3	н	н	н	о	н	н	н	н	о	н	н	н	н	о
2	н	н	о	н	н	н	н	о	н	н	н	н	о	н
1	н	о	н	н	н	н	о	н	н	н	н	о	н	н
0	о	н	н	н	н	о	н	н	н	н	о	н	н	н
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**

Ответ: выигрывает первый.

Задача 23.

Ферзь стоит на поле c1. За ход его разрешается передвинуть на любое число полей вправо, вверх или по диагонали «вправо-вверх». Выигрывает тот, кто поставит ферзя на поле h8. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Особая позиция h8. Неособые позиции, из которых можно попасть в h8, показаны в таблице а.

а)

8	–	–	–	–	–	–	–	о
7							–	–
6						–		–
5					–			–
4				–				–
3			–					–
2		–						–
1	–							–
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**

Следующие особые позиции g6 и f7, отметим неособые позиции в таблице б. Продолжая, получим таблицу в.

б)

8	–	–	–	–	–	–	–	о
7	–	–	–	–	–	о	–	–
6	–	–	–	–	–	–	о	–
5				–	–	–	–	–
4			–	–	–	–	–	–
3		–	–	–		–	–	–
2	–	–	–			–	–	–
1	–	–				–	–	–
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**

в)

8	–	–	–	–	–	–	–	о
7	–	–	–	–	–	о	–	–
6	–	–	–	–	–	–	о	–
5	–	–	о	–	–	–	–	–
4	о	–	–	–	–	–	–	–
3	–	–	–	–	о	–	–	–
2	–	–	–	–	–	–	–	–
1	–	–	–	о	–	–	–	–
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**

Начальная позиция c1 — неособая, значит, 1-й игрок имеет выигрышную стратегию. Первым ходом он сдвигает ферзя в клетку e3, перейдя в особую позицию. Далее каждым своим ходом он переводит игру в особую позицию.

Ответ: выигрывает первый.

Задача 24.

На столе лежат две кучки конфет: 20 штук и 21 штука. За ход можно либо съесть 2 конфеты из любой кучки, либо переложить 1 конфету из первой кучки во вторую. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Так как сумма конфет в кучках остаётся нечётной, то некоторые позиции невозможны, заштрихуем их. Позиции в игре будем указывать в виде пар чисел (n, m), где n — количество конфет в первой кучке, а m — во второй. Начальная позиция в игре имеет вид $(n, n+1)$. Докажем, что второй игрок очередным ходом всегда может получить позицию того же вида.

Особая позиция (в конце игры) — $(0, 1)$. Разрешены ходы на 2 клетки вниз и на 2 клетки влево, перекладывание означает ход влево-вверх по 1 клетке. Из таблицы на рисунке 35 видно, что начальная позиция тоже особая. Значит, первый проигрывает.

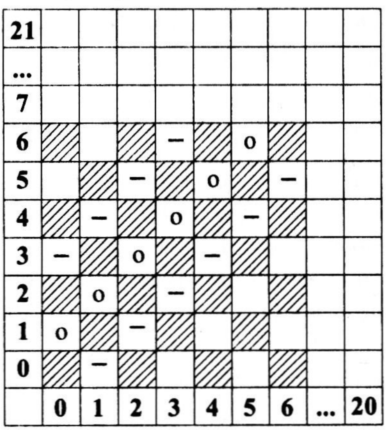


Рис. 35

Если первый игрок берёт 2 конфеты из первой кучки, то второй берёт 2 конфеты из второй кучки и вновь получает позицию вида $(n, n+1)$. Если первый берёт две конфеты из второй кучки, значит, в первой была, по крайней мере, 1 конфета и второй перекладывает её во вторую кучку, получая позицию вида $(n, n+1)$. Если первый перекладывает конфету, то второй берёт из второй кучки (там на 3 конфеты больше) две конфеты, также получая позицию вида $(n, n+1)$. Таким образом, если первый может сделать ход, то и второй может сделать ход. Количество конфет уменьшается, поэтому когда-нибудь после хода второго возникнет позиция $(0, 1)$, и первый проиграет.

Ответ: выигрывает второй.

Первый ход

Иногда после первого хода начинающего игрока результат игры уже не зависит от того, какие ходы будут делать соперники.

Задача 25.

Саша и Юра по очереди пишут на доске натуральные числа. После 10-го хода они считают произведение написанных чисел, и если последняя цифра результата 0, то выигрывает Саша, а если любая другая, то Юра. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнёр, и как ему для этого надо играть?

Решение. Выиграет Саша. Для этого ему достаточно написать одно из чисел, делящихся на 10.

Ответ: выигрывает первый.

Задача 26.

Играют двое. Первый пишет на доске любую цифру. Второй приписывает справа к ней некоторую цифру. Затем первый приписывает слева к получившемуся числу ненулевую цифру. Первый стремится к тому, чтобы получившееся на доске трёхзначное число делилось на 11, а второй хочет ему помешать. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Выигрывает второй игрок. Он пишет ту же цифру, что и первый игрок. Тогда, какую бы цифру своим следующим ходом ни поставил первый игрок, в итоге получится число вида $100x + 10y + y = 100x + 11y$. $11y$ делится на 11. Но $100x$ не может делиться на 11, т. к. x — цифра, не равная нулю. Следовательно, получившееся число не делится на 11, т. е. выиграл второй игрок.

Ответ: выигрывает второй.

Задача 27.

Дима и Витя играют в такую игру: они по очереди выписывают на доску делители числа 50! так, что в любой момент в любой паре выписанные числа взаимно просты. Если никакой из делителей числа

выписан быть не может — игрок не может сделать ход и проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его соперник?

Решение. Два числа взаимно просты, если у них нет общих простых множителей. Первый игрок своим ходом может написать произведение всех простых множителей, кроме одного. Тогда у второго игрока останется всего две возможности — написать 1 или этот простой множитель в какой-то степени. Следующим ходом первый игрок завершит игру.

Ответ: выигрывает первый.

Задача 28.

Прямоугольник размером 3×20 со сторонами, нарисованными чёрным цветом, разбит синими линиями на клетки 1×1. Двое по очереди перекрашивают в чёрный цвет синие отрезки, соединяющие две стороны исходного прямоугольника. Запрещается перекрашивать один отрезок дважды. Проигрывает тот, после хода которого впервые появится клетка, все стороны которой чёрные. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнёр, и как ему для этого надо играть?

Решение. Назовём отрезки, идущие вдоль короткой стороны прямоугольника 3×20, вертикальными, а вдоль длинной — горизонтальными. Первый должен своим первым ходом провести вертикальный отрезок, отделяющий от прямоугольника 3×20 полоску 3×1. После этого горизонтальные ходы становятся проигрышными, а вертикальных ходов остаётся ровно 18, причём очередь хода — за вторым игроком. Стало быть 18-й ход останется за первым игроком. Сделав его, первый победит.

Ответ: выигрывает первый.

Задача 29.

Прямоугольник размером 5×21 со сторонами, нарисованными чёрным цветом, разбит синими линиями на клетки 1×1. Двое по очереди перекрашивают в чёрный цвет синие отрезки, соединяющие две стороны исходного прямоугольника. Запрещается перекрашивать один отрезок дважды. Проигрывает тот, после хода которого впервые появится клетка, все стороны которой чёрные. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнёр, и как ему для этого надо играть?

Решение. Назовём отрезки, идущие вдоль короткой стороны прямоугольника 5×21, вертикальными, а вдоль длинной — горизонтальными. Первый должен своим первым ходом провести вертикальный отрезок, отделяющий от прямоугольника 5×21 полоску 5×1. После этого остаются возможными ровно один непроигрышный горизонтальный ход (если один горизонтальный ход уже сделан, то второй ведёт к немедленному проигрышу) и 19 вертикальных, причём очередь хода — за вторым игроком. Стало быть, 20-й ход останется за первым игроком. Сделав его, первый победит.

Ответ: выигрывает первый.

Задача 30.

На доске записано квадратное уравнение $*x^2 + *x + * = 0$, где вместо коэффициентов квадратного трёхчлена написан символ $*$. Первый из играющих называет любые три числа, второй расставляет их по своему выбору вместо символов $*$. Может ли первый добиться, чтобы полученное уравнение имело ровно два различных рациональных корня, или второй всегда сможет ему помешать?

Решение. Первый игрок выиграет, если назовёт попарно различные целые числа A, B, C, сумма которых равна нулю (например, 1, -3, 2). Тогда квадратное уравнение $Ax^2 + Bx + C = 0$ имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = C : A$, причём $x_1 \neq x_2$.

Ответ: первый может.

Задача 31.

На полоске размером 1×8 в 4-й, 6-й и 8-й клетках стоят фишки. Каждым ходом любую из них можно сдвинуть влево на любое число клеток так, чтобы не перескочить через другую фишку и не попасть на занятое место. Играют двое, ходят поочерёдно. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение 1.

В этой игре при правильной стратегии выигрывает первый игрок. Первый игрок перемещает левую фишку на вторую клетку. Если второй игрок передвигает левую фишку (а её некуда передвинуть, кроме как на первую клетку), то первый игрок догоняет правой фишкой среднюю, после чего спокойно доводит игру до победного конца: левая фишка дошла до края полосы, а правая фишка стоит рядом со средней; поэтому второму игроку не остаётся ничего, кроме как ходить средней фишкой. Первому же игроку нужно будет просто каждый раз догонять правой фишкой среднюю, пока они не дойдут до края.

Если второй игрок перемещает правую фишку (а её некуда переместить, кроме как на седьмую клетку, ведь на шестой клетке стоит средняя фишка), то первый игрок двигает левую фишку на первую клетку. Дальше ему, как и в предыдущем случае, останется только догонять среднюю фишку правой.

Если второй игрок передвигает среднюю фишку на некоторое число клеток, то первый игрок двигает правую фишку на то же число клеток, сохраняя дистанцию в одну клетку между средней и правой фишками. Полученная в результате этих двух ходов позиция будет отличаться от исходной только расстоянием между левой и средней фишками. Всё также ходы левой и правой фишками будут приводить второго игрока к неминуемому поражению. Если он будет ходить только средней фишкой, то рано или поздно она упрётся в левую, и второму игроку всё же придётся совершить проигрышный для себя ход левой или правой фишкой.

Решение 2.

Рассмотрим другую идею решения, менее подробно разобранную. Можно попробовать представить позиции как тройки чисел: первое число — на сколько клеток можно сдвинуть левую фишку до границы, второе — на сколько клеток можно сдвинуть среднюю фишку до границы, третье — правую фишку. Тогда начальной позиции соответствует тройка $(3, 1, 1)$.

Докажем, что эта позиция не особая. Особой позицией будет очевидно $(0, 0, 0)$. Тогда будем строить другие особые позиции от неё:

— позиции вида $(0, 0, n)$, $n > 0$ являются неособыми, т. к. переходят в особую позицию $(0, 0, 0)$;

— $(0, 1, 0)$ — особая, т. к. переходит только в неособую позицию;

— позиции вида $(0, 1, n)$, $n > 0$, являются неособыми, т. к. переходят в особую позицию $(0, 1, 0)$;

— $(0, 2, 0)$ — особая, т. к. переходит только в неособые позиции.

Далее получаем: позиции вида $(0, n, 0)$ — особые, а $(0, n, m)$, $m > 0$ — неособые.

Аналогично для троек с первым числом 1: позиции $(1, n, 0)$ — неособые, поэтому $(1, 0, 1)$ — особая; позиции вида $(1, 0, n)$, $n > 1$ — неособые, значит, $(1, 1, 1)$ — особая. Отсюда получаем, что позиции вида $(1, 1, n)$, $n > 1$ — неособые. Позиция $(1, 2, 1)$ — особая, $(1, 2, n)$, $n > 1$ — неособые.

Получаем, что позиции вида $(1, n, 1)$ — особые, $(1, n, m)$, $m > 1$ — неособые. Начальная позиция $(3, 1, 1)$ переводится в особую позицию $(1, 3, 1)$, значит, является неособой, и первый игрок выиграет при правильной игре.

Ответ: выигрывает первый.

Задача 32.

Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на 2 или 3 часа вперёд. В начале игры часовая стрелка указывает 12, а победителем объявляется тот, после чьего хода она укажет на 6. Стрелка может сделать несколько оборотов, прежде чем остановится на цифре 6. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение 1.

Эту игру выигрывает первый игрок. Первым ходом он переводит стрелку на два часа. Если второй игрок передвигает стрелку на четвёртое деление, то первый игрок передвигает стрелку ещё на два деления вперёд, и стрелка попадает на шесть часов, то есть первый игрок выигрывает.

Если второй игрок передвигает стрелку с двух часов на пять, то первый игрок переводит стрелку на восьмое деление. Если второй игрок двигает стрелку на три часа вперёд, то первый игрок переводит её на два часа вперёд, и наоборот, если второй игрок двигает стрелку на два часа вперёд, то первый игрок переводит её на три часа вперёд. Тогда после третьего хода первого игрока стрелка будет указывать на один час.

После третьего хода второго игрока стрелка часов будет показывать либо на три, либо на четыре часа. Первому игроку останется передвинуть стрелку на три или на два часа соответственно, чтобы выиграть.

Решение 2.

Рассмотрим другую идею решения, менее подробно разобранную, — с точки зрения особых позиций. Очевидно, что особая позиция 6, неособые 3 и 4. Значит, особая 1, неособые 10 и 11, особая 8, неособая 5, особая 2 и неособая 12. То есть первый игрок побеждает, начиная с хода 2. (Можно по-другому записать это решение. Например, сказать, что особыми будут те позиции, из которых можно перейти только в неособые, а неособыми соответственно те, из которых можно попасть в особую, и дальше просто привести таблицу с клетками.)

Ответ: выигрывает первый.

Задача 33.

Играют двое. Первый ставит на плоскости красную точку, второй в ответ ставит на свободные места 10 синих точек. Затем опять первый ставит на свободное место красную точку, второй ставит на свободные места 10 синих и т. д. Первый считается выигравшим, если какие-то три красные точки образуют правильный треугольник. Может ли второй ему помешать?

Решение. Второй не может помешать. Пусть первый ставит точки на прямую, заботясь только о том, чтобы не попасть в уже поставленную точку (это всегда возможно, так как на прямой бесконечно много точек). Пусть уже поставлено k красных точек на прямой. Добавление одной новой точки на этой же прямой увеличивает количество мест, куда можно поставить красную точку, чтобы с уже поставленными она образовала правильный треугольник, на $2k$. Новая точка и любая из старых — это вершины одной из сторон, к ним можно добавить двумя способами вершину правильного треугольника. Итак, количество мест, куда можно поставить точку, чтобы образовался правильный треугольник, после постановки $(k+1)$-й красной точки равно сумме арифметической прогрессии $2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = k(k + 1)$. Число синих точек после этого хода становится равным $10(k+1)$, что при $k > 10$ уже меньше, чем число возможных мест для красной точки, создающей правильный треугольник.

Таким образом, у первого игрока после 12-го хода всегда есть возможность добиться цели.

Ответ: второй не может помешать.

Передача хода

Задача 34.

В казино Остап Бендер играет с крупье в фишки. Игроки по очереди (крупье — первым, Остап — вторым) перекладывают фишки из банка на стол. За один ход можно переложить не меньше одной фишки и не больше, чем их уже есть на столе. Побеждает тот, кто переложил из банка на стол последнюю фишку. До начала игры на столе лежат 10 фишек, а банк не пуст. У Остапа в кармане лежат 10 фишек, которые он может до начала игры незаметно подбросить: некоторые (возможно, ни одной) — на стол, а некоторые (возможно, ни одной) — в банк. Докажите, что он сможет выиграть.

Решение. Допустим, что Бендер положил все свои 10 фишек в банк, после чего в банке стало a фишек. Если это позволяет ему выиграть — всё в порядке. Если же нет, то выигрышная стратегия есть у крупье. Пусть, следуя этой стратегии, крупье должен первым ходом переложить n фишек. Тогда в ситуации, когда в банке $(a - n)$ фишек, а на столе $(10 + n)$ фишек, проигрывает тот, чья очередь делать ход. Но, поскольку по условию $n \leqslant 10$, именно в такое положение Остап поставит крупье, если до начала игры подбросит на стол n фишек, а в банк — $(10 - n)$ фишек. Идея такого решения хорошо известна шахматистам — это передача хода.

Задача 35.

На доске выписаны натуральные числа от 1 до 1000. За ход можно вычеркнуть ещё не вычеркнутое число и все его делители. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что у второго нет выигрышной стратегии.

Решение. Рассмотрим ту же игру на множестве чисел от 2 до 1000. Если на этом множестве у второго игрока есть выигрышная стратегия, то первый в настоящей игре первым ходом вычёркивает 1, тем самым он становится вторым игроком на множестве от 2 до 1000 и выигрывает. Если у второго нет выигрышной стратегии на множестве от 2 до 1000, то первый в настоящей игре 1-м ходом вычёркивает то число, которое приводит к выигрышу на множестве от 2 до 1000, и все его делители, в том числе 1. (Если первый делает такой 1-й ход, то игра на множестве от 2 до 1000 ничем не отличается от настоящей.) Тогда второй остаётся в своём положении без выигрышной стратегии на множестве от 2 до 1000. То есть в обоих случаях у второго нет выигрышной стратегии.

Геометрические игры

Задача 36.

На плоскости нарисованы 2002 вектора. Два игрока по очереди выбирают по одному вектору до тех пор, пока они не кончатся. Проигрывает тот, у кого сумма выбранных им векторов имеет меньшую длину. Сможет ли первый игрок не проиграть, независимо от действий второго?

Решение. Первый игрок может обеспечить, по крайней мере, ничью. Если все 2002 вектора равны, то ничья будет, как бы ни играли игроки, так что добиться победы ему не всегда удастся.

Пусть сумма всех 2002 векторов равна вектору A. Введём на плоскости декартову систему координат так, чтобы ось абсцисс была сонаправлена с вектором A (если $A = 0$, то ось абсцисс выбираем произвольным образом). Начинающий каждым своим ходом может выбирать из оставшихся к этому моменту векторов тот вектор, который имеет наибольшую абсциссу. Тогда в конце игры у него сумма векторов будет иметь не меньшую абсциссу, чем у противника, причём и по абсолютной величине у него абсцисса будет не меньше, а ордината y (по модулю) такая же, как у противника (так как сумма всех абсцисс неотрицательна, а сумма всех ординат равна 0). Начинающий при такой игре заведомо не проиграет.

Ответ: да.

Задача 37.

Игра происходит на бесконечной плоскости. Играют двое: один передвигает одну фишку-волка, другой — 50 фишек-овец. После хода волка ходит одна какая-нибудь из овец, затем, после следующего хода волка, опять какая-нибудь из овец и т. д. И волк, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более, чем на один метр. Верно ли, что при любой первоначальной позиции волк поймает хотя бы одну овцу?

Решение. Введём на плоскости систему координат. Пусть k-я овца имеет координаты $(4k; 0)$, $k = 1, 2, \ldots, 50$, а начальное положение волка таково, что за один ход он не может достичь ни одной овцы. Опишем стратегию овец. Овцы будут ходить только по прямым $x = 4k$. Пусть перед ходом овец волк находится в точке $(x; y)$ одной из вертикальных полос $|x - 4k| < 2$ (эти полосы не пересекаются). Тогда ходит овца с номером k, причём если эта овца находится в точке $(4k; z)$, то она перемещается в точку $(4k; z + 1)$, если $z > y$, и в точку $(4k; z - 1)$, если $z \leqslant y$ (т. е. k-я овца удаляется от волка на 1 вдоль оси Oy). Ясно, что после этого волк за один ход снова не может поймать ни одной овцы. Если волк перед ходом овец находится вне полос $|x - 4k| < 2$, то овцы могут сделать любой ход. Придерживаясь этой стратегии, овцы смогут добиться того, что ни одна из них не будет поймана.

Ответ: нет.

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Двое по очереди кладут на круглый стол пятаки (без наложений). Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто выигрывает при правильной игре?

9.2. На поверхности шарообразной планеты расположено 8 за́мков (за́мки будем считать точками, причём никакие четыре из них не лежат на одной окружности). Два крота по очереди соединяют эти замки прямолинейными туннелями (за один ход прорывается ровно один новый туннель из любого замка в любой другой, вначале никаких туннелей нет вообще, два замка можно соединять только одним туннелем). Проигрывает тот крот, после хода которого можно будет попасть по туннелям из каждого замка в любой другой, не заходя в другие замки. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий крот или его соперник?

9.3. В строку записано несколько минусов. Двое по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюсы. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выигрывает при правильной игре?

9.4. Два игрока по очереди ставят на шахматную доску ладьи (за один ход — одну ладью) так, чтобы они не били друг друга. Тот, кто не сможет поставить ладью, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

9.5. На столе лежат 20 фантиков. Двое по очереди берут 1 или 2 фантика. Побеждает тот, кто возьмёт последний фантик. Кто победит при правильной игре — первый или второй игрок?

9.6. Имеется две кучки скрепок, по 11 в каждой. За ход разрешается взять одну скрепку из любой кучки либо по одной скрепке из каждой кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выигрывает при правильной игре?

9.7. В 10 коробках лежит 20 конфет. Даша и Паша берут по очереди по одной конфете. Начинает Даша. Докажите, что мальчик может брать так, что последние 2 конфеты будут из одной коробки.

9.8. В коробке 21 конфета. Малыш с Карлсоном играют в такую игру: они по очереди съедают 1, 2 или 3 конфеты. Выигрывает тот, кто съел последнюю конфету. Кто выиграет при правильной игре, если Карлсон начинает?

9.9. Маша и Даша взяли в долг пирожные и стали их есть, играя при этом в следующую игру: за один ход игрок может съесть от 1 до 6 пирожных на свой выбор. Выигрывает тот, кто съедает последнее пирожное, а проигравший платит. Кто из них сможет победить, начинающий или соперник, если вначале было а) 40 пирожных; б) 35 пирожных?

9.10. На столе лежат в один ряд: а) 25 пирожных; б) 24 пирожных. Вася и Петя играют в игру: за один ход разрешается съесть одно пирожное или два, лежащих рядом. Выиграет тот, кто съест последнее пирожное. Кто выиграет при правильной игре в каждом из пунктов?

9.11. Вася и Петя играют на доске 10×10 в такую игру. У Васи есть много квадратиков размером в одну клетку, у Пети есть много уголков из трёх клеток (рис. 36). Они ходят по очереди: сначала Вася кладёт на доску свой квадратик, затем Петя — свой уголок, потом Вася кладёт ещё квадратик и так далее. Фигуры кладутся строго по клеткам, класть фигуры поверх других нельзя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Вася утверждает, что он всегда сможет выиграть, как бы ни старался Петя. Прав ли Вася?

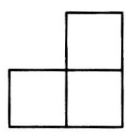


Рис. 36

9.12. Есть 3 кучки бусин. В одной из них 2007 бусин, в другой — 2008 бусин, а в третьей — 2009 бусин. За один ход можно разделить одну кучку на две меньших (если в кучке было больше одной бусины). Двое ходят по очереди. Проигрывает тот, кто делает последний ход. Кто из них выиграет при правильной игре?

9.13. В прямоугольной полоске 1×103 в крайних клетках стоят фишки (одна белая, другая чёрная). Двое по очереди ходят фишкой своего цвета вправо или влево на любое количество клеток от 1 до 4. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, если перепрыгивать через фишку противника нельзя?

9.14. Имеется две кучи: 20 и 30 камней. За один ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучи. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выигрывает при правильной игре?

9.15. Двое по очереди закрашивают клетки доски $n \times n$. Первый каждый раз закрашивает по одной клетке, а второй — по три, причём таким образом, чтобы какая-то одна из этих трёх имела по общей стороне с двумя другими. Каждую клетку можно закрашивать только один раз. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре: первый или второй?

9.16. На крайней правой клетке полоски 1×40 стоит фишка. Хулиган Вася и примерный мальчик Петя по очереди двигают фишку в любую сторону на такое количество клеток, которое ещё не встречалось в предыдущих ходах. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

9.17. Коля и Вова выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Вова. Докажите, что какие бы цифры он ни писал, Коля всегда сможет добиться, чтобы полученное число делилось на 9.

9.18. Два программиста играют в следующую игру. Первый выбирает одно из двух чисел 11 или 17 и вводит его в компьютер. Затем второй выбирает одно из чисел 11 или 12 и вводит его (второй больше не участвует в игре). Компьютер складывает эти числа. Через минуту компьютер к полученному результату снова прибавляет число, введённое вторым, ещё через минуту делает то же самое и т. д. Всего компьютер выполняет сложение 1000 раз, после чего выключается. Первый имеет право в любой момент переставлять цифры последнего из имеющихся на экране чисел. Если число на экране хотя бы один раз станет трёхзначным, выигрывает второй, иначе — первый. Кто выиграет при правильной игре?

9.19. Двое по очереди ломают шоколадку 5×7. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

9.20. Имеется две кучки камней: а) по 2009 камней в каждой кучке; б) в одной кучке 2008, а в другой — 2009 камней. За один ход разрешается взять любое количество камней, но лишь из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может ходить. Кто выигрывает при правильной игре?

9.21. У ромашки: а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. Играют двое. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

9.22. Дана доска 11×11, в каждой клетке которой стоит по шашке. За один ход можно снять любое количество подряд идущих шашек в столбце или в строке. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

9.23. Дана доска 8×8. Двое по очереди выставляют на неё коней так, чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

9.24. Дана доска в виде трёх пересекающихся шестиугольников, разбитая на треугольники (рис. 37). Двое играют в следующую игру: первый своим первым ходом ставит короля на любую клетку, после чего, начиная со второго игрока, они поочерёдно двигают его по доске в клетку, имеющую с предыдущей общую границу. По правилам запрещается ходить в ранее посещённые клетки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

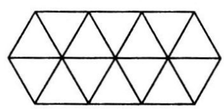


Рис. 37

9.25. Двое по очереди ставят шахматных слонов в клетки доски 8×8 так, чтобы слоны не били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

9.26. Двое по очереди ставят в клетки доски 9×9 крестики и нолики. Первый ставит крестики, второй — нолики. Очки, набранные первым игроком к концу игры, — количество строчек и столбцов, в которых больше крестиков, а очки второго — количество строчек и столбцов, в которых больше ноликов. Побеждает тот, у кого больше очков. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

9.27. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, которое меньше его. Выигрывает тот, кто получит 1000. Каким игроком хотели бы вы быть — первым или вторым?

9.28. В коробке лежит 300 спичек. За ход разрешается взять из коробка любое натуральное число спичек, не превосходящее половины лежащих в нём спичек. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

9.29. Дана доска 8×8. Двое играют в следующую игру: первый своим первым ходом ставит короля на любую клетку, после чего, начиная со второго, они поочерёдно двигают его по доске, причём запрещается ходить в ранее посещённые клетки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

9.30. Двое играют в такую игру. Первым ходом разрешается назвать любое натуральное число от 1 до 9. Далее каждым ходом результат умножается на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит 1000. Докажите, что у второго игрока нет выигрышной стратегии.

9.31. Имеется доска 8×8. За ход можно положить доминошку на какие-то два её поля (доминошки не должны перекрываться). Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто выигрывает при правильной игре?

9.32. Имеются две кучи конфет: в первой — 40, во второй — 45. За ход нужно одну кучу съесть, а другую разделить на две (не обязательно равные). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

9.33. В ряд стоят 12 звёздочек. Два игрока по очереди заменяют звёздочки на цифры. За ход можно заменить одну самую правую звёздочку. Если получившееся 12-значное число делится на 77, то выигрывает второй игрок, иначе — первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Глава X. Оценка + пример

В задачах, объединённых условным названием «оценка + пример», обычно требуется указать, какое наибольшее или наименьшее значение может принимать некоторая величина. Необходимо подчеркнуть важность доказательства, что больше или меньше найденного не может быть ни в каком случае, и указать пример, в котором реализуется найденное значение. Нужно помнить, что ссылки на «невыгодность» других способов построения примера математически несостоятельны и не являются решением.

Наибольшие и наименьшие величины

Задача 1.

Какое наибольшее число не бьющих друг друга шахматных королей можно расставить на доске 8×8?

Решение. Разделим доску на квадраты 2×2. В каждом таком квадрате можно поставить не более 1 короля (все другие клетки он бьёт). Значит, всего можно поставить не более $64 : 4 = 16$ королей. Пример на рисунке 38.

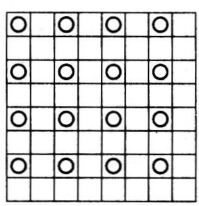


Рис. 38

Ответ: 16.

Задача 2.

На окружности отмечены 10 точек. Каждая пара отмеченных точек соединена отрезком, синим или красным. Известно, что нет ни одного треугольника из синих отрезков (с концами в отмеченных точках). Найдите наибольшее количество синих отрезков.

Решение. Всего есть 45 отрезков обоих цветов. Подсчитаем минимальное количество красных отрезков. Рассмотрим пару точек, соединённых синим отрезком. Каждая из остальных восьми точек, по крайней мере, с одной из этих двух соединена красным отрезком, иначе получился бы синий треугольник. Итого имеется, по крайней мере, 8 красных отрезков. Теперь среди этих 8 точек выберем две, соединённые синим отрезком (если таковые точки не найдутся, то всего не более 9 синих отрезков). Каждая из оставшихся 6 соединена хотя бы с одной из них красным отрезком, т. е. должно быть ещё 6 красных отрезков. Рассуждая аналогично, получим, что красных отрезков не меньше $8 + 6 + 4 + 2 = 20$. Значит, синих отрезков не более $45 - 20 = 25$. Пример с 25 отрезками можно построить: две группы по пять точек, каждая точка соединена с каждой точкой другой группы синим отрезком.

Ответ: 25.

Задача 3.

На встрече собрались все участники двух походов (некоторые были в обоих походах, некоторые — только в одном). В первом походе было две трети мальчиков и треть девочек, во втором — поровну тех и других. Какова наибольшая и какова наименьшая возможная доля мальчиков среди участников встречи?

Решение. Если на встрече M мальчиков, то в первом походе девочек было не более $\frac{1}{2}M$, а во втором — не более M (даже если все мальчики были в двух походах). Поэтому всего девочек на встрече не более $\frac{1}{2}M + M = \frac{3}{2}M$. Значит, доля мальчиков не меньше $\frac{M}{3/2M + M} = \frac{2}{5}$. Если теперь обозначить за $Д$ число девочек на встрече, то мальчиков не более $Д + 2Д = 3Д$ (не более $2Д$ в первом походе и не более $Д$ во втором). Поэтому доля мальчиков не больше $\frac{3}{4}$.

Ответ: наименьшая доля $\frac{2}{5}$, наибольшая — $\frac{3}{4}$.

Задача 4.

На поле 10×10 для игры в «Морской бой» Лёша расставляет корабли 1×3, а Ваня — корабли 1×4 (каждый на своём поле). Кто из мальчиков сможет расставить больше кораблей? Корабли не могут соприкасаться даже углами.

