Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Э. М. Галеев, А. Э. Галеева

МАТЕМАТИКА

ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС
по подготовке к ДВИ
в МГУ

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ — ШКОЛЕ

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Программа «МГУ – школе»

Э. М. Галеев, А. Э. Галеева

МАТЕМАТИКА

ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

по подготовке к дополнительному вступительному испытанию в МГУ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано Ученым советом
механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова

Издательство Московского университета
2019

УДК 51
ББК 22.1
Г15

Рекомендовано Ученым советом
механико-математического факультета
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова

Рецензенты:
д.ф.-м.н., проф. *С. А. Богатый*,
д.ф.-м.н., проф. *Ю. В. Садовничий*

Галеев Э. М., Галеева А. Э.

Г15 Математика: Практический курс по подготовке к дополнительному вступительному испытанию в МГУ: Учебно-методическое пособие / Э. М. Галеев, А. Э. Галеева. — М.: Издательство Московского университета, 2019. — 456 с. — (Программа «МГУ — школе»)

ISBN 978-5-19-011326-6

Главная цель пособия — помочь абитуриенту подготовиться к вступительному экзамену по математике в МГУ. В настоящее время этот экзамен называется ДВИ (дополнительное вступительное испытание). Кроме этого авторы также ставят целью помочь более глубокому изучению элементарной математики. Книга фактически является задачником. Основная масса задач взята из вариантов вступительных экзаменов в МГУ и его филиалов. Задачи расположены по темам в порядке возрастания сложности. Проведена систематизация видов встречающихся задач и методов их решений. Решения наиболее типичных задач приведены в разделах «Ответы, указания, решения». При этом приводятся решения большинства задач ДВИ последних лет, включая задачи 2018 года.

Для абитуриентов, учащихся старших классов, преподавателей и слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для дистанционного обучения.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-19-011326-6

Оглавление

Предисловие

Приветствуем Вас, дорогой читатель!

Данное пособие предназначено в первую очередь абитуриентам МГУ и учащимся старших классов. Кроме того, оно может быть полезно для преподавателей и слушателей подготовительных отделений и курсов. Пособие составлено таким образом, что может быть использовано, как для самостоятельных занятий, так и для дистанционного обучения с преподавателем.

Предполагается, что учащийся знаком со школьной программой, собирается углубить имеющиеся у него знания и научиться рациональным подходам и методам решения задач.

Для лучшего достижения этой цели задачи систематизированы по типам и схемам их решения. Пособие состоит из шести частей, которые делятся по тематике на параграфы. Параграфы делятся на пункты по типам (видам) задач, расположенных в порядке возрастания сложности. Это позволяет постепенно переходить от решения простых задач к более сложным. В начале пункта приводятся краткие сведения об изучаемых понятиях, содержатся формулы и приводятся схемы, используемые для решения задач определенного вида. Эти схемы могут отличаться от тех, к которым Вы привыкли, но, тем не менее, имеет смысл разобраться в них, понять, что предложенные идеи помогают приобрести более общий взгляд на уже известные факты и дают наиболее простые решения. Это особенно важно в условиях экзамена, поскольку позволяет сэкономить время решения и упростить его запись, уменьшая возможность появления арифметических ошибок.

Идею систематизации задач проиллюстрируем на параграфе "Иррациональные неравенства". Он делится на пункты: неравенства вида $\sqrt{f} < g$, $\sqrt{f} > g$, $\sqrt{f} > \sqrt{g}$, с несколькими корнями, неравенства на замену переменных, системы иррациональных неравенств. Таким образом, иррациональные неравенства разбиваются на определенные виды неравенств, имеющих одинаковые схемы решений, которые подобраны таким образом, чтобы решение было наиболее коротким и естественным. Такая систематизация помогает определить к какому типу относится данная задача и выбрать оптимальную схему ее решения. Это также помогает более легкому усвоению материала, лучшему запоминанию.

Перед решением задач определенного пункта рекомендуем вначале прочитать имеющуюся краткую теоретическую часть, разобраться к какому виду относится или сводится решаемая задача, а затем воспользоваться схемой решения задач этого вида. Даже, если Вам ясно, как решать задачу, необходимо подумать, а наиболее ли простой способ решения Вы выбрали, нет ли другого более удобного способа.

Подробные решения некоторых задач приведены в разделе "Ответы, указания, решения" в конце каждой части. Советуем прочитать приведенное в книге решение, понять, почему авторы предпочли именно такое, а не другое. При решении подобных задач рекомендуется использовать предложенный способ и форму записи. В некоторых задачах ответы специально не приводятся. Это так называемые "тестовые" задачи. Они предназначены для проверки преподавателем усвоения материала учащимися.

Основная масса задач книги предлагалась на вступительных экзаменах в МГУ. При этом рассмотрены наиболее интересные и поучительные задачи последних лет. Для каждой задачи указан факультет, год, номер и общее количество заданий в варианте. Для выездных экзаменов указывается город, в котором эта задача давалась. Часть задач взята из пособий по элементарной математике, часть составлена авторами.

Надеемся, что данная книга поможет успешно пройти вступительное испытание. Желаем Вам удачи!

Галеев Э. М., Галеева А. Э.

Прислать замечания, предложения по улучшению книги, а также получить информацию о дополнительной подготовке к вступительным экзаменам в МГУ можно по адресам:
galeevem@mail.ru; alf.ir.a@mail.ru; или по тел. 8 (925) 729-44-28.

Часть 1

- **Рациональные неравенства (метод интервалов)**
- **Уравнения высших степеней**
- **Уравнения и неравенства с модулем**

Формулы

Степени и разложения на множители

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b),$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b),$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4,$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5,$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$

$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4),$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$

$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots - ab^{2n-1} + b^{2n}),$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc.$

Обозначения

$\begin{cases} A, \\ B, \end{cases}$ — система уравнений или неравенств. Решением является пересечение множеств A и B.

$\left[\begin{array}{l} A, \\ B, \end{array} \right.$ — совокупность уравнений или неравенств. Решением является объединение множеств A и B.

Квадратный трехчлен

1) $ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0,$

если дискриминант $D=b^2-4ac<0$, то корней нет,

если $D>0$, то $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

если $D=0$, то $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$, $\qquad ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$.

Если b — коэффициент при x — четный, то квадратное уравнение удобно решать через $\dfrac{D}{4}=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac$, тогда $x_{1,2}=\dfrac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{(\frac{b}{2})^2-ac}}{a}$.

Теорема Виета. $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$

2) *Приведённый квадратный трёхчлен:* $x^2+px+q=0$.

$x_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

Если p — коэффициент при x — четный, то приведённое квадратное уравнение удобно решать через $\dfrac{D}{4}=\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q$, тогда $x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}$.

Теорема Виета. $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$

Выделение полного квадрата

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=a(x-x_0)^2+y_0,$$

$x_0=-\dfrac{b}{2a}$, $y_0=c-\dfrac{b^2}{4a}$ — координаты вершины параболы.

Кубический многочлен: $x^3+ax^2+bx+c=0$.

Пусть x_1, x_2, x_3 — его корни, тогда

$x^3+ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$

$x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$.

Теорема Виета. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b, \\ x_1x_2x_3=-c. \end{cases}$

1 Рациональные неравенства (метод интервалов)

Дробно-рациональной функцией (иногда говорят просто *рациональной*) называется функция вида $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Неравенства вида $f(x) \geq 0$ для дробно-рациональной функции f решаются чаще всего *методом интервалов*. Вместо неравенства $\geq$ здесь может стоять любое из неравенств: $\leq$, $>$, $<$. Метод интервалов заключается в следующем:

1. *Перенести все члены неравенства в одну сторону.*

2. *Привести их к общему знаменателю.*

3. *Разложить числитель и знаменатель полученной дроби на линейные множители*[1]:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C \cdot \frac{(x-a_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_m)^{\alpha_m}}{(x-b_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (x-b_n)^{\beta_n}}$$

Для этого надо приравнять числитель и знаменатель нулю и найти их корни. Если константа $C < 0$, то умножением обеих частей неравенства на -1 (при этом знак неравенства меняется на противоположный) добиваемся того, чтобы коэффициент C стал положительным. Положительные множители (типа x^2+1, в том числе положительную константу перед дробью или многочленом) можно отбросить, так как при этом множество решений неравенства не изменится.

4. *Отметить корни числителя и знаменателя на числовой прямой.* При нестрогом неравенстве ($\geq$ или $\leq$) корни числителя обозначить жирными точками. В этом случае корни числителя могут входить в решения неравенства. Корни знаменателя не могут являться решениями, поэтому их можно обозначить кружочками (выколотые точки). В случае строгого неравенства корни числителя также обозначаются кружочками. В каждом из полученных интервалов знак дроби не меняется, т. е. является постоянным.

---

[1] Отметим, что квадратные трехчлены типа x^2+1 не разлагаются на линейные множители, но зато они всегда положительны.

5. *Определить знак дроби в каждом из интервалов.* Для этого можно взять какую-нибудь отдельную "удобную" точку внутри интервала, подставить ее в дробь и найти знак дроби.

Определять знак дроби можно также используя *свойство кратности корня*[2]: если корень имеет нечетную кратность (один, три и т. д.), то при переходе через эту точку знак дроби меняется; если корень имеет четную кратность (два, четыре и т. д.), то при переходе через эту точку знак дроби не меняется.

В самом правом интервале (от $+\infty$ до первого корня) знак дроби совпадает со знаком числа C, стоящего перед дробью.

6. *Выписать правильно ответ.* В ответ выписываем те промежутки, в которых дробь имеет нужный знак. Особое внимание при этом обращаем на концы промежутков, включая их когда надо, и исключая, наоборот, все кружочки (выколотые точки). При этом в ответе могут быть и промежутки, и отдельно стоящие точки.

Замечание. 1. При нанесении нулей числителя и знаменателя на числовую ось соблюдение масштаба необязательно. Важно соблюдение порядка следования этих точек друг за другом.

2. Не ставьте лишние (отличные от нулей числителя и знаменателя) точки на числовой оси.

Решить неравенства:

1.1 Простейшие рациональные неравенства

1.1. $\dfrac{1}{x} \le 1.$ *"Решение"*

1.2. (МГУ, психологический, 1982, 1(6))
$$\frac{2x-3}{x} \le \frac{3-2x}{x(x+1)}.$$

1.3. $\dfrac{1}{3x-2-x^2} - \dfrac{3}{7x-4-3x^2} > 0.$

1.4. $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} \le \dfrac{2}{x-3}.$ *"Тест"*

[2] Для множителя $(x-a)^k$, $k \in \mathbb{N}$, число k является кратностью корня $x = a$.

1.5. (МГУ, Магнитогорск, 1996, 2(10))
$$\frac{-2}{1-1/(3-x)} \leq 1.$$ *"Тест"*

1.6. (МГУ, психологический, 1971, 3(5))
Найти все такие значения x, что наименьшее из чисел $2-2x^2$ и $1-x$ больше 1.

1.7. (МГУ, почвоведения, 1990, 5(6))
Найти все значения x, при которых наибольшее из чисел $2x+1$ и $x+2$ больше -1.

Домашнее задание

1.8. (МГУ, Якутск, 1995, 1(10))
$$\frac{6+2x}{7x} \leq 0.$$

1.9. (МГУ, геологический, май 1996, 1(8))
$$\frac{1}{x-1996} \leq \frac{x}{x-1996}.$$

1.10. (МГУ, Обнинск, 1995, 1(10))
$$\frac{-2}{x-1} \leq 1.$$

1.11. (МГУ, экономический, 1985, 1(6))
$$\frac{4x-1}{3x+1} \geq 1.$$

1.12. (МГУ, физический, 1987, 1(6))
$$\frac{1}{2x} \geq \frac{1}{1-x}.$$

1.13. (МГУ, физический, май 1995, 3(8))
$$\frac{x}{x-1} \leq \frac{x-2}{x}.$$

1.14. $\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{5}{2+x} < 1.$

1.15. (МГУ, геологический, май 1995, 1(9))
$$\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 \leq 0.$$

1.16. (МГУ, философский, 1989, 1(5))

$$\frac{x^2-5x+4}{5-x} \geq 0.$$

1.17. $$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1.$$

1.18. (МГУ, химический, 2004, 1(6))

$$\frac{10+3x-x^2}{x^2-3x+2} \leq 1.$$

1.19. (МГУ, ФНМ, апрель 2002, 1(6))

Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y = \frac{3}{x-1}$ лежат не выше соответствующих точек графика функции $y = 2x$.

1.20. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 2(8))

$$\frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)} \geq -1.$$

1.21. $$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1.$$

1.22. (МГУ, филологический, 1999, 2(5))

$$\frac{1}{x^2+8x-9} \geq \frac{1}{3x^2-5x+2}.$$

1.23. (МГУ, почвоведения, 1990, 5(6))

Найти все значения x, при которых наименьшее из чисел $3-2x$ и $1-x$ меньше 1.

1.24. (МГУ, ИСАА, 2005, 1(7))

$$\frac{x^2-3x-4}{x+1} \leq 1.$$

1.25. Найдите наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{x-5}{x^2+5x-14} > 0$.

1.26. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-x+1} < \dfrac{1-2x}{x^3+1}$.

1.27. (МГУ, геологический, 2001, 1(8))

$$\frac{\frac{1}{x-1} - 1}{1 - \frac{1}{x-7}} \geq 0.$$ *“Тест”*

1.28. (МГУ, Челябинск, 1996, 1(10))

$$\frac{1}{2 - 1/(1 - 1/(1-x))} < 1.$$ *“Тест”*

1.29. (МГУ, факультет Гос. управления, 2002, 3(7))

$$\frac{-1}{\frac{8}{9-x^2} + 1} \leq 3 - x.$$

1.30. (МГУ, филологический, 1970, 4(7))
Доказать, что $11n^2 - 14n + 3 \geq 0$ при всех целых n.

1.31. (МГУ, филологический, 1971, 3(7))
Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$(n^2-1)(n^2-11)(n^2-101)(n^2-1001) < 0.$$ *“Тест”*

1.2 Учет кратности корня

В этом пункте определять знак функции рекомендуется, используя *свойство кратности корня*: если корень имеет нечетную кратность (один, три и т. д.), то при переходе через эту точку знак функции меняется; если корень имеет четную кратность (два, четыре и т. д.), то при переходе через эту точку знак функции не меняется.

1.32. $\dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 10x + 25} \geq 0.$

1.33. $(x+1)(5-x)(x-3)^2 \leq 0.$ *“Тест”*

1.34. $(x+7)(2x-5)^3(6-x)^5(3x+10)^4 \geq 0.$ *“Решение”*

1.35. $\dfrac{x(x+1)^2(x+2)^3(x+3)^4}{(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4} \leq 0.$

1.36. $\dfrac{x^2(x-1)(x+3)^3}{x^2+4x+3} \geq 0.$ *"Тест"*

1.37. $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right)^2 \geq 1.$

Домашнее задание

1.38. $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0.$

1.39. (МГУ, физический, март 1996, 2(8))
$\dfrac{2x-7}{x-3} > \dfrac{9}{5-x}.$

1.40. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 1(7))
$\dfrac{1}{1-x} \leq 1+x.$

1.41. (МГУ, мехмат, 1977, 1(5))
$x \leq 3 - \dfrac{1}{x-1}.$

1.42. (МГУ, ИСАА, 2006, 1(7))
$\dfrac{5x+1}{(x+2)(x-3)} \geq 1 + \dfrac{16}{x-3}.$

1.43. $\dfrac{(x^2+1)(x^2-1)^2(x-3)^4}{(x+2)^3(2x-3)^5} \leq 0.$

1.44. $(1+x)(1-3x)(4-x^2)^3(5+2x)(1-x)^2 \geq 0.$

1.45. $\dfrac{x^2(x-1)^2(x-2)}{x^2-1} \leq 0.$ *"Тест"*

1.46. (МГУ, психологический, 1990, 3(5))
$\left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{8} - \dfrac{15}{88-32x}\right)^2 \leq 1.$

1.47. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0.$

1.48. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1} \le 0.$

1.49. (Черноморский ф-л МГУ, май 2001, 1(9))
Определите все целые значения x, для которых дробь $\dfrac{x^2(x^2-35)(x^2-10)}{(x^2-64)(x^2-100)}$ является неположительной.

1.3 Метод интервалов на ОДЗ. Монотонность корня

В задачах этого пункта можно найти ОДЗ (область допустимых значений) неравенства, отметить ее на числовой прямой, найти корни числителя и знаменателя, отметить их на прямой. Далее найти знак функции на полученных промежутках, выбрать нужные промежутки.

В рассматриваемых ниже задачах множество точек, не входящих в ОДЗ, можно заштриховывать (чтобы не ставить в этих промежутках знак функции) и в дальнейшем из рассмотрения исключать. Особое внимание нужно обратить на граничные точки заштрихованных множеств, которые могут входить в ОДЗ и даже могут быть в числе решений неравенства.

Задачи этого пункта можно также решать, используя монотонное возрастание корня. Согласно нему знак разности $\sqrt{f}-\sqrt{g}$ совпадает на ОДЗ со знаком разности $f-g$, соответственно.

1.50. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-2} \ge 0.$ *"Решение"*

1.51. $(4-x)\sqrt{x-3} \le 0.$ *"Тест"*

1.52. (МГУ, геологический, 1988, 2(6))
$(x^2-3x-40)\sqrt{2x-3} \ge 0.$

1.53. (МГУ, ВМиК, 1978, 1(5))
$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0.$

1.54. (МГУ, мех-мат, 1983, 1(5))
$\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \ge \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$ *"Тест"*

Домашнее задание

1.55. $(\sqrt{x}-2)(x-2) \le 0$.

1.56. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-3} \le 0$.

1.57. $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4} \ge 0$. *"Тест"*

1.58. (МГУ, биологический, ФФМ, ФББ, 2006, 1(6))
$\sqrt{x+1}\,(x^2+3x-4) \ge 0$.

1.59. (МГУ, геологический, 1988, 2(6))
$(x^2+8x+15)\sqrt{x+4} \ge 0$.

1.60. (МГУ, геологический, 2007, 3(8))
$\sqrt{2^{(x^2-4)}-1}\cdot(x^2-7x+6) \le 0$.

1.61. (МГУ, ФББ, 2009, 3(9))
$(x^2-7x+6)\sqrt{x^2-10x+21} \ge 0$.

1.62. (МГУ, экономический, 1986, 3(6))
$(8x^2-6x+1)\sqrt{-25x^2+15x-2} \ge 0$. *"Тест"*

1.63. (МГУ, физический, 1996, 2(8))
$$\frac{x-2}{x\sqrt{6+x-x^2}} \ge 0.$$

1.64. (МГУ, мех-мат, 1983, 1(5))
$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \le \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$$

1.4 Неравенства с многочленами высших степеней

В этом пункте прежде чем приступить к решению неравенств имеющиеся многочлены надо разложить на множители или путем замены свести к многочленам меньшей степени.

В случае замены надо неравенство, полученное относительно новой переменной, решить методом интервалов, ответ для новой переменной записать в виде неравенства (а не в виде включения). И затем в полученное решение неравенства вместо новой переменной подставить её выражение.

1.65. $x^6 - 9x^3 + 8 > 0.$ *"Решение"*

1.66. (МГУ, геологический, 1974, 1(5))
$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5.$

1.67. $x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0.$ *"Тест"*

1.68. $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 > 0.$

1.69.* $2x^3 + x > x^2 + \dfrac{1}{3}.$

Домашнее задание

1.70. (МГУ, почвоведения, 1982, 3(5))
$x^4 - 5x^2 + 6 \geq 0.$

1.71. (МГУ, ВМиК, апрель 2004, 2(6))
$\dfrac{1}{x^2 - 5x + 7} \leq 5x - x^2 - 5.$ *"Тест"*

1.72. $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) < -5.$

1.73. $x^4 + x^3 - x - 1 < 0.$

1.74. $x^7 + 8x^4 - x^3 - 8 > 0.$

1.75. $x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 \leq 0.$ *"Тест"*

1.76. $\dfrac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8}{x^2} \leq 0.$

1.77.* $6x^2 + 1 > 3x^4 + 4x^3 + 4x.$

2 Алгебраические уравнения

2.1 Вычисление значений выражений

2.1. (МГУ, 2016, 1(8))
Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{3}{7}$.

Домашнее задание

2.2. (Филиал МГУ в г. Баку, 2016, 1(8))
Чему равно значение выражения $(2a+3)(2a-3)-(4a-7)(a+1)$ при $a = \frac{7}{5}$.

2.3. (МГУ, 2015, 1(8))
Найдите $f(2)$, если $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{10}$.

2.4. (МГУ, 2011, 1(8))
Найти значение функции $0{,}125x^2 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}$ в точке $x = \dfrac{1}{2}$.

2.2 Квадратные уравнения

2.5. (Филиал МГУ в г. Баку, 2015, 2(8))

$$x + \frac{20}{x-2} = \frac{10x}{x-2} - 3.$$

2.6. $\dfrac{x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}}{x^2 - x - 6} = 0.$

2.7. (МГУ, 2015, 2(8)) *"Решение"*
Найти сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.

2.8. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 1(8))
Найти целые корни уравнения $x^2 - (1+\sqrt{3})x + 2(\sqrt{3}-1) = 0$.

Домашнее задание

2.9. (МГУ, 2012, 1(8))
Найти многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\dfrac{2}{5}$ и $\dfrac{11}{3}$, а второй коэффициент равен -7.

2.10. (МГУ, 2013, 1(8))

Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найти второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2.11. (МГУ, ИСАА, 2008, 1(8))

$$\frac{3x^2 - 5x}{3x - 2} - 1 = \frac{2}{2 - 3x}.$$ *"Тест"*

2.12. (МГУ, географический, 2006, 1(6))

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 3(x - 1).$$

2.13.* (МГУ, экономический, 2005, 2(7))

Найдите сумму всех целых значений, которые принимает функция $y = \dfrac{x}{\sqrt{5}} - \dfrac{x^2}{20} + 6$ при $x \in [2;\ 12]$.

Уравнения высших степеней

Многочленом степени n называется функция вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (через $\mathbb{R}$ обозначается множество действительных чисел) и $a_n \neq 0$.

Большой класс задач связан с нахождением корней многочленов, т. е. с решением уравнений вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \qquad (1)$$

При $n = 1, 2$ эта задача не представляет труда, т. к. можно написать явные формулы для корней многочленов первой и второй степеней. При $n = 3, 4$ такие формулы также существуют, но они не изучаются в школьной программе и решения уравнений вида (1) при $n \geq 3$ требуют знания некоторых других приемов, о которых здесь и пойдет речь.

2.3 Деление многочленов

Для отыскания корней многочленов полезно познакомиться сначала с тем, как происходит деление многочленов.

Разделить с остатком многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, отличный от нуля, — это значит найти два многочлена $s(x)$ и $r(x)$ такие, что

$$P(x) = Q(x)s(x) + r(x), \tag{2}$$

причем степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $Q(x)$, либо $r(x)$ есть нуль.

В случае, если выполнено равенство (2), говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$ с остатком $r(x)$ и частным $s(x)$; если $r(x) = 0$, т. е. остаток есть число нуль, то говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$ с остатком нуль или многочлен $P(x)$ делится нацело на многочлен $Q(x)$.

Теорема 1. *Для любых двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, где $Q(x) \neq 0$, существует пара многочленов $s(x)$ и $r(x)$ таких, что $P(x) = Q(x)s(x) + r(x)$, причем степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $Q(x)$, либо $r(x)$ есть нуль.*

Деление многочленов можно проводить "уголком". Этот алгоритм (*алгоритм Евклида*) очень похож на тот, который используется при делении чисел "уголком". Мы познакомимся с ним на нескольких примерах.

2.14. Разделить $x^5 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ на $x^2 - x$. *"Решение"*

2.15. Разделить $x^4 + 2x^2 - 3x - 6$ на $x + 1$. *"Решение"*

2.16. Разделить $x^3 - 2x + 1$ на $x - 1$.

2.17. Разделить $x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ на $x^2 - 1$.

2.18. Разделить $x^3 - 1$ на $x^2 + 1$.

2.19. Разделить $x^4 - x^2$ на $x + 1$.

2.20. Разделить $x^5 - x^2 + x + 3$ на $x^3 + 1$.

2.21. Разделить $x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 4$ на $x^2 - 1$.

2.4 Отыскание целых корней

При отыскании корней многочлена можно вначале поискать целые корни. Пусть нам надо найти корни многочлена с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ (через $\mathbb{Z}$ обозначается множество целых чисел) и $a_n \neq 0$. При отыскании целых корней многочлена полезно знать следующие факты:

Теорема 2. *Если $x = m$ является целым ($m \in \mathbb{Z}$) корнем многочлена $P(x)$, то число m является делителем свободного члена a_0.*

Теорема 3. *Если $x = a$ является корнем многочлена $P(x)$, то многочлен $P(x)$ можно представить в виде произведения $P(x) = (x-a)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен степени $n-1$.*

Многочлен $Q(x)$ можно найти делением многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ "уголком" или соответствующей группировкой слагаемых многочлена и выделением из них множителя $x-a$.

Решить уравнения:

2.22. $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0.$

2.23. $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0.$ *"Решение"*

Домашнее задание

2.24. $x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0.$

2.25. $x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0.$

2.26. $x^4 - 6x^2 - 7x - 6 = 0.$

2.27. (МГУ, почвоведения, 2005, 1(6))
$(6x-15)^7 = (x-1)^{14}.$

2.28. (МГУ, почвоведения, май 2000, 1(6))
$\dfrac{x^{17}-1}{1-x^{15}} = \dfrac{1-x^{15}}{x^{13}-1}.$ *"Тест"*

2.5 Отыскание рациональных корней

Если у многочлена нет целых корней, то можно попытаться отыскать рациональные корни (вида несократимой дроби $\frac{m}{k}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ — множеству натуральных чисел). При отыскании рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, и $a_n \neq 0$, полезно знать следующий факт:

Теорема 4. *Если $x = \frac{m}{k}$ является рациональным корнем многочлена $P(x)$, то число m является делителем свободного члена a_0, а число k является делителем числа a_n — коэффициента при старшем члене.*

Из теоремы 4 следует, что если у многочлена $P(x)$ старший коэффициент равен 1, то любой рациональный корень многочлена $P(x)$ будет целым числом.

При отыскании рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами вначале отыскиваются целые корни уравнения, а затем рациональные корни, не являющиеся целыми.

2.29. $3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0.$

2.30. $2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = 0.$ *"Решение"*

Домашнее задание

2.31. $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 1 = 0.$

2.32. $8x^4 + 6x^3 - 13x^2 - x + 3 = 0.$

2.33. $16x^4 - 5x^2 - 21x - 5 = 0.$

2.6 Разложение многочлена на множители

2.34. $2x^3 + x + \sqrt{2} = 0.$

2.35. $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0.$

2.36.* $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0.$

2.37.* $x^4 + 4x - 1 = 0.$

2.38.* (МГУ, ВМиК, 2000, устный)
$x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}.$

Домашнее задание

2.39. $x^3 + 2x + 5\sqrt{3} = 0.$

2.40. $x^3 + 3x + 5\sqrt{2} = 0.$

2.41.* $x^4 + x^2 - 4x - 3 = 0.$

2.42.* $x^4 - 3x^2 + 4x - 3 = 0.$

2.43.* $x^4 - 2x^2 - 12x - 8 = 0.$

2.44.* $x^4 - 4x - 1 = 0.$

2.45.* $y^4 - 4y^3 - 1 = 0.$

2.7 Замена переменных

2.46. $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0{,}5625.$ *"Решение"*

2.47.* $x^4 + (x-1)^4 = 2.$

2.48.* $(x+2)^4 + x^4 = 4.$

2.49.* $x^5 - (x-2)^5 = 12.$

2.50.* $x^2 + \dfrac{x^2}{(x+1)^2} = 3.$

Домашнее задание

2.51. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680.$

2.52. $(x-1)(x+1)(x+2)x = 24.$

2.53. $(x^2+x+1)(2x^2+2x+3) = 3(1-x-x^2).$

2.54. $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5.$

2.55. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35.$

2.56.* Указать замену переменных, позволяющую решить уравнение при любых числах a, b, c: $\quad (x-a)^4 + (x-b)^4 = c.$

2.57.* Указать замену переменных, позволяющую решить уравнение при любых числах a, b, c: $\quad (x-a)^5 - (x+b)^5 = c.$

2.58.* $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0.$

2.59.* $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x-3)^2} = 7.$

2.8 Симметрические уравнения

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots+a_nx^{n+1}+a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0=0, \quad (1)$$

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0, \quad (2)$$

где $a_0 \neq 0$ называются *симметрическими уравнениями* соответственно нечетной и четной степеней. Симметрическое уравнение нечетной степени (1) всегда имеет корень $x=-1$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1}+1)+a_1x(x^{2n-1}+1)+\ldots+a_nx^n(x+1)=0.$$

После деления симметрического многочлена нечетной степени на $x+1$ получается симметрический многочлен четной степени. Симметрическое уравнение четной степени решается делением на x^n и последующей заменой $x+\dfrac{1}{x}$ новой переменной.

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots+a_nx^{n+1}-a_nx^n-\ldots-a_1x-a_0=0, \quad (1')$$

$$a_0x^{2n}+\ldots+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+(-1)^na_0=0, \quad (2')$$

где $a_0 \neq 0$ называются *кососимметрическими уравнениями* соответственно нечетной и четной степеней. Кососимметрическое уравнение нечетной степени $(1')$ всегда имеет корень $x=1$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1}-1)+a_1x(x^{2n-1}-1)+\ldots+a_nx^n(x-1)=0.$$

После деления кососимметрического многочлена нечетной степени на $x-1$ получается симметрический многочлен четной степени. Кососимметрическое уравнение четной степени решается делением на x^n и последующей заменой $x-\dfrac{1}{x}$ новой переменной.

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1}+\ldots+a_nx^{n+1}+a_nx^n\lambda+a_{n-1}x^{n-1}\lambda^3+\ldots+a_1x\lambda^{2n-1}+a_0\lambda^{2n+1}=0, \quad (1'')$$

$$a_0x^{2n}+\ldots+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\lambda+\ldots+a_1x\lambda^{n-1}+a_0\lambda^n=0, \quad (2'')$$

где λ — фиксированное число и $a_0 \neq 0$ называются *возвратными уравнениями*. При $\lambda = 1$ уравнения $(1'')$ и $(2'')$ являются симметрическими уравнениями соответственно нечетной и четной степеней. Возвратное уравнение нечетной степени $(1'')$ всегда имеет корень $x = -\lambda$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1}+\lambda^{2n+1})+a_1x(x^{2n-1}+\lambda^{2n-1})+\ldots+a_nx^n(x+\lambda)=0.$$

После деления возвратного многочлена нечетной степени на $x+\lambda$ получается возвратный многочлен четной степени. Возвратное уравнение четной степени решается делением на x^n и последующей заменой $x+\dfrac{\lambda}{x}$ новой переменной.

При $\lambda = -1$ уравнения $(1'')$ и $(2'')$ являются кососимметрическими уравнениями соответственно нечетной и четной степеней.

2.60. $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0.$ *"Решение"*

2.61. $x^6-9x^5+26x^4-33x^3+26x^2-9x+1=0.$

2.62. $x^5+6x^4+11x^3+11x^2+6x+1=0.$

2.63. $x^4-x^3-4x^2+x+1=0.$

2.64. $x^6+2x^5-3x^4-20x^3+3x^2+2x-1=0.$

2.65.* $x^4-5x^3+8x^2-10x+4=0.$

Домашнее задание

2.66. $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0.$

2.67. $x^6-8x^5+22x^4-28x^3+22x^2-8x+1=0.$

2.68. $2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0.$

2.69. $x^4-2x^3+3x^2+2x+1=0.$

2.70. $x^6-10x^5+28x^4-10x^3-28x^2-10x-1=0.$

2.71. $x^4-3x^3a+3xa^3+a^4=0.$

2.72. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right).$

2.73.* $x^5+3x^4-x^3+2x^2-24x-32=0.$

2.9 Однородные уравнения

2.74. $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0.$

2.75.* $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0.$

Домашнее задание

2.76. $(x^2 - 3)^2 - 7(x^4 - 9) + 6(x^2 + 3)^2 = 0.$

2.77. $(x - 2)^2(x + 1)^2 - (x - 2)(x^2 - 1) - 2(x - 1)^2 = 0.$

2.78. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48 \cdot \dfrac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$

2.79. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{x-2}{x-1} - 3\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2 = 0.$

2.10 Рациональные уравнения

2.80. $\dfrac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \dfrac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1.$

2.81.* (Нерюнгри, 1996, 5)

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{9}{x^2 - 2x + 1} \le \frac{8}{x^2 + 1}.$$

Домашнее задание

2.82. $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}.$

2.83. $\dfrac{x}{x^2 - x + 1} + \dfrac{2x}{x^2 + x + 1} = 1.$

2.84. $\dfrac{3x^2 - 1}{x} + \dfrac{5x}{3x^2 - x - 1} = \dfrac{119}{18}.$

2.11 Уравнения, решающиеся введением параметра

2.85. $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0.$ *“Решение”*

2.86. $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 - x + 3 - \sqrt{3} = 0.$

Домашнее задание

2.87. $x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0.$

2.88. $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0.$

2.12 Функциональные уравнения

2.89. $(x^2 + 2x - 5)^2 + 2(x^2 + 2x - 5) - 5 = x.$ *"Решение"*

2.90. $(x^2 - 4x + 6)^2 - 4(x^2 - 4x + 6) + 6 = x.$

Домашнее задание

2.91. $(x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3) - 3 = x.$

2.92. (МГУ, химический, заочный тур, 2000, 2(12))
$$(x^2 + 3x - 2)^2 + 3(x^2 + 3x - 2) - 2 = x.$$

2.93. (МГУ, почвоведения, май 2000, 6(6))
Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 8, такая что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0; 8]$. Решите уравнение $f(2x + 16) + 23 = 5f(x)$.

2.94. (МГУ, мех-мат, 2008, 5(6))
Найти все функции f, удовлетворяющие уравнению
$$f(x) + (x - 2)f(1) + 3f(0) = x^3 + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.13 Исследование функций

2.95. $x^4 + x^3 + 1 = 0.$

2.96. $x^9 - x^5 + x - 1 = 0.$

2.97. $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 0.$

2.98. $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 1) = 1.$

2.99.* (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 7(10))
Найдите наибольшее значение выражения $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{2010} - x_{2011})^2 + (x_{2011} - x_1)^2$ при $x_1, \ldots, x_{2011} \in [0, 1]$.

Домашнее задание

2.100. $(x^2+x+1)(x^2+2x+3)=1.$

2.101. $x^4+x^3+x^2+1=0.$

2.102. $2x^9-x^5+x-2=0.$

2.103.* $(x^2+x+1)(x^4+x^2+4)=x^2+2x+3.$

2.104.* $x^4-x+\dfrac{1}{2}=0.$

2.105. (МГУ, "Ломоносов-2011", заочный тур, 7(10))
Сколько решений имеет уравнение $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{2}{x^2}$?

2.14 Уравнения с несколькими переменными

2.106. $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3=0.$

2.107.* (МГУ, психологический, 1976, 5(5))
Из всех решений (x,y) уравнения $x^2y-x^2+4xy+6y-2x=3$ найти те решения, для которых y принимает наименьшее значение.

2.108.* (МГУ, психологический, 1986, 6(6))
Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x+3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2+xy+4y^2\le 3$.

2.109.* (МГУ, мех-мат, 1989, 6(6))
Найти наибольшее из значений z, для которых существуют числа x,y, удовлетворяющие уравнению $2x^2+2y^2+z^2+xy+xz+yz=4$.

2.110.* (МГУ, биологический, 1989, 5(5))
Числа x,y,z таковы, что $x^2+3y^2+z^2=2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x+y-z$?

2.111.* (МГУ, 2011, 8(8))
$$\begin{cases}4x^2-2xy+7y^2\le 1,\\ 2x-5y\ge 2.\end{cases}$$

"Решение"

2.112.* (МГУ, 2014, 8(8))
Пусть $f(x,y) = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y$,
$g(x,y) = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y$. Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Домашнее задание

2.113. $x^2 + 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0$.

2.114. $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 13 - 2x - 12y - 6z = 0$.

2.115.*(Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 8(10))

$$\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 + 3xy + 2xz - yz - 10y + 5 = 0, \\ 49x^2 + 65y^2 + 49z^2 - 14xy - 98xz + 14yz - 182x - 102y + 182z + 233 = 0. \end{cases}$$

2.116. (МГУ, ВМиК, Олимпиада "Абитуриент-2005", 3(6))
Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие равенству

$$4x^2 - 2xy + 2y^2 + y - 2x - 1 = 0.$$

2.117.* (МГУ, мех-мат, 1989, 6(6))
Найти наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению $x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1$.

2.118. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 7(8))
Найдите наибольшее значение выражения $3x - 2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $4x^2 + y^2 = 16$.

2.119.* (МГУ, биологический, 1989, 5(5))
Числа a, b, c таковы, что $2a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $a - 2b + c$?

2.120.* (МГУ, химический, 1997, 6(6))
Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

2.121.* (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2007", 7(10))
Определить, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0,0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством $14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0$.

2.15 Многочлены

2.122. Разложить на множители многочлен x^4+1.

2.123. Найти многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число a) $1+\sqrt{5}$; b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; c)* $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$.

2.124. Найти сумму: а) всех коэффициентов; б) коэффициентов при четных и нечетных степенях x выражения

$$(x^3-x+1)^{25}(x^2+x-1)^{17}.$$

2.125. Найти остаток от деления многочлена $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$ на x^2-1.

Домашнее задание

2.126. Разложить на множители многочлен a) x^8+x^4+1; b)* x^5+x+1.

2.127. Найти многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число a) $\sqrt{2}-1$; b) $\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$.

2.128. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1-3x+3x^2)^{743}(1+3x-3x^2)^{744}$.

2.129. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют суммы коэффициентов a и b. Чему равна сумма коэффициентов их произведения?

2.130. Найти остаток от деления многочлена $P(x)=x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}$ на a) x^2+x; b) x^2-x-2.

2.131. (МГУ, “Ломоносов-2011”, заочный тур, 9(10))
В какую степень надо возвести корень x_0 уравнения $x^{11}+x^7+x^3=1$, чтобы получить число $x_0^4+x_0^3-1$?

3 Уравнения с модулем

Решение уравнений, содержащих модули, может быть проведено с помощью раскрытия модулей и последующего решения полученных уравнений в каждом из промежутков и выбора тех корней, которые попали в эти промежутки. Иногда более простые решения уравнений получаются, если мы будем заменять наше исходное уравнение некоторой эквивалентной системой или совокупностью уравнений. Для каждого вида уравнений будем в начале пункта предлагать такую эквивалентную систему или совокупность уравнений.

3.1 Уравнения вида $|f| = g$

Решение уравнений вида $|f(x)| = g(x)$ можно проводить по одной из схем, приведенных ниже.

$$|f| = g \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geq 0, \\ f = g, \end{cases} \\ \begin{cases} f \leq 0, \\ -f = g; \end{cases} \end{array}\right. \quad (1) \qquad |f| = g \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f = g, \\ f = -g, \end{array}\right. \\ g \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Первая схема решения обычно излагается в школе, поскольку она непосредственно вытекает из определения модуля. Ею удобно пользоваться, если f — простая функция.

Вторая схема во многих случаях позволяет более коротко решать уравнения, поскольку состоит из меньшего числа уравнений и неравенств. Ею удобно пользоваться, если g — простая функция.

Ниже приводятся уравнения, которые решаются по одной из выписанных схем или сводятся к указанному виду уравнений. В некоторых задачах более простое решение получается, если вначале модуль функции взять за новую переменную, найти её, а затем собственно решать уравнение с модулем.

При решении уравнений пытайтесь найти наиболее удобную для данного уравнения схему решения. Правильный выбор метода решения существенно сэкономит время решения и меньше будет возможностей для совершения ошибки.

Решить уравнения:

3.1. $|x-3| = 2x$.*"Решение"*

3.2. (МГУ, почвоведения, май 2001, 2(6))
$|2x+3| = x^2$.

3.3. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 1(8))
$|2x-4| + 4 = 2x$.

3.4. (МГУ, геологический, 1991, 2(6))
$|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0$.

3.5. (МГУ, экономический, 1978, 1(5)) *"Тест"*
Найти корни уравнения $2|x^2 + 2x - 5| = x - 1$ на промежутке $(-\infty; \sqrt{2})$.

3.6. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 2000, 1(6))
$3|x+1| + x^2 + 4x - 3 = 0$.

3.7. $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

3.8. (МГУ, биологический, 2005, 1(7))
$x^2 + 2|x| - 3 = 0$.

3.9. (МГУ, геологический, 1975, 1(5))
$(x-1)^2 + |x-1| - 2 = 0$.

Домашнее задание

3.10. (МГУ, геологический, 1979, 1(6))
$|2x-3| = 3 - 2x$.

3.11. (МГУ, химический, 2001, 1(6))
$|x| = 2 - x$.

3.12. (МГУ, физический, 1995, 3(8))
$2|x+1| = 2 - x$.

3.13. $|x| = x^2 + x - 2.$

3.14. $|x^2 - 2x - 1| = 2x + 2.$

3.15. (МГУ, ФББ, 2009, 2(9))
$|x^2 - 5x + 3| = x - 3.$

3.16. (Филиал МГУ в г. Баку, 2016, 2(8))
$|5x^2 - 3x - 14| = 12.$

3.17. (Филиал МГУ в г. Астана, 2017, 2(8))
$|x^2 - 14x + 48| = 14x - 42 - x^2.$

3.18. (МГУ, экономический, 1978, 1(5))
Найти корни уравнения $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$ на промежутке $\left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. *"Тест"*

3.19. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 2(7))
$x^2 + |x| - 6 = 0.$

3.20. (МГУ, физический, 1990, 1(6))
$x^2 - 4|x| - 1 = 0.$

3.21. (МГУ, биологический, 1996, 2(5))
$(x-7)^2 - |x-7| = 30.$

3.22. (МГУ, ВМиК, май 1994, 1(6))
$$\left(4|x-1| + \frac{1}{2}\right)^2 = 11(x-1)^2 + \frac{5}{4}.$$

3.23. (МГУ, геологический, 1990, 1(6))
$$-\frac{|x|}{x} - x = \frac{x^2}{2} + 1.$$

3.24. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 3(10))
$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} = 2x.$$

3.25. (МГУ, геологический, 1980, 3(5))
$x^2 + 4|x-3| - 7x + 11 = 0.$

3.2 Уравнения вида $|f| = |g|$

Решение уравнений вида $|f(x)| = |g(x)|$ можно проводить по следующей схеме

$$|f| = |g| \iff \left[\begin{array}{l} f = g, \\ f = -g. \end{array} \right.$$

3.26. $|4x - 3| = |x - 5|$.

3.27. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2001, 2(6))
$|x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|$.

3.28. $|x^3 - 2x - 3| = |x^3 - 2x + 5|$.

Домашнее задание

3.29. (МГУ, химический, 2005, 1(6))
$|2x + 1| = |x + 2|$.

3.30. $|x^2 - 3x + 2| = |x^2 - 5x - 6|$.

3.31. $|x^3 + x + 1| = |x^2 + 3x - 1|$.

3.32. $|x - 2| \cdot |x + 3| \cdot |x + 6| = |x + 1| \cdot |x + 4| \cdot |x + 9|$.

3.3 Уравнения с несколькими отдельно стоящими модулями

Для решения таких уравнений надо найти точки, в которых выражения под знаком модуля меняют знак. Отметить их на числовой прямой. Числовая прямая разобьётся на несколько промежутков. Раскрывая модули, решаем уравнение на каждом из полученных промежутков. При этом удобнее концы промежутков включать в рассмотрение каждый раз.

3.33. (МГУ, психологический, 2005, 4(6))
$2|x + 1| + |x - 2| = 9$. *“Решение”*

3.34. $|x - 1| + |x - 2| = 1$.

3.35. (МГУ, ф-т Государственного управления, 2008, 1(7))

$$|1-x|+|x+1|=\frac{2x}{|x|}.$$

3.36. (МГУ, экономический, 1984, 2(6))
Найти наименьшее значение функции $y=2|x-3|+|3x-2|-3$.

3.37. (МГУ, химический, заочный тур, 2000, 1(12))
Найти наименьшее значение функции
$f(x)=|x-3|+|x|+|x+3|+|x+5|-12$.

3.38. (МГУ, филологический, 1984, 3(5))
Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$y=-x^2+3|x-1|+2$ на отрезке $[-2;\ 2]$.

3.39. (МГУ, 2012, 5(8))
Найти площадь фигуры, состоящей из точек (x,y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению: $|2x+y|+|y|+2|x-1|=2$.

3.40.* (МГУ, химический, 2001, 5(7))

$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+\ldots+|x-100|+|x+100|=200x.$$

3.41.* (МГУ, психологический, 2002, 6(6))

$$|x^3+7x^2-11x-6|+|x^3-12x^2-5x+3|=18x^2-2x-13.$$

3.42.* (МГУ, мех-мат, 2006, 6(6))
Найти наименьшее значение выражения $|2x-y-1|+|x+y|+|y|$, где x и y — произвольные действительные числа.

3.43.* (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2007, 7(10))
Решить уравнение $f(x,y,z)+|f(z,y,x)|=0$, где обозначено $f(a,b,c)=(a+b+2c+|a-b|)+|a+b-2c+|a-b||$.

Домашнее задание

3.44. $|x-2|+2|x-3|=4$.

3.45. (МГУ, биологический, 1995, 2(6))

$$|x-1|+|2x-3|=2.$$

3.46. (МГУ, географический, май 1996, 1(6))
$|5x-3|-|7x-4|=2x-1.$

3.47. (МГУ, Элиста, 1996, 2(10))
$|2x-1|+|x+2|-|3-x|=2.$

3.48. $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4.$

3.49. (МГУ, ИСАА, 1997, 2(7))
$4|x+1|-1=3|2x+5|-2|x+5|.$ *"Тест"*

3.50. $|x^2-1|=-|x|+1.$

3.51. (МГУ, ИСАА, 2003, 1(6))
$(|x|-5)^2-|5-x|=30.$

3.52. (МГУ, мех-мат, 1995, устный)
Сколько корней имеет уравнение

$$3-2|x-1|=2\left(\left|x-\frac{1}{4}\right|-\left|x+\frac{1}{4}\right|-\frac{1}{4}\right)?$$ *"Тест"*

3.53. $|x^2-4x+3|+|x^2-5x+6|=1.$ *"Тест"*

3.54. (МГУ, экономический, 1984, 2(6))
Найти наименьшее значение функции $y=|4x+6|+3|x+1|$.

3.55. (МГУ, филологический, 1984, 3(5))
Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$y=x^2-5|x+1|-2$ на отрезке $[-3;\ 3]$.

3.56. $\left|\dfrac{x}{x-1}\right|+|x|=\dfrac{x^2}{|x-1|}.$ *"Тест"*

3.57. (МГУ, психологический, 1985, 4(6))
Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$y=|x^2+x|+|x^2-3x+2|$ на отрезке $\left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2}\right]$.

3.58.* (МГУ, психологический, 2002, 6(6))
$|x^3+12x^2-11x+6|+|x^3-7x^2-x-1|=18x^2-14x+3.$

3.59.* (МГУ, мех-мат, 2006, 6(6))
Найти наименьшее значение выражения $|y|+|3x-y|+|x+y-1|$, где x и y — произвольные действительные числа.

3.4 Уравнения с модулем в модуле

Решение уравнений с модулем в модуле удобно проводить, раскрывая модули, начиная с внешнего, по схеме (2) решения уравнений вида $|f|=g$ (см. п. 3.1).

3.60. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 1(8))
$\big||x-1|-7\big|=10.$

3.61. (МГУ, экономический, 1989, 3(6))
$\big||3-x|-x+1\big|+x=6.$ *"Решение"*

3.62. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 5(7))
$\big||x^2-5x|-5\big|=x-2.$

3.63. (МГУ, мех-мат, 1995, устный)
Сколько корней имеет уравнение $\big|x^2-2|x|+1\big|=3|2-x|-1$?

Домашнее задание

3.64. $\big||x-1|-2\big|=3.$

3.65. $\big|2-\big|1-|x|\big|\big|=1.$

3.66. (МГУ, филологический, 2005, 1(7))
$|x^2-3|x|+1|=1.$

3.67. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 5(7))
$2\big||x|-1\big|=3|x|-1.$

3.68. Сколько корней имеет уравнение

$\big|||x+7|-5|-3\big|=2?$ *"Тест"*

3.69. (МГУ, экономический, 1989, 3(6))

$\big|x+1+|-x-3|\big|-6=x.$

3.70. (МГУ, экономический, 1989, 3(6))

$\big|x-2-|4-x|\big|+x=7.$

3.71. $\big|x-|4-x|\big|-2x=4.$

3.72. (МГУ, психологический, 1998, 1(6))

$\big|2x-|4-7x|+5\big|=37.$

3.73. $\big|x-|2x+1|\big|-4x=3.$ *"Тест"*

3.5 Системы уравнений с модулями

3.74. (МГУ, психологический, 1980, 2(5))

$$\begin{cases}2x+y=7,\\|x-y|=2.\end{cases}$$

3.75. $\begin{cases}|x-1|+|y-2|=1,\\y=3-|x-1|.\end{cases}$

3.76.* (МГУ, мех-мат, март 2003, 4(6))

Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases}|y+\log_2 x|+|y+1-2^{x-1}|=|2y-2^{x-1}+1+\log_2 x|,\\|x|+|y+1|+|y-1|=x+2.\end{cases}$$

3.77.* (МГУ, географический, 1980, 5(5))

Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases}\left|x+\dfrac{1}{y}\right|+\left|\dfrac{10}{3}-x+y\right|=\dfrac{10}{3}+y+\dfrac{1}{y},\\x^2+y^2=\dfrac{82}{9},\end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $x>0$ и $y<0$.

Домашнее задание

3.78. (МГУ, физический, май 1994, 5(8))

$$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|. \end{cases}$$

3.79. (МГУ, физический, май 1997, 5(8))

$$\begin{cases} y+|x+1|=1, \\ |y-x|=5. \end{cases}$$

3.80. (МГУ, филологический, 1988, 2(5))

$$\begin{cases} 2|x-2|+3|y-1|=4, \\ 2x-y=3. \end{cases}$$

3.81. $\begin{cases} |x-y|+2x=6, \\ |2x-y|+3x=6. \end{cases}$

3.82. (МГУ, ВМиК, 1974, 3(5))

$$\begin{cases} |x+3|+|x-2|=5, \\ 818-135x \le 137x^2. \end{cases}$$

"Тест"

3.83.* (МГУ, мех-мат, март 2003, 4(6))

Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y+3-2^{x-1}|+|y+\log_2 x|=|2^{x-1}-3+\log_2 x|, \\ |x-1|+|x-3|+|y|=2-y. \end{cases}$$

3.84.* (МГУ, географический, 1980, 5(5))

Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left|y+\dfrac{1}{x}\right|+\left|\dfrac{13}{6}+x-y\right|=\dfrac{13}{6}+x+\dfrac{1}{x}, \\ x^2+y^2=\dfrac{97}{36}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $x<0$ и $y>0$.

4 Неравенства с модулем

Решение неравенств, содержащих модули, может быть проведено аналогично решению уравнений с модулями (с помощью раскрытия модулей) и последующего решения в каждом из промежутков полученных неравенств. Но более простые решения получаются, если мы будем заменять наше исходное неравенство некоторой эквивалентной системой или совокупностью неравенств. Для каждого вида неравенств будем в начале пункта выписывать такую эквивалентную систему или совокупность неравенств.

В некоторых задачах более простое решение получается, если модуль функции (например, $|x|$) взять за новую переменную, решить полученное неравенство, а затем вернуться к исходной переменной.

4.1 Неравенства вида $|f| < g$

Решение неравенств вида $|f(x)| < g(x)$ можно проводить по следующей схеме

$$|f| < g \iff \begin{cases} f < g, \\ f > -g, \end{cases} \qquad \left(|f| \le g \iff \begin{cases} f \le g, \\ f \ge -g, \end{cases} \right).$$

Ниже приводятся неравенства, которые решаются по выписанной схеме или сводятся к указанному виду неравенств.

Решить неравенства:

4.1. $|x-2| \le 0.$

4.2. $|x-3| < 2x-4.$

4.3. $|x^2-1| < 2x.$ *"Тест"*

4.4. (МГУ, географический, 1997, 1(6))
$\dfrac{|x-1|+10}{4|x-1|+3} > 2.$

Домашнее задание

4.5. $|x-3| \le 1$.

4.6. (МГУ, почвоведения, 2002, 1(7))
$|5-7x| < 2$.

4.7. (Ташкентский ф-л МГУ, 2007, 2(10))
$|2x-3| - x \le 1$.

4.8. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 3(8))
$\left|\frac{x}{10} - \frac{1}{5}\right| \ge \left|\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right|$.

4.9. (МГУ, химический, 1994, 2(5))
$2x > |x| + 1$.

4.10. (МГУ, географический, 1987, 2(5))
$y^2 + 3|y| < 10$.

4.11. (МГУ, почвоведения, 2003, 3(6))
$\frac{3}{2}x^2 - |x| \ge 0$. *“Тест”*

4.12. (МГУ, физический, 1974, 2(5))
$(|x|-1)^2 > 2$.

4.13. (МГУ, физический, май 1996, 3(8))
$-1 < |x^2 - 9| < 27$.

4.14. (МГУ, геологический, 1982, 2(6))
$\frac{2x+5}{|x+1|} \ge 1$.

4.15. $|x^2 - 2x| < x - 1$. *“Тест”*

4.16. $|x^3 - x + 1| < x + 1$.

4.17. $3x^2 - |x-3| > 9x - 2$.

4.18.* $\left|x^2 - |x|\right| < \frac{1}{4}$.

4.2 Неравенства вида $|f| > g$

Решение неравенств вида $|f(x)| > g(x)$ можно проводить по следующей схеме

$$|f| > g \iff \left[\begin{array}{l} f > g, \\ f < -g, \end{array}\right. \qquad \left(|f| \geq g \iff \left[\begin{array}{l} f \geq g, \\ f \leq -g, \end{array}\right.\right).$$

4.19. $|x-3| > 0$.

4.20. (МГУ, географический, 1977, 1(5))
$2|x+1| > x+4$. *"Решение"*

4.21. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 2(10))
Найдите все целые значения x, для которых справедливо неравенство $\left|\dfrac{3}{x-2}\right| \geq \dfrac{9}{7}$.

4.22. (МГУ, геологический, 1995, 2(8))
$x^2 - 6 > |x|$.

4.23. $2|x^2-1| > x+1$.

Домашнее задание

4.24. $|x-3| \geq 2x$.

4.25. (МГУ, почвоведения, 2002, 1(7))
$|9-5x| > 1$.

4.26. (МГУ, физический, 1974, 2(5))
$|x| - 2 > (x-2)^2$.

4.27. (МГУ, физический, 1974, 2(5))
$x^2 - 2|x+1| < 0$.

4.28. $|x^2-1| > x+100$.

4.29. $|x^2 - 2x - 8| > 2x$.

4.30. $2|x - 2| > x^2 + x - 10$. *"Тест"*

4.31. (МГУ, геологический, 1977, 2(5))
$x^2 - |5x - 3| - x < 2$.

4.32. (МГУ, ИСАА, 2000, 1(7))
$|2x - 1| > \dfrac{1}{x - 2}$.

4.33. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 3(8))
$\dfrac{|x^2 + x - 12|}{x - 3} \geq 1$.

4.34. $x^2 - 5|x| + 6 < 0$.

4.35. (МГУ, физический, 1974, 2(5))
$3|x - 1| > (x - 1)^2 + 1$.

4.36. $\dfrac{|x - 2|}{x - 2} \geq 0$.

4.37. $\dfrac{1}{|x| - 3} < \dfrac{1}{2}$.

4.38. (МГУ, почвоведения, 2005, 3(6))
$\dfrac{1}{|x + 1| - 1} \geq \dfrac{2}{|x + 1| - 2}$.

4.3 Неравенства вида $|f| > |g|$

Решение неравенств вида $|f(x)| > |g(x)|$, а также $|f(x)| \geq |g(x)|$ можно проводить по следующему методу

$$|f| > |g| \iff f^2 > g^2 \iff f^2 - g^2 > 0 \iff (f - g)(f + g) > 0.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов.

Если $g(x)$ — неотрицательная функция (например, положительная константа), то $g(x) = |g(x)|$ и по описанному методу можно проводить также решения неравенств вида $|f| > g$ или $|f| < g$.

4.39. $|3x-4| > |2x-3|$. *"Решение"*

4.40. $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right| \geq 2$.

4.41. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2001, 3(8))
$\dfrac{|x-1|-|2x+1|}{|x-2|-|2x+2|} \geq 0$.

4.42.* $\dfrac{x^2-6x+5}{|x^2+4x-12|-|3x^2-18x+24|} \geq 0$.

Домашнее задание

4.43. (МГУ, почвоведения, 2005, 3(6))
$|x-1| \leq |x|$.

4.44. $|4x-3| < |3x-4|$.

4.45. $|x+2| \geq |x-2|$.

4.46. (МГУ, экономический, 2001, 1(7))
$|x^2-8x+15| \leq |15-x^2|$.

4.47. $|3x^2-7x-6| < |x^2+x|$. *"Тест"*

4.48. (МГУ, химический, 2001, 1(7))
$\dfrac{1}{|x-1|} > \dfrac{1}{|x+1|}$.

4.49. (МГУ, тест, 1995, 2(8))
$\left|\dfrac{x^2-x-6}{x+2}\right| \geq 2$.

4.50. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leq 1$.

4.51. $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > x^2$.

4.4 Неравенства с несколькими отдельно стоящими модулями

Неравенства с несколькими отдельно стоящими модулями решаются по той же схеме, что и уравнения с несколькими отдельно стоящими модулями. Надо найти точки, в которых выражения под знаком модуля меняют знак. Отметить их на числовой прямой. Числовая прямая разобьётся на несколько промежутков. Раскрывая модули, решаем неравенство на каждом из полученных промежутков. При этом удобнее концы промежутков включать в рассмотрение каждый раз.

4.52. (МГУ, ВМиК (отд. бакалавров), 2003, 1(7))
$5|x-2|-2|x-3| \leq 1.$ *"Решение"*

4.53. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, биолог., ФФМ, ФБиБ, географический, психологический, 2007, 2(8))
$$\frac{x^2+4x+4}{2x+12} \leq 1 - \frac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}.$$

4.54. (МГУ, экономический, 1987, 3(5))
$$\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leq 2.$$ *"Тест"*

4.55. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2005, 2(10))
$|\sqrt{x+3}-2| + \sqrt{x+3} + |x+1| \leq x+3.$

4.56. (МГУ, мех-мат, 2008, 1(6))
$\big||1-x^2| - |x^2-3x+2|\big| \geq 3|x-1|.$

Домашнее задание

4.57. (МГУ, геологический, май 2001, 1(8))
$$\frac{|x-3|+2}{|2x-3|-5} \leq 0.$$

4.58. (МГУ, социологический, филологический, 2006, 1(6))
$$\frac{5-4x}{|x-2|} \leq |2-x|.$$

4.59. (МГУ, социологический, 2008, 1(7))

$$|x| \le \frac{18-3x}{|x|}.$$

4.60. (МГУ, геологический, 2003, 1(7))

$$\frac{x-2}{|x+2|} + \frac{2x+5}{x+2} \le 0.$$

4.61. (МГУ, геологический, 2002, 1(8))

$$\frac{x|x|+1}{x-2} + 1 \ge x.$$

4.62. (МГУ, геологический, май 2002, 1(8))

$$\frac{x+1}{|2-x|} + \frac{x+1}{x-5} \le 0.$$

4.63. $|x-1| + 2|x-2| \le 3.$

4.64. $|2x-3| + |x-1| < 5.$

4.65. (МГУ, факультет Гос. управления, 2003, 2(7))

$$|2x+8| \ge 8 - |1-x|.$$

4.66. (МГУ, биологический, ФФМ, 1998, 2(5))

$$|x^2+x-2| + |x+4| \le x^2 + 2x + 6.$$

4.67. (МГУ, географический, 2003, 2(5))

$$\frac{6}{|x|} \ge 7 + x.$$

4.68. $\dfrac{1}{2-|x|} \le \dfrac{3}{x}.$

4.69. (МГУ, мех-мат, 1985, 2(5))

$$\frac{1}{x-1} + \frac{3}{|x|+1} \ge \frac{1}{|x|-1}.$$

4.70. (МГУ, ИСАА, 1998, 3(7))

$$\frac{3|x|-11}{x+3} \ge \frac{3x-14}{x+6}.$$

"Тест"

4.71. (МГУ, ИСАА, 1992, 3(6))
$$\frac{2|x-1|}{3-|x+2|} \le 1.$$

4.72. (МГУ, филологический, 1991, 3(6))
$$\frac{|x+1|+|x-2|}{x+199} \le 1.$$

4.73. (МГУ, психологический, 1979, 3(5))
$$\frac{9}{|x-5|-3} \ge |x-2|.$$

4.74. (МГУ, психологический, 1979, 3(5))
$$\frac{3}{|x+3|-1} \ge |x+2|.$$

4.75. (МГУ, ВМиК, 1993, 3(6))
$$|2^x-4|+|x^2-4x+3| \le 2^x+4x-x^2-7.$$

4.76.* (МГУ, мех-мат, май 1999, 3(6))

Найти все x, при которых хотя бы одно из двух выражений $|x-3|(|x-5|-|x-3|)-6x$ и $|x|(|x|-|x-8|)+24$ неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

4.77.* (МГУ, мех-мат, 2002, 6(6))

Найдите минимальное значение выражения $(x+y-z)^2$ при условии, что числа x, y и z удовлетворяют одновременно каждому из неравенств: $8 \le (y+z)^2 \le 9$; $10 \le (z+x)^2 \le 11$; $1 \le (x+y)^2 \le \frac{4}{3}$.

4.5 Неравенства с модулем в модуле

Решение неравенств с модулем в модуле удобно проводить, раскрывая модули, начиная с внешнего, по схеме решений неравенств с модулями $|f| < g$ или $|f| > g$.

4.78. (МГУ, химический, май 1996, 3(5))
$$\big|x+|1-x|\big| > 3.$$ *"Решение"*

4.79. $\big||x^2-3x+2|-1\big| > x-2.$

Домашнее задание

4.80. (МГУ, химический, май 1996, 3(5))
$\big|x - 1 + |x - 2|\big| > 7.$

4.81. $\big|x - 2|x - 2|\big| < x - 1.$

4.82. $\big||x^2 - x| - 1\big| \le x.$

4.83. (МГУ, ВМиК, апрель 2000, 1(6))
$\big||x^2 - 8x + 2| - x^2\big| \ge 2x + 2.$

4.84. $\big||x^2 - 1| - x\big| \ge 1.$ *"Тест"*

4.6 Метод интервалов в неравенствах с модулями

4.85. (МГУ, ИСАА, 2007, 1(7))
$|x + 3| \cdot (|x - 1| - 3) \le 0.$

Домашнее задание

4.86. (МГУ, геологический, 1994, 6(8))
$|x|(x^4 - 2x^2 - 3) \ge 0.$ *"Тест"*

4.87. (Черноморский ф-л МГУ, май 2001, 2(9))
$\dfrac{|x - 1|}{3 - x} \ge \dfrac{|x - 1|}{3 - 2x}.$

4.88. (МГУ, геологический, 2005, 1(8))
$(|x| - 1)(2x^2 + x - 1) \le 0.$ *"Тест"*

4.89. $\big(|x - 1| - 3\big)\big(|x + 2| - 5\big) < 0.$

4.90. (МГУ, геологический, 2006, 1(8))
$\dfrac{x^2 - 9}{|x| - 3} \cdot (x + 4) \ge 0.$

Ответы, указания, решения

1.1. $\dfrac{1}{x} \leq 1$. *Решение.* Воспользуемся методом интервалов.

Перенесём единицу в левую часть неравенства.

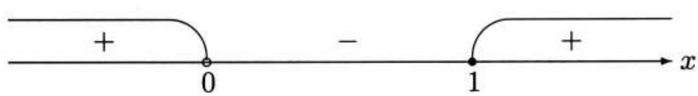
Приведём слагаемые к общему знаменателю.

Удобно определять знаки дроби, когда перед x стоит знак "+". Поэтому умножаем обе части неравенства на -1, чтобы коэффициент при x в числителе был со знаком плюс. Знак неравенства при этом меняется на противоположный.

$$\frac{1}{x} \leq 1 \iff \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \iff \frac{1-x}{x} \leq 0 \iff \frac{x-1}{x} \geq 0.$$

Отметим корень числителя $x = 1$ и корень знаменателя $x = 0$ на числовой прямой. Поскольку неравенство нестрогое, то корень числителя $x = 1$ входит в решение неравенства, поэтому его обозначаем жирной точкой. Корень знаменателя $x = 0$ не может являться решением, поэтому его обозначаем кружочком (выколотая точка).

Внутри полученных трёх интервалов знак дроби не меняется. Определим знак дроби в каждом из интервалов. Для этого возьмём точки внутри интервалов, например, рассматривая интервалы справа налево, точки 2, $\frac{1}{2}$, -1, подставим их в дробь и найдём знак дроби.



В ответ выписываем те промежутки, в которых дробь имеет положительный знак: от $-\infty$ до нуля и от единицы до $+\infty$. Особое внимание при этом обращаем на концы промежутков, исключая выколотую точку $x = 0$ и включая жирную точку $x = 1$.

Ответ. $(-\infty;\, 0) \cup [\,1;\, +\infty)$.

1.2. $[-2;\, -1) \bigcup \left(0;\, \dfrac{3}{2}\right]$. **1.3.** $(-\infty;\, 1) \bigcup \left(\dfrac{4}{3};\, 2\right)$. **1.6.** $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\, 0\right)$.

1.7. $(-3;\, +\infty)$. **1.8.** $[-3;\, 0)$. **1.9.** $(-\infty;\, 1\,] \cup (1996;\, +\infty)$.

1.10. $(-\infty;\, -1\,] \cup (1;\, +\infty)$. **1.11.** $\left(-\infty;\, -\dfrac{1}{3}\right) \bigcup [\,2;\, +\infty)$.

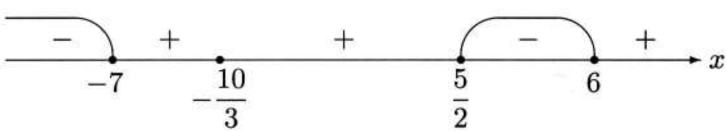
1.12. $\left(0;\ \dfrac{1}{3}\right]\bigcup(1;\ +\infty)$. **1.13.** $(-\infty;\ 0)\bigcup\left[\dfrac{2}{3};\ 1\right)$.
1.14. $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$. **1.15.** $[-5;\ 1]\cup(2;\ 3)$.
1.16. $(-\infty;\ 1]\cup[4;\ 5)$. **1.17.** $(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ 0]$.
1.18. $(-\infty;\ -1]\cup(1;\ 2)\cup[4;\ +\infty)$.
1.19. $\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{2};\ 1\right)\bigcup\left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{2};\ +\infty\right)$.
1.20. $(-\infty;\ -8)\cup(-5;\ -2)\cup[0;\ +\infty)$. **1.21.** $(-\infty;\ -3)\cup(-2;\ -1)$.
1.22. $(-\infty;\ -9)\bigcup\left(\dfrac{2}{3};\ 1\right)\bigcup\left[\dfrac{11}{2};\ +\infty\right)$. **1.23.** $(0;\ +\infty)$.
1.24. $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 5]$. **1.25.** -6. **1.26.** 1.
1.29. $(-\infty;\ -\sqrt{17})\cup[-4;\ -3)\cup(-3;\ 3)\cup(\sqrt{17};\ 5]$.
1.32. $\left(-\infty;\ \dfrac{1}{3}\right]\bigcup[3;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$.

1.34. $(x+7)(2x-5)^3(6-x)^5(3x+10)^4 \geq 0$.

Решение. Исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$(x-(-7))\left(x-\left(-\frac{10}{3}\right)\right)^4\left(x-\frac{5}{2}\right)^3(x-6)^5 \leq 0,$$

которое мы решаем методом интервалов.



Ответ. $(-\infty;\ -7]\bigcup\left\{-\dfrac{10}{3}\right\}\bigcup\left[\dfrac{5}{2};\ 6\right]$.