Решение. Лёша не может поставить больше 12 кораблей. Действительно, покрасим в шахматном порядке квадратики 2×2. Будем рассматривать белые квадраты. Каждый Лёшин корабль «накрывает» хотя бы одну клетку одного из этих белых квадратиков. Другой корабль уже не сможет попасть ни на одну клетку этого квадрата. Значит, Лёша не сможет поместить более 1 корабля в каждую такую клетку, и всего поместится не более 12 кораблей. Ваня не может поставить больше Лёши, потому что в каждый Ванин корабль «поместится» Лёшин корабль. Ваня же тоже может поместить на своём поле 12 кораблей (см. рис. 39).

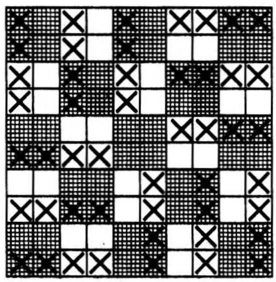


Рис. 39

Ответ: одинаково, по 12 кораблей.

Задача 5.

Представьте число 50 в виде суммы нескольких целых положительных чисел так, чтобы их произведение было как можно больше. Докажите, что ваш вариант — наилучший.

Решение. $50 = 2 + 3 + 3 + \ldots + 3$ (16 троек). Покажем, что любой другой вариант можно улучшить. Если среди слагаемых есть число $k > 3$, то, написав вместо него $(k-2)+2$, мы не уменьшим произведение, т. к. $2(k-2) \geqslant k$, $k > 3$. Поэтому наилучший вариант можно искать только среди тех, где каждое слагаемое не больше 3. Если среди слагаемых есть единицы, то вместо них можно написать их сумму (k вместо $1 + 1 + \ldots + 1$ (k единиц)) или, если единица всего одна, добавить её к какому-то слагаемому (написать число $(k+1)$ вместо суммы чисел $k+1$, при этом сумма останется прежней, а произведение увеличится) — в обоих случаях произведение только увеличится. Осталось разобрать случай, когда среди слагаемых есть только двойки и тройки. Если двоек больше 2, то можно заменить три двойки на две тройки, увеличив произведение ($3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$). Поэтому двоек должно быть не более 2, а остальные — тройки. Получается как раз то разбиение, которое указано в ответе.

Ответ: $50 = 2 + 3 + 3 + \ldots + 3$ (16 троек).

Задача 6.

В наборе из пяти попарно различных гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых трёх гирь больше суммарного веса двух оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес всех гирь набора.

Решение. Упорядочим веса гирь по возрастанию: $a_1 < a_2 < a_3 < < a_4 < a_5$. Предположим, что $a_3 \leqslant 6$. Тогда $a_1 + 2 \leqslant a_2 + 1 \leqslant a_3$, $a_5 - 2 \geqslant a_4 - 1 \geqslant a_3$, откуда $a_2 \leqslant 5$, $a_1 \leqslant 4$, $a_4 \geqslant 7$, $a_5 \geqslant 8$, тогда $a_4 + a_5 \geqslant 15$; $a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 15$, что противоречит условию. Значит, $a_3 \geqslant 7$, $a_4 \geqslant 8$, $a_5 \geqslant 9$, $a_4 + a_5 \geqslant 17$, следовательно, $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant a_4 + a_5 + 1 \geqslant 18$, откуда $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geqslant 18 + 17 = 35$. Пример для 35 даёт набор гирь 5, 6, 7, 8, 9.

Ответ: 35 г.

Задача 7.

Найдите наименьшую возможную сумму 10 различных натуральных чисел, таких, что произведение любых 5 из них — чётно, а сумма всех 10 чисел — нечётна.

Решение. Из того, что произведение любых 5 чисел из набора чётно, следует, что нечётных чисел меньше 5. Из того, что сумма всех чисел нечётна, следует, что в наборе нечётное число нечётных чисел. Таким образом, в наборе либо 3, либо 1 нечётное число. Сумма чисел набора будет наименьшей, если мы возьмём первые подряд идущие чётные и нечётные числа. Причём нечётных чисел нужно брать три, а не одно, так как $2 + 4 + \ldots + 14 + 1 + 3 + 5 < 2 + 4 + \ldots + 18 + 1$. Таким образом, наименьшей возможной будет сумма $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 1 + 3 + 5 = 65$.

Ответ: 65.

Задача 8.

В ряд лежат 20 монет: орёл, решка, орёл, решка и т. д. Можно одновременно переворачивать несколько монет, лежащих подряд. За какое наименьшее число операций можно перевернуть все монеты орлами вверх?

Решение. Для каждой пары соседних монет напишем, одинаковые они или разные. Всего таких пар 19. Количество соседств вида «орёл-решка» (или «решка-орёл») на каждом шагу изменяется не больше, чем на 2, так как при переворачивании группы монет соседство «орёл-решка» (или «решка-орёл») меняется на другое только между этой группой и теми монетами, которые не трогали при этой замене. Поэтому 19 соседств «орёл-решка» поменять на соседства «орёл-орёл», меняя за ход не более 2, можно не менее чем за 10 ходов. Пример очевиден.

Ответ: 10 операций.

Задача 9.

На кольцевой дороге проводится мотоциклетная эстафета (каждый следующий этап начинается в том месте, где закончился предыдущий). Длина этапа 75 км, длина дороги 350 км. Старт и финиш находятся в одном и том же месте. Какое минимальное число этапов может быть в эстафете?

Решение. Так как линии старта и финиша эстафеты совпадают, то её общая протяжённость равна $350n$ км, где n — натуральное число. Наименьшее количество этапов соответствует наименьшему значению n, при котором полученное число делится на 75 без остатка. Последовательным перебором получаем, что $n = 3$, а следовательно, наименьшее возможное количество этапов эстафеты равно 14.

Ответ: 14.

Задача 10.

За праздничным столом сидят 30 человек, 26 из них носят имя Саша. В полночь они все рассядутся за круглым столом, и каждый загадает одно желание, но исполнятся желания только у тех, кто будет сидеть между двумя Сашами. Какое а) наименьшее количество желаний может исполниться? б) наибольшее количество желаний может исполниться?

Решение. а) 22. Пример показан на рисунке 40. Заметим, что один «не-Саша» может «испортить жизнь» двум гостям, а четыре «не-Саши» — не более чем 8 гостям.

б) 25. Пример показан на рисунке 41. Требуется, чтобы у «не-Саш» было наибольшее количество общих соседей. Заметим, что общих соседей не менее пяти. Возьмём одного «не-Сашу» и его двух соседей; второй «не-Саша» может иметь с ним только одного общего соседа, то есть у них двоих — три «несчастливых» соседа. Размещение ещё одного «не-Саши» добавляет к «несчастливым» хотя бы ещё одного человека, и так далее.

Ответ: а) 22; б) 25.

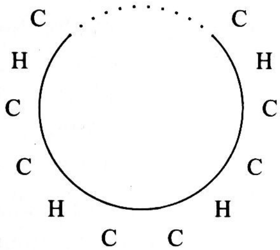


Рис. 40

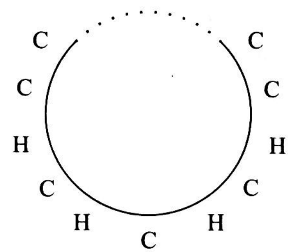


Рис. 41

Задача 11.

Какое максимальное количество натуральных чисел от 1 до 60 можно выбрать, чтобы среди них не было отличающихся ровно в два раза?

Решение. Рассмотрим для каждого нечётного числа от 1 до 59 все числа, которые получаются из него умножением на степени двойки: $\{1,2,4,8,16,32\}$; $\{3,6,12,24,48\}$; $\{5,10,20,40\}$; $\{7,14,28,56\}$; $\{9,18,36\}$; $\{11,22,44\}$; $\{13,26,52\}$; $\{15,30,60\}$; $\{17,34\}$; $\{19,38\}$; $\{21,42\}$; $\{23,46\}$; $\{25,50\}$; $\{27,54\}$; $\{29,58\}$; $\{31\}$; $\{33\}$; $\{35\}$; $\{37\}$; $\{39\}$; $\{41\}$; $\{43\}$; $\{45\}$; $\{47\}$; $\{49\}$; $\{51\}$; $\{53\}$; $\{55\}$; $\{57\}$; $\{59\}$ (последние группы состоят из одного числа). Из первой и второй групп можно выбрать максимум по 3 числа (иначе будут выбраны два соседних, которые отличаются в 2 раза), из третьей, четвёртой, пятой, шестой, седьмой и восьмой — максимум по два числа, из остальных 22 групп — максимум по одному. Всего получается не более $3 \times 2 + 2 \times 6 + 22 = 40$ чисел. Легко указать способ выбрать ровно столько чисел.

Ответ: 40.

Задача 12.

За завтраком каждый выпил по чашке кофе с молоком, причём Дима выпил пятую часть всего выпитого молока и восьмую часть всего выпитого кофе. Сколько человек могло участвовать в завтраке? (Все чашки одинаковы, но пропорции молока и кофе в них могут быть разными.)

Решение. Пусть Дима выпил M молока и K кофе, что составляет одну чашку (всего $K + M$). Тогда общий объём выпитого кофе с молоком составляет $8K + 5M$. Это меньше, чем $8(K + M)$, и больше, чем $5(K + M)$. Но все остальные выпили тоже по 1 чашке. Значит, в завтраке участвовало менее 8 человек и более 5. Примеры, когда участников было 6 или 7, легко привести.

Ответ: 6 или 7.

Задача 13.

Электронные часы показывают цифры часов и минут (например, 21:16). Какая наибольшая сумма цифр может быть на таких часах?

Решение. Если бы было возможно взять наибольшую цифру в каждом разряде, то мы бы получили сумму $2 + 9 + 5 + 9 = 25$. Однако это невозможно, так как в первых двух разрядах не могут быть одновременно цифры 2 и 9. Следующая сумма — это 24. Она достигается в 19:59.

Ответ: в 19 часов 59 минут имеем сумму цифр $1 + 9 + 5 + 9 = 24$.

Задача 14.

В некотором королевстве жили 32 рыцаря. Некоторые из них были вассалами других. Рыцарь, имевший не менее четырёх вассалов, носил титул барона. Вассал мог иметь только одного барона, причём барон всегда был богаче своего вассала. Какое наибольшее число баронов могло быть в этом королевстве? (В королевстве действовал закон: «вассал моего вассала не мой вассал».)

Решение. Предположим, что имелось не менее восьми баронов. Тогда, поскольку каждый из них имел не менее четырёх вассалов, их вассалами являлись не менее 32 рыцарей (общих вассалов бароны не могли иметь по условию). Кроме того, есть ещё самый богатый рыцарь, который не может быть ничьим вассалом. Получаем, что было не менее 33 рыцарей — это противоречит условию. Теперь покажем, что 7 баронов могло быть. На рисунке 42 рыцари отмечены кружками, стрелки ведут от каждого барона к его вассалу. Кружочки, соответствующие баронам, закрашены.

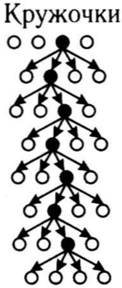


Рис. 42

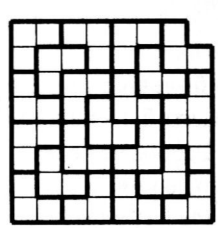


Рис. 43

Ответ: 7 баронов.

Задача 15.

Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?

Решение. Площадь квадрата — 64, площадь уголка — 3. Больше 21 уголка поместить нельзя, т. к. $22 \cdot 3 = 66 > 64$. Пример для 21 уголка показан на рисунке 43. При затруднении с построением примера можно разобрать квадраты 2×2 и 4×4 и подумать, как из них составить квадрат с удвоенной стороной.

Ответ: 21.

Задача 16.

Какое наименьшее число ладей могут побить всю шахматную доску?

Решение. Каждая ладья бьёт только одну вертикаль и только одну горизонталь. На доске 8 горизонталей и 8 вертикалей. При 7 и менее ладьях найдётся непобитая горизонталь и непобитая вертикаль, и на их пересечении — непобитая клетка. Пример для 8 ладей нетрудно привести, например, расставив фигуры по главной диагонали.

Ответ: 8.

Задача 17.

На стройку надо доставить несколько балок общей массой 10 т. Каждая балка весит не более 1 т. Какого наименьшего количества трёхтонок для этого заведомо хватит?

Решение. Каждая трёхтонка может увезти более 2 т, поэтому 5 трёхтонок заведомо хватит. Докажем, что 4 трёхтонок может и не хватить. Если надо будет доставить 13 балок по $\frac{10}{13}$ т, то на одну трёхтонку войдёт не более 3 балок, на 4 машины — не более 12 балок, поэтому нужно будет не менее 5 трёхтонок.

Ответ: 5.

Задача 18.

Какое наибольшее количество шашек можно поставить на шахматную доску, чтобы в каждом квадрате 3×3 стояло ровно по 3 шашки?

Решение. Разобьём доску на 9 прямоугольных областей двумя горизонтальными и двумя вертикальными линиями так, чтобы сторона любой области была не более 3. В каждую область могут попасть не более 3 шашек. Значит, всего поместится не более 27 шашек. Пример строится (см. рис. 44).

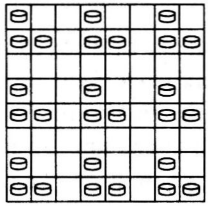


Рис. 44

Ответ: 27.

Задача 19.

Какое наименьшее количество шашек надо поставить на шахматную доску, чтобы в каждом квадрате 3×3 стояло ровно по 3 шашки?

Решение. Наложим на доску три квадрата 3×3 от левого верхнего угла и три — от правого нижнего (рис. 45). В верхние квадраты попадёт не менее 9 шашек, в нижние — ещё не менее $2 + 2 + 3$ шашек. Итак, оценка: 16 шашек. Пример легко строится (см. рис. 45).

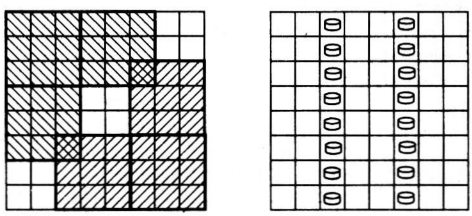


Рис. 45

Ответ: 16.

Задача 20.

Каждый из пассажиров автобуса получил билет с шестизначным номером, причём все номера билетов — последовательные числа. Какое наибольшее количество пассажиров могло ехать в автобусе, если ровно у $\frac{1}{12}$ из них есть в билете цифра 7?

Решение. Пусть у P пассажиров в билете есть цифра 7. Тогда число всех пассажиров равно $12P$. Среди любых 10 подряд идущих номеров есть один с цифрой 7 на конце, тогда $12P < 10(P+1)$, $P < 5$.

Для $P = 4$ пример: 100 008, 100 009, ..., 100 055.

Ответ: 48.

Задача 21.

Шахматную доску разбили на прямоугольники 1×2. Каждый из них требуется закрасить каким-нибудь цветом так, чтобы любые две клетки доски, отстоящие на ход коня, были раскрашены в разные цвета. Какого наименьшего числа цветов заведомо хватит для этого?

Решение. Назовём прямоугольник 1×2 доминошкой. Рассмотрим разбиение, показанное на рисунке 46. Среди шести заштрихованных доминошек любые две содержат клетки, отстоящие на ход коня, значит, понадобится, не менее 6 цветов.

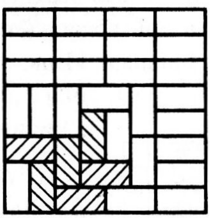


Рис. 46

2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
1	5	6	2	2	6	2	2
1	5	6	1	5	6	3	3
4	4	6	1	5	6	4	4
1	5	6	2	2	6	2	2
1	5	3	3	3	3	3	3

Рис. 47

Пример для 6 цветов показан на рисунке 47.

Ответ: 6.

Задача 22.

Каким наименьшим количеством монет в 3 и 5 копеек можно набрать сумму 37 копеек?

Решение. Если у нас не более 7 монет, можно набрать в сумме не более 35 копеек. 8 монет не могут дать в сумме 37 копеек, потому что сумма восьми нечётных чисел чётна, а 37 — нечётно.

Ответ: 9 монет — 4 трёшки и 5 пятаков.

Задача 23.

По кругу выписаны числа 1, 2, 3, ..., 10 в некотором порядке. Петя вычислил 10 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшее из вычисленных чисел. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?

Решение. Докажем, что выписанное число не больше 15. Если выделить число 10, то оставшиеся 9 чисел образуют три тройки. Сумма этих чисел $1+2+\ldots+9=45$, значит, хотя бы в одной из этих троек сумма не больше 15. (Если в каждой тройке сумма больше 15, то сумма всех девяти чисел была бы больше 45.)

Пример для наименьшей суммы чисел тройки, равной 15, приведён на рисунке 48.

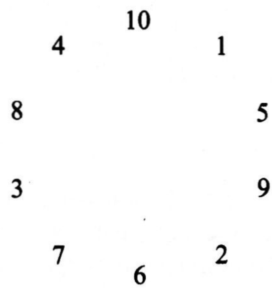


Рис. 48

Ответ: 15.

Задача 24.

В футбольном турнире участвовало 8 команд, причём каждая играла с каждой ровно по одному разу. Известно, что любые две команды, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное общее число ничьих в этом турнире. (За выигрыш матча команде начисляется 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.)

Решение. Докажем, что ровно по 6 ничьих может быть не более, чем у двух команд. Любая такая команда имеет либо 6, либо $6+3$ очка. Если таких команд 3, то у двух из них поровну очков. Значит, между собой эти две команды сыграли не вничью. Такого не может быть, так как они обе либо не выигрывали (если у них по 6 очков), либо не проигрывали (если у них по $6+3$ очков) ни одного матча.

Максимум одна команда все свои 7 матчей сыграла вничью. Значит, сумма количеств ничьих не превосходит $7+6+6+5+5+5+5+5=44$. Так как каждый ничейный матч учитывается дважды, то общее число ничьих в турнире не превосходит $44:2=22$. Пример для 22 ничьих показан на рисунке 49.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
А	—	1	1	1	1	1	3	3
Б	1	—	1	1	1	1	1	3
В	1	1	—	3	0	1	1	1
Г	1	1	0	—	3	1	1	1
Д	1	1	3	0	—	1	1	1
Е	1	1	1	1	1	—	1	1
Ж	0	1	1	1	1	1	—	1
З	0	0	1	1	1	1	1	—

Рис. 49

Ответ: 22.

Задача 25.

а) Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить в квадрате 10×10, чтобы в каждом квадрате 4×4 было ровно две закрашенные клетки? Какое наибольшее количество клеток можно закрасить указанным образом?

б) Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить в квадрате $m \times m$, чтобы в каждом квадрате $k \times k$ (где $m \geqslant k \geqslant 2$) было ровно две закрашенные клетки? Считать, что $m \neq ck + k - 1$ для любого $c \in N$, $m \geqslant k$.

в) Какое наибольшее количество клеток нужно закрасить в квадрате $m \times m$, чтобы в каждом квадрате $k \times k$ (где $m \geqslant k \geqslant 2$) было ровно две закрашенные клетки? Считать, что $m \neq ck+1$ для любого $c \in N$, $m \geqslant k$.

Решение. а) В квадрате 10×10 содержится 4 непересекающихся квадрата 4×4 (см. рис. 50).

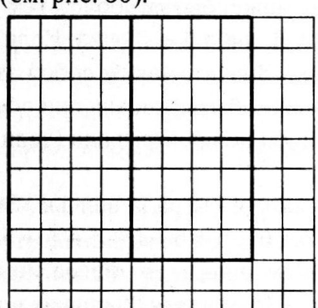


Рис. 50

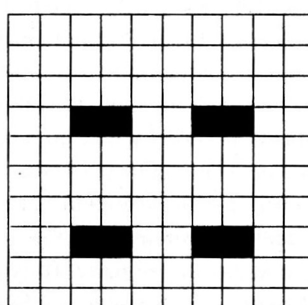


Рис. 51

Таким образом, количество закрашенных клеток должно быть не меньше, чем $4 \cdot 2 = 8$ (иначе в каком-либо из этих квадратов было бы меньше двух закрашенных клеток). На рисунке 51 показано, какие клетки необходимо закрасить, чтобы их было ровно 8.

Очевидно, что квадрат 10×10 можно полностью покрыть 9 квадратами 4×4 (см. рис. 52). Значит, количество закрашенных клеток не больше $2 \cdot 9 = 18$ (иначе в какой-либо из этих квадратов попало бы более 2 закрашенных клеток).

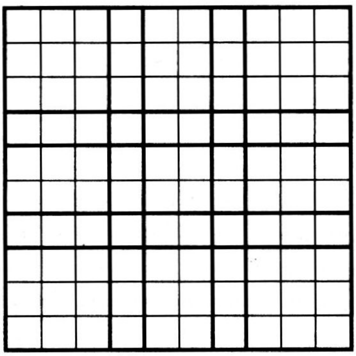


Рис. 52

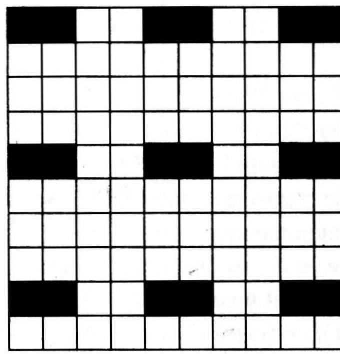


Рис. 53

На рисунке 53 показано, как раскрасить ровно 18 клеток в соответствии с условием.

б) Если $m = ck$, то количество закрашенных клеток не меньше $2c^2$. Действительно, квадрат $m \times m$ можно разбить на c^2 непересекающихся квадратов. Приведём пример, когда закрашенных клеток ровно $2c^2$. Будем закрашивать клетки в k-й строке, в $2k$-й строке, в $3k$-й строке и т. д. Таких строк c штук. В каждой из этих строк будем раскрашивать клетки, которые стоят в $k-1$, k, $2k-1$, $2k$, $3k-1$, $3k$, ..., $ck-1$, ck столбцах.

Аналогично, если $m = ck + r$, $1 < r < k$, то выделим подквадрат размером $ck \times ck$, вписанный в верхний левый угол исходного квадрата (см. рис. 54), и раскрасим в получившемся квадрате клетки указанным выше способом. Покажем, что любой квадрат $k \times k$ содержит ровно 2 закрашенные клетки. Рассмотрим произвольный квадрат $k \times k$. Он пересекает ровно одну из тех строк, в которой есть раскрашенные клетки. Выделим эту строку. В любой её подстроке длиной k клеток, очевидно, содержится ровно 2 закрашенные клетки. Так как всего закрашенных клеток не меньше $2c^2$, данный пример доказывает, что наименьшее число закрашенных клеток равно $2c^2$.

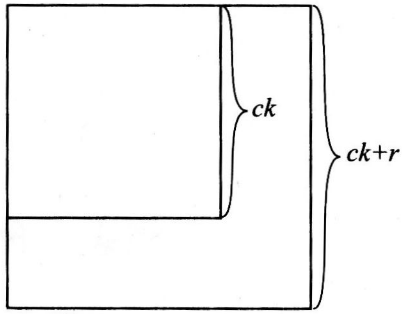


Рис. 54

в) При $m = ck$ исходный квадрат разбивается на c^2 квадратов $k \times k$, а потому число закрашенных клеток не больше $2c^2$. Пример, когда закрашенных клеток ровно $2c^2$, приведён выше. Если $m = ck + r$, $1 < r < k$, то очевидно, что исходный квадрат можно покрыть $(c+1)^2$ квадратами размером $k \times k$ (исходный квадрат можно вписать в квадрат $(c+1)k \times (c+1)k$, который легко разбивается на $(c+1)^2$ квадрат размером $k \times k$). Значит, всего не более $2(c+1)^2$ закрашенных клеток. Приведём пример, когда их ровно $2(c+1)^2$. Будем раскрашивать клетки в строчках с номерами $1,\ k+1,\ 2k+1, \ldots, ck+1$. В каждой такой строке раскрасим клетки, которые стоят в столбцах с номерами $1,\ 2,\ k+1,\ k+2,\ 2k+1,$ $2k+2, \ldots, ck+1,\ ck+2$. Таким образом, искомый пример построен.

Ответ: а) 8; 18. Если $m = ck$, $c \in N$, то б) $2c^2$; в) $2c^2$. Если $m = ck+r$ (где $r \neq 0$ — остаток от деления m на k), то б) $2c^2$; в) $2(c+1)^2$.

Задачи для самостоятельного решения

10.1. Какое наибольшее количество коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

10.2. Четыре кузнеца должны подковать пять лошадей. Какое наименьшее время они могут затратить на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову пять минут? (Лошадь не может стоять на двух ногах.)

10.3. Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички (каждая спичка составляет ровно одну сторону клетки). Какое наименьшее количество спичек необходимо убрать, чтобы ладья могла добраться с каждого поля на любое другое, не перепрыгивая через спички?

10.4. Радиоуправляемая игрушка выезжает из некоторой точки. Игрушка движется по прямой и по команде может поворачивать налево ровно на 17° относительно прежнего направления движения. Какое наименьшее число команд требуется, чтобы игрушка вновь прошла через точку старта?

10.5. Иван Иванович пришёл в магазин, имея в кошельке 20 руб. В магазине продавали веники по 1 руб. 17 коп. и тазики по 1 руб. 66 коп. (других товаров в магазине уже не осталось). Сколько веников и сколько тазиков ему нужно купить, чтобы потратить как можно больше денег?

10.6. На прямой отметили две точки на расстоянии 13 см друг от друга. Какое наименьшее число точек надо ещё отметить на отрезке с концами в этих точках, чтобы для любого натурального числа от 1 до 13 нашлись две отмеченные точки, расстояние между которыми равно этому числу?

10.7. Есть 101 банка консервов массами 1001 г, 1002 г, ..., 1101 г. Этикетки с весами потерялись, но завхозу кажется, что он помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедиться в этом за наименьшее число взвешиваний. Есть двое чашечных весов: одни — точные, другие — грубые. За одно взвешивание можно сравнить две банки. Точные весы всегда показывают, какая банка тяжелее, а грубые — только если разница больше 1 г (а иначе показывают равновесие). Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать?

10.8. Из 12 монет одна фальшивая (легче настоящей). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь фальшивую монету можно наверняка отделить от настоящих?

10.9. Дано множество M из n элементов, в котором выбрано несколько подмножеств. Известно, что любое невыбранное подмножество множества M представляется в виде пересечения некоторых выбранных подмножеств. Какое наименьшее число подмножеств могло быть выбрано? (Не забудьте, что множество M является подмножеством самого себя.)

10.10. Какое наименьшее количество цифр нужно написать подряд, чтобы вычёркиванием некоторых цифр можно было получить любое трёхзначное натуральное число от 100 до 999?

10.11. В n кошельках лежит по 20 монет. Во всех кошельках монеты настоящие, а в одном — фальшивые. Все настоящие монеты весят по 50 г, а фальшивые — по 49 г. При каком наибольшем n можно за одно взвешивание на электронных весах определить кошелёк с фальшивыми монетами?

10.12. То же условие, что и в предыдущей задаче, но фальшивые монеты находятся в двух кошельках, в одном — весящие 49 г, а в другом — 51 г.

10.13. Найдите наименьшее возможное число членов кружка, если известно, что девочек в нём меньше 50%, но больше 40%.

10.14. В некоторой стране решили провести всенародные выборы правительства. Две трети избирателей в этой стране — городские жители, а одна треть — сельские. Президент должен предложить на утверждение проект состава правительства из 100 человек. Известно, что за проект проголосует столько процентов городских (сельских) жителей, сколько человек из города (села) в предложенном проекте. Какое наименьшее число городских жителей надо включить в проект состава правительства, чтобы за него проголосовало более половины избирателей?

10.15. На окружности отмечено n точек. Известно, что среди всевозможных расстояний между двумя отмеченными точками не более 100 различных. Каково наибольшее возможное значение числа n?

10.16. Каково наибольшее значение площади треугольника, 2 вершины которого находятся на диаметре, а третья — на окружности радиуса R?

10.17. В гранитном карьере добыли 200 плит гранита, из которых 120 плит весят 7 тонн каждая, а остальные весят 9 тонн каждая. На железнодорожную платформу можно погрузить до 40 тонн. Какое минимальное число платформ понадобится для перевозки, если превращать плиты в щебень нельзя?

10.18. Какое наибольшее число не бьющих друг друга ферзей можно расставить на доске 8×8?

10.19. По кругу расставлены 7 чисел, причём сумма любых двух соседних чисел не превосходит 10. Какому наибольшему числу может равняться сумма всех чисел?

10.20. В какое наименьшее количество цветов нужно покрасить шахматную доску, чтобы король любым своим ходом менял цвет?

10.21. В кружке, где занимается Маша, более 93% учащихся — мальчики. Чему равно наименьшее возможное количество детей, посещающих кружок?

10.22. В городе 10 улиц параллельны друг другу и 10 других пересекают их под прямым углом. Какое наименьшее число поворотов может иметь замкнутый маршрут без возвращений, проходящий через все перекрёстки?

10.23. Число x таково, что 15% от него и 33% от него — целые положительные числа. Каково наименьшее число x (не обязательно целое!) с таким свойством?

10.24. 10 человек пришли в гости в галошах. Уходя по одному, каждый надевал произвольную пару галош, размером не меньше, чем его собственные. Какое возможно наибольшее число людей, которые не смогли надеть галоши? Человек не может надеть галоши меньшего размера, чем размер его ноги.

10.25. Витя задумал число от 1 до 16. Чтобы отгадать это число, Коля задаёт вопросы, на которые можно ответить «да» или «нет».

а) Как наверняка отгадать задуманное число за 4 таких вопроса?

б) Докажите, что за 3 вопроса наверняка угадать число нельзя.

10.26. а) Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить в квадрате 8×8, чтобы в каждом квадрате 3×3 была ровно одна закрашенная клетка? Какое наибольшее количество клеток можно закрасить указанным образом?

б) Если $m \geqslant k$, то какое наименьшее количество клеток нужно закрасить в квадрате $m \times m$, чтобы в каждом квадрате $k \times k$ была ровно одна закрашенная клетка?

в) А какое наибольшее количество (для условий пункта б)?

Глава XI. Теория графов

Основные понятия теории графов

Во многих задачах бывает полезно представить некоторую информацию в графическом виде.

Пример 1.

В государстве Морляндия 8 крупных островов, между некоторыми из них налажена радиосвязь. Связь есть между следующими островами: Банановый — Кокосовый, Кукуру — Рыбный, Столичный — Акулий, Птичий — Кукуру, Одинокий — Столичный, Акулий — Одинокий, Столичный — Кокосовый, Птичий — Рыбный. Можно ли послать радиосообщение с острова Банановый на остров Акулий? А с острова Акулий на Рыбный?

Решение. Нарисуем схему радиосвязи. Острова обозначим точками, радиосвязь линиями (рис. 55). Из схемы видно, что с острова Банановый на остров Акулий можно послать сообщение, а с острова Акулий на остров Рыбный — нет.

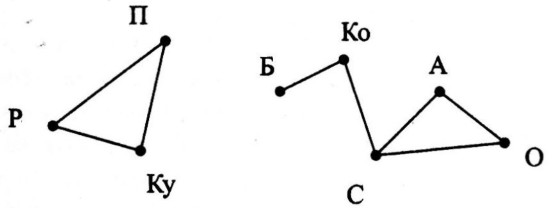


Рис. 55

Пример 2.

В 10-значном числе каждые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, которое делится на 13. Докажите, что среди этих цифр нет цифры 8.

Решение. Существует 7 двузначных чисел, которые делятся на 13. Обозначим эти числа точками, и если вторая цифра одного числа совпадает с первой цифрой другого числа, соединим их линией со стрелкой (рис. 56). Видим, что если 10-значное число обладает заданным свойством, то оно состоит из периодически повторяющихся цифр ... 1391 ... или ... 6526 ... Цифры 8 быть не может.

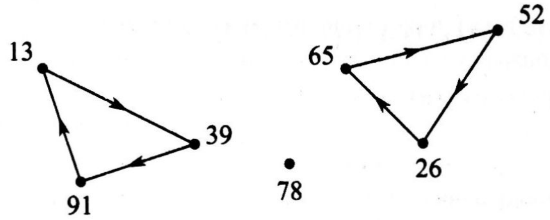


Рис. 56

При решении этих задач мы рисовали картинки, которые в математике называют графами. ***Графом** называется несколько точек (эти точки называются вершинами), соединённых линиями (называемыми рёбрами)*. На рисунке 57 изображены различные графы.

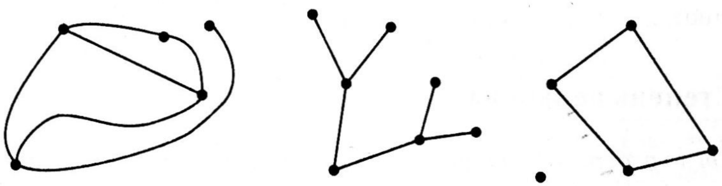
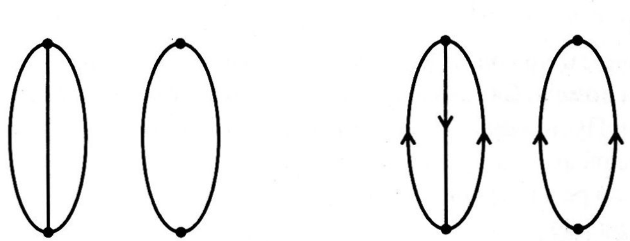


Рис. 57

Если линия имеет направление (стрелку), она называется *дугой*, а граф, содержащий только дуги, — *ориентированным*. Вершины, соединённые ребром, называют *смежными*. Рёбра, имеющие общую вершину, тоже называют *смежными*.

Пара вершин графа может соединяться двумя или более рёбрами (или дугами одинакового направления, если граф ориентированный), тогда они называются кратными (рис. 58а, б).



а б

Рис. 58

Ребро (или дуга) может начинаться и заканчиваться в одной вершине, такое ребро называется *петлёй* (рис. 59).

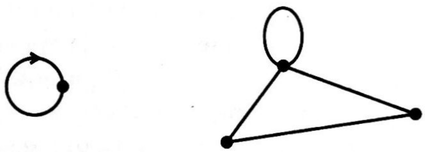


Рис. 59

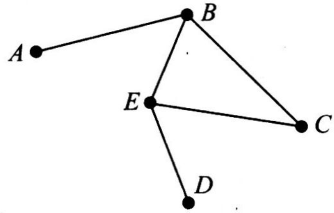


Рис. 60

Часто по умолчанию предполагают, что в графе нет ни кратных рёбер, ни петель. В дальнейшем мы будем считать, что их нет, если не сказано обратное.

Степень вершины

Число рёбер, выходящих из одной вершины, называют степенью этой вершины. Например, на рисунке 60 у вершины A степень 1, у вершины B — 3, у C — 2. Сумма степеней вершин этого графа равна 10. Количество рёбер — 5.

Лемма 1. *Число рёбер в графе ровно в два раза меньше, чем сумма степеней вершин.*

Докажем, что это верно для любого графа. Любое ребро графа связывает две вершины. Значит, если будем складывать число степеней всех вершин графа, то получим удвоенное число рёбер, так как каждое ребро было подсчитано дважды.

Задача 1.

В деревне 10 домов, и из каждого выходит по 7 тропинок, идущих к другим домам. Сколько всего тропинок проходит между домами?

Решение. Пусть дома — вершины графа, тропинки — рёбра. Тогда степень каждой вершины равна 7, всего сумма степеней вершин $7 \cdot 10 = 70$, тогда число рёбер (тропинок) $70 : 2 = 35$.

Ответ: 35.

Лемма 2. *Сумма степеней вершин графа чётна.*

Это утверждение становится понятным, если вспомнить, что по лемме 1 эта сумма равна удвоенному количеству рёбер.

Эта лемма доказывает, что если нам задан набор степеней с нечётной суммой, то он не может отвечать никакому графу.

Задача 2.

Между 7 планетами звёздной системы установлено ракетное сообщение. Министр отрапортовал, что с каждой планеты существует прямой рейс ровно на 5 других планет системы. Докажите, что министр ошибся.

Решение. Пусть планеты — вершины графа, а маршруты — рёбра. Если министр прав, то сумма степеней вершин этого графа равна $7 \cdot 5 = 35$, а нечётной она быть не может. Значит, министр ошибся.

Если степень вершины чётная, то вершина называется *чётной*, если степень нечётная, то вершина называется *нечётной*.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 3. *Число нечётных вершин графа чётно.*

Если в графе есть n чётных и k нечётных вершин, то сумма степеней чётных вершин чётна как сумма чётных чисел. Сумма степеней нечётных вершин нечётна, если их количество k нечётно. Но тогда общее число степеней вершин тоже нечётно, чего не может быть. Значит, k чётно.

Задача 3.

Маша сказала своей подружке Лене: «У нас в классе двадцать пять человек. И представь, каждый из них дружит ровно с семью одноклассниками». «Не может этого быть», — ответила Лена. Почему она так решила?

Решение. Каждому ученику поставим в соответствие вершину графа. Рёбрами соединим те пары вершин, соответствующие которым ученики дружат. Если Маша права, то сумма степеней всех вершин графа будет равна $25 \cdot 7$ — нечётному числу, чего быть не может.

Использование графов помогает в некоторых задачах обойтись лишь простым анализом схемы, не вдаваясь в детали используемых в условии свойств.

Задача 4.

Можно ли найти 5 натуральных чисел, таких, что для каждого из них среди оставшихся чисел найдётся ровно три числа с одинаковым простым делителем?

Решение. Представим себе, что мы нашли такие числа. Пусть эти числа будут вершинами графа. Если два числа имеют одинаковый простой делитель, соединим их ребром. Степень каждой вершины такого графа равна 3, вершин — 5. Но в графе не может быть нечётного числа нечётных вершин. Значит, такие числа найти нельзя.

Ответ: нельзя.

Задача 5.

Можно ли нарисовать на плоскости 11 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с 5 другими?

Решение. Представим себе, что можно. Нарисуем граф, в котором вершинам будут соответствовать данные отрезки. Вершины соединены ребром, если отрезки пересекаются. Мы получим граф, в котором 11 вершин степени 5, что невозможно. Противоречие. Значит, нарисовать нельзя.

Ответ: нельзя.

Полный граф и его свойства

Граф называют нулевым, если в нём есть вершины, но нет рёбер (рис. 61). Если не все вершины соединены рёбрами, то граф называют неполным (рис. 62). *В полном графе* (рис. 63) *любые две вершины соединены ровно одним ребром.*

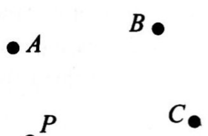


Рис. 61

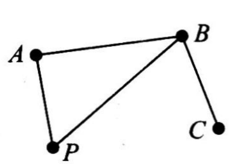


Рис. 62

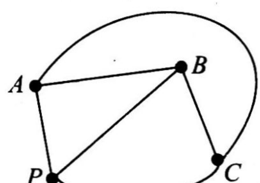


Рис. 63

Лемма 4. *В полном графе с n вершинами число рёбер равно* $\frac{n(n-1)}{2}$.

В полном графе с n вершинами из каждой вершины выходит по $(n-1)$ рёбер. Значит, сумма степеней вершин равна $n(n-1)$. Число рёбер в 2 раза меньше, то есть $\frac{n(n-1)}{2}$.

Задача 6.

Сколько диагоналей в 17-угольнике?

Решение. Вершины 17-угольника — вершины графа, диагонали и стороны — рёбра графа. Всего $17 \cdot (17-1) : 2 = 136$ рёбер. Из них 17 сторон, остальные — диагонали. Значит, диагоналей $136 - 17 = 119$.

Задача 7.

Ваня и Миша играют в такую игру. Они по очереди связывают 5 столбиков ленточками попарно. Кто свяжет последнюю пару столбиков, тот выиграл. Кто победит — тот, кто завяжет первую ленточку, или его соперник?

Решение. После того, как все ленты будут завязаны, получится полный граф с 5 вершинами-столбиками и рёбрами-ленточками. В этом графе $5 \cdot (5-1) : 2 = 10$ рёбер. Значит, выиграет тот, кто завязывал ленту вторым.

Задача 8.

В сарае 10 корыт с едой и 20 поросят. Через некоторое время поросята перебегают от одного корыта к другому. Известно, что от каждого корыта к каждому перебегал какой-нибудь поросёнок. Докажите, что хоть один поросёнок перебегал не менее трёх раз.

Решение. Обозначим корыта точками — вершинами графа. Если между ними пробегал хотя бы один поросёнок, то вершины соединим ребром. Если от каждого корыта к каждому перебегал какой-нибудь поросёнок, то граф полный, и в нём проведено $10 \cdot 9 : 2 = 45$ рёбер. Если бы каждый поросёнок перебежал от одного корыта к другому не более 2-х раз, то рёбер провели бы не более $20 \cdot 2 = 40$. Значит, хотя бы один поросёнок перебегал от корыта к корыту не менее трёх раз.

Задачи для самостоятельного решения

11.1. В футбольной секции 26 человек. Может ли быть так, что 5 из них имеют по 3 друга (в этой секции), 6 — по 4 друга, 7 — по 6 друзей и 8 — по 5 друзей?

11.2. В метро построено 15 станций, между некоторыми из них проходят пути. Может ли быть так, чтобы было 4 станции, соединённых с пятью другими; 6 станций, соединённых с четырьмя; и 5 станций, каждая из которых соединена с тремя другими?

11.3. В стране 17 областей. Может ли быть так, что у каждой области 1, 3 или 5 соседних областей?

11.4. Несколько приборов соединены проводами, при этом от каждого прибора отходит ровно пять проводов. Может ли быть ровно 33 провода между приборами?

11.5. Докажите, что число людей в любой компании, дружащих с нечётным числом людей из этой компании, чётно.

11.6. Могут ли степени вершин в графе, в котором нет кратных рёбер и петель, быть равны:

а) 8, 7, 4, 4, 4, 3, 1, 1;

б) 7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1;

в) 6, 6, 7, 5, 5, 3, 1, 2?

11.7. В домах у бабы Веры, бабы Лены и бабы Оли живут три гуся — белый, чёрный и серый. В домах у бабы Веры и бабы Лены живут не чёрные гуси. Белый гусь живёт не у бабы Веры. В каком доме какой гусь живёт?

11.8. В офисе компании «Суперботан» 129 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с семью другими?

11.9. В государстве 40 городов, и из каждого из них выходят 3 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

11.10. В стране 16 городов. Каждые два города соединены ровно одной дорогой (на которой нет других городов). Сколько всего дорог в стране?

11.11. В выпуклом n-угольнике 152 диагонали. Чему равно n?

Путь, маршрут и цикл в графе

Маршрутом в графе называется последовательность рёбер, в которой соседние рёбра имеют общую вершину. Первая вершина называется началом маршрута, последняя — концом.

Путём (или цепью) в графе называется маршрут, в котором нет повторяющихся рёбер. Если в пути нет повторяющихся вершин, его называют простым путём. Длина маршрута равна количеству рёбер в порядке их прохождения. Расстоянием между вершинами в графе называют длину кратчайшего пути от одной вершины до другой. Например, на рисунке 64 длина пути $AFBCE$ равна 4, а расстояние от A до E равно 2 (два ребра). Иногда каждому ребру графа приписывается некоторая длина. Тогда длина пути — сумма длин входящих в него рёбер.

Цикл — это путь, у которого совпадают начало и конец. Если в цикле все вершины разные, его называют простым циклом. Если цикл проходит через все рёбра графа ровно по одному разу, то такой цикл называется эйлеровым. Маршрут, содержащий все рёбра или все вершины графа, называется обходом графа.

Рассмотрим граф на рисунке 64.

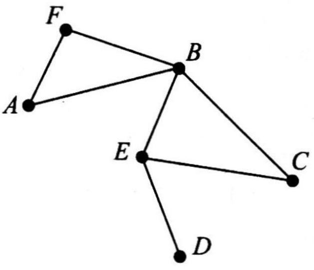


Рис. 64

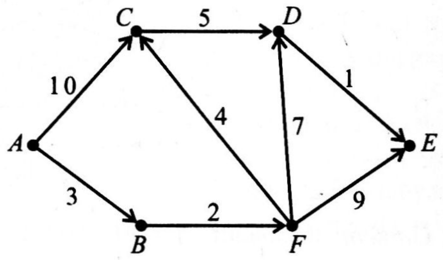


Рис. 65

$CEDEBF$, $FABCE$ — маршруты, $FABCE$ — путь, $CEDEBF$ не является путём, так как ребро DE повторяется. $AFBA$, $AFBCEBA$ — циклы, $AFBA$ — простой цикл.

Задача 9.

На рисунке 65 изображены расстояния между пунктами A, B, C, D, E и F. Двигаться по дорогам можно только в направлениях, указанных стрелочками. Водитель едет из пункта A в пункт E. Как он должен ехать, чтобы добраться по самому короткому пути?

Решение. Рассмотрим последовательно возможные пути поездки и сравним их длину. $ABFE = 14$, $ABFCDE = 15$, $ABFDE = 13$, $ACDE = 16$. Выбираем минимальное расстояние. Оно равно 13.

Ответ: нужно ехать по маршруту $ABFDE$.

Задача 10.

Необходимо составить расписание из 4 уроков для 6-го класса на вторник с учётом следующих обстоятельств:

– учитель истории может дать либо первый, либо второй, либо третий уроки, но только один урок;

– преподаватель биологии согласен дать только последний урок;

– учитель математики может дать либо только первый, либо только третий урок;

– учитель географии может дать один, либо второй, либо третий, урок.

Сколько и каких вариантов расписания, удовлетворяющих всем вышеперечисленным условиям одновременно, может составить завуч школы?

Решение. Начертим граф (рис. 66). Выпишем все возможные варианты.

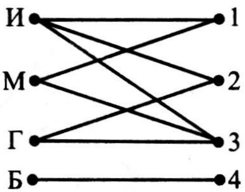


Рис. 66

Ответ: 3 варианта: ИГМБ, МИГБ, МГИБ.

Задача 11.

Написано 2009-значное число. Каждое двузначное число, образованное соседними цифрами этого числа, идущими в той же последовательности, делится на 23 или на 17. Последняя цифра 7. Какая цифра первая?

Решение. Двузначные числа, которые делятся на 23: 23, 46, 69, 92. Двузначные числа, которые делятся на 17: 17, 34, 51, 68, 85. Нарисуем граф (рис. 67), в котором вершинами будут цифры. Соединим их дугами, если они составляют число, которое делится на 23 или на 17. Так как в числе 2009 цифр и последняя 7, то до этого обязательно стояли цифры 1, 5, 8, 6, а потом цифры в обратном порядке повторялись: 6–4–3–2–9–6–4–..., при этом в цикле 5 цифр. На них остаётся $2009 - 4 = 2005$ цифр, то есть целое число циклов. Цикл начался с 6, значит, последняя цифра цикла 9. Так как мы двигались от последней цифры к первой, то 9 — это и есть первая цифра 2009-значного числа.

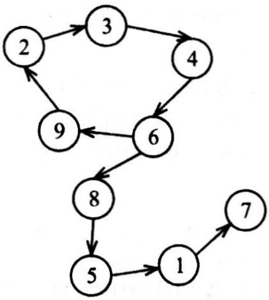


Рис. 67

Задачи для самостоятельного решения

11.12. На карте обозначено 4 деревни: A, B, C и D, соединённых тропинками (рис. 68). В справочнике написано, что на маршрутах $B - C - D$ и $A - D - C$ по 12 колдобин, на маршруте $A - C - B$ — 25 колдобин, а на маршруте $B - A - C$ — 52 колдобины. Туристы хотят добраться из A в B так, чтобы на их пути было как можно меньше колдобин. По какому маршруту им надо идти? Не забудьте доказать, что на указанном маршруте действительно меньше всего колдобин.

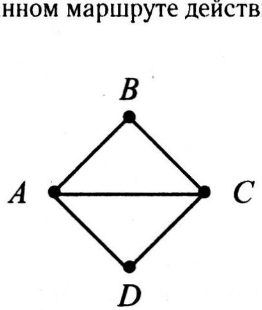


Рис. 68

11.13. На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число закрашенных соседей?

11.14. Написано 284-значное число. Каждое двузначное число, образованное соседними цифрами этого числа, делится на 31 или на 19. Первая цифра 1. Какая последняя, если она не делится на 9?

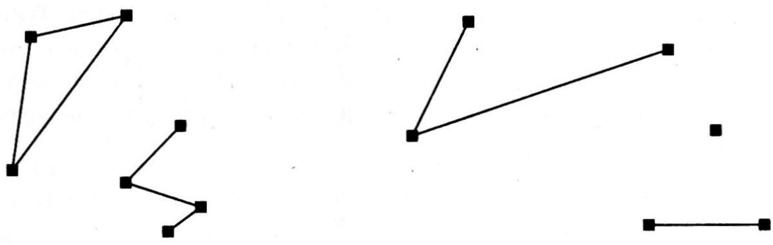
11.15. В графе из любой вершины выходит по 11 рёбер. Может ли в нём быть 2008 рёбер?

11.16. В графе каждая вершина — синяя или зелёная. При этом каждая синяя вершина связана с 5 синими и 10 зелёными, а каждая зелёная — с 9 синими и 6 зелёными. Каких вершин больше — синих или зелёных?

Связные вершины. Компоненты связности графа

Граф называется связным, если любые две его вершины соединены путём. Несвязный граф состоит из нескольких «кусков», каждый из которых является связным графом. Эти куски называют компонентами связности графа. Связный граф имеет одну компоненту связности.

Например, на рисунке 69 граф а) имеет две компоненты связности, граф б) — 3 компоненты связности.



а) б)

Рис. 69

Если удаление ребра увеличивает число компонент связности, такое ребро называют *мостом*. В частности, связный граф при удалении моста теряет связность. Пример моста — рёбра AB и CP на рисунке 70.

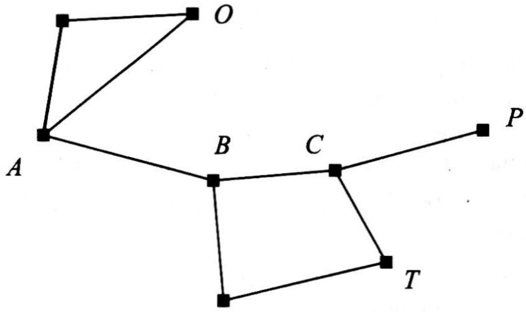


Рис. 70

Задача 12.

В районе 11 городов, причём каждый соединён дорогами не менее чем с 5 другими. Докажите, что из любого города этого района можно добраться до любого другого, может быть, проезжая через другие города.

Решение. Предположим, что есть два города A и B, которые не соединяет путь (маршрут). Рассмотрим эти два города. Каждый соединён дорогами не менее чем с 5 другими, при этом все эти города различны, потому что если какие-то из этих городов совпали, то найдётся путь, соединяющий города A и B (рис. 71). Но в таком случае в районе нашлось 12 городов, а по условию их всего 11. Противоречие. Значит, любые два города района соединены путём.

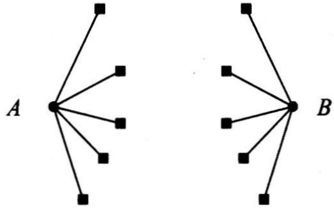


Рис. 71

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 5. *Граф с n вершинами, степень каждой из которой не менее $(n-1) : 2$, является связным.*

Задача 13.

В кабинете физики несколько приборов и одна розетка, при этом некоторые из приборов соединены проводами. Все концы проводов подключены к приборам, и один конец подключён к розетке. От компьютера отходят 7 проводов, а от всех остальных приборов по 4. Докажите, что компьютер соединён с розеткой (может быть, через другие приборы).

Решение. Рассмотрим компоненту связности графа, содержащую компьютер. Докажем, что она содержит и розетку. Предположим, что это не так. Тогда в этой компоненте связности одна вершина имеет степень 7, а все другие 4. Но в графе (компонента связности тоже граф) не может быть нечётного числа нечётных вершин, получили противоречие. Значит, компьютер соединён с розеткой.

Задачи для самостоятельного решения

11.17. В городе от каждой стоянки отходят по 6 дорог, при этом от любой стоянки можно добраться до любой другой по дорогам. На одной из дорог начались ремонтные работы, и её перекрыли. Докажите, что и теперь от любой стоянки можно добраться до любой другой по дорогам.

11.18. В звёздной системе находится 21 планета, причём каждая планета имеет связь не менее чем с 10 планетами. Докажите, что с каждой планеты можно связаться с любой другой (возможно, через другие планеты).

11.19. В деревне живут 15 человек, каждый из них имеет не менее 7 родственников в этой деревне. Докажите, что все в этой деревне — родственники (родственник моего родственника считается моим родственником).

11.20. Между 4 городами гномов прокопаны тоннели. От города Золотых гномов ведёт 6 тоннелей, от города Серебряных гномов ведёт 5 тоннелей, от города Бронзовых гномов ведёт 3 тоннеля, от города Алмазных гномов ведёт 4 тоннеля. Докажите, что от города Серебряных гномов до города Бронзовых гномов можно добраться по тоннелям (может быть, через другой город гномов).

11.21. В классе девочки рассказывают секреты только своим подружкам. У Веры подружки Аня и Света, У Любы — Юля и Женя, кроме того Света дружит с Катей, Полина — с Аней, Верой и Катей, Женя — с Юлей и Зоей. Если Зоя узнала секрет, узнает ли его Люба? А Вера?

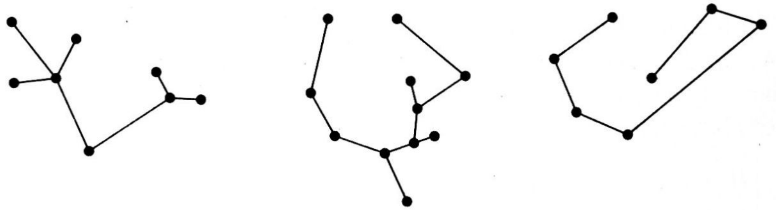
11.22. На асфальте начертили фигуру, состоящую из одинаковых квадратов, которые могут граничить только своими сторонами. Каждый квадрат граничит ровно с двумя другими квадратами, и можно добраться от каждого квадрата до любого другого, перешагивая через границы. Докажите, что если мы сотрём один квадрат, то всё равно можно будет добраться от любого квадрата до любого другого, перешагивая через границы.

11.23. В городе 19 автобусных маршрутов, при этом каждый имеет общую остановку не менее чем с 10 другими маршрутами. Докажите, что можно сесть на автобус любого маршрута и попасть на рейс любого другого маршрута, пересаживаясь на остановках.

11.24. На острове Кокосовый растут 15 кокосовых пальм, а между некоторыми из них протоптаны тропинки. От самой высокой пальмы ведёт 5 тропинок, от самой неурожайной — 1 тропинка. От всех остальных ведёт по 4 тропинки. Докажите, что можно пройти по тропинкам от самой высокой пальмы до самой неурожайной.

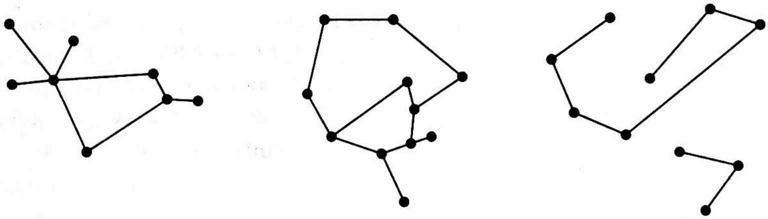
Дерево. Мост и число рёбер в дереве

***Деревом** называется связный граф, не имеющий циклов.* Примеры графов, которые являются деревьями, приведены на рисунке 72. На рисунке 73 изображены графы, но не деревья.



а) б) в)

Рис. 72



а) б) в)

Рис. 73

Разберём некоторые свойства дерева.

В дереве нельзя вернуться в исходную вершину, двигаясь по рёбрам и проходя по одному ребру не более одного раза.

Доказательство. Предположим, что мы смогли это сделать. Выделим этот путь (рис. 74). Так как рёбра не повторяются, то это цикл. Но в дереве не может быть циклов. Значит, сделать этого нельзя.

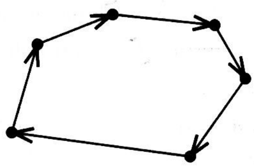


Рис. 74

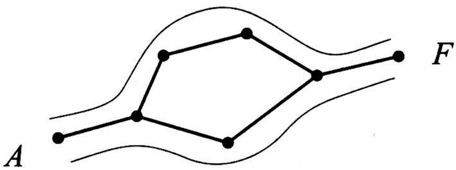


Рис. 75

В дереве любые две вершины соединены ровно одним путём.

Доказательство. Пусть от одной вершины до другой два пути (см. рис. 75). Даже если начала путей совпадают, то где-то начнётся «раздвоение», а раз у них общий конец, то есть вершина, где пути «сойдутся». Получится цикл, чего в дереве быть не может.

В дереве есть вершина, из которой выходит только одно ребро.

Такая вершина называется висячей (рис. 76 — кругами выделены висячие вершины).

Доказательство. Пойдём из любой вершины в другую вершину. Если из неё больше не выходит рёбер, то она и есть висячая. Если из неё выходит ещё ребро, то идём по нему. В дереве нет циклов, поэтому мы не попадём в вершину, где уже были. Так как в графе конечное число вершин, когда-нибудь мы дойдём до вершины, из которой больше некуда будет идти — до висячей вершины.

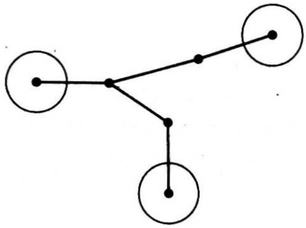


Рис. 76

При удалении любого ребра из дерева граф становится несвязным.

Доказательство. Пусть мы удалили ребро между вершинами A и B, и граф остался связным. Значит, в получившемся графе есть путь из A в B. Но в первоначальном графе был ещё путь AB по удалённому ребру, а в дереве любые две вершины соединены ровно одним путём.

В дереве с n вершинами $n-1$ рёбер.

Доказательство. В дереве с ровно одним ребром имеются 2 вершины, утверждение верно. В произвольном дереве будем удалять висячую вершину вместе с выходящим из неё ребром до тех пор, пока не получим дерево ровно с одним ребром. Так как на каждом шаге удаляли одно ребро и одну вершину, то и для исходного дерева исходное утверждение верно.

Признаки дерева — те свойства графа, по которым мы можем определить, что граф — дерево. Вообще говоря, все они эквивалентны определению дерева.

> ***1.*** *Если граф связный и в нём нет циклов, то граф — дерево (по определению).*
> ***2.*** *Если у связного графа число рёбер на один меньше числа вершин, то граф — дерево.*
> ***3.*** *Если в графе любые две вершины соединены ровно одним простым путём (таким, в котором рёбра не повторяются), то граф — дерево.*
> ***4.*** *Если в связном графе любое ребро является мостом, то граф — дерево.*

Докажем, например, признак 3.

Такой граф связный. Докажем, что в нём нет циклов. Пусть цикл есть. Тогда между любыми двумя вершинами этого цикла есть два пути, а это противоречит условию. Значит, граф связный и не содержит циклов, это дерево.

Задача 14.

В государстве Морляндия 17 островов, между ними проложены маршруты так, что с каждого острова выходит ровно четыре маршрута. Докажите, что в Морляндии есть такие два острова, что с одного до другого можно добраться двумя разными путями (но, может быть, с пересадками на других островах).

Решение. Представим себе острова вершинами графа, а маршруты — рёбрами этого графа. В таком графе сумма степеней вершин равна $17 \cdot 4$, и значит, в нём $17 \cdot 4 : 2 = 34$ ребра. Если в этом графе есть цикл, то между любыми вершинами цикла есть два пути. Если же циклов в этом графе нет, то граф является деревом или состоит из нескольких деревьев, а в любом дереве число рёбер на 1 меньше числа вершин. Но у нас в графе рёбер больше, чем вершин, значит, в графе есть цикл.

Задача 15.

На одном из островов Морляндии 53 города, некоторые из них соединены дорогами, и любые два города соединяет ровно один путь (последовательность дорог). Сколько дорог на этом острове?

Решение. Пусть города будут вершинами графа, а маршруты — рёбрами этого графа. В этом графе любые два города соединяет ровно один путь, и граф является деревом. В дереве вершин на одну больше, чем рёбер, значит, дорог на одну меньше, чем городов, следовательно, их 52.

Ответ: 52.

Задача 16.

В 2009 году водное сообщение между 17 островами Морляндии стало невозможным из-за нашествия акул. Правительство организовало воздушное сообщение так, чтобы с каждого острова можно было попасть на любой другой (но, может быть, с пересадками). Было проложено 16 маршрутов. Докажите, что если один маршрут закрыть, то найдётся остров, с которого нельзя будет добраться до столицы (столица расположена на одном острове).

Решение. Пусть острова — вершины графа, а рёбра — маршруты. Так как с любого острова можно попасть на любой другой, то граф — связный, в нём 17 вершин и 16 рёбер, рёбер на 1 меньше, значит, это дерево. Если один маршрут закрыть (удалить одно ребро из дерева), то граф станет несвязным. Тогда рассмотрим вершину (остров) из той компоненты связности, в которую не входит столица. С этого острова нельзя будет добраться до столицы.

Задача 17.