1.35. $(-\infty;\ -2]\cup\{-1\}\cup[0;\ 1)\cup(1;\ 2)$.
1.37. $\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\ -1\right)\bigcup(-1;\ 0)\bigcup\left(0;\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.
1.38. $(-1;\ 2)\cup(2;\ 3)$. **1.39.** $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ 3)\cup(5;\ +\infty)$.
1.40. $\{0\}\cup(1;\ +\infty)$. **1.41.** $(-\infty;\ 1)\cup\{2\}$. **1.42.** $\{-5\}\cup(-2;\ 3)$.
1.43. $\left(-2;\ \dfrac{3}{2}\right)\bigcup\{3\}$. **1.44.** $\left[-\dfrac{5}{2};\ -2\right]\bigcup\left[-1;\ \dfrac{1}{3}\right]\bigcup\{1\}\cup[2;\ +\infty)$.
1.46. $[-1;\ 2]\cup[3;\ 4]$. **1.47.** $(-1;\ 5)$. **1.48.** $[-2;\ -1)\cup(-1;\ 2]$.
1.49. $0;\ \pm4;\ \pm5;\ \pm9$.

1.50. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-2} \geq 0$. *Решение.* Поскольку знак разности $\sqrt{f}-\sqrt{g}$ совпадает на ОДЗ со знаком разности $f-g$, соответственно, знак разности $\sqrt{x}-1$ совпадает на ОДЗ со знаком разности $x-1$, то исходное неравенство эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\, 1] \cup (2;\, +\infty), \\ x \geq 0, \end{cases} \iff x \in [\,0;\, 1\,] \cup (2;\, +\infty).$$

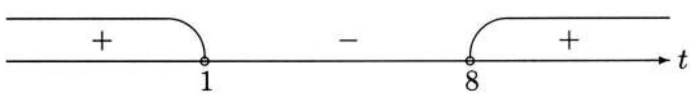
Ответ. $[\,0;\, 1\,] \cup (2;\, +\infty)$.

1.52. $\left\{\dfrac{3}{2}\right\} \bigcup [\,8;\, +\infty)$. **1.53.** $\{-1\} \cup [\,2;\, +\infty)$. **1.55.** $[\,2;\, 4\,]$.

1.56. $[\,1;\, 9)$. **1.58.** $\{-1\} \cup [\,1;\, +\infty)$. **1.59.** $\{-4\} \cup [-3;\, +\infty)$.
1.60. $\{-2\} \cup [\,2;\, 6\,]$. **1.61.** $(-\infty;\, 1] \cup \{3\} \cup [\,7;\, +\infty)$.
1.63. $(-2;\, 0) \cup [\,2;\, 3)$. **1.64.** $[-4;\, 1\,] \cup \{2\}$.

1.65. $x^6 - 9x^3 + 8 > 0$. *Решение.* Обозначим $t = x^3$. Полученное относительно t неравенство решаем методом интервалов. Ответ для t выписываем в виде неравенства (а не в виде включения).

$$t^2 - 9t + 8 > 0 \iff (t-1)(t-8) > 0$$



$$\iff \left[\begin{array}{l} t < 1, \\ t > 8, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^3 < 1, \\ x^3 > 8, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 2. \end{array}\right.$$

Подставляем $t = x^3$ и извлекаем кубический корень из обеих частей неравенств.

Ответ. $(-\infty;\, 1) \cup (2;\, +\infty)$.

1.66. $(-\infty;\, -4\,] \cup [-2;\, -1] \cup [\,1;\, +\infty)$. **1.68.** $(2;\, +\infty)$.
1.69. $\left(\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{5}};\, +\infty\right)$. **1.70.** $(-\infty;\, -\sqrt{3}] \cup [-\sqrt{2};\, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{3};\, +\infty)$.
1.72. $(-2;\, -1) \cup (2;\, 3)$. **1.73.** $(-1;\, 1)$. **1.74.** $(-2;\, -1) \cup (1;\, +\infty)$.
1.76. $[-2;\, 0) \cup (0;\, 1\,]$. **1.77.** $(-1-\sqrt{2};\, -1+\sqrt{2}\,)$.

2.1. $\frac{29}{35}$. **2.2.** $\frac{11}{5}$. **2.3.** 2. **2.4.** $-\frac{7}{288}$. **2.5.** 7. **2.6.** $\frac{1}{2}$.

2.7. Найти сумму квадратов корней уравнения $x^2-7x+5=0$.
Решение. По теореме Виета $\begin{cases} x_1+x_2=7, \\ x_1x_2=5. \end{cases}$ Поэтому

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=7^2-2\cdot 5=49-10=39.$$

Ответ. 39.

2.8. 2. **2.9.** $\frac{15}{7}x^2-7x-\frac{22}{7}$. **2.10.** $\frac{3}{5}$. **2.12.** $\frac{1}{2}$. **2.13.** 18.

2.14. *Решение.* Деление “уголком” этих многочленов осуществляется так:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^5 \qquad - x^3+2x^2-3x+1 \\ \underline{x^5-x^4} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \end{array} & \begin{array}{l} x^2-x \\ \hline x^3+x^2+2 \end{array} \\
-\begin{array}{r} x^4-x^3+2x^2-3x+1 \\ \underline{x^4-x^3} \qquad\qquad\qquad\quad \end{array} & \\
-\begin{array}{r} 2x^2-3x+1 \\ \underline{2x^2-2x} \quad\;\; \end{array} & \\
-x+1 &
\end{array}$$

При делении в остатке получился многочлен $-x+1$.

Ответ. $x^5-x^3+2x^2-3x+1=(x^2-x)(x^3+x^2+2)-x+1$.

2.15. *Решение.*

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^4 \qquad +2x^2-3x-6 \\ \underline{x^4+x^3} \qquad\qquad\qquad\quad \end{array} & \begin{array}{l} x+1 \\ \hline x^3-x^2+3x-6 \end{array} \\
-\begin{array}{r} -x^3+2x^2-3x-6 \\ \underline{-x^3-\;x^2} \qquad\qquad\quad \end{array} & \\
-\begin{array}{r} 3x^2-3x-6 \\ \underline{3x^2+3x} \quad\;\; \end{array} & \\
-\begin{array}{r} -6x-6 \\ \underline{-6x-6} \end{array} & \\
0 &
\end{array}$$

В данном случае многочлен x^4+2x^2-3x-6 разделился на многочлен $x+1$ без остатка.

Ответ. $x^4+2x^2-3x-6=(x+1)(x^3-x^2+3x-6)$.

2.16. $x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$.
2.17. $x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = (x^2 - 1)(x - 2) + 5x - 3$.
2.18. $x^3 - 1 = (x^2 + 1)x - x - 1$. **2.19.** $x^4 - x^2 = (x+1)(x^3 - x^2)$.
2.20. $x^5 - x^2 + x + 3 = (x^3 + 1)x^2 - 2x^2 + x + 3$.
2.21. $x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 4 = (x^2 - 1)(x^2 - x + 2) + 2x - 2$. **2.22.** 3.

2.23. *Решение.* Если уравнение

$$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0$$

имеет целый корень, то он содержится во множестве $\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6\}$. Подставляя эти числа в указанном порядке в уравнение, проверяем, являются ли эти числа корнями уравнения. Оказывается, что первым корнем является число $x = 2$. Разделим исходный многочлен на множитель $x - 2$ "уголком":

$$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x^3 - 3x^2 + x - 3) = 0.$$

Найдем целые корни уравнения

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0.$$

Они должны содержаться во множестве $\{\pm 1;\ \pm 3\}$. Поскольку числа ± 1 не являлись корнями исходного уравнения, то они не являются и корнями последнего уравнения. Осталось проверить числа ± 3. Оказывается, что корнем является число $x = 3$. Разделим многочлен $x^3 - 3x^2 + x - 3$ на множитель $x - 3$ "уголком" и найдем оставшиеся корни квадратного трехчлена:

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x-3)(x^2 + 1) = 0.$$

Таким образом,

$$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)(x^2 + 1) = 0.$$

Уравнение $x^2 + 1 = 0$ корней не имеет.

Ответ. 2; 3.

2.24. 1. **2.25.** -5; -3; 2. **2.26.** -2; 3. **2.27.** 4. **2.29.** $\frac{1}{3}$.

2.30. *Решение.* Если уравнение

$$2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = 0$$

имеет рациональный корень, то он содержится во множестве $\left\{\pm 1;\ \pm 3;\ \pm 7;\ \pm 21;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{7}{2};\ \pm\frac{21}{2}\right\}$. Подставляя эти числа указанном порядке в в уравнение, проверяем, являются ли эти числа корнями уравнения. Оказывается, что первым корнем является число $x = -3$. Разделим исходный многочлен на множитель $x + 3$ “уголком”:

$$2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = (x+3)(2x^3 + x^2 - 15x + 7) = 0.$$

Найдем рациональные корни уравнения

$$2x^3 + x^2 - 15x + 7 = 0.$$

Они должны содержаться во множестве $\left\{\pm 1; \pm 7; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{7}{2}\right\}$. Поскольку числа ± 1 не являлись корнями исходного уравнения, то они не являются и корнями последнего уравнения. Осталось проверить числа ± 7; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{7}{2}$. Оказывается, что корнем является число $x = \frac{1}{2}$. Разделим многочлен $2x^3 + x^2 - 15x + 7$ на множитель $x - \frac{1}{2}$, а лучше на $2x - 1$, “уголком” и найдем оставшиеся корни квадратного трехчлена:

$$2x^3 + x^2 - 15x + 7 = (2x-1)(x^2 + x - 7) = 0.$$

$$x^2 + x - 7 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

Таким образом,

$$2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 =$$

$$= (x+3)(2x-1)\left(x - \frac{-1-\sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right) = 0.$$

Ответ. -3; $\frac{1}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$.

2.31. $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$. **2.32.** $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **2.33.** $-\frac{1}{4}$; $\frac{5}{4}$. **2.34.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2.35. $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **2.36.** $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **2.37.** $\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.
2.38. $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$. **2.39.** $-\sqrt{3}$. **2.40.** $-\sqrt{2}$. **2.41.** $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
2.42. $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. **2.43.** $1 \pm \sqrt{3}$. **2.44.** $\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.

2.45. $\dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2(\sqrt{2}-1)}$.

2.46. $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0{,}5625$. *Решение.* Произведение в левой части уравнения будем считать, перемножая попарно первый и последний сомножитель, второй и третий

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = \big(x(x+3)\big)\big((x+1)(x+2)\big) =$$

$$= (x^2+3x)(x^2+3x+2) = 0{,}5625 = \frac{5625}{10000} = \frac{225}{400} = \frac{9}{16}.$$

Обозначим $x^2 + 3x = t$. Получим уравнение

$$t(t+2) = \frac{9}{16} \iff 4t^2 + 8t - \frac{9}{4} = 0 \iff t = -\frac{9}{4}; \frac{1}{4}.$$

Значит,

$$x^2 + 3x = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

$$x^2 + 3x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}.$$

Ответ. $-\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}$.

2.47. $\dfrac{\pm\sqrt{\sqrt{24}-3}+1}{2}$. **2.48.** $\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}-1$. **2.49.** $\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}+1$.
2.50. $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **2.51.** -1; 12. **2.52.** -3; 2. **2.53.** -1; 0.
2.54. $\dfrac{1}{12}$; $\dfrac{1}{2}$. **2.55.** $\dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{6}$. **2.56.** $t = x - \dfrac{a+b}{2}$.
2.57. $t = x - \dfrac{a-b}{2}$. **2.58.** $\pm\sqrt{\dfrac{4\sqrt{2}-3}{4}} + \dfrac{1}{2}$. **2.59.** $\dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

2.60. *Решение.* Имеем симметрическое уравнение четвёртой степени. Перепишем уравнение, сгруппировав слагаемые с одинаковыми коэффициентами:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0 \iff x^4 + 1 - 5(x^3 + x) + 6x^2 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на x^2:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0. \qquad (*)$$

Обозначим $x+\dfrac{1}{x}=t$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим, что $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=t^2$. Отсюда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$. Подставим полученные выражения в уравнение $(*)$:

$$t^2-2-5t+6=0 \iff t^2-5t+4=0 \iff t=1;\ 4.$$

Значит,

$$x+\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x\in\emptyset\ (D=1-4=-3<0);$$

$$x+\frac{1}{x}=4 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}.$$

Ответ. $2\pm\sqrt{3}$.

2.61. $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. **2.62.** -1; $-2\pm\sqrt{3}$. **2.63.** $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; $1\pm\sqrt{2}$. **2.64.** $1\pm\sqrt{2}$. **2.65.** $2\pm\sqrt{2}$. **2.66.** 1; $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **2.67.** $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; $2\pm\sqrt{3}$. **2.68.** -1; $\dfrac{1}{2}$; 2; $-2\pm\sqrt{3}$. **2.69.** $\emptyset$. **2.70.** $1\pm\sqrt{2}$; $\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$; $\dfrac{5\pm\sqrt{29}}{2}$. **2.71.** $a(1\pm\sqrt{2})$; $a\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **2.72.** -2; 6; $3\pm\sqrt{21}$. **2.73.** 2; $\dfrac{-5-\sqrt{21}\pm\sqrt{10\sqrt{21}-18}}{4}$. **2.74.** $\pm1; 2\pm\sqrt{3}$. **2.75.** $-4; -2$. **2.76.** $\emptyset$. **2.77.** 0; $\pm\sqrt{3}$; 3. **2.78.** $\dfrac{2}{3}$; 3. **2.79.** $\dfrac{1}{2}$; 5. **2.80.** $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{7}{2}$. **2.81.** $-2\pm\sqrt{3}$. **2.82.** -3; 1. **2.83.** $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **2.84.** $-\dfrac{1}{6}$; 2; $\dfrac{19\pm\sqrt{1333}}{54}$.

2.85. $x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+2=0$. *Решение.* Обозначим $\sqrt{2}=a$. Тогда уравнение можно переписать в виде

$$x^3-(a+1)x^2+a^2=0.$$

Решим полученное уравнение как квадратное относительно a:

$$a^2-x^2a+x^3-x^2=0.$$

Дискриминант $D=x^4-4(x^3-x^2)=x^4-4x^3+4x^2=(x^2-2x)^2$. Отсюда

$$a_1=\frac{x^2-x^2+2x}{2}=\frac{2x}{2}=x;$$

$$a_2 = \frac{x^2 + x^2 - 2x}{2} = \frac{2x^2 - 2x}{2} = x^2 - x.$$

Получаем два соотношения:

$$\sqrt{2} = x \iff x_1 = \sqrt{2};$$

$$\sqrt{2} = x^2 - x \iff x^2 - x - \sqrt{2} = 0 \iff x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}.$$

Ответ. $\sqrt{2}$; $\dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$.

2.86. $\dfrac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} + 1}}{2}$; $\dfrac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$. **2.87.** $\begin{cases} a < -\dfrac{1}{4}, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$

$\begin{cases} -\dfrac{1}{4} \le a < 0, \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le a, \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}; \pm\sqrt{2a}. \end{cases}$

2.88. $\dfrac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} + 1}}{2}$; $\dfrac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}$.

2.89. $(x^2 + 2x - 5)^2 + 2(x^2 + 2x - 5) - 5 = x$.

Решение I. В уравнении

$$(x^2 + 2x - 5)^2 + 2(x^2 + 2x - 5) - 5 = x$$

обозначим $f(x) = x^2 + 2x - 5$. Тогда оно перепишется в виде

$$f^2 + 2f - 5 = x \iff f(f(x)) = x.$$

Ясно, что корни уравнения $f(x) = x$ являются корнями исходного уравнения ($f(x_0) = x_0 \Rightarrow f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$). Решим уравнение

$$f(x) = x \iff x^2 + 2x - 5 = x \iff x^2 + x - 5 = 0 \iff$$

$$x^2 + x - 5 = (x - x_1)(x - x_2) = 0, \text{ где } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Найдем остальные корни исходного уравнения. Преобразуем исходное уравнение к обычному виду, возведя первое слагаемое в квадрат и приведя свободные члены:

$$x^4 + 4x^2 + 25 + 4x^3 - 10x^2 - 20x + 2x^2 + 4x - 10 - 5 - x = 0$$

$$\iff x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10 = 0.$$

У полученного многочлена уже найдены два корня: x_1 и x_2. Для нахождения остальных корней надо разделить многочлен на $x - x_1$

и $x - x_2$. Удобно разделить сразу на произведение $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + x - 5$. Разделим многочлен $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10$ на трехчлен $x^2 + x - 5$ “уголком” и найдем оставшиеся корни квадратного трехчлена:

$$x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10 = (x^2 + x - 5)(x^2 + 3x - 2) = 0.$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \iff x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$; $\dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Решение II. Обозначим $x^2 + 2x - 5 = y$. Тогда исходное уравнение будет эквивалентно системе

$$\begin{cases} y^2 + 2y - 5 = x, \\ x^2 + 2x - 5 = y. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе уравнение:

$$y^2 - x^2 + 2y - 2x = x - y \iff (y-x)(y+x+3) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} y = x, \\ y = -x-3. \end{array} \right.$$

Подставляя найденные значения y в первое уравнение системы, найдем x:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x, \\ x^2 + 2x - 5 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x - 3, \\ x^2 + 2x - 5 = -x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}. \end{cases} \end{array} \right.$$

2.90. 2; 3. **2.91.** -1; $\pm\sqrt{3}$; 3. **2.92.** $-1 \pm \sqrt{3}$; $-2 \pm \sqrt{2}$. **2.93.** $1 + 8n$, $7 + 8m$; $n, m \in \mathbb{Z}$. **2.94.** $f(x) = x^3 - x + 1$. **2.95.** $\emptyset$. **2.96.** 1. **2.97.** $\emptyset$. **2.98.** $\emptyset$. **2.99.** 2010. **2.100.** $\emptyset$. **2.101.** $\emptyset$. **2.102.** 1. **2.103.** $\emptyset$. **2.104.** $\emptyset$. **2.105.** 1. **2.106.** $(0, -1)$. **2.107.** $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. **2.108.** $2\sqrt{2}$. **2.109.** $\sqrt{5}$. **2.110.** $4\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

2.111. $\begin{cases} 4x^2 - 2xy + 7y^2 \le 1, \\ 2x - 5y \ge 2. \end{cases}$

Решение. Обозначим $t = 2x - 5y$. Выразим из этого соотношения $x = \dfrac{5y+t}{2}$ и подставим в первое неравенство системы, которое перепишем как квадратное относительно y

$$4\Big(\frac{5y+t}{2}\Big)^2 - 2\cdot\frac{5y+t}{2}\cdot y + 7y^2 \le 1 \iff$$

$$25y^2 + 10ty + t^2 - 5y^2 - ty + 7y^2 - 1 \le 0$$

$$\iff 27y^2 + 9ty + t^2 - 1 \le 0.$$

Для того, чтобы неравенство имело решение необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена был неотрицателен:

$$D = 81t^2 - 108t^2 + 108 \ge 0 \iff$$

$$27t^2 \le 108 \iff t^2 \le 4 \iff -2 \le t \le 2.$$

В силу второго неравенства системы $t \ge 2$. Следовательно, система имеет решение только при $t = 2$. Тогда

$$27y^2 + 18y + 3 \le 0 \iff 3(3y+1)^2 \le 0 \iff y = -\frac{1}{3}.$$

Соответственно, $x = \dfrac{5y+t}{2} = \dfrac{5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2}{2} = \dfrac{1}{6}$.

Ответ. $\left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

2.112. $[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$. **2.113.** $(3, -3)$. **2.114.** $\left(1, \dfrac{3}{2}, 1\right)$.
2.115. $(0, 1, -2)$; $\left(\dfrac{2}{7}, 1, -\dfrac{12}{7}\right)$. **2.116.** $(0, -1)$. **2.117.** $-\sqrt{\dfrac{7}{5}}$.
2.118. 10. **2.119.** $-\sqrt{\dfrac{33}{2}}$. **2.120.** $\dfrac{8+2\sqrt{2}}{7}$, $\dfrac{8-2\sqrt{2}}{7}$.
2.121. $\operatorname{arctg}\dfrac{7}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.
2.122. $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.
2.123. a) $x^2 - 2x - 4$; b) $x^4 - 10x^2 + 1$; c) $x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125$.
2.124. a) 1; б) 0; 1. **2.125.** $6x$. **2.126.** a) $x^8 + x^4 + 1 =$
$= (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$;

b) $x^5+x+1=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$. **2.127.** a) x^2+2x-1; b) $x^6-9x^4-10x^3+27x^2-90x-2$. **2.128.** 1. **2.129.** ab.

2.130. a) $5x$; b) $\dfrac{15+2^9+2^{27}+2^{81}}{3}x+\dfrac{2^9+2^{27}+2^{81}}{3}$. **2.131.** 15.

3.1. $|x-3|=2x$.

Решение I. Уравнение вида $|f|=g$ решим по схеме (1) п. 3.1

$$|x-3|=2x \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\ge 0,\\ x-3=2x,\end{cases}\\ \begin{cases}x-3\le 0,\\ -x+3=2x,\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3,\\ x=-3,\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 3,\\ x=1,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}x\in\emptyset,\\ x=1,\end{array}\right. \iff x=1.$$

Ответ. 1.

Решение II. Уравнение вида $|f|=g$ решим по схеме (2) п. 3.1

$$|x-3|=2x \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-3=2x,\\ x-3=-2x,\end{array}\right.\\ 2x\ge 0,\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=1,\end{array}\right.\\ x\ge 0,\end{cases} \iff x=1.$$

Видно, что в данном примере вторая схема решения оказалась существенно проще первой.

3.2. $-1; 3$. **3.3.** $[2;+\infty)$. **3.4.** $2; 3$. **3.6.** $-3; 0$. **3.7.** $\pm 2; \pm 3$. **3.8.** ± 1. **3.9.** $0; 2$. **3.10.** $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right]$. **3.11.** 1. **3.12.** $-4; 0$. **3.13.** $-1-\sqrt{3}; \sqrt{2}$.

3.14. $2\pm\sqrt{7}$. **3.15.** $4,\ 3+\sqrt{3}$. **3.16.** $-2,\ -\dfrac{2}{5},\ 1,\ \dfrac{13}{5}$.

3.17. $5; 9$. **3.19.** ± 2. **3.20.** $\pm(2+\sqrt{5})$. **3.21.** $1; 13$.

3.22. $\dfrac{4}{5}; \dfrac{6}{5}$. **3.23.** -2. **3.24.** $-\dfrac{1}{2}$. **3.25.** $\dfrac{11-\sqrt{29}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

3.26. $-\dfrac{2}{3}; \dfrac{8}{5}$. **3.27.** $0; \dfrac{15}{4}; 4$. **3.28.** $1; \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **3.29.** ± 1.

3.30. $-4; 2\pm\sqrt{6}$. **3.31.** $0; 1; \pm\sqrt{2}$. **3.32.** $-7; -\dfrac{7}{2}; 0; \dfrac{-49\pm\sqrt{385}}{14}$.

3.33. $2|x+1|+|x-2|=9$. *Решение.* Найдем точки, в которых выражения под знаком модуля меняют знак: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$; $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. Отметим их на числовой прямой. Числовая прямая разобьётся на три промежутка. Раскрывая модули, решаем уравнение на каждом из полученных промежутков. При этом концы промежутков включаем в рассмотрение каждый раз.

$$2|x+1|+|x-2|=9 \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -1, \\ -2x-2-x+2=9 \Leftrightarrow -3x=9 \Leftrightarrow x=-3, \end{cases} \Leftrightarrow x=-3, \\ \begin{cases} -1 \le x \le 2, \\ 2x+2-x+2=9 \Leftrightarrow x=5, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset, \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ 2x+2+x-2=9 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x=3, \end{cases} \Leftrightarrow x=3, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Ответ. ± 3.

3.34. $[1;\,2]$. **3.35.** $(0;\,1]$. **3.36.** $\frac{5}{3}$. **3.37.** $f_{\min}=-1$. **3.38.** $y_{\min}=1$, $y_{\max}=\frac{29}{4}$. **3.39.** 1. **3.40.** $[100;\,+\infty)$. **3.41.** 2. **3.42.** $\frac{1}{3}$. **3.43.** $x, y, z \le 0$. **3.44.** $\frac{4}{3}$; 4. **3.45.** $\frac{2}{3}$; 2. **3.46.** $\left(-\infty;\,\frac{4}{7}\right]$. **3.47.** -3; 1. **3.48.** $[1;\,2] \cup \{5\}$. **3.50.** 0; ± 1. **3.51.** 11; $\frac{-11-\sqrt{161}}{2}$. **3.54.** $f_{\min}=\frac{3}{2}$. **3.55.** $y_{\min}=-\frac{53}{4}$, $y_{\max}=-1$. **3.57.** $y_{\max}=4$, $y_{\min}=\frac{3}{2}$. **3.58.** -2. **3.59.** $\frac{3}{4}$. **3.60.** -16; 18.

3.61. $\big||3-x|-x+1\big|+x=6$.

Решение. Поскольку $|3-x|=|x-3|$, то заменим для удобства $|3-x|$ на $|x-3|$. Перенесём x в правую часть уравнения. Далее последовательно раскрываем модули, начиная с внешнего, по схеме (2) решения уравнений вида $|f|=g$ (см. п. 3.1).

$$\big||x-3|-x+1\big|+x=6 \iff \big||x-3|-x+1\big|=6-x \iff$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} |x-3|-x+1=6-x, \\ |x-3|-x+1=-6+x, \end{array}\right. \\ 6-x \geq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} |x-3|=5, \\ |x-3|=2x-7, \end{array}\right. \\ x \leq 6, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-3=5, \\ x-3=-5, \end{array}\right. \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-3=2x-7, \\ x-3=-2x+7, \end{array}\right. \\ 2x-7 \geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \\ x \leq 6, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=8, \\ x=-2, \end{array}\right. \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4, \\ 3x=10 \Leftrightarrow x=\dfrac{10}{3}=3\dfrac{1}{3}, \end{array}\right. \\ x \geq \dfrac{7}{2}=3\dfrac{1}{2}, \end{cases} \end{array}\right. \\ x \leq 6, \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=8, \\ x=-2, \\ x=4, \end{array}\right. \\ x \leq 6, \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Ответ. -2; 4.

3.62. $3+2\sqrt{3}$; 3; $2+\sqrt{11}$; $3+\sqrt{2}$. **3.63.** 2 корня. **3.64.** -4; 6. **3.65.** 0; ± 2; ± 4. **3.66.** $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$. **3.67.** $\pm\frac{3}{5}$. **3.69.** -4; 2. **3.70.** -1; 5. **3.71.** 0. **3.72.** $-\frac{38}{9}$; $\frac{46}{5}$. **3.74.** $(3, 1)$; $\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$. **3.75.** $\left[\begin{array}{l} x=4-y, \\ x=y-2, \end{array}\right.$ при $2 \leq y \leq 3$. **3.76.** 2. **3.77.** $\left(\frac{1}{3}, -3\right)$; $\left(3, -\frac{1}{3}\right)$. **3.78.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$. **3.79.** $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. **3.80.** $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$. **3.81.** $(0, -6)$; $(x, 6-x)$ при $x \leq 2$. **3.83.** 2. **3.84.** $\left(-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$; $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

4.1. 2. **4.2.** $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$. **4.4.** $\left(\frac{3}{7}; \frac{11}{7}\right)$. **4.5.** $[2; 4]$. **4.6.** $\left(\frac{3}{7}; 1\right)$. **4.7.** $\left[\frac{2}{3}; 4\right]$. **4.8.** 2. **4.9.** $(1; +\infty)$. **4.10.** $(-2; 2)$. **4.12.** $(-\infty; -1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}; +\infty)$. **4.13.** $(-6; 6)$. **4.14.** $[-2; -1) \cup (-1; +\infty)$. **4.16.** $(0; \sqrt{2})$.

4.17. $\left(-\infty;\ \dfrac{4-\sqrt{19}}{3}\right)\bigcup\left(\dfrac{4+\sqrt{19}}{3};\ +\infty\right)$.

4.18. $\left(-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2};\ -\dfrac{1}{2}\right)\bigcup\left(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

4.19. $(-\infty;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$.

4.20. $2|x+1|>x+4$.

Решение. По схеме решения неравенств вида $|f|>g$ п. 4.2 имеем:

$$2|x+1|>x+4 \iff \left[\begin{array}{l} 2x+2>x+4,\\ 2x+2<-x-4, \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x>2,\\ 3x<-6, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x>2,\\ x<-2. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$.

4.21. $0; 1; 3; 4$. **4.22.** $(-\infty;\ -3)\cup(3;\ +\infty)$.

4.23. $(-\infty;\ -1)\bigcup\left(-1;\ \dfrac{1}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{3}{2};\ +\infty\right)$. **4.24.** $(-\infty;\ 1]$.

4.25. $\left(-\infty;\ \dfrac{8}{5}\right)\bigcup(2;\ +\infty)$. **4.26.** $(2;\ 3)$. **4.27.** $(1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3})$.

4.28. $\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{405}}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{1+\sqrt{405}}{2};+\infty\right)$.

4.29. $(-\infty;\ 2\sqrt{2})\cup(2+2\sqrt{3};\ +\infty)$. **4.31.** $(-5;\ 3+\sqrt{8})$.

4.32. $(-\infty;2)\bigcup\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$. **4.33.** $(3;+\infty)$. **4.34.** $(-3;-2)\cup(2;3)$.

4.35. $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4.36. $(2;\ +\infty)$. **4.37.** $(-\infty;\ -5)\cup(-3;\ 3)\cup(5;\ +\infty)$.

4.38. $(-3;\ -2)\cup\{-1\}\cup(0;\ 1)$.

4.39. $|3x-4|>|2x-3|$. *Решение.* Воспользуемся методом решения неравенств вида $|f|>|g|$ (см. п. 4.3).

$$|3x-4|>|2x-3| \iff (3x-4)^2>(2x-3)^2 \iff$$

$$(3x-4)^2-(2x-3)^2>0 \iff (3x-4-(2x-3))(3x-4+(2x-3))>0$$

$$\iff (x-1)(5x-7)>0 \iff \left[\begin{array}{l} x<1,\\ x>\dfrac{7}{5}. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty;\ 1)\bigcup\left(\dfrac{7}{5};\ +\infty\right)$.

4.40. $\left[\frac{3}{4}; 1\right)\bigcup(1; +\infty)$. **4.41.** $(-\infty; -4)\cup[-2; 0)\cup(0; +\infty)$.
4.42. $\left[1; \frac{3}{2}\right)\bigcup[5; 9)$. **4.43.** $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **4.44.** $(-1; 1)$.
4.45. $[0; +\infty)$. **4.46.** $\left[0; \frac{15}{4}\right]\bigcup[4; +\infty)$. **4.48.** $(0; 1)\cup(1; +\infty)$.
4.49. $(-\infty; -2)\cup(-2; 1]\cup[5; +\infty)$. **4.50.** $\left[0; \frac{8}{5}\right]\bigcup\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.
4.51. $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right)\bigcup(-1; 0)\bigcup\left(0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4.52. $5|x-2|-2|x-3| \le 1$. *Решение.* Найдем точки, в которых выражения под знаком модуля меняют знак: $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$; $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$. Отметим их на числовой прямой. Числовая прямая разобьётся на три промежутка. Раскрывая модули, решаем неравенство на каждом из полученных промежутков. При этом концы промежутков включаем в рассмотрение каждый раз.

$5|x-2|-2|x-3| \le 1 \iff$

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \le 2, \\ -5x+10+2x-6 \le 1 \Leftrightarrow -3x \le -3 \Leftrightarrow 1 \le x, \end{cases} & \Leftrightarrow 1 \le x \le 2, \\ \begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ 5x-10+2x-6 \le 1 \Leftrightarrow 7x \le 17 \Leftrightarrow x \le \frac{17}{7}, \end{cases} & \Leftrightarrow 2 \le x \le \frac{17}{7}, \\ \begin{cases} 3 \le x, \\ 5x-10-2x+6 \le 1 \Leftrightarrow 3x \le 5 \Leftrightarrow x \le \frac{5}{3}, \end{cases} & \Leftrightarrow x \in \emptyset, \end{array}\right.$$

$$\iff 1 \le x \le \frac{17}{7}.$$

Ответ. $\left[1; \frac{17}{7}\right]$.

4.53. $(-\infty; -6)\cup[-2\sqrt{5}; -4)\cup\{-2\}$. **4.55.** $[-1; 1]$.
4.56. $(-\infty; -1]\cup\{1\}\cup[2; +\infty)$. **4.57.** $(-1; 4)$.
4.58. $(-\infty; -1]\cup[1; 2)\cup(2; +\infty)$. **4.59.** $[-6; 0)\cup(0; 3]$.
4.60. $[-7; -2)\cup(-2; -1]$. **4.61.** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]\bigcup(2; +\infty)$.

4.62. $(-\infty;\,-1]\bigcup\left[\frac{7}{2};\,5\right)$. **4.63.** $\left[\frac{2}{3};\,\frac{8}{3}\right]$. **4.64.** $\left(-\frac{1}{3};\,3\right)$.
4.65. $(-\infty;\,-5]\cup[-1;\,+\infty)$. **4.66.** $[-6;\,-1]\cup[0;\,+\infty)$.
4.67. $(-\infty;\,-6]\cup[-1;\,0)\bigcup\left(0;\,\frac{-7+\sqrt{73}}{2}\right]$.
4.68. $[-3;-2)\bigcup\left(0;\frac{3}{2}\right]\bigcup(2;+\infty)$. **4.69.** $(-\infty;-3]\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.
4.71. $(-\infty;\,-5)\cup(1;\,+\infty)$. **4.72.** $(-\infty;\,-199)\cup[-66;\,200]$.
4.73. $[-1;\,2)\cup(8;\,5+3\sqrt{2}]$. **4.74.** $[-5;\,-4)\cup(-2;\,-2+\sqrt{3}]$.
4.75. $[2;\,3]$. **4.76.** $[3;\,5]$. **4.77.** $\frac{1}{4}(3+\sqrt{8}-\sqrt{11})^2$.

4.78. $\big|x+|1-x|\big|>3$. *Решение.* Заменим для удобства $|1-x|$ на $|x-1|$. Далее раскрываем внешний модуль, применяя схему решения неравенств вида $|f|>g$ п. 4.2

$$\big|x+|x-1|\big|>3 \iff \left[\begin{array}{l} x+|x-1|>3, \\ x+|x-1|<-3, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} |x-1|>3-x, \\ |x-1|<-3-x, \end{array}\right.$$

(для первого неравенства в последней совокупности применяем схему решения неравенств вида $|f|>g$ п. 4.2, для второго неравенства применяем схему решения неравенств вида $|f|<g$ п. 4.1)

$$\iff \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-1>3-x, \\ x-1<x-3, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-1<-3-x, \\ x-1>3+x, \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 2x>4, \\ -1<-3, \\ 2x<-2, \\ -1>3, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x\in\varnothing, \\ x<-1, \\ x\in\varnothing, \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x\in\varnothing, \end{array}\right. \iff x>2.$$

Ответ. $(2;\,+\infty)$.

4.79. $(-\infty;\,1+\sqrt{2})\bigcup(3;\,+\infty)$. **4.80.** $(5;\,+\infty)$.
4.81. $\left(\frac{5}{4};\,\frac{3}{2}\right)\bigcup\left(\frac{5}{2};\,+\infty\right)$. **4.82.** $[1;\,1+\sqrt{2}]$.
4.83. $(-\infty;\,0]\cup[1;\,2]\cup[5;\,+\infty)$. **4.85.** $\{-3\}\cup[-2;\,4]$.
4.87. $(-\infty;\,0]\cup\{1\}\bigcup\left(\frac{3}{2};\,3\right)$. **4.89.** $(-7;\,-2)\cup(3;\,4)$.
4.90. $[-4;\,-3)\cup(-3;\,3)\cup(3;\,+\infty)$.

Часть 2

- **Иррациональные уравнения и неравенства**
- **Показательные уравнения и неравенства**
- **Логарифмические уравнения и неравенства**

5 Иррациональные уравнения

Уравнение, в котором некоторые выражения, зависящие от неизвестного, находятся под знаком корня (радикала), называется *иррациональным*.

Основная идея большинства способов решения таких уравнений заключается, как правило, в сведении к рациональным алгебраическим уравнениям.

Возведение обеих частей уравнения или неравенства в нечетную степень или извлечение корня нечетной степени является эквивалентным преобразованием.

При решении иррациональных уравнений с четными степенями можно использовать два способа решения:

I. Избавление от иррациональности путем возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень с учетом равносильности преобразований. При этом уравнение заменяется эквивалентной ему смешанной системой уравнений и неравенств. В этом случае проверка не нужна. При возведении уравнения в четную степень необходимо, чтобы обе части уравнения имели один и тот же знак.

II. Избавление от иррациональности путем возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень без учета равносильности (эквивалентности) преобразований. Поскольку при возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние корни (в этом случае мы получаем уравнение, являющееся следствием исходного), то необходимо сделать проверку. Иногда проверка корней бывает достаточно сложной. Проверка производится подстановкой корня в исходное уравнение и выяснения истинности соотношения. Недостаточно проверить, входит ли корень в ОДЗ.

При решении иррациональных уравнений можно использовать любой из этих способов решения. В наших примерах мы, как правило, пользуемся эквивалентными преобразованиями, поскольку при решении иррациональных неравенств зачастую удобнее пользоваться также эквивалентными преобразованиями.

5.1 Уравнения вида $\sqrt{f} = g$

Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ проводится по схеме:

$$\sqrt{f} = g \iff \begin{cases} f = g^2, \\ g \geq 0. \end{cases}$$

Отметим, что условие из ОДЗ $f \geq 0$ не пишем, поскольку $f = g^2$ — полный квадрат и, следовательно, неотрицателен.

Решить уравнения:

5.1. (МГУ, социологический, 2005, 1(6))
$\sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3.$

5.2. (МГУ, социологический, 2002, 1(6))
$\sqrt{3x + 10} = x + 2.$ *"Решение"*

5.3. (МГУ, химический, 1997, 1(6))
$\sqrt{3x^2 - 25x + 51} = 7 - 2x.$

5.4. (МГУ, физический, 1985, 2(6))
$\sqrt{x^4 - 4x - 16} = 2 - x.$

5.5. (МГУ, мех-мат, 1980, 1(5))
$(x^2 - 4)\sqrt{x + 1} = 0.$

5.6. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, биолог., ФФМ, ФБиБ, географический, психологический, 2007, 1(8))
$(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x + 23} = 0.$

5.7. (МГУ, геологический, 1983, 1(6))
$(x + 1)\sqrt{x^2 + x - 2} = 2x + 2.$ *"Тест"*

5.8.* (МГУ, ФНМ, апрель 2001, 3(6))

$$x^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{2}}.$$

Домашнее задание

5.9. $\sqrt[3]{16 - x^3} = 4 - x.$

5.10. $\sqrt{7-x} = x-1.$

5.11. $2\sqrt{1-x^2} = x-2.$

5.12. (МГУ, почвоведения, 1977, 1(5))
$2\sqrt{x+5} = x+2.$

5.13. (МГУ, биологический, 1977, 1(5))
$\sqrt{6-4x-x^2} = x+4.$

5.14. (МГУ, экономический, 1973, 3(5))
$\sqrt{24-10x} = 3-4x.$

5.15. (МГУ, психологический, 1996, 1(5))
$\sqrt{2x^2-21x+4} = 2-11x.$

5.16. (МГУ, психологический, 1996, 1(5))
$\sqrt{x^2+51x+16} = 4+13x.$

5.17. $\sqrt{x+7} = x-3.$

5.18. (МГУ, мех-мат, 1980, 1(5))
$(9-x^2)\sqrt{2-x} = 0.$

5.19. (МГУ, геологический, 1983, 1(6))
$(x+1)\sqrt{16x+17} = (x+1)(8x-23).$ *"Тест"*

5.20. (МГУ, физический, 1985, 2(6))
$\sqrt{x^4-2x-5} = 1-x.$

5.21. (МГУ, почвоведения, 2006, 2(7))
$\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 2\sqrt{x^3}.$ *"Тест"*

5.22. (МГУ, географический, май 1995, 3(5))
$\sqrt{2-x^2} = |x|-1.$

5.23. $\sqrt{1-\sqrt{1+x}} = x.$

5.24. $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x.$

5.25. (МГУ, экономический, 1990, 2(6))
$5\sqrt{1+|x^2-1|} = 3+|5x+3|.$ *"Тест"*

5.2 Уравнения вида $\sqrt{f} = \sqrt{g}$

Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ проводится по схеме:

$$\sqrt{f} = \sqrt{g} \iff \begin{cases} f = g, \\ f \geq 0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} f = g, \\ g \geq 0, \end{cases}$$

Условие $g \geq 0$ в первой системе можно не писать, поскольку $g = f$, а $f \geq 0$. Вместо условия $f \geq 0$ можно было написать условие $g \geq 0$, т. е. выписывается из условий $f \geq 0$ или $g \geq 0$ то, которое проще решить.

5.26. $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = \sqrt{2x + 2}$.

Домашнее задание

5.27. $\sqrt{5x - 1} = \sqrt{3x + 19}$.

5.28. $\sqrt{7x + 1} = 2\sqrt{x + 4}$.

5.3 Уравнения с несколькими отдельно стоящими корнями

При решении уравнений с несколькими отдельно стоящими корнями надо последовательно избавляться от иррациональности путем возведения в квадрат обеих частей уравнения. Для соблюдения эквивалентности преобразования надо добавлять условие неотрицательности подкоренных выражений. Обе части уравнения должны иметь один и тот же знак (обычно плюс). Для этого корень, перед которым стоит знак минус, следует перенести в другую часть уравнения.

5.29. (МГУ, психологический, 2001, 1(5))
$\sqrt{x + 2} + \sqrt{8 - x} = \sqrt{15}$.

5.30. $3\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 2} = 7$. *"Тест"*

5.31. (МГУ, геологический, экономический, 1982, 2(6))
$\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x - 2}$.

Задачи №№ 5.32–5.38 решить устно:

5.32. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}=0.$

5.33. $\sqrt{4-x}-\sqrt{x-6}=1.$

5.34. $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+9}=\sqrt{4-x}.$

5.35. $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=2.$

5.36. (Элиста, 1995, 5(10))
$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}=6.$

5.37. $\sqrt{-1-x}=\sqrt[3]{x-5}.$

5.38. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{2}.$

Домашнее задание

5.39. (МГУ, экономический, 2008, 1(7))
$$\frac{6x^2-21x+16}{1+\sqrt{2x-4}}=\sqrt{2x-4}-1.$$

5.40. (МГУ, психологический, 2001, 1(5))
$\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}=\sqrt{12}.$

5.41. (МГУ, ИСАА, 1991, 1(6))
$\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1.$ *"Тест"*

5.42. (МГУ, социологический, 2003, 1(6))
$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x+7}.$

5.43. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}.$

5.44. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}.$

5.45. $\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}-\sqrt{7x+4}=0.$

5.46. $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}.$

5.47. (МГУ, экономический, 1974, 1(5))
$\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}.$

5.48. $\sqrt{x+3}-1=\sqrt{x-\sqrt{x-2}}$.

5.49. $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$.

5.50. $\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=3$.

5.51. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}$.

5.52. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$.

5.4 Уравнения на замену переменных

5.53. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$.

5.54. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$. *“Решение”*

5.55. (МГУ, ВМиК, 1989, 2(6))
$8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$.

5.56. (МГУ, географический, 1976, 2(5))
$4\sqrt{x+1}=|2x-1|+3$.

5.57. (МГУ, географический, май 1999, 3(6))
$\sqrt{|x^2-8x+14|-1}=|x-4|-1$.

5.58.* $4x^2+12x\sqrt{x+1}=27(x+1)$. *“Тест”*

5.59.* $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{x^2+2x-3}=4-2x$.

5.60.* $x(x+4)+3x\sqrt{\dfrac{x+4}{x}}-4=0$. *“Тест”*

5.61.* $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{5-x}=2$.

5.62.* $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

Домашнее задание

5.63. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$.

5.64. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 1(8))
$-x-3\sqrt{-x}=10$.

5.65. $2\sqrt{x^2-3x+11}-\sqrt{x^2-3x+3}=5.$

5.66. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}.$

5.67. (МГУ, геологический, 1994, 3(10))
$y^2+2\sqrt{y^2+3y-4}-4+3y=0.$

5.68. (МГУ, экономический (отд. экономики), 2006, 1(7))
$2\sqrt{2x^2-x+8}=x-2x^2+7.$

5.69. (МГУ, ВМиК, 1989, 2(6))
$6\sqrt{81x^2+54x+45}+6x+9x^2=35.$

5.70. $x\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}=2.$

5.71. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 5(10))
$\sqrt[3]{15x+1-x^2}+\sqrt[3]{x^2-15x+27}=4.$

5.72. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x.$ *"Тест"*

5.73.* (МГУ, ИСАА, 2005, 3(7))
$\sqrt{x}+\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{(x+1)^3}.$

5.74. $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2.$

5.75.* $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{13+x^2}=13-2x.$

5.76.* $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}+2x+2\sqrt{x^2-4}=6.$

5.77.* $\dfrac{10}{x-3}+\sqrt{\dfrac{x}{x-3}}=3x.$

5.78.* $(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}-28=0.$ *"Тест"*

5.79.* (МГУ, географический, май 1995, 5(6))
$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{19-x}=3.$

5.80.* $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5.$

5.81.* $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}.$

5.5 Выделение полного квадрата в подкоренных выражениях

В тех случаях, когда под знаком квадратного корня стоит полный квадрат функции, можно корень извлечь. Необходимо здесь только помнить, что при извлечении квадратного[3] корня надо ставить знак модуля:

$$\sqrt{f^2} = |f|.$$

5.82. $2\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 3.$

5.83. $\sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} = 1.$ *"Решение"*

Домашнее задание

5.84. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1.$ *"Тест"*

5.85. $\sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}} = 1.$

5.86. $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1.$

5.87.* $\sqrt{x + \sqrt{6x-9}} + \sqrt{x - \sqrt{6x-9}} = \sqrt{6}.$

5.6 Уравнения вида $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{h}$

Рассмотрим решение уравнений вида $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$. Возведем обе части уравнения в куб по формуле $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$:

$$\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{h} \iff f + g + 3\sqrt[3]{f}\sqrt[3]{g}(\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g}) = h. \qquad (*)$$

По условию $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{h}$. Поэтому вместо $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g}$ подставим $\sqrt[3]{h}$ в уравнение $(*)$. Получим следствие[4] исходного уравнения

$$f + g + 3\sqrt[3]{f}\sqrt[3]{g}\sqrt[3]{h} = h \iff 3\sqrt[3]{f}\sqrt[3]{g}\sqrt[3]{h} = h - f - g.$$

[3] То же самое относится к корням четной степени: четвертой, шестой и т. д.

[4] Покажем на более простом примере, что при такой подстановке действительно получается не равносильное уравнение, а лишь его следствие:

$$x = 1 \iff x^3 = 1 \iff x \cdot x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1.$$

При последнем переходе подставили в первый сомножитель $x = 1$. В итоге получили уравнение $x^2 = 1$, имеющее уже два корня $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Возведем опять обе части уравнения в куб:

$$27fgh = (h - f - g)^3.$$

Таким образом, избавились от иррациональности и получили алгебраическое уравнение. Отметим, что при подстановке условия уравнения в куб этого уравнения могут появиться посторонние корни. Поэтому обязательно надо сделать проверку полученных корней, подставляя их в исходное уравнение.

5.88. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1.$

5.89.* $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}.$

Домашнее задание

5.90. $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1.$

5.91. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}.$ *"Тест"*

5.92. (МГУ, ВМиК, апрель 2004, устный)

$$\frac{\sqrt[3]{7-x} - \sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x-5}} = 6 - x.$$

5.93.* $\sqrt[3]{(3-x)^2} + \sqrt[3]{(6+x)^2} - \sqrt[3]{(3-x)(6+x)} = 3.$

5.7 Нестандартные уравнения

5.94. (МГУ, мех-мат, март 2001, 1(6))

$3x - 2|x-2| = 3\sqrt{3x+18} - 2|\sqrt{3x+18} - 2|.$

5.95. (МГУ, химический, 1989, 5(5); ВМиК, 2006, устный)

$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}) + 3x(2+\sqrt{9x^2+3}) = 0.$

5.96. $\sqrt{5+\sqrt{5+x}} = x.$

5.97. (МГУ, геологический (отд. геофизики), 1985, 5(6))

$\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2+2} = \sqrt{3x^2+2x-3} + \sqrt{x^2+3x-1}.$

5.98.* (МГУ, геологический (отд. общей геологии), 1985, 5(6))
$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$

5.99.* (МГУ, мех-мат, 2007, 5(6))
Найти наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при $x \in [-2;\,3]$ и $y \in [0;\,11]$.

5.100.* $\dfrac{1}{\sqrt{x+\dfrac{7}{2}}} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{7}{2}.$

5.101.* $\sqrt{2x^2-7x+3} = \sqrt[4]{-2x^2-3x-1}.$

Домашнее задание

5.102. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
$x + \sqrt{3+\sqrt{x}} = 3.$

5.103. (МГУ, почвоведения, 2003, 4(6))
Найти наименьшее значение функции $y = \sqrt{3x^2+5} - \sqrt{3x^2}$ на интервале $[0;\,3]$.

5.104. $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1} = 4.$

5.105. $\sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{x^2-x}.$

5.106. $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{x^2-3x} = \sqrt{2}.$

5.107. $\dfrac{36}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{4}{\sqrt{y-1}} = 28 - 4\sqrt{x-2} - \sqrt{y-1}.$

5.108. $\dfrac{45}{\sqrt{x^2+9}-x} = \dfrac{5x^2}{\sqrt{x^2+9}+3} + \sqrt{3x+31}.$

5.109. (МГУ, мех-мат, март 2001, 1(6))
$$4x - 3|x-1| = 4\sqrt{5x+14} - 3|\sqrt{5x+14} - 1|.$$

5.110. (МГУ, химический, 1989, 5(5))
$$(2x+1)(1+\sqrt{(2x+1)^2+7}) + x(1+\sqrt{x^2+7}) = 0.$$

5.111. $3 + \sqrt{3+\sqrt{x}} = x.$ *"Тест"*

5.112. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}.$$

5.113. $x^2 - 5 = \sqrt{x+5}.$

5.114. (МГУ, геологический (отд. геофизики), 1985, 5(6))
$$\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+2x+4}.$$

5.115.* (МГУ, ВМиК (отд. специалистов), 2006, 5(6))

При каждом значении параметра d решите уравнение
$$\sqrt{x^2-y^2-dx+3dy-2d^2} + \sqrt{x-y+d}\cdot\sqrt{4-2x+d} +$$
$$+\sqrt{-2x^2-2xy+(5d+4)x+(d+4)y-2d^2-8d} = 4.$$

5.116.* (МГУ, геологический (отд. общей геологии), 1985, 5(6))
$$\sqrt{(x+4)(2x+3)} - 3\sqrt{x+8} = 4 - \sqrt{(x+8)(2x+3)} + 3\sqrt{x+4}.$$

5.8 Вычисления

5.117. (МГУ, 2014, 1(8))
$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}\,(8+4\sqrt{3}).$$ *"Решение"*

5.118. (МГУ, мех-мат, 1978, 1(5))

Разность $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найдите это число.

5.119. Вычислить $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}} - \sqrt{3}.$

5.120.* Вычислить $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$.

5.121. (МГУ, почвоведения, 2002, 3(7))
Пусть $a=\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{50}$. Доказать, что число a^3-30a целое и найти его.

5.122. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2008", 1(10))
Найти k, если $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{5}-2k}+4}+4}+4=\sqrt{5}+2$.

5.123.* Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби
$$\frac{59}{1+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}}.$$

Домашнее задание

5.124. Вычислить $\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{2}}$.

5.125. Упростите выражение
$$\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{x\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}+x}{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}+1.$$

5.126. Упростите выражение
$$\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$$
и вычислите при $a=-2{,}5$, $b=0{,}5$.

5.127. Упростите выражение
$$\left(\left(\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\sqrt[4]{bc}\right)^2+bc+3\right)(\sqrt{bc}+3)^{-1}.$$

5.128. Вычислить $\sqrt{(10-\sqrt{101})^2}-\sqrt{(10+\sqrt{101})^2}$.

5.129. $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4}.$

5.130. Вычислить $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

5.131. Вычислить $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$.

5.132. Вычислите $x^3+3x-14$ при $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$.

5.133. Докажите, что если $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$, то $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

5.134. Вычислить $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$.

5.135. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе

$$\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}.$$

5.9 Системы уравнений

5.136. (МГУ, географический, май 1995, 1(6))

$$\begin{cases}\sqrt{x}(x+3y)=36,\\ \sqrt{y}(3x+y)=28.\end{cases}$$

5.137.* $\begin{cases}(x-y)^4=13x-4,\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{3x-y}=\sqrt{2}.\end{cases}$

5.138.* $\begin{cases}\sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{y+\frac{1}{x}}=2\sqrt{2},\\ (x^2+1)y+(y^2+1)x=4xy.\end{cases}$

5.139.* (МГУ, геологический, 1976, 4(5))

$$\begin{cases}3-\sqrt{-1-y}=\sqrt{x+y},\\ \sqrt{x+y}+2=\sqrt{-3+x}.\end{cases}$$

Домашнее задание

5.140. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2007, 2(6))

$$\begin{cases} x^2 = 81, \\ x + 1 = -2\sqrt{y^2 + 10y + 41}. \end{cases}$$

5.141. (МГУ, мех-мат, 1980, 4(5))

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4xy - 3y^2} = x + 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

5.142. (МГУ, химический, 1977, 2(5))

$$\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2. \end{cases}$$

5.143. (МГУ, экономический, 1996, 1(6))

$$\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y + 3} = 1, \\ (-x\sqrt{-x})^2 - y = 10. \end{cases}$$

5.144. (МГУ, химический, 1991, 3(5))

$$\begin{cases} \sqrt{2x - 1} + \sqrt{y + 3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$$

5.145. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 3(8))

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{y - 2} = 1, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$$

5.146.* $$\begin{cases} \sqrt{-1 - x} - \sqrt{2y - x} = 1, \\ \sqrt{1 - 2y} + \sqrt{2y - x} = 4. \end{cases}$$

6 Иррациональные неравенства

6.1 Неравенства вида $\sqrt{f} < g$

Приведем формулу для решений неравенств вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ для строгого и нестрогого неравенства:

$$\sqrt{f} < g \iff \begin{cases} f < g^2, \\ g \geq 0, \\ f \geq 0, \end{cases} \qquad \sqrt{f} \leq g \iff \begin{cases} f \leq g^2, \\ g \geq 0, \\ f \geq 0. \end{cases}$$

Решить неравенства:

6.1. $\sqrt{2x+1} < 3$.

6.2. (МГУ, биологический, 2005, 4(7))
$\sqrt{x-1} < 3 - x$. *"Решение"*

6.3. (МГУ, геологический, 1984, 2(6))
$\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq 3x - 3$. *"Тест"*

6.4.* (МГУ, мех-мат, май 1996, 1(6))
Найти все целочисленные решения неравенства
$\sqrt{x^3 - 5x - 3} \leq 6 - x$.

Домашнее задание

6.5. $\sqrt{x+2} \leq x$.

6.6. $\sqrt{x+14} < x + 2$.

6.7. $\sqrt{(x-4)(5x+4)} < 2(2x-7)$.

6.8. $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$.

6.9. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 1(8))
$\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq x - 1$.

6.10. (МГУ, геологический, 1984, 2(6))
$\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 3x - 6$. *"Тест"*

6.11. (МГУ, экономический, 2007, 1(7))

Для каждого значения x, удовлетворяющего условию $x^2 - |x| - 42 = 0$, найдите все числа y, для которых выполнено неравенство $\quad -7\sqrt{y^2 - 10y + 34} \geq 4x + 7$.

6.12. (МГУ, экономический, 1983, 3(6))

$$\sqrt{5x^2 + 61x} < 4\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

6.13. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{4}} < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}.$

6.14. (МГУ, географический, май 2003, 3(6))

$$2\sqrt{9 - x^2} < x + 3(\sqrt{2} + 1) - |x + 3(\sqrt{2} - 1)|.$$

6.15. (МГУ, биологический, 1997, 3(6))

$$\sqrt{|1 - 8x| - 2} \leq x + 1.$$

6.16. (МГУ, мех-мат, 2010, 2(6))

$$\frac{1 - x}{x} > \sqrt{\frac{3x - 2}{3x + 4}}.$$

6.17.* $(7 - x)|2x - 9| > 2\sqrt{4x^3 - 52x^2 + 225x - 324}.$

6.2 Неравенства вида $\sqrt{f} > g$

Приведем формулу для решений неравенств вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$:

$$\sqrt{f} > g \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g \geq 0, \\ f > g^2, \end{cases} \\ \begin{cases} g < 0, \\ f \geq 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{1}$$

Такая схема решения наиболее часто используется при решении подобных неравенств в школе.

Однако решение системы (1) можно упростить, если заметить, что в системе (1) в первом случае неравенство $g \geq 0$ можно отбросить, поскольку при $g < 0$ решения неравенства $f > g^2$ все равно являются решением исходного неравенства. Поэтому неравенство можно также решать по одной из формул

$$\sqrt{f} > g \iff \left[\begin{array}{l} f > g^2, \\ \begin{cases} g < 0, \\ f \geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad (2) \quad \text{или} \quad \sqrt{f} > g \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f > g^2, \\ g < 0, \end{array}\right. \\ f \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

При решении неравенств этого вида следует пользоваться той формулой, которая является более понятной.

6.18. (МГУ, физический, 1979, 4(6))
$\sqrt{x^2 + x - 2} > x$ *"Решение".*

6.19. (МГУ, мех-мат, май 1995, 1(6))
$\dfrac{4x + 15 - 4x^2}{\sqrt{4x + 15} + 2x} \geq 0.$ *"Тест"*

6.20. (МГУ, мех-мат, март 1996, 2(6))
$\dfrac{x^3 - 8 + 6x(2 - x)}{|3 - 4x|} \leq \sqrt{4x - 3}.$

6.21. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2005", 6(10))
$5|x| \leq x(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2}).$ *"Тест"*

6.22.* (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 6(10))
$\sqrt{4 - x} - 2 \leq x|x - 3| + 4x.$

Домашнее задание

6.23. $\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 1} \geq x + 1.$

6.24. $\sqrt{2x + 2} \geq x - 3.$

6.25. $\sqrt{x + 46} > x + 4.$

6.26. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 2(8))
$|x+1| \le \sqrt{(x+1)^2(x^2-25)}$. *"Тест"*

6.27. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 2(8))
$\sqrt{x^2+2x} - x > 1$.

6.28. (МГУ, химический, 1979, 2(5))
$\sqrt{x+3} > x+1$.

6.29. (МГУ, биологический, 1980, 3(5))
$\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

6.30. $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1)$. *"Тест"*

6.31. (МГУ, геологический, 2005, 2(8))
$\sqrt{-x^2-x+6} - x \ge 2$.

6.32. $\sqrt{2x^2-4x-7} - x + 1 > 0$.

6.33. (МГУ, ВМиК, 1975, 1(5))
$\sqrt{x^2+4x-5} - 2x + 3 > 0$.

6.34. (МГУ, ИСАА, 1993, 2(6))
$$\frac{\sqrt{x^2-5x+8}}{3-x} \ge 1.$$

6.35. $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}} + 2 > x$.

6.36. (МГУ, психологический, 1999, 1(6))
$$\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1.$$

6.37. (МГУ, биологический, ФФМ, 1993, 3(6))
$$5\sqrt{1-\frac{1}{z}} > \frac{7z-1}{z}.$$

6.3 Неравенства вида $\sqrt{f} > \sqrt{g}$

Приведем формулу для решений неравенств вида $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$:

$$\sqrt{f} > \sqrt{g} \iff \begin{cases} f > g, \\ g \geq 0. \end{cases}$$

6.38. $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$.

6.39. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0$.

6.40. (МГУ, "Ломоносов-2011", заочный тур, 2(10))
$\sqrt{x^2-1} \leq \sqrt{5x^2-1-4x-x^3}$. *"Тест"*

Домашнее задание

6.41. $\sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4x^2+12x+11}$.

6.42. (МГУ, геологический, май 1997, 3(8))
$\sqrt{|x+1|-1} > \sqrt{|x+1|-1997}$.

6.43. (МГУ, геологический, 2006, 2(8))
$$\sqrt{\frac{5}{2}x^2 - x^3} \geq \sqrt{6x - \frac{5}{2}x^2}.$$

6.44. (МГУ, химический, 1968, 2(4))
$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$. *"Тест"*

6.45. (МГУ, мех-мат, 1998, 1(6))
$3\sqrt{|x+1|-3} \geq \sqrt{x^2-2x-3}$.

6.4 Неравенства с несколькими отдельно стоящими корнями

При решении неравенств с несколькими корнями приходится возводить обе части неравенства в квадрат. Для соблюдения эквивалентности необходимо, чтобы обе части неравенства были неотрицательны. Если в какой-то части неравенства имеется слагаемое со знаком минус, то будем переносить его в другую часть неравенства.

6.46. $\sqrt{2-x}-\sqrt{x}>1.$

6.47. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}<1.$

6.48. (МГУ, психологический, 1993, 2(5))
$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$ *"Тест"*

6.49. (МГУ, мехмат, 2003, 1(6))
$$5\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}}+4\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}}\leq 9\sqrt{x+4}.$$

Домашнее задание

6.50. $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}<\sqrt{9x^2+12x+4}.$

6.51. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}\leq 1.$

6.52. $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}-1\geq 0.$

6.53. (МГУ, психологический, 1993, 2(5))
$\sqrt{x}-\sqrt{1-x}>\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}.$ *"Тест"*

6.54. (МГУ, физический, 1961)
$\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19}>\sqrt{5x-27}.$

6.55. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}<\sqrt{x-2}.$

6.56. (МГУ, ФФМ, май 2003, 3(7))
$\sqrt{2-x}-\sqrt{4+x}\leq\sqrt{x+3}.$

6.57. (МГУ, химический, 1968, 2(4))
$\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1.$

6.58. (МГУ, ВМиК, 1998, 2(6))
$|\sqrt{x-4}-3|>|\sqrt{9-x}-2|+1.$

6.59. $\sqrt{|3x-8|-5}\geq\dfrac{3\sqrt{3x^2-16x+13}}{x-1}.$

6.5 Дробно-рациональные неравенства

При решении иррациональных неравенств можно воспользоваться методом интервалов. Особенно удобно его применять при решении дробно-рациональных неравенств. Напомним вкратце суть метода (см. также Часть 1, п. 1.3).

Выписать ОДЗ (область допустимых значений) неравенства, отметить её на числовой прямой. Найти корни числителя и знаменателя, отметить из них на прямой только те, что входят в ОДЗ. Далее решить неравенство методом интервалов.

В рассматриваемых ниже задачах множество точек, не входящих в ОДЗ, мы будем заштриховывать и в дальнейшем из рассмотрения исключать. Особое внимание нужно обратить на граничные точки заштрихованных множеств, которые могут входить в ОДЗ и даже могут быть в числе решений неравенства.

6.60. $(2+x)\sqrt{(4-x)(5-x)} \geq 0.$

6.61. (МГУ, 2011, 4(8))

$$\frac{\sqrt{4x-2}-1}{\sqrt{3x-1}-1} > 1.$$

"Решение"

6.62. $x\sqrt{3-2x}+1 > 0.$

6.63. (МГУ, ВМиК, 1982, 3(6))

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geq 2.$$

6.64. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2008, 2(10))

$$\frac{\sqrt{x^2(10-x^2)}}{x} \leq 2x+5.$$

6.65. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2007", 4(10))

$$\frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} \leq 1.$$

6.66.* (МГУ, мех-мат, май 2002, 2(6))

$$\sqrt[3]{2x-x\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{1-2x} \leq 0.$$

"Тест"

Домашнее задание

6.67. $(x+3)\sqrt{\dfrac{6-x}{8-x}} \geq 0.$

6.68. $\dfrac{(x+3)\sqrt{6-x}}{\sqrt{8-x}} \geq 0.$

6.69. $(2+x)\sqrt{4-x}\sqrt{5-x} \geq 0.$

6.70. $\sqrt{x}(3x-1) \geq \sqrt{x}(2x+4).$ *"Тест"*

6.71. (МГУ, географический, 1968, 4(4))

$$\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1.$$

6.72. $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}} \geq x-1.$

6.73. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1.$

6.74. (МГУ, биологический, 2003, 2(6))

$$\frac{\sqrt{x^2-2}}{4-2x} \geq -1.$$

6.75. $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1.$

6.76. (МГУ, экономический, 1988, 3(6))

$$\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} > 1.$$

6.77. (МГУ, психологический, 1998, 3(6))

$$\frac{\sqrt{5x+3}-2x+5}{6-7x^2+41x} \leq 0.$$ *"Тест"*

6.78. (МГУ, ВМиК, 1998, 2(6))

$$\frac{3(4x^2-9)}{\sqrt{3x^2-3}} \leq 2x+3.$$

6.79. $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \sqrt{1+2x}-1.$

6.80. (МГУ, мех-мат, март 1990, 3(6))
$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \le x.$$

6.81. $x\sqrt{10-x^2} > x^2-6.$ *"Тест"*

6.82.* (МГУ, мех-мат, май 2002, 2(6))
$$\sqrt[3]{2x-(x+2)\sqrt{x+2}+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3+2x} \le 0.$$ *"Тест"*

6.6 Неравенства на замену переменных

6.83. $\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} > 2.$ *"Тест"*

6.84. (МГУ, геологический, 1991, 3(6))
$$\frac{1}{\sqrt{x}+2} \ge \frac{2}{4-\sqrt{x}}.$$

6.85. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} > 1.$ *"Решение"*

6.86. (МГУ, биологический, 1983, 3(5))
$$8+6\,|3-\sqrt{x+5}| > x.$$

6.87.* (МГУ, ВМиК, 1990, 4(6))
$$\sqrt{9v^2-48v-21}+\sqrt{9v^2-51v-15} \le |3v-6|.$$

Домашнее задание

6.88. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x} < 12.$

6.89. $\sqrt{x^2+17}-\sqrt[4]{x^2+17} > 6.$

6.90. $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x} < 2.$

6.91. $2\sqrt[3]{(x-1)^2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \ge 1.$

6.92. $\sqrt{2x-4} > 4-\sqrt{x}.$

6.93. $\sqrt{5x^2+10x+1} \ge 7-x^2-2x.$

6.94. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\le\dfrac{3}{2}.$

6.95. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}>2.$ *"Тест"*

6.96. $\sqrt{2-\dfrac{2}{x+1}}<\sqrt{2+\dfrac{2}{x}}+1.$

6.97. $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1.$

6.98. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\le 2.$

6.99. (МГУ, экономический, 1993, 3(6))
$|x+3|\le 6-3\sqrt{1-x}.$ *"Тест"*

6.100. (МГУ, психологический, 2003, 3(5))
$|3x+1|+\sqrt{3x+4}\le 3.$

6.101. (МГУ, ВМиК (отд. специалистов), 2006, 4(7))
$11\sqrt{2x-\sqrt{48x-144}}>2x-12.$

6.7 Нестандартные неравенства

6.102.* $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}<\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}.$

6.103.* (МГУ, геологический, 1975, 5(5))
$\sqrt{x+7}-1<\sqrt{-x-5}+\sqrt{(x+7)(-x-5)}.$

6.104.* (МГУ, экономический, 1975, 3(4))
$$\sqrt{9-\frac{9}{x}}<x-\sqrt{x-\frac{9}{x}}.$$

6.105.* (МГУ, ф-т Государственного управления, 2008, 5(7))
$x-\sqrt{6x-x^2-8}\le 2-\sqrt{x^2-2x-3}.$

6.106.* $5\sqrt{18x^2-15x+3}+7\sqrt{6x-3}+3\sqrt{3x-1}\ge 48x-17.$

Домашнее задание

6.107. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 2(8))
$$\frac{1}{\sqrt{x^2-7}}+x\le\frac{1}{\sqrt{x^2-7}}+9.$$

6.108. $x^3 - \sqrt{1-x} \geq x - \sqrt{1-x}$. *"Тест"*

6.109. (МГУ, мех-мат, тест, 2003, 7(10))
$$\sqrt{6x-3x^2} - 2\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{6x-5-x^2} > 3-x.$$

6.110.* $\sqrt{x} + \sqrt{x^2+3x} > 3$.