Маша и Саша любят играть в такую игру: в рыболовной прямоугольной сетке размером 4×5 ячеек по очереди перерезают по одной верёвочке так, чтобы сетка не распалась на куски. Победителем станет тот, кто разрежет последнюю верёвочку. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Представим узлы сетки вершинами, а верёвочки — рёбрами графа. В начале игры было $5 \cdot 6 = 30$ вершин и $5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 49$ рёбер (рис. 77).

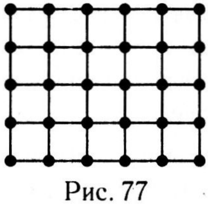


Рис. 77

Можно удалять рёбра до тех пор, пока в графе остались циклы. Как только граф станет деревом, при удалении любого ребра он перестанет быть связным, и игрок не сможет сделать ход. Вершин при этом осталось 30, и рёбер стало $30 - 1 = 29$. За игру будет удалено $49 - 29 = 20$ рёбер, последний ход сделает второй игрок и выиграет.

Ответ: второй.

Задача 18.

На чемпионате Морляндии 30 борцов играют по олимпийской системе — проигравший выбывает. За какое наименьшее число встреч можно определить победителя?

Решение. Представим каждую встречу в виде ребра графа. Ясно, что получилось дерево, в котором 30 вершин. Рёбер в нём на 1 меньше, т. е. 29.

Другое решение. После каждого поединка один участник выбывает. Сначала было 30 участников, в конце остался один. Значит, провели 29 встреч.

Ответ: 29.

Задачи для самостоятельного решения

11.25. В Морляндии объявили конкурс: в куске сетки размером 5×20 ячеек нужно перерезать как можно больше верёвочек так, чтобы сетка не распалась на куски. Победитель получит приз. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать?

11.26. Чтобы определить лучшего поэта острова Каменный, все 12 поэтов играют в такую игру. Каждый день два поэта читают друг другу стихи до тех пор, пока один их них не заснёт. Уснувшего увозят на соседний остров. Сколько дней будет длиться игра, пока не выявится победитель?

11.27. В деревне 23 огорода, некоторые из них разделены канавами, причём от каждого огорода можно добраться до любого другого, перелезая через канавы, ровно одним способом. Сколько канав между огородами в этой деревне?

11.28. У царя было трое сыновей, а дочерей не было. Среди потомков царя 45 имели каждый по два сына и не имели ни одной дочери, а все прочие умерли бездетными. Сколько всего потомков было у царя?

11.29. В марсианском метро 100 станций, при этом с любой станции можно проехать на любую другую (возможно, с пересадками). Часть из них закрывают на ремонт так, чтобы между всеми незакрытыми станциями остался проезд. Докажите, что возможно закрыть любое число станций, меньшее 100.

11.30. В области 56 городов, между ними проложены дороги так, что из каждого города можно проехать в любой другой, может быть, заезжая в другие города. Докажите, что можно найти такой город, что если перекопать все дороги, ведущие в него, между остальными городами всё равно останется дорожная связь.

11.31. В планетной системе 20 планет, между всеми установлена прямая взаимная связь. Какое наибольшее число связей можно нарушить, чтобы с каждой планеты можно было связаться с любой другой, возможно, через другие планеты?

11.32. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Всякий отрезок, являющийся общей стороной двух из 24 полученных квадратов, окрашен в синий или красный цвета. Известно, что красных отрезков 26. Докажите, что на поверхности кубика найдётся замкнутая ломаная линия, состоящая только из красных отрезков.

11.33. 2008 городов соединены дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что построено, по крайней мере, 2007 дорог.

11.34. На соревнованиях по армрестлингу 44 спортсмена играют по олимпийской системе — проигравший выбывает. За какое число встреч можно определить победителя?

11.35. Квадрат 9×9 выложили из спичек. Какое наименьшее число спичек нужно убрать, чтобы с любого поля можно было пройти на любое другое, не перепрыгивая через спички?

Эйлеровы кривые. Эйлеров путь. Эйлеров цикл

Одним из видов задач в теории графов являются задачи о прохождении графа «одним росчерком». Фигура (граф), которую можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, должна быть связной.

Задача 19.

Можно ли придумать такой обход (т. е. путь, при котором мы рисуем граф «одним росчерком», не отрывая карандаш от бумаги) графа на рисунке 78, при котором каждое ребро входит в обход ровно один раз? (Такой путь называют эйлеровым путём.)

Возможно ли, чтобы начало и конец пути при этом совпадали? (Такой путь называют эйлеровым циклом.)

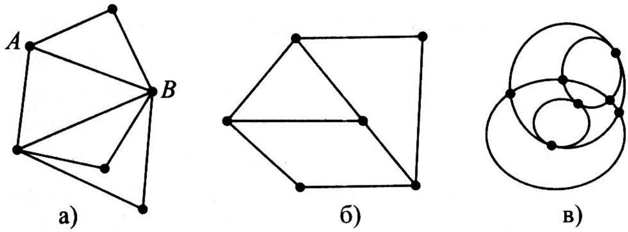


Рис. 78

Если попробовать выполнить задание, то легко убедиться, что граф на рисунке 78а возможно обойти, если начать обход с одной из вершин A или B, а закончить во второй вершине.

Граф на рисунке 78в можно обойти, начав с любой вершины и закончив в ней же.

Граф на рисунке 78б обойти «одним росчерком» невозможно. Докажем это.

Представим, что вершина не является началом или концом обхода. Тогда мы сколько раз «зашли» в эту вершину, столько раз и «вышли». Значит, вершина чётная.

Если начало обхода совпадает с концом, то эта вершина тоже чётная. Если же начало и конец обхода — разные вершины графа, то их степень нечётная.

Можно доказать такие свойства графа:

> *— если в связном графе все вершины чётные, то в графе есть эйлеров цикл;*
> *— если в связном графе две вершины нечётные, то есть эйлеров путь, но не эйлеров цикл;*
> *— если в графе больше двух нечётных вершин, то в нём нет эйлерова пути.*

Напомним, что в графе не может быть нечётного числа нечётных вершин.

Задача 20.

Ваня, приехав из аквапарка, рассказывал, что в парке на озере имеются 5 островов, с каждого из которых ведёт 1, 3 или 5 мостов. Можно ли утверждать, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

Можно ли обойти все мосты, побывав на каждом из них ровно по одному разу?

Решение. Предположим, что мосты — рёбра, а острова — вершины графа. Все они нечётные. Тогда их количество в графе должно быть чётно. (Островов 5, и каждый из них имеет нечётную степень, т. е. нарушается теорема о числе нечётных вершин.) Поэтому должен быть мост на берег озера, берег и будет ещё одной вершиной графа.

В получившемся графе 6 нечётных вершин, значит, он не содержит эйлерова пути и его нельзя обойти заданным образом.

Ответ: да; нет.

Задача 21.

Какой наименьший путь должна пройти поливальная машина, чтобы полить все улицы, показанные на рисунке 79? Улицы образуют квадрат со стороной 300 м (между перекрёстками 100 м). Стороны квадрата — тоже улицы.

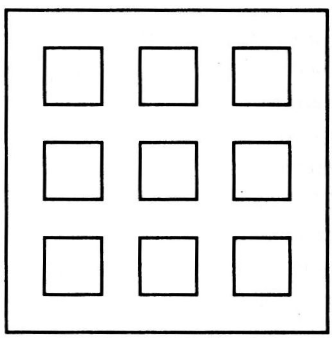


Рис. 79

Решение. Рассмотрим граф, где перекрёстки — вершины, отрезки улиц между соседними перекрёстками — рёбра. Поливальная машина должна проехать по каждой улице хотя бы один раз, значит, хотя бы 2400 м. Покажем, что маршрут такой длины невозможен, если машина не умеет отрываться от дороги. Нечётное число улиц пересекается на восьми перекрёстках, т. е. восемь вершин имеют нечётную степень. Следовательно, начертить граф, не отрывая карандаша, невозможно. Любой маршрут поливальной машины должен проходить по каким-то улицам дважды, чтобы осталось не более двух нечётных вершин, т. е. по $6 : 2 = 3$ улицам надо проходить дважды (каждое ребро добавляет единицу к степеням двух вершин).

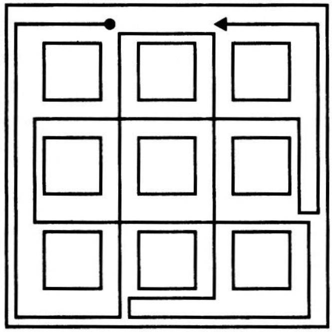


Рис. 80

Ответ: Минимальная длина маршрута равна 27 рёбрам, т. е. 2700 м. Пример обхода на рисунке 80.

Задача 22.

Можно ли из куска проволоки длиной 200 см изготовить каркас пятиугольной пирамиды с рёбрами по 20 см, не ломая проволоку? Если нет, то какое минимальное число раз придётся ломать проволоку, чтобы изготовить каркас?

Решение. В пирамиде из каждой вершины основания выходит по 3 ребра, и из одной вершины 5 боковых рёбер. Нечётных вершин 6. Этот граф не содержит эйлеров путь, значит, нельзя сделать каркас, не ломая проволоки. Но если сломать проволоку один раз, то можно разделить граф на два, в сумме у которых будет 6 нечётных вершин. Значит, у одного из этих графов будет хотя бы 4 вершины с нечётной степенью.

Следовательно, придётся ломать проволоку хотя бы два раза. Пример легко приводится.

Ответ: нет; 2 раза.

Задачи для самостоятельного решения

11.36. а) Можно ли пройти по комнатам дома и по его окрестностям, проходя через каждую дверь ровно 1 раз? (рис. 81). В какой комнате можно начать путь и в какой он закончится?

б) Можно ли пройти по комнатам дома, проходя через каждую внутреннюю дверь ровно 1 раз, если двери из дома закрыты? Можно ли при этом вернуться в ту же комнату?

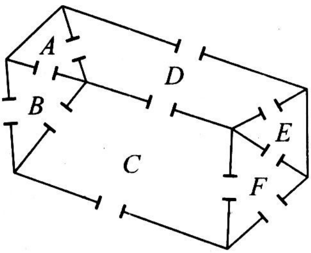


Рис. 81

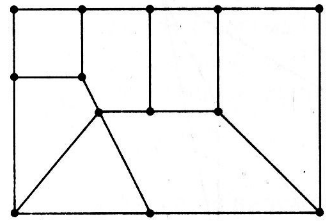


Рис. 82

11.37. Можно ли из куска проволоки длиной 90 см изготовить каркас призмы с рёбрами по 10 см, не ломая проволоку? Если нет, то какое минимальное число раз придётся ломать проволоку, чтобы изготовить каркас?

11.38. Какую минимальную длину должна иметь проволока, чтобы её не нужно было ломать для изготовления треугольной призмы, все рёбра которой равны 10 см?

11.39. Сможет ли кот прогуляться по дворам и их окрестностям (рис. 82), перелезая через каждый забор ровно один раз? Каждый забор обозначен на плане отрезком между выделенными точками.

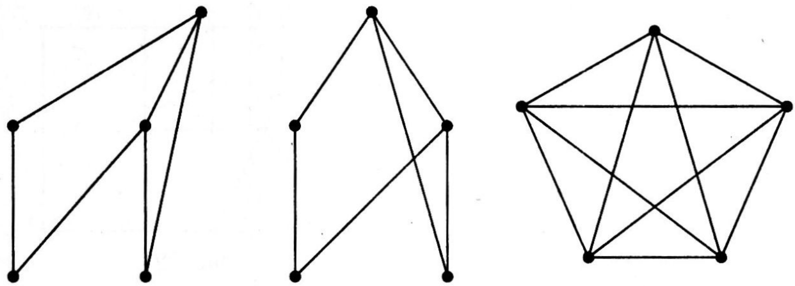
11.40. Группа городов гномов соединена тоннелями так, что из каждого города можно добраться до любого другого. Гном Гру-Гру обошёл все города, пройдя по каждому тоннелю ровно один раз. В городе Серебряный он побывал 2 раза, при этом он не с него начал, но в нём закончил свой путь. Сколько тоннелей ведёт из города Серебряный?

Плоские графы. Теорема Эйлера

Плоским графом называют такой граф, который можно нарисовать на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались нигде, кроме вершин.

Говорят, что плоский граф правильно нарисован, если его рёбра не пересекаются.

Например, на рисунке 83а и б изображены плоские графы, но граф б нарисован неправильно. Граф на рисунке 83в не является плоским.



а) б) в)

Рис. 83

Правильно нарисованный плоский граф разбивает плоскость на части, которые называют гранями. При этом внешнюю часть плоскости тоже считают гранью графа. Например, на рисунке 83а 3 грани.

Для плоского графа верна теорема Эйлера.

Для правильно нарисованного связного плоского графа выполняется равенство: $B + \Gamma - P = 2$, где B — число вершин, Γ — число граней, P — число рёбер графа.

Доказательство. Будем удалять рёбра до тех пор, пока не получится дерево. После удаления ребра число рёбер уменьшится на 1, число граней тоже уменьшится на 1, потому что 2 грани, которые разделяло ребро, сольются в одну грань. Число вершин останется прежним. Значит, при удалении ребра значение выражения $B + \Gamma - P$ не изменяется. Когда мы получим дерево, грань останется одна, а рёбер будет на 1 меньше числа вершин. $B + \Gamma - P = B + 1 - (B - 1) = 2$.

Формулу $B + \Gamma - P = 2$ называют формулой Эйлера.

Для правильно нарисованного плоского графа без кратных рёбер выполняется неравенство $2P \geqslant 3\Gamma$.

Доказательство. Каждую грань ограничивают хотя бы 3 ребра, но при этом каждое ребро мы посчитали дважды, т. к. оно ограничивает две грани.

Для правильно нарисованного плоского графа без кратных рёбер выполняется неравенство $P \leqslant 3B - 6$.

Доказательство. Из только что доказанного утверждения следует, что $Г \leqslant 2P : 3$. Для связного плоского графа выполняется теорема Эйлера $B + Г - P = 2$, отсюда $2 + P - B = Г \leqslant 2P : 3$. Тогда $P \leqslant 3B - 6$. Для несвязного плоского графа это неравенство тоже верно, достаточно сложить неравенства для компонент связности.

Задача 23.

Докажите, что полный граф с 5 вершинами не является плоским.

Решение. $B = 5$, $P = 5 \cdot 4 : 2 = 10$, $10 > 3 \cdot 5 - 6$. Не выполняется неравенство $P \leqslant 3B - 6$. Значит, граф не является плоским.

Задача 24.

Внутри треугольника отметили 10 точек и соединили их между собой и с вершинами треугольника так, что исходный треугольник разбился на треугольники. Сколько получилось таких треугольников?

Решение. Пусть получилось N треугольников. Рассмотрим граф с 13 вершинами (точки и вершины исходного треугольника). У него $(N+1)$ граней (учитывая внешнюю область), у каждой грани по 3 ребра, но каждое ребро ограничивает две грани, $P = 3(N + 1) : 2$. Подставим в формулу Эйлера: $13 - 3(N + 1) : 2 + (N + 1) = 2$, получим $N = 21$.

Ответ: 21 треугольник.

Задача 25.

Дома соединены тропинками так, что никакие две тропинки не пересекаются. Докажите, что есть дом, из которого выходит не более 5 тропинок.

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины — дома́, тропинки — рёбра. Этот граф плоский. Пусть от каждой вершины отходит не менее 6 рёбер. Вершин B, рёбер $P \geqslant 6 \cdot B : 2 = 3B$. Чтобы проверить, будет ли граф плоским, подставим в неравенство $P \leqslant 3B - 6$. Получилось $3B \leqslant 3B - 6$, что неверно. Значит, граф не является плоским. Противоречие, и следовательно, в любом плоском графе есть вершина, степень которой не более 5.

Задача 26.

Существует ли выпуклый многогранник, в котором у всех граней разное число сторон?

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины и рёбра соответствуют вершинам и рёбрам выпуклого многогранника. Для него тоже будет верна формула Эйлера (доказательство аналогично). Число рёбер равно половине суммы степеней вершин. Из каждой вершины выходит хотя бы 3 ребра, значит, всего число рёбер $P \geqslant 3B/2$, $2P \geqslant 3B$. Из формулы Эйлера $B+\Gamma-P=2$, $B=2+P-\Gamma \leqslant 2P/3$, отсюда $P/3 \leqslant \Gamma-2$, или $P \leqslant 3\Gamma-6$. С другой стороны, если у всех граней разное число сторон, то у одной грани их не менее 3, у второй не менее 4, ..., у Γ-й грани не менее $\Gamma+2$. Значит, сторон у этих граней не менее $(3+4+\dots+\Gamma+2) = \Gamma(3+(\Gamma+2)):2$, а рёбер $P \geqslant \Gamma(3+(\Gamma+2)):4$, т. к. мы каждое ребро считали 2 раза. $\Gamma(3+(\Gamma+2)):4 \leqslant P \leqslant 3\Gamma-6$. Отсюда получаем, что таких графов нет.

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в 2 цвета так, чтобы не было рёбер, соединяющих одноцветные вершины.

Лемма. *В двудольном графе все циклы имеют чётную длину.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный цикл в двудольном графе. Будем считать, что все вершины графа уже раскрашены в красный и синий цвет в соответствии с определением двудольного графа. Начнём двигаться по циклу от любой его вершины. Тогда после каждого перехода от красной вершины к синей должен следовать переход от синей вершины к красной, и наоборот. Значит, таких переходов будет равное количество, а рёбер в цикле — чётное число.

Для двудольного плоского графа без кратных рёбер выполняется неравенство $P \leqslant 2B-4$.

Пусть такой граф правильно нарисован. Рассмотрим грань такого графа. Её ограничивает цикл хотя бы из 4 рёбер. Если мы просуммируем количество рёбер каждой грани, то получим удвоенное число рёбер и неравенство $2P \geqslant 4\Gamma$. Из равенства $B+\Gamma-P=2$ получим, что $\dfrac{P}{2} \geqslant \Gamma = 2+P-B$, $\dfrac{P}{2}-B+2 \leqslant 0$ и $P \leqslant 2B-4$.

Задача 27.

Можно ли соединить непересекающимися тропинками три домика с тремя колодцами?

Решение. Нет. Пусть домики и колодцы — вершины графа, тропинки — рёбра графа. В двудольном графе $B=6$, $P=9$. Неравенство $P \leqslant 2B-4$ не выполняется, следовательно, граф не является плоским.

Задачи для самостоятельного решения

11.41. Каждые два из 11 городов связаны или железнодорожным, или автобусным маршрутом. Докажите, что или железнодорожные маршруты пересекаются, или автобусные.

11.42. Внутри квадрата отмечено 20 точек, они соединены друг с другом и с вершинами квадрата непересекающимися отрезками так, чтобы квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

11.43. Докажите, что на однослойной печатной плате нельзя проложить проводящие дорожки между 20 точками без пересечений, если от 10 точек должны идти по 5 дорожек, а от 10 — по 6 дорожек.

Задачи на ориентированные графы. Разные задачи

Ориентированный граф — граф, на рёбрах которого расставлены стрелки.

Задача 28.

В городе 10 остановок. Диспетчер составил схему маршрутов, и получилось так, что с трёх остановок выходит по 2 маршрута, а завершается на них по 3 маршрута, с четырёх остановок выходит по 4 маршрута и по столько же завершается на них, с двух выходит по 3 маршрута, завершается на них по 2 и с одной выходит 1 маршрут и завершаются на ней 2 маршрута. То, что на остановке начинается и завершается неравное количество маршрутов, он объяснил тем, что это начальные или конечные остановки для данных автобусов. Докажите, что он всё равно ошибся.

Решение. Обозначим маршруты рёбрами со стрелками. Если ребро откуда-нибудь вышло, оно вошло в другую вершину. В сумме число «входящих» и «выходящих» маршрутов должно быть одинаково. Если это не выполняется (как в нашей задаче), такого ориентированного графа не существует.

Задача 29.

В тоннелях, прокопанных между городами гномов, поставили двери, через которые можно пройти только в одну сторону. Из каждого города тоннель ведёт в любой другой. Можно ли поставить двери так, что, выйдя из любого города (из числа тех, откуда можно выйти), в него нельзя будет вернуться?

Решение. Можно. Для этого достаточно пронумеровать города и провести стрелки от городов с меньшими номерами к городам с бóльшими.

Ответ: можно.

Задача 30.

В озеро выпустили 40 щук. Щука сыта, если она съела трёх других щук (сытых или голодных). Какое наибольшее число щук может насытиться? Съеденная сытая щука тоже считается сытой.

Решение. Рассмотрим ориентированный граф, в котором от щуки (вершины) идёт дуга к съеденной щуке (другой вершине). Чтобы щука была сытой, нужно, чтобы от вершины шло не менее 3 дуг. Если сытых щук N, всего должно выходить не менее $3N$ дуг. Но к любой из 40 вершин ведёт не более одной дуги, т. к. съесть щуку можно лишь один раз. Значит, дуг не более 40. $3N \leqslant 40$, $N \leqslant 13$. Пример для 13 щук нетрудно нарисовать, фактически неважно, в каком порядке будут съедаться щуки, лишь бы каждая не съела больше трёх щук.

Ответ: 13.

Задача 31.

Шесть столбиков связали попарно лентами, каждая лента либо красная, либо зелёная. Докажите, что некоторые три ленты образуют одноцветный треугольник.

Решение. Рассмотрим любой столбик. От него идут 5 лент, значит, хотя бы 3 ленты будут одного цвета. (Если бы каждого из двух цветов было не больше 2 лент, то всего было бы не больше 4 лент.)

Рассмотрим граф на рисунке 84. От точки A идут три ленты одинакового цвета в точки B, C, P. Если в треугольниках ABC, ACP, ABP есть ленты разного цвета, то ленты BC, CP и BP окажутся второго цвета, значит, они образуют одноцветный треугольник.

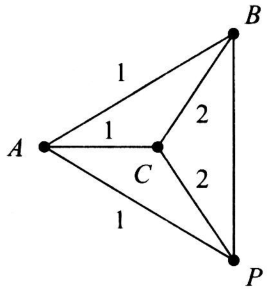


Рис. 84

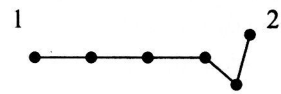


Рис. 85

Задача 32.

Плоскость раскрашена в три цвета. Докажите, что найдутся две разноцветные точки на расстоянии 1 м.

Решение. Рассмотрим две любые разноцветные точки. Соединим их ломаной с длиной звена 1 м (рис. 85). Рассмотрим вершины этой ломаной. Если бы все цвета были одинаковы, то концы ломаной тоже были бы одного цвета. Но они разноцветные, значит, найдутся две вершины ломаной разного цвета, соединённые отрезком длиной 1 м.

Задача 33.

В ориентированном графе (без петель и кратных дуг) 101 вершина. У каждой вершины число входящих и число выходящих рёбер равно 40, причём в графе нет пары дуг, направленных в противоположных друг другу направлениях. Докажите, что из любой вершины можно попасть в любую, проходя не более чем по трём рёбрам.

Решение. Рассмотрим любые две вершины a и b. Предположим, что из a нельзя пройти в b по трём или менее рёбрам. Пусть A — множество из 40 вершин, в которые ведут рёбра из a, B — множество из 40 вершин, из которых идут рёбра в b, C — множество из оставшихся 19 вершин. Тогда все рёбра, выходящие из A, идут в A или в C. Этих рёбер по условию всего $40 \cdot 40$. Но рёбер внутри A не больше чем $40 \cdot 39 : 2$, а рёбер из A в C не больше чем $40 \cdot 19$, что в сумме даёт меньше чем $40 \cdot 40$. Противоречие. Значит, из a можно пройти в b по трём рёбрам.

Задачи для самостоятельного решения

11.44. На олимпиаде предлагалось 20 задач. Каждый из 20 школьников решил две задачи, и каждая задача была решена двумя школьниками. Докажите, что можно так организовать разбор задач, что каждый школьник объяснит одну из решённых им задач и все задачи будут разобраны.

11.45. В одной школе учится всего 20 детей. У любых двух из них есть общий дедушка. Докажите, что у одного из дедушек в этой школе учится не менее 14 внуков и внучек.

11.46. На перемене несколько ребят разговорились о том, кто во сколько игр играет. Выяснилось, что каждый играет в две и только две игры, в каждую игру играет четыре человека, и любая комбинация из двух игр играется одним человеком. Во сколько различных игр играют эти ребята? Сколько ребят разговаривали?

11.47. Докажите, что в любой компании из 6 человек найдётся или трое людей, попарно знакомых друг с другом, или трое попарно незнакомых.

11.48. В некотором районе 41 город. Каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением, при этом в каждый город входит 20 дорог и из каждого города выходит 20 дорог. Докажите, что из любого города в любой другой можно проехать не более чем по двум дорогам.

11.49. В классе больше 20, но меньше 30 человек. Любой мальчик дружит с тремя девочками, а любая девочка — с пятью мальчиками. Сколько человек в классе?

11.50. В стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам.

11.51. В королевстве 2009 городов, и из каждого выходит не менее 100 дорог с двухсторонним движением. Известно, что из каждого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более чем с 56 пересадками (пересадка означает проезд через промежуточный город).

11.52. Рёбра полного 17-вершинного графа раскрашены в три цвета. Докажите, что найдётся одноцветный треугольник.

11.53. Докажите, что среди любых 9 человек найдётся 4 попарно знакомых или 3 попарно незнакомых.

11.54. Докажите, что в связном графе можно так расставить стрелки на рёбрах, чтобы из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

11.55. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Все расстояния между планетами различны. Докажите, что если число планет в системе нечётно, то какую-то планету никто не наблюдает.

11.56. После завершения теннисного турнира по круговой системе (каждый играет с каждым) оказалось, что ни один из участников не проиграл все встречи. Докажите, что найдутся три такие участника A, B и C, что A выиграл у B, B — у C, C — у A.

Глава XII. Олимпиада

8 класс

1. Решите ребус $ABBB + A + B = CDDB$. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные.

2. У продавца есть 10 дынь и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общую массу любых трёх дынь. Как за шесть таких взвешиваний определить общую массу всех дынь?

3. Найдите число, которое при умножении на свою последнюю цифру даёт 2009.

4. Пять прямых пересекаются в одной точке (см. рис. 87). Известно, что $\angle 1 = 30°$, $\angle 2 = \angle 3 = 20°$, $\angle 4$ в полтора раза больше $\angle 5$. Найдите величину $\angle 5$.

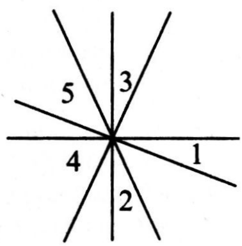


Рис. 87

5. По кругу расставлено 100 фишек. Двое играют в игру. За ход разрешается взять одну или две подряд идущие фишки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре, начинающий или его партнёр?

9 класс

1. Оля написала на доске несколько целых чисел, Петя записал под каждым Олиным числом его квадрат, а Вася сложил все написанные на доске числа и получил 2009. Докажите, что кто-то из мальчиков ошибся.

2. Докажите, что $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ — целое число, и найдите его.

3. M и N — середины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что отрезки DM и DN делят диагональ AC на 3 равные части.

4. На доске записано квадратное уравнение $*x^2 + *x + * = 0$, где вместо коэффициентов квадратного трёхчлена написан символ $*$. Первый из играющих называет любые три числа, второй расставляет их по своему выбору вместо символов $*$. Может ли первый добиться, чтобы полученное уравнение имело два различных рациональных корня, или второй всегда сможет ему помешать?

5. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

10 класс

1. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ задана первыми двумя членами $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ и законом $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Найдите a_{2009}.

2. Среди пяти внешне одинаковых монет 3 настоящие и 2 фальшивые, одинаковые между собой по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих (но гарантированно не равны по весу настоящим). Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?

3. Пусть $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$, причём $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$. Найдите значение выражения $(a + b + 1)(b + c + 1)(c + a + 1)$.

4. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Известно, что боковая сторона трапеции точкой касания делится на отрезки длиной 4 и 1. Найдите площадь трапеции.

5. Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа расставить натуральные числа таким образом, чтобы при любых натуральных $m, n > 100$ сумма чисел в любом прямоугольнике $m \times n$ клеток делилась на $m + n$?

11 класс

1. Докажите, что $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}} - \sqrt{2010 - 2\sqrt{2009}}$ — целое число, и найдите его.

2. На лавочке сидели три разные буквы русского алфавита. К ним справа последовательно стали подсаживаться другие буквы так, чтобы порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр в порядковых номерах двух предыдущих букв. Оказалось, что, начиная с некоторого момента, буквы стали циклически повторяться. Может ли циклически повторяющийся набор состоять из одной буквы? Если да, укажите эту букву.

3. Докажите, что если A, B, C — углы треугольника, то справедливо тождество $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$.

4. Известно, что многочлен ax^3+bx^2+cx+d принимает целые значения при всех целых значениях x. Может ли оказаться $a=\frac{1}{6}$?

5. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AO и пересекающая прямую BC в точке M. Из точки O на прямую AM опущен перпендикуляр OD. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

Решения олимпиады

8 класс

1. Из того, что числа $ABBB$ и $CDDB$ оканчиваются на одинаковую цифру, следует, что $A+B$ оканчивается на 0, т. е. $A+B=10$, $ABBB+10=CDDB$. Заметим теперь, что первые цифры у чисел $ABBB$ и $CDDB$ различны, откуда следует, что был переход через тысячу. Но это возможно только в том случае, когда $B=9$. Откуда $A=1$, тогда $C=2$, $D=0$.

Ответ: $1999+1+9=2009$.

2. Пронумеруем дыни M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9, M_{10}. Тогда взвешивания можно, например, проводить в таком порядке: $M_1+M_2+M_3$, $M_2+M_3+M_4$, $M_1+M_3+M_4$, $M_1+M_2+M_4$, $M_5+M_6+M_7$, $M_8+M_9+M_{10}$. Складывая результаты четырёх первых измерений, получим утроенную сумму масс первых четырёх дынь. Сумма двух последних измерений даст сумму масс оставшихся шести дынь. Таким образом, для получения массы всех дынь нужно сумму четырёх первых измерений, делённую на 3, сложить с суммой последних двух измерений.

3. Используем разложение 2009 на простые множители: $2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41$, откуда ясно, что последней цифрой может быть только 7, а само число $7 \cdot 41$.

Ответ: 287.

4. Поскольку каждому пронумерованному углу соответствует равный ему непронумерованный вертикальный угол, то сумма пронумерованных углов равна 180°, т. е. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$; тогда $2{,}5\angle 5 = 180° - 30° - 2 \cdot 20° = 110°$, откуда $\angle 5 = 44°$.

5. Пусть фишки стоят в вершинах правильного 100-угольника. Если первый игрок берёт какие-то фишки, то второй игрок берёт фишки, симметричные фишкам первого относительно центра круга. Например (см. рис. 88), если первый возьмёт фишки D и C, то второй E и F, если первый возьмёт фишку C, то второй фишку F. Тогда после каждого хода второго остаётся чётное число фишек, расположенных симметрично относительно центра, и количество фишек постоянно уменьшается, значит, перед последним ходом первого игрока останется две группы фишек, симметрично расположенные относительно центра.

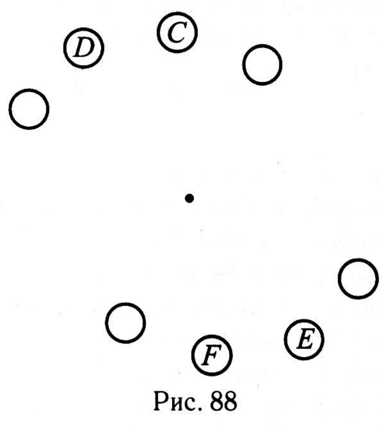


Рис. 88

Ответ: выиграет второй.

9-й класс

1. Пусть Оля записала на доске числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, тогда Петя должен был записать числа $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$, а Вася должен был составить следующую сумму: $S = a_1 + a_1^2 + a_2 + a_2^2 + \cdots + a_n + a_n^2 = a_1(a_1 + 1) + a_2(a_2 + 1) + \cdots + a_n(a_n + 1)$. Число $a(a + 1)$ чётное,

сумма чётных чисел чётна, поэтому S не может равняться 2009. Значит, кто-то из мальчиков ошибся.

2. $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1}-\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1}=$ $=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)=2.$

Ответ: 2.

3. Пусть диагонали AC и BD параллелограмма пересекаются в точке O, а отрезки DM и DN пересекают диагональ AC в точках P и Q соответственно. Тогда Q — точка пересечения медиан треугольника BCD, P — точка пересечения медиан треугольника BAD. Диагонали точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, тогда $OQ=\frac{1}{3}OC$, $OP=\frac{1}{3}OA$, $AP=\frac{2}{3}AO$, $QC=\frac{2}{3}OC$. Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, $AO=CO$ и $AP=OP+OQ=\frac{2}{3}AO=CQ=AP$.

4. Первый игрок выиграет, если назовёт попарно различные ненулевые целые числа A, B, C, сумма которых равна нулю. Тогда квадратное уравнение $Ax^2+Bx+C=0$ имеет корни $x_1=1$ и $x_2=\frac{C}{A}$. При этом $x_1\neq x_2$.

5. Можно считать, что ножки двигаются поочерёдно, так как несколько ходов подряд одной ножкой можно заменить одним ходом. Введём на листе прямоугольную систему координат с осями, параллельными линиям сетки, и началом координат в одном из узлов. Назовём чётностью узла чётность суммы его координат. Будем считать одну из ножек циркуля первой, а другую — второй и посмотрим, как меняется чётность узлов, в которые попадает вторая ножка при выполнении шагов. Обозначим вектор, соединяющий первую ножку со второй после i-го шага, через $v_i=(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots$, тогда $x_i^2+y_i^2=d^2$ — квадрату раствора циркуля, целому числу. Рассмотрим три возможных случая.

а) Пусть d^2 нечётно, тогда во всех парах (x_i,y_i) одно из чисел чётно, а другое нечётно, поэтому x_i+y_i нечётно, и на i-м шаге чётность основания передвигаемой ножки тоже сохраняется. Поскольку изначально чётности ножек были различны (в силу нечётности числа x_0+y_0), поменяться местами они не могут.

б) Пусть $d^2 = 4c + 2$. Тогда все числа x_i, y_i нечётны, и каждая из координат ножек циркуля сохраняет свою чётность: $x_i - x_{i-1} = 2 \cdot k_i$, $y_i - y_{i-1} = 2 \cdot l_i$. И снова, поскольку изначально чётность координат разных ножек была различна (в силу нечётности x_0, y_0), ножки циркуля поменяться местами не могут.

в) Пусть $d^2 = 4c$. В этом случае все числа x_i, y_i чётны. Рассмотрим вместо исходной новую сетку, у которой ячейки — квадраты со стороной в два раза больше, причём ножки циркуля исходно располагаются в её узлах. Тогда шаги циркуля будут выполняться по узлам новой сетки, а для неё выполнен один из случаев а), б) или в). При этом квадрат длины в новой сетке уменьшится в четыре раза (из-за выбора новой единицы измерения). Поскольку d^2 — конечное число, то через некоторое число шагов мы получим случай а) или б).

Ответ: нельзя.

10 класс

1. Вычислим несколько последующих членов последовательности $a_3 = \frac{3}{2}$, $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{3}$, $a_6 = \frac{2}{3}$, $a_7 = 2$, $a_8 = 3$ и т. д. Видим, что последовательность периодична с периодом 6. Отсюда $a_{2009} = a_{334 \cdot 6+5} = a_5 = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

2. За одно взвешивание найти настоящую монету не удаётся, если возникнет неравенство (это легко проверить как в случае, когда на чашках по одной монете, так и в случае когда их по две). Укажем, как найти настоящую монету за 2 взвешивания. Обозначим массы монет m_1, m_2, m_3, m_4, m_5. Взвесим пары m_1, m_2 и m_3, m_4. Пусть $m_1 = m_2$ и $m_3 = m_4$, тогда мы взвешивали две пары настоящих и фальшивых монет. Оставшаяся монета — настоящая. Аналогично если оба взвешивания показывают разную массу монет, то монеты с бо́льшим весом и монеты с меньшим весом будут двумя парами монет — настоящей и фальшивой, и оставшаяся монета настоящая. В случае если при одном взвешивании получатся равные, а при другом — разные массы (например $m_1 = m_2$ и $m_3 > m_4$), то первое взвешивание показывает, что m_1, m_2 либо обе настоящие, либо обе фальшивые. Второе взвешивание показывает, что пара m_3, m_4 содержит одну настоящую и одну фальшивую монету. Так как

фальшивых монет всего 2, первая пара монет — настоящая и мы можем взять любую из монет равного веса.

3. Преобразуем равенство: $a^2-b=b^2-c$; $a^2-b^2=b-c$; $a+b=\dfrac{b-c}{a-b}$; $a+b+1=\dfrac{a-c}{a-b}$. Аналогично $b+c+1=\dfrac{b-a}{b-c}$; $c+a+1=\dfrac{c-b}{c-a}$. Получаем $(a+b+1)(b+c+1)(c+a+1)=\dfrac{a-c}{a-b}\cdot\dfrac{b-a}{b-c}\cdot\dfrac{c-b}{c-a}=-1.$

4. По условию задачи выполним чертёж (см. рис. 89).

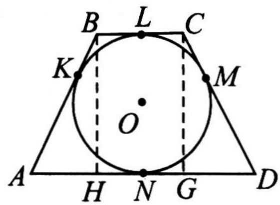


Рис. 89

Так как $BK=1$ (по условию), то $BL=LC=CM=BK=1$. Отсюда $BC=2$. Аналогично $AK=4$ (по условию), $AN=DN=MD=AK=4$. Отсюда $AD=8$. Поскольку трапеция равнобедренная, то $AH=DG=\frac{1}{2}(AD-BC)=3$. По теореме Пифагора имеем $BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=4$. В итоге
$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot BH=20.$

Ответ: 20.

5. Рассмотрим любой квадрат A размером 200×200 клеток. Пусть он будет угловым квадратом некоторого квадрата B размером $200k\times200k$ клеток, где k — некоторое натуральное число, на которое не делится сумма чисел в квадрате A. Разобьём фигуру $B\setminus A$ на прямоугольники размером $200\times\big(200(k-1)\big)$. В каждом из этих прямоугольников по условию сумма чисел будет делиться на k, в квадрате B — тоже, значит, и в квадрате A сумма чисел будет делиться на k, что невозможно в силу выбора k.

Ответ: нельзя.

11 класс

1. $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}-\sqrt{2010-2\sqrt{2009}}=$

$=\sqrt{(\sqrt{2009})^2+2\sqrt{2009}+1}-\sqrt{(\sqrt{2009})^2-2\sqrt{2009}+1}=$

$=\sqrt{(\sqrt{2009}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2009}-1)^2}=(\sqrt{2009}+1)-(\sqrt{2009}-1)=2.$

Ответ: 2.

2. Вспомним порядок букв в русском алфавите. Пусть a и b — цифры, с помощью которых записывается порядковый номер $(10a+b)$ этой буквы. Цикл состоит из одной буквы, только если $2(a+b)=10a+b$, откуда $b=8a$. Следовательно, или $a=0$, или $a=1$. При $a=0$ получаем $b=0$. Буквы с порядковым номером 0 нет. Если $a=1$, то $b=8$, $10a+b=18$, что соответствует букве Р. Приведём пример трёх букв, которые могли находиться на лавочке изначально. Это буквы с номерами 27, 9, 18 — Щ, З, Р.

3. Пусть $\alpha=\frac{A}{2}$, $\beta=\frac{B}{2}$, $\gamma=\frac{C}{2}$. Тогда $A+B+C=\pi$ и $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

Отсюда $\gamma=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$ и $\sin\gamma=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=$
$=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. Значит,
$\sin^2\gamma=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2=$
$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=$
$=(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)+\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta=$
$=1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+2\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta.$
Тогда $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=$
$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+2\sin^2\alpha\sin^2\beta-$
$-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$
$=1+2\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta+$
$+2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=1.$

4. Известно, что при целых значениях x произведение $(x-1)\cdot x\cdot(x+1)$ кратно шести, т. к. среди трёх последовательных чисел хотя бы одно делится на 2 и хотя бы одно — на 3. Поэтому произведение $\frac{1}{6}(x-1)\cdot x\cdot(x+1)$ всегда принимает целые значения. Значит, при $a=\frac{1}{6}$ многочлен $\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}x$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: да, может.

5. Углы AOC и AOB тупые, например,

$$\angle AOC = 180^\circ - (\angle OAC + \angle OCA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) >$$

$> 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Следовательно, луч OM лежит внутри одного из указанных тупых углов. Поэтому точка M лежит за пределами отрезка BC.

Пусть M лежит на продолжении отрезка BC за точку C (случай, когда M лежит на продолжении BC за точку B, аналогичен рассматриваемому). Так как OD — высота в прямоугольном треугольнике MAO (см. рис. 90), то $MO^2 = MA \cdot MD$ (из подобия треугольников MOD и MAO).

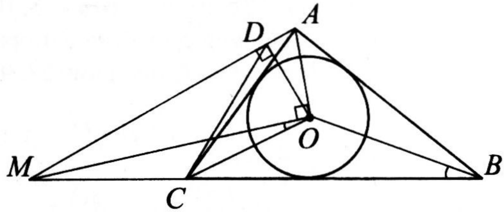


Рис. 90

Так как O — центр вписанной окружности, то

$\angle CAO + \angle ACO + \angle OBC = \frac{\pi}{2}$. С другой стороны, из треугольника AOC получаем, что

$$\angle AOC = \pi - (\angle CAO + \angle ACO) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \angle OBC\right) = \frac{\pi}{2} + \angle OBC > \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда $\angle MOC = \angle AOC - \frac{\pi}{2} = \angle OBC$ и $\triangle MOB$ подобен $\triangle MCO$ ($\angle OMC$ — общий). Следовательно, $\frac{MO}{MC} = \frac{MB}{MO}$, откуда получаем, что $MO^2 = MB \cdot MC$. Из равенства $MA \cdot MD = MB \cdot MC$ получаем, что $\triangle MAB$ подобен $\triangle MCD$. Следовательно,
$\angle MBA = \angle MDC = \pi - \angle ADC$, т. е. вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Правила математического боя

Матбой — это соревнование двух команд (обычно по 6–8 человек) в решении нестандартных задач, подобранных жюри, в умении представлять решения у доски и в умении проверять чужие решения.

Команды получают одинаковые задачи (обычно их 10) и решают их в разных помещениях заданное время (как правило, 2–4 часа), потом собираются вместе для проверки решений. Таким образом, матбой состоит из двух частей: решения задач и собственно боя.

Чтобы определить, кто какую задачу будет докладывать, команды делают «вызовы»: одна команда называет номер задачи, решение которой она хочет услышать, а другая сообщает, принят ли вызов. Обычно команды вызывают друг друга по очереди.

Если вызванная команда хочет отвечать, то она выставляет докладчика, а другая команда — оппонента для проверки решения. Команды могут брать полуминутные перерывы для помощи докладчику или оппоненту.

Если решение задачи принято жюри, то команды переходят к обсуждению другой задачи, а если не принято, — см. разделы «Перемена ролей» и «Корректность вызова».

Если вызванная команда отказалась отвечать, то вызывавшая команда должна сама представить решение задачи. При этом если оппонент докажет, что у докладчика нет решения, то вызов считается некорректным. Тогда вызывавшая команда должна повторить вызов.

Команда может отказаться делать очередной вызов (если у неё не осталось решённых задач и она не хочет делать некорректный вызов). Тогда другая команда получает право рассказать решения любых задач, оставшихся неразобранными.

После каждого выступления жюри даёт командам очки как за доклад, так и за оппонирование. Каждая задача сто́ит 12 баллов.

Решение задач

Во время решения задач (1-я часть матбоя) представитель жюри регулярно посещает команды и отвечает на вопросы по условиям задач. При этом каждое уточнение условий, данное одной команде, сразу же должно сообщаться и другой команде.

Жюри не должно давать информации о степени трудности задач. В процессе решения задач и во время боя команды не должны общаться и получать информацию о количестве решённых соперниками задач. Жюри также не должно знать, сколько задач решено командами.

Ход боя

Когда время на решение задач истекло, команды и жюри собираются вместе. Бой должен проходить в комнате с доской достаточного размера как для записи решений, так и для ведения протокола. Жюри обычно занимает место по центру комнаты — перед доской, команды — по краям. При этом члены каждой команды обычно садятся вокруг нескольких приставленных друг к другу столов, чтобы иметь возможность обсуждать между собой рассказываемое у доски решение.

Существуют ограничения на общение участников (например, оппонент может общаться только с докладчиком и жюри, а капитан — только со своей командой и с жюри). Как правило, каждый участник может выходить к доске не более двух раз (не считая конкурса капитанов). Это число может быть изменено перед боем по решению жюри.

Конкурс капитанов

Перед началом обсуждения необходимо определить, какая команда первой будет делать вызов. Для этого проводится конкурс капитанов. Капитаны выходят к доске и получают достаточно простую задачу на сообразительность, в которой требуется дать только ответ.

Конкурс кончается, когда один из капитанов даст ответ. Если ответ верен, то капитан победил, а если неверен, то победил другой капитан.

Если в течение нескольких минут ни один из капитанов не выразил желание отвечать, следует поменять задачу на более простую.

Капитан, победивший в конкурсе, сообщает, какая команда сделает первый вызов.

Вызов

Капитан вызывающей команды сообщает номер задачи, решение которой команда хочет услышать, а другая команда отвечает, принят ли вызов. На выбор задачи вызывающая команда имеет полминуты. На решение о том, принимается ли вызов, вызываемая команда также имеет полминуты.

Если вызванная команда хочет отвечать, то она сообщает, что вызов принят, и выставляет докладчика, а вызывавшая команда — оппонента для проверки решения.

Если вызванная команда отвечать отказалась, то вызывавшая команда должна сама предъявить решение (выставить докладчика, а другая команда — оппонента). В этом случае говорят, что происходит проверка корректности вызова (см. раздел «Корректность вызова»).

Докладчик и оппонент

В идеале сначала докладчик представляет решение, затем оппонент задаёт вопросы, после чего оппонент сообщает своё мнение о решении (например, «решение не принимается, т. к. такой-то факт не доказан, а на такой-то вопрос не получено удовлетворительного ответа»). И только после этого свои вопросы докладчику задаёт жюри.

В процессе доклада оппонент и жюри стремятся не прерывать докладчика и пользуются лишь выражениями типа: «это очевидно, можно не доказывать», «повторите, пожалуйста, этот момент».

Докладчик может не отвечать на вопросы оппонента во время доклада, но по требованию оппонента или жюри должен дать план решения, т. е. устно коротко рассказать ход решения и указать ответ.

Оппонент не должен требовать доказательства утверждений из школьной программы или круга «известных» фактов. В спорных случаях вопрос решает жюри.

Время на обдумывание вопросов у доски — 1 минута (оппоненту — чтобы задать очередной вопрос, докладчику — чтобы ответить). Также, если докладчик «застопорился» при рассказе решения, ему даётся 1 минута для продолжения (обычно не более одного раза за доклад).

Команды могут помогать докладчику и оппоненту только во время полуминутного перерыва (соперники тоже пользуются этой минутой). Во время своего полуминутного перерыва можно заменить докладчика или оппонента (при этом засчитывается выход к доске).

Если за минуту, данную на обдумывание вопроса, который жюри считает существенным, докладчик не подготовил ответ и команда не взяла полуминутный перерыв, то считается, что в решении есть пробел («дырка»).

Полуминутные перерывы

Каждая команда получает на весь матбой заранее оговорённое количество (обычно 6) перерывов (тайм-аутов) по 30 секунд. Команда может взять перерыв в любое время при докладе или оппонировании. Во время перерыва докладчик и оппонент подходят к своим командам, а сразу после окончания перерыва по сигналу жюри обязаны немедленно вернуться к доске.

Взявшая перерыв команда не вправе сокращать его длительность — время тайм-аута общее. Можно брать несколько тайм-аутов при обсуждении одной задачи.

Взять тайм-аут может только капитан (если капитан находится у доски, тайм-аут берёт заместитель капитана). Докладчик или оппонент может попросить своего капитана взять тайм-аут. При этом решение о том, брать или не брать тайм-аут, остаётся за капитаном.

Перемена ролей

Если в решении имеются «дырки», обнаруженные оппонентом, то, после того как жюри задаст докладчику свои вопросы, вызывавшая команда получает право (но не обязана) «залатать» эти «дырки» (но она не имеет права «залатывать дыры», найденные не оппонентом, а жюри; тем более, она не имеет права рассказывать своё решение). Происходит *перемена ролей* — теперь докладчик становится оппонентом, а оппонент — докладчиком. При этом «новый оппонент» (бывший докладчик) может получить очки за оппонирование, но повторной перемены ролей произойти не может.

По договорённости (по правилам, установленным перед игрой) перемена ролей может осуществляться только в том случае, когда оппонент смог доказать, что у докладчика полностью отсутствует решение (и жюри согласно с этим), т. е. что имеется «дырка» размером в полное решение.

Если оппонент не нашёл пробелов и его команда не взяла полуминутный перерыв, то он и его команда в обсуждении задачи больше не участвуют.

Во время перемены ролей можно заменить бывших докладчика или оппонента (при этом засчитывается выход к доске).

При проверке корректности перемена ролей никогда не происходит, даже если оппонент может доработать представленное решение или у него появится своё.

Корректность вызова

Если вызов принят, то вопрос о его корректности не ставится (иногда говорят: «принятый вызов всегда корректен»).

Если вызов не принят, то вызывавшая команда должна сама представить решение, и здесь возможны два случая:

1) вызывавшая команда не стала отвечать. Тогда вызов «автоматически» считается некорректным;

2) вызывавшая команда выставила докладчика. Тогда происходит обычное обсуждение задачи докладчиком (от вызывавшей команды) и оппонентом (от вызванной) со следующими особенностями: а) перемена ролей произойти не может, так как вызванная команда уже отказалась представлять решение; б) решающее значение имеет ответ оппонента на традиционный вопрос жюри «принимается ли решение?». Если решение не принимается, то оппонент должен строго обосновать свои претензии к решению. Если претензии не обоснованы (в том числе когда «дырки» есть, но оппонент не в состоянии указать на них), то ситуация трактуется так же, как если бы оппонент согласился с решением.

Вызов признаётся некорректным в двух случаях:

1) вызывавшая команда не стала отвечать;

2) вызывавшая команда выставила докладчика, но представила менее половины решения (т.е. не более чем на 6 баллов), и при этом оппонент не принял решения и смог это обосновать (если оппонент принял решение, не разглядев в нём «липу», то вызов считается корректным).

При некорректном вызове оппонент получает 6 очков, а вызывавшая команда — до 6 очков за верные идеи и должна повторить вызов.

Отказ делать вызов

Если у команды не осталось решённых задач, то она может отказываться делать вызов (чтобы избежать некорректного вызова). Тогда другая команда получает право представить все оставшиеся у неё решения.

После отказа от вызова команда до конца боя теряет право представлять решения задач и становится «вечным оппонентом», то есть может получать очки только за оппонирование.

Начисление очков

Каждая задача сто́ит 12 очков (чтобы не сообщать степень трудности задач). Эти очки распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри (жюри достаётся остаток от 12 очков).

Очки даются как за положительный вклад в решение задачи, так и за нахождение ошибок и пробелов в решении. За чистое решение задачи даётся 12 очков, а за «полное» оппонирование — 6 очков (если оппонент показал, что у докладчика совсем нет положительных результатов).

Сначала жюри определяет стоимость (в очках) представленной докладчиком части (он и получает эти очки) и стоимость каждой «дырки» в решении. За каждую найденную «дырку» оппонент получает половину стоимости этой «дырки» (если «дырку» нашло жюри, то оно и получает очки). Вторую половину стоимости этой «дырки» получит тот, кто её «залатает»» — докладчик (если ответит на вопрос оппонента), оппонент (при перемене ролей) или жюри (если никто «дырку» не закроет). При перемене ролей для подсчёта очков применяют те же самые рассуждения.

Если оппонент указал на «дырку» после окончания доклада, то он получает баллы за её нахождение независимо от того, может ли докладчик её закрыть. Если оппонент указал на «дырку» во время доклада, то он получает баллы за её нахождение только в том случае, если докладчик не может её закрыть.

Пример

Докладчик представил решение. Оппонент нашёл «дырку-1». Жюри задало вопросы докладчику и нашло ещё две дырки: «дырку-2» и «дырку-3», причём «дырку-2» докладчик «залатал» у доски.

Жюри разделило очки так: рассказанная часть — 2 очка, «дырка-1» — 6 очков, «дырка-2» — 2 очка, «дырка-3» — 2 очка.

Оппонент получил право рассказывать «дырку-1» — т. е. произошла перемена ролей (стоит эта «дырка» 6 очков, 3 из которых уже получил оппонент; значит, сейчас разыгрывается 3 очка). При этом «новый оппонент» (бывший докладчик) нашёл в его рассказе «дырку-4».

Жюри оценило так: рассказанная часть — 1 очко (из трёх), «дырка-4» — 2 очка (из трёх). Общий счёт:

Докладчик: 2 (рассказанная часть) + 1 (половина стоимости «дырки-2» — т. к. он её «залатал» у доски) + 1 (половина стоимости «дырки-4» — т. к. он её нашёл, находясь в роли оппонента) = 4 очка.

Оппонент: 3 (половина стоимости «дырки-1») + 1 (рассказанная им часть при перемене ролей) = 4 очка.

Жюри: оставшиеся 4 очка.

Жюри даёт очки гласно, т. е. объясняет, за что они даны или сняты.

Жюри может оштрафовать команду на очко за шум, за неэтичное поведение (после предупреждения). За подсказку штраф может быть больше, при этом возможно прекращение дискуссии по задаче и удаление подсказавшего.

Итоги

После каждого вызова жюри сообщает, поясняет и записывает, сколько очков получила каждая команда. Жюри ведёт протокол матбоя в виде таблицы, в которой указываются: фамилии выступающих, номер обсуждаемой задачи, направление вызова, взятые полуминутные перерывы и количество очков, полученное командами и оставшееся у жюри. На доске рисуется упрощённая таблица, без указания фамилий.

После боя очки у каждой команды и у жюри суммируются (количество очков, оставшихся у жюри, характеризует трудность задач и силу команд).

Если разность очков команд не превышает трёх, то засчитывается ничья.

Если остаётся время, то жюри объясняет решения нерешённых во время матбоя задач или показывает более удачные решения.

Статус жюри

Жюри является верховным толкователем правил матбоя. Если ситуация правилами не предусмотрена, жюри принимает решение по своему усмотрению. Решение жюри является обязательным для команд.

Жюри может снять вопрос оппонента (если вопрос не по существу), прекратить доклад или оппонирование (если дискуссия затягивается). Во всех подобных случаях жюри обосновывает своё решение.

Всякие соображения по уже разобранным задачам жюри рассматривает после боя. Задним числом счёт изменять нельзя.

Статус ведущего

Ведущий (один из членов жюри) обязан следить за порядком обсуждения, в частности

- предоставлять слово докладчику;
- объявлять о завершении доклада и переходе к обсуждению;
- объявлять начало и конец полуминутного перерыва, взятого командой;
- фиксировать вопросы оппонента и ответы на них докладчика (например, спрашивая оппонента: «Вы удовлетворены ответом?» и т. д.);
- фиксировать мнение оппонента о докладе («Решение принимается?» или — если решение не принимается — «С чем вы не согласны в решении?»);
- объявлять о завершении обсуждения и переходе к вопросам жюри докладчику;
- не позволять оппонентам перебивать докладчика;
- не позволять обсуждению выходить за рамки научной дискуссии;
- объявлять распределение очков за решение задачи, поясняя, за что они даны или сняты.

Статус капитана

Капитан отвечает перед командой за организацию решения задач, подготовку докладчиков и оппонентов, тактику ведения боя.

Капитан является представителем команды по всем оргвопросам: только он делает вызов, берёт полуминутный перерыв, общается с жюри и т. п. (если капитан выходит к доске, то он оставляет заместителя).

Капитан заранее определяет, кто будет докладчиком и кто — оппонентом по каждой задаче, решает, взять или отдать первый вызов.

Если капитан находится у доски (докладывает или оппонирует), то все его функции выполняет заместитель капитана. Кто в команде является капитаном, а кто — заместителем, команда сообщает перед началом боя (после окончания времени, отведённого на решение задач).

Памятка жюри

1. Жюри должно знать решения всех задач.

2. Жюри должно помнить, что своими вопросами оно помогает докладчику доработать решение у доски, а вмешиваясь в диалог, «ест хлеб» оппонента.

3. Если жюри (после вопросов оппонента) видит пробел в решении, то оно должно проверить, может ли докладчик его закрыть.

4. Сначала обсуждаются оргвыводы (наличие решения, достаточность оппонирования и т. д.), затем обсуждаются очки.

5. Если докладчик несёт полную чушь, то лучше всего попросить предъявить план решения: у «лапши» не бывает плана. Но это надо делать после вопросов оппонента — см. пункт 2 этой памятки.

6. Условия перемены ролей объявляются до начала боя.

7. Желательно в течение боя в аналогичных ситуациях принимать аналогичные решения (правило прецедента).

8. Баллы докладчику начисляются за продвижение в решении задачи. Докладчик не получает баллов за доказательство или формулировку общеизвестных фактов. Также докладчик не получает баллов за верные утверждения (пусть и доказанные), не приводящие к продвижению в решении задачи.

9. Оппонент получает баллы за найденные в решении пробелы либо за закрывание этих пробелов (после того, как эти пробелы не смог закрыть сам докладчик). Оппонент не получает баллы просто за то, что что-то спросил, или за вопросы, не выявившие «дырки» в представленном решении.

10. Следует снимать «универсальные» претензии и вопросы оппонента, применимые к любой задаче («Почему это решение правильное?», «Докажите, что доказательство было правильным», «Не изменится ли решение, если какие-нибудь точки будут расположены по-другому?» и т. п.).

Договорные условия

(могут изменяться членами жюри с уведомлением капитанов перед началом решения задач)

1. Предельное число выходов к доске одного человека — 2 (не считая конкурса капитанов).

2. Число полуминутных перерывов — 6 для каждой команды.

3. Примерное время на доклад (после которого жюри решает, дать ещё время или передать слово оппоненту) — 10 минут (без учёта времени ответов на вопросы оппонента).

4. Примерное время на дискуссию — 7 минут (без учёта времени на представление решения докладчиком).

5. Максимальная разница очков по итогам боя, при которой засчитывается ничья, — 3.

6. Условие смены ролей (допускается ли смена ролей для латания небольшой «дырки»[1]).

7. Можно ли пользоваться литературой и калькуляторами во время решения задач? — Да (но при рассказе решения команда не может ссылаться на расчёты, проведённые с помощью калькулятора, или отказаться доказывать некое утверждение, ссылаясь на книгу).

8. Можно ли выходить к доске с записанным решением? — Нет (но с согласия жюри можно выйти с чертежом к геометрической задаче или с записью сложных алгебраических выкладок).

Памятка командам

Решение задач

1. Капитаном следует назначать участника, лучше всего справляющегося с решением задач. Обычно такой участник известен заранее, и именно он руководит процессом решения задач до начала боя. Окончательное решение о том, кто является капитаном, команда сообщает непосредственно перед началом боя (после окончания решения задач).

2. После получения списка задач следует распределить их между членами команды для решения. На первом этапе (пока никто ничего не решил) не следует решать одну и ту же задачу разным людям — задач хватает. При этом капитану следует взяться за одну из наиболее сложных задач, а простые задачи отдать более слабым участникам.

3. Когда часть задач уже решена, несколько человек будут решать одну задачу. При этом полезно бывает делиться друг с другом продвижениями в решении — так дело пойдёт быстрее.

4. После того как одна из задач решена, решивший её должен рассказать её решение двум другим членам своей команды (желательно последовательно, а не сразу двоим), причём один из этих двоих обязательно должен быть капитаном. Проверяющие решение должны оценить его правильность и продумать вопросы, которые во время боя оппонент может задать по данному решению.

5. Ближе к концу времени, отведённому для решения задач, капитан должен распределить задачи между членами команды. Не следует за-

[1] Рекомендуется разрешать для опытных команд и запрещать описанную частичную смену ролей при игре новичков.

бывать, что у каждого есть только 2 выхода к доске, поэтому каждый может быть ответственным не более чем за две задачи. Если случилось так, что кто-то решил более двух задач, то часть из них следует передать другому участнику, предварительно рассказав ему решение. При этом новый ответственный за задачу должен сам уметь рассказать решение (см. пункт 4). Нерешённые задачи также должны быть распределены: участники должны быть заранее готовы к оппонированию.

Во время боя

1. Докладчик и оппонент должны общаться друг с другом вежливо и корректно. Критикуя доклад, не следует критиковать докладчика.

2. Все члены команды, не находящиеся у доски, должны внимательно следить за рассказом решения. Причём здесь не важно, происходит доклад или оппонирование. Если команда заметит ошибку в своём или чужом решении, капитан может взять тайм-аут для помощи своему докладчику или оппоненту.

3. При оппонировании все существенные замечания по решению следует делать после окончания доклада. Так можно заработать больше баллов за нахождение «дырок».

4. Все члены команды, не находящиеся у доски, должны соблюдать тишину и дисциплину. Не разрешается кричать или покидать своё место без разрешения жюри. Всё общение команды с жюри или противником происходит через капитана.