6.111.* $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3$.

6.112.* $\sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} > \sqrt{4x^2-18x+18}$.

6.113.* (МГУ, геологический, 1975, 5(5))
$$\sqrt{x+5} < 1 + \sqrt{-x-3} + \sqrt{(x+5)(-x-3)}.$$

6.114.* (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2010", 4(10))
$$\frac{1}{\sqrt{-x-2}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{(x+4)(-x-2)}}.$$

6.115.* (МГУ, биологический, биоинженерии, май 2002, 4(5))
$$\log_3(\sqrt{4x^2-1} + |x|) \leq \log_{|x+4|}(3x^2-1)\log_3|x+4|.$$

6.8 Системы неравенств

6.116.* (МГУ, химический, май 1996, 5(5)
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5x+5} \geq 2, \\ x^2+6x+5 \leq 0. \end{cases}$$

Домашнее задание

6.117. $\begin{cases} \dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \dfrac{1}{x}, \\ \sqrt{x-2}\sqrt{4-x^2} \leq 0. \end{cases}$

6.118. $\begin{cases} \sqrt{4-3x} \geq x, \\ \sqrt{x} + \sqrt{x-1} < 5. \end{cases}$

7 Показательные уравнения

Показательной функцией является функция a^x, где основание $a > 0$. Если $a = 1$, то $a^x = 1$ для любого значения x.

Для преобразования показательных функций используются формулы:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}} \;\; (x = 2;\, 3, \ldots),$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \qquad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется *показательным уравнением.*

7.1 Уравнения с постоянным основанием

Простейшим показательным уравнением является уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Приведем формулу для решения таких уравнений:

$$a^f = a^g \iff f = g.$$

При решении уравнения вида $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, необходимо представить число b как a в некоторой степени: $b = a^{\log_a b}$. Эта формула называется *основным логарифмическим тождеством.* Логарифмические функции и логарифмические уравнения более подробно будут изучаться далее. Приведем формулу для решения таких уравнений:

$$a^f = b \iff f = \log_a b.$$

Решить уравнения:

7.1. $\sqrt{3^x} \cdot \sqrt{5^x} = 225.$ *"Решение"*

7.2. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2007", 2(10))
$\sqrt{2^{(x^2)}} = \left(2^{\sqrt[5]{x}}\right)^5.$

7.3. (МГУ, географический, 1973, 4(5))
Найти решения уравнения $3^{x^2+4x} = \dfrac{1}{25}$, удовлетворяющие неравенству $x > -3$.

Домашнее задание

7.4. (МГУ, психологический, 2006, 1(6))
$|7^x - 3| = 7^x + 1.$

7.5. (МГУ, экономический, 1986, 1(6))
$2^{|x+1|} = (\sqrt{2})^{-2x+3}.$

7.6. $9^{3-5x} \cdot 7^{5x-3} = 1.$

7.7. (МГУ, почвоведения, 1990, 1(6))
$2 - 3^{x-2} = 3^{x-1}.$

7.8. (МГУ, физический, 1999, 2(8))
$2^{2x-5} - 4^{x-2} = 32^{\frac{2x}{5}} - 66.$

7.9. (Ташкентский ф-л МГУ, 2007, 3(10))
$2^{2x+3} \cdot 3^x + 2 \cdot 4^x \cdot 3^{x+2} = \dfrac{13}{72}.$

7.10. $16^{\frac{x+5}{x-7}} = 512 \cdot 64^{\frac{x+17}{x-3}}.$

7.11. $8^{\frac{x-3}{3x-7}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{0{,}25^{\frac{3x-1}{x-1}}}} = 1.$

7.12. (МГУ, экономический, 1997, 1(6))
$3^{|x|} = 5^{x^2+3x}.$ *“Тест”*

7.13.* (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2005, 5(10))
Найти произведение всех действительных корней уравнения:
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\log_2^2 x} = 2^{\frac{3}{\sqrt{2}}(\log_2 x - \log_x 2)}.$$

7.2 Замена переменных

7.14. (МГУ, экономический, апрель 2003, 1(5))
$2 \cdot 4^x - 31 \cdot 2^x - 16 = 0.$

7.15. (МГУ, химический, 1970, 2(5))
$4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}.$ *"Решение"*

7.16. (МГУ, психологический, 1993, 1(5))
$3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}.$

7.17. Решить уравнение $\left(4+\sqrt{15}\right)^x + \left(4-\sqrt{15}\right)^x = 62$ и показать, что корни являются целыми числами. *"Тест"*

7.18. (МГУ, химический, 2000, 6(6))
$(26+15\sqrt{3})^x - 5(7+4\sqrt{3})^x + 6(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 5.$

Домашнее задание

7.19. (МГУ, химический, 1990, 1(6))
$4^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 64.$

7.20. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810.$

7.21. (МГУ, социологический, 2005, 2(6))
$3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0.$

7.22. (МГУ, психологический, 2004, 1(5))
$16^x - 8 \cdot 4^x - 2 = 0.$

7.23. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 4(8))
$4 \cdot 25^{\sqrt{x}} - 23 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 15 = 0.$

7.24. (МГУ, психологический, 2002, 3(6))
$$2^{2^x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^x-1} = 3.$$

7.25. (МГУ, биологический, 1973, 5(5))
$$4^{3x^2+x}-8=2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$$

7.26. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2007, 2(10))
$$2^{\sqrt{4x^2-12x+9}}+4^{x-1}=6.$$

7.27. $9^x+9^{-x}-3^{1+x}+3^{1-x}=6.$

7.28. (МГУ, мех-мат, 1998, 1(6))
$$3^{2x}-2\cdot 3^{x-1}+\left|3^x-\frac{1}{4}\right|=\frac{13}{12}.$$

7.29. Решить уравнение $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$ и показать, что корни являются целыми числами. *"Тест"*

7.30. (МГУ, химический, 2000, 6(6))
$$(26+15\sqrt{3})^x-3(7+4\sqrt{3})^x-2(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=3.$$

7.3 Однородные уравнения

Напомним, что *однородным многочленом* называется многочлен от нескольких переменных, у которого все слагаемые (одночлены) имеют одинаковую суммарную степень.

Например, суммарная степень одночлена $4x^2y^3$ равняется $2+3=5$.

Если после замены переменных функция становится однородным многочленом, то такая функция называется *однородной функцией*. Однородные уравнения решаются делением обеих частей уравнения на один из одночленов. При этом получается алгебраическое уравнение уже относительно одной переменной.

7.31. $6\cdot 9^x-13\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0.$ *"Решение"*

7.32. (МГУ, физический, 1997, 2(8))
$$7\cdot\frac{4^{x-2}}{4^x-3\cdot 5^x}=1+3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^x.$$

Домашнее задание

7.33. (МГУ, почвоведения, 1988, 3(5))
$3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0.$

7.34. $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0.$

7.35. (МГУ, геологический, 1982, 3(6))
$9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}.$

7.36. (МГУ, геологический, 1986, 3(6))
$\dfrac{2 \cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3.$

7.37. (МГУ, 2011, 6(8))

Найти максимальное значение функции $\dfrac{4^x}{2 \cdot 5^{2x} - 10^x + 4^x}$ и точку, в которой оно достигается.

7.4 Уравнения вида $f^g = f^h$

Функция $f(x)^{g(x)}$ является сложнопоказательной функцией, у которой, в отличие от показательной функции a^x, основание a не является константой. Область определения (допустимых значений) основания сложнопоказательной функции: $f(x) > 0$.

Решение уравнений на ОДЗ f, g, h проводится по схеме:

$$f^g = f^h \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f = 1, \\ g = h, \end{array} \right. \\ f > 0. \end{cases}$$

7.38. $|x-2|^{10x^2-1} = |x-2|^{3x}.$

Домашнее задание

7.39. $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1.$

7.40. $(x^2 - 4x + 3)^{\sqrt{x-2}} = 1.$ *"Тест"*

7.5 Трансцендентные уравнения

Трансцендентными уравнениями называются уравнения, в которых присутствуют функции разной природы, например, тригонометрические и показательные, показательные и многочлены. Такие уравнения в общем случае не решаются. Они могут быть решены в частных случаях, например, иногда можно угадать корень и доказать, что других корней нет или разложить выражение на множители.

7.41. $7^{6-x} = x + 2$.

7.42. $3^x + 5^x = 34$.

7.43. $x2^x = 8$.

7.44. $4^x + 3^x = 5^x$.

7.45. $4^x + (x-1)2^x = 6 - 2x$.

7.46.* (МГУ, химический, 1993, 5(5))
Найдите число решений уравнения $2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2$ и дайте обоснование ответа.

7.47.* (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2008, 6(10))
Найти все положительные корни уравнения $x^{-2x} = 2$.

Домашнее задание

7.48. $2^x = 3 - x$.

7.49. $6^x - 3^x = 3$.

7.50. $1 + 3^{x/2} = 2^x$.

7.51. $5^x - 2^{2x} = 3^x$.

7.52. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

7.53. $(x+1)9^{x-3}+4x\cdot 3^{x-3}-16=0.$

7.54. $2^{3x^2-2x^3}=\dfrac{x^2+1}{x}.$

7.55. (МГУ, мех-мат, 1994, устный)

Доказать, что уравнение $2^{x^2}\cdot 3^{-x}=\dfrac{2}{5}$ не имеет решений.

7.6 Системы уравнений

7.56. (МГУ, географический, 1972, 4(5))

Найти все числа x и y, для которых $\begin{cases} 2^{x+1}=4y^2+1, \\ 2^x\le 2y. \end{cases}$

7.57. (МГУ, географический, 1983, 4(5))

$$\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3}=3^{-y-4}, \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8. \end{cases}$$

7.58. (МГУ, ВМиК, 1997, 4(6))

$$\begin{cases} 4^x+5\cdot 2^x-2\cdot 3^y=2, \\ 2\cdot 9^y+2^x+2\cdot 3^y=1. \end{cases}$$

Домашнее задание

7.59. (МГУ, ВМиК, 1985, 1(6))

$$\begin{cases} 6^x-2\cdot 3^y=2, \\ 6^x\cdot 3^y=12. \end{cases}$$

7.60. (МГУ, почвоведения, 1983, 3(5))

$$\begin{cases} x+2^{y+1}=3, \\ 4x+4^y=32. \end{cases}$$

7.61. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 1996, 2(6))

$$\begin{cases} x+3^y=2 \\ x^3+27^y=26. \end{cases}$$

7.62. (МГУ, географический, 1974, 3(5))

$$\begin{cases} 25\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2y-2} = \dfrac{1}{5^{2x}}, \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{2x+y+14}=\sqrt{x+y+12}. \end{cases}$$

7.63. (МГУ, географический, май 2001, 1(6))

$$\begin{cases} 9\cdot 2^x\cdot 5^y - 5\cdot 3^{x+y} = 3^x\cdot 5^y, \\ 2^{x-2}\cdot 3^{y-x+1}\cdot 5^{1-y} = 1. \end{cases}$$

7.64. (МГУ, экономический, 2003, 3(7))

$$\begin{cases} 4\cdot 49^x - 4\cdot 7^{x+y\log_7 3} + 9^y = 9, \\ 49^x + 12\cdot 3^{x\log_3 7+y} - 4\cdot 9^y = 9. \end{cases}$$

7.65. (МГУ, мех-мат, 1984, 4(5))

$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3\cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2+1+xy} = \sqrt{x+1}. \end{cases}$$

8 Показательные неравенства

8.1 Неравенства с постоянным основанием

При решении показательных неравенств надо помнить, что показательная функция a^x с основанием a, большим единицы, монотонно возрастает при возрастании аргумента, а с основанием, меньшим единицы (но положительным), монотонно убывает. Таким образом, при отбрасывании оснований, если $a > 1$, то знак неравенства для степеней сохраняется:

$$a^f \geq a^g \iff f \geq g;$$

если $0 < a < 1$, то знак неравенства меняется на противоположный:

$$a^f \geq a^g \iff f \leq g.$$

Решить неравенства:

8.1. (МГУ, биолого-почвенный (почвенное отд.), 1969, 4(4))
$3^{x+1} < \dfrac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}.$

8.2. $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}\right)^{x^2} \geq 1.$ *"Решение"*

8.3. (Филиал МГУ в г. Астана, 2018, 3(8))
$\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{x}} \leq \left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}}.$

8.4. $3^{2x-1} < 11^{3+x}.$ *"Тест"*

8.5. (МГУ, химический, 1982, 3(5))
$f(g(x)) < g(f(x))$, где $f(x) = 2^x - 1$, $g(x) = 2x + 1$.

8.6. (МГУ, почвоведения, май 2000, 3(6))
$2^{x^2} \cdot 3^x < 6.$

8.7. (МГУ, экономический, 1997, 2(6))
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leq 1.$

Домашнее задание

8.8. (МГУ, экономический, 1983, 1(6))
$2^{x+2}\cdot 5^{x+2}\le 2^{3x}\cdot 5^{3x}.$

8.9. $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x}\ge 1.$ *"Тест"*

8.10. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}.$

8.11. (МГУ, химический, 2005, 2(6))
$\sqrt{3}\cdot 4^x\le\sqrt{2}\cdot 9^x.$

8.12. (МГУ, мех-мат, май 1993, 1(6))
$5\left(\sqrt[6]{\frac{1}{5}}\right)^{35x}<5^{|x^2+6x-1|}.$

8.13. (МГУ, геологический, май 1997, 4(8))
$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2}>(2{,}25)^{x^2-10}.$

8.14. (МГУ, физический, 1982, 4(6))
$5^x-3^{x+1}>2(5^{x-1}-3^{x-2}).$

8.15. (МГУ, физический, 1998, 3(8))
$9^x-2^{\frac{2x+1}{2}}<2^{\frac{2x+7}{2}}-3^{2x-1}.$

8.16. (МГУ, ИСАА, 2008, 2(8))
$\frac{128}{729}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x}}\ge\frac{4^x}{\sqrt[4]{81^{2x-1}}}.$

8.17. (МГУ, почвоведения, май 2000, 3(6))
$3^{x^2}\cdot 5^x>15.$ *"Тест"*

8.18. (МГУ, ВМиК, 1988, 4(6))
$8^x\ge 6\cdot 9^{|x-1|}.$

8.19. $f(f(g(x)))>g(g(f(x)))$, где $f(x)=2^{-x}$, $g(x)=4^{-x}$.

8.2 Замена переменных

8.20. $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$.

8.21. (МГУ, биологический, 1978, 4(5))
$9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}$.

8.22. (МГУ, биологический, май 2002, 2(5))
$\left(2^{|2x-1|} - 1\right)\left(\sqrt{4 \cdot 2^{-|2x-1|} - 3} - 1\right) \geq 0$.

8.23. (МГУ, 2013, 3(8))
$$9\left(1 + 5^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(5^{2x} + 5\right)^{\frac{1}{2}} \geq 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}.$$

8.24. $4^x + 2^{x+2} \geq 19 - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$.

Домашнее задание

8.25. (МГУ, почвоведения, май 2004, 3(6))
$4^x < 2^{x+1} + 3$.

8.26. (МГУ, геологический, 1996, 4(8))
$2 \cdot 2^{-2x^2} - 7 \cdot 2^{-x^2} + 3 > 0$.

8.27. $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} > 29$.

8.28. (МГУ, географический, 1988,1(5))
$$3^x - 3^{\frac{1}{2}-x} > \sqrt{3} - 1.$$

8.29. $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$.

8.30. $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$.

8.31. (МГУ, химический, 1978, 3(5))
$\sqrt{13^x - 5} < \sqrt{2(13^x + 12)} - \sqrt{13^x + 5}$. *“Тест”*

8.32. $\dfrac{1}{3^x + 5} \leq \dfrac{1}{3^{x+1} - 1}$.

8.33. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2005”, 2(10))
$$\frac{3 \cdot 2^{1-x} + 1}{2^x - 1} \geq \frac{1}{1 - 2^{-x}}.$$

8.34. (МГУ, геологический, 1977, 1(5))

$$\frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5.$$

8.35. (МГУ, мех-мат, 1995, 1(6))

Найти наибольшее целое число k, удовлетворяющее неравенству

$$4 \cdot 3^{2k+1} + 3^k < 1.$$

8.36. (МГУ, мех-мат, май 1997, 1(6))

$$\frac{21 - 2^x - 2^{6-x} - |3 - 2^x|}{5 - |3 - 2^x|} \geq 1.$$

8.37. (МГУ, мех-мат, 2006, 2(6))

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}} - \sqrt{1-3^{-x}}} - \frac{3^{-x} - 1}{\sqrt{1-9^{-x}} + 3^{-x} - 1} \geq \frac{1 + \sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}.$$

8.38. $3^{1-x} + 9^x - 3 \cdot 3^x \geq 6 - 9^{-x}$.

8.3 Взаимно-обратные числа

8.39. (МГУ, химический, 1982, 3(5))

$$(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}.$$

"Решение"

Домашнее задание

8.40. (МГУ, химический, 1982, 3(5))

$$(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq (\sqrt{2}-1)^{-x}.$$

8.41. (МГУ, химический, 1997, 2(6))

$$(\sqrt{2}+1)^x + 1 < 2(\sqrt{2}-1)^x.$$

8.4 Разложение на множители

8.42. (МГУ, физический, 1993, 1(8))

$$\frac{2x-1}{2^x-1} < 0.$$

8.43. (МГУ, физический, 1984, 3(6))

$$2^{x+3} - x^3 \cdot 2^x \leq 16 - 2x^3.$$

8.44.* (МГУ, мех-мат, март 2001, 1(6))

$$26^x + 27 \geq 9(6-\sqrt{10})^x + 3(6+\sqrt{10})^x.$$

8.45.* $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x$.

Домашнее задание

8.46. (МГУ, физический, 1975, 3(5))
$(7x^2 - 10x + 3)(2 - 4^x) < 0$.

8.47. (МГУ, 2012, 3(8))
$(4^x - 2^{x+3} + 15)\sqrt{3^x - 9} \geq 0$.

8.48. (Филиал МГУ в г. Баку, 2015, 5(8))
$$\frac{4 \cdot 16^{x^2} - 21 \cdot 4^{x^2} + 5}{x^2 + 2x - 3} \leq 0.$$

8.49. (МГУ, экономический, 1992, 2(6))
$(x^2 - 8x + 15)(2^{x-3} + 2^{3-x} - 2)^{-1}\sqrt{x - 1} \leq 0$.

8.50. (МГУ, мех-мат, 1963)
$4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$. *“Тест”*

8.51. (МГУ, мех-мат, 1973, 3(5))
$\sqrt{2 - 5x - 3x^2} - 2 > 2 \cdot 3^x \cdot \sqrt{2 - 5x - 3x^2} - 4 \cdot 3^x$.

8.52.* (МГУ, мех-мат, март 2001, 1(6))
$27^x + 24 \geq 2(7 + \sqrt{22})^x + 12(7 - \sqrt{22})^x$. *“Тест”*

8.53.* $4^{2x+1} + 5^{x+1} - 4^x \cdot 20^x > 20$.

8.5 Однородные неравенства

8.54. $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$. *“Решение”*

8.55. $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geq 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

8.56. $4^x < 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} + 4^{\sqrt{x}+1}$. *“Тест”*

8.57. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2008”, 6(10))
$\sqrt{25^x - 2^{3-x}} < 7 \cdot 2^{-x/2} - 2 \cdot 5^x$.

Домашнее задание

8.58. $2 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x \geq 0$.

8.59. (МГУ, химический, 1975, 1(5))
$5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4\cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}$.

8.60. (МГУ, мех-мат, 1996, 2(6))
$\sqrt{17\cdot 9^x - 4^x} \geq 3^x - 3\cdot 2^x$.

8.61. (МГУ, мех-мат, 2000, 1(6))
$2\sqrt{5\cdot 6^x - 2\cdot 9^x - 3\cdot 4^x} + 3^x < 2^{x+1}$.

8.62. (МГУ, химический, май 2002, 3(6))
$|4^{3x} - 2^{4x+2}\cdot 3^{x+1} + 20\cdot 12^x\cdot 3^x| \geq 8\cdot 6^x(8^{x-1}+6^x)$.

8.63.* $9^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x}} \geq 0$.

8.6 Неравенства вида $f^g > f^h$

Функция $f(x)^{g(x)}$ является сложнопоказательной функцией.[5] Область определения (допустимых значений) основания сложнопоказательной функции: $f(x) > 0$.

Решение неравенств с одинаковыми основаниями проводится по схеме:

$$f^g > f^h \iff \begin{cases}(f-1)(g-h) > 0,\\ f > 0.\end{cases} \qquad (1)$$

Неравенства вида $f^g > 1$ также решаются по аналогичной схеме с $h = 0$:

$$f^g > 1 \iff \begin{cases}(f-1)g > 0,\\ f > 0.\end{cases} \qquad (2)$$

В случае нестрогих неравенств первые неравенства в системах также являются нестрогими.

Решение неравенств с разными основаниями проводится логарифмированием обеих частей неравенства.

8.64. (МГУ, 2014, 3(8))
$x^{3x+7} > x^{12}$. *"Решение"*

8.65. $x^x > 2^x$.

8.66. $(x-2)^{x^2-5} \geq (x-2)^{4x}$.

[5] О сложнопоказательной функции см. также п. 7.4.

Домашнее задание

8.67. (МГУ, почвоведения, май 2002, 5(7))
$6^{\sqrt[10]{x}} \leq 10^{\sqrt[6]{x}}$.

8.68. $|x-3|^{2x^2-7x} \geq 1$.

8.69. $(x^2-4x+3)^{x^2-6x+4} \leq 1$. *"Тест"*

8.70. $(x^2+3x-4)^{x^2-1} \geq 1$.

8.7 Системы неравенств

8.71.* (МГУ, психологический, 1984, 7(7))
$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leq 2, \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

Домашнее задание

8.72. (МГУ, геологический, 1974, 2(5))
$$\begin{cases} 3^{2x+1} - 3^{x+2} + 6 > 0, \\ 3^{2x+2} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 < 0. \end{cases}$$

8.73. (МГУ, мех-мат, март 1999, 2(6))
$$\begin{cases} 2^{x+2} = \dfrac{49}{4}x^2 + 4, \\ 2^{x+2} - 4 \leq x^2(14 - 2^{x+2}) \cdot 2^x. \end{cases}$$

8.74. (МГУ, социологический, 1997, 5(6))
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{32}} \cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3}, \\ |\sqrt{2}x - 1| = \sqrt{2}x - 1. \end{cases}$$

8.75. (МГУ, химический, 1995, 5(5))
$$\begin{cases} 2^{-x}y^4 - 2y^2 + 2^x \leq 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$$

8.76.* (МГУ, психологический, 1984, 7(7))
$$\begin{cases} 3^{x+2y-1} + 2 \cdot 3^{3y-1} \leq 2, \\ x + 5y \geq 2 - \log_3 2. \end{cases}$$

9 Логарифмические уравнения

Логарифмом числа b, $b > 0$, по основанию a, $a > 0$, $a \neq 1$, называют такое число c, что $a^c = b$, и пишут $c = \log_a b$.

Таким образом, логарифмы возникают при решении простейших показательных уравнений

$$a^x = b \iff x = \log_a b.$$

Из сказанного вытекает, что для функций $f(x)$ и $g(x)$ область определения (ОДЗ) выражения $\log_g f$ есть $\begin{cases} f > 0, \\ g > 0, \ g \neq 1. \end{cases}$

Логарифмической функцией является функция $\log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется *логарифмическим уравнением.*

Непосредственно из определения логарифма следует *основное логарифмическое тождество*

$$a^{\log_a b} = b.$$

Для преобразования логарифмов положительных чисел справедливы формулы:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc, \quad \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}, \quad \log_a b^c = c \log_a b.$$

Отметим, что для функций $\log_a f^2 = 2 \log_a |f|$.

Имеет место *формула перехода к новому основанию*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Из этой формулы перехода легко вытекают формулы

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad \log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b, \quad \log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b = \log_a b^{\frac{1}{c}}.$$

Любое число b можно представить как логарифм по основанию a следующим образом: $b = \log_a a^b$. Отметим также формулу

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a},$$

которая легко доказывается логарифмированием, то есть приписыванием к обеим частям равенства логарифма (в нашем случае по основанию c).

9.1 Уравнения с постоянным основанием

Приведем формулу для решения уравнений вида
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ с основанием $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a f = \log_a g \iff \begin{cases} f = g, \\ f > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f = g, \\ g > 0. \end{cases}$$

Условие $g > 0$ в первой системе можно не писать, поскольку $g = f$, а $f > 0$. Вместо условия $f > 0$ можно было написать условие $g > 0$, т. е. выписывается из условий $f > 0$ или $g > 0$ то, которое проще решить.

9.1.1 Простейшие уравнения

Решить уравнения:

9.1. (МГУ, филологический, 1983, 1(5))
$\log_5(x-1) = \log_5 \dfrac{x}{x+1}$. *"Решение"*

9.2. $\dfrac{1}{2}\log_2 x^2 + \log_2(x+4) = 2$. *"Тест"*

9.3. (МГУ, ФНМ, апрель 2003, 2(6))
$\log_{\frac{1}{3}}(1 + (x^2 - 3x + 2)^2) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$.

Домашнее задание

9.4. $\lg(x + 1{,}5) = -\lg x$.

9.5. (МГУ, химический, май 2000, 1(6))
$\log_2 \dfrac{x+3}{5} + \log_2 \dfrac{5}{x+1} = 1$.

9.6. (МГУ, филологический, 1998, 3(6))
$\dfrac{\log_5(-2x)}{\log_5(x+1)} = 2$.

9.7. (МГУ, физический, 1989, 3(6))
$\frac{1}{2}\log_2 x^2 + \log_2(x-6) = 4.$

9.8. (МГУ, физический, 1978, 4(6))
$\log_3(3^x - 8) = 2 - x.$

9.9. (МГУ, ИСАА, 1995, 2(6))
$\log_2(x^2 - 4x + 3) - \log_2(x-1)\log_2(x-3) = 1.$ *"Тест"*

9.1.2 Переход к одному основанию

9.10. (МГУ, 2011, 3(8))
$\log_2(1 - 3x) = \log_4(5x - 1).$ *"Решение"*

9.11. $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11.$

9.12. (МГУ, биологический, 1989, 1(5))
$\log_{49}(2x^2 + x - 5) + \log_{\frac{1}{7}}(1 + x) = 0.$

9.13. $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$

Домашнее задание

9.14. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 3(8))
$1 + \log_4(x+2)^2 = \log_2(2x + 8).$ *"Тест"*

9.15. (МГУ, биологический, 1989, 1(5))
$\log_9(2x^2 + 9x + 5) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 3) = 0.$

9.16. (МГУ, ФНМ, апрель 2002, 2(6))
$\log_3(x-5)^2 - 4 = \log_{\sqrt{3}}(x - 1).$

9.17. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2008, 1(6))
$\log_2 \frac{1-x}{3-x} = \log_4 \sqrt[3]{(x-1)^6} - 3.$

9.18. (МГУ, мех-мат, март 1996, 1(6))
$\log_{x+5}(x^3 + 10x^2 + 20x) \cdot \log_3(x+5) = \log_3(3x^2 + 8x).$ *"Тест"*

9.1.3 Повторные логарифмы

9.19. $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0.$ *"Тест"*

9.20. (МГУ, экономический, 1970, 3(4))
$\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 2x.$

Домашнее задание

9.21. $\log_5 \big(2 + \log_3(3+x)\big) = 0.$

9.22. $2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \log_2(2\sqrt{2}\,x) = 1.$

9.2 Уравнения с переменным основанием

Простейшим уравнением с переменным основанием является уравнение вида $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$. Приведем формулу для решения уравнений такого вида:

$$\log_h f = \log_h g \iff \begin{cases} f = g, \\ f > 0, \\ h > 0, \ h \neq 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f = g, \\ g > 0, \\ h > 0, \ h \neq 1, \end{cases}$$

Условие $g > 0$ в первой системе можно не писать, поскольку $g = f$, а $f > 0$. Вместо условия $f > 0$ можно было написать условие $g > 0$, т. е. выписывается из условий $f > 0$ или $g > 0$ то, которое проще решить.

9.23. (МГУ, 2015, 4(8))
$\log_x |2x^2 - 3| = 4\log_{|2x^2-3|} x.$

9.24. (МГУ, геологический, 1966, 2(4))
$\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4.$ *"Решение"*

Домашнее задание

9.25. (МГУ, географический, 1980, 2(5))
$\log_{x-1} 3 = 2.$

9.26. (МГУ, психологический, 2003, 1(5))
$\log_{3x+3} 5 = 2.$

9.27. (МГУ, филологический, 1989, 3(5))

$\log_{2x+2}(2x^2 - 8x + 6) = 2.$

9.28. (МГУ, геологический, 1988, 3(6))

$(2x^2 - 5x + 2)(\log_{2x}(18x) + 1) = 0.$ *"Тест"*

9.3 Задачи на вычисления

9.29. (МГУ, 2012, 2(8))

$\log_5\left(-\log_3 \frac{8}{1944}\right).$

9.30. (МГУ, 2013, 2(8))

$\log_{12} 3 \cdot \log_9 12.$ *"Решение"*

9.31. (МГУ, 2014, 2(8))

Найти максимальное значение функции $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 17)$.

9.32. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2008", 2(10))

Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 3 от числа 27^{81} (первый раз логарифм берется от этого числа, а затем всякий раз — от числа, полученного в предыдущий раз)?

9.33. (МГУ, хим, географ, биолог, психолог, ФББ, ФФМ, ФНМ, физико-химический, 2008, 2(7))

Найдите $\log_3 x$, если $x < 3$ и

$$\log_3(3x) \cdot \log_3(9x) \cdot \log_3(27x) = \log_3^3 x + 23.$$

9.34.* (МГУ, тест, мех-мат, 2003, 3(10))

$7^{1-\sqrt[5]{\log_7^3 2}} \cdot 2^{2+\sqrt[5]{\log_2^2 7}}.$

9.35.* (МГУ, тест, мех-мат, 2001, 9(10))

Вычислить $\log_{\sqrt{x}}(x^7 + x^2 - 1)^3$, где x — положительный корень уравнения $x^{16} + x^9 + x^2 = 1$.

Домашнее задание

9.36. (МГУ, тест, мех-мат, 1998, 3(9))

Пусть $a = \log_9 6$. Найти $\log_{3\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}}$.

9.37. (МГУ, биологический, 1998, 1(5))

Вычислить $\log_{(d^4\cdot\sqrt[5]{c^6})} \dfrac{c\cdot\sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{d}}$, если $\log_d c = \sqrt{5}$.

9.38. (МГУ, мех-мат, 2007, 1(6))

Учитель назвал Пете натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Однако Петя по ошибке не сложил эти логарифмы, а перемножил их, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал ему учитель?

9.39. (МГУ, мех-мат, 2006, 1(6))

Игорь и Володя решали задачу: некоторое заданное трёхзначное число прологарифмировать по основанию 2, из полученного числа вычесть некоторое заданное натуральное число, а затем разность разделить на то же самое натуральное число. Игорь перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 3, а Володя посчитал правильно. Когда они сверили свои результаты, оказалось, что полученные ими числа взаимно обратны. Найти исходное трёхзначное число.

9.40. (МГУ, мех-мат, май 1996, 2(6))

Вычислить $\log^2_{\frac{x}{y}} x + \log^2_{\frac{y}{x}} y$, если $\log_{\frac{x}{y}}(x^9) = \log_{\sqrt{y}} \dfrac{y}{x}$.

9.41. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 1(10))

$$\log_4 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{16}}}}_{40}. \qquad \text{“Тест”}$$

9.42. Найти предел выражения: $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}}$.

9.43.* (МГУ, тест, мех-мат, 2003, 3(10))

$$5^{1+\sqrt[5]{\log_5^2 2}} : 2^{\sqrt[5]{\log_2^3 5}+2}.$$

9.4 Показательно-логарифмические уравнения вида $f^g = f^h$

Уравнения такого вида уже встречались нам при решении показательных уравнений в п. 7.3. В отличие от предыдущих уравнений здесь функции $g(x)$ или $h(x)$ будут логарифмами функций.

Напомним, что в области определения (допустимых значений) сложнопоказательной функции $f(x)^{g(x)}$ должно выполняться неравенство $f(x) > 0$.

Решение уравнений на ОДЗ f, g, h проводится по схеме:

$$f^g = f^h \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f = 1, \\ g = h, \end{array} \right. \\ f > 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Эта формула на ОДЗ f, g, h получается, если прологарифмировать обе части уравнения (по какому-нибудь основанию или по основанию уже имеющегося логарифма):

$$f^g = f^h \iff \lg f^g = \lg f^h \iff g \lg f = h \lg f$$

$$\iff g \lg f - h \lg f = 0 \iff (g - h) \lg f = 0 \iff (*).$$

9.44. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 6(10))
$x^{\log_3 x} = 9x$.

9.45. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$. *“Решение”*

9.46. $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.

9.47.* (МГУ, мех-мат, 2003, 2(6))
$|5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x} + 614| = 636 - 5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x}$.

Домашнее задание

9.48. $x^{\lg^3 x - 5 \lg x} = 0{,}0001$.

9.49. $x^{2 \lg^2 x} = 10x^3$.

9.50. (МГУ, почвоведения, 1996, 3(6))

$$x^{2\log_4 x} = \frac{8}{x^2}.$$

9.51. (МГУ, социологический, 2008, 4(7))

$$(x^2)^{\log_3 x} = \frac{x^5}{9}.$$

9.52. (МГУ, географический, 1979, 1(5))

$$4^{\log_9 x} - 6\cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0.$$

9.53. $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20.$

9.54. $x^{2\lg 2} - 5\cdot 2^{\lg x} + 6 = 0.$

9.55. (МГУ, психологический, 1999, 2(6))

$$x^{\log_7 4} + 5\cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0.$$

9.56. (МГУ, физический, 1975, 2(5))

$$9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+2)} = 7^{\log_{\frac{1}{7}}(2x^2+3x+2)}.$$

9.57. (МГУ, Высшая школа гос. аудита, 2008, 6(9))

$$9^{(\log_3 x)^2 - \frac{1}{2}} = x^{\log_3 x} + 18.$$

9.5 Системы уравнений

9.58. (Филиал МГУ в г. Астана, 2017, 5(8))

$$\begin{cases} x^{\log_y x} = \dfrac{y^2}{x}, \\ (\log_3 x^2)\cdot \log_x\left(2x - \dfrac{3}{y}\right) = 4. \end{cases}$$

9.59. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2003, 4(8))

$$\begin{cases} 5\log_{32}(x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(3y-8) = 0, \\ x^2 + 2x + y^2 + y = 12. \end{cases}$$

9.60. (МГУ, мех-мат, 2000, 2(6))

$$\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$$

9.61. (МГУ, мех-мат, 2008, 3(6))

$$\begin{cases} \log_2(2x^3+4x^2y-3x^2)=\log_{11}(4xy^2+24y^3-12y^2), \\ \log_{11}(x^3+6x^2y-3x^2)=\log_2(8xy^2+16y^3-12y^2). \end{cases}$$

Домашнее задание

9.62. (МГУ, ВМиК, Олимпиада “Абитуриент-2006”, 1(6))

$$\begin{cases} (x+2y)^{x-y}=25, \\ 2\cdot\log_5(x+2y)+x-y=4. \end{cases}$$

9.63. (МГУ, геологический, 1972, 2(5))

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_3 y^2=0, \\ \log_2 x^2-\log_{\frac{1}{3}} y=5. \end{cases}$$

9.64. (МГУ, геологический, 1973, 1(5))

$$\begin{cases} \lg 3\cdot\lg(3x)=\lg 2\cdot\lg(2y), \\ \lg x\cdot\lg 2=\lg y\cdot\lg 3. \end{cases}$$

9.65. (МГУ, геологический, 1980, 3(5))

$$\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=5, \\ 2\log_4 x+\log_2 y=4. \end{cases}$$

9.66. (МГУ, мех-мат, 2010, 1(6))

$$\begin{cases} 3x^y=4^x+8, \\ y=\dfrac{x+1}{\log_2 x}. \end{cases}$$

9.67. (МГУ, почвоведения, 1998, 4(6))

$$\begin{cases} y^x=3y, \\ 2\log_3 y+\log_y 3=3x. \end{cases}$$

9.68. (МГУ, мех-мат, 1989, 4(6))

$$\begin{cases} \log_x y+\log_y x=\frac{5}{2}, \\ 4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=1. \end{cases}$$

9.69.* (МГУ, химический, 1985, 5(5))

$$\begin{cases} |x-y|-\log_2^2(|x|+y+1)+6=0, \\ (x-y)^2-6(x-y)\log_2(|x|+y+1)+5\log_2^2(|x|+y+1)=0. \end{cases}$$

10 Логарифмические неравенства

10.1 Неравенства с постоянным основанием

При решении логарифмических неравенств надо помнить, что логарифмическая функция $\log_a x$ с основанием a, большим единицы, монотонно возрастает, а с основанием, меньшим единицы (но положительным), монотонно убывает. Таким образом, при отбрасывании логарифмов, если основание $a > 1$, то знак неравенства для подлогарифменных выражений сохраняется:

$$\log_a f \geq \log_a g \iff \begin{cases} f \geq g, \\ g > 0; \end{cases}$$

если $0 < a < 1$, то знак неравенства меняется на противоположный:

$$\log_a f \geq \log_a g \iff \begin{cases} f \leq g, \\ f > 0. \end{cases}$$

10.1.1 Простейшие неравенства

Решить неравенства:

10.1. $\log_5(x-2) \leq 2$.

10.2. $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \geq 1$. *"Решение"*

10.3. (МГУ, химический, ФНМ, 2006, 2(6))
$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x+3}{x-2} > 2$.

10.4.* (МГУ, мех-мат, май 2001, 2(6))
При каких значениях x числа $\log_2(2x^2+4x)$, $\log_2(8-x^2-19x)$ и $\log_2(x^2-15x+7\frac{1}{2})$ являются длинами сторон некоторого равнобедренного треугольника?

Домашнее задание

10.5. (МГУ, ВМиК, 1990, 1(6))
$\log_{x^2+4} 8 < 1$.

10.6. (МГУ, химический, 1982, 3(5))

$$\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \le 1.$$

10.7. (МГУ, Якутск, 1995, 2(10))

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} \ge 1.$$

10.8. (МГУ, географический, 1989, 3(5))

$$\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(x^2-9) \ge 0.$$

10.9. (МГУ, психологический, 1996, 2(5))

$$2 < \log_3(x-3)^4 \le 8.$$

10.10. (МГУ, геологический, 1983, 3(6))

$$\log_3(5x^2+6x+1) \le 0.$$

10.11. (МГУ, социологический, 2003, 2(6))

$$\frac{1}{2}\log_{0,1}(6+x) \le \log_{0,1} x.$$

10.12. (МГУ, геологический, май 1999, 5(8))

$$2 < |2\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) - 4| \le 3.$$

10.13. (Филиал МГУ в г. Баку, 2016, 5(8))

$$\log_{\frac{1}{4}}(x-2+\sqrt{3-x}\,) > 1.$$

10.14. (МГУ, социологический, 2005, 5(6))

$$\log_{0,5}(\sqrt{5-x}-x+1) > -3.$$

10.1.2 Повторные логарифмы

10.15. $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 x \ge 1.$ *"Тест"*

10.16. $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x \ge 0.$ *"Решение"*

10.17. (МГУ, мех-мат, 1965)

$$\log_x \log_2(4^x-6) \le 1.$$

Домашнее задание

10.18. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 2(7))
$\log_{0,5}(\log_3(x-2)) \geq -1.$

10.19. $\log_2(1+\log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x) \leq 1.$

10.20. $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 |x-3| \geq 0.$ *"Тест"*

10.21. (МГУ, ИСАА, 2007, 3(7))
$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_4 \frac{x^2-2x}{x+10}\right) \geq 0.$$

10.22. (МГУ, психологический, 2001, 2(5))
$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+4}{4x-8} \leq 0.$$

10.23. (МГУ, геологический, 1978, 3(5))
$\log_3 \log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3) \leq 0.$

10.24. (МГУ, почвоведения, 2002, 4(7))
$\log_3 \log_4 x \leq \log_9 \log_2 8x.$

10.25. (МГУ, физический, 2001, 5(6))
$$\log_2\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) < \log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right).$$

10.1.3 Замена переменных

10.26. (МГУ, биологический, 1985, 3(5))
$$\frac{1}{\log_5(3-2x)} - \frac{1}{4-\log_5(3-2x)} \leq 0.$$

10.27. $$\frac{4}{\left(\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} - 1\right)^2} \geq 1.$$ *"Тест"*

10.28. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 5(8))
$\log_x^3 16 + 2\log_x^2 16^2 + 4\log_x 16^4 \geq 0.$

10.29. (Филиал МГУ в г. Баку, 2014, 5(8))
$2\sqrt{\log_2(-x)} < \log_2 \sqrt{x^2} - 3.$

Домашнее задание

10.30. (МГУ, почвоведения, 1978, 2(5))
$\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \leq 0.$

10.31. (МГУ, филологический, 2000, 3(6))
$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{2 - \log_2 x} \leq 2.$$ *"Тест"*

10.32. (МГУ, биологический, 1985, 3(5))
$\log^2_{\frac{1}{2}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) + 6.$

10.33. (МГУ, биологический, 1987, 3(5))
$$\frac{3\log_{0,5} x}{2 - \log_{0,5} x} \geq 2\log_{0,5} x + 1$$

10.34. (МГУ, мех-мат, 1995, 2(6))
$$\frac{2}{\frac{2}{\log_2 x} - 1} > -3.$$

10.35. (МГУ, химический, 2004, 3(6))
$\sqrt{\log_5 x + 3} - \sqrt{\log_5 x - 2} < \sqrt{\log_5 x - 1}.$

10.36. (МГУ, ВМиК, 1994, 3(6))

Найти все отрицательные значения u, при которых выполнено неравенство $\dfrac{1}{\log_{3\cos u} 3} + \dfrac{1}{\log_3\left(\frac{\cos u}{3}\right)} \geq 0.$

10.37. (МГУ, факультет Гос. управления, 2007, 4(7))
$\sqrt{(\log_4 x)^2 - 2} \geq \log_2 \dfrac{x}{4} - 1.$

10.38. (МГУ, ВМиК, 2010, 2(6))
$$\frac{1 + \log_{x-2}(-x^2 + 7x - 10)}{2 - \log_{5-x}(x^2 - 4x + 4)} \leq 2.$$

10.1.4 Переход к одному основанию

10.39. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 1996, 1(6))
$\log_4(3-3x)^2 \geq \log_2(x^2-1)$.

10.40. (МГУ, филологический, 2005, 3(7))
$\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16$. *"Решение"*

10.41. (МГУ, ВМиК, 2008, 1(6))
$\log_5 \dfrac{5-x}{2-x} \geq \log_{25} \sqrt{(x-5)^4} - 1$.

10.42. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2005, 4(6))
$\log_{1+\sqrt{2}}(x+4) + 2\log_{3+2\sqrt{2}}(7-2x) + \log_{\sqrt{2}-1}(x^2-x-6) \leq 0$.

Домашнее задание

10.43. $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{4}} x$. *"Тест"*

10.44. (МГУ, геологический, 1971, 5(5))
$\log_{\frac{1}{4}}(2x+3) > \log_9 27$.

10.45. (МГУ, физический, 1972, 2(5))
$\log^2_{10} x + \log_{100} x^2 < 2$.

10.46. (МГУ, физический, 1991, 3(6))
$\log_{49}(x+3) - \log_7(x+2) < 0$.

10.47. (МГУ, геологический, 1996, 4(8))
$\dfrac{1}{\log_2(-x)} < \dfrac{1}{\log_4(-2x)}$.

10.48. (МГУ, биолого-почвенный, 1970, 2(5))
$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6) + \log_9 x^2 \geq 0$.

10.49. (МГУ, филологический, 2001, 2(5))
$\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)} > \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{4}} x} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x}$.

10.50. (МГУ, почвоведения, 2000, 4(7))
$\log_x 2 < \log_{6-x} 2$.

10.51. (МГУ, биологический, 2001, 3(5))

$$\frac{\log_2 x - 3}{6\log_x 2 - 1} \le 2.$$

"Тест"

10.52. (МГУ, мех-мат, 1993, 1(6))

$$\frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1} 11} \ge \frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11}.$$

10.53. (МГУ, мех-мат, 2002, 1(6))

$$\log_{\frac{2}{3}} \frac{x}{x+1} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{3x} \ge 2.$$

10.54. (МГУ, ВМиК, 2007, 2(6))

$$\log_{x+2}(2-x) \ge \frac{|\log_5(2x+3) - 1|}{\log_5(x+2)}.$$

10.55. (МГУ, ИСАА, 2005, 5(7))

$$\log_{(4|x|+1)}(6x+2) - \log_{(6x+2)}(4|x|+1) < 0.$$

10.56. (МГУ, экономический, отд. экономики, 2005, 4(7))

$$\log_{2+\sqrt{5}}(4-x) - \log_{9-4\sqrt{5}}(4x^2+28x+49) + \log_{\sqrt{5}-2}(x^2+x-6) \le 0.$$

10.1.5 Разные задачи

При решении логарифмических неравенств можно использовать обобщенный метод интервалов или монотонность логарифма, из которой вытекает, что при $a > 1$ знак разности $\log_a f - \log_a g$ совпадает со знаком $f - g$ на ОДЗ, а знак $\log_a f$ совпадает со знаком $f - 1$; при $0 < a < 1$ знаки будут противоположными.

10.57. (МГУ, физический, 1994, 1(8))

$$\frac{2x-1}{\log_2 x} < 0.$$

10.58. (МГУ, географический, 1974, 5(5))

$$\frac{\log_3(x+\frac{4}{5})}{\log_7(x^2-2x+\frac{7}{16})} < 0.$$

10.59. (МГУ, 2017, 4(8))

$$x^2\log_7^2 x + 3\log_6^2 x \le x\log_7 x\log_6 x^4.$$

10.60. (МГУ, экономический (менеджмент), 2008, 3(6))

$$x\cdot\log_2(4\cdot 4^x - 9\cdot 2^x + 6) > 2x.$$

10.61. (МГУ, экономический, 2007, 3(7))

$$\left(x^2 - \log_2\left(\frac{3^x}{5}\right) - \log_3(5^x)\right)\cdot\log_5(125\cdot 25^{x-3}) < 0.$$

10.62. (МГУ, мех-мат, май 1998, 2(6))

$$\frac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{\frac{1}{2}}(13-x)}{|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8|}\ge 0.$$

10.63. (МГУ, мех-мат, 2005, 2(6))

Найти $\log_2\frac{2x}{2^x}$ при условии

$$|\log_{\sqrt{2}} x^{\frac{x}{2}} - 2\log_2 x| + ||2-x| - |\log_2 x|| \le (x-2)\log_8 x^3.$$

10.64. (МГУ, химический, 2003, 3(6))

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2-|x-1|) > \log_{\sqrt{10}}(2x-x^2).$$

10.65.* (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2006, 4(10))

$$5^{\log_x 2}\cdot\log_2 x + 5^{\log_2 x}\cdot\log_x 2 \le 10.$$

Домашнее задание

10.66. (МГУ, географический, 1998, 1(6))

$$\frac{\sqrt{-4x^2+13x-3}+1}{\log_{3x} 7}\ge 0.$$

10.67. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 1(8))

$$(|x-1|+|2x-1|)\cdot\lg\left(\frac{\pi}{\sqrt{10}}\right)^{2x}\ge 0.$$

10.68. (МГУ, почвоведения, 1980, 4(4))

$$(4x^2-16x+7)\log_2(x-3) > 0.$$

10.69. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2007, 4(6))
$$(3x-4)\cdot\left(x^2-\left(\log_3 4+\frac{5}{4}\right)x+\frac{5\log_3 4}{4}\right)>0.$$

10.70. (МГУ, мех-мат, 2001, 1(6))
$$x\geq\log_2(101\cdot 10^x-10^{2+2x})-\log_5(101\cdot 2^x-5^{2+x}\cdot 2^{2+2x}).$$

10.71. (МГУ, мех-мат, март 2002, 1(6))
$$\log_{\sqrt{2}}(6-x-x^2)+\log_2(x^2-2x+1)+2>2\log_4(x^2-4x+3)^2.$$

10.72. (МГУ, мех-мат, май 2000, 1(6))
$$\log_{4x^2}x^2\cdot\log_{8x^4}x^4\leq 1.$$

10.73. (МГУ, мех-мат, март 2001, 2(6))
$$\frac{\log_{21+4x-x^2}(7-x)}{\log_{x+3}(21+4x-x^2)}<\frac{1}{4}.$$

10.74. (МГУ, биолого-почвенный, 1971, 5(5))
$$2\log_{\frac{1}{2}}(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)\geq 1.$$

10.75. (МГУ, экономический, 2008, 3(7))
$$x\cdot\log_2(4^{x+1}-2^{x+1}+8)<x^2+4x.$$

10.76. (МГУ, экономический, 1996, 2(6))
$$\frac{\log_7(19-16x|x|)-\log_{49}(1-4x)^2}{3-4x-|4x-3|}\leq 0.$$

10.77. (МГУ, геологический, 2005, 6(8))
$$\log_x\left(x+\frac{1}{3}\right)\leq\log_{\sqrt{2x+3}}\left(x+\frac{1}{3}\right).$$

10.78. (МГУ, мех-мат, май 1994, 4(6)) *"Тест"*

Найти все значения x, при которых наибольшее из чисел $3x-4$ и $\log_2(5\cdot 2^{2x-4}-2^{x-1}+1)$ положительно.

10.79. (МГУ, биологический, 2000, 4(5))
$$\log_4(16(x-2)^2)\cdot\log^2_{\frac{1}{16}}\frac{(x-2)^4}{64}-\tfrac{5}{4}\log_{64}(x^3-6x^2+12x-8)^2<\tfrac{15}{2}.$$

10.80.* (МГУ, биологический, 2002, 4(5))
$$\log_2^2|2x|-5\log_2|2x|+2|x|\log_2|2x|-4|x|+6\geq 0.$$

10.2 Неравенства с переменным основанием

Поскольку логарифмическая функция $\log_a x$ с основанием a, большим единицы, монотонно возрастает, а с основанием, меньшим единицы, монотонно убывает, то логарифмические неравенства с переменным основанием решаются путем рассмотрения двух случаев: 1) основание больше единицы; 2) основание от нуля до единицы. С учетом области допустимых значений имеем эквивалентную неравенству совокупность двух случаев:

$$\log_h f \geq \log_h g \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h > 1, \\ f \geq g > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h < 1, \\ 0 < f \leq g. \end{cases} \end{array}\right. \tag{1}$$

Такая схема решения наиболее часто используется в школе.

Решение системы (1) можно записать по-другому, если заметить, что на ОДЗ функция h больше или меньше единицы одновременно, когда и функция f больше или равняется или меньше или равняется функции g. Поэтому неравенство с переменным основанием можно решать и по формуле

$$\log_h f \geq \log_h g \iff \begin{cases} \dfrac{f-g}{h-1} \geq 0, \\ f > 0, \\ g > 0, \\ h > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Первое неравенство в (2) решается методом интервалов.

Ниже приводятся логарифмические неравенства, которые решаются по одной из указанных схем. Читатели могут самостоятельно выбрать наиболее удобную для себя схему решения. Однако отметим, что как правило решение по схеме (2) короче.

10.81. (МГУ, почвоведения, 2001, 3(6))

$\log_{x-2} x \leq \log_{x-2} 4.$ *"Решение"*

10.82. (МГУ, геологический, май 2003, 2(6))
$$\log_{-2-x}(-3-2x) \geq \log_{-2-x}\left(-\frac{3x}{2}\right).$$

10.83. $\log_{2x}(x^2-5x+6) \geq 1.$

10.84. (МГУ, почвоведения, 1989, 3(5))
$\log_{x+2}(2x^2+x) \leq 2.$ *"Тест"*

10.85. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 7(8))
$$\log_{(x+3)^2}(2x^2+9x+21) \geq \log_{(x+3)^2}(x^2-x).$$

10.86. (МГУ, психологический, 2006, 2(6))
$$\sqrt{\log_{(x-1)}(x-2)} < \sqrt{2}.$$

10.87. (МГУ, экономический (отд. экономики), 2006, 2(7))
$$\log_{13-2x}(x^2-x+1)\cdot\log_{7-x}(13-2x) < \log_{2x-1}(2-2x-(x-1)^2+x^2).$$

10.88. (МГУ, социологический, 2002, 2(6))
$$\log_{\frac{1}{5}\sqrt{x^3+x^2+x-14}}(\log_{\frac{1}{4}}(-x^2+5x-6)) < 0.$$

10.89. (МГУ, геологический, 2004, 5(8))
$$\log_{3-x}(x^2-10x+25) - 2\log_{3-x}(4x-x^2+5) + 2 \leq 0.$$

10.90. (МГУ, 2016, 4(8))
$$\log_{1-\log_3 x}(1+\log_x^2 3) \leq 1.$$

10.91.* (МГУ, ФНМ, 2001, 5(6))
$$\frac{1}{3}\log_{x+1}(x^3+2{,}5x^2+2{,}2x+0{,}685) \leq 1.$$

Домашнее задание

10.92. (МГУ, ВМиК, 2003, 1(6))
$$\log_{\left(\frac{3-x}{2}\right)}\left(\frac{6}{x+1}\right) \geq -1.$$

10.93. $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) \le 1.$

10.94. (МГУ, химический, 1966, 4(4))

$\log_x \left(x^2 - \dfrac{3}{16} \right) \ge 4.$ *"Тест"*

10.95. (МГУ, почвоведения, 1989, 3(5))

$\log_{x+1}(2x^2 - 3x + 1) \le 2.$

10.96. (МГУ, географический, 1989, 3(5))

$\log_{4-x}(x^2 - 10) < 2.$

10.97. (МГУ, географический, 1989, 3(5))

$\log_{10-x^2} \left(\dfrac{16}{5}x - x^2 \right) < 1.$

10.98. (МГУ, географический, 2005, 3(6))

$\log_{\sqrt{1-x}}(1 + 5x) \ge -2.$

10.99. (МГУ, химический, 1979, 4(5))

$\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 \ge 4.$

10.100. (МГУ, психологический, 2004, 2(5))

$\log_{\frac{x+1}{2x-6}} \left(\dfrac{x+6}{4} \right) \le 1.$

10.101. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 3(8))

$\log_{x-3}(5 - x) \le \log_{x-3} |4x - 14|.$ *"Тест"*

10.102. (МГУ, геологический, 2004, 5(8))

$\log_{5-x}(x^2 - 14x + 49) - 2\log_{5-x}(8x - x^2 - 7) + 2 \le 0.$

10.3 Показательно-логарифмические неравенства

10.103. (МГУ, физический, 1966, 1(5))
$x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} \le 1000.$

10.104. $x^{2\log_3 5} - 4 \cdot 5^{\log_3 x} - 5 \le 0.$ *"Решение"*

10.105. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2010", 1(10))
$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \le (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-(\log_3 2)^{2x-1}}.$$

10.106. (МГУ, 2018, 4(8)) *"Решение"*
$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \ge \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\,\right)^{\log_x(\sqrt{3}+\sqrt{2})}.$$

10.107. (МГУ, мех-мат, март 2004, 2(6))
$3^{\log_x(3x^2+2x-1)} \le (x^2+x)^{\log_x 9}.$

10.108. (МГУ, геологический, 2007, 5(8))
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_x\left(\log_2 \frac{x^2-2x}{2x-1}\right)} \le 1.$$

Домашнее задание

10.109. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} \ge 1.$

10.110. $x^{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 1} > \dfrac{1}{x}.$

10.111. (МГУ, физический, 1995, 5(8))
$4^{\log_2 x} + x^2 < 8.$

10.112. (МГУ, физический, 1981, 4(6))
$5^{\log_3 \frac{2}{x+2}} < 1.$

10.113. (МГУ, химический, май 2001, 5(7))
$2^{\lg(x^2-1)} \ge (x+1)^{\lg 2}.$

10.114. (МГУ, почвоведения, 2006, 3(7))
$(3\sqrt{x})^{\log_2 x} \geq 1.$

10.115. (МГУ, ВМиК, 1991, 3(6))
$49^{\log_x 5} - 7^{\log_x 5} - 2 \geq 0.$

10.116. $2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} \geq 2{,}5.$

10.117. (МГУ, геологический, 1997, 5(8))
$11^{\log_{\frac{1}{11}} \log_7 x} < 7^{\log_{\frac{1}{7}} \log_{11} x}.$

10.118. (МГУ, биологический, 1981, 4(5))
$(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1.$

10.119. (МГУ, мех-мат, март 2004, 2(6))
$5^{\log_{(x+1)}(3x^2+8x+4)} \geq (x^2+3x+2)^{\log_{(x+1)} 25}.$ *"Тест"*

10.4 Трансцендентные неравенства

10.120. (МГУ, почвоведения, 1990, 6(6))
$\log_2(2-3x) > 4x+1.$

10.121. $\log_{\frac{1}{3}}(3x-2) \geq x-1.$ *"Тест"*

10.122. (МГУ, психологический, 1972, 3(4))
Найти все целые решения неравенства $x - 1 < \log_6(x+3)$.

10.123.* (МГУ, филологический, 1987, 5(5))
$$\frac{9}{3x+2} > \frac{1+\log_3(x+6)}{x}.$$

Домашнее задание

10.124. (МГУ, почвоведения, 1990, 6(6))
$\log_2(x+2) > 1 - x.$

10.125. $\log_3(2-x) \leq x-1.$ *"Тест"*

10.126.* (МГУ, психологический, 1973, 4(4))
Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству
$$3^{\frac{5}{2}\log_3(12-3x)} - 3^{\log_2 x} > 83.$$

Ответы, указания, решения

5.1. $0; 4$.

5.2. *Решение.* По схеме п. 5.1

$$\sqrt{3x+10} = x+2 \iff \begin{cases} 3x+10 = (x+2)^2, \\ x+2 \geq 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x+10 = x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2+x-6=0, \\ x \geq -2, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-3;\ 2, \\ x \geq -2, \end{cases} \iff x=2.$$

Ответ. 2.

5.3. $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$. **5.4.** $-\sqrt{5}$. **5.5.** $-1; 2$. **5.6.** $-\dfrac{23}{4}; -1; 1; 6$. **5.8.** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **5.9.** 2. **5.10.** 3. **5.11.** $\emptyset$. **5.12.** 4. **5.13.** -1. **5.14.** $-\dfrac{5}{8}$. **5.15.** 0. **5.16.** 0. **5.17.** $\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}$. **5.18.** $-3; 2$. **5.20.** $-\sqrt{3}$. **5.22.** $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **5.23.** 0. **5.24.** 7. **5.26.** 2. **5.27.** 10. **5.28.** 5. **5.29.** $3 \pm \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. **5.31.** 1. **5.32.** $\emptyset$. **5.33.** $\emptyset$. **5.34.** $\emptyset$. **5.35.** $\emptyset$. **5.36.** 0. **5.37.** $\emptyset$. **5.38.** $[-1; 3]$. **5.39.** $\dfrac{7}{3}$. **5.40.** $1 \pm 2\sqrt{3}$. **5.42.** 3. **5.43.** 4. **5.44.** $-\dfrac{1}{11}$. **5.45.** 0. **5.46.** 2. **5.47.** $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$. **5.48.** $\dfrac{22}{9}; 6$. **5.49.** 8. **5.50.** $\dfrac{73}{32}$. **5.51.** $-\dfrac{47}{24}$. **5.52.** $-1; 0$. **5.53.** $-8, 27$.

5.54. *Решение.* В уравнении

$$\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$$

обозначим[6] $\sqrt{3x^2+5x+1} = t \geq 0$. Тогда $3x^2+5x+1 = t^2 \Leftrightarrow 3x^2+5x+8 = t^2+7 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+5x+8} = \sqrt{t^2+7}$. Получим уравнение относительно t, которое решим при $t \geq 0$, а потом вернемся к x:

[6] В этой задаче можно делать различные замены, но наиболее простое, на наш взгляд, решение задачи бывает, если за новую переменную брать целиком весь корень.

$$\sqrt{t^2+7}-t=1 \iff \sqrt{t^2+7}=t+1 \overset{t\geq 0}{\iff} t^2+7=t^2+2t+1$$
$$\iff t=3 \iff \sqrt{3x^2+5x+1}=3 \iff 3x^2+5x+1=9$$
$$\iff 3x^2+5x-8=0 \iff x=-\frac{8}{3};\,1.$$

Ответ. $-\frac{8}{3}$; 1.

5.55. $\frac{1}{2}$. **5.56.** 0; 3. **5.57.** 2; 3; 5; 6. **5.59.** 1.
5.61. $1+\left(1\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}\right)^4$. **5.62.** $\frac{5}{4}$; $\frac{5}{3}$. **5.63.** $-\frac{27}{8}$; 1.
5.64. -25. **5.65.** $-\frac{2}{3}$; 1; 2; $\frac{11}{3}$. **5.66.** -2; 6. **5.67.** -4; 1.
5.68. $-\frac{1}{2}$; 1. **5.69.** $-\frac{1}{3}$. **5.70.** 1. **5.71.** 0, 2, 13, 15.
5.73. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **5.74.** 3; 5. **5.75.** $\frac{18}{7}$. **5.76.** 2. **5.77.** $\frac{9-\sqrt{181}}{6}$; 4.
5.79. 3; 18. **5.80.** -73; -8. **5.81.** $\frac{-50-\sqrt{73}}{14}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$. **5.82.** -1; 7.

5.83. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$. *Решение.* Преобразуя подкоренные выражения, заметим, что под знаком квадратного корня в обоих случаях стоят полные квадраты.

$$\sqrt{x+1-4\sqrt{x+1}+4}+\sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1}=1$$
$$\iff \sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}=1.$$

Извлекая квадратные корни и ставя модули, получим уравнение
$$|\sqrt{x+1}-2|+|\sqrt{x+1}-1|=1.$$
Обозначим $t=\sqrt{x+1}$. Имеем уравнение
$$|t-2|+|t-1|=1,$$
которое решается по схеме решения уравнений с несколькими отдельно стоящими модулями (см. п. 3.3).

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} t\leq 1,\\ -t+2-t+1=1 \Leftrightarrow -2t=-2 \Leftrightarrow t=1,\end{cases} \Leftrightarrow t=1,\\
\begin{cases} 1\leq t\leq 2,\\ -t+2+t-1=1 \Leftrightarrow 0=0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\end{cases} \Leftrightarrow 1\leq t\leq 2, \\
\begin{cases} t\geq 2,\\ t-2+t-1=1 \Leftrightarrow 2t=4 \Leftrightarrow t=2,\end{cases} \Leftrightarrow t=2,
\end{array}\right. \iff 1\leq t\leq 2.$$

Следовательно, относительно x получим неравенство

$$1 \le \sqrt{x+1} \le 2 \iff 1 \le x+1 \le 4 \iff 0 \le x \le 30.$$

Ответ. $[0;\,3]$.

5.85. $\dfrac{9}{4}$. **5.86.** $[5;\,10]$. **5.87.** $\left[\dfrac{3}{2};\,3\right]$. **5.88.** 1. **5.89.** $8; 8 \pm 12\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.
5.90. $-61;\,30$. **5.92.** $5;6;7$. **5.93.** $-5;\,2$. **5.94.** 6. **5.95.** $-\dfrac{1}{5}$.
5.96. $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$. **5.97.** 1. **5.98.** 7. **5.99.** 3. **5.100.** $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2-\sqrt{690}}{49}$.
5.101. $\emptyset$. **5.102.** 1. **5.103.** $4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$. **5.104.** 8. **5.105.** 1.
5.106. 0. **5.107.** $(11,\,5)$. **5.108.** -2. **5.109.** 7.
5.110. $-\dfrac{1}{3}$. **5.112.** $1; \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **5.113.** $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$.
5.114. -1. **5.115.** $(x,y) = \left(\dfrac{3d+8}{6}, \dfrac{3d}{2}\right)$, $d \in \mathbb{R}$. **5.116.** 5.

5.117. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\,\bigl(8+4\sqrt{3}\,\bigr)$. *Решение.* Представим выражение под знаком корня как квадрат разности:

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}\,(8+4\sqrt{3}\,) = \sqrt{4-4\sqrt{3}+3}\,(8+4\sqrt{3}\,) =$$

$$= \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}\,(8+4\sqrt{3}\,) = |2-\sqrt{3}| \cdot 4\bigl(2+\sqrt{3}\,\bigr) =$$

(поскольку $2-\sqrt{3} > 0$, то модуль раскрывается со знаком плюс)

$$= 4(2-\sqrt{3}\,)\bigl(2+\sqrt{3}\,\bigr) = 4(4-3) = 4.$$

Ответ. 4.

5.118. -10. **5.119.** 1. **5.120.** 3. **5.121.** 70. **5.122.** -1.
5.123. $13+5\sqrt[3]{2}+11\sqrt[3]{4}$. **5.124.** 2. **5.125.** 0 при $x>0$.
5.126. $\dfrac{a(b-a)}{a+b}$; 3,75. **5.127.** $\sqrt{bc}+1$ при $a,b,c \ge 0$, $a+c \ne 0$.
5.128. -20. **5.129.** 2. **5.130.** 2. **5.131.** -2. **5.132.** 0.
5.134. $\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$. **5.135.** $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\sqrt{2}+2}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{2}$.
5.136. $(9,1)$. **5.137.** $\left(\dfrac{5}{16}, -\dfrac{3}{16}\right)$; $\left(\dfrac{5}{16}, \dfrac{13}{16}\right)$. **5.138.** $(1,1)$.
5.139. $(74-14\sqrt{22}, -27+4\sqrt{22})$. **5.140.** $(-9,-5)$. **5.141.** $(2,1)$.

5.142. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. **5.143.** $(-2, -2)$. **5.144.** $(1, 1)$; $\left(\frac{5}{2}, -2\right)$.
5.145. $(26, -6)$; $(-9, 29)$. **5.146.** $(-49 + 12\sqrt{12},\ -6 + \sqrt{12}\,)$.
6.1. $\left[-\frac{1}{2};\ 4\right)$.

6.2. *Решение.* Решаем неравенство по схеме п. 6.1

$$\sqrt{x-1} < 3 - x \iff \begin{cases} x-1 < (3-x)^2, \\ 3 - x > 0, \\ x - 1 \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x-1 < x^2 - 6x + 9, \\ x < 3, \\ x \geq 1, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 7x + 10 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ 5 < x, \end{array}\right. \\ 1 \leq x < 3, \end{cases}$$

$$\iff 1 \leq x < 2.$$

Ответ. $[1;\ 2)$.

6.4. -1; 3. **6.5.** $[2;\ +\infty)$. **6.6.** $(2;\ +\infty)$. **6.7.** $[4;\ +\infty)$.
6.8. $(-\infty;\ -2] \bigcup \left[5;\ \frac{74}{13}\right)$. **6.9.** $\{1\} \cup [2;\ +\infty)$.
6.11. При $x = -7$ $y = 5$. **6.12.** $\left[0;\ \frac{1}{11}\right) \bigcup (4;\ +\infty)$.
6.13. $\left(1;\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$. **6.14.** $\left[-3;\ -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{\sqrt{2}};\ 0\right) \bigcup (0;\ 3]$.
6.15. $\left[-5 + \sqrt{23};\ -\frac{1}{8}\right] \bigcup \left[\frac{3}{8};\ 3 - \sqrt{5}\right] \bigcup [3 + \sqrt{5};\ +\infty)$.
6.16. $\left[\frac{2}{3};\ \frac{4}{5}\right)$. **6.17.** $[4;\ 4{,}5) \cup (4{,}5;\ 5)$.

6.18. *Решение.* По схеме (3) п. 6.2

$$\sqrt{x^2 + x - 2} > x \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 2 > x^2, \\ x < 0, \end{array}\right. \\ x^2 + x - 2 \geq 0, \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < 0, \end{array}\right. \\ (x+2)(x-1) \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty;\ 0) \cup (2;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ -2] \cup [1;\ +\infty). \end{cases}$$

Ответ. $(-\infty;\ -2] \cup (2;\ +\infty)$.