Тактика боя

1. Обычно рассказывать решение выгоднее, чем оппонировать. Поэтому в случае выигрыша в конкурсе капитанов следует отдать право вызова противнику (исключения бывают при применении более сложной тактики, доступной опытным игрокам).

2. Если необходимо произвести вызов, то вызывать обычно следует на наиболее сложную задачу из решённых. Вызывать на нерешённые задачи обычно не стоит, так как противник сможет «бесплатно» получить баллы на проверке корректности.

Ответы и указания к задачам для самостоятельного решения

Глава I. Чётность

1.1. Например, $7, 3, 9, 1, 5$.

1.2. Например, $2, 7, 2, 5, 2$.

1.3. Нет. Допустим, мы написали в строчку шесть чисел. Разобьём эти числа на три пары, сумма всех чисел равна сумме чисел в этих трёх парах. Сумма любых двух соседних чисел по условию чётная, значит, сумма всех чисел равна сумме трёх чётных чисел, и она чётна.

1.4. Нет. За один удар количество брёвен увеличивается на 2. Чётность числа брёвен не изменяется. Было 1 бревно, значит число брёвен остаётся нечётным. Богатырь не может разбить одно большое бревно на 12 маленьких.

1.5. Нет. В начале общее число мармеладок равно $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$, это число нечётно. После каждого хода общее число мармеладок увеличивается на 6, всё время оставаясь нечётным. Следовательно, уравнять количество мармеладок в коробках невозможно, так как для этого общее число мармеладок должно быть чётным.

1.6. Нет, не всегда. Пусть загаданы числа $2, b, 4$. Тогда все три попарные произведения будут чётными, независимо от чётности b.

1.7. Нет, не всегда. Пусть все три попарные суммы получились чётными. Это могло случиться, если числа a, b и c одновременно чётные, или же когда числа a, b и c одновременно нечётные. В этом случае мы не сможем определить, чётно или нечётно число b.

1.8. Всегда. Выясним чётность сумм $a + b + c$, $a + b + d$, $b + c + d$. Если мы сложим эти три суммы, получим выражение $2a + 3b + 2c + 2d$, чётность которого совпадает с чётностью b. Если нечётны ровно одна или три из указанных сумм, то b нечётно. Если нечётны ровно две или ноль из указанных сумм, то b чётно.

1.9. В этой сумме 500 нечётных чисел (среди чисел от 1 до 1000 ровно половина — нечётные), значит, сумма чётна. Учёный Кот получил нечётный ответ, значит, ответ неверный.

Найдём сумму двумя способами.

1) Разобьём числа от 1 до 999 на пары: 1 и 999, 3 и 997, 5 и 995, ..., 499 и 501. Всего получилось $500 : 2 = 250$ пар. В каждой паре сумма чисел одинакова. (Рассмотрим две соседние пары: первое число увеличивается на 2, второе уменьшается на 2, значит, сумма не изменится.) $(1 + 999) \cdot 500 : 2 = 250\,000$.

2) Сложим две такие суммы, одна из которых написана в обратном порядке:

$$+\begin{array}{l} 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \ldots + \ 999 \\ 999 \ + \ 998 \ + \ 997 + \ldots + \quad 1 \end{array}$$

$$1\,000 + 1\,000 + 1\,000 + \cdots + 1\,000 = 1\,000 \cdot 500 = 500\,000.$$

Одна такая сумма будет $500\,000 : 2 = 250\,000$.

1.10. а) Существует — пример 12.

б) Не существует. Если число чётное, то его последняя цифра чётна, значит, произведение цифр будет чётно.

1.11. Нет, оба слагаемые чётные (содержат множитель 2), значит, их сумма чётна и не может оканчиваться на 9.

Замечание. В математике применяется краткая запись произведения последовательных натуральных чисел от 1 до M (читается «M факториал»): $M! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot M$.

1.12. Нет, не может. Если сложить 5 нечётных чисел, получим нечётный результат. А 100 чётно.

1.13. Заметим, что чётное число монет в мешке чередуется с нечётным. Значит, мешки можно разбить на пары. Для трёх и 99 мешков это невозможно, а для четырёх и 98 можно, например, если число монет чередуется: $1 - 2 - 1 - 2 - \cdots - 1 - 2$.

1.14. Лена всегда сможет выиграть, если напишет чётное число. Результат тогда всегда будет чётный.

1.15. В таблице 4×4 можно, например:

10	10	10	5
10	10	10	5
10	10	10	5
10	10	10	5

В таблице 15×15 нельзя, так как сумма пятнадцати сумм чисел в строках нечётна, а сумма пятнадцати сумм чисел в столбцах чётна. Однако заметим, это сумма одних и тех же чисел.

1.16. Девятиноги не смогут провести поединки для всех ног одновременно, так как в каждом поединке принимает участие 2 ноги, а всего ног $5 \cdot 9 = 45$.

1.17. Нет, сумма не может получиться нечётной, так как все простые числа, кроме двойки, — нечётные, а сумма восьми нечётных чисел чётна.

1.18. Посчитаем сумму всех этих чисел. Она равна 55 — нечётному числу. Теперь посмотрим, как меняется эта сумма, если перед одним из слагаемых суммы вместо «$+$» поставить «$-$». После такой замены сумма уменьшится на величину, равную удвоенному слагаемому, перед которым поменяли знак. При этом чётность суммы не изменится. Значит, у нас могут получаться только нечётные суммы, а 2 — число чётное, и значение полученного выражения быть равным 2 не может.

1.19. Если произведение целых чисел нечётно, то все эти числа нечётные. Но сумма 4-х нечётных чисел чётна, значит, мы не сможем придумать такие числа.

1.20. Сумма цифр этого числа равна 73, она не делится на 3, значит, число тоже не делится на 3 и на 18. Или можно рассуждать так: последняя цифра числа 1, значит, число нечётное. Но нечётное число не делится на 18.

1.21. В первой таблице можно, во второй и третьей — нет, решение аналогично примеру 7.

1.22. Нельзя. Сумма этих чисел равна 255, а при замене перед каким-нибудь слагаемым «$+$» на «$-$» чётность выражения не меняется.

1.23. Нет, не смогут. Рассмотрим число серых хамелеонов. Если встретились два серых, они станут бурыми, и число серых уменьшится на 2. Если встретились два бурых, они станут серыми, и число серых увеличится на 2. Если встретились бурый и серый, число серых останется тем же. Значит, чётность числа серых хамелеонов не изменится, а вначале их было нечётное количество. 0 или 30 серых хамелеонов получиться не может.

1.24. $1001 \cdot 500 = 500\,500$ — чётное число.

1.25. а) Пусть кузнечик прыгает вдоль числовой оси с единичным отрезком 2 м и начинает путь с точки 0. После каждого прыжка чётность координаты (с учётом нового масштаба!) меняется. За нечётное число ходов его координата изменится на нечётное число, т. е. в точку с координатой 0 за нечётное число ходов он вернуться не сможет.

б) Пусть кузнечик прыгает вдоль числовой оси с единичным отрезком 1 м и начинает путь с точки 0. Тогда за ход его координата либо увеличивается на 2, либо уменьшается на 2, но чётность координаты остаётся одинаковой. Таким образом, он не сможет попасть в точку с координатой 1 (она нечётная).

1.26. Если ни у одной из полученных 10 сумм последняя цифра не совпадает, то все цифры разные и сумма 5 чётных и 5 нечётных сумм (число плюс его номер) нечётна (причём сумма последних цифр равна $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 9 = 45$, последняя цифра 5). Но если посчитать эту сумму, просто сложив все числа (от 1 до 10) и номера их мест в строке (от 1 до 10), то получится чётное число. Получили противоречие, таким образом по крайней мере у двух из полученных сумм совпадает последняя цифра.

1.27. Если мы будем двигаться по прямой, не проходящей через вершины, то мы войдём внутрь многоугольника столько же раз, сколько выйдем из него. Общее число пересечённых сторон будет чётным. Всего сторон 13, значит, прямая пересечёт не все стороны.

1.28. Мальчики и девочки чередуются. Значит, девочек тоже 5.

1.29. Обозначим три целых числа A, B и C. Сложим суммы $A + B$, $B + C$, $C + A$. $(2A + 2B + 2C)$ — чётное число. Сумма $2006 + 1998 + 2003$ нечётна, поэтому данные числа не могут оказаться попарными суммами трёх целых чисел.

1.30. а) Может, например, $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 = 8$.

б) Докажем, что это невозможно. Квадрат чётного числа — число чётное, квадрат нечётного числа — число нечётное. Среди 80 последовательных чисел ровно половина — нечётные, то есть в нашей алгебраической сумме 40 нечётных чисел, остальные — чётные, значит, сумма всегда чётна и, следовательно, не может быть равна 15.

1.31. а) Может, например для чисел 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15 разность $S - M$ равна $\frac{1+3+5+7+9+11+15}{7} - 7 = \frac{2}{7}$.

б) Пусть выбраны нечётные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_9 и $M = a_4$ — четвёртое по величине среди выбранных чисел. Тогда их среднее арифметическое $S = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_7+a_9}{7}$, а разность $S - M = S - a_4 = \frac{a_1+a_2+a_3-6a_4+a_5+a_7+a_9}{7}$.

Числитель этой дроби — чётное число, значит $S - M$ не может равняться $\frac{3}{7}$.

Глава II. Принцип Дирихле

2.1. Пусть не более трёх лучников родились в каждый день недели. Тогда в отряде не более $3 \cdot 7$ человек. Но в отряде 22 лучника. Значит, хотя бы в один день недели родились четверо или более лучников.

2.2. Если бы между всеми деревьями были паузы не менее чем в 35 секунд, то Коля затратил бы только на их преодоление не менее $35 \cdot 26 = 910$ секунд, это больше, чем 15 минут, что противоречит условию.

2.3. Пусть в городе N найдётся не более 8 человек с каждым из 140 001 вариантов количества волос (один из вариантов — человек без волос). Но тогда население N не превышало бы 1 120 008 человек, что неверно. Значит, найдутся 9 человек с одинаковым количеством волос на голове.

2.4. Существует 14 разных остатков при делении на 14. Среди 15-ти чисел найдутся два с одинаковым остатком. Значит, их разность разделится на 14.

2.5. Всего было возможно сделать $0, 1, \ldots, 11$ ошибок, т. е. всего 12 вариантов. Если бы каждое количество ошибок сделали не более двух человек, то написавших диктант было бы не более 24-х, что противоречит условию. Значит, найдутся три человека, сделавшие одинаковое количество ошибок.

2.6. Разделим картину на квадраты размером 5 см $\times$ 5 см. Таких квадратов 12. Если в каждом квадрате не более трёх комаров, то всего на картине сидят не более $3 \cdot 12 = 36$ комаров, а по условию комаров должно быть 40, значит, в каком-то квадрате сидят хотя бы 4 комара. Диагональ квадрата меньше 10 см (по неравенству треугольника), значит, круг радиусом 5 см накроет этот квадрат. (На самом деле диагональ квадрата равна $5\sqrt{2}$ см, что меньше 8 см, так что хватило бы мухобойки радиусом 4 см.)

2.7. Если бы ящиков с конфетами каждого из трёх сортов привезли не более восьми, то всего привезли бы не более 24-х ящиков, что противоречит условию. Значит, найдутся девять ящиков с одинаковым сортом конфет.

2.8. Разделим треугольник на 4 равных равносторонних треугольника, как показано на рисунке 91. Длина их стороны равна пяти, значит, расстояние между любыми двумя точками маленького треугольника не более пяти. Точек 5, треугольников 4, значит, хотя бы 2 точки попадут в один треугольник, и расстояние между ними будет не более пяти.

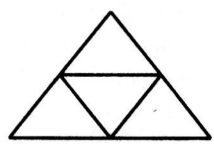


Рис. 91

2.9. Рассмотрим три грани, у которых есть общая вершина (рис. 92). Грани 1 и 2 имеют общее ребро. Пусть они — чёрная и белая (иначе условие задачи выполнено). Но грань 3 имеет общее ребро и с гранью 1, и с гранью 2, значит, она совпадёт по цвету либо с гранью 1, либо с гранью 2. Утверждение доказано. Для октаэдра это неверно, т. к. цвета могут чередоваться.

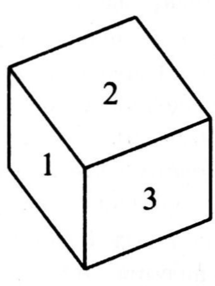


Рис. 92

2.10. Существует n разных остатков при делении на n. Среди $n+1$ чисел найдутся два с одинаковым остатком. Значит, их разность разделится на n без остатка.

2.11. Количество отрезков, выходящих из одной точки, лежит в пределах от нуля до 24-х. Всего 25 вариантов. Если есть точка, из которой не выходит ни одного отрезка, то не может быть точки, соединённой со всеми остальными. Значит, одновременно может быть не более 24-х вариантов. Раз точек 25, то найдутся две точки, из которых выходит поровну отрезков.

2.12. Решение аналогично разобранной задаче № 2 про парламентёров.

2.13. Разности таких чисел могут быть от 0 до 2006, всего 2007 вариантов. Диагоналей в выпуклом 65-угольнике 2015 ($65 \cdot 62 : 2$ — из каждой вершины выходит по 62 диагонали, но каждую диагональ мы при этом считаем дважды). Так как диагоналей больше, чем возможных вариантов разности, то для каких-то диагоналей разности повторятся.

2.14. Рассмотрим k чисел с разным количеством цифр: 1, 11, 111, 1111, … . Предположим, что ни одно из них не делится на k. При этом могут получаться $k-1$ различных остатков: $1, 2, 3, \ldots, k-1$. Значит, среди этих чисел есть два числа с одинаковым остатком при делении на k. Разность этих чисел делится на k, и это число вида $111\ldots000\ldots$ (сначала несколько единиц, потом нули). Значит, мы нашли искомое число. Заметим, что если одно из начальных чисел делилось на k, то если приписать к нему нули, получившееся число тоже будет делиться на k.

2.15. Пусть кубики окрашены не более чем в 9 цветов, иначе мы могли бы выбрать 10 кубиков разного цвета. Пусть при этом кубиков каждого цвета не более 9. Тогда всего кубиков не более 81, что противоречит условию. Значит, можно выбрать либо 10 одноцветных кубиков, либо 10 кубиков, окрашенных в 10 разных цветов.

2.16. Соединим точки A и B линией со стрелкой, выходящей из A и идущей в B, если человеку A нравится B. Всего таких стрелок будет $16 \cdot 8 = 128$. Посчитаем, сколько линий (без стрелок), соединяющих 16 точек, вообще можно провести. $16 \cdot (16-1) : 2 = 120$. Значит, на 120 линиях расположено 128 стрелок. Понятно, что на какой-то линии будет 2 стрелки, значит, найдутся двое, которые нравятся друг другу.

2.17. Рассмотрим остатки при делении на 5. Их может быть 5 видов. Чисел 6, значит, среди них найдутся хотя бы два с равными остатками. Их разность разделится на 5.

2.18. а) Разделим квадрат на квадраты размером $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$. Таких квадратов 25, значит, среди 51 точки найдутся три, содержащиеся в одном квадрате ($2 \cdot 25 < 51$). Прямоугольник накроет тот квадрат, в котором находится не менее трёх точек.

б) Разделим квадрат на квадраты размером $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$. Таких квадратов 25, значит, среди 51 точки найдутся три, содержащиеся в одном квадрате ($2 \cdot 25 < 51$). Диагональ каждого такого квадрата $\frac{\sqrt{2}}{5}$, что меньше $\frac{2}{7}$ ($7\sqrt{2} < 5 \cdot 2$, т. к. $\sqrt{98} < 10$), значит, круг радиусом $\frac{1}{7}$ накроет тот квадрат, в котором находится не менее трёх точек.

2.19. Если бы напротив всех мужчин сидели женщины, то женщин было бы не меньше, чем мужчин. Но тогда женщин не менее половины всех сидящих за столом. Получается, что мужчин в этом случае не может быть более половины, что противоречит условию. Значит, какие-то двое мужчин сидят напротив друг друга.

2.20. *Ответ:* 21 ботинок.

Если Вася возьмёт 20 ботинок, то все они могут оказаться на одну и ту же ногу. Пары из них не составишь. Если взять 21 один ботинок, среди них обязательно будут ботинки из одной пары, так как всего в шкафу 20 пар.

2.21. *Ответ:* а) 3 носка; б) 22 носка.

а) Если Вася возьмёт 2 носка, среди них могут оказаться чёрный и белый. Из трёх носков хотя бы два одного цвета.

б) Если взять 21 носок, то среди них может оказаться 20 белых. Чёрной пары не будет. Если взять 22 носка, то среди них будет хотя бы 2 белых (так как чёрных не более 20) и хотя бы 2 чёрных (так как белых не более 20). Можно составить пары разных цветов.

Глава III. Раскраски

3.1. а) нет, т. к. осталось нечётное число клеток, а «доминошка» занимает 2 клетки;

б) да, легко можно найти один из вариантов;

в) нет, нельзя. Раскрасим клетки в шахматном порядке. Клетки $a1$ и $h8$ — одного цвета, чёрные. Осталось 32 белых и 30 чёрных клеток, а покрыть «доминошками», каждая из которых занимает 1 белую и 1 чёрную клетку, возможно только равное число белых и чёрных клеток.

3.2. *Ответ:* нет.

Решение аналогично решению примера 1 про гостиницу.

3.3. *Ответ:* нельзя.

Раскрасим клетки доски в диагональном порядке в три цвета (см. рис. 93). При такой раскраске при любом расположении фигурки 3×1 она закрывает по одной клетке каждого цвета, значит, если бы мы смогли разрезать прямоугольник на фигурки 3×1, то квадратиков каждого цвета было бы равное количество, а у нас цвета 1 — 21 клетка, цвета 2 — 22 клетки. Значит, нельзя разрезать.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Рис. 93

3.4. *Ответ:* не может.

Пусть конь стоит на чёрном поле. После очередного хода он окажется на белом поле (см. рис. 94), т. е. при движении коня цвет поля чередуется. Если конь обойдёт все клетки доски по одному разу, он сделает 48 ходов и окажется на клетке того же цвета, что и клетка, с которой он вышел. С неё на начальную клетку, которая того же цвета, он за оставшийся ход не попадёт.

3.5. *Ответ:* нельзя в обоих случаях.

а) Решение аналогично решению задачи 3.4.

б) Клетки $a1$ и $h8$ чёрного цвета. Когда конь делает ход, цвет его клетки меняется, значит, оставшиеся 62 клетки последовательность ходов разбивает на пары белый — чёрный, что невозможно при неравном количестве белых (32) и чёрных (30) клеток. Значит, нельзя остаток доски обойти шахматным конем, побывав на каждой клетке по одному разу.

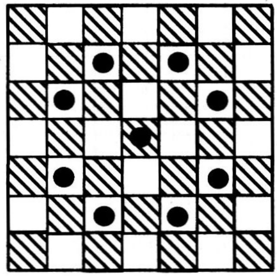


Рис. 94

3.6. Разрезать нельзя. Решение аналогично решению задачи 3.3 (раскраска диагональная в 4 цвета).

3.7. Раскрасим клетки в шахматном порядке. Пусть клеток первого из цветов 24, а второго — 25, при этом соседние по стороне клетки имеют разные цвета. Вертолёты после приземления поменяют цвет клетки, на которой они стоят. На 25 клеток второго цвета приземлятся 24 вертолёта, при этом хотя бы одна клетка останется пустой.

3.8. Нет. Используем шахматную раскраску. На доске 84 клетки, причём белых и чёрных клеток равное количество, и для полного покрытия нужно разместить 21 фигурку. Каждая такая фигурка занимает нечётное число чёрных клеток, значит все фигурки тоже занимают нечётное число чёрных клеток, а их на доске 42.

3.9. Нет. Предположим, что квадрат удалось сложить. Раскрасим клетки в три цвета «по диагоналям», причём начнём раскрашивать с клеток «уголка», так, чтобы две «крайних» клетки «уголка» оказались одного цвета (допустим, зелёного). Каждый прямоугольник занимает три клетки — по одной клетке каждого цвета. Поэтому прямоугольники будут занимать ещё 11 зелёных клеток, значит все фигурки вместе занимают 13 зелёных клеток, но зелёных клеток на доске всего 12.

3.10. Нет. Применим шахматную раскраску крупными квадратами 2×2 (рис. 95). Чтобы полностью выложить прямоугольник 6×14 прямоугольниками 1×4, необходим 21 такой прямоугольник. Каждый прямоугольник занимает две чёрные клетки, значит все вместе они занимают 42 чёрные клетки. Но у нас 44 чёрные клетки, значит выложить нельзя.

3.11. 13 залов. Раскрасим треугольник в шахматном порядке (рис. 96а). Залов одного цвета (например белого) — 10, а другого цвета (чёрного) — 6. Заметим, что в белом зале турист может находиться

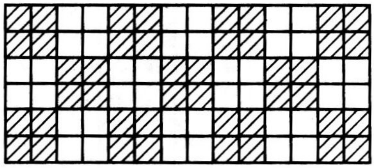
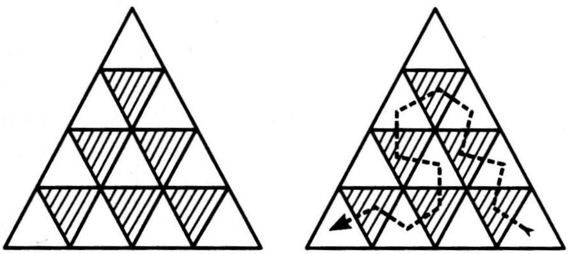


Рис. 95

с самого начала, или попасть в него из чёрного, поэтому он побывает не более, чем в 7 белых залах. Таким образом, не менее 3 белых залов останутся непосещёнными. Пример, когда турист посетит ровно 13 залов, показан на рисунке 96б.



а) *б)*

Рис. 96

3.12. а) Возможен обход, показанный на рисунке 97.

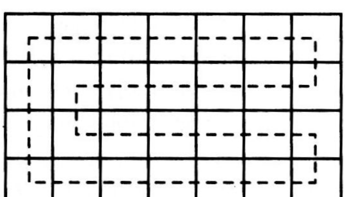


Рис. 97

б) Нет. Если длины обеих сторон нечётны, такой обход невозможен. Раскрасим доску в шахматном порядке. Каждым ходом ладья меняет цвет клетки, на которой стоит. Если бы обход существовал, то ладья должна была бы начать и закончить в одной и той же клетке, а значит, количество пройденных чёрных и белых клеток одинаково. Тем самым получили, что ладья может обойти, вернувшись назад, только чётное число клеток, но всего на такой доске число клеток нечётно. А значит, такой путь для доски 5×7 не существует.

3.13. Так как площадь квадрата равна 36, а площадь прямоугольника — четырём, то число вырезанных прямоугольников не превосходит девяти. Допустим, школьник смог вырезать девять прямоугольников. Это означает, что ему удалось разрезать квадрат 6×6 на прямоугольники 1×4. Ясно, что линии разреза параллельны сторонам квадрата, то есть каждая клетка полностью лежит в каком-нибудь прямоугольнике. Раскрасим клетки доски 6×6 как показано на рисунке 98. Так как число клеток цвета 1 не равно числу клеток цвета 2, а каждый прямоугольник 1×4 содержит по одной клетке каждого цвета, то квадрат 6×6 нельзя разрезать на прямоугольники 1×4. Следовательно, число прямоугольников не больше восьми. Способ вырезать восемь прямоугольников изображён на рисунке 99.

2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2

Рис. 98

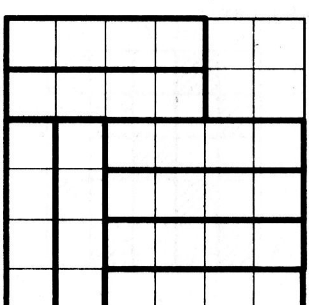


Рис. 99

3.14. Докажем, что если расстановка хорошая (то есть нельзя отметить 5 чисел (не обязательно стоящих подряд), идущих в порядке убывания), то числа в ряду можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы числа каждого цвета шли в порядке возрастания. Будем красить числа слева направо, используя каждый раз такой цвет с наименьшим номером, чтобы последнее покрашенное в этот цвет число было меньше текущего. Предположим, что четырёх цветов не хватило. Мы не можем покрасить очередное число (обозначим его a_5) в четвёртый цвет, так как в четвёртый цвет уже было покрашено большее число a_4. Число a_4 не было покрашено в третий цвет, поскольку до него встретилось большее число a_3, покрашенное в третий цвет. И так далее. Получается 5 чисел, которые идут в порядке убывания. Противоречие.

Расстановка чисел от 1 до 50 вместе с такой раскраской в четыре цвета, при которой последовательность чисел каждого цвета возрастает, полностью определяется цветом каждого числа от 1 до 50 и цветом каждого места в ряду. Числа от 1 до 50 можно раскрасить в 4 цвета 4^{50} способами. И столькими же способами можно раскрасить в 4 цвета 50 мест, на которые эти числа будут расставлены. Таким образом, число хороших расстановок не превосходит 16^{50}.

3.15. Раскрасим квадрат 5×5 так, как показано на рисунке 100а. Понятно, что каждая плитка 1×3 закрывает одну штрихованную и две нештрихованные клетки, а поскольку заштрихованных клеток 9, а плиток 1×3 всего 8, плитка 1×1 лежит на заштрихованной клетке. Повторив то же рассуждение для раскраски, показанной на рисунке 100б, получаем, что плитка 1×1 лежит на клетке, показанной штриховкой на рисунке 100в, то есть лежит в центре квадрата.

а) *б)* *в)*

Рис. 100

3.16. *Указание*. Используйте шахматную раскраску.

Глава IV. Комбинаторика

4.1. а) 6^5; б) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

4.2. а) $6^4 \cdot 3$; б) $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

4.3. а) $6 \cdot 7^3 \cdot 2$; б) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$ (числа, у которых последняя цифра 5, и числа, у которых последняя цифра 0).

4.4. а) 35; б) 160; в) $5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8$; г) $5 \cdot 7 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 8$.

4.5. $3 \cdot 2^{10} = 3072$.

4.6. 3^{13}.

4.7. Вася составит 4^6 паролей, а Петя $5^6 - 4^6$ пароля. $4^6 < 5^6 - 4^6$, поэтому больше паролей составит Петя.

4.8. $7 \cdot 8^3$.

4.9. $9 \cdot 10^3 - 7 \cdot 8^3$.

4.10. $2^{10} - 1$.

4.11. $16!$

4.12. $\dfrac{16!}{9!}$

4.13. $\dfrac{16!}{9!7!}$

4.14. Каждую из игрушек он может взять или не взять, значит, различных наборов 2^5. Но один из них — когда все игрушки оказались не взятыми. Значит, наборы начнут повторяться через $2^5 - 1 = 31$ день.

4.15. 12 способами.

4.16. $12! \cdot 24^{12}$.

4.17. $75\,000 = 3 \cdot 5^5 \cdot 2^3$. Число делителей $2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$.

4.18. $\dfrac{10!}{10} = 9!$

4.19. $\dfrac{6!}{2!3!} = 60$.

4.20. 1) 32; 2) 80; 3) 10.

4.21. C_{22}^5.

4.22. $C_5^3 \cdot C_7^3 \cdot C_{10}^3$.

4.23. $C_{22}^5 - C_{17}^5 - C_{15}^5 - C_{12}^5 - C_5^2 \cdot 17 - C_7^2 \cdot 15 - C_{10}^2 \cdot 12$.

4.24. $C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5$.

4.25. C_{19}^3.

4.26. C_{23}^3.

4.27. C_{102}^2.

4.28. 33!

4.29. 33!

4.30. C_{33}^{11}.

4.31. $C_{33}^{11} \cdot C_{22}^{11}$.

4.32. C_{35}^{2}.

4.33. а) Число перестановок из 6 букв равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

б) Посчитаем количество слов, в которых определённая буква встречается дважды, а все остальные различны. Выбрать два места, на которых стоит эта буква, можно $C_6^2 = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ способами. Разместить на оставшихся четырёх местах четыре из пяти оставшихся букв можно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ способами. Значит, для каждой буквы — $15 \cdot 120$ слов. Столько же слов для любой из пяти оставшихся удвоенных букв, то есть всего $15 \cdot 120 \cdot 6 = 10\,800$ слов.

в) Рассмотрим несколько допустимых случаев.

1. Все буквы различны. Таких слов $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$.

2. Одна буква встречается дважды, а остальные различны. Всего $15 \cdot 720$ вариантов (см. пункт б).

3. Ровно две буквы встречаются дважды. Для первой повторяющейся буквы места можно выбрать C_6^2 способами, для второй после этой — C_4^2 способами, т. е. всего $\dfrac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{720}{8}$ вариантов выбрать места для этих букв. Выбрать буквы, стоящие на этих местах, можно $C_6^2 = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ способами.

Остальные буквы можно расставить $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Всего $\dfrac{720}{8} \cdot 15 \cdot 12 = \dfrac{720 \cdot 15 \cdot 3}{2}$ вариантов.

4. В слове фигурирует ровно три повторяющиеся буквы. Места можно выбрать $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \dfrac{6!}{(2!)^3} = \dfrac{720}{8} = 90$ способами. Сами буквы можно выбрать $6 \cdot 5 \cdot 4$ способами. Однако не важно, какая из этих пар повторяющихся букв первая, какая — вторая, какая — третья. Таких слов $\dfrac{720}{8} \cdot \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 720 \cdot \dfrac{5}{2}$. Всего слов $720\left(1 + 15 + \dfrac{45}{2} + \dfrac{5}{2}\right) = 29\,520$.

Ответ: а) 720; б) 10 800; в) 29 520.

Глава V. Задачи на построение примера

5.1. Пример на рисунке 101.

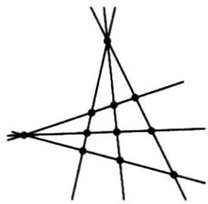


Рис. 101

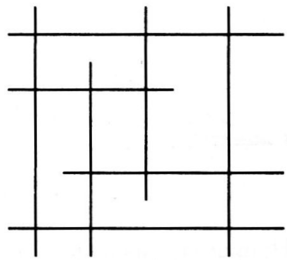


Рис. 102

5.2. Да, например, как на рисунке 102.

5.3. Пусть отмечена точка A, а центр круга находится в точке O. Вырежем из круга прямоугольник так, чтобы две его параллельные стороны лежали на одинаковом расстоянии от диаметра, содержащего точки A и O, а две другие стороны оказались на равном расстоянии от точек A и O. Например, как на рисунке 103. Если мы вырезанный прямоугольник повернём, то точки A и O поменяются местами, и A попадёт в центр круга.

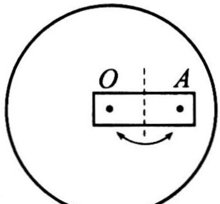


Рис. 103

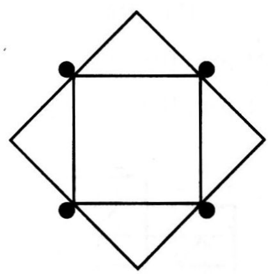


Рис. 104

5.4. Например, как на рисунке 104.

5.5. Например, как на рисунке 105.

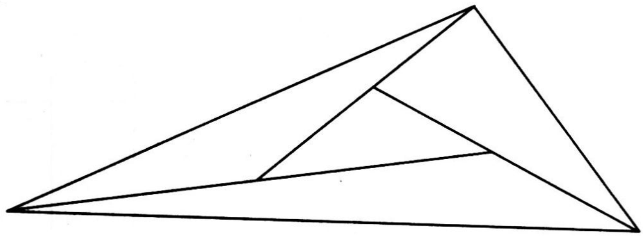


Рис. 105

5.6. Например, как на рисунке 106.

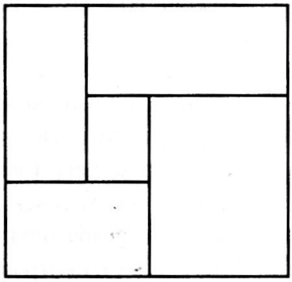


Рис. 106

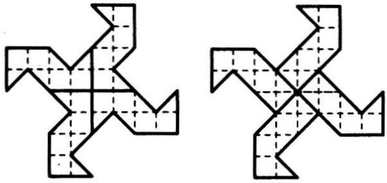


Рис. 107

5.7. См. рис. 107.

5.8. См. рис. 108.

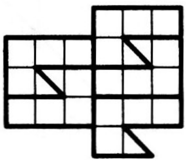


Рис. 108

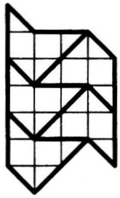


Рис. 109

5.9. См. рис. 109.

5.10. Пример решения на рисунке 110.

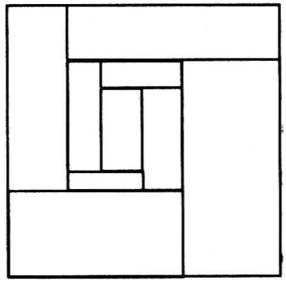


Рис. 110

5.11. Пример решения на рисунке 111.

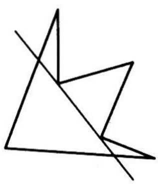


Рис. 111

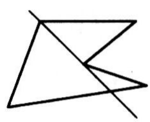


Рис. 112

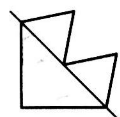


Рис. 113

5.12. Пример решения на рисунке 112.

5.13. Пример решения на рисунке 113.

5.14. Пример решения на рисунке 114.

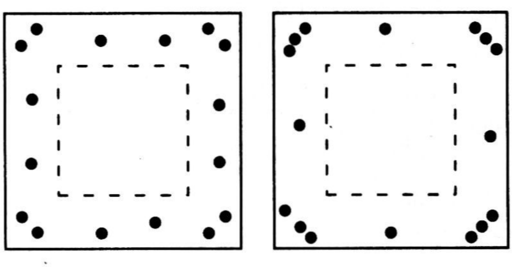


Рис. 114

5.15. Пример решения на рисунке 115.

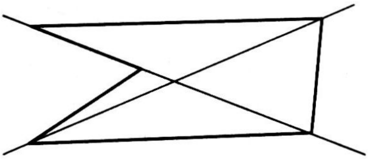


Рис. 115

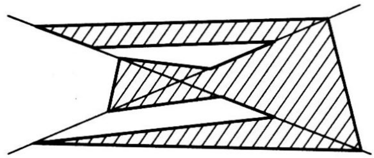


Рис. 116

5.16. Пример решения на рисунке 116.

5.17. Пример решения на рисунке 117.

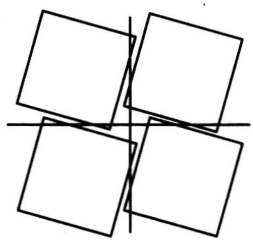


Рис. 117

5.18. Сложить пополам, ещё раз пополам и отрезать одну часть.

5.19. а) $102-1=101, 101-2=99, 99-4=95, 95-8=87, 87-16=71, 71-32=39, 39-64=-25; -25-128=-153$; б) $a_k=a_{k-1}\cdot 2+1$;
в) $a_k=a_{k-1}\cdot a_{k-2}$;
г) числа на нечётных местах увеличиваются на 5, а числа на чётных местах уменьшаются на 3.

Ответ: а) $39, -25, -153$; б) $127, 255, 511$; в) $32, 256, 8192$; г) $24, 51, 21$.

5.20. а) $(23+7):5$; б) $(57-3)\cdot 2=108$.

5.21. Например,

10	0	10	0	10	0	10	0
5	5	5	5	5	5	5	5
0	10	0	10	0	10	0	10

5.22. 555 310, 100 035.

5.23. 9 876 543, 1 023 456.

5.24. Папа и мама перешли на другую сторону — 2 минуты, папа вернулся — 1 минута, бабушка и малыш перешли мост — 10 минут, мама вернулась — 2 минуты, папа и мама перешли опять — 2 минуты. Всего 17 минут.

5.25. Путешественник распилил на цепочке третье с конца звено так, что у него оказалось 3 обрывка цепочки из 1, 2 и 4 звеньев. В первый день он отдаст хозяину 1 звено, во второй кусок из 2 звеньев (1 звено хозяин вернёт), на третий день 1 звено, на 4-й день цепь из 4 звеньев (1 и 2 хозяин вернёт), на 5-й день — 1 звено, на 6-й день — кусок из 2 звеньев (1 звено хозяин вернёт), на 7-й день — 1 звено.

5.26. а) Добраться до 79 этажа можно, 13 раз поднявшись на 6 этажей: $1 + 6 \cdot 13 = 79$.

б) Подняться или спуститься можно только на количество этажей, кратное 3. Значит, при перемещениях остаток номера этажа при делении на 3 не изменится. Но 80 делится на 3 с остатком 2. Вася не сможет добраться с первого этажа на восьмидесятый.

5.27. Рассмотрим, на какие этажи мы сможем попасть.
$1 - 8 - 15 - 6 - 13 - 4 - 11 - 2 - 9 - 16 - 7 - 14 - 5 - 12 - 3 - 10 - 1$.
Видим, что можно добраться с любого этажа на любой другой.

5.28. Например, $555 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 600$.

5.29. Пример решения на рисунке 118.

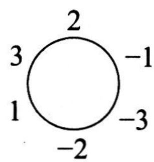


Рис. 118

5.30. $695 + 695 = 1390$ или $895 + 895 = 1790$.

5.31. $534 \cdot 4 = 2136$ или $734 \cdot 4 = 2936$.

5.32. $0 - 1 + 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 = 45$.

5.33. Да. 2, 3, 3, 3, 3, 4.

5.34. а) $51 \cdot 6 + 99 \cdot 3 = 603 > 600$, не поместятся.

б) $50 \cdot 6 + 100 \cdot 3 = 600$, книги должны заполнить полки полностью. Но толщина любого количества книг делится на 3, значит, на каждой полке останется свободное место. Все книги не поместятся.

в) Можно, например: $16 \cdot 6 + 1 \cdot 3$ на первой, второй и третьей полках, $1 \cdot 6 + 31 \cdot 3$ — на четвёртой, по $33 \cdot 3$ — на пятой и шестой.

5.35. $8 = 3+5$, $9 = 3 \cdot 3$, $10 = 5 \cdot 2$. Числа 8, 9 и 10 дают все возможные остатки при делении на 3. Любую сумму $S > 10$ можно набрать из троек и одного из чисел 8, 9 и 10.

5.36. а) Да, например: 10, 10, 10, 10, −30, 10, 10, 10, 10, −30, 10, 10, 10, 10.

б) Нет. Допустим, мы написали такие 15 чисел в ряд. Разделим этот ряд на 3 группы последовательно идущих чисел. Сумма в каждой такой группе по условию равна 10, значит сумма всех чисел равна 30 и она не может быть равна 60.

5.37. 5555, 5355, 5535, 5335, 3555, 3355, 3535, 3335. Таких чисел $2^3 = 8$.

5.38. 1, одна единица → 11
11, две единицы → 21
21, одна двойка, одна единица → 1211
1211, одна единица, одна двойка, две единицы → 111221
111221, три 1, две 2, одна 1 → 312211
312211,
13112221,
1113213211, три 1, одна 3, одна 2, одна 1, одна 3, одна 2, две 1
31131211131221.

5.39. Например,

3	8	7
10	6	2
5	4	9

5.40. Например,

1	2	3
2	3	1
3	1	2

5.41. Представьте числа как степени двойки, тогда задача сведётся к составлению магического квадрата для чисел от 1 до 9 и постоянной суммой показателей в строках, столбцах и на диагоналях (равной 15):

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

5.42. Да, существуют, например: −5, −3, −2, 0, 1, 2, 3, 4.

5.43. Да, например: 13, 1 и 12, 2 и 11, 3 и 10, 4 и 9, 5 и 8, 6 и 7.

5.44. Нет, например, потому, что среди этих чисел есть число 29, которое простое. Среди других групп точно множителя 29 не будет.

5.45. Нужно использовать уже взвешенный сахар.
1) гиря — 100 г сахара;
2) 100 г + гиря — 200 г;

3) 300 г + гиря — 400 г;
4) 700 г + гиря — 800 г. Теперь есть 700 г и 800 г, в сумме 1 кг 500 г сахара.

5.46. Взвешиваем две монеты, если они равны по весу, фальшивая — третья, иначе — более лёгкая.

5.47. Разделим 8 монет на 3 кучки по 3, 3 и 2 монеты. Взвесим кучки по 3 монеты. Если они равны по весу, то фальшивая — в кучке с двумя монетами; сравнив их на весах, найдём более тяжёлую, она — фальшивая. Если при первом взвешивании одна из кучек тяжелее, фальшивая монета — в ней. Положим на чашки весов две монеты из этой кучки, если они равны, фальшивая — третья, иначе — более тяжёлая.

5.48. Делим монеты на 3 кучки — две по 9 монет и одна из 2 монет и две первые сравниваем. Если они равны по весу, фальшивая монета находится в третьей кучке и за второе взвешивание из двух монет выбираем более лёгкую (фальшивую). Если не равны, то фальшивая монета в той кучке из 9 монет, которая легче. Далее рассматриваем только эту кучку.

Делим монеты на 3 кучки по 3 монеты и две сравниваем. Если они равны по весу, фальшивая монета находится в третьей кучке, если не равны, то в первой или второй, которая легче.

Теперь берём кучку с тремя монетами, которая легче других. Две монеты взвесим, если одна из них легче, она — фальшивая; если равны, фальшивая — оставшаяся монета.

5.49. Разложим гири в порядке возрастания их веса таким образом:

1-я кучка	1	6	7	12	...	552
2-я кучка	2	5	8	11	...	551
3-я кучка	3	4	9	10	...	550

Тогда суммы гирь каждой кучки в любых двух соседних столбцах равны. 552 делится на 6, поэтому мы разделим гири на три равные по весу кучки.

5.50. Первое взвешивание. На каждую чашку весов кладём одну серебряную и две бронзовых медали. Возможны два варианта.

А) Весы в равновесии, тогда фальшивая медаль среди оставшихся трёх медалей (золотой, серебряной — C_1 и бронзовой — B_1).

Второе взвешивание. Берём серебряную и бронзовую медали, про которые известно, что они не фальшивые, и кладем их на разные чашки весов. Добавляем к ним медали C_1 и B_1 так, чтобы на каждой чашке оказалось по одной серебряной и одной бронзовой медали. Если выше чашка с C_1, то C_1 — фальшивая, если выше чашка с B_1, то B_1 — фальшивая. Если весы в равновесии, фальшивая золотая.

Б) Одна из чашек выше, тогда фальшивая медаль среди медалей, лежащих на этой чашке (одна серебряная и две бронзовых). Остальные медали больше не используем, среди них нет фальшивой.

Второе взвешивание. Сравниваем вес бронзовых медалей. Если одна из чашек выше, то фальшивая медаль (бронзовая) лежит на этой чашке. Если весы в равновесии, фальшивая серебряная.

5.51. Обозначение п$_k$ означает «перелить в сосуд объёмом k».

8 л	8 п$_3$	5	5 п$_3$	2	2	7	7 п$_3$	4	4
3 л		3 п$_5$		3 п$_5$	1	1 п$_5$		3 п$_5$	
5 л			3	3	5 п$_8$		1	1	4

5.52. Пусть «н» обозначает «налить из водопровода доверху», «п» — «перелить из сосуда в сосуд», «в» — «вылить всё из сосуда».

5 л		0		5	в	0		4		4		5	в	0		5
9 л	н	9	п	4		4	п	0	н	9	п	8		8	п	3

5.53. Обозначение «п$_k$» значит «перелить в k-литровую банку». Решение представлено схематически в таблице на рисунке 119.

12л	12	п$_5$	7		7	п$_5$	2		2		9		9
5л	0		5	п$_7$	0		5	п$_7$	3		3	п$_7$	0
7л	0		0		5		5		7	п$_{12}$	0		3

п$_5$	4		4		11		11	п$_5$	6		6
	5	п$_7$	1		1	п$_7$	0		5	п$_7$	0
	3		7	п$_{12}$	0		1		1		6

Рис. 119

5.54. Пусть «н» обозначает «налить из водопровода доверху», «п» — «перелить из сосуда в сосуд», «в» — «вылить всё из сосуда».

4 л		0		4	в	0		4	в	0		1		1		4
9 л	н	9	п	5		5	п	1		1	п	0	н	9	п	6

5.55. а) Поджечь шнур с двух сторон; б) поджечь один шнур с двух концов, другой — с одного, и, когда первый догорит, поджечь второй с другого конца.

Глава VI. Неравенства в задачах

6.1. В точке пересечения диагоналей четырёхугольника.

6.2. а) На отрезке, соединяющем избушки; б) на отрезке, соединяющем одну из избушек и точку, симметричную второй относительно просеки.

6.3. Назовём первым берег реки, ближайший к деревне A, и вторым — ближайший к B. Построим такую точку B_1, что прямая BB_1 перпендикулярна берегу реки и отрезок BB_1 равен ширине реки. Проведём AB_1 и найдём точку пересечения с первым берегом. Это точка моста.

6.4. Отразите исходную точку B относительно сторон угла и найдите её образы — точки B_1 и B_2. Точки пересечения B_2B_1 со сторонами угла — C и K. Тогда $BCKB$ — путь наименьшей длины.

6.5. Длины кратчайших путей из обеих застав одинаковы.

6.6. $a\sqrt{5}$, где a — ребро куба. Соедините отрезком нужные вершины на развёртке куба.

6.7. Отметим положение муравья A и капли B. Развернём боковую стенку бочки в прямоугольник так, чтобы расстояние между проекциями точек A и B на верхнюю сторону прямоугольника было наименьшим из двух возможных. Отразим каплю относительно верхней стороны прямоугольника, получим точку C. Длина наименьшего пути равна AC, а сам путь получается из AC обратным преобразованием.

6.8. $a\sqrt{\frac{7}{12}}$, где a — ребро тетраэдра. Соедините отрезком нужные точки на развёртке пирамиды.

6.9. Больше по реке.

6.10. 3^{20}.

6.11. 50^{50}.

6.12. n^n.

6.13. Заметим, что $3^6 = 729 < 2^3 \cdot 10^2$, $3^5 = 243 < 5^2 \cdot 10$. Отсюда $3^{27} = (3^6)^2 \cdot (3^5)^3 < (2^3 \cdot 100)^2 \cdot (5^2 \cdot 10)^3 = 2^6 \cdot 5^6 \cdot 10^7 = 10^{13}$. Следовательно, $3^{100} = (3^{27})^6 \cdot 3^{38} < (10^{13})^6 \cdot 9^{19} < 10^{78} \cdot 10^{19} = 10^{97}$. В десятичной записи числа 3^{200} не более 97 цифр.

6.14. 100^{100}.

6.15. $1\,234\,568^2$.

6.16. Вторая дробь.

6.17. Представьте каждую дробь как разность дробей со знаменателями n и $n+1$.

6.18. Первая дробь больше.

6.19. а) Разобьём сумму последовательно на пары, выделив их скобками. В каждой скобке будет положительное число, и сумма двух первых скобок будет больше $\frac{1}{5}$.

б) Разобьём сумму последовательно на пары, начиная со 2 числа, выделив их скобками. В каждой скобке будет отрицательное число и сумма пяти первых чисел будет меньше $\frac{2}{5}$.

6.20. Перенесите 2 в левую часть и выделите полный квадрат.

6.21. Рассмотрите функцию $S = x(p - x)$, где x — сторона прямоугольника, p — полупериметр. Квадратичная функция принимает наибольшее значение в вершине при $x = \frac{p}{2}$.

6.22. Рассмотрите функцию $p = x + S/x = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{S}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{S}$.

6.23. 8.

6.24. Нет. Площадь не превосходит $0{,}5a^2$, где a — длина наибольшей стороны.

6.25. Да, нужно взять маленькую высоту.

6.26. Да, например, 10 001 число, равное 0,001.

6.27. Нет.

6.28. Нет. $a(0{,}1 - a) < 0{,}1a$.

6.29. Например, 1000 и $0,000\,001$.

6.30. Нет. $(a + 10)(b + 10) - ab > 100$.

6.31. Да, достаточно взять стороны так, чтобы $a + b = 100$, например, 50 и 50. Тогда $(a + 0{,}1)(b + 0{,}1) - ab = 0{,}1(a + b) + 0{,}01$.

6.32. Нет. Если $a - b > 10$, то $a^2 > b^2 + 200b + 100$.

6.33. Да, например, 100 и 100,05.

6.34. 4.

6.35. Точка пересечения AB и отрезка MN или отрезка MN_1, где N_1 симметрична N относительно AB.

6.36. Проведите радиусы через точки A и B. Докажите, что $AB < 2R$.

6.37. $AB < 2R < \pi R$.

6.38. Докажите сначала, что наибольший диаметр у вписанной окружности. Потом докажите, что высота треугольника больше диаметра вписанной окружности.

6.39. Рассмотрим $\triangle AQB$. Пусть M лежит на стороне AB, N лежит на стороне QB. Если $\angle BMN \geqslant 90°$, то $MN < BN < BQ$ (в треугольнике BMN против наибольшего угла BMN лежит наибольшая сторона BN). Если $\angle BMN < 90°$, то $\angle AMN > 90°$ и $AN > MN$. Аналогично один из углов QNA и ANB не меньше $90°$, и либо $AQ > AN$, либо $AB > AN$.

6.40. Углы CMA и BMA больше половины угла A (внешний угол треугольника равен сумме не смежных с ним углов треугольника, значит, больше любого из них), и против большего угла в треугольниках CMA и BMA лежит бóльшая сторона.

6.41. $\dfrac{AB}{AC} > 1$. По свойству биссектрисы $AB : AC = BM : MC$, тогда $\dfrac{MB}{MC} > 1$ и $MB > MC$. Продлим сторону AC за точку C так, чтобы $AB_1 = AB$. В равнобедренном треугольнике AB_1B биссектриса AH является высотой, угол BMH — острый, тогда угол AMB — тупой и он больше смежного угла AMC.

6.42. Построим точку C_1, симметричную C относительно прямой AH. $HC_1 = HC$, $AC_1 = AC$. AM — биссектриса, поэтому угол BAC_1 — развёрнутый. $BA+AC_1 < BH+HC_1$ (длина отрезка меньше длины ломаной, соединяющей его концы). $BA + AC_1 + BC < BH + HC_1 + BC$.

6.43. Достройте треугольник до параллелограмма, продлив медиану. Рассмотрите треугольник, образованный медианой, её продолжением и двумя смежными сторонами параллелограмма. Против большей стороны будет лежать больший угол.

6.44. Продолжим BK до пересечения с AC. Пусть это будет точка K_1. В $\triangle ABK$ $\angle BKA = \angle KBA$, значит, $\angle BKA < 90°$ и $\angle AKK_1 > 90°$. В треугольнике AKK_1 $AK_1 > AK$, т. к. $AC > AK_1$, окончательно получаем $AC > AK_1 > AK = AB$.

6.45. Рассмотрим $\triangle ABC$ с высотами BH и AM. По условию $BH \geqslant AC$, а так как перпендикуляр короче наклонной, то $BH \geqslant AC \geqslant AM$. Аналогично $AM \geqslant BC \geqslant BH$. Поэтому $BH = AM = AC = BC$. Поскольку $AC = AM$, то отрезки AC и AM совпадают, т. е. $C = 90°$, а так как $AC = BC$, то углы треугольника ABC равны $45°$, $45°$, $90°$.

6.46. Векторная сумма $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$, а сами векторы не коллинеарны. Поэтому треугольник можно составить.

6.47. Отразим треугольник относительно биссектрисы и выразим длину l биссектрисы (см. рис. 120) через длину сторон и угол, $AB = a$, $AC = b$.

$l = AE + EO, \quad AE = a\cos\alpha, \quad k \cdot EO = OF,$

$k = \dfrac{OF}{OE} = \dfrac{CC_1}{BB_1} = \dfrac{CF}{B_1E} = \dfrac{b}{a}, \quad EF = AF - AE = (b-a)\cos\alpha,$

$EF = EO + OF = EO(1+k) = EO\left(1+\dfrac{b}{a}\right), \quad EO = EF\dfrac{a}{a+b},$

$$l = a\cos\alpha + EF\frac{a}{a+b} = a\cos\alpha + (b-a)\cos\alpha\frac{a}{a+b} =$$

$$= \frac{\cos\alpha}{a+b}(a^2+ab+ab-a^2) = \frac{2ab\cos\alpha}{a+b} \leqslant \frac{2ab}{a+b}.$$

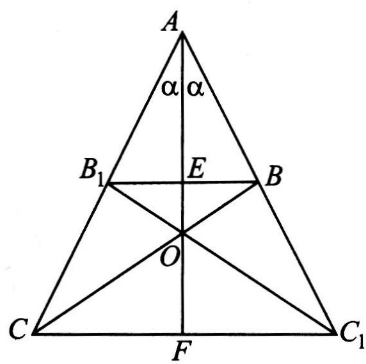


Рис. 120

6.48. Нет. Например, из палочек длиной $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{99}$ нельзя.

6.49. Продлите AM так, чтобы $AM = MA_1$, тогда $AC = BA_1$, рассмотрите треугольник ABA_1.

6.50. $AM + MC > AC$, $AM + MB > AB$, $2AM + CB > AB + AC$, $2AM > AB + AC - CB$.

6.51. Рассмотрите цепочку из 5 гоблинов и докажите, что они не могут иметь друзей за пределами группы.

6.52. *Ответ:* 50 000. Пример: 8 бриллиантов стоимостью 75 000 каждый и 8 бриллиантов стоимостью 50 000 каждый.

Предположим, что существует подходящий набор бриллиантов, в котором стоимость самого дешёвого алмаза более 50 000. При разделе наследства на 5 равных частей получим 5 групп бриллиантов стоимостью

200 000 каждая. Следовательно, в каждой группе не более трёх бриллиантов, а всего бриллиантов не более 15. При разделе всех бриллиантов на 8 равных частей получим 8 групп бриллиантов стоимостью 125 000 каждая. Так как всего бриллиантов не более 15, то одна из указанных 8 групп состоит всего из одного бриллианта. Другими словами, имеется бриллиант стоимостью 125 000. Этот бриллиант входит в некоторую группу стоимостью 200 000. Вместе с ним в эту группу может входить только бриллиант стоимостью 75 000. Последний, в свою очередь, входит в некоторую группу стоимостью 125 000. Оставшиеся бриллианты в этой группе должны стоить $125\,000 - 75\,000 = 50\,000$, что невозможно, так как любой из бриллиантов стоит дороже 50 000. Противоречие. Исходное предположение о существовании набора, в котором стоимость самого дешёвого алмаза более 50 000, оказалось неверно.

6.53. Поскольку, чтобы стать «толстым», червяк должен съесть более $\frac{1}{5}$ гриба, в каждом грибе может быть не более 4 «толстых» червяков. Пусть в лесу $4N$ грибов, тогда плохих грибов N, в каждом из них живёт больше 11 червяков, из них не может быть более 4 «толстых», а 8 или более — тощие. Таким образом, в лесу не менее $8N$ тощих червяков и не более $16N$ «толстых».

Глава VII. Принцип крайнего

7.1. *Первый способ.* Рассмотрите точку из M с максимальной абсциссой. Если таких точек несколько, то рассмотрите ту из них, у которой максимальна (среди точек с максимальной абсциссой) ордината.
Второй способ. Введите систему координат и рассмотрите самую крайнюю точку, расположенную на наибольшем расстоянии от центра. Докажите, что расстояние до одного из концов отрезка, серединой которого она является, больше.

7.2. Пусть существует точка, не покрываемая кругами. Рассмотрите наибольший из углов, под которыми видны стороны четырёхугольника.

7.3. Пусть существуют прямые из этого семейства и существуют точки пересечения других прямых, не принадлежащие им. Выберем минимальное ненулевое расстояние от точек пересечения до данных прямых, пусть это будет AH — расстояние от A до прямой BK (см. рис. 121). Докажите, что две точки лежат по одну сторону от точки H (пусть $KH < MH$ и, возможно, K совпадает с H) и тогда расстояние от точки K до прямой MA равно $KL < AH$.

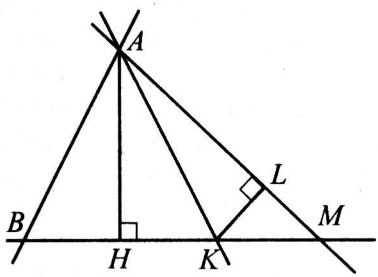


Рис. 121

7.4. Рассмотрите треугольник максимальной площади с вершинами в данных точках.

7.5. 8 друзей (см. разобранную задачу 13). Выделите двух однополчан с наибольшим и наименьшим числом друзей и докажите, что в этой паре у Алёши ровно один друг.

7.6. Упорядочим колдунов в порядке возрастания их производительности. Пусть пятый, шестой и седьмой сделали не более 49 шаров, тогда остальные сделали не менее 51. Рассмотрите группу из четырёх колдунов, сделавших наименьшее число шаров. Докажите, что четвёртый колдун сделал не меньше 15 шаров. Оцените, сколько сделали в таком случае трое с наибольшим числом шаров.

7.7. а) См. 7.6. б) Пронумеруем сундуки в порядке возрастания количества монет. Оцените наибольшее и наименьшее количество монет, которое находится в шестом сундуке.

7.8. Рассмотрим ведьму A, число подруг у которой максимально (если таких ведьм несколько, рассмотрим любую из них); обозначим это число через n. Если ни одна из n подруг ведьмы A не имеет ровно одну подругу, то, так как ведьма A имеет максимальное число подруг, каждая из её подруг может иметь 2, 3, ..., n подруг — всего $(n-1)$ возможностей. Поскольку число подруг ведьмы A равно n, то, значит, две из её подруг имеют равное число подруг и, кроме того, общую подругу — ведьму A. Но это противоречит условию задачи.

7.9. Рассмотрите наибольшую степень простого числа (например, тройки) в числителе и знаменателе получившейся суммы.

7.10. См. разобранную задачу 3.

7.11. См. разобранную задачу 26.

7.12. Рассмотрите монету наименьшего радиуса.

7.13. Рассмотрите наибольшее число.

7.14. Рассмотрите крайнюю левую ладью и, если она не одна, выберите из них крайнюю верхнюю.

7.15. Посчитайте возможное число друзей и учтите невозможность одновременной реализации крайних случаев.

7.16. Нельзя. Среди чисел есть число 50, соседей, с которыми оно имеет разность не менее 50, нет.

7.17. Рассмотрим строку или столбец, имеющие минимальную сумму элементов среди всевозможных сумм элементов каждой строки и каждого столбца. Пусть, для определённости, это будет строка с суммой элементов, равной k. Если $k \geqslant \frac{n}{2}$, то сумма элементов каждой строки не меньше $\frac{n}{2}$, и поэтому сумма всех элементов не меньше $\frac{n^2}{2}$. Предположим, что $k < \frac{n}{2}$. Тогда в данной строке $(n-k)$ нулей и сумма элементов каждого столбца, содержащего один из указанных нулей, не меньше $n-k$. Таких столбцов $(n-k)$, поэтому общая сумма содержащихся в них элементов не меньше $(n-k)^2$. Сумма элементов в каждом из оставшихся k столбцов не меньше k, поэтому общая сумма содержащихся в них элементов не меньше k^2. Следовательно, сумма всех элементов таблицы не меньше $(n-k)^2 + k^2 = 2\left(\frac{n}{2} - k\right)^2 + \frac{n^2}{2} \geqslant \frac{n^2}{2}$.

7.18. Пусть p_n — наибольшее простое число. Рассмотрите число $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

7.19. См. разобранную задачу 4.

7.20. Нет. Рассмотрите разность между наибольшим и наименьшим числами и докажите, что она равна сумме трёх из попарных разностей.

7.21. 3 друга (см. задачу 13).

7.22. Рассмотрите две башни на самом маленьком расстоянии. Дозорные смотрят друг на друга. Остались 13 башен и 13 дозорных. Если один из дозорных смотрит на одну из первых двух башен, то на одну из башен не хватит дозорных. Если на эти башни никто больше не смотрит, то выберем из этих 13 башен две ближайшие и т. д., пока не останется одна башня.

7.23. См. задачу 28.

7.24. Нет. Спроецируем все спички на произвольную прямую, не перпендикулярную ни одной из спичек. Конец спички, спроецировавшийся в самую правую точку, не может упираться строго внутрь другой спички.

7.25. Пять. Поскольку ничьих в волейболе не бывает, может быть только одна команда, проигравшая всем остальным.

7.26. Распределим конгрессменов по палатам произвольным образом. Если у какого-то конгрессмена окажется два или больше врагов, то в другой палате у него не более 1 врага. Переведём его в другую палату, при этом суммарное количество пар однопалатных врагов S уменьшится. Так как S является целым неотрицательным числом, то такую операцию можно провести конечное число раз.

7.27. Пусть числа, стоящие в зелёных секторах, называются зелёными, а стоящие в синих секторах — синими. Расстоянием между двумя числами назовём количество чисел, расположенных на меньшей дуге между этими числами. Выберем ту пару равных чисел, расстояние между которыми наименьшее (если таких пар несколько, выберем любую из них). Пусть для определённости выбранная пара — зелёная единица и синяя единица, причём меньшая дуга между ними идёт от зелёной единицы к синей против часовой стрелки. На этой дуге либо нет чисел (т. е. две единицы стоят рядом), либо все числа одного цвета, иначе стоящие перед ними равные зелёное и синее числа (в данном случае 10) были бы на расстоянии меньшем, чем расстояние между единицами. Пусть все числа на этой дуге (если они есть) — синие. Проведём диаметр, отделяющий синюю единицу от числа, следующего за ним по часовой стрелке. Этот диаметр искомый. Рассмотрим полукруг, содержащий синюю единицу. Прочтём синие числа, записанные в этом полукруге, начиная с единицы против часовой стрелки, — это числа 1, 2, ..., k (k — некоторое число). Прочтём теперь зелёные числа на полукруге. Поскольку на дуге нет зелёных чисел, то это будут числа 10, $10 - 1$, ..., $10 - m$ (m — некоторое число). Так как в полукруге 10 чисел, то в нём записаны все числа от 1 до 10 по одному разу. Аналогично рассматриваются другие случаи.