6.20. $\left(\frac{3}{4};\,7\right]$. **6.22.** $[0;\,4]$. **6.23.** $[-2;\,-1]$. **6.24.** $[-1;\,7]$.
6.25. $[-46;\,3)$. **6.27.** $(-\infty;\,-2]$. **6.28.** $[-3;\,1)$. **6.29.** $(3;\,5]$.
6.31. $\left[-3;\,\frac{-5+\sqrt{41}}{4}\right]$. **6.32.** $\left(-\infty;\,\frac{2-3\sqrt{2}}{2}\right]\bigcup(4;\,+\infty)$.
6.33. $(-\infty;\,-5]\bigcup\left[1;\,\frac{8+\sqrt{22}}{3}\right)$. **6.34.** $[1;\,3)$.
6.35. $(-\infty;\,-2]\cup(0;\,+\infty)$. **6.36.** $\left(\frac{4}{7};\,\frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$.
6.37. $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{8}\right)$. **6.38.** $(2;2\sqrt{2}]$. **6.39.** $\left(\frac{\sqrt{13}-5}{2};1\right]$.
6.41. $[2;3]$. **6.42.** $(-\infty;\,-1998]\cup[1996;\,\infty)$. **6.43.** $\{0\}\bigcup\left[2;\,\frac{12}{5}\right]$.
6.45. $\left[3;\,\frac{11+\sqrt{61}}{2}\right]$. **6.46.** $\left[0;\,\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$. **6.47.** $\left(\frac{4-\sqrt{3}}{2};\,3\right]$.
6.49. -3. **6.50.** $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$. **6.51.** $[5;10]$. **6.52.** $\left[\frac{14+\sqrt{7}}{2};9\right]$.
6.54. $\left[\frac{19}{3};\,9\right)$. **6.55.** $\left(\sqrt{\frac{28}{3}};\,+\infty\right)$. **6.56.** $\left[\frac{-1-2\sqrt{29}}{5};\,2\right]$.
6.57. $(-\infty;\,-2]\bigcup\left[-1;\,\frac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$. **6.58.** $\left[4;\,\frac{13}{2}\right)$.
6.59. $(-\infty;\,1)\bigcup\left\{\frac{13}{3}\right\}\bigcup[10;\,+\infty)$. **6.60.** $[-2;\,4]\cup[5;\,+\infty)$.

6.61. $\frac{\sqrt{4x-2}-1}{\sqrt{3x-1}-1}>1$. *Решение.* Перенесем единицу в левую часть неравенства и приведем слагаемые к общему знаменателю:

$$\frac{\sqrt{4x-2}-1}{\sqrt{3x-1}-1}-1>0 \iff \frac{\sqrt{4x-2}-1-\sqrt{3x-1}+1}{\sqrt{3x-1}-1}>0$$

$$\iff \frac{\sqrt{4x-2}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x-1}-1}>0 \iff \begin{cases} \dfrac{(4x-2)-(3x-1)}{(3x-1)-1}>0, \\ 4x-2\geq 0, \\ 3x-1\geq 0, \end{cases}$$

(поскольку знак разности $\sqrt{f}-\sqrt{g}$ совпадает со знаком разности $f-g$ на области неотрицательности подкоренных выражений)

$$\iff \begin{cases} \dfrac{x-1}{3x-2} > 0, \\ x \geq \dfrac{1}{2}, \\ x \geq \dfrac{1}{3}, \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \Big(-\infty;\ \dfrac{2}{3}\Big) \bigcup (1;\ +\infty), \\ x \geq \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\iff x \in \Big[\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\Big) \bigcup (1;\ +\infty).$$

Ответ. $\Big[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{2}{3}\Big) \bigcup (1;\ +\infty)$.

6.62. $\Big(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2}\Big]$. **6.63.** $(-\infty;\ 0) \cup [1;\ 2]$. **6.64.** $[-3;\ 0) \cup (0;\ \sqrt{10}]$.

6.65. $\Big[-7; -\dfrac{3}{4}\Big) \bigcup \Big[\dfrac{1}{2}; 2\Big)$. **6.67.** $[-3;\ 6] \cup (8; +\infty)$. **6.68.** $[-3;\ 6]$.

6.69. $[-2; 4]$. **6.71.** $[-5;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$. **6.72.** $(-\sqrt{13}; 1] \cup [2; \sqrt{13})$.

6.73. $[-6; 0) \cup (3; 4]$. **6.74.** $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2) \bigcup \Big[\dfrac{8+\sqrt{10}}{3}; +\infty\Big)$.

6.75. $\Big[-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}; 0\Big) \bigcup \Big(0; \dfrac{1}{3}\Big)$. **6.76.** $(-\infty; -7) \cup (-5; -3] \cup [2; +\infty)$.

6.78. $\Big[-\dfrac{3}{2};\ -1\Big) \bigcup (1;\ 2]$. **6.79.** $\Big(0;\ \dfrac{45}{8}\Big)$. **6.80.** $[-2;\ -1) \cup [0;\ 1]$.

6.84. $\{0\} \cup (16;\ +\infty)$.

6.85. $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$.

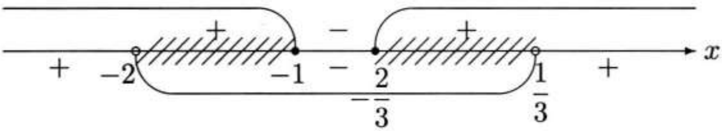
Решение. Обозначим $\sqrt{3x^2 + 5x + 2} = t \geq 0$. Тогда $3x^2 + 5x + 2 = t^2$ $\Leftrightarrow 3x^2 + 5x + 7 = t^2 + 5$. Решим полученное неравенство относительно t, а затем найдем x:

$$\sqrt{t^2+5} - t > 1 \iff \sqrt{t^2+5} > t + 1 \overset{t \geq 0}{\iff} t^2 + 5 > t^2 + 2t + 1$$

$$\iff 4 > 2t \iff t < 2 \iff \sqrt{3x^2 + 5x + 2} < 2 \iff$$

$$0 \leq 3x^2 + 5x + 2 < 4 \iff \begin{cases} 3x^2 + 5x + 2 \geq 0, \\ 3x^2 + 5x - 2 < 0, \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 3(x+1)\Big(x + \dfrac{2}{3}\Big) \geq 0, \\ 3(x+2)\Big(x - \dfrac{1}{3}\Big) < 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -1, \\ -\dfrac{2}{3} \leq x, \end{array} \right. \\ -2 < x < \dfrac{1}{3}, \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} -2 < x \leq -1, \\ -\dfrac{2}{3} \leq x < \dfrac{1}{3}. \end{array} \right.$$



Ответ. $(-2;\,-1]\bigcup\left[-\frac{2}{3};\,\frac{1}{3}\right)$.

6.86. $[-5;\,20)$.

6.87. $\left[\frac{27-4\sqrt{66}}{9};\,\frac{8-\sqrt{85}}{3}\right]\bigcup\left[\frac{17+\sqrt{349}}{6};\,\frac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]$.

6.88. $[0;\,81)$. **6.89.** $(-\infty;\,-8)\cup(8;\,+\infty)$. **6.90.** $(-\infty;\,2\sqrt{5}-4)$.

6.91. $(-\infty;\,1)\cup[2;\,+\infty)$. **6.92.** $(4;\,+\infty)$.

6.93. $(-\infty;\,-3]\cup[1;\,+\infty)$. **6.94.** $(-\infty;\,-1)\bigcup\left[\frac{5}{3};\,+\infty\right)$.

6.96. $(-\infty;\,-2)\cup(0;\,+\infty)$. **6.97.** $(1;\,2)\cup(10;\,+\infty)$. **6.98.** $[1;\,2]$.

6.100. $\left\{-\frac{4}{3}\right\}\bigcup[-1;\,0]$. **6.101.** $[3;\,6)\bigcup\left(6;\,\frac{133}{2}-11\sqrt{6}\right)$.

6.102. $(1;\,+\infty)$. **6.103.** $\left[-7;\,-6+\sqrt{4\sqrt{5}-8}\right)$.

6.104. $\left[3;\,\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\bigcup\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2};\,+\infty\right)$. **6.105.** 3. **6.106.** $\frac{2}{3}$.

6.107. $(-\infty;\,-\sqrt{7})\cup(\sqrt{7};\,9]$. **6.109.** 2. **6.110.** $(1;\,+\infty)$.

6.111. $[0;\,5]$. **6.112.** $\left(\frac{17}{3};\,+\infty\right)$. **6.113.** $\left[-5;\,-4+\sqrt{4\sqrt{5}-8}\right)$.

6.114. $(-4;\,-3+2\sqrt{\sqrt{5}-2}]$. **6.115.** $(-\infty;\,-5)\cup(-5;\,-4)$ $\cup(-4;\,-3)\bigcup\left(-3;\,-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\bigcup\left[\frac{1+\sqrt{7}}{3};\,+\infty\right)$.

6.116. -1. **6.117.** 2. **6.118.** 1.

7.1. $\sqrt{3^x}\cdot\sqrt{5^x}=225$. *Решение.* Приведем обе части уравнения к одному основанию. Удобно привести к основанию 15.

$$(3^x)^{\frac{1}{2}}\cdot(5^x)^{\frac{1}{2}}=225\iff 3^{\frac{x}{2}}\cdot 5^{\frac{x}{2}}=225$$

$$\iff 15^{\frac{x}{2}}=15^2\iff \frac{x}{2}=2\iff x=4.$$

Ответ. 4.

7.2. 0; $\sqrt[9]{100\,000}$. **7.3.** $-2+\sqrt{4-2\log_3 5}$. **7.4.** 0. **7.5.** $\frac{1}{4}$. **7.6.** $\frac{3}{5}$.

7.7. $\log_3\frac{9}{2}$. **7.8.** 3. **7.9.** -2. **7.10.** -5; $\frac{93}{11}$. **7.11.** $\frac{5}{3}$. **7.13.** $2^{\frac{3}{\sqrt{2}}}$. **7.14.** 4.

7.15. $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$. *Решение.* Преобразуем исходное уравнение к уравнению относительно $2^{\sqrt{3x^2-2x}}$. Получим

$$2^{2\sqrt{3x^2-2x}+2}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}.$$

Обозначим $2^{\sqrt{3x^2-2x}}=t>0$. Тогда относительно t получим квадратное уравнение, решая которое находим t, а затем и x.

$$4t^2-9t+2=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{4}, \\ t=2, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 2^{\sqrt{3x^2-2x}}=\dfrac{1}{4}=2^{-2}, \\ 2^{\sqrt{3x^2-2x}}=2, \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x^2-2x}=-2, \\ \sqrt{3x^2-2x}=1, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x\in\emptyset, \\ 3x^2-2x=1, \end{array}\right.$$

$$\iff 3x^2-2x-1=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{3}, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ. $-\dfrac{1}{3}$; 1.

7.16. 2. **7.18.** ± 1. **7.19.** 2. **7.20.** 2. **7.21.** $\pm\dfrac{1}{2}$. **7.22.** $\log_4(4+3\sqrt{2})$.
7.23. 1. **7.24.** 0. **7.25.** -1; $\dfrac{2}{3}$. **7.26.** $1+\log_4(3-\sqrt{7})$; 2.
7.27. $\log_3\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\log_3(2+\sqrt{5})$. **7.28.** 0. **7.30.** ± 1.
7.31. $6\cdot 9^x-13\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$6\cdot 3^{2x}-13\cdot 3^x\cdot 2^x+6\cdot 2^{2x}=0.$$

Это однородное уравнение. (Действительно, если обозначим $3^x=u$, $2^x=v$, то получим однородный многочлен второй степени $6u^2-13uv+6v^2$.) Разделим обе части уравнения на 2^{2x}. Получим

$$6\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+6=0.$$

Обозначим $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=t>0$. Тогда относительно t получаем квадратное уравнение, решая которое находим t, а затем и x.

$$6t^2-13t+6=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2}, \\ t=\dfrac{2}{3}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{3}{2}, \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{2}{3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}, \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Ответ. ± 1.

7.32. $\log_{\frac{5}{4}}\dfrac{1}{4}$. **7.33.** $\log_{\frac{5}{2}}\dfrac{1}{2}$, $\log_{\frac{5}{2}}3$. **7.34.** 0; ± 1. **7.35.** $\dfrac{1}{2}$.
7.36. $\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$. **7.37.** $\dfrac{8}{7}$; $x=\log_{\frac{5}{2}}\dfrac{1}{4}$. **7.38.** $-\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{1}{2}$; 1; 3.
7.39. $\dfrac{1}{3}$; 2; 4. **7.41.** 5. **7.42.** 2. **7.43.** 2. **7.44.** 2. **7.45.** 1.
7.46. Нет решений. **7.47.** $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{2}$. **7.48.** 1. **7.49.** 1. **7.50.** 2. **7.51.** 2.
7.52. 2. **7.53.** 3. **7.54.** 1. **7.56.** $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. **7.57.** $(-1,-3)$; $(3,-3)$.
7.58. $\left(\log_2(-2+\sqrt{6}), \log_3\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right)$. **7.59.** $(1, \log_3 2)$.
7.60. $(-17, \log_2 10)$. **7.61.** $(-1, 1)$. **7.62.** $(-2,-1)$.
7.63. $(2, 1)$. **7.64.** $(\log_7 3, 2)$; $\left(\log_7\dfrac{5}{3}, -1\right)$.
7.65. $\left(0, \log_2\dfrac{8}{11}\right)$; $\left(\dfrac{1}{3}\log_2\dfrac{3+\sqrt{8}}{2}, \log_2\dfrac{4}{3+\sqrt{8}}\right)$.

8.1. $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{8}; +\infty\right)$.

8.2. $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}\right)^{x^2}\geq 1$. *Решение.* Единицу заменяем как $\left(\dfrac{3}{7}\right)^0$.
Основание $\frac{3}{7}$ меньше 1, поэтому знак неравенства для степеней меняется на противоположный. Далее полученное дробно-рациональное неравенство решаем методом интервалов:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2}{x^2-x}}\geq\left(\frac{3}{7}\right)^0 \iff \frac{x^2}{x^2-x}\leq 0$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}\leq 0, \\ x\neq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 0\leq x<1, \\ x\neq 0, \end{cases} \iff 0<x<1.$$

Ответ. $(0; 1)$.

8.3. $(0;\,3)\bigcup\left[\dfrac{9}{2};\,+\infty\right)$. **8.5.** $(-\infty;\,0)$. **8.6.** $(-\log_2 6;\,1)$.
8.7. $(-\infty;\,-3]\cup\{5\}$. **8.8.** $[1;\,+\infty)$. **8.10.** $[-4;\,-2)\cup(0;\,+\infty)$.
8.11. $\left[\dfrac{1}{4};\,+\infty\right)$. **8.12.** $(-\infty;\,-12)\bigcup\left(-\dfrac{1}{6};\,0\right)\bigcup\left(\dfrac{1}{6};\,+\infty\right)$.
8.13. $(-\sqrt{5};\,\sqrt{5}\,)$. **8.14.** $(3;\,+\infty)$. **8.15.** $\left(-\infty;\,\dfrac{3}{2}\right)$.
8.16. $\left(0;\,\dfrac{1}{2}\right]\bigcup[3;\,+\infty)$. **8.18.** $\left[\log_{72}54;\,\log_{\frac{8}{9}}\dfrac{2}{3}\right]$. **8.19.** $x\neq 0$.
8.20. $(0;\,1)$. **8.21.** $(-\sqrt{7};\,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3};\,\sqrt{7})$. **8.22.** $\dfrac{1}{2}$. **8.23.** $[0;\,1]$.
8.24. $\left(-\infty;\,\log_2\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\bigcup\left[\log_2\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\,+\infty\right)$.
8.25. $(-\infty;\,\log_2 3)$. **8.26.** $(-\infty;\,-1)\cup(1;\,+\infty)$.
8.27. $\left(-\infty;\,\log_3\dfrac{2}{3}\right)\bigcup(2;\,+\infty)$. **8.28.** $\left(\dfrac{1}{2};\,+\infty\right)$.
8.29. $(-\infty;\,0)\bigcup\left[\dfrac{1}{2};\,\infty\right)$. **8.30.** $(2;\,+\infty)$. **8.32.** $(-1;\,1]$.
8.33. $(0;\,\log_2 3\,]$. **8.34.** $\left(-\infty;\,\log_3\dfrac{1}{2}\right]\bigcup\left[\,\log_3\dfrac{3}{5};\,\log_3\dfrac{5}{3}\right)$.
8.35. -2. **8.36.** $(3;\,+\infty)$. **8.37.** $(0;\,+\infty)$.
8.38. $\left(-\infty;\,\log_3\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]\bigcup[\log_3(2+\sqrt{5}\,);\,+\infty)$.

8.39. $(\sqrt{5}+2)^{x-1}\geq(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Решение. Заметим, что основания степеней, т.е. числа $\sqrt{5}+2$ и $\sqrt{5}-2$ являются взаимно обратными. В самом деле, легко убедиться непосредственным перемножением, что

$$(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=(\sqrt{5})^2-2^2=5-4=1.$$

Следовательно, $\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=(\sqrt{5}+2)^{-1}$. Подставляя вместо $\sqrt{5}-2$ в исходное неравенство равную ей величину $(\sqrt{5}+2)^{-1}$, получим

$$(\sqrt{5}+2)^{x-1}\geq(\sqrt{5}+2)^{-\frac{x-1}{x+1}}\iff$$

$$x-1\geq-\frac{x-1}{x+1}\iff x-1+\frac{x-1}{x+1}\geq 0\iff$$

$$(x-1)\left(1+\frac{1}{x+1}\right) \geq 0 \iff \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} \geq 0$$

$$\iff x \in [-2;\ -1) \cup [1;\ +\infty).$$

Ответ. $[-2;\ -1) \cup [\,1;\ +\infty)$.

8.40. $(-1;\ 2\,] \cup [\,3;\ +\infty)$. **8.41.** $(-\infty;\ 0)$.

8.42. $\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$. **8.43.** $(-\infty;\ 1] \cup [\,2;\ +\infty)$.

8.44. $(-\infty;\ \log_{6+\sqrt{10}} 9] \cup [\log_{6-\sqrt{10}} 3;\ +\infty)$.

8.45. $\left(\dfrac{1}{2}\log_5 6;\ \log_6 5\right)$. **8.46.** $\left(\dfrac{3}{7};\ \dfrac{1}{2}\right) \bigcup (1;\ +\infty)$.

8.47. $\{2\} \cup [\,\log_2 5;\ +\infty)$.

8.48. $(-3;\ -\sqrt{\log_4 5}\,] \cup (1;\ \sqrt{\log_4 5}\,]$. **8.49.** $\{1\} \cup (3;5\,]$.

8.51. $\left(-1;\ -\dfrac{2}{3}\right) \bigcup \left(-\log_3 2;\ \dfrac{1}{3}\right]$. **8.53.** $\left(\dfrac{1}{2}\log_4 5;\ \log_5 4\right)$.

8.54. $4^x - 2\cdot 5^{2x} - 10^x > 0$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$2^{2x} - 2\cdot 5^{2x} - 5^x\cdot 2^x > 0 \iff 2\cdot 5^{2x} + 5^x\cdot 2^x - 2^{2x} < 0.$$

Это однородное неравенство. Разделим обе части неравенства на 2^{2x}. Получим

$$2\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{x} - 1 < 0.$$

Обозначим $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x} = t > 0$. Тогда относительно t получаем квадратное неравенство, которое решаем относительно t, а затем возвращаемся к переменной x.

$$2t^2 + t - 1 < 0 \iff 2(t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right) < 0 \iff -1 < t < \frac{1}{2} \iff$$

$$-1 < \left(\frac{5}{2}\right)^{x} < \frac{1}{2} \iff \left(\frac{5}{2}\right)^{x} < \frac{1}{2} \iff x < \log_{\frac{5}{2}} \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\left(-\infty;\ \log_{\frac{5}{2}} \dfrac{1}{2}\right)$.

8.55. $(-\infty;\ -1\,]\cup(0;\ +\infty)$. **8.57.** $[\,\log_{50}8;\ \log_{50}9)$.

8.58. $\left(-\infty;\ -\log_{\frac{5}{2}}2\right]\bigcup\left[\log_{\frac{5}{2}}2;\ +\infty\right)$. **8.59.** $[2;\ 18)$.

8.60. $\left[\log_{\frac{2}{3}}\sqrt{17};\ +\infty\right)$. **8.61.** $\left[0;\ \log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3}\right)\cup\left(\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3};\ 1\right]$.

8.62. $(-\infty;\ 0\,]\cup[\,\log_{\frac{4}{3}}4;\ \log_{\frac{4}{3}}7\,]\cup[\,\log_{\frac{4}{3}}12;\ +\infty)$.

8.63. $\left(-\infty;\ \log_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\dfrac{3}{2}\right]\bigcup(0;\ +\infty)$.

8.64. $x^{3x+7}>x^{12}$.

Решение. Неравенство эквивалентно системе:

$$\begin{cases}(x-1)(3x+7-12)>0,\\ x>0,\end{cases}\iff\begin{cases}(x-1)(3x-5)>0,\\ x>0,\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x\in(-\infty;\ 1)\cup\left(\dfrac{5}{3};\ +\infty\right),\\ x>0.\end{cases}$$

Ответ. $(0;\ 1)\bigcup\left(\dfrac{5}{3};\ +\infty\right)$.

8.65. $(2;\ +\infty)$. **8.66.** $(2;\ 3\,]\cup[5;\ +\infty)$. **8.67.** $\{0\}\cup[\,\lg^{15}6;\ +\infty)$.

8.68. $(-\infty;\ 0\,]\cup[\,2;\ 3)\bigcup\left(3;\ \dfrac{7}{2}\right]\bigcup[\,4;\ \infty)$.

8.70. $\left(-\infty;\ \dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}\right]\bigcup\left[\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2};\ +\infty\right)$.

8.71. $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_4 3,\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\log_4 3\right)$. **8.72.** $(-\infty;\ 0)\cup(\log_3 2;\ 1)$.

8.73. 0. **8.74.** $\left(\dfrac{7}{9};\ +\infty\right)$. **8.75.** $(0,1);\ (0,-1)$.

8.76. $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\log_3 2,\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\log_3 2\right)$.

9.1. *Решение.* Имеем

$$\log_5(x-1)=\log_5\frac{x}{x+1}\iff\begin{cases}x-1=\dfrac{x}{x+1},\\ x-1>0,\end{cases}\iff$$

$$\begin{cases}x^2-1=x,\\ x>1,\end{cases}\iff\begin{cases}x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2},\\ x>1,\end{cases}\iff x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

9.3. 2. **9.4.** $\frac{1}{2}$. **9.5.** 1. **9.6.** $-2+\sqrt{3}$. **9.7.** 8. **9.8.** 2.

9.10. $\log_2(1-3x) = \log_4(5x-1)$.

Решение. Перейдем во втором логарифме к основанию 2:

$$\log_2(1-3x) = \frac{\log_2(5x-1)}{\log_2 4} \iff \log_2(1-3x) = \frac{\log_2(5x-1)}{2}$$

$$\iff \log_2(1-3x) = \log_2(5x-1) \iff \begin{cases} (1-3x)^2 = 5x-1, \\ 1-3x > 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1-6x+9x^2 = 5x-1 \Leftrightarrow 9x^2-11x+2=0, \\ x < \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{2}{9};\, 1, \\ x < \dfrac{1}{3}, \end{cases} \iff x = \frac{2}{9}.$$

Ответ. $\frac{2}{9}$.

9.11. 64. **9.12.** 3. **9.13.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 4. **9.15.** 1. **9.16.** $\frac{7}{5}$. **9.17.** -5; 11.

9.20. 2. **9.21.** $-2\frac{2}{3}$. **9.22.** 8. **9.23.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$.

9.24. $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2 = 4$.

Решение. Вынесем степень 2 за знак логарифма. Затем представим правую часть уравнения в виде логарифма.

$$2\log_{x+1}|x^2+x-6| = 4 \iff$$

$$\log_{x+1}|x^2+x-6| = 2 \ (= \log_{x+1}(x+1)^2) \iff$$

$$\begin{cases} |x^2+x-6| = (x+1)^2, \\ x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+x-6 = (x+1)^2, \\ x^2+x-6 = -(x+1)^2, \end{array} \right. \\ x > -1,\ x \neq 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -7, \\ 2x^2+3x-5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2};\, 1, \end{array} \right. \\ x > -1,\ x \neq 0, \end{cases} \iff x = 1.$$

Ответ. 1.

9.25. $1+\sqrt{3}$. **9.26.** $\dfrac{\sqrt{5}-3}{3}$. **9.27.** $\sqrt{17}-4$. **9.29.** 1.

9.30. $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

Решение. Перейдем в логарифмах к одному основанию 3:

$$\log_{12} 3 \cdot \log_9 12 = \frac{1}{\log_3 12} \cdot \frac{\log_3 12}{\log_3 9} = \frac{1}{\log_3 3^2} = \frac{1}{2};$$

или 12:

$$\log_{12} 3 \cdot \log_9 12 = \log_{12} 3 \cdot \frac{1}{\log_{12} 9} = \log_{12} 3 \cdot \frac{1}{2\log_{12} 3} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

9.32. 5. **9.33.** $-\dfrac{17}{6}$. **9.34.** 28. **9.35.** 138. **9.36.** $\dfrac{5-8a}{6a+3}$.
9.37. $\dfrac{20\sqrt{5}-3}{60+18\sqrt{5}}$. **9.38.** 15. **9.39.** 216. **9.40.** $\dfrac{5}{9}$. **9.42.** $\sqrt[3]{45}$
9.43. $\dfrac{5}{4}$. **9.44.** $\dfrac{1}{3}$; 9.

9.45. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$. *Решение.* По основному логарифмическому тождеству $x = 3^{\log_3 x}$, следовательно, $3^{\log_3^2 x} = (3^{\log_3 x})^{\log_3 x} = x^{\log_3 x}$ и мы приходим к уравнению:

$$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162 \iff 2x^{\log_3 x} = 162 \iff x^{\log_3 x} = 81.$$

Логарифмируя полученное уравнение по основанию 3, имеем

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \iff \log_3^2 x = 4$$

$$\iff \left[\begin{aligned} &\log_3 x = -2 = \log_3 3^{-2}, \\ &\log_3 x = 2 = \log_3 3^2, \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x = 3^{-2} = \frac{1}{9}, \\ &x = 3^2 = 9. \end{aligned}\right.$$

Ответ. $\dfrac{1}{9}$; 9.

9.46. 100. **9.47.** $\dfrac{1}{25}$. **9.48.** 0,01; 0,1; 10; 100. **9.49.** 0,1; $10^{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$.
9.50. 2; $\dfrac{1}{8}$. **9.51.** $\sqrt{3}$; 9. **9.52.** 9; 81. **9.53.** 0,1; 10.
9.54. 10; $10^{\log_2 3}$. **9.55.** $7^{\log_2 \frac{-5+\sqrt{41}}{2}}$. **9.56.** -1; 2. **9.57.** $3^{-\sqrt{2}}$; $3^{\sqrt{2}}$.
9.58. $\left(9, \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(\dfrac{9+\sqrt{105}}{4}, \dfrac{9+\sqrt{105}}{4}\right)$. **9.59.** $(-2, 3)$. **9.60.** $\left(\dfrac{5}{8}, 4\right)$.

9.61. $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$. **9.62.** $(3, 1)$. **9.63.** $\left(2^{\frac{10}{3}}, 3^{-\frac{5}{3}}\right)$. **9.64.** $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$.

9.65. $(4, 4)$. **9.66.** $(2, 3)$. **9.67.** $\left(-1, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\dfrac{3}{2}, 9\right)$.

9.68. $\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{81}\right)$. **9.69.** $(5, 2) \bigcup \left(\dfrac{93}{2}, \dfrac{33}{2}\right)$.

10.1. $(2; 27]$.

10.2. $\log_{\frac{1}{2}}(x + 3) \geq 1$.

Решение. Представим правую часть неравенства в виде логарифма по основанию $\frac{1}{2}$. Поскольку основание логарифма меньше единицы, то при отбрасывании логарифмов знак неравенства для подлогарифменных выражений меняется на противоположный. С учетом ОДЗ остается решить систему неравенств.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x + 3) \geq 1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \iff \begin{cases} x + 3 \leq \dfrac{1}{2}, \\ x + 3 > 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leq \dfrac{1}{2} - 3, \\ x > -3, \end{cases} \iff -3 < x \leq -\frac{5}{2}.$$

Ответ. $\left(-3; -\dfrac{5}{2}\right]$.

10.3. $\left(-\dfrac{14}{3}; -3\right)$. **10.4.** -8. **10.5.** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

10.6. $\left(\dfrac{5}{3}; +\infty\right)$. **10.7.** $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{8}\right]$. **10.8.** $[-\sqrt{10}; -3) \cup (3; \sqrt{10}]$.

10.9. $[-6; 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}; 12]$. **10.10.** $\left[-\dfrac{6}{5}; -1\right) \bigcup \left(-\dfrac{1}{5}; 0\right]$.

10.11. $(0; 3]$. **10.12.** $\left[\dfrac{\sqrt{2} - 16}{48}; -\dfrac{7}{24}\right) \bigcup \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{\sqrt{2} - 2}{6}\right]$.

10.13. $\left(\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}; \dfrac{3}{4}\right)$. **10.14.** $\left(-4; \dfrac{1 + \sqrt{17}}{2}\right)$.

10.16. $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x \geq 0$.

Решение. В подобных неравенствах необязательно вначале выписывать и находить ОДЗ, а затем решать само неравенство. Можно решать неравенство с помощью эквивалентных преобразований.

При этом может оказаться, что решение некоторых неравенств в ОДЗ было лишним для данной задачи.

$$\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x \geq 0 = \log_2 1 \iff \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x \geq 1 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$$

$$\iff \log_5 1 = 0 < \log_5 x \leq \frac{1}{3} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} \iff 1 < x \leq 5^{\frac{1}{3}}.$$

Ответ. $\left(1;\ 5^{\frac{1}{3}}\right]$.

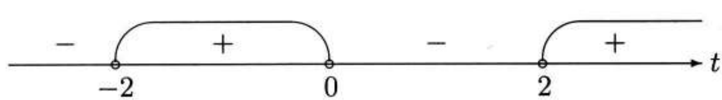
10.17. $(\log_2 \sqrt{7};\ \log_2 3]$. **10.18.** $(3; 11]$. **10.19.** $\left[\frac{1}{3};\ 3\right)$.
10.21. $[-4;\ -2) \cup (5;\ 10]$. **10.22.** $(-\infty;\ -8] \cup (12;\ +\infty)$.
10.23. $\left(2-\sqrt{2};\ \frac{3}{4}\right] \bigcup \left[\frac{13}{4};\ 2+\sqrt{2}\right)$. **10.24.** $(1; 64]$.
10.25. $(-\infty;\ -2)$. **10.26.** $(-311;\ -11] \bigcup \left(1;\ \frac{3}{2}\right)$.
10.28. $\left\{\frac{1}{2}\right\} \bigcup (1;\ +\infty)$. **10.29.** $(-\infty;\ -512)$. **10.30.** $\left[\frac{1}{4};\ 2\right]$.
10.32. $\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{7}{24}\right) \bigcup (1;\ +\infty)$. **10.33.** $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right] \bigcup [2;\ +\infty)$.
10.34. $(0;\ 1) \cup (1;\ 4) \cup (64;\ +\infty)$. **10.35.** $\left(5^{\sqrt{\frac{28}{3}}};\ +\infty\right)$.
10.36. $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ k < 0$. **10.37.** $\left(0;\ 4^{-\sqrt{2}}\right] \bigcup \left[4^{\sqrt{2}};\ 4^{\frac{6+\sqrt{3}}{3}}\right]$.
10.38. $(2;\ 3) \bigcup \left(\frac{7}{2};\ 4\right) \cup (4;\ 5)$. **10.39.** $[-4;\ -1) \cup (1;\ 2]$.

10.40. $\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16$. *Решение.* Перейдем во втором логарифме к основанию 2. Получим

$$\log_2(x+1) > \frac{\log_2 16}{\log_2(x+1)}.$$

Обозначим $\log_2(x+1) = t$. Имеем дробно-рациональное неравенство, которое будем решать методом интервалов:

$$t > \frac{4}{t} \iff t - \frac{4}{t} > 0 \iff \frac{t^2-4}{t} > 0 \iff \frac{(t-2)(t+2)}{t} > 0$$



$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < t < 0, \\ t > 2, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < \log_2(x+1) < 0, \\ \log_2(x+1) > 2, \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 2^{-2} < \log_2(x+1) < \log_2 1, \\ \log_2(x+1) > \log_2 2^2, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4} < x+1 < 1, \\ x+1 > 4, \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{3}{4} < x < 0, \\ x > 3. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left(-\dfrac{3}{4};\, 0\right) \bigcup (3;\, +\infty)$.

10.41. $[-3;\, 2) \cup (5;\, 7\,]$. **10.42.** $\left(-4;\, -\sqrt{\dfrac{34}{3}}\,\right] \bigcup \left[\sqrt{\dfrac{34}{3}};\, \dfrac{7}{2}\right)$.
10.44. $\left(-\dfrac{3}{2};\, -\dfrac{23}{16}\right)$. **10.45.** $(0{,}01;\, 10)$. **10.46.** $\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2};\, +\infty\right)$.
10.47. $(-\infty;\, -2) \bigcup \left(-1\,;\, -\dfrac{1}{2}\right)$. **10.48.** $[-3; -\sqrt{6}\,) \cup (\sqrt{6};\, 3\,]$.
10.49. $(1;+\infty)$. **10.50.** $(0;1) \cup (3;5)$. **10.52.** $(-1;0)$. **10.53.** $(0;2]$.
10.54. $\left(-\dfrac{3}{2};\, -1\right) \bigcup \left[-\dfrac{1}{2};\, 1\right]$. **10.55.** $\left(-\dfrac{1}{3};\, -\dfrac{1}{4}\right) \bigcup \left(-\dfrac{1}{6};\, -\dfrac{1}{10}\right)$.
10.56. $\left[1-\sqrt{23};\, -\dfrac{7}{2}\right) \bigcup \left(-\dfrac{7}{2};\, -\sqrt{\dfrac{34}{3}}\,\right] \bigcup \left[\sqrt{\dfrac{34}{3}};\, 4\right)$.
10.57. $\left(\dfrac{1}{2};\, 1\right)$. **10.58.** $\left(-\dfrac{4}{5};\, -\dfrac{1}{4}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{5};\, \dfrac{1}{4}\right) \bigcup \left(\dfrac{7}{4};\, \dfrac{9}{4}\right)$.
10.59. $\{1\} \cup [\,\log_6 7;\, 3\log_6 7\,]$. **10.60.** $(-2;0) \cup (1;\, +\infty)$.
10.61. $(-\infty;\, \log_3 5) \bigcup \left(\dfrac{3}{2};\, \log_2 3\right)$. **10.62.** $(-4;\, 1) \bigcup \left(1;\, \dfrac{5}{3}\right) \bigcup$
$\bigcup \left(\dfrac{5}{3};\, 11\right)$. **10.63.** -1. **10.64.** $(0;\, 2)$. **10.65.** $(0;\, 1) \cup \{2\}$.
10.66. $\left(\dfrac{1}{3};\, 3\right]$. **10.67.** $(-\infty;\, 0\,]$. **10.68.** $\left(3;\, \dfrac{7}{2}\right) \bigcup (4;\, +\infty)$.
10.69. $\left(\dfrac{5}{4}; \log_3 4\right) \bigcup \left(\dfrac{4}{3};\, +\infty\right)$. **10.70.** $(-\infty; -2] \cup [0; \lg 101 - 2)$.
10.71. $\left(\dfrac{-1-\sqrt{73}}{4}; 1\right) \bigcup \left(1;\, \dfrac{-1+\sqrt{73}}{4}\right)$.
10.72. $\left(-\infty;\, -2^{-\frac{3}{7}}\right] \bigcup \left(-2^{-\frac{3}{4}};\, -\dfrac{1}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{2};\, 2^{-\frac{3}{4}}\right) \bigcup \left[2^{-\frac{3}{7}}; +\infty\right)$.

10.73. $(-3;\ 2-2\sqrt{6})\cup(2-2\sqrt{6};\ -2)\cup(-2;\ 2)\cup(2;\ 2+2\sqrt{6})\cup$ $(2+2\sqrt{6};\ 7)$. **10.74.** $(2;\ 5\,]$. **10.75.** $(-\infty;\ -1)\cup(0;\ 2)$.
10.76. $\left(\dfrac{3}{4};\ 1\right]$. **10.77.** $\left[\dfrac{2}{3};\ 1\right)\bigcup[3;\ +\infty)$.
10.79. $\left(-6;\ \dfrac{3}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{3}{2};\ 2\right)\bigcup\left(2;\ \dfrac{5}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{5}{2};\ 10\right)$.
10.80. $(-\infty;\ -2]\cup[-1;\ 0)\cup(0;\ 1]\cup[2;\ +\infty)$.
10.81. $\log_{x-2}x\le\log_{x-2}4$.

Решение. По схеме (2) п. 10.2 неравенство эквивалентно системе:

$$\begin{cases}\dfrac{x-4}{x-2-1}\le 0,\\ x-2>0,\\ x>0,\end{cases}\iff\begin{cases}\dfrac{x-4}{x-3}\le 0\Leftrightarrow 3<x\le 4,\\ x>2,\end{cases}\iff 3<x\le 4.$$

Ответ. $(3;\ 4\,]$.

10.82. $(-\infty;\ -6\,]\cup(-3;\ -2)$. **10.83.** $\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right]\bigcup[6;\ +\infty)$.
10.85. $(-\infty;\ -7\,]\cup(-4;\ -3)\cup(-2;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$.
10.86. $[3;+\infty)$. **10.87.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)\bigcup\left(6;\dfrac{13}{2}\right)$. **10.88.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.
10.89. $[1;2)$. **10.90.** $\left(0;\ \dfrac{1}{3}\right]\bigcup(1;\ 3)$. **10.91.** $[-0{,}9;-0{,}7]\cup(0;+\infty)$.
10.92. $(-1;\ 1)\cup[\,2;\ 3)$. **10.93.** $\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)\bigcup[\,1;\ 2)\cup(3;\ 6\,]$.
10.95. $(-1;\ 0)\bigcup\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)\bigcup(1;\ 5]$.**10.96.** $(-\infty;\ -\sqrt{10})\bigcup\left(\dfrac{13}{4};\ 4\right)$.
10.97. $(0;\ 3)\bigcup\left(\dfrac{25}{8};\ \sqrt{10}\right)$. **10.98.** $\left[\dfrac{4}{5};\ 1\right)$. **10.99.** $(0;\ 1]$.
10.100. $[-5;-1)\cup(3;4]\cup(7;+\infty)$. **10.102.** $[3;4)$. **10.103.** $(0;1000]$.

10.104. $x^{2\log_3 5}-4\cdot 5^{\log_3 x}-5\le 0$. *Решение.* Из тождества $x^{\log_3 5}=5^{\log_3 x}$, которое доказывается логарифмированием, после подстановки вместо $x^{\log_3 5}$ в уравнение выражения $5^{\log_3 x}$ получим:

$$5^{2\log_3 x}-4\cdot 5^{\log_3 x}-5\le 0.$$

Решая это квадратное относительно $5^{\log_3 x}$ неравенство, имеем

$$(5^{\log_3 x}+1)(5^{\log_3 x}-5)\le 0\iff -1\le 5^{\log_3 x}\le 5\iff$$

$$5^{\log_3 x} \le 5 = 5^1 \iff \log_3 x \le 1 = \log_3 3 \iff 0 < x \le 3.$$

Ответ. $(0;\ 3]$.

10.105. $[-1;\ 3]$.

10.106. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \ge \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\log_x(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$.

Решение. Поскольку $\sqrt{3}-\sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}$, то неравенство можно переписать в виде:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}} x} \ge \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-\log_x(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \iff$$

$$-\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \ge -\log_x(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \iff \log_x(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \ge \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x$$

$\iff$ (по формуле перехода к новому основанию)

$$\frac{1}{\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x} \ge \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \iff \frac{\log^2_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x - 1}{\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x} \le 0$$

$$\iff \frac{(\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x - 1)(\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x + 1)}{\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x} \le 0 \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \le -1, \\ 0 < \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \le 1, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 0 < x \le (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}, \\ 1 < x \le \sqrt{3}+\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ. $(0;\ \sqrt{3}-\sqrt{2}] \cup (1;\ \sqrt{3}+\sqrt{2}]$.

10.107. $[-1+\sqrt{2};\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.
10.108. $(2-\sqrt{3};\ 3-\sqrt{7}] \cup [3+\sqrt{7};\ +\infty)$.
10.109. $[-\sqrt{2};\ -1) \cup (1;\ \sqrt{2}]$. **10.110.** $(1;\ 2) \cup (4;\ +\infty)$.
10.111. $(0;\ 2)$. **10.112.** $(0;\ +\infty)$. **10.113.** $[2;\ +\infty)$.
10.114. $\left(0;\ \dfrac{1}{9}\right] \bigcup\ [1;\ +\infty)$. **10.115.** $\left(1;\ 5^{\log_2 7}\right]$.
10.116. $\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right] \bigcup [2;\ \infty)$. **10.117.** $(1;\ +\infty)$. **10.118.** $(3;\ +\infty)$.
10.120. $(-\infty;\ 0)$. **10.122.** $-2, -1, 0, 1$. **10.123.** $\left(-\dfrac{2}{3};\ 0\right)$.
10.124. $(0;\ +\infty)$. **10.126.** 1; 2.

Часть 3

- **Преобразование тригонометрических выражений**
- **Тригонометрические уравнения и неравенства**

Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},\ \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Функции суммы и разности углов

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\quad \begin{pmatrix}\cos\alpha\neq 0\\ \cos\beta\neq 0\end{pmatrix},$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\ \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}\ \begin{pmatrix}\sin\alpha\neq 0\\ \sin\beta\neq 0\end{pmatrix}.$$

Функции двойного и половинного угла

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Преобразование суммы функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\qquad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\qquad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Разложение произведения в сумму или разность

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Big),$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\Big),$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\Big).$$

Дополнительные тригонометрические формулы:

Некоторые полезные формулы

$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2k\pi, \\ x = -y + 2l\pi, \end{array}\right. \qquad \sin x = \sin y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2k\pi, \\ x = \pi - y + 2l\pi, \end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + k\pi, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, \end{cases} \qquad \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + k\pi, \\ x \neq l\pi, \end{cases}$$

$$\sin x = \cos y \Leftrightarrow \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos y, \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - y\right).$$

Формулы приведения

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha, \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha,$$

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Введение дополнительного угла

При преобразовании выражения вида $a\sin x + b\cos x$ удобно воспользоваться введением дополнительного угла. Пусть числа a и b одновременно не равны нулю. Тогда

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x\right).$$

Введем угол φ такой, что $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Такой угол φ существует для любых a и b и таких углов бесконечное множество. Нам достаточно взять один из них, например, $\varphi = \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ при $a > 0$; $\varphi = \arccos\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ при $b > 0$. Тогда по формуле синуса суммы двух углов

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi).$$

Формулы универсальной тригонометрической подстановки

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha \neq \pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

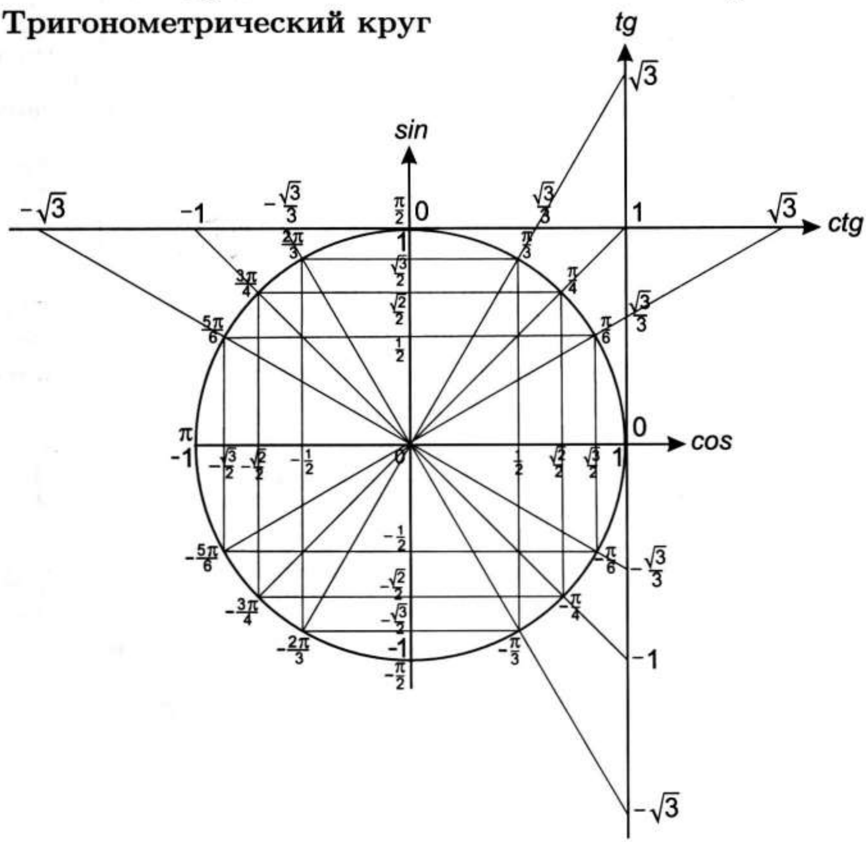
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Формулы тройного угла

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$$

Тригонометрический круг



Таблицы простейших значений тригонометрических функций

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\nexists$

α	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\nexists$

$\nexists$ — знак означает "не существует"

Решение простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,$ $\quad \cos x = 1 \quad \Leftrightarrow x = 2k\pi,$

$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi, \end{array}\right.$ $\quad \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,$

$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi, \end{array}\right.$ $\quad \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,$

$\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \end{array}\right.$ $\quad \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,$

$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow x = k\pi,$ $\quad \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,$

$\sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \end{array}\right.$ $\quad \cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,$

$\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi, \end{array}\right.$ $\quad \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi,$

$\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi, \end{array}\right.$ $\quad \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,$

$\sin x = -1 \quad \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,$ $\quad \cos x = -1 \quad \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,$

$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + k\pi$ $\quad \cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2k\pi,$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2k\pi, \\ x = \pi - \arcsin a + 2l\pi, \end{array}\right.$ $\quad$ при $|a| \le 1.$

$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,$ $\quad \operatorname{ctg} x = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,$

$\operatorname{tg} x = 1 \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,$ $\quad \operatorname{ctg} x = 1 \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,$ $\quad \operatorname{ctg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,$

$\operatorname{tg} x = 0 \quad \Leftrightarrow x = k\pi,$ $\quad \operatorname{ctg} x = 0 \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,$

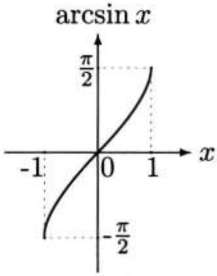
$\operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi,$ $\quad \operatorname{ctg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi,$

$\operatorname{tg} x = -1 \quad \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,$ $\quad \operatorname{ctg} x = -1 \quad \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,$

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi,$ $\quad \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi,$

$\operatorname{tg} x = a \quad \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi,$ $\quad \operatorname{ctg} x = a \quad \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + k\pi.$

Обратные тригонометрические функции



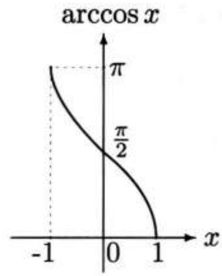
ОДЗ: $-1 \leq x \leq 1$,

область изменения:

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2}$,

монотонно возрастает,

нечётная.



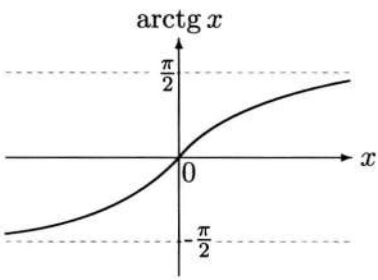
ОДЗ: $-1 \leq x \leq 1$,

область изменения:

$0 \leq \arccos x \leq \pi$,

монотонно убывает,

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.



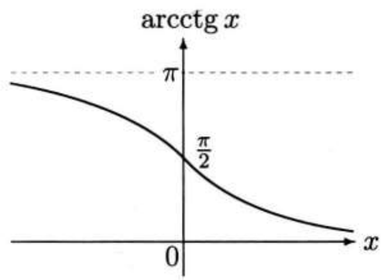
ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$,

область изменения:

$-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$,

монотонно возрастает,

нечётная.



ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$,

область изменения:

$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$,

монотонно убывает,

$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

11 Преобразование тригонометрических выражений

11.1 Доказать тождества

11.1. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$

11.2. $\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 4\cos\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha}{2}.$

11.3. $\dfrac{\sin^2 4\alpha}{2\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = 2\sin\alpha\sin 2\alpha.$

11.4. $\cos 4\alpha - \sin 4\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha = \cos 2\alpha - 2\cos^2\alpha.$

11.5. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right).$

11.6. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$ *"Решение"*

11.7. $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha} = \mathrm{tg}^4\,\alpha.$

11.8. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha} - \dfrac{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha} = 0.$

11.9. $\sin^2\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha} + \mathrm{ctg}\,\alpha\right)\left(1 - \dfrac{1}{\sin\alpha} + \mathrm{ctg}\,\alpha\right) = \sin 2\alpha.$

11.10. $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{4\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \dfrac{1}{2}.$

11.11. $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta = 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha + \beta).$

11.12. Преобразуйте в произведение

$$\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin 3\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}.$$

11.13. Преобразуйте в произведение $\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta - \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}.$

11.14.
$$1-\cos(2x-\pi)-\cos(4x+\pi)+\cos(6x-2\pi)=4\cos x\cos 2x\cos 3x.$$

11.15. $$\frac{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(3\pi-4\alpha)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+6\alpha\right)}{4\sin(5\pi-3\alpha)\cos(\alpha-2\pi)}=\cos 2\alpha.$$

11.16. $$\frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin^3\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}=\sin^2 x.$$

11.17. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$,
если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.18. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=1$,
если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.19. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

"Решение"

11.20. $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}+\dfrac{1}{\sin 4\alpha}+\dfrac{1}{\sin 8\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{\sin 2^n\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2^n\alpha$.

Домашнее задание

11.21. $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha$.

11.22. $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha=4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha$.

11.23. $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=4\sin 3\alpha\cos^2\alpha$.

11.24. $(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$.

11.25. $\dfrac{1}{2}(\cos t+\sqrt{3}\sin t)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-t\right)$.

11.26. $\cos^6\alpha-\sin^6\alpha=\dfrac{1}{4}(3+\cos^2 2\alpha)\cos 2\alpha$.

11.27. $$\frac{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}=-1.$$

11.28. $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}+\cos(\pi-\alpha)=1.$

11.29. $4\cos^2\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos(2\alpha-\pi)+\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-6\alpha\right)=32\sin^4\alpha\cos^2\alpha.$

11.30. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}=\mathrm{tg}^3\,x+\mathrm{tg}^2\,x+\mathrm{tg}\,x+1.$

11.31. $\dfrac{1+\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha+\sin 4\alpha}=\mathrm{tg}\,2\alpha.$

11.32. $\dfrac{\sin 2x-\sin 3x+\sin 4x}{\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x}=\mathrm{tg}\,3x.$

11.33. $\dfrac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\mathrm{tg}\,2\alpha-1}=\cos 2\alpha.$

11.34. $\dfrac{1-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}=\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$

11.35. $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{ctg}^4\,\alpha.$

11.36. $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$

11.37. $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1.$

11.38. $1-\sin 4\alpha+\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-2\alpha\right)\cos 4\alpha=0.$

11.39. Преобразуйте в произведение
$\sin(5\alpha+\beta)+\sin(3\alpha+\beta)+\sin 2\alpha.$

11.40. Преобразуйте в произведение
$\dfrac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha+\dfrac{\cos 2\alpha\sin 3\alpha}{\cos 60^\circ}-\sin 5\alpha.$

11.41. $\mathrm{tg}\,3\alpha=\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,3\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,2\alpha.$

11.42. $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)$.

11.43. Доказать тождество $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

11.44. $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\alpha = 1$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

11.45. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

11.46. $\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\cos(n+1)\alpha \cdot \sin n\alpha}{2\sin\alpha}$.

11.47. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

11.48. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2007, 5(10)) Чему равно пятое (в порядке возрастания) из натуральных чисел n, удовлетворяющих неравенству $\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n < 0$?

11.49. $\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\cos(n+1)\alpha \cdot \sin n\alpha}{2\sin\alpha}$.

11.50. $\cos^3\alpha + \cos^3 2\alpha + \ldots + \cos^3 n\alpha =$
$$= \frac{3\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{3n\alpha}{2}\cos\frac{3(n+1)\alpha}{2}}{4\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

11.51. $\sin^3\alpha + \sin^3 2\alpha + \ldots + \sin^3 n\alpha =$
$$= \frac{3\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\frac{3n\alpha}{2}\sin\frac{3(n+1)\alpha}{2}}{4\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

11.52. $\cos^4\alpha + \cos^4 2\alpha + \ldots + \cos^4 n\alpha =$
$$= \frac{3n}{8} + \frac{\sin n\alpha \cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{\sin 2n\alpha \cos 2(n+1)\alpha}{8\sin 2\alpha}.$$

11.53. $\sin^4\alpha + \sin^4 2\alpha + \ldots + \sin^4 n\alpha =$
$$= \frac{\sin 2n\alpha \cos 2(n+1)\alpha}{8\sin 2\alpha} - \frac{\sin n\alpha \cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{3n}{8}.$$

11.54.* $\dfrac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha}+\dfrac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{\cos(n-1)\alpha\cos n\alpha}=$
$=\dfrac{\operatorname{tg} n\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}.$

11.2 Доказать равенства

11.55. $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}.$ *"Решение"*

11.56. $\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{1}{8}.$

11.57. $\cos\dfrac{\pi}{11}\cos\dfrac{2\pi}{11}\cos\dfrac{3\pi}{11}\cos\dfrac{4\pi}{11}\cos\dfrac{5\pi}{11}=\dfrac{1}{2^5}.$

11.58.* (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2008, 8(10)) Вычислить $\log_2(\sin 1^\circ\cdot\sin 3^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 89^\circ)$.

11.59.* $\cos\dfrac{\pi}{2n+1}\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}\cos\dfrac{3\pi}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}=\dfrac{1}{2^n}.$

11.60. $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\dfrac{1}{2}.$

11.61. $\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{5\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=0.$

11.62. $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}.$

11.63. $\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{5\pi}{9}+\cos\dfrac{7\pi}{9}=0.$

11.64. $\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{4\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{6\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\dfrac{2n\pi}{2n+1}=-\dfrac{1}{2}.$

11.65. $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{8\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{8\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}.$

11.66. $\sin\dfrac{3\pi}{10}\sin\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{1}{4}.$

11.67. $\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}.$

11.68. $\sin\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{2\pi}{9}\sin\dfrac{3\pi}{9}\sin\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{\sqrt{9}}{16}$.

11.69.** [7] $\sin\dfrac{\pi}{2n+1}\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\sin\dfrac{3\pi}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}=\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

11.70. $\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{3\pi}{10}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

11.71.** $\sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{2\pi}{2n}\sin\dfrac{3\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

11.72.** $\cos\dfrac{\pi}{2n}\cos\dfrac{2\pi}{2n}\cos\dfrac{3\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

11.73. $\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{5}\operatorname{tg}^2\dfrac{2\pi}{5}=5$.

11.74.** $\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{2n+1}\operatorname{tg}^2\dfrac{2\pi}{2n+1}\operatorname{tg}^2\dfrac{3\pi}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}^2\dfrac{n\pi}{2n+1}=2n+1$.

Домашнее задание

11.75. $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{1}{8}$.

11.76. $\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{3\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{1}{2^4}$.

11.77. $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{3\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{5\pi}{15}\cos\dfrac{6\pi}{15}\cos\dfrac{7\pi}{15}=\dfrac{1}{2^7}$.

11.78. $\cos\dfrac{\pi}{33}\cos\dfrac{2\pi}{33}\cos\dfrac{4\pi}{33}\cos\dfrac{8\pi}{33}\cos\dfrac{16\pi}{33}=\dfrac{1}{2^5}$.

11.79. $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=0$.

11.80. $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$.

11.81. $\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}+\cos\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{1}{2}$.

---

[7] Задачи с двумя звездочками приведены как имеющие место формулы, а не для решения при подготовке к вступительному экзамену.

11.82. $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+$
$+\cos\frac{8\pi}{9}=0.$

11.83. $\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=0.$

11.84. $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}.$

11.85. $\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{3}{4}.$

11.86. $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}.$

11.87. $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}.$

11.88. $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{8}.$

11.89. $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{2\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{4}.$

11.90. $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{4\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}}{2^4}.$

11.91. $\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{2\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{4}.$

11.92. $\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$

11.93. $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{2\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{4\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}}{2^4}.$

11.94.

$$\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 40^\circ\sin 50^\circ\sin 60^\circ\sin 70^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{2^8}.$$

11.95. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7}\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{7}=7.$

11.96. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{9}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{9}\operatorname{tg}^2\frac{4\pi}{9}=3.$

11.97. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{9}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{9}\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{9}\operatorname{tg}^2\frac{4\pi}{9}=9.$

11.98. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}\frac{(n-2)\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n}=1.$

11.3 Вычислить

11.99. $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}.$

11.100. $\operatorname{tg}435^\circ+\operatorname{tg}375^\circ.$

11.101. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2007”, 1(10))
Вычислить $(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\beta-\cos\beta)$, если $\sin(\alpha+\beta)=0{,}8$ и $\cos(\alpha-\beta)=0{,}3$.

11.102. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов и высшая школа современных социальных наук, 2008, 3(7))
Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right)$, если $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ и $-\frac{3\pi}{2}<\alpha<0$.

11.103. (МГУ, почвоведения, 1998, 2(6))
Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ и $\pi<\alpha<2\pi$. Установите без помощи таблиц и калькулятора, какое из чисел больше: $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$ или $\frac{2}{7}$.

11.104. (МГУ, геологический, экономический, …, 2010, 3(6))
Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)<0$.

11.105. (МГУ, экономический, 1992, 1(6))
Вычислить $\log_{\frac{9}{5}}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|+\log_{\frac{9}{5}}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)\right|$,
если известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

11.106. $\sin 15^\circ$.

11.107.* $\sin 18^\circ$.

11.108. $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$. *“Решение”*

11.109. $\arcsin(\sin 5)$.

11.110.* (МГУ, мех-мат, 1999, устный)

$$\operatorname{arctg} 8 + \operatorname{arctg}\frac{19}{22} + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right).$$

Домашнее задание

11.111. $\sin^4\dfrac{\pi}{8} + \cos^4\dfrac{3\pi}{8} + \sin^4\dfrac{5\pi}{8} + \cos^4\dfrac{7\pi}{8}$.

11.112. $\sin^4\dfrac{\pi}{16} + \sin^4\dfrac{3\pi}{16} + \sin^4\dfrac{5\pi}{16} + \sin^4\dfrac{7\pi}{16}$.

11.113. $\operatorname{tg} 255^\circ - \operatorname{tg} 195^\circ$.

11.114. $(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 310^\circ + \cos 290^\circ) +$
$+ (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ - \cos 380^\circ)$.

11.115. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

$8\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ$.

11.116. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

$$\frac{20\sin 80^\circ \sin 65^\circ \sin 35^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 110^\circ}.$$

11.117. (МГУ, почвоведения, 2002, 2(7))

$\cos\dfrac{5\pi}{8}$.

11.118. (МГУ, почвоведения, май 2004, 1(6))

$\sin 255^\circ$.

11.119. (Черноморский ф-л МГУ (Севастополь), 2007, 1(10)) Упростите и затем вычислите при $\alpha = 180^\circ$ значение выражения

$$\cos^2\left(135^\circ - \frac{\alpha}{8}\right) - \cos^2\left(495^\circ + \frac{\alpha}{8}\right).$$

11.120. (МГУ, почвоведения, май 1996, 1(6)) Найдите $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, если известно, что $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, а $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

11.121. (МГУ, почвоведения, 2000, 3(7)) Найдите $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, а $\sin 4\alpha > 0$.

11.122. (МГУ, почвоведения, 2002, 2(7)) Вычислить $\operatorname{tg}3\alpha$, если $\sin\alpha = 2\cos\alpha$.

11.123. (МГУ, почвоведения, 2006, 1(7)) Найти $\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

11.124. (МГУ, социологический, 2008, 2(7)) Найти $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$, при $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

11.125.* $\sin 42^\circ$.

11.126. $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$.

11.127. $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}\right)$.

11.128. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}3\right)$.

11.129. $\sin(\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3)$.

11.130. (МГУ, ВМиК, 2006, устный) Найдите все натуральные n, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{arctg}3 + \operatorname{arctg}\left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right) \leq \frac{2\pi}{n}.$$

11.131. $\arccos(\cos 10)$.

11.132. $\arccos(\sin 4)$.

12 Тригонометрические уравнения

12.1 Простейшие тригонометрические уравнения

12.1. (МГУ, 2011, 2(8))
$(\cos x - \sin x)^2 = 1.$

12.2. (МГУ, 2012, 4(8))
$\cos 3x = \cos x + \sqrt{3} \sin x.$

12.3. (МГУ, 2017, 3(8))
$\sin 7x + \sin 6x = \sin x.$

12.4. (МГУ, 2018, 3(8))
$\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x.$

12.5. $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}.$

12.6. $\sin 3x - \sin 11x = 0.$

12.7. (МГУ, вместо ЕГЭ, 2018, 3(8))
$\operatorname{tg}(\pi \cos x) = \operatorname{ctg}(\pi \sin x).$

12.8. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 4(8))
$\sin^2 11x = \cos^2 17x.$

12.9. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).$

12.10. $\sin 2x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{1}{8}.$

Домашнее задание

12.11. $\sin x \operatorname{tg} x \cos x \operatorname{ctg} x = 0.$ *"Тест"*

12.12. $\operatorname{ctg}^2 x = 3.$

12.13. $\cos^2 3x - \sin^2 3x = 1.$

12.14. $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x.$

12.15. $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1.$

12.16. (МГУ, ИСАА, 1998, 1(7))
$\sin^2 x + \sin^2 6x = 1.$

12.17. $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

12.2 Сведение к одному аргументу и одной функции

Тригонометрические уравнения часто сводятся к нахождению корней алгебраического уравнения и последующего решения простейших тригонометрических уравнений. При сведении к алгебраическому уравнению вначале необходимо свести к тригонометрическому уравнению с одинаковым аргументом, а затем, не изменяя аргумента, свести к алгебраическому уравнению относительно одной функции синус, косинус, тангенс или котангенс.

12.18. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$

12.19. $\cos\frac{x}{3} = 2\cos\frac{x}{6} - 1.$

12.20. $2\sin^2 x - 3 = -6\cos^2 x.$

12.21. (МГУ, геологический, 1966, 3(4))
$4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x.$

12.22. $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2}.$

12.23. $\cos^{10} x + \sin^{10} x = \frac{29}{64}.$ *“Указание”*

12.24. $\cos 2x = 2\,\mathrm{tg}^2 x - \cos^2 x.$

12.25. (МГУ, мех-мат, 2008, 2(6))

Игорь решал тригонометрическое уравнение и получил ответ

$$(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{4\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ в конце учебника выглядел иначе:

$$-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k,\ n,k\in\mathbb{Z}.$$

Правильный ли ответ получил Игорь? Привести пример тригонометрического уравнения с ответом как в учебнике.

12.26. (МГУ, мех-мат, 2010, 3(6))

Найдите наименьшее из положительных значений функции

$$\frac{4}{3\cos^2 x+2\sin x-1}.$$

Домашнее задание

12.27. $3\sin^2 x+7\cos x-3=0.$

12.28. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 1(7))
$\cos 2x+3\sin x+1=0.$

12.29. (МГУ, географический, май 1999, 1(6))
$3\cos 4x+5\sin 2x=-1.$

12.30. $\cos x-\cos\dfrac{x}{2}=2.$

12.31. $\sin\dfrac{x}{4}+\cos\dfrac{x}{2}=1.$

12.32. (МГУ, ФББ, 2009, 4(9))
$8\cos^2(5x)-4\cos^2(10x)=1.$

12.33. $\cos^2 2x-5\cos^2 x=-1.$

12.34. (МГУ, биолого-почвенный, 1968, 2(5))
$\cos 4x+2\cos^2 x=1.$

12.35. $17\sin\dfrac{3x}{2}-\sqrt{17}\cos 3x=0.$

12.36. $\sin 2x = \cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2}.$

12.37. (МГУ, биологический, 1984, 2(5))

$$2\cos 2x + \cos^2 \frac{x}{2} - 10\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}\cos x.$$

12.38. $3 = \dfrac{3}{\sin^2 5x} + \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,5x.$

12.39. (МГУ, психологический, 2003, 2(5))

$$\sin 3x \sin x = -\frac{1}{8}.$$

12.40. (МГУ, филологический, 1974, 3(5))

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x.$$

12.41. $\cos^8 x - \sin^8 x = \cos^2 2x + \dfrac{1}{2}\cos 2x.$

12.42. $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{41}{128}.$

12.3 Использование формул приведения

12.43. (Филиал МГУ в г. Баку, 2016, 4(8))

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 3 - 3\sin x.$$

12.44. (Филиал МГУ в г. Баку, 2014, 3(8))

$$8\cos^4\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) + 11\cos 2x + 1 = 0.$$

12.45. $\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - 3\sin(\pi - x) + \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = 1.$

Домашнее задание

12.46. $5 + 2\cos 2x - 4\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

12.47. $\sin\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right).$

12.48. $\sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) = \sin(4x - 5\pi).$

12.49. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 5(8))

$$5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - 1.$$

12.4 Однородные уравнения

Уравнения вида

$$a_n \sin^n x + a_{n-1}\sin^{n-1} x\cos x + \ldots + a_1 \sin x\cos^{n-1} x + a_0\cos^n x = 0$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа и сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ в каждом слагаемом равна n, называются *однородными относительно* $\sin x$, $\cos x$. Такое уравнение при $\cos x \neq 0$ эквивалентно уравнению

$$a_n \mathrm{tg}^n x + a_{n-1}\mathrm{tg}^{n-1} x + \ldots + a_1\,\mathrm{tg}\, x + a_0 = 0,$$

которое получается из исходного делением обеих частей уравнения на $\cos^n x$.

Некоторые тригонометрические уравнения сводятся к однородным с помощью представления $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

12.50. $\sin x - 2\cos x = 0.$

12.51. $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0.$ *"Решение"*

12.52. $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 2.$

12.53. $2\sin^3 x - 3\sin x = 2\cos^3 x + \cos x.$

Домашнее задание

12.54. $\sin 2x - \cos 2x = 0.$

12.55. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0.$

12.56. $3\sin x\cos x + \cos^2 x = 2.$

12.57. $2\sin^3 x - \sin^2 x\cos x + 2\sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

12.58. (МГУ, 2016, 3(8))
$2\cos^2 x + 3\sin 2x = 4 + 3\cos 2x.$

12.59. (МГУ, почвоведения, 1979, 3(5))
$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x = (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 1.$$

12.60. $\sin^2 x(\operatorname{tg} x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3.$

12.61. (МГУ, психологический, 2006, 3(6))
$\log_2(3|\sin x| - |\cos x|) + \log_2|\cos x| = 0.$

12.62. (МГУ, мех-мат, 2007, 3(6))
$3\cos x|3\sin x + \cos x| = \sin x|\cos x - 3\sin x|.$

12.5 Введение дополнительного угла

Для решения некоторых задач надо проводить преобразования методом введения дополнительного угла. Метод описан в разделе тригонометрических формул.

12.63. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1.$ *"Решение"*

12.64. $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$.

12.65. $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}\,(\sin 6x + \cos 8x)$.

12.66.* (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2008”, 7(10))

$$2 + \cos x = \sqrt{3}\left|\sin\frac{3x}{4}\right|\sin x.$$

Домашнее задание

12.67. (МГУ, Высшая школа гос. аудита, 2008, 2(9))
$\cos x - \sin x = 1$.

12.68. (МГУ, экономический, 1984, 2(6))
$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$.

12.69. (МГУ, биологический, 2005, 2(6))
$\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

12.70. $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = \sqrt{2}$.

12.71. $\sin 10x + \cos 10x = \sqrt{2}\sin 15x$.

12.72. $\sin 11x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x + \dfrac{1}{2}\cos 7x = 0$.

12.73. $3\sin x + 4\cos x = 5$.

12.74. $2 + \cos\dfrac{3x}{2} + \sqrt{3}\sin\dfrac{3x}{2} = 4\sin^2\dfrac{x}{4}$.