7.28. Самый низкий из высоких (Н) выше или равен по росту самому высокому из низких (В). Рассмотрите того богатыря, который стоит на пересечении поперечного ряда, из которого выбран В, и продольного ряда, из которого выбран Н.

7.29. См. задачу 11.

7.30. Возьмём одну из данных прямых и рассмотрим все точки пересечения данных прямых, не лежащие на выбранной прямой. Выберем среди них ближайшую. Среди частей, на которые разрезана плоскость, есть треугольник, у которого одна вершина — выбранная точка, а две другие лежат на выбранной прямой. Каждой прямой сопоставляется треугольник, и один и тот же треугольник не может соответствовать более чем трём разным прямым. Поэтому количество треугольников не меньше $\frac{60}{3} = 20$.

7.31. Пусть не все рыболовы сидят на одной прямой. Проведём через каждых двух рыболовов прямую и выберем наименьшее расстояние от рыболовов (считая их точками) до этих прямых. Пусть это будет AH — расстояние от A до прямой BK (см. рис. 122), где B и K — данные точки. На этой прямой лежит ещё одна точка — M. Докажите, что две точки лежат по одну сторону от точки H (пусть $KH < MH$ или K совпадает с H) и тогда расстояние от точки K до прямой AM равно $KL < AH$.

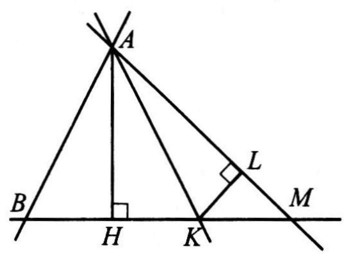


Рис. 122

7.32. *Случай 1.* Среди четырёх точек есть точка B, лежащая на отрезке AC. Один из углов ABD и CBD прямой или тупой.

Случай 2. Точки образуют выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Среди углов этого четырёхугольника найдётся прямой или тупой.

Случай 3. Точка D лежит внутри $\triangle ABC$. Тогда среди углов ADB, BDC, CDA найдётся тупой.

7.33. Введём прямоугольную декартову систему координат так, чтобы абсциссы всех отмеченных точек были положительны и попарно различны. Далее на каждом шаге выбираем пару ещё не рассмотренных точек с наименьшими абсциссами и соединяем отрезком.

7.34. Хотя бы 7 мух не сидят в центре окружности. Рассмотрите углы с вершинами в центре, на сторонах которых сидят мухи. Докажите, что наименьший из этих углов меньше 60° и тогда расстояние между мухами меньше 1.

7.35. Если четвёрка (a_n, b_n, c_n, d_n) получена из данной на n-м шаге, то $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ (для $n \geqslant 1$)
и $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 \geqslant 2(a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + c_{n-1}^2 + d_{n-1}^2)$ (для $n \geqslant 2$).

7.36. Проведём из точки O лучи к центрам окружностей. Если какие-то два луча совпадают, то требуемое очевидно. Иначе выбираем из получившихся углов наименьший, он не больше 60 градусов. Пусть это угол O_1OO_2. Рассмотрите треугольник O_1OO_2. Докажите, что O_1O_2 меньше или O_1O, или OO_2.

7.37. Пусть таких прямоугольников нет. Очевидно, что тогда прямоугольников одинаковой ширины быть не может (как и одинаковой высоты). Значит, прямоугольников, у которых ширина либо высота меньше N, всего не более $2N$. Следовательно, остальные прямоугольники содержат квадрат $(0, 0)$ $(0, N)$ (N, N) $(N, 0)$ и все прямоугольники, лежащие в нём.

7.38. Расположим числа в порядке возрастания. Тогда очевидно, что каждое число будет больше своего номера. Найдём сумму номеров всех чисел: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$. Эта сумма на единицу меньше суммы самих чисел. Значит, одно число на единицу больше своего номера, а остальные равны ему. Числом, бóльшим своего номера, может быть только последнее. Действительно, если какое-то число больше своего номера, то все последующие числа тоже больше своего номера. Поэтому искомыми числами будут 1, 2, ..., 9, 11.

7.39. Среди данных точек выберем две наиболее южные (если есть несколько наиболее южных точек, то выбираем любые две из них). Одну из сторон каждого прямого угла в этих точках направим на север, а другие стороны направим навстречу друг другу. В результате будет освещена вся полуплоскость севернее этих двух прожекторов. С помощью двух оставшихся прожекторов можно осветить полуплоскость южнее их.

7.40. а) Проводим через две точки прямую, а третью точку выбираем ближайшую к прямой. Тогда внутри этого треугольника не будет других точек (они были бы ближе к прямой).

б) Строим выпуклую оболочку (это будет многоугольник с вершинами в данных точках), выбираем одну из её сторон и рассматриваем две вершины на её концах (A и B). Третью вершину (C) выберем из условия, что из неё сторона видна под наибольшим углом. Тогда описанная окружность треугольника ABC не содержит внутри других: по одну сторону от хорды

AB (там, где лежит точка C) нет точек из-за того, что угол ACB максимальный, по другую — в силу того, что AB — сторона выпуклой оболочки.

7.41. Выберем две точки, расстояние между которыми наименьшее. Пусть это точки H и K. Внутри окружности с диаметром HK нет данных точек. Рассмотрите окружность, проходящую через точки H, K и точку, из которой отрезок HK виден под наибольшим углом.

7.42. Спроецируйте многоугольники на произвольную прямую. Любые два из полученных отрезков имеют общую точку. Выберите из правых концов этих отрезков самый левый. Полученная точка принадлежит всем отрезкам, а перпендикуляр из неё к прямой пересекает все многоугольники.

7.43. Пусть получили замкнутую ломаную. Рассмотрите наибольшее звено AB ломаной и два соседних звена. Докажите, что точки A и B не могли быть соединены.

Глава VIII. Инвариант

8.1. Нет. После каждого переворачивания (нужно рассмотреть все возможные случаи) чётность стаканов «вверх дном» не меняется.

8.2. Нет. При замене «$+$» на «$-$» чётность алгебраической суммы не изменяется.

8.3. а) Нет. б) Все нечётные числа.

8.4. Инвариант — остаток числа голов Змея Горыныча по модулю 3.

8.5. Нет. Чётность чёрных клеток при перекрашивании сохраняется.

8.6. а) Нет. *Указание:* чётность. б) Нет. *Указание:* раскрасьте сектора в шахматном порядке.

8.7. а) Нет. Добавляется или выбрасывается чётное количество букв, значит, чётность не меняется, а в исходных словах чётности числа букв разные. б) Смысл слов УЫЫ и УЫУ одинаков, например, из слова УЫЫ можно получить УЫУ таким образом: УЫЫ — УЫУУЫУУ — УЫУ.

8.8. Нет. Чётность числа букв Я при любой замене не изменяется.

8.9. $n = m$. Сумма ручек и ножек при каждом ходе не изменяется, а модуль разности увеличивается в 3 раза. Если m и n разные, то одно из чисел станет отрицательным.

8.10. Нет. Сумма всех чисел всегда будет делиться на 5.

8.11. Нет. Чётность числа комаров на трёх детях, взятых «через одного», — инвариант.

8.12. $21! - 1$. *Указание:* прибавьте ко всем числам по единице.

8.13. а) Нет. б) Да.

8.14. Нет. Чётность суммы чисел — инвариант.

8.15. Нет. Остаток от деления на 3 в каждой группе при каждой встрече уменьшается на 1 (циклически, то есть после уменьшения нулевого остатка на 1 получаем 2), а у чисел 13, 15 и 17 остатки разные.

8.16. В любой заштрихованной фигуре (см. рис. 123) чётность чёрных клеток при перекрашивании сохраняется.

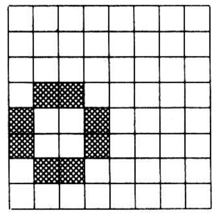


Рис. 123

8.17. Нельзя. Рассмотрите величину s, равную сумме числа камней и числа куч.

8.18. $2009n+3$ даёт остаток 3 при делении на 7, $2009n+4$ — остаток 4, тогда как куб натурального числа — остатки 0, 1 или 6. Остаётся заметить, что число с остатком 3 или 4 нельзя получить в виде суммы двух чисел с остатками 0, 1 или 6.

8.19. Инвариант — сумма чисел, обратных данным.

8.20. 5. Посчитайте, сколько раз встречается любое число в комплекте домино.

8.21. Нет. Инвариантом является сумма чисел в угловых клетках минус число в центре.

8.22. Нет. Количество минусов в угловом квадрате 2×2 всегда будет нечётно.

8.23. Заменим «$+$» на $+1$, «$-$» на -1, тогда видим, что произведение получившихся чисел не изменяется.

8.24. Нет. Для любой пары записанных чисел (не обязательно соседних) выберем знак $<$ или $>$, чтобы неравенство было верным, если стереть все числа кроме этой пары. Инвариант — чётность количества знаков $<$. Изначально знак $<$ выбирается для всех пар чисел, то есть всего выбрано $\frac{1991 \cdot 1990}{2} = 1991 \cdot 995$ знаков $<$, то есть нечётное число. Если бы удалось переставить все числа в требуемом порядке, то мы бы смогли получить 0 знаков $<$, то есть чётное число.

8.25. Её тип — B. Проследите за чётностью разностей $N(A) - N(B)$, $N(B) - N(C)$, $N(C) - N(A)$, где $N(X)$ — число амёб типа X.

8.26. Рассмотрите остатки при делении на 3.

8.27. Рассмотрите остатки при делении на 7.

Глава IX. Игры

Обозначения: С — симметрия, Ш — игра-шутка, Д — добирание, ОП — особые позиции.

9.1. Выигрывает 1-й игрок, С.

9.2. 1-й, Ш.

9.3. 1-й, С.

9.4. 2-й, Ш.

9.5. 1-й, Д.

9.6. 1-й, ОП.

9.7. Паша должен брать из той кучи, где меньше всего конфет.

9.8. 1-й (Карлсон), Д.

9.9. а) 1-й; б) 2-й, Д.

9.10. 1-й, С.

9.11. Нет, не прав. 2-й выиграет, разбейте доску на квадраты 2×2, Д.

9.12. 2-й, Ш.

9.13. 1-й, Д.

9.14. 1-й, С.

9.15. Если n чётно, 2-й, если нет, 1-й.

9.16. 2-й.

9.17. Последний ход — выигрышный, Д.

9.18. 1-й. Первым ходом 1-й игрок пишет число 17. Если его соперник напишет 12, то 1-й игрок ждёт 2 минуты (получает 53), меняет цифры (получает 35), ждёт ещё 2 минуты (59), и далее он может получать 59 сколь угодно много раз, ожидая по 3 минуты (95) и меняя цифры. Аналогично находится алгоритм для случая, когда 2-й игрок напишет число 11.

9.19. 2-й, Ш.

9.20. а) 2-й; б) 1-й, С.

9.21. 2-й, С.

9.22. 1-й, С.

9.23. 2-й, С.

9.24. 2-й, разбиение.

9.25. 2-й, С.

9.26. 1-й, С.

9.27. 1-й, ОП.

9.28. 1-й, ОП.

9.29. 2-й, разбиение.

9.30. 1-й, первым ходом пишет число, не являющееся делителем 1000.

9.31. 2-й, С.

9.32. 1-й, ОП.

9.33. 1-й, последний ход — чтобы остаток при делении результата на 77 отличался от 0 более чем на 10.

Глава X. Оценка + пример

10.1. 32. Клетки доски разобьём на пары по ходу коня. На паре клеток — не более 1 коня.

10.2. 25 мин. Оценка: 20 мин : 4 = 5 мин на одну лошадь. Расписание работы строится.

10.3. 63. Обозначим через n число областей доски, внутри каждой из которых ладья может свободно перемещаться. Изначально $n = 64$ (каждая клетка — отдельная область). Чтобы ладья могла свободно перемещаться с любого поля на любое, нужно после удаления спичек получить $n = 1$. Удаление одной спички уменьшает число указанных областей не более чем на 1. Следовательно, нужно удалить не менее 63 спичек. Пример легко строится.

10.4. 11. После k поворотов игрушка повернётся на $17k$ градусов относительно начального направления. Тогда $17k > 180$, откуда наименьшее значение k равно 11. Пример: 12-угольник, у которого 11 углов по $163°$ и один угол $7°$.

10.5. 10 веников и 5 тазиков; $(1{,}17 \cdot 2 + 1{,}66 \cdot 1) \cdot 5$.

10.6. 4. Оценка — количество всевозможных отрезков между отмеченными точками. Пример: если координаты концов отрезка 0 и 13, то отмечаем 2, 8, 9, 12.

10.7. Грубые. Сначала последовательно сравниваем нечётные банки, а затем — чётные. Всего 99 взвешиваний. С точными весами требуется не менее 100 взвешиваний, т. к. необходимо хотя бы раз положить на весы пару соседних банок.

10.8. 3. Оценка: за ход 3 варианта, за 2 хода не более 9 вариантов.

10.9. $n+1$. Надо выбрать само множество и все его подмножества из $(n-1)$ элементов.

10.10. 29.

10.11. 21. Из каждого кошелька надо взять для взвешивания разное число монет, иначе кошельки неразличимы.

10.12. Из каждого кошелька надо взять такое количество монет, чтобы среди всевозможных попарных разностей этих чисел не встретились одинаковые значения. Это можно сделать для шести кошельков. Для семи кошельков этого сделать нельзя, т. к. различных пар (упорядоченных) из семи — 42, а значений разностей — 41.

10.13. 3 д., всего 7. Пусть число членов кружка n, $n \in N$. Тогда число девочек d удовлетворяет неравенству $0{,}4 < \dfrac{d}{n} < 0{,}5$, $d \in N$. Оценка достигается перебором по меньшим значениям n.

10.14. 51.

10.15. 201. (В вершинах правильного 201-угольника.)

10.16. R^2.

10.17. 40.

10.18. 8.

10.19. 35.

10.20. 4.

10.21. 15.

10.22. 20.

10.23. $33\frac{1}{3}$.

10.24. 5.

10.25. а) *Способ 1*. Каждым вопросом нужно вдвое сокращать количество возможных задуманных чисел. Сначала Коля спросит: «Задуманное число больше 8?». Если Витя отвечает «да», то Коля спросит: «Задуманное число больше 12?». Если же Витя на первый вопрос отвечает «нет», то вторым вопросом Коли будет «Задуманное число больше 4?» и т. д.

Способ 2. Пусть Витя задумал число x. За четыре вопроса Коля может узнать разложение числа $x-1$ по степеням двойки. Вопросы могут быть, например, такие (квадратными скобками обозначена целая часть, например, $[6{,}5]=6$).

Вопрос 1. $a_3 =$ «Является ли нечётным число $\left[\dfrac{x-1}{8}\right]$?»

Вопрос 2. $a_2 =$ «Является ли нечётным число $\left[\dfrac{x-1}{4}\right]$?»

Вопрос 3. $a_1 =$ «Является ли нечётным число $\left[\dfrac{x-1}{2}\right]$?»

Вопрос 4. $a_0 =$ «Является ли нечётным число $(x-1)$?»

Каждой из переменных a_3, a_2, a_1, a_0 присвоим значение 1, если Витя на соответствующий вопрос ответил «да», или 0, если Витя на соответствующий вопрос ответил «нет». Тогда $x = a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 + 1$.

Заметим, что второй способ годится даже в том случае, если Витя не отвечает на вопросы последовательно, а требует от Коли записать на бумажке сразу все 4 вопроса, после чего одновременно даёт ответы на все записанные вопросы.

б) Сравните количество комбинаций ответов на 3 вопроса с количеством чисел, которые могут быть задуманы.

10.26. а) Разобьём квадрат 8×8 на 9 прямоугольников, как показано на рисунке 124.

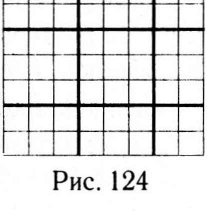


Рис. 124

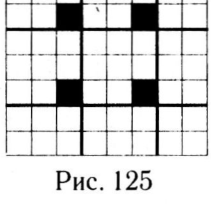


Рис. 125

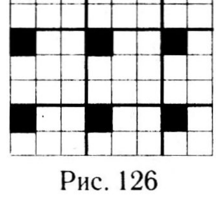


Рис. 126

Так как в каждом квадрате 3×3 должна быть закрашенная клетка, то закрашенных клеток не меньше 4. Пример, когда их ровно 4, изображён на рисунке 125.

Очевидно, в каждом из полученных 9 прямоугольников не более одной клетки (так как каждый из этих прямоугольников содержится в каком-то квадрате 3×3), то есть всего не более 9 закрашенных клеток. Пример, когда их ровно 9, изображён на рисунке 126.

б) Если $m = ck$ для некоторого целого числа c, то квадрат $m \times m$ можно разбить на c^2 квадратов $k \times k$ и тогда закрашенных клеток в нём ровно c^2. Если же $m = ck + r,\ c \in N,\ 0 < r < k$, разобьём квадрат на прямоугольники, как показано на рисунке 127.

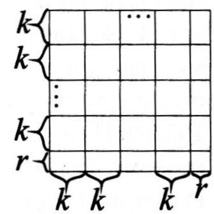


Рис. 127

Наименьшее количество закрашенных клеток получится, если в прямоугольниках $r \times k$ и $r \times r$ нет закрашенных клеток. Пример аналогичен пункту а): в каждом выделенном квадрате $k \times k$ закрасим правую нижнюю клетку, тогда получим c^2 закрашенных клеток.

в) Аналогично пункту а) наибольшее количество закрашенных клеток получится, если в каждом выделенном прямоугольнике есть закрашенная клетка. Тогда закрашенных клеток получится $(c+1)^2$. Пример: в каждом выделенном прямоугольнике закрасим левую верхнюю клетку.

Ответ: а) 4; 9.
Если $m = ck,\ c \in N$, то б) c^2; в) c^2.
Если же $m = ck + r,\ c \in N,\ 0 < r < k$, то б) c^2; в) $(c+1)^2$.

Глава XI. Теория графов

11.1. Нет.

11.2. Нет.

11.3. Нет.

11.4. Нет.

11.5. Сумма степеней вершин чётна.

11.6. Нет.

а) В графе из восьми вершин степень 8 встретиться не может.

б) Если есть две вершины, связанные со всеми, то степень любой другой вершины не менее двух.

в) Нечётных вершин не может быть нечётное количество.

11.7. Серый — у бабы Веры, белый — у бабы Лены, чёрный — у бабы Оли.

11.8. Нет.

11.9. 60.

11.10. 120.

11.11. 19.

11.12. $ADCB$.

11.13. Нет.

11.14. Цифра 6. *Решение*. Двузначные числа, образованные соседними цифрами, могут быть: 19, 31, 38, 57, 62, 76, 93, 95. Если число начинается с 1, то могут быть такие последовательности цифр: 1931 . . ., 1938 или 195762. Из приведённых последовательностей последние две обрываются, поэтому до некоторого момента (а именно до 280-й цифры числа) действует первая последовательность, то есть 193193193 . . . Таким образом, на 280-м месте будет цифра 1. Далее возможны две последовательности: 19319 или 19576.

11.15. Нет.

11.16. Зелёных вершин больше. Подсказка: рёбра между одноцветными вершинами можно не учитывать.

11.17. Когда одну дорогу перекрыли, получилось две стоянки (вершины графа) со степенью 5, степень остальных вершин осталась 6. Но ни в одной компоненте связности не может быть одной вершины нечётной степени. Осталось доказать, что граф останется связным.

11.18. См. лемму 5.

11.19. См. лемму 5.

11.20. Эти города должны быть в одной компоненте связности.

11.21. Люба — да, Вера — нет.

11.22. Аналогично 11.17.

11.23. Аналогично 11.18.

11.24. В одной компоненте связности не может быть нечётное количество вершин нечётной степени.

11.25. Если представить узлы сетки вершинами, а верёвочки — рёбрами графа, то в этом графе нужно удалить как можно больше рёбер так, чтобы он остался связным. До разрезания было $6 \cdot 20 + 21 \cdot 5 = 225$ рёбер-верёвочек. Можно удалять рёбра до тех пор, пока не останется граф без цикла. Заметим, что из цикла любое ребро можно удалить, и граф при этом останется связным. Связный граф, в котором нет циклов, — дерево, в нём

$6 \cdot 21$ вершин и соответственно $6 \cdot 21 - 1 = 125$ рёбер. Значит, можно удалить $225 - 125 = 100$ рёбер. Больше рёбер удалять нельзя, тогда из дерева получится несвязный граф.

11.26. 11.

11.27. 22.

11.28. 93. ($3 + 45 \cdot 2 = 93$ ребра, это дерево, в нём $93 + 1$ вершины, но царь не является своим потомком).

11.29. Если есть цикл, из него можно удалить вершину с двумя рёбрами, оставшийся граф останется связным. Если циклов нет, можно удалять висячую вершину, оставшийся граф останется связным.

11.30. Аналогично 11.29.

11.31. 171.

11.32. Если замкнутой ломаной линии не найдётся, то граф из вершин квадратов и рёбер-красных отрезков будет деревом или несколькими деревьями. Но рёбер в этом графе 26, значит, вершин в каждом дереве на 1 больше. Всего вершин хотя бы 27. А вершин квадратов 26. Противоречие.

11.33. Часть рёбер образуют дерево (их можно определить, если последовательно удалять дороги, разрывая циклы). В дереве 2008 вершин и 2007 рёбер.

11.34. 43.

11.35. 80.

11.36. а) Да; B и F. б) Да; нет.

11.37. Нельзя, 2 раза.

11.38. 110 см.

11.39. Нет.

11.40. 3.

11.41. Не выполняется условие $P \leqslant 3B - 6$.

11.42. 42 треугольника.

11.43. Не выполняется условие $P \leqslant 3B - 6$.

11.44. Граф, где вершины соответствуют ученикам, а рёбра соединяют решивших одну и ту же задачу, имеет только чётные вершины. Значит, в нём существует эйлеров цикл. Направим стрелки в этом цикле последовательно.

11.45. Нарисуем граф, где вершины — дедушки, две вершины соединены ребром при наличии общего внука у соответствующих дедушек. Возможны только два варианта (рис. 128).

Первый. У всех ребят есть один общий дедушка.

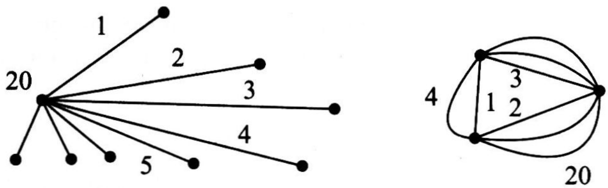


Рис. 128

Второй. Есть всего 3 дедушки. Пусть утверждение неверно. Тогда у дедушек не больше $3 \cdot 13 = 39$ внуков (а так как у каждого внука по 2 деда, число внуков, что соединены с дедушками, вдвое больше, чем число детей), значит, так не может быть и хоть у кого-то из дедушек больше 13 внуков.

11.46. 5 игр и 10 ребят. Рассмотрите полный граф, в котором рёбра — ребята, вершины — игры.

11.47. Проведём между знакомыми синие линии, между незнакомыми — красные. От любого человека ведёт 5 линий, значит, среди них хотя бы 3 одного цвета. Рассмотрите получившийся граф из 4 точек. В нём найдётся треугольник одного цвета.

11.48. Пусть из A нельзя доехать до B таким образом. Но из A ведут дороги в 20 городов (вместе с A 21 город), а в B ведут дороги из 20 городов (вместе с B тоже 21 город), раз в сумме больше 41 города, значит, какие-то города из первой и второй группы совпадают.

11.49. 24 — 15 мальчиков и 9 девочек.

11.50. Рассмотрим город A, из которого выходит наибольшее число дорог — k. По этим дорогам из A можно попасть в k городов без пересадки (группа B). Рассмотрим город C, не входящий в B. Пусть в него нельзя попасть хотя бы из одного города группы B. Тогда из него ведут k дорог в группу B и ещё дорога в A. Значит, из него ведёт дорог больше, чем из A, чего не может быть.

11.51. Рассмотрим произвольный город A и разобьём все города на группы. В первую группу отнесём город A. Во вторую — все города, в которые можно попасть из A без пересадки. В третью — все города, в которые можно попасть хотя бы из одного города второй группы (в каждый город третьей группы можно попасть из A с одной пересадкой). В четвёртую группу определим города (не вошедшие в предыдущие группы), в которые без пересадок можно попасть из городов третьей группы и т. д. Докажем, что таких групп можно выделить не более 58. Действительно, в 1-й и 2-й группе вместе не менее 101 города, в 3-й, 4-й и 5-й — также не менее 101 города (если в 4-й группе есть хотя бы один город, а иначе во все города можно добраться из A не более чем с одной пересадкой). Аналогично в 6-й, 7-й и 8-й группах не менее 101 города и т. д.

Если предположить, что всего таких групп получится не менее 59, то всего в этих группах должно быть не менее $101 \cdot 20 = 2020$ городов, а по условию их 2009. Противоречие. Значит, от города A до любого другого можно добраться не более чем с 56 пересадками. Город A был выбран произвольно, поэтому задача решена.

11.52. Выберем одну вершину, из которой выходит хотя бы 6 одноцветных рёбер (принцип Дирихле). Примените задачу 11.47 к вершинам, в которые идут эти рёбра.

11.53. Предположим противное. Пусть людям соответствуют вершины графа, красные рёбра — знакомства, синие — незнакомства. Если из какой-то вершины выходят хотя бы 4 синих ребра, то либо получаем синий треугольник (если хотя бы пара из соответствующих четырёх вершин соединена синим ребром), либо 4 вершины, попарно соединённые красными отрезками (если нет пары из соответствующих четырёх вершин, соединённых синим ребром). Значит, из каждой вершины исходного графа должно выходить не более трёх синих рёбер. Из каждой вершины выходить ровно по 3 синих ребра не может, так как всего вершин 9 (число вершин с нечётной степенью должно быть чётно). Следовательно, хотя бы из одной вершины выходят 6 красных рёбер. Для соответствующих 6 вершин следует применить задачу 11.47.

11.54. Выберем вершину. От неё направим стрелки ко всем вершинам, с которыми она соединена ребром. От этих вершин проведём стрелки ко всем вершинам, с которыми они связаны ребром, и т. д.

11.55. Рассмотрите ориентированный граф и используйте «принцип крайнего».

11.56. Докажите сначала, что найдутся 2 участника A и B, набравшие равное число очков. Пусть при этом B проиграл A. Рассмотрим множество участников, над которыми B одержал победу. Если бы A также выиграл у всех них, то у A было бы очков больше, чем у B. Следовательно, в указанном множестве найдётся участник C, выигравший у A. Искомые три участника найдены.

Литература

1. *Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Юдина И. И. и др.* Геометрия. 7–9 класс. — М.: Просвещение, 2008.
2. *Бабинская И. Л.* Задачи математических олимпиад. — М.: Наука, 1975.
3. *Бугаенко В. О.* Турниры им. Ломоносова. — М.: МЦНМО, ЧеРо, 1998.
4. *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л.* Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1986.
5. *Виленкин Н. Я. и др.* Алгебра. 8 класс. — М.: Просвещение, 2004.
6. *Виленкин Н. Я. и др.* Алгебра. 9 класс. — М.: Просвещение, 2004.
7. *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1994.
8. *Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., Васильев Н. Б.* Подготовительные задачи к LVII Московской олимпиаде 1994 года для 8–11 классов. — М.: TREADE PUBLISHERS, 1994.
9. *Коннова Е. Г.* Математика. Поступаем в вуз по результатам олимпиад. — Ростов н/Д: Легион, 2008.
10. *Коннова Е. Г.* Математика. Поступаем в вуз по результатам олимпиад. 6–9 класс. Часть 2. — Ростов н/Д: Легион, 2010.
11. *Купцов Л. П., Резниченко С. В., Терешин Д. А.* Российские математические олимпиады школьников. — Ростов н/Д: Феникс, 1996.
12. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2001.
13. *Розенталь А. Л.* Правило крайнего // Квант. — 1988. — № 9.
14. *Рукшин С. Е.* Математические соревнования в Ленинграде — Санкт-Петербурге. — Ростов н/Д: Март, 2000.
15. *Баженов И. И.* Задачи. URL: http://wiki.iteach.ru/images/4/4a/БаженовЗадачи.doc.
16. *Барвенов С. А.* URL: http://bars.na.by/index.html.
17. *Гордин Р. К.* Задачи по геометрии из коллекции задач. URL: http://school-collection.edu.ru/catalog.
18. Единая коллекция ЦОР. URL: http://school-collection.edu.ru.
19. Задачи Московских Математических Олимпиад. URL: http://olympiads.mccme.ru/mmo/.
20. Интернет-проект «Задачи» на базе МЦНМО. URL: http://www.problems.ru.

21. Кружок МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ. URL: http://mmmf.msu.ru/archive/20042005/z8/12.html.
22. Летняя многопредметная школа Кировской области. URL: http://cdoosh.ru/lmsh/about.html.
23. Олимпиада «Шаг в будущее». URL: http://cendop.bmstu.ru/olymp.
24. Олимпиада «Ломоносов». URL: http://olymp.msu.ru.
25. Словари и энциклопедии на Академике. URL: http://dic.acaditic.ru.
26. Турнир городов. URL: http://www.turgor.ru.
27. ONG TCV Scoala Virtuala a Tanarului Matetatician (Виртуальная Школа Юного Математика), 1999. URL: http://www.math.md/school.

Готовимся к олимпиаде

Учебное издание

Коннова Елена Генриевна, **Дрёмов** Виктор Александрович,
Иванов Сергей Олегович, **Ханин** Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА.
ПОДГОТОВКА К ОЛИМПИАДАМ: ОСНОВНЫЕ ИДЕИ, ТЕМЫ, ТИПЫ ЗАДАЧ.
6–11-е классы

Издание пятое

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, Е. Г. Конновой***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *Н. Раевская*
Компьютерная вёрстка *С. Иванов*
Корректоры *Л. Андрецова, Л. Михайлова*

Подписано в печать с оригинал-макета 01.10.2019.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,88.
Тираж 5000 экз. Заказ № 10037.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано с готового оригинал-макета
ООО «Принт-М», 142300, М.О., г.Чехов, ул. Полиграфистов, д.1