12.75. (МГУ, геологический, 1979, 3(6))

Найти все значения c, при которых уравнение
$4\sin x + 9\cos x = c$ имеет решение.

12.76. (МГУ, филологический, 1994, 4(6))

$$\frac{2}{\pi}\sin x + \cos 19\pi = \cos x.$$

12.77. $5\sin 2x + 6\cos 3x = 5\sqrt{3}\,\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) - 8\sin 3x.$

12.78.* (МГУ, геологический, 1981, 6(6))

Показать, что функция $y = \sin^2 x - 12\sin x\cos x + 3\cos^2 x - 2\sqrt[3]{66}$ может принимать неотрицательные значения.

12.6 Симметрические уравнения

Тригонометрический многочлен называется *симметрическим*, если при замене синуса и косинуса одного аргумента местами, многочлен не меняется. Симметрический многочлен может быть сведен к многочлену относительно $\sin x + \cos x$ и $\sin x\cos x$.

Симметрические уравнения решаются с помощью следующей замены $\sin x + \cos x = t$. Тогда из тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ следует, что $(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x\cos x = 1$, откуда $\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$. В итоге получается алгебраическое уравнение относительно новой переменной t.

12.79. $\sin x + \cos x - \sin x\cos x = 1.$

12.80. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$

Домашнее задание

12.81. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \sin 2x - 4(\cos x + \sin x).$$

12.82. $\sin^3 x + \cos^3 x + 1 = 3\sin x\cos x.$

12.83. (МГУ, физический, 1967, 3(5))

$$5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}\,(2 + \sin 2x).$$

12.7 Кососимметрические уравнения

Кососимметрический многочлен может быть сведен к многочлену относительно $\sin x - \cos x$ и $\sin x \cos x$.

Кососимметрические уравнения решаются с помощью замены $\sin x - \cos x = t$. Тогда из тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ следует, что $(\sin x - \cos x)^2 + 2\sin x \cos x = 1$, откуда $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$. В итоге получается алгебраическое уравнение относительно новой переменной t.

12.84. $\sin x - \cos x + \sin x \cos x = 1.$

Домашнее задание

12.85. $\sin x \cos x - 6(\sin x - \cos x) - 6 = 0.$

12.86. $3\sin x \cos x + \sin x = 1 + \cos x.$

12.87. (МГУ, географический, 2006, 3(6))

$$2\sin x - \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

12.8 Универсальная тригонометрическая подстановка

12.88. (МГУ, филологический, 2005, 5(7)) *“Решение”*

$$2 + \sin x = 3\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

12.89. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2006, 2(10))

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\operatorname{tg} 2x + 3\operatorname{ctg} x.$$ *“Тест”*

Домашнее задание

12.90. $\sin 2x + \operatorname{ctg} x = 2.$

12.91. (МГУ, биологический, 1973, 2(5))

$$2\cos 2x - 1 = (2\cos 2x + 1)\operatorname{tg} x.$$

12.92. (МГУ, химический, 1966, 4(4))

$$3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\,\mathrm{tg}\, x.$$

12.93. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Для всех значений параметра $a \in (0;\ 1)$ решите уравнение

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x = 1.$$

12.94.* $(\cos x - \sin x)\left(2\,\mathrm{tg}\, x + \dfrac{1}{\cos x}\right) + 2 = 0.$

12.9 Разложение на множители

12.95. (Филиал МГУ в г. Баку, 2015, 3(8))

$$5\cos 2x = 11\cos x - 11\sin x.$$

12.96. (Филиал МГУ в г. Астана, 2017, 4(8))

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

12.97. (МГУ, физический, 1998, 1(8))

$$\cos 4x - \sin 3x\cos x + \cos 2x = 0.$$

12.98. $\sin 2x + \sin 6x = 3\cos^2 2x.$

12.99. (МГУ, химический, 1979, 1(5))

$$\sin 2x + \cos 2x = 1 + \sqrt{6}\sin x.$$

12.100. (МГУ, физический, 1970, 1(5))

$$\frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos^2 2x) - 1 = 2\sin 2x - 2\sin x - \sin x\sin 2x.$$

12.101. (МГУ, психологический, 2001, 3(5))

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0.$$

12.102. $\sin^2(2+3x)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right) = \cos^2(2-5x)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-6x\right).$

12.103.* (МГУ, психологический, 2006, 6(6))

$$9\cos 2x + 9\cos 6x = 36\cos x\cos 3x + 140\sqrt{3}\sin x\sin 2x - 162.$$

Домашнее задание

12.104. $\sin 3x - 4\sin x\cos 2x = 0$.

12.105. (МГУ, почвоведения, 1993, 2(5))
$\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0$.

12.106. $\sin x + \sin 3x + 4\cos^3 x = 0$.

12.107. $3\sqrt{3}\sin 2x = 10\sin x - 4\sin^3 x$.

12.108. $2\cos x\cos 2x - (1 - 2\sqrt{2}\,)\sin 2x = 2(1 - \sqrt{2}\,)\cos x$.

12.109. (МГУ, химический, 1979, 1(5))
$\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x$.

12.110. (МГУ, химический, ФНМ, 2006, 3(6))
$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{6}\cos x$.

12.111. (МГУ, почвоведения, 1973, 3(5))
$(\cos x - \sin x)\left(1 + \dfrac{1}{2}\sin 2x\right) + \sin x = 2\cos^2 x$.

12.112. (МГУ, психологический, 1991, 2(5))
$(\cos x - 1)(2\sin x - \cos 2x - 2) = 2\sin^2 x$.

12.113. (МГУ, психологический, 2001, 3(5))
$3\cos^2 x + 2\cos x - \sin x - 2\sin 2x - 1 = 0$.

12.114.* $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{8}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{8}\right)$.

12.10 Отбор корней

В некоторых тригонометрических уравнениях необходимо кроме нахождения корней провести их отбор. Например, необходимо выбрать корни из заданного промежутка, или корни должны удовлетворять ОДЗ уравнения.

12.10.1 Учет ОДЗ

12.115. (МГУ, хим, географ, биолог, психолог, ФББ, ФФМ, ФНМ, физико-химический, 2008, 1(7))

$$\frac{\cos 2x}{1-\sqrt{2}\sin x}=0.$$

12.116. (МГУ, географический, 2004, 2(6))

$$\frac{\sin 3x}{\sin x+\sin 2x}=0.$$

12.117. $\sin 3x\cdot\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0.$

12.118. (МГУ, экономический, 1983, 2(6))

$$\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}5x.$$

12.119. (МГУ, геологический, экономический, 1982, 4(6))

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x}=1.$$

12.120. (МГУ, 2013, 4(8))

$$\frac{\sin 5x}{\sin x}-\frac{\cos 5x}{\cos x}=\frac{\sin x}{\sin 5x}-\frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

Домашнее задание

12.121. $\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=0.$

12.122. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 3(7))

$$\frac{\sin 3x}{1+2\cos 2x}=0.$$

12.123. (МГУ, геологический, 2007, 2(8))

$$\frac{\cos 2x+\sin x}{\cos x}=\frac{1}{2}\cos x.$$

12.124. (МГУ, географический, 2004, 2(6))

$$\frac{\sin 4x}{\cos x-\cos 3x}=0.$$

12.125. (МГУ, мех-мат, 1980, 2(5))
$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = 1+\sin x.$$ *“Тест”*

12.126. (МГУ, ВМиК, 1983, 2(6))
$$\frac{1+2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1.$$

12.127. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 11x.$

12.128. (МГУ, экономический, 1983, 2(6))
$$\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg} 3x.$$

12.129. (МГУ, почвоведения, май 1996, 4(6))
$$(1-\cos 8x)\operatorname{tg} x = 6\sin^2 4x \operatorname{ctg} x.$$

12.130. (МГУ, химический, 2001, 3(7))
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x.$$

12.131. (МГУ, геологический, экономический, 1982, 4(6))
$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x} = -1.$$

12.132. (МГУ, ВМиК, 1978, 2(5))
$$\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\left(\sin 4x\cos 5x - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \times$$
$$\times\left(\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sin 5x\cos 4x\right).$$

12.10.2 Выбор корней из промежутка

12.133. (МГУ, филологический, март 2003, 2(6))
Сколько корней имеет уравнение $\sin 5\pi x + \cos 2\pi x = 0$ на отрезке $[-2;\ 0]$? *“Тест”*

12.134. Найдите все корни уравнения $\cos x\cos\frac{\pi}{5} + \sin x\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{9\pi}{4}\right]$.

12.135. (МГУ, почвоведения, май 2002, 4(7))
Найдите все значения x из интервала $(0; 2\pi)$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $\sin x$ и $\cos(x+\pi)$ равно $\frac{1}{2}$.

12.136. (МГУ, ИСАА, 2003, 4(6))
Найти корни уравнения $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1=2(\sqrt{2}+1)\operatorname{ctg}x$, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$. *"Тест"*

12.137. (МГУ, мех-мат, март 2004, 1(6))
Найти сумму тангенсов всех $x \in (-\pi; \pi)$ таких, что

$$4\sin 2x + 9\cos 2x = 3.$$

12.138. (МГУ, мех-мат, март 2000, 3(6))
Найдите все корни уравнения $\cos x \sin\dfrac{x}{4}+\dfrac{9}{10}\sin x+2\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{4}-\dfrac{9}{20}=0$, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2}; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Домашнее задание

12.139. Найти корни уравнения $3\cos 2x-5\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

12.140. (МГУ, ИСАА, 2001, 2(7))
Найти все решения уравнения $5\sin^2 2x+8\cos^3 x=8\cos x$, удовлетворяющие условиям $\dfrac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi$.

12.141. Найдите все корни уравнения
$\sin x\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

12.142. (МГУ, ВМиК, 2007, 1(6))
Найдите все решения уравнения

$$2\sin\left(x+\frac{7\pi}{25}\right)\cdot\sin\left(3x+\frac{18\pi}{25}\right)=\cos 4x+2^{\cos\frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{10}; \dfrac{4\pi}{5}\right]$.

12.143. (МГУ, геологический, 2006, 6(8))

Найдите корни уравнения $\dfrac{\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 3x)}{\cos 2x - \sin 3x} = 1$, расположенные в интервале $(1;\ 2)$.

12.144. (МГУ, тест, мех-мат, 1995, 4(8))

Найти корни уравнения $\sin 2x + 1 + \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, лежащие в интервале $\left(\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

12.145. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 4(8))

Найти все решения уравнения $6\cos\dfrac{15\pi}{4} \cdot \cos\dfrac{x}{2} - \cos x = 3$, принадлежащие отрезку $[-2;\ 10{,}99]$.

12.146. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 5(7))

Найти все значения $x \in \left[\dfrac{2\pi}{3};\ 3\pi\right]$, удовлетворяющие уравнению $1 + \cos 2x = 4\sin x$.

12.147. Найдите все решения уравнения $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$, удовлетворяющие условию $0{,}4\pi < x < \frac{6\pi}{7}$.

12.148. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 4(8))

Найти корни уравнения $\dfrac{\sqrt{3}\sin 2x - 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos 2x}{\cos\left(x - \frac{7\pi}{3}\right)} = 0$,

расположенные на промежутке $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

12.149. (МГУ, психологический, 2004, 3(5))

Решить уравнение $\sqrt{5}\cos x \operatorname{ctg} x - \sqrt{15}\cos x - \sqrt{15}\operatorname{ctg} x = 0$ и найти сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi;\ \pi]$. *"Тест"*

12.10.3 Уравнения с модулем

12.150. (МГУ, почвоведения, 1977, 3(5))

$$|\cos x| = \cos x - 2\sin x.$$

12.151. (МГУ, мех-мат, 2006, 4(6))

$$|1 - 2\sin x + \cos x| + 2\sin x + 1 = \cos 2x.$$

12.152. (МГУ, "Ломоносов-2011", заочный тур, 5(10))

Найти все решения уравнения $|\sin 2x - \cos x| = \big||\sin 2x| - |\cos x|\big|$ на интервале $(-2\pi;\, 2\pi]$.

12.153. (МГУ, "Ломоносов-2009", 6(9))

Сколько решений на отрезке $[0;\, \pi]$ имеет уравнение

$$5\sin x + 4 = |5\cos x + 2|?$$

12.154.* (МГУ, "Ломоносов-2007", 9(10))

Найти все значения $x \in (0;\, \pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x.$$

12.155.* Найдите все решения уравнения $|\cos(2x - 3)| = \sin x$, удовлетворяющие условию $|x| \le 2\pi$.

Домашнее задание

12.156. (МГУ, биологический, 1982, 2(5))

$$4|\sin x| + 2\cos 2x = 3.$$

12.157. (МГУ, почвоведения, 1977, 3(5))

$$|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}.$$

12.158. (МГУ, почвоведения, 1977, 3(5))

$$|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}.$$

12.159. (МГУ, почвоведения, май 2004, 4(6))

$$|\cos x - 2\sin x| + \cos x = 0.$$

12.160. (МГУ, экономический, 2008, 2(7))

$$\frac{|\sin x|}{\operatorname{tg} x} = \cos 3x.$$

12.161. (МГУ, экономический, 1995, 2(6))

$$2|\sin x| + \log_{\operatorname{tg} x}\left(-\frac{|\cos x|}{\sin x}\right) = 0.$$

12.162. (МГУ, мех-мат, 1990, 2(6))

$2^{|x-2|\sin x} = (\sqrt{2})^{x|\sin x|}$. *"Тест"*

12.163. (МГУ, факультет Гос. управления, 2007, 2(7))

$$\left|\left|\sin x - \frac{1}{4}\right| - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{3}\left(\sin x + \frac{1}{4}\right).$$

12.164.* На отрезке $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $|\cos x| + \sin(2x+3) = 0$. *"Тест"*

12.10.4 Иррациональные уравнения

12.165. (МГУ, почвоведения, 1982, 2(5))

$$\sqrt{3 + 4\cos 2x} = \sqrt{2\cos x}.$$

12.166. (МГУ, мехмат, 1982, 3(5))

$$\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0.$$

12.167. (МГУ, мех-мат, март 1999, 4(6))

$$\sqrt[8]{\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2} - 2x\right)} = 0.$$

12.168.* $\cos x\sqrt{\sin\dfrac{3x}{4}} = 0.$

12.169.* (МГУ, географический, май 2000, 6(6))

$$\sqrt{\cos 2x + 2\sin^2 x + \sin x + 1} - \sqrt{\frac{\sin x}{\sin x + 1}} - 1 = 0.$$

Домашнее задание

12.170. (МГУ, психологический, 1987, 4(6))

$$\sqrt{\frac{3}{4} - \cos x} = \sqrt{\frac{3}{4} - \cos 3x}.$$

12.171. (МГУ, почвоведения, 2004, 5(7))

Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $0 \le x < \pi$ и являющиеся решениями уравнения $\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{-\operatorname{tg} x}$.

12.172. (МГУ, почвоведения, 1996, 4(6))

Найти все решения уравнения $\sqrt{x + \sin x} = \sqrt{x - \sin 2x}$, удовлетворяющие неравенству $-2\pi < x < 2\pi$. *"Тест"*

12.173. (МГУ, геологический, 2005, 4(8))

Найти наименьший корень уравнения

$$\sqrt{\cos 2x + x - 11} = \sqrt{x - 15 - 5\cos x}.$$

12.174. (МГУ, химический, 1994, 3(5))

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}.$$

12.175. (МГУ, мех-мат, 1982, 3(5))

$$\sqrt{2\cos x \sin 2x} = \sqrt{5\sin x + 4\sin 2x}.$$

12.176. (МГУ, экономический, 1979, 1(5))

$$\sqrt{10 - 18\cos x} = 6\cos x - 2.$$

12.177. (МГУ, экономический, 1979, 1(5))

$$\sqrt{37 - 48\operatorname{ctg} x} = 8\operatorname{ctg} x - 5.$$

12.178. (МГУ, психологический, 2005, 3(6))

$$\sqrt{2\cos^2 x - \sqrt{3}} + \sqrt{2}\sin x = 0.$$

12.179. (МГУ, ВМиК, 2003, 2(6))

$$\sqrt{\sin x \cdot \sin 3x} = \cos x.$$

12.180. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2005, 3(7))
$$\sqrt{6\operatorname{ctg} x - 8} = \frac{1}{\sin x}.$$

12.181. (МГУ, ВМиК, 2005, 2(6))
$$\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15} \cdot \sin x.$$

12.182. (МГУ, ВМиК, апрель 1999, 3(6))
$$\sqrt{\frac{1 + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{8}} = -\sin x \cos x.$$

12.183. (МГУ, географический, 1972, 5(5))
$$2\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2 - 2\cos 2x} = 3\sin 2x.$$

12.184. $$\sqrt{\frac{1 - 4\cos^2 3x}{8\cos(2x - \frac{2\pi}{3})}} = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

12.185. (МГУ, ФНМ, апрель 2004, 5(6))
$$\sqrt{\sin x + 2\cos 2x} - \sqrt{2}\cos 2x = 0.$$

12.186. (МГУ, психологический, 1979, 1(5))
$$\sqrt{9 - 6\sqrt{2} - (12 - 8\sqrt{2})\cos x} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cos x + 1.$$

12.187. (МГУ, экономический, 1987, 1(6))
$$(2\sin x - 1)\sqrt{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0.$$ *"Тест"*

12.188. (МГУ, мех-мат, 1997, 1(6))
$$(\sqrt{3}\,\sin x + \cos x - \sqrt{2})\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0.$$

12.189. (МГУ, мех-мат, 1995, 3(6))
$$\sqrt{\sin 3x} \cdot \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

12.190. (МГУ, ВМиК, апрель 1996, 3(6))
$$\sqrt{12\sin x - \frac{9}{2}\cos 2x + \frac{17}{2}} = \frac{9}{8} + 4\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x.$$

12.191. (МГУ, ВМиК, 1993, 2(6))
На отрезке $0 \le x \le \pi$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x}$.

12.192.* $\sin x\sqrt{\cos\dfrac{3x}{4}} = 0$.

12.193.* (МГУ, ВМиК, Олимпиада "Абитуриент-2005", 6(6))
$$12\cos 2x + 8|\sin x|\sqrt{3 + |\sin x| - 3\cos 2x} = 11.$$

12.10.5 Показательные и логарифмические уравнения

12.194. (МГУ, химический, 1989, 3(5))
$$\log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2(\cos x) = 0.$$ *"Тест"*

12.195. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2005", 4(10))
$$\log_4(4\sin^2 2x) = 2 - \log_2(-2\,\mathrm{tg}\,x).$$

12.196. (МГУ, ВМиК, 1990, 3(6))
$$3 \cdot 64^{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0.$$

12.197.* (МГУ, ВМиК, апрель 1995, 3(6))
Найти все корни уравнения $2^{\cos x} + 5 \cdot 2^{-\cos x} = 2\sqrt{6}$, удовлетворяющие неравенствам $\frac{\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{3}$.

12.198. (МГУ, ИСАА, 2008, 5(8))
Найти корни уравнения $\cos\dfrac{4\pi}{x} + \sin\dfrac{8\pi}{x} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{x}\right)$, удовлетворяющие неравенству $\log_{x+2}(x^2 - 2x + 4) \le 1$.

Домашнее задание

12.199. (МГУ, социологический, 2001, 2(6))
$$\log_{\sin x}(3\sin x - \cos 2x) = 0.$$

12.200. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 2(8))
$$\log_{(-2\cos x)}(3\sin x - \cos 2x) = 0.$$

12.201. $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2.$

12.202. (МГУ, химический, 1989, 3(5))
$\log_2(3\cos x - \sin x) + \log_2(\sin x) = 0.$ *"Тест"*

12.203. (МГУ, мех-мат, 1978, 2(5))
Найти все решения уравнения $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$. *"Тест"*

12.204. (МГУ, химический, заочный тур, 2000, 3(12))
$$\log_{|\sin x|}(x^2 - 14x + 73) \geq \frac{2}{\log_5 |\sin x|}.$$

12.205. (МГУ, экономический, 1994, 3(5))
$$\log_3((x+10)\cos x) = \log_3\left(\frac{x+10}{\cos x}\right).$$

12.206. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, ФФМ, ФББ, географический, психологический, 2007, 6(8))
$$\log_{\cos x}(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2\sin^2 x + 5\sin 2x = 0.$$

12.207. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 4(8))
$$\log_{|\cos\frac{x}{2}|}\left|1 - 2\cos\frac{\pi}{6}\right| = \log_{\cos|\frac{x}{2}|}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.$$

12.208. (МГУ, геологический, 1995, 5(8))
$$\left(2\sqrt{3}\sin(\pi x + 3\pi) - \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\log_2(4 - x^2) = 0.$$ *"Тест"*

12.209. (МГУ, ВМиК (отд. бакалавров), 2006, 3(7))
$$\log_{\frac{6-|x-3|}{9-\pi}}(1 - \sin 2x - 2\sin x) = \log_{\frac{6-|x-3|}{9-\pi}}(-\cos x).$$

12.210. (МГУ, ВМиК (отд. специалистов), 2006, 2(6))
$$\log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\sin 2x - 2\sin x + 1) = \log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\cos x).$$ *"Тест"*

12.10.6 Дополнительные условия

12.211. Найдите все корни уравнения $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, удовлетворяющие условию $\cos x \geq 0$.

12.212. $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{2\pi}{3} + \sin x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. *"Решение"*

12.213. (МГУ, геологический, 1982, 4(6))

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\cos x\right) = -\frac{1}{2}.$$

12.214. Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}^2 x = 3\sin x$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{ctg} x \leq 0$.

12.215. (МГУ, химический, 1977, 5(5))

Найти корни уравнения

$$\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right),$$

удовлетворяющие неравенству $\sin\dfrac{3x}{2} < 0$.

Домашнее задание

12.216. Найдите все корни уравнения $2\cos 2x - 4\cos x = 1$, удовлетворяющие условию $\sin x \geq 0$.

12.217. (МГУ, экономический, 2007, 2(7))

Найдите все решения уравнения $\cos 3x = \sin x$, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам: $\sin x \geq 0$, $\cos x \leq 0$.

12.218. (МГУ, экономический, 1985, 3(5))

Найти все корни уравнения $(1 + \operatorname{tg}^2 x)\sin x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x < 0$.

12.219. (МГУ, геологический, 1982, 4(6))

$$\sin\left(\frac{11\pi}{8}\cos x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

12.220. (МГУ, экономический, 1989, 4(6))
Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$. *"Тест"*

12.221. (МГУ, мех-мат, март 1998, 2(6))
Найдите все решения уравнения $2\cos\dfrac{x}{3} + 2(\sqrt{5}-1)\sin\dfrac{x}{6} = 2 - \sqrt{5}$, удовлетворяющие условию $\cos\dfrac{3x}{4} < 0$.

12.222. (МГУ, экономический (отд. экономики), 2006, 3(7))
Найдите все значения x из интервала $(8;\, 12)$, для которых справедливо равенство $2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\sin x = \sqrt{6 - 6\cos\frac{14\pi}{5}}$.

12.223. (МГУ, химический, 1977, 5(5))

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

удовлетворяющие условию $\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) < 0$. *"Тест"*

12.11 Исследование области изменения функций

12.224. (МГУ, почвоведения, май 2001, 3(6))
$x^2 - \cos 2x^2 + 1 = 0.$

12.225. (МГУ, 2014, 4(8))

$$\cos^2 x - \cos x \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{4} = 0.$$

12.226. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 2(10))
Решите неравенство $\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x \geq 1$.

12.227. (МГУ, ВМиК, 2010, 3(6))

$$\operatorname{tg}^2(5x + \sin^2 y) + \left|\frac{5x + \cos 2y}{3} + \frac{3}{5x + \cos 2y}\right| = 4\cos^2\frac{7\pi}{4}.$$

12.228. (МГУ, психологический, 1993, 3(5))
Найти все решения уравнения $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right) + \sin 3x = \cos 3x - \sqrt{2}$ на отрезке $[-2\pi;\, 2\pi]$.

12.229. $\sin^7 x + \cos^{12} x = 1.$

12.230. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 3.$

12.231.* $\cos x \cdot \sin 7x + \sin x = \frac{3}{2}.$

12.232. (ФМШ, 1996, 4(6))
$\sin x \cdot \cos 4x = 1.$

12.233. (ФМШ, 1990, 3(6))
$x^2 - 2x\sin(xy) + 1 = 0.$

12.234.* $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$

12.235. (МГУ, химический, 1991, 4(5))
$4\cos^4 x = \cos 2x + 2\cos^2 x \cos 8x.$

12.236. (МГУ, психологический, 2002, 5(6))
$\cos 6x - 3\cos 5x + \cos 4x - 4\cos x + 5 = 0.$

12.237. $\sin^6 x \cdot \cos^8 x = \frac{1}{50}.$

12.238.* $\lg(\sin x - 0{,}6) + \lg(\cos x - 0{,}7) + 1 = 0.$

Домашнее задание

12.239. $\sin x + \sin 9x = 2.$

12.240. (МГУ, 2014, 4(8))
$\sin^2 x + \sqrt{2}|\sin x|\cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0.$

12.241. (МГУ, почвоведения, май 2001, 3(6))
$\frac{1}{\cos^2 z} = 1 - z^2.$

12.242. (МГУ, ИСАА, 1993, 5(6))
$\sin^2 x + 3x^2 \cos x + 3x^2 = 0.$

12.243. (МГУ, химический, 2003, 2(6))
$\cos^2 8x + \sin^2 x = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 8x.$

12.244. (МГУ, физический, 1969, 2(5))
$$\cos^2 x + \cos\frac{x}{2} \cdot \cos^2 x - \cos\frac{x}{2} - 1 = 2\left(\sin\frac{x}{4} - \cos x\right)^2.$$

12.245. $\sin^6 x + \cos^{13} x = 1.$

12.246. $\sin x + \cos 3x + \sin 5x = -3.$

12.247.* $3\sin x + 4\cos 3x \cos x + 2\sin 5x = 7.$

12.248. $\sin x \cdot \cos 6x = 1.$

12.249. $\sin x \cdot \cos 7x = 1.$

12.250. $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x(\sin y + \cos y) + 2 = 0.$

12.251. $1 + \cos 2x \cos 3x = \dfrac{1}{2}\sin^2 3x.$

12.252. $4\cos^2 x - 4\cos^2 3x \cos x + \cos^2 3x = 0.$

12.253. $5\cos^5 x - 3\sin^3 x = 5.$

12.254. (МГУ, психологический, 2002, 5(6))
$\cos 6x - 5\cos 5x + \cos 4x - 4\cos x + 7 = 0.$

12.255.* $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x.$

12.256. $\sin(\cos 3x) = 0{,}95.$

12.257.* (МГУ, ВМиК, апрель 2004, устный)
$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y).$

12.258.* $\left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \dfrac{1}{2}\sin y.$

12.259. $\sin^n x + \dfrac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \dfrac{1}{\sin^m x}$, m, n — натуральные нечетные числа.

12.12 Разные задачи

12.260. (МГУ, 2018, 8(8))

Найдите все пары чисел x, y из промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)}+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}\sin x}{3\sin y}+1\right)\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x}+1\right).$$

12.261. (МГУ, тест, мех-мат, 1998, 5(9)) *"Тест"*

Укажите, между какими корнями уравнения
$2\operatorname{tg}\alpha\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha+5)=3(3\operatorname{tg}^2\alpha+1)$ заключено число $-\frac{21}{2}$.

12.262. (МГУ, почвоведения, 2006, 5(7))

Найти наименьшее положительное число α, при котором синус α градусов равен синусу α радиан.

12.263. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi,\ \ 0\le\alpha,\beta,\gamma$, то из условия $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ следует, что один из углов α,β,γ равен $\frac{\pi}{2}$.

12.264. Найти все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению: $8\cos x\cos y\cos(x+y)+1=0$.

12.265. (МГУ, мех-мат, 1965)

Найти все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению: $\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\dfrac{3}{2}$.

12.266. Доказать, что если число α иррационально, то функция $\cos\alpha x+\cos x$ не является периодической.

Домашнее задание

12.267. (МГУ, географический, май 2003, 1(6))

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{2}-4x\right)+\operatorname{tg}x=\sqrt{3}\left(1-\frac{\operatorname{tg}4x}{\operatorname{ctg}x}\right).$$

12.268. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2006”, 2006, 3(10))
$$\cos\left(x^2+x\right)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

12.269. (МГУ, тест, мех-мат, 1998, 5(9)) *“Тест”*

Укажите, между какими корнями уравнения
$3\operatorname{tg}\alpha\cdot(\operatorname{tg}\alpha-2)^2=(2\operatorname{tg}\alpha-1)^2-7\operatorname{tg}\alpha+5$ заключено число $-\frac{31}{3}$.

12.270. Найти ближайший к 10 корень уравнения
$$\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=18\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right).$$

12.271. Найти все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению: $\cos(x-y)-2\sin x+2\sin y=3$.

12.272. $8\sin x\sin y\cos(x+y)=1$.

12.273. $\sin x+\sin y+\cos(x+y)=\dfrac{3}{2}$.

12.274. $\cos x+\cos y+\cos(x+y)+\dfrac{3}{2}=0$.

12.275.* $\sin x+\sin y+\sin(x+y)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

12.276.* Доказать непериодичность функции $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

12.277. (МГУ, экономический, 2000, 7(7))

Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\dfrac{1}{6};\,6\right]$ и удовлетворяет на этом множестве условиям
$$\frac{1}{\cos^2 f(x)-0{,}5}-12\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{10}{x}\ \text{ и }\ 0\le f(x)\le\frac{\pi}{4}.$$
Решите неравенство $f(x)\le\dfrac{\pi}{8}$.

12.13 Тригонометрическая замена в алгебраических уравнениях

12.278.* (МГУ, химический, заочный тур, 2000, 5(12))

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}.$$

12.279.* (МГУ, геологический, 1981, 6(6))

$$|x + \sqrt{1-x^2}| = \sqrt{2}(2x^2 - 1).$$

12.280.* (МГУ, биологический, 1985, 5(5))

Сколько корней на отрезке [0; 1] имеет уравнение

$$8x(1-2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1.$$

Домашнее задание

12.281.* (МГУ, эконом., менеджмент, апрель 2003, 4(5))

$$\frac{2}{3}x \cdot \sqrt{1 - \tfrac{x^2}{9}} + \tfrac{2}{9}x^2 - \tfrac{\sqrt{2}}{3}x - 1 = 0.$$

12.282. (МГУ, геологический, 1981, 6(6))

$$\sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

12.283.* $|2x - \sqrt{1-4x^2}| = \sqrt{2}(8x^2 - 1).$

12.284.* $1 + x^3 = (x^2 + 3x - 1)\sqrt{1-x^2}.$

12.285.* (МГУ, биологический, 1985, 5(5))

Сколько корней на отрезке [0; 1] имеет уравнение

$$8x(1-2x^2)(3x - 4x^3) = 1.$$

12.14 Обратные тригонометрические функции

12.286. $2\arcsin x = \arccos x.$ *“Решение”*

12.287. $2\arccos x = \arccos(x-1).$

12.288. $\sin(5\,\mathrm{arctg}\,3x) = 1.$

12.289. (МГУ, географический, 2001, 5(6))

$$4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

12.290. (МГУ, тест, мех-мат, 1997, 4(10))

$$\sqrt{4x^2+4x+3}\cdot \operatorname{arctg}(2x+1) + \sqrt{x^2-4x+6}\cdot \operatorname{arctg}(2-x) = 0.$$

12.291.* (МГУ, тест, мех-мат, 2004, 7(10))

Найти количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{13\pi^2+12x\pi-12x^2}\right) = \arcsin\left(\sin\sqrt{\tfrac{13}{4}\pi^2+3x\pi-3x^2}\right).$$

Домашнее задание

12.292. $2\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} x.$

12.293. $2\arccos x = \arcsin x.$

12.294. $2\arccos\dfrac{1}{x} = \arccos\dfrac{1-x}{x}.$

12.295. $\arcsin\dfrac{x}{2} - \arcsin x + \dfrac{\pi}{3} = 0.$

12.296. (МГУ, почвоведения, 2005, 2(6))

$$\sin(\sqrt{3}\arcsin x) = 1.$$

12.297. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2005, 4(7))

$$\begin{cases} \arccos\dfrac{x+y}{4} = \arccos\dfrac{5xy}{24}, \\ x^2+y^2 = 13. \end{cases}$$

12.298. (МГУ, географический, 2001, 5(6))

$$2\arcsin(3^x-8) - 3\arccos(11^x-120) = \frac{2\pi}{x}.$$

12.299. (МГУ, биологический, ФББ, ФФМ, 2006, 4(6))

$$9^{\arcsin(2x+1)} + \log_3(2\arcsin(2x+1)) - 3^{\arccos(6x+3)} + \log_{\frac{1}{3}}\arccos(6x+3) = 0.$$

12.300.* (МГУ, ФНМ, май 2000, 6(6))

$$x^2 = \arcsin(\sin x) + 10x.$$

12.15 Тригонометрические системы

12.301. (Филиал МГУ в г. Астана, 2018, 5(8)) *"Решение"*

$$\begin{cases} 5\sin y - 3\sqrt{5}\cos x = 7 - 2\cos^2 y, \\ \operatorname{tg} x = 2. \end{cases}$$

12.302. $\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ *"Тест"*

12.303. (МГУ, ВМиК, 1973, 1(5))

$$\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2\cos^2 y \sin x. \end{cases}$$

12.304. (МГУ, ВМиК, Олимпиада "Абитуриент-2005", 2(6))

$$\begin{cases} \sin 2(x+y) = 1, \\ xy = 9. \end{cases}$$

12.305. (МГУ, мех-мат, 1981, 2(5))

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

12.306.* $\begin{cases} \sin(y - 3x) = 2\sin^3 x, \\ \cos(y - 3x) = 2\cos^3 x. \end{cases}$

Домашнее задание

12.307. (МГУ, факультет Гос. управления, 2005, 4(7))

$$\begin{cases} \sin x - \sin 1 = 0, \\ \cos x - \cos 1 = 0. \end{cases}$$

12.308. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

12.309. (МГУ, географический, 2005, 1(6))

$$\begin{cases} 12\sin^2 x - \sin^2 y = 3, \\ 6\sin x + \cos y = -2. \end{cases}$$

12.310. $\begin{cases} \sqrt{\cos x} \cdot \sin 2y = 0, \\ \sin 2x + \cos y = 0{,}5. \end{cases}$

12.311. (МГУ, географический, 1987, 4(5))

Найти все решения системы $\begin{cases} \sin(2x + y) = 0, \\ \cos(x + y) = 1, \end{cases}$

удовлетворяющие условиям $-\pi \leq x \leq \pi$, $-2\pi \leq y \leq -\pi$.

12.312. (МГУ, психологический, 1999, 3(6))

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

12.313. (МГУ, филологический, 1977, 2(5))

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

12.314. (МГУ, филологический, 2000, 4(6))

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

12.315. (МГУ, мех-мат, 1993, 3(6))

$$\begin{cases} (\sin y - \cos x + 1)\left(\operatorname{tg}^2(x + \frac{\pi}{6}) + \operatorname{tg}^2(y + \frac{2\pi}{3})\right) = 0, \\ (\cos x + \sin y)(2 + \sin 2y + \cos y) = 0. \end{cases}$$

12.316. $\begin{cases} \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y, \\ x - y = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$

12.317. (МГУ, физический, 1967, 3(5))

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3, \\ |x - y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

12.318. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x + y), \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$

13 Тригонометрические неравенства

13.1 Тригонометрический круг

Решение тригонометрических неравенств удобно проводить с использованием тригонометрического круга, отмечая на нем дугами решения неравенств. При выписывании ответа надо правильно указывать концы промежутков. При решении неравенств с обратными тригонометрическими функциями можно воспользоваться графиками обратных тригонометрических функций.

13.1. $\cos x > \frac{1}{2}$. *"Решение"*

13.2. $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13.3. $\cos x < \frac{1}{2}$.

13.4. $\cos x < \frac{1}{4}$. *"Тест"*

13.5. $\sin x > -\frac{1}{2}$.

13.6. $\sin x < \frac{1}{3}$.

13.7. $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$.

13.8. $\operatorname{ctg} x \geq -3$.

13.9. $\cos x < \cos 6$.

13.10. $\arccos x < \arccos \frac{1}{3}$.

13.11. $\operatorname{arctg} x > -\frac{\pi}{3}$.

13.12. $\sin(\cos x) > 0$.

13.13. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$.

13.14. $\sin x + \sqrt{3}\cos x < 0$.

13.15. (МГУ, физический, 1966, 1(5))
$2\cos 2x + \sin 2x \geq \operatorname{tg} x$.

13.16. $\sqrt{3\sin x + 1} > 4\sin x + 1$. *"Тест"*

13.17. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2008, 3(6))
$\sqrt{1 + \sin 2x} + |\cos x| \leq \sin x$.

13.18. (МГУ, мех-мат, 2005, 3(6))
$$\frac{3 - x - \sqrt{5 - x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4} - \cos\frac{x-5}{4}} \geq 0.$$

13.19.* (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 10(10))
$4(1 - \operatorname{tg} x)^{2004} + (1 + \operatorname{tg} x)^{2006} \geq 2^{2006}$.

Домашнее задание

13.20. $\cos x > \dfrac{1}{4}$.

13.21. $\cos x < -\dfrac{1}{2}$.

13.22. $\sin x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

13.23. $\sin x > -\dfrac{1}{3}$.

13.24. $\operatorname{tg} x \geq 2$.

13.25. $\operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}$.

13.26. $\arcsin x \leq 5$.

13.27. $\operatorname{arcctg} x > 2$.

13.28. $4(\arccos x)^2 > 1$. *"Тест"*

13.29. $\sin x^2 < \dfrac{1}{2}$.

13.30. $4\sin x < 3\cos x$.

13.31. (МГУ, экономический, 1971, 3(5))
$11\sin x + \cos 2x - 6 \geq 0$.

13.32. $20\sin^2 x + 9\cos x < 21$.

13.33. $\sin x \geq \cos 2x$. *"Тест"*

13.34. $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x - 1 \geq 0$.

13.35. (МГУ, биолого-почвенный, 1971, 4(5))
$2\cos 8x \geq 3 + 4\sin 4x$.

13.36. (МГУ, биолого-почвенный, 1970, 5(5))
$2\sin^2 2x + 3\cos 2x < 0$.

13.37. (МГУ, химический, 1992, 2(5))
$\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$.

13.38. (МГУ, ВМиК, 1971, 2(5))

Найти все решения неравенства $\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x$, удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

13.39. (МГУ, ВМиК, 2000, 1(6))
$\sin x \sin |x| \geq -\dfrac{1}{2}$.

13.40. (МГУ, ВМиК, 2008, 3(6))
$\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leq \cos x$.

13.41. (МГУ, ИСАА, 1994, 4(6))
$$2\sin x - 1 \le \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}.$$

13.42. $\sqrt{3 - 4\cos^2 x} > 2\sin x + 1.$

13.43. (МГУ, мех-мат, 1966, 2(5))
$$5 + 2\cos 2x \le 3|2\sin x - 1|.$$ *"Тест"*

13.44. (МГУ, мех-мат, 1968, 3(6))
$$2\operatorname{tg} 2x \le 3\operatorname{tg} x.$$ *"Тест"*

13.45. (МГУ, почвоведения, 2001, 5(6))
$$2\log_\pi(\sin x)\log_\pi(\sin 2x) - \log_\pi^2(\sin 2x) \le \log_\pi^2(\sin x).$$

13.46. (МГУ, ВМиК, Олимпиада "Абитуриент-2006", 4(6))

Найдите все решения неравенства $\operatorname{tg} x > \dfrac{9 - 3\cos 2x}{3\sin 2x - 2}$, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{8} \le x < \frac{\pi}{2}$.

13.47. (МГУ, тест, мех-мат, 1996, 6(8))
$$\frac{\sqrt[6]{x^3 - 6x^2 + 9x}}{\cos x - \sin x} \ge 0.$$ *"Тест"*

13.48. $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < \dfrac{3}{8}.$

13.49. (МГУ, ВМиК, 1995, 4(6))
$$\log_{\cos x}\cos^2 x \ge \log_{\cos x - \frac{1}{2}}\left(\cos^2 x - \cos x - x^2 - 14x - \frac{51}{4}\right).$$

13.50. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Постройте график функции
$$f(x) = \sqrt{2\cos x + 2\sqrt{2\cos x - 1}} + \sqrt{2\cos x - 2\sqrt{2\cos x - 1}}.$$

13.51. (МГУ, психологический, 1996, 3(5))

Найти область определения функции
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-6\sin^2 2x - 2\sin 2x\cos 2x + 8 - \sqrt{3}}}.$$

13.2 Метод интервалов на тригонометрическом круге

13.52. $\sin 2x > \cos x$. *"Решение"*

13.53. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x \leq 0$. *"Тест"*

13.54. (МГУ, мех-мат, 1971, 2(5))

Найти все x из отрезка $0 \leq x \leq \pi$, удовлетворяющие неравенству

$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2}\sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Домашнее задание

13.55. (МГУ, геологический, 1970, 3(5))

Найти все значения x, удовлетворяющие неравенствам
$\sin 5x + \sin x > 0$, $0 < x < 2\pi$.

13.56. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$.

13.57. (МГУ, 2015, 3(8))

$$\cos x + \sqrt{2}\cos 2x - \sin x \geq 0.$$

13.58. (МГУ, химический, 1972, 5(5))

$$(\cos x - \cos 5x)(2\sin x + 3\cos x + 4) > 0.$$

13.59. $2\sin x \sin 2x \sin 3x < \sin 4x$.

13.3 Доказательство неравенств

В задачах №№ 13.60–13.66 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Доказать неравенства:

13.60. $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \dfrac{1}{8}$.

13.61. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\dfrac{3}{2}$.

13.62.* $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Домашнее задание

13.63. $\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}\le\dfrac{1}{8}.$

13.64. $\sin\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\beta}{2}+\sin\dfrac{\gamma}{2}\le\dfrac{3}{2}.$

13.65. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\dfrac{3}{2}.$

13.66.* $\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}\le\dfrac{3\sqrt{3}}{8}.$

13.67. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2008, 4(6)) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\cos x+\cos y+\cos z$ при условии $\sin x+\sin y+\sin z\ge\sqrt{5}$?

13.4 Обратные тригонометрические функции

13.68. $\operatorname{arctg} x>\operatorname{arcctg} x.$

13.69. (МГУ, мех-мат, тест, 2003, 5(10))
$\arccos(4x-4)>\arccos(-x).$ *"Решение"*

13.70. $\arcsin(\sin x)<\arccos(\cos x).$

13.71. $\arccos\dfrac{x}{\sqrt{10}}\ge\operatorname{arctg}3x.$

Домашнее задание

13.72. $\arcsin x>\arccos x.$

13.73. $\operatorname{arctg} x<\operatorname{arcctg} x-\dfrac{\pi}{6}.$

13.74. $\arcsin x<\arcsin(1-x).$

13.75. $\arccos x>\arccos x^2.$

13.76. (МГУ, хим, географ, биолог, психолог,... 2008, 3(7))
$\arccos 3x \leq \arccos \sqrt{6 - 15x}$.

13.77. $\operatorname{tg}^2(\arcsin x) \geq 1$.

13.78. $1 - \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4} + \arccos(x + |\sin y|) \leq 0$.

13.79. (МГУ, ВМиК, апрель 2003, 6(6))
$\arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) \geq 3x - 18$.

13.5 Оценки тригонометрических функций

Доказать неравенства:

13.80. $\sin x \leq x$ при $0 \leq x$.

13.81. $x \leq \operatorname{tg} x$ при $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

13.82. $\sin x > \dfrac{2}{\pi} x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

13.83. $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ для любых x.

Домашнее задание

13.84. (МГУ, ВМиК, апрель 2003, устный)
α, β, γ — углы остроугольного треугольника. Доказать, что
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2.$$

13.85. $\cos x + x\sin x > 1$ при $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

13.86. $\sin x \geq x - \dfrac{x^3}{4}$ при $0 \leq x < \pi$.

13.87. $\cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{16}$ при $0 \leq x < \pi$.

Ответы, указания, решения

11.6. *Доказательство.* По формулам удвоения углов
$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ имеем

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^3 =$$

$$= \frac{1-3\cos 2\alpha+3\cos^2 2\alpha-\cos^3 2\alpha+1+3\cos 2\alpha+3\cos^2 2\alpha+\cos^3 2\alpha}{8} =$$

$$= \frac{2+6\cos^2 2\alpha}{8} = \frac{1+3\cos^2 2\alpha}{4} = \frac{1+3(1-\sin^2 2\alpha)}{4} =$$

$$= \frac{4-3\sin^2 2\alpha}{4} = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$$

11.19. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$

Доказательство. Умножим равенство на $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 3\alpha + \ldots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos n\alpha =$$

$$= 2\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2} \iff$$

(разложим каждое произведение синуса и косинуса в разность синусов по формуле $2\sin x\cos y = \sin(x+y)-\sin(y-x)$)

$$\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{7\alpha}{2}-\sin\frac{5\alpha}{2}+\ldots+\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-$$

$$-\sin\frac{(2n-1)\alpha}{2} = \sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2} \iff$$

(в левой части равенства одинаковые слагаемые, встречающиеся со знаком "+" и "−" уничтожаются; остаются только самое "старшее" и самое "младшее"; они уничтожаются со слагаемыми в правой части равенства)

$$\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2} \iff 0=0.$$

11.48. 31.

11.55. $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}$.

Доказательство. Умножим и разделим левую часть равенства на $4\sin\dfrac{\pi}{5}$. По формуле $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ заменим вначале $2\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}$ на $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, а затем $2\sin\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}$ на $\sin\dfrac{4\pi}{5}$:

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$\left(\text{по формуле } \sin\alpha=\sin(\pi-\alpha) \text{ заменим } \sin\dfrac{4\pi}{5} \text{ на } \sin\left(\pi-\dfrac{4\pi}{5}\right)\right)$

$$=\frac{\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{4}.$$

11.58. $-44{,}5$. **11.99.** 2. **11.100.** 4. **11.101.** $-0{,}5$. **11.102.** $-\dfrac{31}{17}$.

11.103. $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$. **11.104.** $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$. **11.105.** -1.

11.106. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. **11.107.** $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

11.108. Найти $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$.

Решение. Обозначим $\alpha=\arcsin\dfrac{1}{3}$. Тогда $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$. Надо найти $\cos\alpha$. По формуле

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(перед корнем берем знак "+", поскольку в промежутке $-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$ косинус неотрицателен).

Ответ. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

11.109. $5-2\pi$. **11.110.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **11.111.** $\dfrac{3}{2}$. **11.112.** $\dfrac{3}{2}$. **11.113.** $2\sqrt{3}$.

11.114. 1. **11.115.** 1. **11.116.** 5. **11.117.** $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

11.118. $-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. **11.119.** $-\sin\dfrac{\alpha}{4}$; $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **11.120.** $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$.
11.121. $\dfrac{24}{7}$. **11.122.** $\dfrac{2}{11}$. **11.123.** $\dfrac{7+24\sqrt{3}}{50}$. **11.124.** 2.
11.125. $\dfrac{1}{8}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$. **11.126.** $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$.
11.127. $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$. **11.128.** $\sqrt{10}-3$. **11.129.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **11.130.** 1; 2.
11.131. $4\pi-10$. **11.132.** $4-\dfrac{\pi}{2}$.
12.1. $\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.2.** $k\pi$, $-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.3. $\dfrac{k\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{2k\pi}{7}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.4.** $\dfrac{k\pi}{3}$, $\dfrac{2k+1}{22}\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.5. $\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.6.** $\dfrac{\pi k}{4}$, $\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{\pi k}{7}$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.7. $-\dfrac{\pi}{4}\pm\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.8. $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{6}$; $-\dfrac{\pi}{56}+\dfrac{k\pi}{28}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.9.** $-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.10. $\dfrac{\pi}{48}+\dfrac{k\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{48}+\dfrac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.12.** $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.13. $\dfrac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.14.** $k\pi$, $\pm\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.15.** $\dfrac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.16. $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5}$; $\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{k\pi}{7}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.17.** $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.18. $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$; $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.19.** $12k\pi$, $3\pi+6k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.20. $\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.21.** $\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.22.** $\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.23. $\cos^{10}x+\sin^{10}x=\dfrac{29}{64}$. *Указание.* Используя формулы половинных углов, перейдем к уравнению относительно $\cos 2x$:

$$\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5=\frac{29}{64}.$$

После возведения в пятую степень слагаемые с нечетными степенями уничтожаются и получается биквадратное относительно $\cos 2x$ уравнение.

Ответ. $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.24. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.25.** а) Да; б) например, $(\sin 3x-1)\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$. **12.26.** $\frac{12}{7}$. **12.27.** $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.28. $-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ -\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.29. $-\frac{\pi}{12}+k\pi;\ -\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.30.** $2\pi+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.31. $4k\pi,\ \frac{2\pi}{3}+8k\pi,\ \frac{10\pi}{3}+8k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.32.** $\pm\frac{\pi}{15}+\frac{k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.33. $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.34.** $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.35. $\frac{2(-1)^k}{3}\arcsin\frac{5-\sqrt{17}}{4}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.36. $\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.37. $(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.38.** $\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5};\ -\frac{\pi}{15}+\frac{k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.39. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{11}}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.40. $\frac{(-1)^k\arcsin(\sqrt{3}-1)+k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.41. $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. **12.42.** $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.43. $\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.44.** $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.45. $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.46.** $\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.47. $k\pi,\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}k\in\mathbb{Z}$. **12.48.** $\frac{k\pi}{2},\ \pm\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.49. $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ \arcsin\frac{3}{5}-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{6}-\arcsin\frac{3}{5}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.50. $\operatorname{arctg}2+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.51. $3\sin^2 x-5\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$.

Решение. Если в исходном уравнении $\cos x=0$, то из уравнения следует, что и $\sin x=0$. Но одновременно косинус и синус одного аргумента в ноль не могут обращаться. Следовательно, $\cos x\neq 0$. Разделим на $\cos^2 x$ обе части исходного уравнения. Получим

$$3\mathrm{tg}^2 x - 5\,\mathrm{tg}\,x + 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,x = 1, \\ \mathrm{tg}\,x = \dfrac{2}{3}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \mathrm{arctg}\,\dfrac{2}{3} + k\pi. \end{array}\right.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4} + k\pi$; $\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.52. $\mathrm{arctg}\,2 + k\pi$; $\mathrm{arctg}\,3 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.53. $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.54.** $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.55. $\mathrm{arctg}\,2 + k\pi$; $\mathrm{arctg}\,3 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.56. $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + k\pi$; $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.57.** $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.58. $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $\mathrm{arctg}\,5 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.59.** $\frac{\pi}{4} + k\pi$; $\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

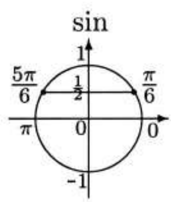
12.60. $-\frac{\pi}{4} + k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. **12.61.** $\pm\frac{\pi}{4} + k\pi$; $\pm\,\mathrm{arctg}\,2 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. **12.62.** $\mathrm{arctg}\,\frac{5 + \sqrt{34}}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.63. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

Решение. Рассмотрим метод введения дополнительного угла. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. Введем угол φ такой, что $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Нетрудно видеть, что в качестве такого угла годится угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Получим

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \iff \cos\varphi \sin x + \sin\varphi\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\iff \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2} \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$



$$\iff \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.64. $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\frac{5\pi}{12}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.65.** $\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{7}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.66. $\frac{2\pi}{3}+4k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.67.** $2k\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.68. $k\pi$; $\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.69.** $-\frac{\pi}{12}+2k\pi$; $-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.70. $-\frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.71. $\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{100}+\frac{2k\pi}{25}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.72. $-\frac{\pi}{108}+\frac{k\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.73.** $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

12.74. $\frac{2\pi}{3}+k\pi$, $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.75.** $[-\sqrt{97};\ \sqrt{97}]$.

12.76. $\pi+2k\pi$, $2\arcsin\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.77. $\frac{\pi}{15}-\frac{1}{5}\arcsin\frac{3}{5}+\frac{2k\pi}{5}$; $\frac{2\pi}{3}-\arcsin\frac{3}{5}+2l\pi$, $k,l\in\mathbb{Z}$.

12.79. $2k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.80.** $2k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.81. $f_{\min}=1-4\sqrt{2}$; $f_{\max}=1+4\sqrt{2}$.

12.82. $-\pi+2k\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.83.** $\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.84. $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.85.** $2k\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.86. $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\pi+2k\pi$, $\frac{5\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+2k\pi$, $\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. **12.87.** $\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.88. $2+\sin x=3\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. Используя формулу универсальной тригонометрической подстановки $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, перейдем к уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$2+\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=3\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Обозначим $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Получим алгебраическое уравнение относительно t:

$$2+\frac{2t}{1+t^2}=3t \iff 2+2t^2+2t=3t(t^2+1) \iff 3t^3-2t^2+t-2=0$$
$$\iff (t-1)(3t^2+t+2)=0 \iff \left[\begin{array}{l} t-1=0 \Leftrightarrow t=1, \\ 3t^2+t+2=0 \Leftrightarrow t\in\emptyset, \end{array}\right. \iff$$
$$t=1 \iff \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1 \iff \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi \iff x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.90. $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.91.** $-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \operatorname{arctg}(2\pm\sqrt{3})+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.92. $k\pi;\ \pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+k\pi;\ \pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.93.** 2.
12.94. $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.95.** $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.96.** $k\pi,$ $\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ -\frac{7\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.97.** $\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\operatorname{arctg}2+k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$
12.98. $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.99. $k\pi;\ -\frac{\pi}{12}+2k\pi;\ -\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.100. $k\pi;\ \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.101.** $2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi;$ $2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+2k\pi;\ 2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.102. $\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8},\ \frac{\pi}{4}-2+k\pi,\ \frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$
12.103. $\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.104.** $k\pi;\ \pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.105. $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.106.** $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ -\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.107. $k\pi,\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **12.108.** $\frac{\pi}{2}+k\pi,(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$
12.109. $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ \frac{13\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.110. $-\frac{11\pi}{24}+k\pi;\ -\frac{7\pi}{24}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.111. $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.112.** $2k\pi;\ -\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.113. $-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+2k\pi;\ -\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ $+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.114.** $\frac{17\pi}{6}+4k\pi;\ \frac{\pi}{6}+\frac{8k\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{18}+\frac{8k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$

12.115. $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.116.** $\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.117. $k\pi;\ \dfrac{2\pi}{3}+k\pi;\ \dfrac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.118.** $x=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$
12.119. $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2l\pi}{5},\ l\neq 5n+1,\ l,n\in\mathbb{Z}.$ **12.120.** $\dfrac{k\pi}{8},\ \dfrac{n\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}\backslash 4\mathbb{Z},$
$n\in\mathbb{Z}\setminus 3\mathbb{Z}.$ **12.121.** $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.122.** $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.123. $(-1)^{k+1}\arcsin\dfrac{1}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.124.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$
12.126. $\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.127.** $\dfrac{k\pi}{10},\ k\neq 5+10l,\ k,l\in\mathbb{Z}.$
12.128. $\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.129.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ \pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.130. $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.131.** $-\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2l\pi}{5},\ l\neq 5n-1,\ l,n\in\mathbb{Z}.$
12.132. $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{l\pi}{6};\ \dfrac{k\pi}{3},\ k\neq 3(2m+1),\ k,l,m\in\mathbb{Z}.$
12.134. $\dfrac{\pi}{30},\ \dfrac{11\pi}{30},\ \dfrac{61\pi}{30}.$ **12.135.** $\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{4\pi}{3}.$ **12.137.** $\dfrac{4}{3}.$
12.138. $-\dfrac{23\pi}{6},\ -\dfrac{19\pi}{6},\ -\dfrac{11\pi}{6},\ -4\arccos\left(-\dfrac{9}{10}\right).$ **12.139.** $\dfrac{5\pi}{3}.$
12.140. $\dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi-\arccos\dfrac{2}{5};\ 2\pi.$ **12.141.** $-\dfrac{29\pi}{42},\ -\dfrac{\pi}{42},\ \dfrac{55\pi}{42}.$
12.142. $-\dfrac{19\pi}{200};\ \dfrac{131\pi}{200}.$ **12.143.** $\dfrac{11\pi}{30}.$ **12.144.** $\dfrac{3\pi}{4};\ \pi.$ **12.145.** $\pm\dfrac{\pi}{2}.$
12.146. $\pi-\alpha;\ 2\pi+\alpha;\ 3\pi-\alpha$, где $\alpha=\arcsin(\sqrt{2}-1).$
12.147. $\dfrac{35\pi}{84},\dfrac{53\pi}{84},\dfrac{59\pi}{84}.$ **12.148.** $\dfrac{7\pi}{2}.$ **12.150.** $2k\pi,\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}.$
12.151. $\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.152.** $(-2\pi;\ -\pi]\bigcup\left\{-\dfrac{\pi}{2}\right\}\bigcup[0;\ \pi]\bigcup$
$\bigcup\left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}\bigcup\{2\pi\}.$ **12.153.** 1. **12.154.** $x\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{6}\right)\bigcup\left\{\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi\right\}.$
12.155. $3-\dfrac{\pi}{2},\ 3-\dfrac{5\pi}{2},\ 1-\dfrac{\pi}{6},\ 1+\dfrac{\pi}{6},\ 1+\dfrac{\pi}{2},\ 1-\dfrac{13\pi}{6},\ 1-\dfrac{11\pi}{6},\ 1-\dfrac{3\pi}{2}.$
12.156. $\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.157.** $-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.158. $\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.159.** $-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi;\ \pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.160. $-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi;\ -\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.161.** $-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.163. $(-1)^{k+1}\arcsin\dfrac{1}{4}+k\pi$, $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.165. $\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.166.** $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.167. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.168. $\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, $n=8k, 8k+3, 8k+5, 8k+6$; $\dfrac{4k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.169. $(-1)^k\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.170. $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.171.** 0; $\dfrac{3\pi}{4}$. **12.173.** 5π.

12.174. $2k\pi$; $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.175.** $\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.176. $\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.177.** $\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.178. $-\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$, $-\dfrac{11\pi}{12}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.179.** $\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.180. $\operatorname{arcctg}3+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.181.** $\pi+\operatorname{arcctg}2+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.182. $-\dfrac{\pi}{36}+k\pi$, $\dfrac{23\pi}{36}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.183. $k\pi$; $-\arccos\dfrac{-3+\sqrt{2}}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.184.** $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.185. $k\pi$; $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+k\pi$; $(-1)^k\arcsin\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.186. $\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.188.** $\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$; $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.189. $k\pi$; $\dfrac{2\pi}{3}+k\pi$; $\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$; $\dfrac{19\pi}{12}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.190. $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.191.** $\left[0;\ \dfrac{\pi}{3}\right]$.

12.192. $8k\pi$, $8k\pi+3\pi$, $8k\pi+5\pi$, $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{4k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.193. $\pm\arcsin\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.195.** $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.196. $\dfrac{(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.197.** $2\pi\pm\arccos\log_2(\sqrt{6}-1)$.

12.198. $-\dfrac{8}{5}$; $-\dfrac{24}{23}$; $\dfrac{8}{7}$; $\dfrac{24}{17}$. **12.199.** $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.200. $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.201.** $\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.204. $[6;\, 2\pi)\bigcup\left(2\pi;\, \dfrac{5\pi}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{2};\, 8\right]$. **12.205.** $2k\pi$; $\pi + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$, $l \leq -3$. **12.206.** $\operatorname{arctg} 5 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.207. $(-\pi + 4k\pi;\, 4k\pi) \cup (4k\pi;\, \pi + 4k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.209. $\dfrac{5\pi}{6}$; $\dfrac{17\pi}{6}$. **12.211.** $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.212. $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{2\pi}{3} + \sin x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. *Решение.* Из уравнения имеем

$$-\frac{2\pi}{3} + \sin x = \frac{\pi}{6} + k\pi \iff \sin x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $-1 \leq \sin x \leq 1$, то полученное уравнение имеет решение, если

$$-1 \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi \leq 1 \iff -1 - \frac{5\pi}{6} \leq k\pi \leq 1 - \frac{5\pi}{6}$$

$$\iff -\frac{1}{\pi} - \frac{5}{6} \leq k \leq \frac{1}{\pi} - \frac{5}{6} \overset{k \in \mathbb{Z}}{\iff} k = -1.$$

Таким образом,

$$\sin x = \frac{5\pi}{6} - \pi = -\frac{\pi}{6} \iff x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + n\pi,$$

$$\iff x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $(-1)^{n+1} \arcsin\dfrac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

12.213. $\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{9}\right) + 2k\pi$, $\pm\arccos\left(-\dfrac{5}{9}\right) + 2k\pi$, $\pm\arccos\dfrac{7}{9}$ $+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.214.** $\pi - \arcsin\dfrac{-1 + \sqrt{37}}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.215. $\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{4k\pi}{3}$; $\dfrac{13\pi}{12} + \dfrac{4k\pi}{3}$; $-\dfrac{7\pi}{18} + \dfrac{4k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.216. $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.217.** $\dfrac{5\pi}{8} + 2k\pi$; $\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.218. $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.219.** $\pm\arccos\dfrac{2}{11} + 2k\pi$, $\pm\arccos\dfrac{6}{11}$ $+2k\pi$, $\pm\arccos\left(-\dfrac{10}{11}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.221. $-\pi + 24k\pi$, $7\pi + 24k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.222.** $\dfrac{13\pi}{5}$. **12.224.** 0.

12.225. $\dfrac{7\pi}{3} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.226.** $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.227. $\begin{cases} x = \frac{2\pi+2}{15}, \\ y = \pm\arcsin\sqrt{\frac{\pi-2}{3}} + \pi k, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{-2\pi-4}{15}, \\ y = \pm\arcsin\sqrt{\frac{4-\pi}{3}} + \pi k, \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$.

12.228. $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{23\pi}{12}$. **12.229.** $k\pi$; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.230. $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.231.** $\emptyset$. **12.232.** $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.233. $\left(1; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$; $\left(-1; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.234. $k\pi$; $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.235.** $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.236. $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.237.** $\emptyset$. **12.238.** $\emptyset$. **12.239.** $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.240. $\frac{9\pi}{4} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.241.** 0. **12.242.** 0, $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.243. $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.244.** $2\pi + 8k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.245.** $2k\pi$; $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.246.** $\emptyset$. **12.247.** $\emptyset$. **12.248.** $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.249. $\emptyset$. **12.250.** $\left(-\operatorname{arctg}\sqrt{2} + l\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$; $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} + l\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. **12.251.** $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.252. $\frac{\pi}{2} + k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.253.** $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.254. $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.255.** $\emptyset$. **12.256.** $\emptyset$.

12.257. $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi\right)$; $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + n\pi\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

12.258. $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$. **12.259.** $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.260. $x = \arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $y = \arccos\frac{2}{\sqrt{3}}$. **12.262.** $\frac{\pi}{1 + \frac{\pi}{180}}$.

12.264. $\left(\frac{\pi}{3} + m\pi, \frac{\pi}{3} + n\pi\right)$; $\left(-\frac{\pi}{3} + m\pi, -\frac{\pi}{3} + n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

12.265. $\left(\frac{\pi}{3} + 2m\pi, \frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$; $\left(-\frac{\pi}{3} + 2m\pi, -\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

12.267. $\frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.268.** $\pm\sqrt{2k\pi}$; $-1 \pm \sqrt{1 + 2k\pi}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

12.270. 3π. **12.271.** $\left(-\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

12.272. $\left(\frac{\pi}{6} + m\pi, \frac{\pi}{6} + n\pi\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6} + m\pi, -\frac{\pi}{6} + n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

12.273. $\left(\frac{\pi}{6} + 2m\pi, \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6} + 2m\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

12.274. $\left(\frac{2\pi}{3}+m\pi, \frac{2\pi}{3}+n\pi\right)$; $\left(-\frac{2\pi}{3}+m\pi, -\frac{2\pi}{3}+n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.
12.275. $\left(\frac{\pi}{3}+2m\pi, \frac{\pi}{3}+2n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$. **12.277.** $[3\sqrt{2}; 6]$.
12.278. $\cos\frac{3\pi}{10}$. **12.279.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **12.280.** 4.
12.281. $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$. **12.282.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.
12.283. $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$. **12.284.** -1. **12.285.** 3.
12.286. $2\arcsin x = \arccos x$.

Решение. Из тождества $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ выразим $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ и подставим в исходное уравнение:

$$2\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \iff 3\arcsin x = \frac{\pi}{2} \iff \arcsin x = \frac{\pi}{6}$$

$$\iff x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

12.287. 0; $\frac{1}{2}$. **12.288.** $-\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}$; $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$. **12.289.** 3. **12.290.** -3.
12.291. 9. **12.292.** $\sqrt{3}$. **12.293.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.294.** 2. **12.295.** 1.
12.296. $\sin\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **12.297.** $\left(\frac{-13-\sqrt{481}}{10}, \frac{-13+\sqrt{481}}{10}\right)$; $\left(\frac{-13+\sqrt{481}}{10}, \frac{-13-\sqrt{481}}{10}\right)$. **12.298.** 2. **12.299.** $\frac{-7+\sqrt{17}}{8}$.
12.300. 0; $\frac{9+\sqrt{81+12\pi}}{2}$.

12.301. $\begin{cases} 5\sin y - 3\sqrt{5}\cos x = 7 - 2\cos^2 y, \\ \operatorname{tg} x = 2. \end{cases}$

Решение. Из второго уравнения системы

$$\operatorname{tg} x = 2 \iff x = \operatorname{arctg} 2 + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}.$$

В силу тождества

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 5 \iff \cos^2 x = \frac{1}{5} \iff \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Рассмотрим 2 случая.

1) Если $x = \operatorname{arctg} 2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Подставим в первое уравнения системы:

$$5\sin y - 3\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 7 - 2\cos^2 y \iff 5\sin y - 3 = 7 - 2(1-\sin^2 y)$$

$$\iff 2\sin^2 y - 5\sin y + 8 = 0.$$

Это квадратное уравнение не имеет решений, так как дискриминант $D = 25 - 64 < 0$.

2) Если $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Подставим в первое уравнения системы:

$$5\sin y - 3\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 7 + 2\cos^2 y \iff 5\sin y + 3 = 7 - 2(1-\sin^2 y)$$

$$\iff 2\sin^2 y - 5\sin y + 2 = 0 \iff \sin y = \frac{1}{2};\ 2 \overset{-1\le\sin y\le 1}{\Longrightarrow}$$

$$\sin y = \frac{1}{2} \iff y = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \text{ и } y = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2k\pi, \\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2k\pi, \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi, \end{cases}$ $k, n \in \mathbb{Z}$.

12.302. $\left(-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} + l\pi,\ \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} - l\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

12.303. $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2n\pi,\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ (-1)^{k}\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$. **12.304.** $\left(x_k,\ \dfrac{\pi}{4} + k\pi - x_k\right)$; $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -2, -1, 0, 1$, где $x_k = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right)^2 - 36}$.

12.305. $\left((-1)^n\dfrac{\pi}{4} + n\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

12.306. $\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ \pi + 2m\pi\right)$, $k, m \in \mathbb{Z}$. **12.307.** $1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.308. $\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2} + l\pi,\ \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} - l\pi\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2} + l\pi,\ \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} - l\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. **12.309.** $\left((-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ 2l\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

12.310. $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2l\pi\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi,\ 2l\pi\right)$; $\left(-\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ 2l\pi\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + l\pi\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + l\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

12.311. $(-\pi,-\pi)$; $(0,-2\pi)$; $(\pi,-\pi)$.

12.312. $\left(\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,(-1)^l\frac{\pi}{4}+l\pi\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,(-1)^l\frac{\pi}{3}+l\pi\right)$, $k,l\in\mathbb{Z}$.

12.313. $\left(\frac{\pi}{24}+k\pi,\frac{5\pi}{24}-k\pi\right)$; $\left(\frac{5\pi}{24}+k\pi,\frac{\pi}{24}-k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

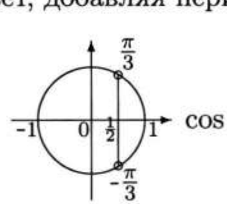
12.314. $\left(n\pi,\frac{\pi}{4}-n\pi\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,-k\pi\right)$, $k,n\in\mathbb{Z}$.

12.315. $\left(-\frac{\pi}{3}+2n\pi,-\frac{5\pi}{6}+2m\pi\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6}+2n\pi,-\frac{2\pi}{3}+2m\pi\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}+2n\pi,\frac{\pi}{3}+2m\pi\right)$, $n,m\in\mathbb{Z}$.

12.316. $\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.317. $\left(\frac{\pi}{12}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2-3\sqrt{3}}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{12}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2-3\sqrt{3}}{6}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.318.** $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$.

13.1. $\cos x>\frac{1}{2}$. *Решение.* Используем тригонометрический круг и ось косинусов. Отметим на оси косинусов точку $\frac{1}{2}$ и восстановим перпендикуляр к оси до пересечения с тригонометрическим кругом. Отметим на тригонометрическом круге точки пересечения и дугу, которая является решением неравенства. Выпишем ответ, добавляя период косинуса 2π.



$$-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3},$$

$$-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

13.2. $\left(-\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.3. $\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.5. $\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.6. $\left(\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2k\pi;\ \arcsin\frac{1}{3}+2\pi+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.7. $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{3}+k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.8.** $(k\pi;\ \operatorname{arcctg}(-3)+k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.9. $(2\pi-6+2k\pi;\ 6+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.10.** $\left(\dfrac{1}{3};\ 1\right]$.

13.11. $(-\sqrt{3};\ +\infty)$. **13.12.** $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.13. $\left(-\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi;\ \dfrac{\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.14. $\left(-\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi;\ -\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.15. $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ -\operatorname{arctg}2+k\pi\right]\bigcup\left[-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.17. $\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\ \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.18.** $[1;\ 2)\cup(2;\ \sqrt{5}]$.

13.19. $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ -\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]\bigcup\left[\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.20. $\left(-\arccos\dfrac{1}{4}+2k\pi;\ \arccos\dfrac{1}{4}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

13.21. $\left(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi;\ \dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.22. $\left(\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi;\ \dfrac{9\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.23. $\left(-\arcsin\dfrac{1}{3}+2k\pi;\ \pi+\arcsin\dfrac{1}{3}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.24. $\left[\operatorname{arctg}2+k\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.25. $\left[\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\pi+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.26.** $[-1;1]$. **13.27.** $(-\infty;\operatorname{ctg}2)$.

13.29. $\left(-\sqrt{\dfrac{\pi}{6}};\ \sqrt{\dfrac{\pi}{6}}\right)\bigcup\left(-\sqrt{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi};\ -\sqrt{-\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi}\right)\bigcup$
$\bigcup\left(\sqrt{-\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi};\ \sqrt{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi}\right)$, $k=1,2,\ldots$.

13.30. $\left(2k\pi-\pi+\arcsin\dfrac{3}{5};\ \arcsin\dfrac{3}{5}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.31. $\left[\dfrac{\pi}{6}+2k\pi;\ \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.32. $\left(\arccos\dfrac{1}{5}+2k\pi;\ 2\pi-\arccos\dfrac{1}{5}+2k\pi\right)\bigcup$
$\bigcup\left(-\arccos\dfrac{1}{4}+2k\pi;\ \arccos\dfrac{1}{4}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.34. $\left(k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]\bigcup\left\{\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.35. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.36.** $\left(\frac{\pi}{3}+k\pi;\ \frac{2\pi}{3}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.
13.37. $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.38.** $\left(-\frac{7\pi}{12};-\frac{\pi}{2}\right]\bigcup\left[0;\frac{\pi}{12}\right)$.
13.39. $\left[-\frac{\pi}{4};+\infty\right)\bigcup\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi;\ \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$, $k=-1,-2\ldots$.
13.40. $\left[2k\pi;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.41.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
13.42. $\left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.
13.45. $\left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.46.** $\left(\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.
13.48. $\left(-\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2};\ \frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.49.** $[-13;-4\pi)\bigcup$
$\left(-4\pi;-\frac{11\pi}{3}\right)\bigcup\left(-\frac{7\pi}{3};\ -2\pi\right)\bigcup\left(-2\pi;-\frac{5\pi}{3}\right)\bigcup\left(-\frac{\pi}{3};\ -1\right]$.
13.50. $f(x)=2$ при $x\in$ ОДЗ $=\left[2k\pi-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.
13.51. $x\in\mathbb{R}$.

13.52. $\sin 2x>\cos x$. *Решение.* Перенесем $\cos x$ в левую часть неравенства, разложим $\sin 2x$ как синус двойного угла, вынесем за скобки общий множитель $2\cos x$:

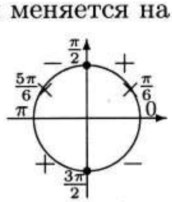
$$2\sin x\cos x-\cos x>0 \iff 2\cos x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)>0.$$

Решаем полученное неравенство методом интервалов на тригонометрическом круге. Найдем нули сомножителей:

$\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ (отмечаем на тригонометрическом круге как жирную точку: $\bullet$);

$\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi$ (отмечаем на тригонометрическом круге знаком умножения: $\times$).

Все корни кратности один. При переходе через каждый корень знак произведения меняется на противоположный.



Ответ. $\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\bigcup\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.54. $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{3\pi}{4}\right)\bigcup\left(\frac{5\pi}{6};\ \pi\right]$. **13.55.** $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right)\bigcup$ $\left(\frac{3\pi}{4};\ \pi\right)\bigcup\left(\frac{5\pi}{4};\ \frac{4\pi}{3}\right)\bigcup\left(\frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{4}\right)$. **13.56.** $\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)$ $\bigcup\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi;\ \frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)\bigcup\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.57. $\left[-\frac{5\pi}{12}+2k\pi;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\right]\bigcup\left[\frac{11\pi}{12}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.58. $\left(2k\pi;\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\bigcup$ $\bigcup\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\bigcup\left(\frac{5\pi}{3}+2k\pi;\ 2\pi+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.59. $\left(k\pi;\ \frac{\pi}{6}+k\pi\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{5\pi}{6}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.67. 2. **13.68.** $(1;\ +\infty)$.

13.69. $\arccos(4x-4)>\arccos(-x)$. *Решение.* Поскольку для $\arccos\alpha$ ОДЗ $-1\le\alpha\le1$ и арккосинус монотонно убывает, то

$$-1\le 4x-4<-x\le1 \iff \begin{cases}-1\le 4x-4,\\ 4x-4<-x,\\ -x\le1,\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}3\le 4x,\\ 5x<4,\\ -1\le x,\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{3}{4}\le x,\\ x<\frac{4}{5},\\ -1\le x,\end{cases} \iff \frac{3}{4}\le x<\frac{4}{5}.$$

Ответ. $\left[\frac{3}{4};\ \frac{4}{5}\right)$.

13.70. $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ 2\pi+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.71.** $[-\sqrt{10};\ 1]$.

13.72. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right]$. **13.73.** $\left(-\infty;\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **13.74.** $\left[0;\ \frac{1}{2}\right)$.

13.75. $[-1;\ 0)$. **13.76.** $\frac{1}{3}$. **13.77.** $\left(-1;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\bigcup\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right)$.

13.78. $(1, k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.79.** $\left(-\infty;\ \frac{4\pi+18}{5}\right]\bigcup[8\pi-18;\ 18-3\pi]$.

Часть 4

- Арифметические прогрессии
- Геометрические прогрессии
- Текстовые задачи

14 Арифметическая прогрессия

Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется *арифметической прогрессией*, если каждый последующий член, начиная со второго, равен предыдущему плюс некоторое число d, называемое *разностью прогрессии*, т. е.

$$a_n = a_{n-1} + d \quad (n \geq 2), \quad d - \text{разность прогрессии.}$$

Общий член арифметической прогрессии может быть выражен через первый член и разность прогрессии по формуле:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \geq 1.$$

Сумма n членов арифметической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ может быть выражена через первый и последний член арифметической прогрессии по формуле:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Подставляя формулу для n-ого члена арифметической прогрессии, получим формулу суммы n членов арифметической прогрессии через первый член и разность прогрессии по формуле:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Формулы для a_n и S_n можно доказать по методу математической индукции.

Арифметическая прогрессия полностью определяется через свой первый член a_1 и разность прогрессии d.

Арифметическая прогрессия является *возрастающей*, если $d > 0$, и *убывающей*, если $d < 0$.

Для членов арифметической прогрессии можно доказать следующие свойства:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1}, \quad 1 \leq k \leq n \qquad (1)$$

(действительно, $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k+1-1)d = 2a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$);

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \ldots = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \quad 1 \leq k < n \qquad (2)$$

$$\left(\text{действительно}, \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2} = \right.$$
$$\left. = \frac{a_1+(n-k-1)d+a_1+(n+k-1)d}{2} = \frac{2a_1+2(n-1)d}{2} = a_n\right).$$

14.1. Любые ли три числа могут являться членами (необязательно последовательными) какой-нибудь арифметической прогрессии?

14.2. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 5(8))
Найдите четыре числа, которые образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних равна 18 и второе число меньше третьего на 20%.

14.3. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна $\frac{5}{3}$, а произведение третьего и четвертого равно $\frac{65}{72}$. Найти сумму первых 17 членов этой прогрессии. *"Решение"*

14.4. (МГУ, географический, 2006, 2(6))
Числа y и z таковы, что последовательность $1, \sqrt{y}, \sqrt{z}$, а также последовательность $1,\ y-1,\ z-y$ являются арифметическими прогрессиями. Найти разность второй прогрессии.

14.5. (МГУ, ИСАА, 1993, 2(6))
Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых 11 членов этой прогрессии.

14.6. Найти сумму всех положительных четных двузначных чисел, делящихся на 3 нацело. *"Решение"*

14.7. (МГУ, экономический, 1971, 4(5))
Вычислить сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся на 13.

14.8. (Филиал МГУ в г. Баку, 2014, 4(8))
В прямоугольной таблице 10 строк и 30 столбцов. Строки занумерованы числами $1, 2, \ldots, 10$. В каждой клетке таблицы стоит число $7+5i+2j$, где i — номер строки, j — номер столбца, в которых стоит клетка. Найдите сумму всех чисел в таблице.

14.9. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член этой же прогрессии в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена этой прогрессии на ее шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найти первый член и разность прогрессии. *"Решение"*

14.10. Известно, что при любом n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности выражается формулой $S_n = 4n^2 - 3n$. Найти три первых члена этой последовательности. Доказать, что последовательность является арифметической прогрессией.

14.11. (МГУ, почвоведения, май 2001, 4(6))
Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма членов, сколько бы начиная с первого их ни взять, всегда равна утроенному квадрату числа этих же членов.

14.12. (МГУ, тест, мех-мат, 2001, 4(10))
Из образцов трех сплавов олова, цинка и меди получили новый сплав, в котором количества указанных веществ, расположенные в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию. Первый образец массой 5 г состоял из олова и меди, второй — из 16 г меди и 7 г цинка, а третий — из 8 г цинка и 21 г олова. Сколько граммов олова было в первом образце?

14.13. (МГУ, ВМиК, 2010, 1(6))
В арифметической прогрессии первый член отрицательный и равен -405, разность равна 18. Сумма абсолютных величин (модулей) первых n членов этой прогрессии равна 5661. Найдите n.

14.14. (МГУ, мех-мат, март 1996, 5(6))
Какое наибольшее число членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 4 при условии, что квадрат ее первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 100?

14.15. (МГУ, психологический, 1967)
Найти числа, одновременно являющиеся членами двух арифметических прогрессий $2, 5, 8, \ldots, 332$ и $7, 12, 17, \ldots, 157$. Сколько имеется таких чисел?

14.16.* (МГУ, химический, май 1999, 7(7))

Функция $f(x)$ удовлетворяет следующему условию: для любых чисел a и b выполняется равенство $f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a)+2f(b)}{3}$. Найти значение функции $f(1999)$, если $f(1) = 1$ и $f(4) = 7$.

14.17.* (МГУ, химический, 1999, 7(7))

Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ определяется по правилу:
$a_0 = 0,\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ 2a_n, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$ Найти a_{1999}.

14.18.* (МГУ, химический, май 2001, 7(7))

Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ устроена следующим образом: $a_1 = 1$, каждое последующее число равно удвоенной сумме предыдущих чисел, т. е. $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 2(a_1 + a_2)$ и т. д. Найти произведение всех чисел от a_1 до a_{2001}.

14.19.* (МГУ, химический, 2001, 7(7))

Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению
$f(x+1) = f(x) + 2x + 1$. Найти $f(2001)$, если $f(0) = 0$.

14.20.* (МГУ, мех-мат, март 2000, 2(6))

О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвертых степеней равна 51. Найти седьмой член этой прогрессии.

14.21. (МГУ, мех-мат, 2003, устный)

Числовая функция для любых чисел x и y удовлетворяет равенству $f(x+y) = f(x) + f(y) + 80xy$. Найти $f(\frac{4}{5})$, если $f(\frac{1}{4}) = 2$.

14.22. Задано 1001 число, сумма любых двух из которых больше 1. Доказать, что сумма всех чисел больше $\frac{1001}{2}$.

14.23. (МГУ, географический, 1993, 5(5))

При каких a четыре корня уравнения $x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$ образуют арифметическую прогрессию?

Домашнее задание

14.24. Найти арифметическую прогрессию $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если известно, что $a_1 + a_3 + a_5 = -12$ и $a_1 a_3 a_5 = 80$.

14.25. (МГУ, факультет Гос. управления, 2005, 1(7))

Можно ли разделить сумму в 196 рублей на 16 разных частей так, чтобы ближайшие по величине части отличались на 50 копеек?

14.26. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а в каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты 5700 м?

14.27. (МГУ, геологический, 1992, 1(6))
Четвертый член арифметической прогрессии равен 16, а сумма седьмого и десятого равна 5. Найти сумму первых восемнадцати членов этой арифметической прогрессии.

14.28. (МГУ, физический, 1992, 5(8))
Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый и девятый члены дают в сумме 40, а сумма седьмого и тринадцатого членов равна 58.

14.29. (МГУ, социологический, 1999, 2(6))
Найти первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых пяти членов с нечетными номерами на единицу больше суммы первых пяти членов с четными номерами и равна квадрату первого члена.

14.30. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2007, 1(6))
Три числа $8x$, $3-x^2$ и -4 в указанном порядке образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите x и укажите разность этой прогрессии.

14.31. (МГУ, психологический, 1984, 5(7))
Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого ее членов меньше 4. Найти первый член этой прогрессии.

14.32. (МГУ, геологический, 2007, 6(8))
Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел больше 337, но меньше 393. Чему равен восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырем?

14.33. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2005, 1(7))
В убывающей арифметической прогрессии разность девятого и четвертого членов равна третьему, а сумма квадратов первого и второго членов равна 4. Найдите сумму первых двадцати пяти членов этой прогрессии.

14.34. (МГУ, ВМиК, 1990, 2(6))

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найти a_{12}, если $a_{20} = 3a_9$.

14.35. (МГУ, ИСАА, 1993, 2(6))

Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых 7 членов этой прогрессии.

14.36. (МГУ, химический, 1989, 2(5))

Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ является арифметической прогрессией. Известно, что $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$. Найти $a_5 + a_9$.

14.37. (МГУ, геологический, 2005, 5(8))

В арифметической прогрессии квадрат суммы третьего и четвертого ее членов равен сумме второго и пятого ее членов. Чему равна сумма первых шести членов этой прогрессии?

14.38. (МГУ, ВМиК, 1988, 1(6))

Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

14.39. (МГУ, ВМиК, апрель 1995, 1(6))

В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четвертого по четырнадцатый включительно равна 77. Найти номер того члена прогрессии, который равен 7.

14.40. (МГУ, ВМиК, 2001, 2(6))

Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии — натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

14.41. (МГУ, мех-мат, тест, 1995, 3(8))

В арифметической прогрессии первый член и разность положительны, а сумма первых десяти членов равна разности квадратов шестого и пятого членов. Найти разность этой прогрессии.

14.42. Найти сумму всех положительных четных трёхзначных чисел, делящихся на 3 нацело.

14.43. При делении тринадцатого члена арифметической прогрессии на третий член этой же прогрессии в частном получается 3, а при делении восемнадцатого члена этой прогрессии на ее седьмой член в частном получается 2 и в остатке 8. Найти первый член и разность прогрессии.

14.44. Известно, что при любом n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности чисел выражается формулой $S_n = 2n^2 + 3n$. Найти десятый член этой последовательности. Доказать, что последовательность является арифметической прогрессией.

14.45. (МГУ, психологический, 1997, 3(6))
В убывающей арифметической прогрессии произведение первого и ее последнего членов равно $3\frac{2}{3}$, а сумма второго и предпоследнего членов равна $11\frac{1}{3}$. Найти первый член прогрессии.

14.46. Решить уравнение:
$(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\ldots+(x^2+20x+39) = 4500.$

14.47. (МГУ, географический, 1994, 2(5))
Сумма первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n) в пять раз меньше суммы первых двадцати пяти членов арифметической прогрессии (b_n). Найдите отношение разности прогрессии (a_n) к разности прогрессии (b_n), если известно, что эти разности отличны от нуля и $4a_{12} = b_{19}$.

14.48. (МГУ, географический, май 1999, 2(6))
Сумма первых пяти членов убывающей арифметической прогрессии равна (-5), а их произведение равно (-280). Найти сотый член прогрессии.

14.49. Показать, что для всякой арифметической прогрессии при любом n выполняется равенство $S_{2n} = S_n + \frac{1}{3}S_{3n}$
(S_k — сумма k первых членов прогрессии).

14.50. В арифметической прогрессии $S_k = S_l$, $k \neq l$. Найти S_{k+l}.

14.51. (МГУ, геологический, 1999, 6(8))
Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots$, в которой $a_3 = -13$, $a_7 = 3$. Определите, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найдите значение этой суммы.

14.52. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 3(10))
Петя последовательно выписывает целые числа, начиная с 21, так, что каждое следующее число меньше предыдущего на 4, а Вася, глядя на очередное число, подсчитывает сумму всех выписанных к этому моменту чисел. Какая из найденных Васей сумм окажется ближайшей к 55?

14.53. (МГУ, психологический, 1967)
Найти числа, одновременно являющиеся членами двух арифметических прогрессий $3, 7, 11, \ldots, 407$ и $2, 9, 16, \ldots, 709$. Сколько имеется таких чисел?

14.54. (МГУ, ВМиК, 2005, 3(6))
Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, являются арифметическими прогрессиями, $a_{11} = 32$, $b_{21} = 43$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенствами $c_n = (-1)^n \cdot a_n + (-1)^n \cdot b_n$. Сумма первых сорока членов последовательности $\{c_n\}$ равна 100, а сумма первых ее двадцати трех членов равна -60. Найти b_{40} и сумму первых ста членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$.

14.55.* (МГУ, химический, май 2001, 7(7))
Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ устроена следующим образом: $a_1 = 1$, каждое последующее число равно утроенной сумме предыдущих чисел, т. е. $a_2 = 3a_1$, $a_3 = 3(a_1 + a_2)$ и т. д. Найти произведение всех чисел от a_1 до a_{2001}.

14.56.* (МГУ, химический, 2001, 7(7))
Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению
$f(x+1) = f(x) + 2x + 3$. Найти $f(2001)$, если $f(0) = 1$.

14.57.* (МГУ, мех-мат, март 2000, 2(6))
О первых шести членах возрастающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвертых степеней равна 49. Найти первый член этой прогрессии.

14.58. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

15 Геометрическая прогрессия

Последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ $(b_1 \neq 0)$, называется *геометрической прогрессией*, если каждый последующий член последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое число q, $q \neq 0$, называемому *знаменателем прогрессии*, т. е.

$$b_n = b_{n-1} \cdot q \quad (n \geq 2), \quad q - \text{знаменатель прогрессии.}$$

Общий член геометрической прогрессии может быть выражен через первый член и знаменатель прогрессии по формуле:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Сумма n членов геометрической прогрессии может быть выражена через первый член и знаменатель прогрессии по формуле:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

Формулы для b_n и S_n можно доказать по методу математической индукции.

Если $|q| < 1$, то прогрессию называют *бесконечно убывающей*. Предел суммы ее членов называют *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии*. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S_\infty = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

Геометрическая прогрессия полностью определяется через первый член b_1 и знаменатель прогрессии q.

Для членов геометрической прогрессии можно доказать следующее свойство:

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1} = \ldots = b_{n-k}b_{n+k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

15.1 Конечная геометрическая прогрессия

15.1. Любые ли три числа отличные от нуля могут являться членами (необязательно последовательными) какой-нибудь геометрической прогрессии?

15.2. (МГУ, ИСАА, 1995, 1(6))

Найти x, если известно, что числа -1, $x+2$, $\sin(\arcsin x)$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию.

15.3. (МГУ, химический, 1989, 2(5))

Последовательность чисел $b_1, b_2, b_3, \dots$ является геометрической прогрессией. Известно, что $b_1 \cdot b_3 \cdot b_{11} = 8$. Найти $b_2 \cdot b_8$.

15.4. (МГУ, ВМиК, 1996, 1(6))

Числа a, b, c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a+d=10$, $ad=7$. Найти b^3+c^3.

15.5. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2007", 3(10))

Какие значения может принимать выражение
$\log_{(b_{11}b_{50})}(b_1 b_2 \dots b_{60})$, где $b_1, b_2, \dots$ — геометрическая прогрессия?

15.6. Найти четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна (-49), а сумма средних членов равна 14. *"Решение"*

15.7. (МГУ, психологический, 1997, 3(6))

В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего ее членов равна 164, а произведение второго и предпоследнего членов равно 324. Найти последний член прогрессии.

15.8. Найти сумму первых n членов ряда $1+11+111+\cdots$. *"Решение"*

15.9. (МГУ, мех-мат, май 1993, 2(6))

Сумма первых 5 членов геометрической прогрессии равна ее первому члену, умноженному на 5, а сумма первых 15 членов равна 100. Найти сумму первого, шестого и одиннадцатого членов этой прогрессии.

15.10. (МГУ, психологический, 2000, 2(5))

Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых первый член равен десяти, сумма второго и третьего членов равна целому числу, кратному четырем, и не превосходит одной тысячи, а знаменатель больше единицы. Указать знаменатели всех таких прогрессий.

15.11. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма квадратов тех же чисел равна 91. Найти эти числа.

15.12.* (МГУ, биологический, 1993, 4(6))

Даны две геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1. Известно, что сумма вторых членов прогрессий равна 3, а сумма пятых — равна 161. Найти сумму шестых членов прогрессий.

15.13.* Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами одной геометрической прогрессии?

15.14. (МГУ, социологический, 2003, 6(6))

Определить все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения $x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$ образуют геометрическую прогрессию. Найти эти корни.

Домашнее задание

15.15. Найти четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

15.16. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а их произведение равно 27. Найти эти числа.

15.17. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 63, а их произведение равно 1728. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

15.18. (МГУ, психологический, 1987, 1(6))

Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на $3/2$ больше, чем сумма ее первых трех членов. Пятый член геометрической прогрессии равен ее третьему члену, умноженному на 4. Найти ее четвертый член, если знаменатель прогрессии положителен.

15.19. (МГУ, географический, 1990, 2(5))

Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго члена на четвертый равно 3. Найти второй член прогрессии.

15.20. (МГУ, географический, 2003, 1(5))

Разность девятого и третьего членов знакочередующейся геометрической прогрессии равна ее шестому члену, умноженному на $\frac{24}{5}$. Найти отношение десятого к пятому члену прогрессии.

15.21. (МГУ, географический, 1998, 2(6))

Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если сумма первого, второго и третьего членов прогрессии равна (-7), а пятый член прогрессии меньше второго на 14.

15.22. (МГУ, мех-мат, март 1995, 1(6))

Найти первый член геометрической прогрессии, если известно, что третий член этой прогрессии равен (-10), а его квадрат в сумме с седьмым членом дает утроенный пятый член.

15.23. (МГУ, ВМиК, 1996, 1(6))

Числа p, q, r и s являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $q^3 + r^3 = 288$, $p \cdot s = 24$. Найти $p + s$.

15.24. (МГУ, почвоведения, май 2001, 4(6))

Найти сумму первых n членов ряда $7 + 77 + 777 + \cdots$.

15.25. Произведение первых трех членов геометрической прогрессии равно 64, а сумма кубов тех же чисел равна 584. Найти прогрессию.

15.26.* (МГУ, биологический, 1993, 4(6))

Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна -4. Известно, что сумма шестых членов прогрессии равна -724. Найти сумму пятых членов прогрессий.

15.27. Сумма четырех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 40, а сумма их квадратов равна 3280. Найти прогрессию.

15.28. (МГУ, психологический, 2000, 2(5))

Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых третий член равен восьми, сумма первого и второго членов равна целому числу, кратному пяти, и не превосходит пятисот, а знаменатель больше нуля и меньше единицы. Указать знаменатели всех таких прогрессий.

15.29. (МГУ, геологический, май 2003, 3(8))

Целые числа k, n, m в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число m на 39 больше, чем k, а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел k, n и m?

15.30. Показать, что для всякой геометрической прогрессии при любом n выполняется равенство $S_{3n} = \dfrac{(S_{2n} - S_n)^2}{S_n} + S_{2n}$ (S_k — сумма k первых членов прогрессии).

15.31. Найти произведение n первых членов геометрической прогрессии, если известна их сумма s и сумма обратных величин σ.

15.32. Найти сумму $\left(2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \dfrac{1}{2^n}\right)^2$.

15.33. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 10 членов целые, а следующие 10 — не целые?

15.34.* При каких рациональных k числа $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[4]{2}$, $2{,}5^k$ являются членами одной геометрической прогрессии?

15.35.* Доказать тождество $(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n = (1+x+x^2+\ldots+x^{n+1})(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})$.

15.2 Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

15.36. Найти сумму $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots$.

15.37. Найти третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна $\dfrac{8}{5}$, а второй член равен $-\dfrac{1}{2}$.

15.38. Решить уравнение: $\dfrac{1}{x}+x+x^2+x^3+\ldots=\dfrac{7}{2}$, где $|x|<1$.

"Решение"

15.39. (МГУ, социологический, 2005, 3(6))
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член $b_n=\frac{1}{6}$. Отношение суммы членов прогрессии, стоящих перед b_n, к сумме членов, стоящих после b_n, равно 6. Найти n, если сумма всей прогрессии равна $\frac{3}{4}$.

Домашнее задание

15.40. Найти сумму $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}+\ldots$.

15.41. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

15.42. Решить уравнение: $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=\frac{13}{6}$, где $|x|<1$.

15.43. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 3(8))
Сумма положительной бесконечно убывающей геометрической прогрессии в 4 раза больше её второго члена. Во сколько раз второй член меньше первого?

15.3 Арифметическая и геометрическая прогрессии

15.44. (Филиал МГУ в г. Астана, 2017, 3(8))

В 10 коробках с номерами от 1 до 10 лежат только красные и синие шары. Число красных шаров во второй коробке в $\frac{5}{4}$ раз больше чем в первой. Количества красных шаров в коробках образуют арифметическую прогрессию, а количества синих шаров образуют геометрическую прогрессию (в порядке номеров коробок). Количество синих шаров в первой коробке составляет 20%, а в третьей — 40% от числа всех шаров в данной коробке. Найдите отношение общего числа синих шаров к общему числу красных шаров.

15.45. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, ФФМ, биолог., ФБиБ, географический, психологический, 2007, 4(8))

Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 образуют геометрическую прогрессию, а числа $b_5, 6b_3, 27b_1$ — арифметическую. Найти знаменатель прогрессии b_1, b_2, b_3, b_4, b_5.

15.46. (МГУ, ВМиК, апрель 2004, 1(6)) *"Решение"*

Четыре числа a_1, a_2, a_3 и a_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить 6, 7, 6 и 1 соответственно, то получатся числа, образующие в том же порядке арифметическую прогрессию. Найдите числа a_1, a_2, a_3 и a_4.

15.47. (МГУ, физический, 1973, 3(5))

Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 30. Четвертый, седьмой и пятый члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии. Найти разность арифметической прогрессии.

15.48. Найти три числа, являющихся последовательными членами геометрической прогрессии, если известно, что увеличение второго числа на 2 делает эти три числа последовательными членами арифметической прогрессии, а если после этого увеличить последнее число на 9, то вновь полученные числа снова будут последовательными членами геометрической прогрессии.

15.49. (МГУ, почвоведения, 2000, 2(7))

Первый, второй и четвертый члены арифметической прогрессии одновременно являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может принимать знаменатель геометрической прогрессии.

15.50. (МГУ, географический, 1991, 3(5))

Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел образуют геометрическую прогрессию. Найти a_1, a_2, a_3, если известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = 21$.

15.51. (МГУ, географический, 2001, 3(6))

Числа a, b, c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $a - c$, $c - b$, $2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a$?

15.52.* Найти сумму $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n$.

Домашнее задание

15.53. (МГУ, филологический, март 2003, 3(5))

Даны такие арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ и геометрическая прогрессия $\{b_n\}$, что $a_1 = b_1$, $a_4 = b_3$, $a_2a_3 - b_2^2 = 8$. Найти разность арифметической прогрессии.

15.54. (МГУ, биологический, 1970, 3(5))

Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$, а числа $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$ образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что $a_1 = b_3$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_1$.

15.55. (МГУ, почвоведения, 2000, 2(7))

Первый, четвертый и пятый члены арифметической прогрессии одновременно являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может принимать знаменатель геометрической прогрессии.

15.56. (МГУ, тест, мех-мат, 1998, 4(9))

Первый, второй и третий члены геометрической прогрессии равны соответственно третьему, шестому и восьмому членам некоторой арифметической прогрессии, а их произведение равно 125. Найти первый член геометрической прогрессии.

15.57. (МГУ, географический, 1991, 3(5))

Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел составляют геометрическую прогрессию. Найти a_1, a_2, a_3, если известно, что $a_1 - d = 7$.

15.58. (МГУ, географический, 2001, 3(6))

Числа p, q, r в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $r - p$, $q - r$, $-3p$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $-p^2 + 8q^2 + 2r^2 - 8qr + 4p$?

15.59.* Найти сумму $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + \ldots + n(2^n - 1)$.

15.60.* Найти сумму $1 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 5 \cdot 27 + \ldots + (2n - 1)3^n$.

15.61.* (МГУ, ВМиК, апрель 2001, устный)

Доказать неравенство $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \ldots + \dfrac{1000}{2^{1000}} < 2$.

15.62.* Доказать тождество $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \ldots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$.

16 Текстовые задачи

16.1 Задачи на движение

16.1. Пассажирский поезд длиной 600 м движется со скоростью 100 *км/ч*. Навстречу ему движется товарный поезд длиной 1 *км* и скоростью 60 *км/ч*. Сколько времени пройдет от встречи машинистов поездов до момента расставания хвостовых вагонов?

16.2. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2005, 1(10))
Три брата возвращались с совместной рыбалки домой, где их ожидал бочонок холодного кваса. Старший брат шел втрое медленнее младшего и вдвое медленнее среднего. Придя домой, младший сразу принялся за бочонок и выпил 7-ю его часть к приходу среднего брата, который присоединился к младшему и стал поглощать квас с той же скоростью. Досталось ли кваса старшему брату?

16.3. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2008, 1(10))
Группа туристов отправилась в 12:00 из лагеря по маршруту. В 12:30 штурман вспомнил, что оставил в лагере компас, и сбегал за ним в лагерь, догнав шедшую с прежней скоростью группу в 14:00. В котором часу штурман прибыл в лагерь, если бежал он с постоянной скоростью и в лагере не задерживался?

16.4. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов и высшая школа современных социальных наук, 2008, 2(7)) *"Решение"*
Ученик шел от дома до школы со скоростью 3 км/ч и опоздал на 1 мин. В другой раз он пошел со скоростью 4 км/ч и пришел за 3 мин. до начала урока. С какой скоростью ему нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу урока?

16.5. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 5(10))
Из пункта A в пункт B в 8^{00} выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в A в 17^{00} того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

16.6. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2008", 4(10))

Лиса преследовала кролика по прямолинейной дорожке, ведущей к норе кролика. Их скорости были постоянны. В некоторый момент расстояние от кролика до норы было равно 7 м, а до лисы — 13 м. В некоторый следующий момент расстояние между кроликом и норой стало вдвое меньше расстояния между ним и лисой. Успела ли лиса догнать кролика, прежде чем тот юркнул в нору?

16.7. (МГУ, "Ломоносов-2011", заочный тур, 4(10))

Пройдя $2/5$ длины узкого моста, пешеход заметил, что сзади к мосту приближается машина. Тогда он пошел назад и встретился с машиной у начала моста. Если бы он продолжал идти вперед, то машина догнала бы его у конца моста. Найти отношение скорости машины к скорости пешехода.

16.8. (МГУ, ВМиК (отд. специалистов), 2006, 1(6))

Из города A в город B в 6 часов утра выехал грузовой автомобиль. Шесть часов спустя из города B в город A по той же дороге выехал ему навстречу легковой автомобиль. Автомобили движутся с постоянными скоростями. По предварительной договорённости они одновременно приехали в посёлок C, расположенный на дороге между A и B. Разгрузка и оформление документов длились пять часов. Затем грузовой и легковой автомобили продолжили каждый свой путь. Легковой и грузовой автомобили прибыли соответственно в города A и B одновременно в 23 часа того же дня. Найдите время прибытия автомобилей в населённый пункт C.

16.9.* (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2008, 2(6))

Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 1080 км. В пункте A находится первый автомобиль, а в пункте B — второй автомобиль. В 6^{00} первый автомобиль отправляется в пункт B, а спустя некоторое время второй автомобиль отправляется в пункт A. В 13^{00} расстояние между автомобилями оказалось равным 270 км. Найти скорость первого автомобиля, если известно, что, во-первых, скорости обоих автомобилей постоянны, причем скорость второго составляет $\dfrac{5}{4}$ от скорости первого, во-вторых, второй автомобиль прибыл в пункт A позже, чем первый в пункт B, и, в третьих, первый автомобиль прибыл в пункт B через 5 часов после встречи со вторым автомобилем.

16.10. (МГУ, ВМиК, 1992, 4(6))

Из города В в город А вылетел самолет. Спустя некоторое время из А в В вылетел вертолет. Скорости самолета и вертолета на всем пути постоянные, и они летят по одной трассе. Самолет до встречи с вертолетом находился в пути 6 *ч*, а вертолет до встречи летел 3 *ч*. Самолет прибыл в А в 13 *ч* 30 *мин*, а вертолет прибыл в В в 20 *ч* 30 *мин*. Найти время вылета самолета из города В.

16.11. (МГУ, мех-мат, 2005, 1(6))

Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта А в пункт В и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из А в В он был вынужден на некоторое время остановиться, поэтому на обратном пути он увеличил скорость на 25%. Приехав в А с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 24% и прибыл в В вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

16.12. (МГУ, мех-мат, 2010, 5(6))

Из лесу выскочил заяц и помчался по прямой в направлении тернового куста. На полпути до куста заяц напоролся на колючку и стал бежать в полтора раза медленнее. Когда зайцу оставалось до куста 50 метров, из лесу (из того же места) выбежал волк и погнался за зайцем. Когда заяц добежал до куста, волку оставалось до него 10 метров. На каком расстоянии от леса находится терновый куст, если известно, что волк всё время бежал со скоростью, с которой первоначально бежал заяц?

16.13. (МГУ, 2013, 5(8))

В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер "Быстрый". Когда до Нижнего осталось плыть 500 метров, ему навстречу вышел катер "Смелый". В этот же самый момент "Быстрый", не желая встречи со "Смелым", развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от "Быстрого" до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от "Смелого" до "Быстрого", на "Смелом" осознали, что они идут с "Быстрым" на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

16.14. (МГУ, 2015, 6(8)) *"Решение"*

Велосипедист Василий выехал из пункта A в пункт B. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл обратно в пункт A за новым велосипедом. В момент поломки из пункта A выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта A он встретит Василия, если пункт B отстоит от пункта A на 4 км, а Василий доберётся до пункта A тогда же, когда Григорий до пункта B? Скорости пешехода, велосипеда и мотоцикла считать постоянными.

16.15. (МГУ, 2016, 6(8))

Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

16.16. (МГУ, 2017, 6(8))

Василий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вниз по реке до пункта B, причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A. Однако, промчавшись 8 км, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довезти его до пункта C. И хоть пункт C Василий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Василий с Григорием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта B осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт C, Василий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами B и C, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, скорости катеров постоянны, а Василий, действительно, нигде не задерживался.

16.17. (МГУ, ФНМ, 2003, 6(6))

Автомобиль, двигаясь от пункта A до пункта B, проехал первую треть пути со скоростью v_1, а оставшиеся две трети — со скоростью v_2. На обратном пути автомобиль проехал половину всего времени движения от B до A со скоростью v_1, а вторую половину — со скоростью v_2. Известно, что средняя скорость движения от A к B в $a > 1$ раз больше средней скорости движения от B к A. Найдите все значения a, при которых задача нахождения отношения скоростей v_2 и v_1 имеет решение.

Домашнее задание

16.18. Грузовой поезд длиной 1 *км* движется со скоростью 60 *км/ч*. По параллельной колее его обгоняет пассажирский поезд, движущийся со скоростью 105 *км/ч* и длины 500 *м*. Сколько времени пройдет от момента встречи машиниста пассажирского поезда с хвостом грузового поезда до момента встречи машиниста грузового поезда с хвостом пассажирского поезда?

16.19. (МГУ, Высшая школа гос. аудита, 2008, 1(9))

Населенные пункты A и B расположены на берегу реки, текущей со скоростью 4 км/ч. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 8 км/ч, проплыв из пункта A в пункт B, мгновенно разворачивается и вновь возвращается в пункт A. С какой постоянной скоростью должна плыть лодка по озеру, чтобы за то же время она смогла бы проплыть такое же расстояние?

16.20. (МГУ, ВМиК, апрель, 1999, 1(6))

Пункты A, B, C, D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/ч и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 ч. Известно, что расстояние между A и C он прошёл за 3 ч, а расстояния между A и B, B и C, C и D (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найдите расстояние между B и C.

16.21. (МГУ, ВМиК (отд. бакалавров), 2006, 2(7))

Из города A в город B в 10 часов утра выехал велосипедист. Три часа спустя из города B в город A по той же дороге выехал мотоциклист. Велосипедист и мотоциклист движутся с постоянными скоростями. В пути они встретились у придорожного кафе и остановились. После часового отдыха они продолжили каждый свой путь. Мотоциклист и велосипедист прибыли соответственно в города A и B одновременно в 17 часов того же дня. Найдите время встречи у кафе велосипедиста и мотоциклиста.

16.22. (Филиал МГУ в г. Баку, 2016, 3(8))

Пункт C стоит на дороге из пункта A в пункт B, причем расстояние от C до B в два раза больше, чем до A. Из A в B в 9:00 вышел пешеход, а в 9:30 выехал велосипедист. Велосипедист обогнал пешехода в пункте C. В какое время пешеход пришёл в пункт B, если велосипедист приехал в B в 10:15? Оба двигались без остановок с постоянными скоростями.

16.23. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 5(10)) Таня и Миша одновременно вышли навстречу друг другу по одной и той же прямой дороге: Таня идёт из школы к озеру, а Миша — в обратном направлении. Через час после начала движения они ещё не встретились, и расстояние между ними равнялось 1 *км*. Ещё через час расстояние между ними составляло 4 *км*, причём каждый из них не достиг конечного пункта движения. Найдите расстояние между школой и озером, если Таня и Миша двигались с постоянными, возможно, различными скоростями.

16.24. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2007, 1(10)) Из пункта A вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта B во встречном направлении выехал велосипедист. Они двигались с постоянными скоростями, и через час расстояние между ними равнялось 3 *км*, а ещё через час — 14 *км*. Найти расстояние между пунктами A и B.

16.25. Автомобиль выехал из города A в город B и через 2 часа остановился на 45 *мин*. После этого он продолжал движение к городу B, увеличив первоначальную скорость на 20 *км/ч*, и прибыл в город B. Если бы автомобиль ехал без остановки с первоначальной скоростью, то на путь из A в B он затратил бы столько же времени. Найти первоначальную скорость автомобиля, если расстояние между городами A и B равно 300 *км*.

16.26. Пароход прошел 4 *км* против течения реки, а затем прошел еще 33 *км* по течению, затратив на все это один час. Найти скорость парохода в стоячей воде, если скорость реки равна 6,5 *км/ч*.

16.27. (МГУ, ВМиК, 1997, 1(6)) Пункты А, В и С расположены на реке в указанном порядке вниз по течению. Расстояние между А и В равно 4 *км*, а между В и С — 14 *км*. В $12^{\underline{00}}$ из пункта В отплыла лодка и направилась в пункт А. Достигнув пункта А, она сразу же повернула назад и в $14^{\underline{00}}$ прибыла в пункт С. Скорость течения реки равна 5 *км/ч*. Найти скорость лодки в стоячей воде.

16.28. (МГУ, биологический, 1978, 2(5))

В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 *км* до реки, далее по реке вверх против течения до пристани B, затратив 18 часов на весь путь от A до B. Затем пароход возвращается обратно. Время обратного движения от B до A по тому же пути равно 15 часам. Скорость парохода в стоячей воде равна 18 *км/ч*. Скорость течения реки равна 3 *км/ч*. Каково расстояние от пристани A до пристани B и какова скорость притока?

16.29. (МГУ, биологический, 1979, 2(5))

Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу выезжают одновременно пассажирский и скорый поезда. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на три часа раньше фактического момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на пять часов позже фактического момента встречи. Найдите скорости поездов.

16.30. (МГУ, геологический, 2001, 6(8))

Пункты A и B расположены на двух различных дорогах, представляющих собой две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в пункте C. Два мотоциклиста одновременно начинают движение: первый из пункта A по направлению к C, а второй из пункта B по направлению к C. Через какое время после начала движения расстояние между мотоциклистами будет наименьшим и каким, если скорость первого мотоциклиста равна 44 км/ч, второго — 33 км/ч, а каждое из расстояний от пункта A до пункта C и от пункта B до пункта C равно 275 км?

16.31. (МГУ, геологический, 2003, 3(8))

Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и, встретившись через 50 мин, без остановки продолжили движение каждый в своём направлении. За какое время проходит путь между a и B каждый из пешеходов, если известно, что первый пришёл в B на 4 ч раньше, чем второй пришёл в A?

16.32. (МГУ, геологический, 2004, 6(8))

Две группы геологов исследуют маршрут, проходящий от пункта A через пункт B до пункта C. Первая группа проходит весь маршрут за 2, а вторая — за 3 дня. Расстояние между B и C вдвое меньше расстояния между A и B. Скорости движения групп на участках AB и BC постоянны, но на участке AB скорости обеих групп в m раз больше, чем их скорости на участке BC. Группы выходят одновременно из A и C навстречу друг другу. Если первая группа выходит из A, а вторая из C, то они встречаются в B. Если же первая выходит из C, а вторая из A, то они встречаются в пункте D. Какую часть от длины всего маршрута составляет расстояние между B и D? Чему равно значение m?

16.33. (МГУ, психологический, 1978, 3(5))

Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

16.34. (МГУ, ИСАА, 2001, 3(7))

Из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 10 *км*, отправились в разное время пешеход, всадник и велосипедист. Известно, что их скорости постоянны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Первым из А вышел пешеход, которого в середине маршрута обогнал велосипедист, выехавший из А на 50 минут позже пешехода. В пункт Б пешеход прибыл одновременно с всадником, выехавшим из А на 1 час 15 минут позже пешехода. Определить скорости участников маршрута.

16.35. (МГУ, почвоведения, 1987, 3(5))

Одни турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 ч быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость в 1,5 раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите скорость второго туриста.

16.36. (МГУ, почвоведения, 2006, 4(7))
Из деревни в одном и том же направлении вышли три пешехода: второй — через 2 мин после первого, а третий — через 3 мин после второго. Через 5 мин после своего выхода из деревни третий пешеход догнал второго, а ещё через 2 мин — первого. Через сколько минут после своего выхода из деревни второй пешеход догнал первого?

16.37. Два спортсмена начинают бег одновременно — первый из пункта A в B, второй из B в A. Они бегут с неодинаковыми, но постоянными скоростями и встречаются на расстоянии 300 *м* от A. Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них тотчас поворачивает назад и встречает другого на расстоянии 400 *м* от B. Найти длину AB.

16.38. (МГУ, географический, 1989, 2(5))
Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 12 км от A, по горной дороге со скоростью 6 км/ч поднимается в гору пешеход. Одновременно с ним из пункта A в пункт B выехал автобус. Доехав до пункта B менее чем за один час, автобус поехал обратно навстречу пешеходу и встретил его через 12 мин после начала движения из пункта B. Найдите скорость автобуса на подъёме, если она в два раза меньше его скорости на спуске.

16.39. (МГУ, географический, май 2002, 4(6))
Пункты A и B соединены двумя дорогами. Первая дорога в два раза короче второй и проходит через пункт C. Одновременно по короткой дороге из пунктов A и B выехали соответственно грузовик и мотоцикл, каждый из которых, доехав до пункта C, вернулся в свой исходный пункт и продолжил движение по другой дороге. В итоге грузовик и мотоцикл одновременно прибыли соответственно в пункты B и A. Скорости грузовика и мотоцикла постоянные. Если бы грузовик двигался со скоростью мотоцикла, а мотоцикл - со скоростью грузовика, то в момент возвращения мотоцикла в пункт B грузовик также прибыл бы в этот пункт. Найдите: а) отношение скоростей грузовика и мотоцикла; б) время движения грузовика с момента начала движения до встречи

с мотоциклом на второй дороге, если известно, что в пункт C он добрался на 35 мин раньше мотоцикла.

16.40. (МГУ, географический, 2006, 4(6))

Дорога длиной 280 км соединяет два населённых пункта. Легковой автомобиль проезжает дорогу за 4 ч, а грузовик — за 5 ч. По дороге оба автомобиля двигаются с постоянными скоростями, кроме тех участков, где в соответствии с ограничениями их скорость равна 40 км/ч. При отсутствии этих ограничений скорости легковой автомобиль проезжал бы дорогу на 1 ч 10 мин быстрее грузовика. Найти а) суммарную длину участков, где скорость ограничена; б) скорости легкового автомобиля и грузовика.

16.41. (МГУ, географический, 2000, 5(6))

Из пункта A в пункт B вниз по течению притока отправляется катер, скорость которого в стоячей воде равна v. В пункте B, где приток впадает в реку, катер поворачивает к пункту C, расположенному выше по течению реки. Расстояния от A до B и от B до C равны. Скорости течения притока и реки равны u_1 и u_2 соответственно. На координатной плоскости (u_1, u_2) укажите область, для всех точек которой время движения по маршруту $A \to B \to C$ меньше, чем время, которое затратил бы катер на прохождение такого же расстояния в стоячей воде.

16.42. (МГУ, экономический, 1985, 4(5))

В 6 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул назад и на своём пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов, а прибыл в пункт A не ранее 22 часов того же дня. Найдите время прибытия катера в пункт B, если его собственная скорость (скорость в стоячей воде) вдвое больше собственной скорости лодки.

16.43. (МГУ, ВМиК, 2008, 2(6))

Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 540 км. В пункте A находится первый автомобиль, а в пункте B — второй автомобиль. В 8^{00} первый автомобиль отправляется в пункт B, а спустя некоторое время второй автомобиль отправляется в пункт A. В 13^{00} расстояние между автомобилями оказалось равным 150 км. Найти скорость первого автомобиля, если известно, что, во-первых, скорости обоих автомобилей постоянны, причем скорость второго составляет $\frac{3}{2}$ от скорости первого, во-вторых, второй автомобиль прибыл в пункт A позже, чем первый в пункт B, и, в третьих, первый автомобиль прибыл в пункт B через 3 часа после встречи со вторым автомобилем.

16.44. (МГУ, ВМиК, апрель, 2001, 3(6))

Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 км/ч. Если бы первый велосипедист сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на 3 ч раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 180 км, в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между ним и вторым велосипедистом было меньше 70 км; на весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 ч. Найдите первоначальную скорость велосипедистов.

16.45. (МГУ, мех-мат, 2002, 3(6))

Из пункта A в пункт C выехал с постоянной скоростью велосипедист. За два километра до промежуточного пункта B он решил, что необходимо ехать быстрее, и увеличив скорость в пункте B, продолжил движение с постоянной скоростью вплоть до пункта C. Приехав в C, велосипедист обнаружил, что время движения с каждой из скоростей было прямо пропорционально соответствующей скорости и что на первые 18 км пути он затратил времени в полтора раза больше, чем на последние 18 км. Найдите расстояние между пунктами A и B, если известно, что расстояние между A и C равно 75 км.

16.46. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2005”, 9(10))
Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — в общей сложности не менее, чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 40 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения?

16.47. (МГУ, биологический, ФББ, ФФМ, 2006, 5(6))
Из пунктов А и Б, расстояние между которыми равно 2 км, вниз по течению реки одновременно начинают движение соответственно плот и лодка. В тот же момент из пункта Б навстречу плоту начинает движение катер. Собственная скорость лодки равна скорости течения, собственная скорость катера в два раза превышает скорость течения. Встретив плот, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с лодкой, после чего снова разворачивается и движется в сторону плота до встречи с ним, затем опять к лодке и т. д. Сколько раз катер встретит плот за время, в течение которого плот преодолеет расстояние, равное 1000 км?

16.2 Задачи на движение по окружности

16.48. Часовая и минутная стрелки совмещаются в полночь. Через какое время часовая и минутная стрелки вновь совпадут?

16.49. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2011, 1(10))
“Решение”
Какое время между 14:10 и 15:10 показывают часы в тот момент, когда угол между минутной и часовой стрелками равен 90°?

16.50. По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 *сек* быстрее чем другая, и поэтому успевает сделать за 1 *мин* на два оборота больше. Сколько оборотов в минуту совершает каждая точка?

Домашнее задание

16.51. Два тела движутся по окружности равномерно в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 2 *сек* быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 *сек*. За какое время каждое тело проходит окружность?

16.52. (МГУ, факультет Гос. управления, 2007, 1(7)) На велотреке, имеющем форму окружности, из диаметрально противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста со скоростями 775 и 800 метров в минуту соответственно. Сколько полных кругов проедет первый велосипедист к моменту, когда его догонит второй, если длина велотрека равна четверти километра?

16.53. Два тела, движущиеся в разные стороны по окружности длиной 1 *м* с постоянными скоростями, встречаются каждые 6 *сек*. При движении в одну сторону первое тело догоняет второе тело каждые 48 *сек*. Найти линейные скорости этих тел.

16.54. По сигналу дрессировщика два пони одновременно побежали равномерно вдоль внешней окружности арены цирка в противоположных направлениях. Первый пони бежал несколько быстрее второго и к моменту встречи пробежал на 5 *м* больше, чем второй. Продолжая бег, первый пони подбежал к дрессировщику, остававшемуся на том месте, от которого начали бежать пони, через 9 *сек* после встречи со вторым пони, а второй — через 16 *сек* после их встречи. Каков диаметр арены?

16.3 Задачи на производительность труда

16.55. Пустой бассейн заполняется первой трубой за 2 часа. А второй трубой заполняется за 4 часа. За какое время заполнится бассейн, если включить обе трубы одновременно?

16.56. Известно, что пустой бассейн заполняется первой трубой за 2 часа. А второй трубой заполняется за 4 часа. Полностью заполненный бассейн выливается через третью трубу за 3 часа. За какое время заполнится пустой вначале бассейн, если открыть все три трубы одновременно? *"Решение"*

16.57. (МГУ, химический, 1997, 4(6))

m насосов различной мощности наполняют бассейн водой. Первый насос, работая автономно, может наполнить весь бассейн за 3 часа, второй — за 9 часов, ..., m-ый — за 3^m часов. Каким должно быть наименьшее число насосов m, чтобы все m насосов, работая одновременно, наполнили бассейн быстрее, чем за 2 часа и 1 минуту? Можно ли наполнить бассейн быстрее, чем за 2 часа?

16.58. (Филиал МГУ в г. Баку, 2015, 4(8))

Два маляра красят забор. Первому маляру требуется ровно 4 часа, чтобы покрасить весь этот забор. После того, как он проработал 1 час, к работе подключился второй маляр, и они покрасили весь забор, работая вместе еще 2 часа. За какое время они могли бы вместе покрасить забор, начав работать одновременно? (Производительность каждого маляра постоянна.)

16.59. (МГУ, геологический, 1994, 9(10); ФГУ, 2009, 6(7))

Четыре бригады разрабатывали месторождение горючих сланцев в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На втором году в течение четырех месяцев работа не производилась, а все остальное время работала только одна из бригад. Отношение времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны: в первый год $4 : 1 : 2 : 5$ и 10 млн. т; во второй год $2 : 3 : 2 : 1$ и 7 млн. т; в третий год $5 : 2 : 1 : 4$ и 14 млн. т. Сколько млн. т сланцев выработали бы за 4 месяца четыре бригады, работая вместе?

16.60.* (МГУ, психологический, 2000, 3(5))

Два одинаковых поля требуется вспахать тремя тракторами. При работе в одиночку первый трактор вспашет поле втрое быстрее, чем второй, а третьему на эту же работу потребуется времени на два часа больше, чем первому. Работая вместе, все три трактора могут вспахать одно поле за 7 часов двенадцать минут. Найти наименьшее время, за которое можно вспахать оба поля при условии, что все трактора начинают работу одновременно, а для переезда с одного поля на другое любому трактору требуется 40 минут.

Домашнее задание

16.61. (МГУ, ВМиК, 1981, 1(6))

Три сенокосилки участвовали в покосе травы с поля площадью 25 га. За один час первая сенокосилка скашивает 3 га, вторая - на b га меньше первой, а третья — на $2b$ га больше первой. Сначала работали одновременно первая и вторая сенокосилки и скосили 11 га, а затем оставшуюся часть площади скосили, работая одновременно, первая и третья сенокосилки. Определите значение b $(0 < b < 1)$, при котором все поле скошено за 4 ч, если работа велась без перерыва.

16.62. (МГУ, геологический, 1985, 3(6))

Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготовят за один час 30 деталей?

16.63. (МГУ, социологический, 2003, 5(6))

Двое рабочих изготовили 316 деталей, причем вторым сделано на 4 детали меньше первого. Известно, что первый рабочий работал на 3 дня дольше второго, при этом в день изготовлял на 2 детали меньше. Сколько деталей в день делал каждый рабочий?

16.64. (МГУ, филологический, 1981, 4(5))

Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. Первый рабочий приступил к выполнению своего задания на 4 минуты позже второго, но $\frac{1}{3}$ задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, первый рабочий после двухминутного перерыва снова приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил еще две детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

16.65. (МГУ, почвоведения, 2005, 4(6))

Грузовики трех типов A, B и C возили кирпич. В первый день работали по пять грузовиков каждого типа и выполнили весь объем работы за 3 ч 12 мин. Во второй день за 6 ч 40 мин этот же объем работы выполнили по два грузовика типов A и B и четыре грузовика типа C. За сколько часов был бы выполнен весь объем работы, если бы кирпич возили два грузовика типа A и два грузовика типа B?

16.66. (МГУ, биологический, 1971, 3(5))

Три насоса, работая вместе, наполняют бассейн за 4,5 час. Один второй насос наполняет бассейн на 5 часов быстрее, чем один третий насос. За сколько часов второй насос наполняет бассейн, если первый насос наполняет его втрое дольше, чем второй и третий вместе?

16.67. (МГУ, химический, 1990, 4(5))

Два насоса, работая вместе, наполняют бассейн водой за 10 часов. Половину бассейна первый из них может наполнить за время на 7,5 часов меньше, чем второй. Первый насос включили в 6 часов, второй — в 8 часов. В 12 часов в бассейне было 400 $м^3$ воды. Какова емкость бассейна?

16.68. (МГУ, ФМШ, 1992)

Бассейн можно наполнять с помощью пяти труб. Первые две трубы, работая одновременно, наполняют его за 6 ч, а вместе с третьей — за 4 ч. Первая, третья и четвертая трубы наполняют его за 3 ч, а вторая, третья и пятая — за 2 ч. За сколько часов наполняют бассейн все пять труб вместе?

16.69. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2005, 3(10))

Бригада землекопов должна была в 8 часов начать рыть траншею. Однако, простояв в очереди за лопатами, они приступили к работе позже: первый на 5 минут, второй на десять минут, третий на 15 и т. д. Вырыв траншею в 12 часов, они ушли на обед, а с 13.00 до 16.30 вырыли вторую такую же траншею. Сколько было землекопов?

16.70. (МГУ, факультет Гос. управления, 2006, 7(7))

Химический комбинат получил заказ на изготовление этилового спирта, соляной кислоты и дистиллированной воды. Для готовой продукции потребовалась 21 железнодорожная цистерна. При перекачивании были использованы три специализированных насоса: сначала первый насос заполнил четыре цистерны этиловым спиртом, затем второй насос заполнил шестнадцать цистерн соляной кислотой и в завершение третий насос заполнил одну цистерну дистиллированной водой. Найдите минимально возможное время, затраченное на перекачивание всей продукции, если известно, что суммарная производительность всех трёх насосов равна семи цистернам в сутки.

16.71. (МГУ, экономический, 1994, 5(6))

Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|$ тыс. р., а цена реализации не более $540 - \frac{3}{10}n$ тыс. р. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.

16.4 Задачи на концентрацию растворов и сплавов

16.72. Слили вместе 20 л 30% раствора и 30 л 20% раствора соляной кислоты. Какова концентрация полученного раствора?

16.73. (МГУ, почвоведения, 1999, 5(7))

Какое количество воды надо добавить в один литр 10% водного раствора спирта, чтобы получить 6%-й раствор?

16.74. (МГУ, ФНМ, апрель 2004, 1(6)) *“Решение”*

Для приготовления водного раствора кислоты взяли 4 литра 40%-го и 6 литров 60%-го растворов кислоты. Затем часть полученной смеси вылили и добавили такое же количество чистой воды, в результате чего получился 39%-ый раствор кислоты. Сколько литров воды было добавлено?

16.75. (МГУ, тест, мех-мат, 1995, 1(8))

Мальчик пил чай с сахаром. Он положил три ложки на один стакан чая. Полностью растворив сахар, он отпил $\frac{2}{3}$ стакана чая, добавил одну ложку сахара и долил стакан до полного. Размешав сахар и отпив $\frac{1}{3}$ стакана, мальчик решил, что чай недостаточно сладкий. Сколько сахара нужно добавить, чтобы сделать чай таким же сладким, как и вначале?

16.76. (МГУ, химический, май 1997, 4(6))

Из сосуда с чистым спиртом отлили $\frac{1}{3}$ часть и добавили столько же воды. Потом отлили $\frac{1}{3}$ часть смеси и добавили столько же воды. Эту операцию проделали k раз. Найти наименьшее значение k, при котором содержание спирта станет меньше 10 %.

16.77. Сосуд был полностью заполнен чистым спиртом. 6 литров спирта отлили и сосуд долили водой. Затем снова отлили 6 литров смеси и опять столько же долили воды. В результате в сосуде оказался спирт крепостью 25%. Сколько литров спирта было в сосуде?

16.78. (МГУ, ВМиК, 1994, 5(6))

В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 6 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 4 единицы того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 5 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента сразу после 30-й инъекции?

Домашнее задание

16.79. Кусок сплава меди и цинка массой в 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

16.80. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2006, 1(10))
Чашка до краев наполнена черным кофе в количестве 100 *мл*, а в кувшин налито 300 *мл* молока. Какое количество кофе надо перелить из чашки в кувшин и, перемешав, снова наполнить ее до краев полученной смесью, чтобы молока и кофе в чашке оказалось поровну?

16.81. (МГУ, филологический, 2000, 1(6))
Имеется 40 литров 0,5% раствора и 50 литров 2% раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5% раствора уксусной кислоты?

16.82. (МГУ, филологический, 1990, 4(5))
От двух сплавов массой 7 и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Определить массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

16.83. (МГУ, почвоведения, 1997, 4(6))
В сосуде находится 10%-й раствор спирта. Из сосуда отлили $\frac{1}{3}$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на $\frac{5}{6}$ первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в сосуде?

16.84. Сколько килограммов воды нужно выпарить из 500 кг раствора целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить раствор целлюлозной массы с содержанием 75% воды?

16.85. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды надо добавить к 60 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%?

16.86. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

16.87. (МГУ, “Ломоносов-2009”, 2(9))

В свежих грибах содержание воды колеблется от 90% до 99%, а в сушеных — от 30% до 45%. В какое наибольшее число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

16.88. (МГУ, экономический, 1979, 3(5))

Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

16.89. (МГУ, геологический, экономический, 1981, 5(6))

Для приготовления смеси из двух жидкостей A и B взяты два сосуда емкостью по 15 литров каждый, в которых находилось всего 15 литров жидкости A. Затем первый сосуд доверху долили жидкостью B, и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд дополнили доверху смесью из первого сосуда. Затем из второго сосуда отлили в первый 6 литров получившейся смеси. После этого в первом сосуде оказалось жидкости A на один литр больше, чем во втором. Сколько литров жидкости A было первоначально во втором сосуде?

16.5 Задачи на проценты

16.90. Цену товара сперва понизили на 20%, затем новую цену повысили на 20%. Как изменилась стоимость товара?

16.91. Цену товара сперва понизили на 20%, затем новую цену снизили на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

16.92. Банк начисляет ежегодно 20% от суммы вклада. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?

16.93. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 3(7))
Цена товара изменяется два раза в год: в апреле она повышается на 20%, а в сентябре снижается на 20%. Какова будет цена товара в декабре 2005г., если в январе 2004 г., она составляла 6250 руб.?

16.94. (Ташкентский ф-л МГУ, 2007, 8(10)) *"Решение"*
В коммерческий банк сроком на два года был сделан вклад в размере 1200000 у.е. При этом клиент рассчитал, что если в конце каждого года он будет снимать со своего вклада по 380000 у.е., то по истечении двух лет его вклад составит 770000 у.е. Какой процент годовых по вкладу установлен в данном банке?

16.95. (МГУ, экономический, апрель 2003, 3(5))
Ежедневный прирост массы бамбука на бамбуковой плантации составляет 40%. В результате трех вырубок, проведенных с интервалом в один день, масса бамбука на плантации уменьшилась на 13% по сравнению с её первоначальным значением до начала вырубок. Определить, сколько процентов от первоначальной массы бамбука составляет общая масса вырубленного бамбука, если каждый раз вырубалось одно и то же количество бамбука.

16.96. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 2008, 4(6))
После жатвы фермер выяснил, что урожайность первого поля повысилась на 20%, а урожайность второго поля, в 2 раза большего по площади, упала на 10%. Определить, во сколько раз отличались ожидаемые показатели урожайности этих полей друг от друга, если общий объем собранного зерна превысил планируемый на 5%.

16.97. (МГУ, экономический, 1993, 5(6))
За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}$% и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}$%. Определите срок хранения вклада.

Домашнее задание

16.98. (МГУ, "Ломоносов-2011", заочный тур, 1(10))
Два куска сыра имеют форму прямоугольного параллелепипеда каждый. Длина первого куска на 50% больше длины второго куска, а ширина и высота первого куска соответственно на 20% и 30% меньше ширины и высоты второго куска. У какого куска сыра объём больше и насколько?

16.99. Вкладчик снял со своего счета в сбербанке сначала $\frac{1}{4}$ вклада, затем $\frac{4}{9}$ оставшихся и еще 640 рублей. После этого у него осталось на сберкнижке $\frac{3}{20}$ всех его денег. Как велик был вклад?

16.100. (МГУ, филологический, 2005, 2(7))
На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число остальных абитуриентов, верно решивших все задачи, относится к числу не решивших ничего, как 5 : 3. Сколько человек экзаменовалось по математике в этот день?

16.101. (МГУ, ИСАА, 2007, 2(7))
Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк $\frac{1}{6}$ часть от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени. А еще через год в счет полного погашения кредита фермер внес в банк сумму, на 20% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

16.102. В январе завод выполнил 105% месячного плана выпуска готовой продукции, а в феврале дал продукции на 4% больше чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

16.103. Вследствие реконструкции оборудования производительность труда рабочего повышалась дважды на одно и тоже количество процентов. На сколько процентов возрастала каждый раз производительность труда, если за одно и то же время рабочий раньше вырабатывал изделий на 25 рублей, а теперь на 28 руб. 09 коп.?

16.104. Рабочий день уменьшился с 8 до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла на 5%?

16.105. (МГУ, ф-т Государственного управления, 2001, 2(6))
В магазине одежды проводилась распродажа. Костюмы продавались со скидкой 20%, плащи — со скидкой 40%. Покупатель купил костюм и плащ за 9180 рублей в сумме, заплатив на 32% меньше их суммарной первоначальной цены. Найдите первоначальные цены костюма и плаща.

16.106. (МГУ, ф-т Государственного управления, 2008, 2(7))
Предприятие выплатило заработную плату своим сотрудникам, перечислило 26% от заработной платы в социальные фонды и закупило необходимое оборудование, кроме этого, предприятие ещё выплатило 15% от всех указанных затрат в виде налога государству. Для всех выплат предприятию потребовалось 202 400 рублей. Если бы заработная плата увеличилась на 10%, а затраты на оборудование возросли на 30%, то суммарные затраты в этом случае составили бы уже 234 140 рублей. Сколько средств предприятие потратило на заработную плату, а сколько — на закупку оборудования?

16.107. (МГУ, экономический, 2001, 2(7))

Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем продала их на общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго — 20%?

16.108. (МГУ, экономический, 1971, 1(5))

Выработка продукции за год работы предприятия возросла на $p\%$, а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

16.109. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2005, 6(8))

Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трех магазинах, расположенных в разных районах города, составил 26,8%. Через первый магазин было продано 60% всего товара, через второй — 40% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 30%, а во втором — 25%?

16.110. (МГУ, социологический, 1997, 4(6))

В дошкольном учреждении провели опрос. На вопрос “Что Вы предпочитаете: кашу или компот?” бóльшая часть ответила: “Компот”, меньшая ответила: “Кашу”, а один респондент затруднился ответить. Среди любителей компота 56,25% предпочитают абрикосовый, 37,5% — грушевый, а один затруднился ответить, какой компот он больше любит. Среди любителей каши 30% предпочитают манную кашу, а 70% — рисовую. Сколько детей было опрошено?

16.111. (МГУ, социологический, 1998, 3(6))

В университете города M 6% студентов обучались на платной основе, причем эта доля была одинакова на всех курсах. Летом 22%

студентов были выпущены из стен университета, но за счет приема абитуриентов численность студентов составила $6/5$ от прежней. Определить, какая доля студентов будет обучаться на платной основе, если новый набор осуществлялся только на места, финансируемые из госбюджета.

16.112. (МГУ, социологический, 1999, 4(6))

Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тысячи рублей; каждое выступление по телевидению — на 80% и стоит 47 тысяч рублей. Определить количество и последовательность выступлений в средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если за всю компанию можно израсходовать не более 112 тысяч рублей.

16.113. (МГУ, социологический, 2000, 2(6))

В городе N в течение 2 лет наблюдался рост числа жителей. Во втором году процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найти процент роста числа жителей в первом году, если известно, что он на 5,2 меньше, чем процент роста за два года.

16.114. (МГУ, социологический, 2001, 3(6))

В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8%.

16.115. (МГУ, социологический, 2002, 4(6))

Куплен товар двух сортов: первого на 1200 руб, и второго на 1500 руб. Товара второго сорта куплено на 10 кг больше, чем первого и по цене на 20 руб. за 1 кг меньше. Сколько куплено товара первого сорта?

16.116. (МГУ, социологический, 2003, 4(6))

В городе N на должность мэра на выборах баллотировались 3 кандидата: Акулов, Баранов, Воробьев. В начале предвыборной кампании предпочтения избирателей распределялись как $1:2:1$. По окончании предвыборной гонки 40% избирателей города N отказались участвовать в выборах, у остальных же предпочтения не изменились. Сколько процентов сторонников каждого кандидата отказались от голосования, если по окончании предвыборной гонки соотношение голосов стало $3:3:3{,}6$?

16.117. (МГУ, социологический, апрель 2004, 3(6))

На факультете X отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете Y — 20%, а на факультете Z — лишь 4%. Найти средний процент отличников по всем трем факультетам, если известно, что на факультете Y учится на 50% больше студентов, чем на факультете X, а на факультете Z вдвое меньше, чем на факультете X.

16.118. (МГУ, социологический, 2004, 3(6))

Популярность продукта А за 2002 год выросла на 20%, в следующем году снизилась на 10%, а в конце 2004 года сравнялась с популярностью продукта Б. Популярность продукта Б в 2002 году снизилась на 20%, а затем на протяжении одного года не изменилась, а за 2004 год выросла на 40%. Как изменилась популярность продукта А за 2004 год, если в начале 2002 года она составляла $\frac{2}{3}$ от популярности продукта Б?

16.119. (МГУ, социологический, 2008, 5(7))

Среди учеников начальной школы провели опрос: кто любит зиму, а кто — лето. Оказалось, что 90% любителей зимы любят и лето, а 72% любителей лета любят и зиму. Зато 10% всех опрошенных не любят ни зимы, ни лета. Сколько процентов опрошенных любят только один из этих сезонов, но не любят другой? Каким при этом могло быть наименьшее число опрошенных?

16.120. (МГУ, ИСАА, 2005, 4(7))

Магазин закупил некоторое количество товара и начал его реализацию по цене на 25% выше цены, назначенной производителем, чтобы покрыть затраты, связанные с его транспортировкой, и другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть товара магазин уценил на 16% с тем, чтобы покрыть только затраты на закупку этой части товара у производителя и его транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной производителем, составляла стоимость транспортировки товара?

16.121. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 4(7))

Антикварный магазин продал картину со скидкой в 10% по сравнению с первоначально назначенной ценой и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли магазин предполагал получить первоначально?

16.122. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 2(8))

Прибыль P предприятия за год определяется соотношением $P = A\sqrt{X} - X$, где X — расходы на производство, A — некоторая положительная постоянная. В 2004 году прибыль P оказалась положительной и составила 40% от расходов X. В 2005 году расходы выбраны так, чтобы прибыль была максимальной. Найдите отношение расходов в 2004 году к расходам в 2005 году.

16.123. (МГУ, факультет Гос. управления, 2006, 5(7))

Четыре отраслевых предприятия K, L, M, N, обсуждая планы объединения усилий, установили, что без K три оставшихся будут контролировать 55% рынка отрасли; без L три другие — 60%; K, L, N без M — 66%; три предприятия без N — 73% рынка отрасли. Какова доля каждого из этих предприятий на рынке?

16.124. (МГУ, геологический, 1980, 4(5))

Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца 105 телевизоров. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на 10 телевизоров, и месячный план 4000 телевизоров был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце 26 рабочих дней?

16.125. (МГУ, экономический, 1995, 4(6))

В банк помещен вклад в размере 3900 тыс.р. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

16.6 Целочисленные задачи

16.126. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2005, 1(8))

В турнире борцов участвуют 127 спортсменов. Борец выбывает из соревнований сразу после поражения в поединке. Сколько поединков требуется провести, чтобы выявить победителя турнира?

16.127. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

16.128. Для нумерации страниц учебника потребовалось 411 цифр. Сколько страниц в учебнике?

16.129. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2005, 3(6))

В целях рекламы новой модели автомобиля автосалон установил скидку 10% на каждый седьмой продаваемый автомобиль и 20% на каждый одиннадцатый продаваемый автомобиль новой модели. В случае, если на один автомобиль выпадают обе скидки, то применяется бóльшая из них. Всего было продано 516 автомобилей этой модели. Определите выручку автосалона от продажи автомобиля новой модели, если ее базовая цена составляет 20 000 условных единиц. *"Решение"*

16.130. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 5(8))

Сколько времени в течение суток на электронном табло вокзальных часов, которые показывают время в диапазоне от 00:00 до 23:59, присутствует хотя бы одна цифра 3?

16.131. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 3(8))

Один рабочий бригады, состоящей из 5 человек, производит в среднем 14 деталей в час, причём каждый из рабочих производит в час целое число деталей, не превышающее 16. Сколько деталей в час может делать при этих условиях рабочий с самой низкой производительностью?

16.132. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2005, 6(10))

В каждом подъезде нового дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. На восьмом этаже третьего подъезда первая квартира имеет номер 106. Какой номер имеет вторая квартира на третьем этаже шестого подъезда?

16.133.* (МГУ, химический, 1975, 2(5))

На второй остановке в автобус вошло на 12 человек больше, чем вышло на третьей остановке, а на третьей остановке вошло на 3 человека меньше, чем вышло на четвертой. Вошло на четвертой вдвое больше, чем на второй. На четвертую остановку приехало на 13 человек больше, чем уехало с первой. Что больше и на сколько, число человек, вошедших на второй остановке, или число человек, вышедших на второй остановке? Известно, что если бы на второй остановке вышло вдвое больше человек, чем вошло на третьей, то с четвертой остановки уехало бы на 9 человек больше, чем с первой.

16.134. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 1996, 3(6))

В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа и 600 тыс. руб. и 15 кг для второго типа. Общий вес изделий равен 321 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

16.135. (МГУ, социологический, 2005, 6(6))

Группа школьников решила купить музыкальный центр, при этом каждый внес одинаковую сумму. Однако в последний момент двое из них забрали деньги назад, и каждому из оставшихся пришлось добавить по 100 руб. Сколько школьников первоначально участвовало в покупке и какова цена музыкального центра, если известно, что она заключена в пределах от 17000 до 19500 руб?

16.136.* (МГУ, химический, 1974, 4(5))

Двадцать четыре школьника разбились на две группы. Первая из них пошла в цирк, а вторая в кино. При этом оказалось, что на цирк и кино было затрачено одинаковое количество денег. Если бы билет в цирк стоил на 20 копеек дешевле, а билет в кино — на 20 копеек дороже, то, истратив на билеты в цирк и билеты в кино те же суммы денег, в цирк и кино смогли бы пойти вместе 15 школьников. Если бы при прежней стоимости билетов вторая группа школьников пошла в цирк, а первая группа — в кино, то на билеты в цирк ушло бы на 19 рублей 20 копеек больше, чем на билеты в кино. Сколько стоили билеты в цирк и кино?

16.137. (МГУ, филологический, 1988, 5(5))

За время t первый рабочий сделал на 3 детали больше второго. Затем второй рабочий увеличил производительность труда на 0,2 деталей в минуту и через некоторое целое число минут догнал и обогнал первого, работавшего с постоянной производительностью, на 2 детали. Найти наибольшее возможное время t.

16.138. (МГУ, мех-мат, 1992, 4(6))

Один рабочий на новом станке производит за один час целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют ту же норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма, если производительность рабочих на одинаковых станках одинакова.

16.139. (МГУ, экономический (отд. экономики), 2006, 4(7))

Две бригады однотипных тракторов задействованы на вспашке поля. Время вспашки поля одной первой бригадой отличается от времени вспашки поля одной второй бригадой не более, чем на $\frac{1}{25}$-ю часть времени вспашки поля одним трактором. Если сначала восьмая часть первой бригады вспашет первую половину поля, а затем пятая часть второй бригады вспашет оставшуюся половину поля, тогда затраченное на вспашку поля время составит $\frac{2}{9}$ от времени вспашки поля одним трактором. Определите количество тракторов в каждой бригаде.

16.140.* (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2007”, 10(10))

В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Доказать, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найти наибольшее возможное ее значение после такой замены а) одной оценки «4»; б) всех его оценок «4»?

16.141.* (МГУ, ФФМ, май 2003, 7(7))

Количество сотрудников корпорации ежегодно возрастало в геометрической прогрессии и за 6 лет увеличилось на 20615 человек. Найти первоначальную численность сотрудников корпорации.

16.142.* (МГУ, экономический, 1984, 5(6))

Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

Домашнее задание

16.143. (МГУ, факультет Гос. управления, 2006, 1(7))

На розовом кусте каждое утро, начиная с понедельника, расцветают пять бутонов. Каждое утро садовник срезает три из них. Из скольких роз будет состоять букет, если в ближайшее воскресенье садовник срежет все розы?

16.144. (МГУ, "Ломоносов-2009", 1(9))

На сколько одно из двух положительных чисел больше другого, если их среднее арифметическое равно $2\sqrt{3}$, а среднее геометрическое равно $\sqrt{3}$?

16.145. Из данных четырех чисел первые три относятся между собой, как $\frac{1}{5} : \frac{1}{3} : \frac{1}{20}$, а четвертое составляет 15% второго числа. Найти эти числа, если известно, что второе число больше суммы остальных на 8 единиц.

16.146. (МГУ, почвоведения, 1993, 1(5))

Разделите число 128 на четыре части так, чтобы первая часть относилась ко второй как $2:3$, вторая к третьей — как $3:5$, а третья к четвертой— как $5:6$.

16.147. Произведение цифр двузначного числа в три раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

16.148. (МГУ, физический, 1983, 4(6))

После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

16.149. Найти такое трехзначное число, удвоив которое, мы получим число, выражающее количество цифр, необходимых для написания всех последовательных целых чисел от 1 до этого трёхзначного числа.

16.150. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 2000, 2(6))
Интервалы движения маршрутных такси по трем маршрутам, начинающимся у станции метро, составляют 10, 12 и 15 минут соответственно. Сколько раз с $10^{\underline{40}}$ до $14^{\underline{20}}$ того же дня у этой станции метро одновременно встречаются такси всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в $13^{\underline{05}}$?

16.151. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 5(8))
Сколько времени в течение суток на электронном табло вокзальных часов, которые показывают время в диапазоне от 00:00 до 23:59, присутствует хотя бы одна цифра 5?

16.152. (МГУ, химический, май 1998, 4(6))
Определить число студентов, сдавших экзамен, если известно, что шестая часть из них получила отметку "удовлетворительно", 56% получили оценку "хорошо", а 14 человек получили отметку "отлично", причем эти отличники составляют более 4%, но менее 5% от искомого числа студентов.

16.153. (МГУ, географический, 2002, 4(6))
Тележка с передними колёсами диаметром 30 см и задними колёсами диаметром 40 см движется по прямой дороге, проходящей через точки A и B. Между точками A и B ровно 100 метров. Точка A покрашена. Через точку A проезжают правые колёса тележки и в точках соприкосновения с ней красятся. В свою очередь, при каждом соприкосновении с дорогой эти точки оставляют свой след в виде точек на дороге. Никакие точки, кроме точки A колёса не окрашивают. Тележка движется по направлению от точки A в сторону точки B. Найдите: а) наименьшее расстояние между соседними окрашенными точками; б) количество окрашенных точек на отрезке AB.

16.154. (МГУ, географический, 2003, 3(5))
Непустое множество X состоит из конечного числа N натуральных чисел. Чётных чисел в X меньше двух третей от N, а нечётных не больше 36% от N. Какое минимальное значение может принимать число N?

16.155. (МГУ, Высшая школа гос. аудита, 2008, 7(9))

Из 102 школьников выпускных классов пятёрку по истории имеют 28 человек, по географии — 30, по математике — 25 человек. Среди тех, у кого пятёрка по истории, восемь школьников имеют пятёрку и по географии, и семеро — по математике, а среди имеющих пятёрку по географии у шестерых пятёрка и по математике. Трое имеют пятёрки по истории, географии и математике. Сколько школьников не имеют пятёрок ни по одному из этих предметов?

16.156. (ФМШ, 1995)

Группа школьников, состоящая из 30 человек, получила на экзаменах оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма всех полученных оценок равна 93, причем троек было больше чем пятерок и меньше, чем четверок. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число пятерок было четным. Определить, сколько каких оценок получили школьники.

16.157. (МГУ, почвоведения, май 2003, 3(6))

Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 8. Если же число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на разность цифры десятков и цифры единиц исходного числа, то в частном получится 15, а в остатке 2. Найти это число.

16.158. (МГУ, биологический, 1995, 4(6))

Саша и Сережа дважды обменивались марками, причем каждый раз $1/7$ количества марок, имевшихся (на момент обмена) у Саши, обменивались на половину количества марок, имевшихся у Сережи. Сколько марок было у Саши и сколько у Сережи до первого обмена, если после первого обмена у Саши было 945 марок, а после второго обмена у Сережи — 220?

16.159. (МГУ, филологический, 2003, 4(5))

В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: английский или французский. Известно, что 5 человек в первой и 5 во второй группе изучают оба языка. Количество изучающих французский в первой группе в 3 раза меньше, чем во второй. Количество изучающих английский во второй группе в 4 раза меньше, чем в первой. Каково минимально возможное количество студентов в одной группе?

16.160.* (МГУ, химический, 1975, 2(5))
В хоккейном матче, состоящем из трех периодов, команда A победила команду B с перевесом в две шайбы, причем ни одна из команд не забила шайб в свои ворота. В первом периоде команда A забила столько же шайб, сколько пропустила она в свои ворота во втором периоде, а в третьем периоде эта же команда забила на одну шайбу меньше, чем в первом. В первом периоде команда A пропустила вдвое больше шайб, чем в третьем. Что больше и на сколько, число шайб, забитых командой A во втором периоде, или число шайб, забитых командой B в третьем периоде? Известно, что если бы команда A забила во втором периоде столько же шайб, сколько она забила в первом, то она выиграла бы первые два периода с перевесом в пять шайб.

16.161. (МГУ, ВМиК, 2008, 5(6))
В шахматном турнире, проходившем по круговой системе (все участники играют между собой ровно один раз), участвовало $n \geq 17$ игроков. Если шахматная партия заканчивалась победой одного из игроков, то победитель получал 1 очко, а его соперник — 0 очков. Если партия между игроками заканчивалась вничью, то каждый игрок получал 0,5 очка. Известно, что по итогам турнира число участников, набравших не более пяти очков, равно 11. Сколько участников набрали по 8,5 очка? Ответ должен быть обоснован.

16.162. (МГУ, экономический, отд. экономики, 2005, 3(7))
Вновь созданное акционерное общество продало населению 1000 своих акций, установив скидку 10% на каждую пятую продаваемую акцию и 25% на каждую тринадцатую продаваемую акцию. В случае, если на одну акцию выпадают обе скидки, то применяется бóльшая из них. Определите сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции составляет 1000 рублей.

16.163. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 5(8))

Для перевозки 90 т груза затребовали некоторое количество одинаковых грузовиков. В связи с тем, что на каждую машину погрузили на 0,75 т меньше, дополнительно было затребовано еще 4 грузовика. На сколько процентов увеличилось число грузовиков по сравнению с первоначальной заявкой?

16.164. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2007, 5(6))

Для рытья котлована первоначально планировалось использовать звено экскаваторов одной модели, однако перед началом работы в звено было добавлено дополнительно 4 экскаватора той же модели. В результате котлован был вырыт на 3 часа ранее первоначально запланированного срока. Определите время, за которое котлован мог быть вырыт одним экскаватором, если в этом случае, при расходе топлива 20 кг в час, необходимое для работы экскаватора количество топлива находится в пределах от 1,2 до 1,71 тонн.

16.165. (МГУ, экономический, 2007, 4(7))

Бригаде грузчиков выделена некоторая сумма денег на разгрузку баржи, однако 3 человека заболели и в работе не участвовали. Оставшиеся выполнили задание, заработав каждый на 1,5 тысячи рублей больше, чем в случае работы в составе полной бригады. Определите выделенную бригаде сумму денег, если 5%-ный сбор за её банковский перевод обошелся работодателю дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 1,2 до 1,6 тысяч рублей.

16.166. (МГУ, экономический, 1992, 3(6); ФГУ, 2009, 3(7))

Фабрика получила заказ на изготовление 6000 деталей типа P и 2000 деталей типа Q. Каждый из 214 рабочих фабрики затрачивает на изготовление 5 деталей типа P время, за которое он мог бы изготовить 3 детали типа Q. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

16.167. (МГУ, экономический, 1996, 4(6))

В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

16.168. (МГУ, географический, 2005, 5(6))

В цехе имелось N одинаковых станков, которые, работая вместе, вытачивали в день по 5850 деталей. После модернизации число производимых в день каждым станком деталей возросло на 20%. Это позволило без сокращения общего объема продукции цеха уменьшить число станков максимум на 4. Найти N.

16.169. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, ФФМ, биолог., ФББ, географический, психологический, 2007, 7(8))

За 2005 год число книг в фонде библиотеки посёлка увеличилось на 0,4%, а за 2006 год — на 0,8%, оставшись при этом меньше 50 тысяч. На сколько книг увеличился фонд библиотеки посёлка за 2006 год?

16.170.* (МГУ, экономический, 1990, 4(6))

Натуральные числа k, l, m, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2835 и 2646 делятся без остатка на l и m соответственно. Найти числа k, l и m, если известно, что при указанных условиях сумма $k + l + m$ максимальна.

Ответы, указания, решения

14.1. Нет. Например, числа 1; 1; 2 не являются членами никакой арифметической прогрессии.

14.2. 6, 8, 10, 12.

14.3. *Решение.*

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — искомая арифметическая прогрессия, d — разность этой прогрессии. Тогда $a_5 = a_1 + 4d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$ и условия задачи запишутся в виде системы:

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = \dfrac{5}{3}, \\ a_3 \cdot a_4 = \dfrac{65}{72}, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = \dfrac{5}{3}, \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 3d) = \dfrac{65}{72}, \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{5}{6}\left(\dfrac{5}{6} + d\right) = \dfrac{65}{72}, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = \dfrac{5}{6} - 2d, \\ \dfrac{5}{6} + d = \dfrac{13}{12}, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}, \\ d = \dfrac{13}{12} - \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Найдем сумму первых 17 членов арифметической прогрессии по формуле $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$:

$$S_{17} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} + (17-1) \cdot \frac{1}{4}}{2} \cdot 17 = \frac{\frac{2}{3} + 4}{2} \cdot 17 = \frac{7}{3} \cdot 17 = \frac{119}{3}.$$

14.4. 2. **14.5.** 44.

14.6. *Решение.* Первым положительным четным двузначным числом, делящимся на 3, будет $a_1 = 12$. Последним положительным четным двузначным числом, делящимся на 3, будет $a_n = 96$. Множество искомых чисел составляет арифметическую прогрессию с разностью $d = 6$. Найдем число членов в сумме. По формуле n-ого члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1)d$ имеем

$$96 = 12 + (n-1)6 \iff 16 = 2 + n - 1 \iff n = 15.$$

По формуле суммы арифметической прогрессии $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ имеем

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{12 + 96}{2} \cdot 15 = 54 \cdot 15 = 810.$$

Ответ. 810.

14.7. 462462. **14.8.** 19650.

14.9. *Решение.* Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — искомая арифметическая прогрессия, d — разность этой прогрессии. Тогда условия задачи запишутся в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{a_9}{a_2} = 5, \\ \dfrac{a_{13}}{a_6} = 2 + \dfrac{5}{a_6}, \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{a_1 + 8d}{a_1 + d} = 5, \\ \dfrac{a_1 + 12d}{a_1 + 5d} = 2 + \dfrac{5}{a_1 + 5d}, \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a_1 + 8d = 5(a_1 + d) \qquad \Leftrightarrow 3d = 4a_1, \\ a_1 + 12d = 2(a_1 + 5d) + 5 \Leftrightarrow 2d = a_1 + 5, \\ a_1 + d \neq 0, \\ a_1 + 5d \neq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 4. \end{cases}$$

Ответ. $a_1 = 3$, $d = 4$.

14.10. $1, 9, 17$. **14.11.** $a_1 = 3$, $d = 6$. **14.12.** 2 грамма. **14.13.** 33. **14.14.** 8 членов. **14.15.** Имеется 10 чисел вида $2 + 15p$, $p = 1, \ldots, 10$. **14.16.** 3997. **14.17.** $2^{1001} - 4$. **14.18.** $2^{2000} \cdot 3^{1999000}$. **14.19.** 4004001. **14.20.** $-3\sqrt[4]{\dfrac{51}{196}}$. **14.21.** 24. **14.23.** $a = -5$; $-\dfrac{5}{13}$. **14.24.** $(2, -1, -4, \ldots)$; $(-10, -7, -4, \ldots)$. **14.25.** Можно. С 8 руб. 50 к. по 16 руб. 00 к. включительно. **14.26.** За 8 часов. **14.27.** -9. **14.28.** $a_1 = 2$, $d = 3$. **14.29.** $a_1 = 1$ или $a_1 = 4$, $d = -\dfrac{1}{5}$. **14.30.** $x = 1$; $d = -6$. **14.31.** $a_1 = 3$. **14.32.** 24. **14.33.** -150. **14.34.** $a_{12} = 17$. **14.35.** 28. **14.36.** 2. **14.37.** $S_6 = 0$; 3. **14.38.** 50. **14.39.** 9. **14.40.** 119. **14.41.** 5. **14.42.** 82350. **14.43.** $a_1 = 12$, $d = 4$. **14.44.** 41. **14.45.** $a_1 = 11$. **14.46.** $-20{,}5$; 10. **14.47.** $1 : 1$. **14.48.** -292. **14.50.** 0. **14.51.** $n = 6$, $S_6 = -66$. **14.52.** $S_8 = 56$. **14.53.** Имеется 14 чисел вида $23 + 28(m - 1)$, $m = 1, \ldots, 14$. **14.54.** $S_{100} = 15050$, $b_{40} = 81$. **14.55.** $3^{2000} \cdot 4^{1999000}$. **14.56.** 4008004. **14.57.** $-5\sqrt[4]{\dfrac{7}{202}}$. **14.58.** Может.

15.1. Нет. Например, числа 1; 1; 2 не являются членами никакой геометрической прогрессии.

15.2. -1. **15.3.** 4. **15.4.** 70. **15.5.** 30.

15.6. *Решение.* Обозначим b_1, b_2, b_3, b_4 $(b_1 \neq 0)$ — четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, q — её знаменатель $(q \neq 0)$. Выразим числа b_2, b_3, b_4 через первый член прогрессии b_1 и её знаменатель q. Получим, $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_1 q^2$, $b_4 = b_1 q^3$. По условию задачи имеем систему

$$\begin{cases} b_1 + b_4 = -49, \\ b_2 + b_3 = 14, \end{cases} \iff \begin{cases} b_1 + b_1 q^3 = -49, \\ b_1 q + b_1 q^2 = 14, \end{cases} \iff \begin{cases} b_1(1+q^3) = -49, \\ b_1 q(1+q) = 14. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение последней системы на второе

$$\frac{b_1(1+q^3)}{b_1 q(1+q)} = -\frac{49}{14} \iff \frac{1+q^3}{q(1+q)} = -\frac{7}{2} \iff \begin{cases} 2(1+q^3) = -7q(1+q), \\ q \neq -1. \end{cases}$$

Решим первое уравнение последней системы, предварительно разложив $1 + q^3$ как сумму кубов $1^3 + q^3$ в произведение и разделив обе части уравнения на $1 + q \neq 0$,

$$2(1+q^3) = -7q(1+q) \iff 2(1+q)(q^2-q+1) = -7q(1+q) \iff$$

$$2(q^2-q+1) = -7q \iff 2q^2 + 5q + 2 = 0 \iff q = -2,\ q' = -\frac{1}{2}.$$

Поэтому $b_1 = -\dfrac{49}{1+q^3} = 7$, $b_1' = -56$.

В итоге имеем два набора чисел, которые являются перестановкой в обратном порядке друг друга.

Ответ. $(7, -14, 28, -56)$; $(-56, 28, -14, 7)$.

15.7. 162.

15.8. *Решение.* По условию задачи имеем

$$1 + 11 + 111 + \dots + \overbrace{1\dots1}^{n} = \frac{1}{9}\Bigl(9 + 99 + 999 + \dots + \overbrace{9\dots9}^{n}\Bigr) =$$

$$= \frac{1}{9}\Bigl(10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1\Bigr) =$$

$$= \frac{1}{9}\Bigl(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n\Bigr) = \frac{1}{9}\left(10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(10 \cdot \frac{\overbrace{9\dots9}^{n}}{9} - n\right) = \frac{1}{9}\Bigl(10 \cdot \overbrace{1\dots1}^{n} - n\Bigr) =$$

$$= \frac{1}{9}\Big(\overbrace{1\ldots1}^{n}0 - n\Big) = \frac{\overbrace{1\ldots1}^{n}0 - n}{9}.$$

Ответ. $\dfrac{\overbrace{1\ldots1}^{n}0 - n}{9}$.

15.9. 20. **15.10.** $\dfrac{-1+\sqrt{1+\frac{8n}{5}}}{2}$, где $n=6, 7, \ldots, 250$. **15.11.** $(9,3,1);(1,3,9)$. **15.12.** 573. **15.13.** Нет, не могут. **15.14.** $a = 7$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$. **15.15.** $(7, -28, 112, -448)$; $\Big(-\dfrac{35}{3}, -\dfrac{140}{3}, -\dfrac{560}{3}, -\dfrac{2240}{3}\Big)$. **15.16.** $(9,3,1)$; $(1,3,9)$. **15.17.** 48 и $\dfrac{1}{4}$; 3 и 4. **15.18.** $\dfrac{1}{2}$. **15.19.** ± 6. **15.20.** $-5^{-\frac{5}{3}}$. **15.21.** 2. **15.22.** -2. **15.23.** 12. **15.24.** $\dfrac{\overbrace{7\ldots7}^{n}0 - 7n}{9}$. **15.25.** $(8,4,2)$; $(2,4,8)$. **15.26.** 194. **15.27.** $b_1 = -2$, $q = -3$; $b_1' = 54$, $q' = -\dfrac{1}{3}$. **15.28.** $\dfrac{4+\sqrt{16+40n}}{5n}$, где $n=4, 5, \ldots, 100$. **15.29.** 39. **15.31.** $\left(\dfrac{s}{\sigma}\right)^{\frac{n}{2}}$. **15.32.** $\dfrac{4^{n+1}}{3} - \dfrac{1}{3\cdot 4^n} + 2n - 1$. **15.33.** Существует. **15.34.** $k = -\dfrac{1}{5}$. **15.36.** 1. **15.37.** $\dfrac{1}{8}$.

15.38. *Решение.* Слагаемые, начиная со второго, $x, x^2, x^3, \ldots$ образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = x$ и знаменателем $q = x$ ($|q| < 1$). По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S_\infty = \frac{b_1}{1-q} \iff x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x}.$$

Следовательно, имеем уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} = \frac{7}{2} \iff 9x^2 - 9x + 2 = 0 \iff x = \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}.$$

Оба корня удовлетворяют условию $|x| < 1$.

15.39. 2. **15.40.** $\dfrac{1}{3}$. **15.41.** 6 и $-\dfrac{1}{2}$. **15.42.** $-\dfrac{7}{9}$; $\dfrac{1}{2}$.

15.43. В 2 раза. **15.44.** $\dfrac{1023}{85}$. **15.45.** $\sqrt{3}$; 3.

15.46. *Решение.* Обозначим через q — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда $a_2 = a_1q$, $a_3 = a_1q^2$, $a_4 = a_1q^3$. По условию задачи числа a_1+6, a_1q+7, a_1q^2+6, a_1q^3+1 являются последовательными членами арифметической прогрессии. Для арифметической прогрессии выполняются соотношения $a_1 + a_3 = 2a_2$, $a_2 + a_4 = 2a_3$. Перепишем эти равенства для полученной арифметической прогрессии:

$$\begin{cases}(a_1+6)+(a_1q^2+6)=2(a_1q+7),\\(a_1q+7)+(a_1q^3+1)=2(a_1q^2+6),\end{cases} \iff \begin{cases}a_1q^2-2a_1q+a_1=2,\\a_1q^3-2a_1q^2+a_1q=4,\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}a_1(q^2-2q+1)=2,\\a_1q(g^2-2q+1)=4,\end{cases} \iff \begin{cases}a_1(q-1)^2=2,\\a_1q(q-1)^2=4.\end{cases}$$

По определению геометрической прогрессии $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$. После деления второго уравнения системы на первое получим $q = 2$, а из первого уравнения системы $a_1 = \dfrac{2}{(q-1)^2} = 2$. Остальные числа: $a_2 = a_1q = 2\cdot 2 = 4$, $a_3 = a_1q^2 = 2\cdot 4 = 8$, $a_4 = a_1q^3 = 2\cdot 8 = 16$.

Ответ. 2, 4, 8, 16.

15.47. $d=-10$ или $d=0$. **15.48.** $\dfrac{4}{25}; -\dfrac{16}{25}; \dfrac{64}{25}$ и $4; 8; 16$.

15.49. 1; 2. **15.50.** $a_1 = 7$, $a_2 = 7$, $a_3 = 7$; $a_1 = 7 - 7\sqrt{2}$, $a_2 = 7$, $a_3 = 7 + 7\sqrt{2}$; $a_1 = 7 + 7\sqrt{2}$, $a_2 = 7$, $a_3 = 7 - 7\sqrt{2}$. **15.51.** -9. **15.52.** $(n-1)2^{n+1}+2$. **15.53.** ± 2. **15.55.** 1; $\dfrac{1}{3}$. **15.56.** $b_1 = \dfrac{15}{2}$ или $b_1 = 5$. **15.57.** $\{7,7,7\}$; $\{3+\sqrt{2}, -1+2\sqrt{2}, -5+3\sqrt{2}\}$; $\{3-\sqrt{2}, -1-2\sqrt{2}, -5-3\sqrt{2}\}$. **15.58.** -4. **15.59.** $(n-1)2^{n+1}+2-\dfrac{1}{2}n(n+1)$. **15.60.** $(n-1)3^{n+1}+3$.

16.1. 36 сек. **16.2.** Нет. **16.3.** 12:48.

16.4. *Решение.*

Обозначим через x км/ч — искомая скорость ученика, t ч — время до начала урока. Тогда по условию задачи имеем:

$$3\left(t+\frac{1}{60}\right) = 4\left(t-\frac{3}{60}\right) = xt.$$

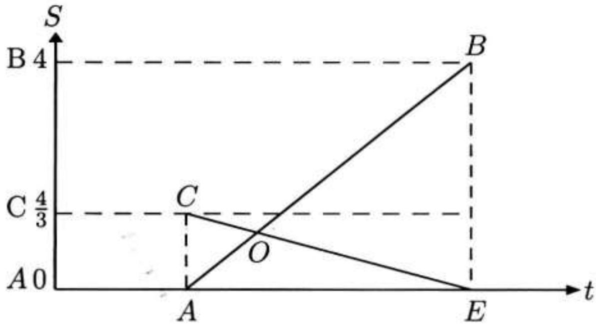
Отсюда $t = \dfrac{3}{60} + \dfrac{4\cdot 3}{60} = \dfrac{15}{60} = \dfrac{1}{4}$ ч. Соответственно,

$$x = 4\cdot \left.\frac{t - \frac{3}{60}}{t}\right|_{t=\frac{15}{60}} = 4\cdot \frac{\frac{15}{60} - \frac{3}{60}}{\frac{15}{60}} = \frac{4\cdot 12}{15} = \frac{16}{5} = 3{,}2\,\text{км/ч}.$$

Ответ. 3,2 км/ч.

16.5. $\dfrac{3}{5}$. **16.6.** Нет. **16.7.** 5. **16.8.** 14^{00}. **16.9.** 80 км/ч. **16.10.** 5 ч 30 мин. **16.11.** 28 мин. **16.12.** 80 м. **16.13.** 2 км.

16.14. *Решение.* Поскольку поломка произошла на трети пути в 4 км, то велосипедист проехал $\dfrac{4}{3}$ км. Изобразим прямолинейное и равномерное движение объектов на чертеже:



Из подобия треугольников ACO и BEO имеем:

$$\frac{EO}{CO} = \frac{BE}{AC} \iff \frac{EO}{CO} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3 \iff EO = 3CO.$$

Значит, встреча произойдет на расстоянии от пункта A равном $\dfrac{3}{4}$ расстояния AC. Таким образом, $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{3} = 1\,\text{км}$.

Ответ. 1 км.

16.15. 12:00. **16.16.** 4 км. **16.17.** $(1; 18 - 12\sqrt{2}]$. **16.18.** 2 мин. **16.19.** 6 км/ч. **16.20.** 5 км. **16.21.** 14^{00}. **16.22.** В 11:15. **16.23.** 6 км. **16.24.** 20 км. **16.25.** 60 *км/ч.* **16.26.** 32,5 *км/ч.* **16.27.** 10 *км/ч.* **16.28.** 290 *км*; 2 *км/ч.* **16.29.** 60 и 100 км/ч. **16.30.** 7 ч, 55 км. **16.31.** Первый пешеход прошел за 1 час, второй — за 5 часов. **16.40.** $\frac{1}{9}$, $m = \frac{4}{3}$. **16.33.** 2 км.

16.34. 4, 8 и 12 *км/ч*. **16.35.** 4 *км/ч*. **16.36.** 28 мин.

16.37. 500 м. **16.38.** 15 *км/ч*. **16.39.** а) 2 : 3; б) 2 ч 48 мин.

16.40. а) 40 км; б) 80 и 60 км/ч. **16.41.** Точки, лежащие в бесконечном криволинейном треугольнике, образованном положительным направлением оси Ou_1 и частью нижней ветви гиперболы $u_2 = \dfrac{vu_1}{2u_1 + v}$, лежащей в правой полуплоскости.

16.42. 16 ч. **16.43.** 60 *км/ч*. **16.44.** 10 *км/ч*. **16.45.** $\dfrac{300}{13}$ км.

16.46. От A к B; 8 км/ч. **16.47.** 6. **16.48.** 1 *ч* 5 *мин* $27\dfrac{3}{11}$ *сек*.

16.49. *Решение.* Угловая скорость часовой стрелки $v_ч = \dfrac{1}{12}\dfrac{об}{ч}$, угловая скорость минутной стрелки $v_{мин} = 1\dfrac{об}{ч}$.

Для удобства отсчет времени будем вести от 14:00, поскольку с 14:00 до 14:10 угол между стрелками был меньше 90°, причем в 14:00 угол между минутной и часовой стрелками составлял $\varphi = \dfrac{10}{60} = \dfrac{1}{6}\,об.$

Угловое расстояние между стрелками, так как они движутся в одном направлении, изменяется со скоростью равной разности скоростей. Поэтому минутная стрелка догонит часовую и обгонит ее на одну четверть оборота через время

$$t = \frac{S}{v_{мин} - v_ч} = \frac{\frac{1}{6}об + \frac{1}{4}об}{1\frac{об}{ч} - \frac{1}{12}\frac{об}{ч}} = \frac{\frac{5}{12}об}{\frac{11}{12}\frac{об}{ч}} = \frac{5}{11}ч = \frac{5\cdot 60}{11}мин =$$

$$= \frac{300}{11}мин = 27\frac{3}{11}мин;$$

Это произойдет в $14{:}27\frac{3}{11}$. Далее угол между стрелками будет увеличиваться до 180°, а затем уменьшаться, и в 15:00 уменьшится вновь до 90°. Очевидно, что с 15:00 до 15:10 угол между стрелками будет еще уменьшаться.

Ответ. $14{:}27\frac{3}{11}$ и 15:00.

16.50. 6 и 4 оборотов в минуту. **16.51.** 4 и 6 *сек*.

16.52. 15 полных кругов. **16.53.** $\frac{3}{32}\ \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, $\frac{7}{96}\ \frac{\text{м}}{\text{сек}}$. **16.54.** $\frac{35}{\pi}$.
16.55. 1 *час* 20 *мин.*

16.56. *Решение.* Положим объём бассейна равен 1. Тогда скорость заполнения бассейна первой трубой равна $\frac{1}{2}\frac{об}{ч}$,
скорость заполнения бассейна второй трубой равна $\frac{1}{4}\frac{об}{ч}$,
скорость опустошения бассейна третьей трубой равна $\frac{1}{3}\frac{об}{ч}$.
Если открыть все трубы одновременно, то скорость заполнения бассейна составит $\frac{1}{2}\frac{об}{ч}+\frac{1}{4}\frac{об}{ч}-\frac{1}{3}\frac{об}{ч}=\frac{5}{12}\frac{об}{ч}$. Поэтому время заполнения бассейна будет

$$t=\frac{1\ об}{\frac{1}{2}\frac{об}{час}+\frac{1}{4}\frac{об}{час}-\frac{1}{3}\frac{об}{час}}=\frac{1\ об}{\frac{5}{12}\frac{об}{час}}=\frac{12}{5}\ час=2\ часа\ 24\ мин.$$

Ответ. 2 часа 24 мин.

16.57. 5 насосов; нельзя. **16.59.** 12 млн. т. **16.60.** 14,5 часа. **16.61.** $\frac{1}{2}$. **16.62.** 9. **16.63.** 10 и 12. **16.64.** 20 деталей в час и 18 деталей в час. **16.65.** 10 часов. **16.66.** За 10 часов. **16.67.** 750 м^3. **16.68.** За $\frac{4}{3}$ часа. **16.69.** 11 землекопов. **16.70.** 7 суток.
16.71. 300 или 600 телевизоров. **16.72.** 24%. **16.73.** $\frac{2}{3}$ л.

16.74. *Решение.*
Предположим, что было добавлено x литров воды. Тогда

$$(0{,}4\cdot 4+0{,}6\cdot 6)\frac{10-x}{10}=0{,}39\cdot 10 \iff (1{,}6+3{,}6)\frac{10-x}{10}=3{,}9$$
$$\iff 5{,}2(10-x)=39 \iff 52-5{,}2x=39 \iff 5{,}2x=13$$
$$\iff x=\frac{13}{5{,}2}=2{,}5.$$

Ответ. 2,5 л.

16.75. $\frac{2}{3}$ ложки. **16.76.** 6. **16.77.** 12 л. **16.78.** $5+\frac{1}{5^{29}}$.
16.79. 13,5 кг. **16.80.** 60 *мл.* **16.81.** 10 и 20 л. **16.82.** 2,1 кг.
16.83. 8%. **16.84.** 200 кг. **16.85.** 140 кг. **16.86.** 2,5 кг. **16.87.** 70.
16.88. $\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{2}$. **16.89.** 5. **16.90.** Стоимость товара понизилась

на 4%. **16.91.** 38,8%. **16.92.** Через 4 года. **16.93.** 5760 руб.

16.94. *Решение.*

Пусть p — искомый процент годовых по вкладу, S — сумма первоначального вклада, s — сумма, которую вкладчик снимает в конце каждого года. Тогда на его счету по окончании первого года останется сумма

$$S_1 = S\left(1 + \frac{p}{100}\right) - s,$$

а по окончании второго года —

$$S_2 = S_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) - s = \left(S\left(1 + \frac{p}{100}\right) - s\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) - s =$$

$$= S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - s\left(1 + \frac{p}{100}\right) - s.$$

Вводя переменную $q = 1 + \dfrac{p}{100}$ и подставляя данные задачи, приходим к квадратному уравнению

$$1200000q^2 - 380000q - 380000 = 770000 \iff 120q^2 - 38q - 38 = 77$$

$$\iff 120q^2 - 38q - 115 = 0 \iff q = \frac{19 \pm 119}{120} = -\frac{5}{6};\ \frac{23}{20}.$$

По смыслу задачи подходит $q = \dfrac{23}{20}$, значит,

$$\frac{23}{20} = 1 + \frac{p}{100} \iff 115 = 100 + p \iff p = 15.$$

Ответ. 15%.

16.95. 75%. **16.96.** В два раза. **16.97.** 7 месяцев. **16.98.** V_2 больше V_1 на $19\frac{1}{21}$%. **16.99.** 2400 руб. **16.100.** 240. **16.101.** 20%.**16.102.** На 7,1%.**16.103.** На 6%.**16.104.** На 20%. **16.105.** 5400 и 8100 руб. **16.106.** 100 тыс. руб. и 50 тыс. руб. **16.107.** 2 млн. 400 тыс. рублей и 3 млн. 600 тыс. рублей. **16.108.** На 17%. **16.109.** 20%. **16.110.** 27. **16.111.** 3,9%. **16.112.** Сначала следует выступить в газете, затем в любом порядке 2 раза по радио и 1 раз по телевидению. **16.113.** 4%. **16.114.** 8,75%. **16.115.** 15 кг. **16.116.** 25%, 62,5%, 10%.

16.117. 14%. **16.118.** Выросла на $\frac{500}{9}$%. **16.119.** 30%; 30.
16.120. 5%. **16.121.** 20%. **16.122.** $\frac{100}{49}$.
16.123. $29\frac{2}{3}$%, $24\frac{2}{3}$%, $18\frac{2}{3}$%, $11\frac{2}{3}$%. **16.124.** 42,3%.
16.125. 210 тыс. руб. **16.126.** 126. **16.127.** 48. **16.128.** 173.

16.129. *Решение.*

Среди чисел от 1 до 516 на 7 делятся 73 числа $\left(\frac{516}{7} = 73\frac{5}{7}\right)$, а на 11 делятся 46 чисел $\left(\frac{516}{11} = 46\frac{10}{11}\right)$, а на 7 и на 11 одновременно — 6 чисел $\left(\frac{516}{77} = 6\frac{54}{77}\right)$.

Поэтому общая выручка от продажи 516 автомобилей составит:

$$20000 \cdot 516 - 20000 \cdot 0{,}2 \cdot 46 - 20000 \cdot 0{,}1(73 - 6) =$$
$$= 20000(516 - 9{,}2 - 6{,}7) = 20000 \cdot 500{,}1 = 10002000.$$

Ответ. 10 002 000 у. е.

16.130. 8 час 15 мин. **16.131.** $6, 7, \ldots, 14$. **16.132.** 218.
16.133. На второй остановке вошло на 1 человека больше, чем вышло. **16.134.** 11000 тыс. руб. и 12600 тыс. руб.
16.135. 20 школьников, 18 000 руб. **16.136.** Билет в цирк стоил 1 руб, билет в кино — 20 коп. **16.137.** 6,5 ч. **16.138.** 36.
16.139. 24 трактора в первой бригаде и 45 — во второй.
16.140. а) $3\frac{2}{3}$; б) $3\frac{8}{11}$. **16.141.** 1984. **16.142.** Один дом на 16 квартир и 11 домов на 12 квартир. **16.143.** 17 роз. **16.144.** 6.
16.145. 48, 80, 12, 12. **16.146.** 16, 24, 40, 48. **16.147.** 24.
16.148. 83. **16.149.** 108. **16.150.** 4. **16.151.** 7 час 30 мин.
16.152. 300. **16.153.** а) 10π; б) 160. **16.154.** 14. **16.155.** 37.
16.156. 2 пятерки, 10 четверок, 7 троек и 11 двоек. **16.157.** 74.
16.158. 1085 и 30. **16.159.** 28. **16.160.** Команда B забила в третьем периоде на две шайбы больше, чем команда A во втором периоде. **16.161.** Таких участников нет.
16.162. 962 500 руб. **16.163.** 20%. **16.164.** 72 часа.
16.165. 27 тысяч рублей. **16.166.** 137 и 77. **16.167.** 10500 тыс. руб. и 12600 тыс. руб. **16.168.** 26. **16.169.** На 251.
16.170. $k = 27$, $l = 189$, $m = 1323$.

Часть 5

- **Уравнения и неравенства с параметрами**
- **Доказательство неравенств**
- **Целочисленные задачи**

17 Уравнения с параметром

Уравнение с параметром — это фактически множество уравнений для разных значений параметра. Чаще всего параметр у нас будет обозначаться буквой a, а неизвестное — буквой x. Естественно, что значение корня уравнения может зависеть от величины параметра a. Задача должна быть решена для каждого значения параметра. Поэтому ответ в задаче записывается следующим образом: если a такое-то, то x такое-то, если другое, то и x может быть другим. При этом ответ должен быть выписан для всех значений $a \in (-\infty; +\infty)$. Может оказаться так, что при некоторых значениях параметра уравнение не имеет корней. Это также надо указать в ответе.

В задачах с параметрами под областью допустимых значений (ОДЗ) удобно понимать ОДЗ неизвестного и параметра, т. е. множество всех пар (x, a), при которых определены все функции, входящие в уравнение.

17.1 Линейные уравнения

Линейные по x уравнения сводятся к виду $f(a)x = g(a)$. Если a не принадлежит области определения функций f и g, то уравнение теряет смысл, и говорим, что в этом случае корней нет. Пусть a принадлежит области определения функций f и g, тогда, если $f(a) \neq 0$, то $x = \dfrac{g}{f}$; если $f(a) = 0$, то эти значения a надо рассмотреть отдельно, подставляя их в исходное уравнение.

Для каждого значения параметра решить уравнения:

17.1. $(a-2)x = 3$. *"Решение"*

17.2. $(a^2 - 5a + 6)x = a^2 - 4$. *"Тест"*

Домашнее задание

17.3. $a \cdot x = 1$.

17.4. $3x = 1 - ax$.

17.5. $(a^2-4)x = a^2-5a+6$.

17.6. (МГУ, физический, 1982, 2(6))

При каких значениях параметра a корни уравнения $10x-15a = 13-5ax+2a$ больше 2?

17.2 Квадратичные уравнения

17.7. $x^2 = a$.

17.8. (МГУ, химический, май 2003, 1(6))

При каких значениях параметра a уравнение $ax^2+(a+1)x+1=0$ имеет единственное решение.

17.9. $(a+1)x^2-2ax+a-2=0$. *"Тест"*

17.10. При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2-(2a+1)x+3a-1=0$ больше 1? *"Решение"*

17.11. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, ФФМ, биолог., ФБиБ, географический, психологический, 2007, 8(8))

Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди корней уравнения $ax^2+(a+4)x+a+1=0$ имеется ровно один отрицательный. *"Тест"*

17.12. (МГУ, 2016, 2(8))

Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax-6=0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

17.13. (МГУ, 2018, 2(8))

Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения $x^2+3ax+a^4=0$ максимальна.

17.14.* При каких значениях параметра a уравнение $ax^2+3x+2a^2-3=0$ имеет только целочисленные корни?

Домашнее задание

17.15. При каких a уравнение $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ имеет единственный корень?

17.16. При каких a уравнение $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ имеет более одного корня?

17.17. При каких a уравнение $(a+1)x^2 - ax + a - 3 = 0$ имеет не более одного корня? *"Тест"*

17.18. (МГУ, ВМиК, 1980, 4(6))

При каких значениях параметра a уравнение
$(3a-1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$ имеет два действительных корня.

17.19. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a^2-2)x^2 + (a^2+a-1)x - a^3 + a = 0$ больше числа a, а другой меньше числа a?

17.20. При каких значениях параметра a корни x_1 и x_2 уравнения $(3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a + 3 = 0$ удовлетворяют условиям $x_1 < -1 < x_2 < 1$?

17.21. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 - ax + 2a - 1 = 0$. Вычислите $x_1^3 + x_2^3$.

17.22. (МГУ, ИСАА, 1992, 6(6))

При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей?
Чему равна эта сумма?

17.23. Дано уравнение $x^2 + ax + a - 1 = 0$. Найти все значения параметра a, при которых отношение суммы квадратов корней данного уравнения к произведению корней данного уравнения равно максимальному значению функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{при } x \le 3, \\ x - 6 & \text{при } 3 \le x \le 8, \\ -2x + 18 & \text{при } 8 \le x. \end{cases}$$

17.24. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все корни уравнения $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$ удовлетворяют неравенству $|x| \leq 1$.

17.25. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - (|a+5| - |a-5|)x + (a-12)(a+12) = 0$ имеет два различных положительных корня.

17.26. (МГУ, мехмат, тест, 1995, 6(8))
Найти пару (x, y), удовлетворяющую уравнению $xy = 4(\sqrt{y} - 1)$, для которой x принимает наибольшее значение.

17.27.* (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2007, 3(10))
Какие значения, в зависимости от параметра a, может принимать выражение $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, в котором числа x_1, x_2 — два различных корня уравнения $x^3 - 2007x = a$?

17.28. (МГУ, химический, 2006, 6(6))
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{(x^2 + |x|)(x^2 + 5|x| + 6) + 1} = 3|x| - 3ax - a^2 - a + 1$ имеет корни, как большие -3, так и меньшие -3.

17.29.* (МГУ, психологический, 1992, 4(5))
При каких значениях параметров a и b можно найти два различных вещественных корня уравнения $x^3 - 5x^2 + 7x = a$, которые будут также корнями уравнения $x^3 - 8x + b = 0$?

17.3 Дробно-рациональные уравнения

17.30. $\dfrac{x-a}{x-1} = 0.$

17.31. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}.$$

17.32. (МГУ, социологический, апрель 2005, 5(6))
При каких значениях параметра a уравнение
$\dfrac{(a+4)x^2 + 6x - 1}{x+3} = 0$ имеет единственное решение? *"Тест"*

Домашнее задание

17.33. $\dfrac{x-a}{a+1}=0.$

17.34. $\dfrac{x-4}{x^2-a^2}=0.$

17.35. $\dfrac{(a-2)(x-a)}{x-1}=0.$ *"Тест"*

17.36. (МГУ, геологический, 1979, 1(6))
$\dfrac{a}{a-2x}=2.$

17.37. $\dfrac{x^2+1}{a^2x-2a}+\dfrac{1}{ax-2}=\dfrac{x}{a}.$ *"Тест"*

17.4 Уравнения с модулем

17.38. $|x+1|=a-2.$

17.39. (МГУ, ВМиК, 1982, 5(6))
$|x+3|-a|x-1|=4.$

17.40. Найти все значения a, такие, что уравнение $|x+3|-1=|2x-a|$ имеет единственное решение.

17.41.* (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2005", 8(10))
Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-1|$ имеет хотя бы один корень.

17.42.* (МГУ, психологический, 2003, 5(5))
При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x-9a|-2a^2+35+x=0$$

не имеет решений? При каких (остальных) значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30;\ 63]$?

Домашнее задание

17.43. (МГУ, физический, 1984, 4(6))
При каких значениях a все решения уравнения

$$2|x-a|+a-4+x=0$$

удовлетворяют неравенству $0 \le x \le 4$?

17.44. (МГУ, ВМиК, 1982, 5(6))
$a|x+3|+|x-2|=5.$

17.45. $|x-3|=ax+1.$

17.46. (МГУ, геологический, 1991, 6(6))
$|x+2|+a|x-4|=6.$

17.47. (МГУ, географический, май 1993, 5(5))
Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $||||x^2-a|-5|-2|+1|=3$ имеет ровно три корня.

17.48. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $2\big|2|x|-a^2\big|=x-a$ имеет 3 различных решения.

17.5 Иррациональные уравнения

17.49. $\sqrt{x}=a.$

17.50. $(x-2)\sqrt{x-a}=0.$ *"Тест"*

17.51. $x-\sqrt{a-x^2}=1.$

17.52. $\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{1-(x+a)}.$

17.53. $\dfrac{\sqrt{x+a}}{a}+\dfrac{\sqrt{x+a}}{x}=\sqrt{x}.$

17.54. $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$

Домашнее задание

17.55. $\sqrt[3]{x-1}=a.$

17.56. $(a-1)\sqrt{x-2}=0.$

17.57. $(x-a)\sqrt{x-3}=0.$

17.58. $\sqrt{(x+1)(x-2)}=a.$

17.59. $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-2}=a.$ *"Тест"*

17.60. (МГУ, филологический, 1978, 2(5))
Число a подобрано так, что уравнение

$$\sqrt{x-\sqrt{3}}+a^2x^2+2ax(\sqrt{6}-\sqrt{3})=6\sqrt{2}-9$$

имеет решение. Найти это решение.

17.61. (МГУ, филологический, 1977, 4(5))
Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x|-x^2}=a.$

17.62. (МГУ, филологический, апрель 2002, 6(6))

$$\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a.$$

17.63. $x+\sqrt{x^2-x}=a.$

17.64. $x+\sqrt{1-x^2}=a.$

17.65. $\sqrt{x(2a-x)}=1-x.$

17.66. $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x.$

17.67. (МГУ, мех-мат, 2001, 5(6))
Найдите все числа, которые ни при каком значении параметра a не могут быть корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4+x^3}=a\sqrt[4]{4-a^4}(x+4x^2-8).$$

17.6 Показательные уравнения

17.68. (МГУ, мех-мат, 1993, 2(6))
Найти все значения a, при которых уравнение
$4^x + (a^2+5)\cdot 2^x - a^2 + 9 = 0$ не имеет решений.

17.69. (МГУ, психологический, 1997, 4(6))
При каких действительных p уравнение
$4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2\cdot 2^{1-x}$ имеет решение.

17.70. (МГУ, психологический, 1977, 4(5))
Найти все пары чисел (a, b), для которых при любом x справедливо равенство $ae^x + b = e^{ax+b}$.

Домашнее задание

17.71. $2^x = a$.

17.72. (МГУ, физический, 1985, 4(6))
$$4^x - 2a(a+1)\cdot 2^{x-1} + a^3 = 0.$$

17.73. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 8(8))
При каких значениях параметра a уравнение
$(a-1)4^x + (2a-3)6^x = (3a-4)9^x$ имеет единственное решение?

17.74. (МГУ, ВМиК, 1996, 3(6))
При всех значениях параметра a решить уравнение
$$25^x - (a-1)\cdot 5^x + 2a + 3 = 0$$
и указать, при каких a оно имеет единственное решение.

17.7 Логарифмические уравнения

17.75. $\log_a x = 2$.

17.76. (МГУ, экономический, 1985, 3(6))
$$\log_3 x + 3\log_a x + \log_9 x = 5.$$

17.77. (МГУ, географический, май 2000, 2(6))
При каких значениях параметра a уравнение
$\log_{a-6,5}(x^2+1) = \log_{a-6,5}((a-5)x)$ имеет два различных решения.

Домашнее задание

17.78. $\log_x a = 2.$ *"Тест"*

17.79. (МГУ, "Ломоносов-2009", 3(9))
При каждом значении a найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению $\log_5\left(\frac{(x+1)^2}{x} - a\right) = \log_5 \frac{(x+1)^2}{x} - \log_5 a.$

17.80. $\log_9 x + \log_9 \frac{2-x}{2} = \log_9 \log_9 a.$

17.81. (МГУ, физический, 1996, 8(8))
$$(\log_5 2)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_4 25)^{\sqrt{x^2-3a-5}}.$$

17.82. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \frac{a^2-4}{2a-x} = 1.$ *"Тест"*

17.83.* (МГУ, факультет Гос. управления, 2005, 6(7))
Найдите все значения a, для которых при любом положительном b уравнение $a\log_{\frac{1}{x}-2} 4 = \log_2(\frac{1}{x}-2)-b$ имеет хотя бы одно решение, меньшее $\frac{1}{3}$.

17.8 Тригонометрические уравнения

17.84. (МГУ, ВМиК, 1970, 1(5)) *"Решение"*
$$\sin^4 x + (a-4)\sin^2 x - 3(a-1) = 0.$$

17.85. Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2 - 2\cos 2x = 3a + 4\sin x$ имеет решения. Найдите все эти решения.

17.86. (МГУ, психологический, 1977, 4(5))

Найти все пары чисел (a, b), для которых при любом x справедливо равенство $a\sin x + b = \sin(ax + b)$.

17.87.* (МГУ, мех-мат, тест, 2002, 10(10))

Среди значений параметра $\varphi \in [0; 2\pi]$ указать те, для которых наибольшее значение функции $y = \cos x - \frac{3}{2}\cos\varphi + \cos(x + \varphi)$ будет максимальным.

17.88.* Найти все a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x + 2\cos x = a + 1$ имеет ровно один корень на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{3}; \pi\right)$.

17.89. (ФМШ, 1997, 4(6))

Найти все значения a, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x - 2a\cos x - \sin x + a = 0$$

найдутся два, разница между которыми равна $\dfrac{\pi}{2}$.

17.90.* (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 7(10))

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x - 2a\sin x - |2a - 1| + 2 = 0$ имеет решение и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

17.91.* (МГУ, мех-мат, март 2003, 6(6))

Найти все значения α, при каждом из которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$3\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\sin 3x = 2\sin 2\alpha\cos 2x - \sin 3x + \cos 3\alpha$$

не превосходит $\dfrac{\pi}{3}$.

17.92.* (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2005, 8(8))

Переменные x, y связаны условием $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значением выражения $2ax - 3y - 10$ больше 12.

Домашнее задание

17.93. $\sin(a+x)+\sin x=\cos\dfrac{a}{2}$.

17.94. $\sin x=a$.

17.95. $\sin^2 x=a-4$.

17.96. (МГУ, ВМиК, 1970, 1(5))
$\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-(a+3)=0$.

17.97. (МГУ, психологический, 1977, 4(5))
Найти все пары чисел (a,b), для которых при любом x справедливо равенство $a(\cos x-1)+b^2=\cos(ax+b^2)-1$.

17.98. $\sin x=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$.

17.99. $2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=a^2-3a$.

17.100. Найти все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $5-4\sin^2 x-8\cos^2\dfrac{x}{2}=3a$ имеет хотя бы одно решение. Найти все эти решения.

17.101. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2+\dfrac{2x}{\sqrt{\sin a}}+\dfrac{1}{\cos a}+2\sqrt{2}=0$ имеет единственное решение.

17.102. (МГУ, географический, 2003, 5(5))
При каких значениях параметра a уравнение

$$(\sin x-\log_4 a)(\sin x-2+2a)=0$$

имеет ровно два корня на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$?

17.103. $\dfrac{a+\sin x}{a\cos x+1}=\dfrac{a+\cos x}{a\sin x+1}$. *"Тест"*

17.104. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 7(8))
При всех значениях параметра a решить уравнение
$x^2 + 4x + 6 - 4a(x - a) - \cos(x + 2) = 8a + \cos(x - 4a + 2)$.

17.105.* (МГУ, филологический, 1985, 5(5))
$$3\cos x \sin b - \sin x \cos b - 4\cos b = 3\sqrt{3}.$$

17.106. (МГУ, мех-мат, март 1996, 4(6))
При каких значениях a уравнение
$$2\cos^2\left(2^{2x-x^2-1}\right) = a - \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right)$$
имеет хотя бы одно решение?

17.9 Системы уравнений

17.107. (МГУ, философский, 1989, 5(5))
При каких значениях параметров a и b система
$$\begin{cases} 8x + (a^2 + ab + b^2)y = 4, \\ (a - b)x + 26y = 2, \end{cases}$$
имеет бесконечное множество решений?

17.108. (МГУ, биолого-почвенный, 1970, 4(5))
При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3, \end{cases}$$ не имеет решений?

17.109. Найти все значения параметров a и b, при которых системы уравнений $\begin{cases} ax + 2y = 2b + 1, \\ x + y = 3, \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + y = a^2 + 2, \\ x + 3y = 3, \end{cases}$ равносильны.

17.110. (МГУ, физический, 1988, 5(6)) *"Тест"*
При каких значениях a система $\begin{cases} 2axy + 2x - 2y + 3 = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0, \end{cases}$ имеет единственное решение?

17.111. (ФМШ, 1988, 4(6))

При каких значениях a система $\begin{cases} 2x + y = a - 1, \\ 2xy = a^2 - 3a + 1, \\ 4x^2 + y^2 \leq -a^2 + 5a - 4, \end{cases}$ имеет решение?

17.112. (МГУ, ВМиК (отд. бакалавров), 2006, 5(7))

Пусть (x, y) — решение системы уравнений $\begin{cases} 3x + y = \alpha + 2, \\ 9x^2 + y^2 = 5\alpha - 2. \end{cases}$

При каком α произведение xy принимает наибольшее значение?

Домашнее задание

17.113. (Филиал МГУ в г. Баку, 2014, 7(8))

Найдите все значения параметра a, при которых уравнения

$$x^3 + 7x^2 + (13 - 4a)x + 4a^2 - 2a + 8 = 0,$$

$$x^3 + 5x^2 + (4a + 13)x - 4a^2 - 2a + 8 = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

17.114. (МГУ, физический, 1977, 2(5))

При каких значениях параметра a все числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3, \end{cases}$ удовлетворяют также неравенству $x > y$?

17.115. (МГУ, экономический, 1978, 3(5))

При каких значения параметра b система уравнений
$\begin{cases} bx + 2y = b + 2, \\ 2bx + (b + 1)y = 2b + 4, \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

17.116. (МГУ, философский, 1989, 5(5))

При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} (a + b)x + 26y = 2, \\ 8x + (a^2 - ab + b^2)y = 4, \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

17.117. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2+ax+1=0, \\ x^2+x+a=0, \end{cases}$ имеет решение? *"Тест"*

17.118. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-y=a, \end{cases}$ имеет единственное решение?

17.119. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} ax^2+y=2, \\ x+y=1, \end{cases}$ имеет единственное решение?

17.120. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2=(x-a)y, \\ y^2-xy=9ax, \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

17.121. (МГУ, физический, 1988, 5(6)) *"Тест"*

При каких значениях параметра a система уравнений

$\begin{cases} x-y=1+xy, \\ (y-a)x+(2a-3)y=a, \end{cases}$ имеет единственное решение?

17.122. (МГУ, физический, март 1995, 7(8))

Найти наименьшее значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе $\begin{cases} x+y=3a-1, \\ x^2+y^2=4a^2-2a+2. \end{cases}$

17.123. Для каждого значения параметра a определить число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2-y^2=a^2, \\ (x^2+y^2)^2=4a^2xy. \end{cases}$

17.10* Количество корней в задаче

17.124. (МГУ, мех-мат, 1990, 4(6))

Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$x^2-2a\sin(\cos x)+a^2=0$ имеет единственное решение.

17.125. (МГУ, геологический, май 2003, 6(8))
При каких значениях параметра a уравнение
$2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$ имеет единственное решение?

17.126. (МГУ, географический, май 1999, 5(6))
При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 - (2a+2)x + a^2 + 2a - 3 = 0, \\ \sqrt{(y-a)^2 + x^2} + \sqrt{(y-a)^2 + (x+4)^2} = 4, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

17.127. (МГУ, мех-мат, 1966, 5(5))
Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a, \\ x^2 + y^2 = b, \end{cases}$$ имеет единственное решение.

17.128. (МГУ, мех-мат, 1966, 5(5))
Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b.

17.129. (МГУ, ВМиК, 1998)
Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a \cdot \cos\frac{x^2-1}{x} + a^2 - \frac{5}{4} = 0$$

имеет единственное решение.

17.130. (МГУ, филологический, 1984, 5(5))
При каких a система $\begin{cases} y \geq x^2 + 2a, \\ x \geq y^2 + 2a, \end{cases}$ имеет единственное решение?

17.131. (МГУ, филологический, 1992, 5(5))
При каких a система уравнений $\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 1 = 0, \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 2 = 0, \end{cases}$
имеет единственное решение?

17.132. (МГУ, химический, 2005, 6(6))

При каких значениях параметра a уравнение $|x| + \left|\dfrac{x+1}{3x-1}\right| = a$ имеет ровно три решения?

17.133. (МГУ, ВМиК, 2010, 5(6))

Найдите все значения параметра a, при которых система имеет решение: $\begin{cases} 64 \cdot 25^{-\sqrt{y}} + (80-40a) \cdot 5^{-\sqrt{y}} - 5a \le 0, \\ 40 \cdot 5^{-\sqrt{y}} = 80 \cdot 2^x + 5a + a \cdot 2^{-x}. \end{cases}$

17.134.* (МГУ, 2018, 6(8)) *"Решение"*

Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \le 0, \\ ay^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \le 0, \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

17.135.* (МГУ, 2013, 8(8))

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin\left(x + \dfrac{a}{x}\right) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

Домашнее задание

17.136. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2008", 3(10))

При каких значениях a существует единственное решение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = a? \end{cases}$$

17.137. (МГУ, вместо ЕГЭ, 2018, 8(8))

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0$ имеет ровно одно решение.

17.138. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - \sin^2 y = 3, \end{cases} \quad \text{имеет единственное решение.}$$

17.139. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \end{cases} \quad \text{имеет единственное решение.}$$

17.140. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0, \\ y - |ax| = 0, \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

17.141. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 7(7))
При каких значениях параметра b система уравнений
$\begin{cases} (x^2+1)b = y + \cos 2x, \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2, \end{cases}$ имеет единственное решение.

17.142. (МГУ, химический, 2002, 6(6))
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2^{-x^2} \cdot 4^x + \sin\dfrac{\pi x}{4} + \cos\dfrac{\pi x}{4} - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}$ имеет единственное решение.

17.143. (МГУ, геологический, 1989, 5(6))
При каких значениях параметров a и b уравнение
$(3x - a^2 + ab - b^2)^2 + (2x^2 - a^2 - ab)^2 + x^2 + 9 = 6x$ имеет хотя бы одно решение x.

17.144. (МГУ, мех-мат, 1971, 4(5))
При каких значениях параметра a система неравенств
$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \le a, \\ x^2 - 2x \le 3 - 6a, \end{cases}$ имеет единственное решение.

17.145. (ИСАА, социально-экономический, 1991, 6(6))
При каких значениях параметра b система уравнений
$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = b, \end{cases}$ имеет ровно три решения?

17.146. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 8(8))
При каких значениях c уравнение $-\sqrt{16 - x^2} = c + x$ имеет единственное решение?

17.147. (МГУ, географический факультет, 1994, 5(5))
При каких значениях a уравнение имеет единственное решение
$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}.$$

17.148. (МГУ, географический, 1978, 5(5))

При каких значениях параметра a существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0, \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0. \end{cases}$$

17.149. (МГУ, экономический, 1987, 6(6))

При каких значениях параметра a система уравнений

$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$ имеет единственное решение.

17.150. (МГУ, 2012, 7(8))

При каких значениях параметра a уравнение $a\sqrt{x+y}=\sqrt{2x}+\sqrt{y}$ имеет единственное решение.

17.151. (МГУ, химический, 1986, 5(5))

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$\begin{cases} 1-\sqrt{|x-1|}=\sqrt{7|y|}, \\ 49y^2+x^2+4a=2x-1, \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

17.152. (МГУ, экономический, апрель 2003, 5(5))

При каких значениях параметра b уравнение

$$12\cos^2\left(\frac{\pi-1}{2}-x\right)+b\left(3\sqrt{|1+2x|}+2x^2+\frac{1}{2}+2x\right)-$$

$$-\frac{5(2bx+b)^2}{4b+12}=2b^2+2b-12-\arcsin\left(x^2+\frac{1}{4}+x\right)$$

имеет единственное решение.

17.153. (МГУ, экономический, 2008, 6(7))

Найти все значения a, при которых уравнение

$$\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{x}{4}\right)\log_{\sqrt{17}+4}\left(x+4+\sqrt{x^2+8x+17}\right)=$$

$$=a^2-a\sin\left(\pi\cdot\frac{x^2+8x-64}{32}\right)-2$$

имеет единственное решение, и определить это решение.

17.154. (МГУ, почвоведения, глоб. процессов, 2007, 7(8))
Найти все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} (5-2\sqrt{6})^x + (5+2\sqrt{6})^x - 5a = y - |y| - 8, \\ x^2 - (a-4)y = 0, \end{cases}$$
имеет единственное решение.

17.155. (МГУ, почвоведения, 1985, 5(5))
Пусть x_0 — больший корень уравнения
$$x^2 + 2(a-b-3)x + a - b - 13 = 0.$$
Найти наибольшее значение x_0 при $a \geq 2$, $b \leq 1$.

17.156. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 7(8))
Найдите все значения параметра a, при которых система
$\begin{cases} \operatorname{arctg}(25^x - 9 + a - y) = 0, \\ y \cdot 5^{-x} + \sqrt{a-1} = 0, \end{cases}$ имеет единственное решение (x_0, y_0),
удовлетворяющее условию $x_0 \leq 0$.

18 Неравенства с параметром

18.1 Линейные неравенства

18.1. $(a-2)x \le 3$. *"Решение"*

18.2. $(a^2-4)x \le -a^2+5a-6$. *"Тест"*

18.3. $\dfrac{3ax+4}{3a+9} \le \dfrac{x}{a+3} + \dfrac{3a-5}{3a-9}$.

Домашнее задание

18.4. $(a+3)x \ge 2$.

18.5. $ax - 1 \le \dfrac{x}{a+3}$.

18.6. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 8(8))

Найти все значения параметра $p \in [-4;\,4]$, при которых неравенство $(p-2)\big((x+1)(p-3)+2x\big) > 0$ выполняется при любых $x \ge 0$.

18.2 Квадратичные неравенства

18.7. $x^2 > a$.

18.8. $(x-2a)(x+a-3) \le 0$.

18.9. $ax^2 - 2x - 1 \ge 0$. *"Решение"*

18.10. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2005, 8(8))

Найти все значения параметра a, при которых значение квадратного трехчлена $2x^2 - ax + a^2 + 2a - 3$ на отрезке $-1 \le x \le 1$ не превосходит 1.

18.11. Найти все значения a, при каждом из которых из неравенств $0 \le x \le 1$ следует неравенство $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2 \le 0$.

18.12.* Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения системы неравенств $\begin{cases} x^2 - 2x \le a - 1, \\ x^2 - 4x \le 1 - 4a, \end{cases}$ образуют на числовой оси отрезок длины единица.

Домашнее задание

18.13. $x^2 \le a.$

18.14. $x^3 > a.$

18.15. $x^2 + ax + 1 < 0.$

18.16. $x^2 - ax + 2x + \dfrac{1}{4} > 0.$

18.17. $ax^2 + 2ax - 2 \le 0.$

18.18. При каких значениях параметра a из неравенства $1 < x \le 2$ следует неравенство $f(x) = x^2 - 2ax + a < 0$? *"Тест"*

18.19. (МГУ, физический, 1994, 7(8))
Найдите все значения a, для каждого из которых система $\begin{cases} -x^2 + 12x - a \ge 0, \\ x \le 2, \end{cases}$ выполняется хотя бы при одном значении x.

18.20. (МГУ, физический, 2000, 7(8)) *"Тест"*
При каких значениях параметра a неравенство

$$\left(x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a\right)\sqrt{1-x} \le 0$$

имеет единственное решение?

18.21. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ выполняется: 1) для всех $x > 0$; 2) для всех $x < 0$.

18.22. (МГУ, биологический, 1994, 5(5))
Найти все такие значения величины x, при которых неравенство

$$(4 - 2a)x^2 + (13a - 27)x + (33 - 13a) > 0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

18.23. (МГУ, мех-мат, 1992, 6(6))
Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(a+2)x^3 - (1+2a)x^2 - 6x + (a^2 + 4a - 5) > 0$$

хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-2; 1]$.

18.24. (МГУ, факультет Гос. управления, 2006, 6(7))
Найдите значения a, для которых неравенство
$(a+b+36)x^2 - 5(x-1)(b+1) \le 0$ имеет решение при любом b.

18.3 Дробно-рациональные неравенства

18.25. $\dfrac{x-2}{x-a} \ge 0.$

18.26. $x + \dfrac{1}{x} \le a.$ *"Решение"*

18.27. (МГУ, почвоведения, 2003, 6(6))
Найти все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3;-1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\dfrac{x-3b}{b-2x} < 0.$

18.28. Найти все значения a, при которых множество значений функции $f(x) = \dfrac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}$ принадлежит интервалу $(-3;\,3)$.

Домашнее задание

18.29. $\dfrac{x-a}{x-1} \le 0.$

18.30. $x - \dfrac{1}{x} \ge a.$

18.31. (МГУ, экономический, 1998, 5(7))
Найти все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции $f(x) = \dfrac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$ принадлежат интервалу $(-1;\,2)$.

18.32. $\dfrac{x-a+2}{x^2-x-6} \le 0.$

18.33. (МГУ, физический, май 1997, 7(8))
Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-4}{x+3a-2} \le 0$ выполняется для всех x из промежутка $1 \le x \le 3$.

18.34. $ax + \dfrac{1}{x} \geq 1.$

18.35. (МГУ, психологический, 1988, 6(6))
Найти наибольшее значение a, при котором неравенство
$$a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leq \sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$$
имеет хотя бы одно решение.

18.4 Неравенства с модулем

18.36. $|x - 5| < a.$

18.37. $\left|\dfrac{ax - 5}{3} + x\right| \leq 3.$

18.38. $|x - 3a| - |x + a| < 2a.$

18.39. Найти все значения a, такие, что для любого x выполняется неравенство $2x + 2|x - a| + |x - 1| > 3.$

18.40. (МГУ, геологический, 2005, 7(8))
Найдите все значения, которые может принимать сумма $x + a$ при условии $|2x + 4 - 2a| + |x - 2 + a| \leq 3.$

Домашнее задание

18.41. $|x - 4| > a.$

18.42. $|x + a| \leq x.$

18.43. (МГУ, ВМиК, 2001, 3(7))
$|2x + a| \leq x + 2.$

18.44. $\left|\dfrac{ax + 1}{2} - x\right| \leq 5.$

18.45. (МГУ, ИСАА, 2000, 5(7))
Найдите все значения a, при которых неравенство $|x^2 - 2x + a| > 5$ не имеет решений на отрезке $[-1; 2]$.

18.46. (МГУ, психологический, 2006, 5(6))
$$\begin{cases} |2x+2a| > |x| + a, \\ ax < 0. \end{cases}$$

18.47. $|ax| \geq 1 + x$.

18.48. $|3x - a| + |2x + a| \leq 5$. *"Тест"*

18.5 Иррациональные неравенства

18.49. $\sqrt{x} < a$.

18.50. $\sqrt{x} > a$.

18.51. (МГУ, геологический, 1995, 7(9))
Пусть $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 3$, $g(x) = \sqrt{x} - a$, где a — параметр. Решить относительно x неравенство $f(g(x)) \leq 0$.

18.52. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 7(7))
При всех значениях параметра b решите неравенство
$$2(b-1) \cdot \sqrt{3x+1} + 1 \geq 3bx + b - 3x.$$ *"Тест"*

18.53.* (МГУ, почвоведения, 1992, 5(5))
При каких значениях параметра a все числа из отрезка $-1 \leq x \leq 3$ удовлетворяют неравенству $2ax + 2\sqrt{2x+3} - 2x + 3a - 5 < 0$?

Домашнее задание

18.54. $\sqrt[3]{x+1} \leq a$.

18.55. (МГУ, физический, 1997, 7(8))
$$a - 2 < (a-1)\sqrt{x+1}.$$

18.56. $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$.

18.57. $\sqrt{2x+a} \geq x$.

18.58. (МГУ, почвоведения, 1996, 6(6))
Определить, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a} \geq x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

18.59. (МГУ, почвоведения, 1997, 6(6))
$\sqrt{a^2 - x^2} \geq a + 1.$

18.60. (МГУ, психологический, 1989, 5(5))
$x + 2a - 2\sqrt{3ax + a^2} > 0.$

18.61. $\dfrac{\sqrt{x+1} - 2x - 1}{x + a - 1} \geq 0.$ *"Тест"*

18.62.* $\sqrt{x^2 + x} < a - x.$

18.6 Показательные неравенства

18.63. $3^x < a.$

18.64. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \geq a.$

18.65. (МГУ, психологический, 1977, 5(5))
$a^2 - 9^{x+1} - 8a \cdot 3^x < 0.$

18.66. (МГУ, биологический, 1973, 5(5))
При каких значениях параметра a неравенство $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение.

Домашнее задание

18.67. $3^x \geq a.$

18.68. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x < a.$

18.69. (МГУ, физический, 1995, 7(8))
$3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1}.$

18.70. (МГУ, психологический, 1977, 5(5))
$a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0.$

18.71.* (МГУ, ФНМ, 2006, 6(6))
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^x + 4^{-x} + 8|2^x + 2^{-x} - a| + 11a < 26 + 2a(2^x + 2^{-x})$ имеет хотя бы одно решение.

18.7 Логарифмические неравенства

18.72. $\log_a x \geq 1$.

18.73. $\log_x a \leq 1$.

18.74. $\log_x (x-a) \geq 2$. *"Решение"*

18.75. $\log_{\sqrt{2a}} (a+2x-x^2) \leq 2$.

Домашнее задание

18.76. $\log_a x \leq 1$.

18.77. $\log_x a \geq 1$.

18.78. (Филиал МГУ в г. Баку, 2015, 7(8))

Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\log_{a(a+4)}(x^2-4x+25) > 1$ выполняется при всех значениях x.

18.79. $\dfrac{\log_3(x-a)-1}{|x-1|+x-3} \geq 0$. *"Тест"*

18.8 Тригонометрические неравенства

18.80. (Филиал МГУ в г. Астана, 2017, 7(8)) *"Решение"*

Найти все значения параметра a, при которых неравенство $11+\cos^2 x > 3a^2+5a-(4a-1)\sin x$ выполняется для всех x.

18.81. $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \leq a$.

Домашнее задание

18.82. (МГУ, географический, 1995, 6(6))

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $y(x) = \log_{25-a^2}(\sin x + \sqrt{8}\cos x - a)$ определена при всех значениях переменной x.

18.83. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 7(7))

Найти все значения параметра a, при которых неравенство $|7\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + 3\cos^2 x + a - 1| \leq 6$ верно для любых x.

18.84. $\cos t - \dfrac{1}{\cos t} \geq a$.

19 Доказательство неравенств

19.1 Неравенства для средних

19.1. Доказать *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим*[8] *для двух чисел:*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad a, b \geq 0;$$

причем неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = b$.

19.2. Доказать *неравенство для средних для четырех чисел:*

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}, \qquad a, b, c, d \geq 0.$$

19.3. Доказать *неравенство для средних для трех чисел:*

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \qquad a, b, c \geq 0.$$

19.4. Доказать *неравенство для средних для n чисел:*

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}, \qquad a_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

19.5. $\ln(n-1)\ln(n+1) < \ln^2 n$, если $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

19.6. $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$. *"Решение"*

19.7.* $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq 64$, если $a + b + c = 1$, $a, b, c > 0$.

Домашнее задание

19.8. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$, если $a, b > 0$.

19.9. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 8$, если $a, b, c > 0$.

19.10. $(a+2)(b+2)(a+b) \geq 16ab$, если $a, b \geq 0$.

---

[8] Для краткости иногда такое неравенство будем называть *неравенством для средних.*

19.11. $\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \le \sqrt[4]{ab}$, если $a, b > 0$.

19.12. $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[n]{2-\sqrt{3}} > 2$.

19.13. $\dfrac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \ge 2$.

19.14. $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \ge 9$, если $a, b, c > 0$.

19.15. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge 9$, если $a+b+c=1$, $a, b, c > 0$.

19.16. $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c} \ge a+b+c$, если $a, b, c > 0$.

19.17. $\log_n(n+1) < \log_{n-1} n$, если $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

19.18. (МГУ, 2015, 8(8))

Найдите все пары $(\alpha,\ \beta)$, при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4-3\sin\alpha}{2+\cos 2\alpha}+\frac{2+\cos 2\alpha}{\beta^2+\beta+1}+\frac{\beta^2+\beta+1}{\sqrt{\beta}+1}+\frac{\sqrt{\beta}+1}{4-3\sin\alpha}.$$

19.2 Разные задачи

19.19. (МГУ, 2017, 2(8)) *"Решение"*

Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+ac+bc=4$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

19.20. $a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac+bc$.

19.21. $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3 \ge 0$.

19.22. $\dfrac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$, если $a, b \ge 0$.

19.23.* $\dfrac{a^4+b^4}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4$.

19.24.* $\dfrac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$, если $a, b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

19.25. Вычислить $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, если $n \in \mathbb{N}$.

19.26.* $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{n-1}{n}$, если $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

19.27.* $1 < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} < 2$, если $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

19.28.* Определить целую часть числа

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

19.29.* $a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) \leq 6abc$, если $a, b, c \geq 0$.

19.30.* $a^2c + b^2a + c^2b \leq \dfrac{4}{27}$, если $a + b + c = 1$, $a, b, c \geq 0$.

19.31.* Доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполняется неравенство *Коши–Буняковского*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Домашнее задание

19.32. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

19.33. $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{1}{3}$, если $a + b + c = 1$.

19.34. $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + a^2 + a(x + y + z + u) \geq 0$.

19.35. $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 13 - 2x - 12y - 6z \geq 0$.

19.36. $x^2 + 2xy + 2y^2 + 6y + 10 > 0$.

19.37. $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, если $a, b \geq 0$.

19.38. $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

19.39.* $\dfrac{a^5+b^5}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^5$, если $a, b \geq 0$.

19.40. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Три числа a, b и c удовлетворяют соотношению
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$
Докажите, что какие-либо два из них равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

19.41. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100}<\dfrac{1}{10}$.

19.42. Вычислить $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$, если $n \in \mathbb{N}$.

19.43.* $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{25}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)^2}<\dfrac{1}{4}$, если $n \in \mathbb{N}$.

19.44.* $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1)$, если $n \in \mathbb{N}$.

19.45. $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!$, если $n \in \mathbb{N}$, $n>2$.

19.3 Применение производной

19.46. (МГУ, биологический, 1989, 3(5))

Найти наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{1}{2x^3-9x^2+12x+1}$ на отрезке $0 \leq x \leq 3$.

19.47. (МГУ, философский, 1989, 4(5))

Найти наибольшее значение функции $y(x)=x^3-\dfrac{4}{3}|x|$ на отрезке $[-1,1;\ +1,1]$.

19.48. Доказать неравенство Бернулли $(1+x)^a>1+ax$ для любого $x>0$ при $a>1$.

19.49. Что больше e^{π} или π^{e}?

19.50.* Доказать неравенство $x^y+y^x>1$ при $x, y>0$.

20 Системы уравнений

20.1 Симметрические уравнения и системы

Решить системы:

20.1. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 6(8))

$$\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

"Решение"

20.2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x^3 + y^3 = 19. \end{cases}$

20.3. (МГУ, 2014, 6(8))

Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} x^{3/2} + y = 16, \\ x + y^{2/3} = 8. \end{cases}$

20.4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{7}{2}, \\ x + y + z = \dfrac{7}{2}, \\ xyz = 1. \end{cases}$

20.5. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$

20.6. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 8(10))

$$\begin{cases} x + \sqrt{1 + x^2} = 2^{y-x}, \\ y + \sqrt{1 + y^2} = 2^{z-y}, \\ z + \sqrt{1 + z^2} = 2^{x-z}. \end{cases}$$

20.7.* (МГУ, мех-мат, 1977, 4(5))

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание

20.8. (МГУ, геологический, 2000, 5(8))

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=30, \\ x^2+y^2=325. \end{cases}$$

20.9. $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=21, \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}=90. \end{cases}$

20.10. (МГУ, 2014, 6(8))

Найдите все x, y на интервале $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^3 x}+\dfrac{1}{\sin^3 y}=16, \\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y=6. \end{cases}$

20.11. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{13}{3}, \\ x+y+z=\dfrac{13}{3}, \\ xyz=1. \end{cases}$

20.12. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+xz+yz=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$

20.13. $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$

20.14. $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2+2b^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$

20.15.* (МГУ, географический, 2002, 6(6))

$$\begin{cases} x^3=5x+y, \\ y^3=5y+x. \end{cases}$$

20.16.* (МГУ, мех-мат, 1977, 4(5))

$$\begin{cases} 2y^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0, \\ 2z^3 + 2y^2 + 3y + 3 = 0, \\ 2x^3 + 2z^2 + 3z + 3 = 0. \end{cases}$$

20.2 Однородные системы

В этом пункте одно из уравнений сводится к однородному уравнению, которое решается делением на одно из слагаемых.

20.17. (МГУ, филологический, 1982, 3(5)) *"Решение"*

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$$

20.18. $\begin{cases} 24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 = 0, \\ x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 = 0. \end{cases}$

Домашнее задание

20.19. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0. \end{cases}$

20.20. $\begin{cases} 2x^2 - 6xy + 5y^2 = 17, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -4. \end{cases}$

20.21. $\begin{cases} (x + y\sqrt{x} + y^2)\sqrt{x + y^2} = 65, \\ (x - y\sqrt{x} + y^2)\sqrt{x + y^2} = 185. \end{cases}$

20.22. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ x^2 + xz + z^2 = 28, \\ y^2 + yz + z^2 = 19. \end{cases}$

20.23. $\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 36, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 72. \end{cases}$

20.3 Системы уравнений высших порядков

20.24. (Филиал МГУ в г. Баку, 2014, 2(8))

$$\begin{cases} x^4\sqrt{x^3 - y^3} = 0, \\ y^2 + 3xy - x^2 = y + 2. \end{cases}$$

20.25. (МГУ, экономический, 1979, 4(5)) *"Решение"*

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4{,}5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$$

20.26. Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} y^2 - 4xy + 4y - 1 = 0, \\ 3x^2 - 2xy - 1 = 0, \end{cases}$ и условию $xy > 0$.

20.27. (МГУ, ВМиК, 2000, 5(6))
Найти наибольшее значение выражения $14x^2 + 40x + y - 324{,}5$ при условии, что $\begin{cases} 4x^2 + 20x + y \geq 162, \\ 20x^2 - 80x + y \leq 8. \end{cases}$

20.28. $\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0. \end{cases}$

20.29. (Филиал МГУ в г. Баку, 2016, 7(8))

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

20.30.* (МГУ, географический, 1981, 5(5))

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание

20.31. (МГУ, биологический, 1994, 1(5))

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$$

20.32. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 4(8))

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 3 = 0, \\ y^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

20.33. (МГУ, ФНМ, май 2000, 1(6))

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$$

20.34. $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 14, \\ y^3 + 3x^2y = 13. \end{cases}$

20.35. (МГУ, химический, 1998, 3(6))

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$$

20.36. (МГУ, факультет Гос. управления, 2003, 6(7))

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$$

20.37. (МГУ, экономический, 1980, 3(5))

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0. \end{cases}$$

20.38. (МГУ, геологический, 1996, 5(8))

$$\begin{cases} x^2 - xy = 20y, \\ 5xy - 5y^2 = 4x. \end{cases}$$

20.39. (МГУ, геологический, 2003, 4(8))

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3 = 0, \\ 6y^3 - 18y - 13x^3 - 3x = 0. \end{cases}$$

20.40. $\begin{cases} \dfrac{1 + x^2}{1 + y^2} = \dfrac{1}{5}, \\ x^3 + 4y = y^3 + 16x. \end{cases}$

20.41.* (МГУ, почвоведения, 1979, 5(5))

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

20.42. (МГУ, мех-мат, 1970, 2(5))

$$\begin{cases} |xy - 2| = 6 - x^2, \\ 2 + 3y^2 = 2xy. \end{cases}$$

20.43. (МГУ, химический, 1978, 5(5); биолог, 1993, 6(6))

Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$

удовлетворяющие условию $z \geq 0$.

20.44.* (МГУ, географический, 1981, 5(5))

$$\begin{cases} y^2-xy+1=0, \\ x^2+2x=-y^2-2y-1. \end{cases}$$

20.4 Замена переменных

20.45. (ФМШ, 1997, 1(5))

$$\begin{cases} xyz=x^3-2, \\ xyz=y^3+3, \\ xyz=z^3-3. \end{cases}$$

20.46. (МГУ, экономический, 1985, 5(5))

Найти все решения (x, y, z, t) системы $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z^2+t^2=9, \\ xt+yz \geq 6, \end{cases}$ для которых

выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

20.47.* (МГУ, 2017, 8(8))

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos(x^2-y^2)}-y\cdot\operatorname{tg}(x^2-y^2)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \\ \dfrac{y}{\cos(x^2-y^2)}-x\cdot\operatorname{tg}(x^2-y^2)=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}. \end{cases}$$

20.48.* (МГУ, мех-мат, март 2002, 5(6))

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}-9xy=2, \\ \dfrac{z}{y}-9yz=6, \\ \dfrac{3x}{z}-3zx=2. \end{cases}$$

Домашнее задание

20.49. (МГУ, геологический, 2001, 5(8))

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{2} + \dfrac{5}{2x + y - xy} = 5, \\ 2x + y + \dfrac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$$

20.50. (МГУ, геологический, 1998, 7(8))

$$\begin{cases} x(1 + y) = y + 7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

20.51. $\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 336, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 112. \end{cases}$

20.52.* (МГУ, мех-мат, март 2002, 5(6))

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} - xy = 1, \\ \dfrac{z}{y} - 4yz = 2, \\ \dfrac{x}{z} - 4zx = 4. \end{cases}$$

20.53.* (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2007, 9(10))
Найти все тройки положительных чисел x, y, z, удовлетворяющие системе $\begin{cases} \sqrt{3}(x - y) \leq 1 + xy, \\ \sqrt{3}(y - z) \leq 1 + yz, \\ \sqrt{3}(1 + xz) \leq x - z. \end{cases}$

20.5 Применение геометрии

20.54. (МГУ, ВМиК, 1996, 5(6))

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

20.55.* (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2008, 9(10))

Числа x, y, z удовлетворяют системе $\begin{cases} 3x^2 + 3xy + y^2 = 75, \\ y^2 + 3z^2 = 48, \\ x^2 + xz + z^2 = 9, \\ x, y, z > 0. \end{cases}$

Найти $xy + 2yz + 3xz$.

Домашнее задание

20.56. (МГУ, мех-мат, 2007, 2(6))

Графики функций $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$ и $g(x) = -5x^2 + 2x + 3$ пересекаются в двух точках. Найти коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

20.57. (МГУ, геологический, 2007, 7(8))

Числа x, y, z таковы, что $\begin{cases} x + 1 = z + y, \\ xy + z^2 + 14 - 7z = 0. \end{cases}$

При каких значениях z сумма $x^2 + y^2$ максимальна? Найдите это максимальное значение.

20.58. (МГУ, ВМиК, 2001, 3(6))

Среди всех решений системы $\begin{cases} y + 3x \leq -3, \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y \leq 11, \end{cases}$ найти такое, при котором выражение $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$ принимает минимальное значение.

20.59. (МГУ, геологический, май 2003, 6(8))

$$\begin{cases} 2^{2-x} = 4y\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1 - 2x} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

20.60. (МГУ, почвоведения, 2006, 7(7))

Найти все значения параметра b, для каждого из которых при любом значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y + 4 = 0, \\ y + ax + ab = 0, \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

20.61.* (МГУ, биологический, 2005, 6(7))

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 22y + 122} = 2\sqrt{37} - \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2}, \\ \log_{x+1} 4 + \log_y 4 = 0. \end{cases}$$

21 Целочисленные задачи

21.1 Сравнение чисел

В случае, когда числа a и b напрямую не удается сравнить из-за сложности их выражений, иногда подбирают такое промежуточное число c, что $a < c < b$, а неравенства $a < c$ и $c < b$ более легко доказываются. При использовании этого *метода вставки промежуточного числа* выбор c зависит от вашей математической интуиции.

21.1. (МГУ, 2018, 1(8)) *"Решение"*

Какое из чисел $\dfrac{49}{18}$ и $\dfrac{79}{24}$ ближе к 3?

21.2. (МГУ, 2017, 1(8))

Какое из чисел больше: $\sqrt{\dfrac{6}{7}+7+\dfrac{7}{6}}$ или 3?

21.3. Записать число 0,11(7) в виде обыкновенной дроби.

21.4. Сравнить числа 3^{400} и 4^{300}.

21.5. Сравнить числа $\sqrt{2}+\sqrt{11}$ и $\sqrt{3}+3$.

21.6. Сравнить числа $2^{\sqrt{3}}$ и $3^{\sqrt{2}}$. *"Решение"*

21.7. Сравнить числа $\log_2 5$ и $\sqrt{8}$.

21.8. Сравнить числа $3^{\sqrt{5}-2}$ и $\dfrac{4}{3}$.

21.9. Сравнить числа $\dfrac{1}{2}\log_5 6$ и $\log_6 5$.

21.10. Сравнить числа $\sqrt{1997}+\sqrt{1998}$ и $\sqrt{1996}+\sqrt{1999}$.

21.11. Какой знак имеет число $\log_\pi\left(\operatorname{tg}\dfrac{3}{4}\right)$.

21.12. Сравнить числа $\sin\cos 1$ и $\cos\sin 1$.

21.13. Сравнить числа $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$.

Домашнее задание

21.14. (Филиал МГУ в г. Астана, 2018, 1(8))

Какое целое число задано выражением: $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\sqrt{32}}$?

21.15. (Филиал МГУ в г. Астана, 2017, 1(8))

Найти все целые числа, которые лежат между числами $\sqrt{3}\cdot\sqrt{85}$ и $\dfrac{14-1{,}7}{3-2{,}3}$.

21.16. (Филиал МГУ в г. Баку, 2014, 1(8))

Какое из чисел больше и почему: $\dfrac{2}{3}+0{,}22$ или $\dfrac{3}{7}+0{,}46$?

21.17. (Филиал МГУ в г. Баку, 2015, 1(8))

Определите, какое из чисел больше: $\sqrt[3]{23}$ или $\sqrt{8}$?

21.18. В какой четверти лежит угол $\sqrt{\pi}$ радиан?

21.19. Сравнить числа $\sqrt[3]{4}$ и $3-\sqrt{2}$.

21.20. Сравнить числа $5-\sqrt{15}$ и $\sqrt{17}-3$.

21.21. Сравнить числа $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.

21.22. Сравнить числа $\log_2\pi+\log_\pi 2$ и 2.

21.23. Сравнить числа $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\dfrac{11}{1000}$.

21.24. Сравнить числа $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ и $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

21.25. Сравнить числа $\log_{11}119$ и $\log_{15}227$.

21.26. Сравнить числа $\dfrac{1}{2}\log_4 5$ и $\log_5 4$.

21.27. Сравнить числа $\log_2 3$ и $\log_5 8$.

21.28. Сравнить числа $\log_3 7$ и $\log_7 27$.

21.29. Сравнить числа $\log_{3\sqrt{3}} 5$ и $\cos\dfrac{\pi}{7}$.

21.30. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2006”, 2(10))
Сравнить числа $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}$ и меньший корень квадратного трёхчлена $11x^2 - 17x - 13$.

21.31. Сравнить числа $\cos 136^\circ$ и $\operatorname{tg} 153^\circ$.

21.32. Расположить в порядке возрастания числа:
$\sin 10^\circ$, $\cos 275^\circ$, $\operatorname{tg} 190^\circ$, $\operatorname{ctg} 100^\circ$.

21.33. Сравнить числа $\sin 31^\circ$ и $\operatorname{tg} 30^\circ$.

21.2 Целочисленные уравнения и неравенства

21.2.1 Линейные уравнения

21.34. Найти все целочисленные решения уравнения

$$5x + 7y = 6.$$

“Решение”

21.35. Найти наибольший общий делитель чисел 204 и 372, представить его через эти числа в виде $d = 204m + 372n$ $(m, n \in \mathbb{Z})$, и решить полученное уравнение в целых числах.

21.36. (МГУ, мех-мат, 1969, 3(4))

$$\begin{cases} \sin^2 4x = \cos^2 5x, \\ \sin 5x + \sin 4x = 1, \\ |x| < 10. \end{cases}$$

21.37. (МГУ, социологический, апрель 2005, 6(6))
Фирма продавала чай в центре города по 7 рублей, а кофе по 10 рублей стакан, на вокзале по 4 рубля и 9 рублей, соответственно. Всего было продано за час 20 стаканов чая и 20 стаканов кофе, при этом выручка в центре и на вокзале оказалась одинаковой. Сколько стаканов кофе было продано в центре?

Домашнее задание

21.38. Решить уравнение $3x - 4y = 1$ в целых числах.

21.39. Найти все целочисленные решения уравнения

$16x + 20y = 14.$

21.40. Решить уравнение $\left(1 + \sin\frac{\pi x}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\pi x}{5} = 0.$

21.41. Найти все x, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = 1, \\ \operatorname{tg}\frac{\pi x}{9} = \sqrt{3}, \\ \cos\frac{\pi x}{10} = 0. \end{cases}$$

21.42. Найти все целочисленные решения уравнения

$273x + 1014y = 156.$

21.43. Найти все целые числа, которые при делении на 15 дают остаток 2, при делении на 27 дают остаток 3, при делении на 12 дают остаток 4.

21.44. (МГУ, экономический, 2008, 5(7))

Тринадцать пиратов делят клад золотых монет на палубе шхуны. При попытке разделить клад поровну оказалось, что остается 8 монет. Налетевшим штормом двух пиратов смыло за борт. Когда оставшиеся пираты снова стали поровну делить клад, то лишними оказались 3 золотые монеты. Затем в перестрелке погибли еще 3 пирата. Когда уцелевшие пираты опять стали делить клад, то на этот раз оказалось, что остается 5 монет. Из какого количества монет состоял клад, если для его переноски достаточно сундука, вмещающего 500 золотых монет.

21.2.2 Квадратичные уравнения

21.45. Решить в целых числах уравнение:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 3.$$

21.46. (МГУ, психологический, 1975, 5(5)) *"Решение"*

Найти все целые положительные решения уравнения

$$2x^2 + 2xy - x - y = 112.$$

21.47. Решить уравнение $xy + x - y = 2$ в целых числах.

21.48. (МГУ, биологический, 1992, 4(5))

Найти все пары целых чисел (m, n), удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 16m - 22n - 171, \\ 30m - n^2 > 252 + 14n + m^2. \end{cases}$$

21.49. (МГУ, психологический, 1979, 5(5))

Найти все тройки целых чисел (x, y, z), для которых выполняется соотношение $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$.

21.50. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 9(10))

На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причем числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найти все возможные значения m и n.

21.51. (МГУ, психологический, 1985, 6(6))

Найти все значения a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y, удовлетворяющая уравнению $3x^2 + 11xy + 10y^2 = 7$ и двум неравенствам $x + y > 0$ и $4a^2x - 3ay < 0$.

Домашнее задание

21.52. Доказать, что уравнение $x^3 + x^2y + y^3 = 0$ не имеет ненулевых рациональных решений.

21.53. (МГУ, экономический, 1973, 2(4))
Найти все пары чисел (x, y), для которых выполняются одновременно следующие условия:

а) $x^2 - 2xy + 12 = 0$;
б) $x^2 + 4y^2 \leq 60$;
в) x является целым числом.

21.54. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы", 2008, 3(10))
При каких значениях параметра a каждый из квадратных трёхчленов $x^2 + ax + 2008$ и $x^2 + 2008x + a$ имеет хотя бы один корень, причем все корни — целые числа?

21.55. (МГУ, почвоведения, май 2003, 4(6))
Найти все целочисленные решения уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

21.56. (МГУ, почвоведения, май 2001, 5(6))
Решить уравнение в целых числах:

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7.$$

21.57. Решить в целых числах (x, y) уравнение

$$55x^2 - 12xy - 91y^2 = 59.$$

21.58. Решить в целых числах (x, y) уравнение

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = 9.$$

21.59. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 6(8))
Найдите все целочисленные решения уравнения

$$x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 88 = 0.$$

21.60. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 6(8))
Найдите все пары целых неотрицательных чисел (k, m), являющихся решениями уравнения $2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36$.

21.61. (МГУ, психологический, 1975, 5(5))
Найти все целые положительные решения уравнения

$$2x^2 + 2xy - x + y = 112.$$

21.62. (МГУ, географический, 1998, 6(6))
Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению $3x = 5y^2 + 4y - 1$ и доказать, что для каждой такой пары сумма $x^3 + y^3$ является нечетным числом.

21.63. (МГУ, ИСАА, 1997, 7(7))
Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$3xy + 14x + 17y + 71 = 0.$$

21.2.3 Разные задачи

21.64. (МГУ, мех-мат, 2000, устный)
Найти все пары натуральных чисел (m, n), для которых выполнено равенство $\log_m(n-7) + \log_n(5m-17) = 1$.

21.65. (МГУ, ВМиК, 2001, устный)
Решить уравнение в натуральных числах

$$k^3 - l^3 = kl + 61.$$

21.66.* (МГУ, мех-мат, 1990, 5(6))
Найти все тройки целых чисел (x, y, z), для которых

$$\log_2(2x + 3y - 6z + 3) + \log_2(3x - 5y + 2z - 2) +$$
$$+ \log_2(2y + 4z - 5x + 2) > z^2 - 9z + 17.$$

21.67.* (МГУ, экономический, 1989, 6(6)) *Указание.*
Решить в целых числах уравнение

$$9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0.$$

21.68. (МГУ, филологический, 2000, 6(6))

Расшифровать шифровку $\begin{pmatrix} * & + & * & = & \text{Л} \\ - & & \times & & : \\ * & + & * & = & \text{О} \\ \| & & \| & & \| \\ \text{Д} & : & \text{У} & = & \text{Б} \end{pmatrix}$, в которой:

1) буквы и звездочки означают цифры;
2) разные буквы означают разные цифры;
3) звездочки могут означать любые цифры.

21.69. Расшифровать шифровку $+\begin{array}{l} \textit{с иница} \\ \underline{\textit{с иница}}, \\ \textit{птички} \end{array}$ в которой буквы означают цифры; разные буквы означают разные цифры.

21.70.* (МГУ, биологический, 2005, 7(7))
Задана функция f, причем $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(10) = -\pi$. Найти $f(-\frac{2}{7})$.

21.71.*(Олимпиада "Покори Воробьёвы горы", 2005, 10(10))
Существуют ли функции f и g, определенные на всей числовой прямой и при каждом x удовлетворяющие равенствам:

$$f(g(x)) = x^2,\ g(f(x)) = x^3?$$

21.72.* (МГУ, Черноморский филиал, 2005, 8(10))
Решите уравнение $x^2 + [x] = 4$, где $[x]$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее x.

Домашнее задание

21.73. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
Найдите минимальное значение величины $x + y$, если x и y — целые числа, удовлетворяющие условиям $\begin{cases} |y - 2x + 1| \le 3, \\ y > -4. \end{cases}$

21.74. (МГУ, химический, 2005, 5(6))
Найти все целочисленные пары (x, y), удовлетворяющие уравнению: $\sqrt{2x-y-3}+\sqrt{2y-x+3}=2\sqrt{3-x-y}$.

21.75. (МГУ, ВМиК, 2007, 4(6))
Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} x-y\le -25, \\ x^2-y\le 8, \\ 4x+y\le 1. \end{cases}$

21.76. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 6(8))
Найти все целочисленные решения системы:

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2<5, \\ 4y\le x+11. \end{cases}$$

21.77. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 5(7))
Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} |x^2-2x|<y+1, \\ y+|x-1|<2. \end{cases}$

21.78.* (МГУ, химический, май 1997, 6(6))
Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению:

$$(x^2+y^2)(x+y-3)=2xy.$$

21.79.* (МГУ, химический, май 2003, 5(6))
Найти все целочисленные пары (x, y), удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} y^3-3x^2-4y+18x-26>0, \\ y^3+x^2-4y-8x+14<0. \end{cases}$$

21.80.* (МГУ, ВМиК, 1985, 5(6))
Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2-2y^2+2z^2+10z+6y+\frac{\sqrt{3}}{2}x-17}+ \\ +\sqrt{3x^2-2\sqrt{3}\,(\cos\pi y+\cos\pi z)x+4}=0.$$

21.81. Найти десятичную цифру x числа $\overline{5x793x4}$, если известно, что это число делится на 9.

21.82.* Найти цифры x и y пятизначного числа $42x4y$, если известно, что это число делится на 72.

21.83. (МГУ, филологический, 2000, 6(6))

Расшифровать шифровку $\begin{pmatrix} * & + & C & = & * \\ + & & : & & : \\ P & : & O & = & T \\ \| & & \| & & \| \\ * & - & K & = & * \end{pmatrix}$, в которой:

1) буквы и звездочки означают цифры;
2) разные буквы означают разные цифры;
3) звездочки могут означать любые цифры.

21.84. Написать цифры вместо букв:

$$\begin{array}{r|l} -\,\text{а б в г д е} & \underline{\text{ж з и}} \\ \underline{\text{м н п р}}\quad & \text{к 8 л} \\ -\,\text{с т д} & \\ \underline{\text{у ф ч}} & \\ -\,\text{ш я э е} & \\ \underline{\text{ш я э е}} & \\ 0 & \end{array}$$

21.85.* (МГУ, мех-мат, устный)

Найти все тройки натуральных чисел, для которых выполнено равенство $3xy + 3yz + 3xz = 5xyz + 3$.

21.86.* Решить уравнение в натуральных числах:

$$xz + y = yx^2 + yz^2.$$

21.87.* Решить в натуральных числах уравнение

$$m \cdot n^2 = 10^5 n + m.$$

21.3 Целые числа, делимость

21.88. (МГУ, мех-мат, 1993, устный)

При каких целых n выражение $\dfrac{n^2 - n + 1}{n - 2}$ равно целому числу?

21.89. Доказать:

а) при целых n произведение $n(n+1)(n+2)$ делится на 6;

б) при целых n двучлен n^3+5n делится на 6;

в) если p — простое число, $p>3$, то число p^2-1 делится на 24;

г) если p и q простые и $p>q>3$, то число p^2-q^2 делится нацело на 24.

21.90. Дано: $m, n \in \mathbb{Z}$, m^2+n^2 делится на 3. Доказать, что m и n делятся на 3.

21.91. Какие остатки может давать число n^2 $(n \in \mathbb{Z})$ при делении на 6?

21.92. Является ли полным квадратом число $111\ldots1$ (300 цифр)?

21.93. Найти все двузначные числа такие, что две последние цифры его квадрата совпадают с этим числом.

21.94. Доказать равенство $(\underbrace{6\ldots6}_{n\text{ цифр}})^2+\underbrace{8\ldots8}_{n\text{ цифр}}=\underbrace{4\ldots4}_{2n\text{ цифр}}$.

21.95. Дана арифметическая прогрессия, члены которой — целые положительные числа. Известно, что в этой прогрессии есть член, являющийся полным квадратом. Доказать, что прогрессия содержит бесконечное множество таких членов.

21.96. Доказать, что следующие числа составные: а) $2\ldots21$ (1996 двоек); б) $2^{3^{1996}}+1$; в) $2^{10}+5^{12}$; г) $22^{33}+33^{22}$; д) $223^{333}+331^{222}$.

21.97. Найти две последние цифры числа $7^{9^{9^9}}$.

21.98. Доказать, что при любом натуральном n числа $21n+1$ и $14n+3$ — взаимно простые.

21.99. (Олимпиада "Покори Воробьёвы горы", 2011, 4(10))

Натуральные числа m, n таковы, что дробь $\dfrac{m}{n}$ несократима, а дробь $\dfrac{4m+3n}{5m+2n}$ сократила. На какие натуральные числа она сокращается?

21.100. (МГУ, "Ломоносов-2009", 5(9))

Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 4 раза?

21.101. (МГУ, "Ломоносов-2007", 6(10))

Натуральные числа a, b и c таковы, что $НОК(a, b) = 60$ и $НОК(a, c) = 270$ ($НОК(x, y)$ — наименьшее общее кратное чисел x и y). Найти $НОК(b, c)$.

21.102. (МГУ, "Ломоносов-2011", заочный тур, 3(10))

Найдите все двузначные числа вида $\overline{XY}$, если число, имеющее шестизначную десятичную запись $\overline{64X72Y}$, кратно 72.

21.103. Доказать иррациональность следующих чисел: а) $\sqrt{2}$; б) $\log_2 3$; в) $\cos 10°$; г) $\sin 10°$.

21.104. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

21.105. Доказать, что в натуральном ряду существует 100, идущих подряд, составных чисел.

21.106. Доказать, что простых чисел бесконечно много.

Домашнее задание

21.107. Найти НОД(54, 72) и НОК(54, 72).

21.108. Доказать,что НОД $(m, n) \cdot$ НОК $(m, n) = m \cdot n$.

21.109. (МГУ, ВМиК (отд. бакалавров), 2007, 1(6))
Найдите НОД чисел $n = 720$, $m = 756$, $k = 468$.

21.110. Доказать, что для любого натурального n наименьшее общее кратное чисел n^2+6n+9 и $n+4$ равно $n^3+10n^2+33n+36$.

21.111. Доказать, что для любого натурального n наибольший общий делитель чисел $n^2+10n+21$ и $n^2+9n+18$ равен $n+3$.

21.112. Сколько различных натуральных делителей имеет число $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, где числа $2 \le p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — простые, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные?

21.113. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая единицу и само число).

21.114. Доказать, что для любого целого n число $n^3 + 2n$ делится на 3.

21.115. Доказать, что при любых натуральных n число $\dfrac{n^4}{24} + \dfrac{n^3}{4} + \dfrac{11n^2}{24} + \dfrac{n}{4}$ принимает натуральные значения.

21.116. Доказать, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ при целых $n > 2$ делится на 120.

21.117. Доказать, что для любого целого n, по модулю большего единицы, число $n^5 - n$ делится на 30.

21.118. Пусть длины всех трех сторон прямоугольного треугольника выражаются в целых числах. Могут ли длины обоих катетов быть нечетными числами?

21.119. Доказать, что ни при каких целых n число $n^2 + 1$ не делится на 3.

21.120. Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел никогда не является квадратом целого числа.

21.121. Доказать, что у числа, являющегося точным квадратом, произведение двух последних цифр четно.

21.122. Доказать, что если между цифрами числа 1331 написать по равному количеству нулей, то получится точный куб.

21.123. Доказать, что нет целых чисел, которые от перестановки начальной и конечной цифры увеличивались бы в 5, в 6 или в 8 раз.

21.124. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Может ли целое число (записанное в десятичной системе счисления) при зачеркивании первой цифры уменьшиться: а) в 58 раз; б) в 57 раз?

21.125. Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.

21.126. Какие остатки может давать число n^2 $(n \in \mathbb{Z})$ при делении на а) 4; б) 10?

21.127. Какие остатки может давать число n^4 $(n \in \mathbb{Z})$ при делении на 5?

21.128. Дано: $m, n \in \mathbb{Z}$, $m^2 + n^2$ делится на 7. Доказать, что m и n делятся на 7.

21.129. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Докажите, что при любом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

21.130. Доказать, что следующие уравнения не имеют решения в целых числах: а) $x^2 + 1 = 3y$; б) $y^2 = 5x^2 + 6$; в) $2^x - 1 = y^2$ $(x > 1)$; г) $x(x^2 + 1) = 48$.

21.131. Доказать, что трёхчлен $x^2 + 5x + 16$ ни при каком целом значении x не делится на 169.

21.132. (МГУ, ИСАА, 2000, 6(7))

Определите сумму всех таких натуральных n, для которых числа 5600 и 3024 делятся без остатка на n и $n+5$ соответственно.

21.133. Найти все натуральные n, при которых дробь $\dfrac{3n^2-3n+20}{n-1}$ принимает целые значения.

21.134. (МГУ, мех-мат, 1993, устный)

Сократима ли дробь $\dfrac{n+3}{2n+7}$ хотя бы при одном целом n?

21.135. Доказать, что при любом натуральном n дробь $\dfrac{3n+5}{5n+8}$ несократима.

21.136. (МГУ, мех-мат, 1998, устный)

Сколько различных целочисленных пар (x, y) удовлетворяет уравнению $x^2 = 4y^2 + 2025$?

21.137. (МГУ, мех-мат, 1998, устный)

Доказать, что для любого простого числа $p > 5$ число $p^4 - 50p^2 + 49$ делится на 2880.

21.138. (МГУ, мех-мат, 1998, устный)

Найти количество трёхзначных чисел, делящихся на 5 или 7 (возможно одновременно), но не делящихся на 3.

21.139. Найти последнюю цифру числа 3^{1993}.

21.140. Являются ли полными квадратами числа:

а) $222\ldots2$ (n цифр); б) $666\ldots6$ (n цифр)?

21.141. Доказать, что в последовательности: 11, 111, 1111, 11111, ... нет числа, которое является квадратом натурального.

21.142.* Доказать, что все числа вида 16, 1156, 111556, 11115556, ... являются полными квадратами.

21.143. Найти наименьшее число, записываемое одними единицами, которое делилось бы на число $33\ldots3$ (сто троек).

21.144. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Пусть A, B, C — три натуральных числа, записанных в десятичной системе: A — единицами, число которых $2m$, B — единицами, число которых $m+1$, C — шестёрками, число которых m. Докажите, что число $A+B+C+8$ — квадрат некоторого целого числа.

21.145. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 100 включительно? *"Тест"*

21.146. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Найдите все четырехзначные числа, являющиеся квадратом целого числа, у которых первая цифра совпадает со второй, а третья цифра совпадает с четвертой.

21.147. Найти трёхзначное число, являющееся точным квадратом N^2, и такое, что произведение его цифр было равно $N-1$.

21.148. Доказать, что всякое простое число при делении на 30 дает в остатке снова простое число.

21.149. Найти все простые числа p такие, что p^2+8 — простое число.

21.150. Доказать, что $2010^{2010}-1$ делится на 2009.

21.151. Доказать, что следующие числа составные: а) $2^{5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}}+1$ (1000 пятерок); б) $2^{3^{1996}}-1$.

21.152. Доказать иррациональность следующих чисел: а) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} 5^\circ$; г) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3n}$, n — целое число; д) $\cos n^\circ$, n — целое число от 1 до 89, но не равное 60.

21.153. Существуют ли иррациональные числа α и β такие, что а) $\alpha+\beta$; б) $\alpha\cdot\beta$; в) α^β рациональны?

21.154. Найти все числа вида $\overline{34x5y}$, такие, что делятся на 36.

21.155. Доказать, что между двумя неравными рациональными числами есть иррациональное число.

Ответы, указания, решения

17.1. $(a-2)x = 3$. *Решение.* Если $a-2 \neq 0$, т.е. $a \neq 2$, то делим обе части уравнения на $a-2$ и находим, что $x = \dfrac{3}{a-2}$.

Если $a-2=0$, т.е. $a=2$, то, подставляя это значение a в исходное уравнение, получаем уравнение $0 \cdot x = 3$, решений не имеющее.

Ответ. $\begin{cases} a \neq 2, \\ x = \dfrac{3}{a-2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

17.3. $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq 0, \\ x = \dfrac{1}{a}. \end{cases}$ **17.4.** $\begin{cases} a \neq -3, \\ x = \dfrac{1}{a+3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = -3, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

17.5. $\begin{cases} a \neq \pm 2, \\ x = \dfrac{a-3}{a+2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$ **17.6.** $(-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$.

17.7. $\begin{cases} a < 0, \\ x \in \emptyset, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x = \pm\sqrt{a}. \end{cases}$ **17.8.** 0; 1.

17.10. При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2 - (2a+1)x + 3a - 1 = 0$ больше 1?

Решение. Если $a = 0$, то получаем уравнение $-x-1=0$, имеющее корень $x=-1$ меньший 1. Этот случай нам не подходит.

Если $a \neq 0$, то разделим обе части уравнения на a и обозначим квадратный трехчлен через $f(x)$:

$$f(x) = x^2 - \frac{2a+1}{a}x + \frac{3a-1}{a} = 0.$$

Ветви параболы $y = f(x)$ направлены вверх. Для выполнения условий задачи необходимо, во-первых, чтобы корни уравнения существовали, т.е. дискриминант $D \geq 0$. Во-вторых, оба корня уравнения находятся правее 1 на оси x, если вершина параболы $x_в = \dfrac{2a+1}{2a}$ лежит правее 1 и $f(1) > 0$.

Таким образом, условие задачи эквивалентно системе

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ x_в > 1, \\ f(1) > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{(2a+1)^2}{a^2} - 4 \cdot \dfrac{3a-1}{a} \ge 0, \\ \dfrac{2a+1}{2a} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2a} > 0 \Leftrightarrow a > 0, \\ 1 - \dfrac{2a+1}{a} + \dfrac{3a-1}{a} > 0, \end{cases}$$

(при $a > 0$ отбрасываем положительные знаменатели дробей)

$$\iff \begin{cases} 4a^2 + 4a + 1 - 12a^2 + 4a \ge 0 \Leftrightarrow 8a^2 - 8a - 1 \le 0, \\ a > 0, \\ a - 2a - 1 + 3a - 1 > 0 \Leftrightarrow 2a > 2 \Leftrightarrow a > 1, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{6}}{4} \le a \le \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}, \\ a > 1, \end{cases} \iff 1 < a \le \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ. $\left(1;\ \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

17.12. ± 1. **17.13.** $a = \pm\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$. **17.14.** $-\dfrac{1}{2}$; 0; $\dfrac{3}{2}$. **17.15.** 1; 2; 6.
17.16. $(-4;\ 0) \cup (0;\ 1)$. **17.18.** $\left(\dfrac{9-\sqrt{17}}{16};\ \dfrac{1}{3}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$.
17.19. $(-\sqrt{2};\ -1) \cup (1;\ \sqrt{2})$. **17.20.** $\left(-1;\ -\dfrac{2}{3}\right)$.
17.21. $\dfrac{a(a^2 - 18a + 9)}{27}$. **17.22.** При $a = -3$ эта сумма равна 18.
17.23. $a = 2$. **17.24.** $\{0\} \cup [2+\sqrt{3}; 2+\sqrt{5}]$. **17.25.** $a \in (12;\ 13)$.
17.26. $(1, 4)$. **17.27.** 2007 при $a \in [-1338\sqrt{669};\ 1338\sqrt{669}]$; при остальных значениях a существует только один корень заданного уравнения. **17.28.** $(4 - \sqrt{7};\ 4 + \sqrt{7})$. **17.29.** $a = 2$, $b = 3$.
17.30. $\begin{cases} a = 1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ne 1, \\ x = a. \end{cases}$ **17.31.** $y_{\min} = 1$, $y_{\max} = 3$.
17.33. При $a = -1$ выражение $\dfrac{x-a}{a+1}$ не определено; $\begin{cases} a \ne -1, \\ x = a. \end{cases}$
17.34. $\begin{cases} a = \pm 4, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ne \pm 4, \\ x = 4. \end{cases}$ **17.36.** $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ne 0, \\ x = \dfrac{a}{4}. \end{cases}$
17.38. $\begin{cases} a < 2, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2, \\ x = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 2, \\ x = -a + 1;\ a - 3. \end{cases}$

17.39. $\begin{cases}|a|>1,\\ x=1;\end{cases}$ $\begin{cases}|a|<1,\\ x=1;\ \dfrac{a+7}{a-1};\end{cases}$ $\begin{cases}a=-1,\\ -3\le x\le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}a=1,\\ 1\le x.\end{cases}$

17.40. -8; -4. **17.41.** $[-8;\,6\,]$.

17.42. $\left(-\dfrac{5}{2};\,7\right)$; $\left[\dfrac{9-\sqrt{211}}{2};\,-\dfrac{5}{2}\right]\bigcup\{7\}$. **17.43.** $\left[\dfrac{4}{3};\,2\right]$.

17.44. $\begin{cases}|a|>1,\\ x=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}|a|<1,\\ x=-3;\ \dfrac{7-3a}{a+1};\end{cases}$ $\begin{cases}a=-1,\\ x\le -3;\end{cases}$ $\begin{cases}a=1,\\ -3\le x\le 2.\end{cases}$

17.45. $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a<-1,\\ 1\le a,\end{array}\right.\\ x=\dfrac{2}{a+1};\end{cases}$ $\begin{cases}-1\le a<-\dfrac{1}{3},\\ x\in\emptyset;\end{cases}$ $\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\le a<1,\\ x=\dfrac{-4}{a-1};\ \dfrac{2}{a+1}.\end{cases}$

17.46. $\begin{cases}a<-1,\\ x=4;\end{cases}$ $\begin{cases}a=-1,\\ x\ge 4;\end{cases}$ $\begin{cases}-1<a<1,\\ x=4;\ \dfrac{4a-8}{a+1};\end{cases}$ $\begin{cases}a=1,\\ -2\le x\le 4;\end{cases}$ $\begin{cases}a>1,\\ x=4.\end{cases}$

17.47. -5. **17.48.** -2; $-\dfrac{1}{2}$. **17.49.** $\begin{cases}a<0,\\ x\in\emptyset;\end{cases}$ $\begin{cases}a\ge 0,\\ x=a^2.\end{cases}$

17.51. $\begin{cases}a<1,\\ x\in\emptyset;\end{cases}$ $\begin{cases}a\ge 1,\\ x=\dfrac{1+\sqrt{2a-1}}{2}.\end{cases}$

17.52. $\begin{cases}a\in(-\infty;\,0)\bigcup\left(\dfrac{1}{2};\,+\infty\right),\\ x\in\emptyset;\end{cases}$ $\begin{cases}0\le a\le\dfrac{1}{2},\\ x=\dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}.\end{cases}$

17.53. $\begin{cases}a\le 1,\\ x\in\emptyset;\end{cases}$ $\begin{cases}a>1,\\ x=\dfrac{a}{a^{\frac{2}{3}}-1}.\end{cases}$

17.54. $\begin{cases}a=0,\\ x=0;\end{cases}$ $\begin{cases}a\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,1),\\ x\in\emptyset;\end{cases}$ $\begin{cases}a\ge 1,\\ x=\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}.\end{cases}$

17.55. $\begin{cases}a\in\mathbb{R},\\ x=a^3+1.\end{cases}$ **17.56.** $\begin{cases}a=1,\\ x\ge 2;\end{cases}$ $\begin{cases}a\ne 1,\\ x=2.\end{cases}$ **17.57.** $\begin{cases}a<3,\\ x=3;\end{cases}$ $\begin{cases}a\ge 3,\\ \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=a.\end{array}\right.\end{cases}$ **17.58.** $\begin{cases}a<0,\\ x\in\emptyset;\end{cases}$ $\begin{cases}a\ge 0,\\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{4a^2+9}}{2}.\end{cases}$ **17.60.** $x=\sqrt{3}$.

17.61. Если $a < 0$, то нет решений; если $a = 0$, то три решения; если $0 < a < 1$, то четыре решения; если $a = 1$, то два решения; если $a > 1$, то нет решений.

17.62. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \le 0, \\ a > 1, \end{array} \right. \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < a \le 1, \\ x = \pm\left(\dfrac{1-a^2}{2a}\right)^2. \end{cases}$

17.63. $\begin{cases} 0 \le a < \dfrac{1}{2},\ a \ge 1, \\ x = \dfrac{a^2}{2a-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a < 0,\ \dfrac{1}{2} \le a < 1, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

17.64. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > \sqrt{2}, \end{array} \right. \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le a < 1, \\ x = \dfrac{a - \sqrt{2-a^2}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le a \le \sqrt{2}, \\ x = \dfrac{a \pm \sqrt{2-a^2}}{2}. \end{cases}$

17.65. $\begin{cases} -\sqrt{2} - 1 < a < \sqrt{2} - 1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$

$\begin{cases} a \le -1 - \sqrt{2},\ \sqrt{2} - 1 \le a \le \dfrac{1}{2}, \\ x = \dfrac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a - 1}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > \dfrac{1}{2}, \\ x = \dfrac{a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a - 1}}{2}. \end{cases}$

17.66. $\begin{cases} a < -\dfrac{1}{4}, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{1}{4} \le a \le 0, \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x = \dfrac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}. \end{cases}$

17.67. $\left(-\infty; -\dfrac{8}{7}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\dfrac{8}{9}; +\infty\right)$. **17.68.** $[-3; 3]$.

17.69. $[17; +\infty)$. **17.70.** $(1; 0)$. **17.71.** $\begin{cases} a \le 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x = \log_2 a. \end{cases}$

17.72. $\begin{cases} a < 0, \\ x = \log_2 a^2; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x = \log_2 a;\ \log_2 a^2. \end{cases}$

17.73. $a \in (-\infty; 1] \cup \left\{\dfrac{5}{4}\right\} \cup \left[\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$.

17.74. $\begin{cases} a < -\dfrac{3}{2}, \\ x = \log_5 \dfrac{a - 1 + \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{3}{2} \le a < 11, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$

$$\begin{cases} a = 11, \\ x = 1; \end{cases} \begin{cases} a > 11, \\ x = \log_5 \dfrac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}. \end{cases}$$

17.75. При $a \le 0$ или $a = 1$ уравнение не определено;
$\begin{cases} a > 0,\ a \ne 1, \\ x = a^2. \end{cases}$

17.76. При $a \le 0$ или $a = 1$ уравнение не определено;

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{9}, \\ x \in \emptyset; \end{cases} \begin{cases} a \in \left(0; \dfrac{1}{9}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{9}; 1\right) \bigcup (1; +\infty), \\ x = 3^{\frac{10 \log_3 a}{3(\log_3 a + 2)}}. \end{cases}$$

17.77. $(7; 7{,}5) \cup (7{,}5; +\infty)$. **17.79.** $\begin{cases} a \le 1, \\ x \in \emptyset; \end{cases} \begin{cases} a > 1, \\ x = a - 1,\ \dfrac{1}{a-1}. \end{cases}$

17.80. При $a \le 1$ уравнение не определено;
$\begin{cases} 1 < a \le 3, \\ x = 1 \pm \sqrt{1 - 2\log_9 a}; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 3, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

17.81. $\begin{cases} a \ne \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ x \in \emptyset; \end{cases} \begin{cases} a = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \\ x = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}; \end{cases} \begin{cases} a = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

17.83. $a \ge 0$.

17.84. $\sin^4 x + (a - 4)\sin^2 x - 3(a - 1) = 0$.

Решение. Решим уравнение как квадратное относительно $\sin^2 x$. Дискриминант $D = (a - 4)^2 + 12(a - 1) = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \sin^2 x = \dfrac{4 - a + a + 2}{2} = 3 \Leftrightarrow x \in \emptyset, \\ \sin^2 x = \dfrac{4 - a - a - 2}{2} = 1 - a. \end{array}\right.$$

Поскольку $0 \le \sin^2 x \le 1$, то в первом уравнении корней нет. Во втором уравнении корни будут при $0 \le 1 - a \le 1 \Leftrightarrow 0 \le a \le 1$. Таким образом, при $0 \le a \le 1$

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - a} \iff x = \pm \arcsin \sqrt{1 - a} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty), \\ x \in \emptyset; \end{cases} \begin{cases} 0 \le a \le 1, \\ x = \pm \arcsin \sqrt{1 - a} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

17.85. $\begin{cases} a = 0, \\ x = k\pi, \ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + k\pi; \end{cases}$

$\begin{cases} a = 2, \\ x = (-1)^k \arcsin\dfrac{1-\sqrt{7}}{2} + k\pi, \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}.$

17.86. $(-1;\,0), (0;\,0), (1;\,0)$. **17.87.** $2\arccos\left(\pm\dfrac{1}{3}\right)$.

17.88. $\left[-2;\,-\dfrac{1}{2}\right) \cup \left\{-\dfrac{5}{2}\right\} \cup \{2\}$. **17.89.** $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{2}$.

17.90. $(-\infty;\,-2] \cup \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \cup \left[0;\,\dfrac{1}{2}\right] \cup \{2\}$.

17.91. $\dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. **17.92.** $\left(-\infty;\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\,+\infty\right)$.

17.93. $\begin{cases} a = \pi + 2\pi k, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq \pi + 2\pi k, \\ x = (-1)^l\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{a}{2} + l\pi, \end{cases}$ $k, l \in \mathbb{Z}.$

17.94. $\begin{cases} |a| > 1, \\ x \in \varnothing; \end{cases}$ $\begin{cases} |a| \le 1, \\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

17.95. $\begin{cases} a \in [4;\,5], \\ x = \pm\arcsin\sqrt{a-4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$ $\begin{cases} a \in (-\infty;\,4) \cup (5;\,+\infty), \\ x \in \varnothing. \end{cases}$

17.96. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -3, \\ -2 < a, \end{array}\right. \\ x \in \varnothing; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 \le a \le -2, \\ x = \pm\arccos\sqrt{a+3} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

17.97. $(0;\,0), (1;\,0)$. **17.98.** При $a = 0$ выражение не определено; $\begin{cases} a = -1, \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq \pm 1, \\ x \in \varnothing. \end{cases}$

17.99. $\begin{cases} a \in \left[\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};\,1\right] \cup \left[2;\,\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right], \\ x = -\dfrac{\pi}{3} \pm \arccos\dfrac{a^2-3a}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$

$\begin{cases} a \in \left(-\infty;\,\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (1;\,2) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};\,+\infty\right), \\ x \in \varnothing. \end{cases}$

17.100. $\begin{cases} a=-1, \\ x=2k\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} a=0, \\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi; \end{cases}$

$\begin{cases} a=1, \\ x=\pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}+2k\pi, \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$.

17.101. $\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$; $\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **17.102.** $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)\cup\{1\}\cup\left(\dfrac{3}{2};4\right]$.

17.104. $\begin{cases} a=k\pi, \\ x=2k\pi-2; \end{cases}$ $\begin{cases} a\neq k\pi, \\ x\in\emptyset, \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$.

17.105. $\begin{cases} b=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, \\ x=\dfrac{\pi}{6}+2l\pi, \end{cases}$ $\begin{cases} b=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2l\pi, \end{cases}$ $\begin{cases} b\neq\pm\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, \\ x\in\emptyset, \end{cases}$ $k,l\in\mathbb{Z}$.

17.106. $(2;\,3]$. **17.107.** $(-2,-6)$, $(6,2)$. **17.108.** -4.

17.109. $a=-2,\ b=-\dfrac{7}{2}$, **17.111.** 3. **17.112.** $\alpha=4$.

17.113. $a=-1$. **17.114.** $a<6$. **17.115.** $b\neq 0$.

17.116. $(-2,6),(6,-2)$. **17.118.** 0; 2. **17.119.** 0; $-\dfrac{1}{4}$. **17.120.** 0.

17.121. 1; 2; $1\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **17.122.** $-\dfrac{9}{10}$. **17.123.** $a=0\Rightarrow$ одно решение; $a\neq 0\Rightarrow$ два решения. **17.124.** 0; $2\sin 1$. **17.125.** $-\dfrac{2}{3}$; 0.

17.126. $[-7;\,-3)\cup(-3;\,1]$. **17.127.** $a=0$; $0<b\leq 1$.

17.128. $a=1$. **17.129.** $-\dfrac{3}{2}$. **17.130.** $\dfrac{1}{8}$. **17.131.** 0; $\pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

17.132. 2. **17.133.** $\left[\dfrac{4}{5};\ \dfrac{72-116\sqrt{14}}{5}\right]$.

17.134. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} ax^2+4ax-8y+6a+28\leq 0, \\ ay^2-6ay-8x+11a-12\leq 0, \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

Решение. Выделим полные квадраты в левых частях неравенств:

$$\begin{cases} a(x+2)^2-8(y-3)+2a+4\leq 0, \\ a(y-3)^2-8(x+2)+2a+4\leq 0. \end{cases}$$

Обозначим $x+2=u$ и $y-3=v$, тогда неравенства примут вид:

$$\begin{cases} au^2-8v+2a+4\leq 0, \\ av^2-8u+2a+4\leq 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Исходная система имеет единственное решение относительно x и y тогда и только тогда, когда система $(*)$ имеет единственное решение относительно u и v.

Если $a \le 0$, то любые u, v, такие, что $u \ge \frac{1}{2}$, $v \ge \frac{1}{2}$, удовлетворяет системе. Значит, для единственности решения необходимо, чтобы $a > 0$.

Заметим, что если пара (u, v) — решение системы $(*)$, то и пара (v, u) также является решением этой системы. Тогда единственное решение системы может быть, если пара (u, u) является единственным решением. При $u = v$ оба неравенства системы $(*)$ принимают вид:
$$au^2 - 8u + 2a + 4 \le 0.$$
При $a > 0$ решение неравенства будет единственным, если дискриминант $D/4 = 16 - a(2a+4) = 0 \iff 2a^2 + 4a - 16 = 0 \iff a^2 + 2a - 8 = 0 \iff a = -4;\, 2 \overset{a>0}{\iff} a = 2$.

Осталось проверить, что при $a = 2$ система $(*)$ будет также иметь единственное решение. При $a = 2$ имеем систему:
$$\begin{cases} 2u^2 - 8v + 8 \le 0, \\ 2v^2 - 8u + 8 \le 0, \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 - 4v + 4 \le 0, \\ v^2 - 4u + 4 \le 0. \end{cases}$$
Сложим неравенства системы:
$$(u-2)^2 + (v-2)^2 \le 0 \iff u = v = 2.$$
Система имеет единственное решение.

Ответ. $a = 2$.

17.135. $a \ne 0$. **17.136.** 9; 49. **17.138.** 9. **17.139.** -2. **17.140.** $\pm\frac{1}{3}; \pm\frac{1}{2}$. **22.243.** 2. **17.142.** 0; $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **17.143.** $\pm(3,3); \pm(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$. **17.144.** -1; 0. **17.145.** $\sqrt{2}$. **17.146.** $\{-4\sqrt{2}\} \cup (-4;\, 4]$. **17.147.** $[2;\, 3) \cup (3;\, 4]$. **17.148.** $\{-1\} \cup (1;\, 3) \cup (4;\, 6]$. **17.149.** $\frac{4}{3}$. **17.150.** $a \in (-\infty;\, 1) \cup (\sqrt{3};\, +\infty)$. **17.151.** $-\frac{1}{4}; -\frac{1}{32}$. **17.152.** 2. **17.153.** $\begin{cases} a = -1, \\ x = -4. \end{cases}$ **17.154.** 2; 4. **17.155.** 6. **17.156.** $\left[\frac{17 - \sqrt{29}}{2};\, 9\right)$.

18.1. $(a-2)x \le 3$. *Решение.* Рассмотрим 3 случая.

Если $a-2<0$, т. е. $a<2$, то разделим обе части неравенства на отрицательное число $a-2$. Знак неравенства при этом поменяется на противоположный:

$$x \ge \frac{3}{a-2}.$$

Если $a-2=0$, т. е. $a=2$, то неравенство приобретет вид:

$$0\cdot x \le 3 \iff x \in \mathbb{R}.$$

Если $a-2>0$, т. е. $a>2$, то разделим все части неравенства на положительное число $a-2$. Знак неравенства при этом не изменится:

$$x \le \frac{3}{a-2}.$$

Ответ. $\begin{cases} a<2, \\ x \ge \dfrac{3}{a-2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=2, \\ x\in\mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a>2, \\ x \le \dfrac{3}{a-2}. \end{cases}$

18.3. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-3, \\ a>1,\ a\ne 3, \end{array}\right. \\ x \le \dfrac{a+1}{a-3}; \end{cases}$ $\begin{cases} -3<a<1, \\ x \ge \dfrac{a+1}{a-3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=1, \\ x\in\mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=\pm 3, \\ x\in\varnothing. \end{cases}$

18.4. $\begin{cases} a<-3, \\ x \le \dfrac{2}{a+3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=-3, \\ x\in\varnothing; \end{cases}$ $\begin{cases} a>-3, \\ x \ge \dfrac{2}{a+3}. \end{cases}$

18.5. $\begin{cases} a\in\left(-\infty;\ \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)\bigcup\left(-3;\ \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right), \\ x \ge \dfrac{a+3}{a^2+3a-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=-3, \\ x\in\varnothing; \end{cases}$

$\begin{cases} a\in\left(\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2};\ -3\right)\bigcup\left(\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2};\ +\infty\right), \\ x \le \dfrac{a+3}{a^2+3a-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}, \\ x\in\mathbb{R}. \end{cases}$

18.6. $[-4;\ 1]\cup(3;\ 4]$.

18.7. $\begin{cases} a<0, \\ x\in\mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=0, \\ x\ne 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x\in(-\infty;\ -\sqrt{a})\cup(\sqrt{a};\ +\infty). \end{cases}$

18.8. $\begin{cases} a<1, \\ x\in[2a;\ 3-a]; \end{cases}$ $\begin{cases} a=1, \\ x=2; \end{cases}$ $\begin{cases} a>1, \\ x\in[3-a;\ 2a]. \end{cases}$

18.9. $ax^2 - 2x - 1 \geq 0$.

Решение. Если $a = 0$, то, подставляя это значение a в исходное неравенство, получим $-2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{2}$.

Если $a \neq 0$, то найдем корни квадратного трехчлена $ax^2 - 2x - 1$: $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+a}}{a}$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+a}}{a}$. Корни существуют при $a+1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -1$. Далее мы будем решать неравенство в зависимости от величины a.

1) Пусть $a > 0$, тогда $x_1 < x_2$ и решаем неравенство с положительным значением a методом интервалов:

$$a(x-x_1)(x-x_2) \geq 0 \iff (x-x_1)(x-x_2) \geq 0 \iff \left[\begin{array}{l} x \leq x_1, \\ x_2 \leq x. \end{array}\right.$$

2) Пусть $-1 < a < 0$, тогда $x_2 < x_1$ и решаем неравенство с отрицательным значением a методом интервалов:

$$a(x-x_1)(x-x_2) \geq 0 \iff (x-x_1)(x-x_2) \leq 0 \iff x_2 \leq x \leq x_1.$$

3) Пусть $a = -1$, тогда $x_1 = x_2 = -1$ и решаем неравенство

$$-(x+1)^2 \geq 0 \iff (x+1)^2 \leq 0 \iff x = -1.$$

4) Пусть $a < -1$, тогда квадратный трехчлен корней не имеет. Следовательно, он всегда отрицателен (учли, что коэффициент при x^2 отрицателен), отсюда $x \in \emptyset$.

Ответ. $\begin{cases} a < -1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \leq a < 0, \\ \dfrac{1+\sqrt{1+a}}{a} \leq x \leq \dfrac{1-\sqrt{1+a}}{a}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x \leq -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} a > 0, \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{1+a}}{a}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{1+a}}{a}; +\infty\right). \end{cases}$

18.10. $\left[-2; \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$. **18.11.** $[-3; 3]$. **18.12.** $\dfrac{1}{4}$; 1.

18.13. $\begin{cases} a < 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}. \end{cases}$ **18.14.** $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x > \sqrt[3]{a}. \end{cases}$

18.15. $\begin{cases} a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty), \\ \dfrac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2} < x < \dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a \in [-2; 2], \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

18.16. $\begin{cases} a \in (-\infty;\ 1] \cup [3;\ +\infty), \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{a-2-\sqrt{a^2-4a+3}}{2}, \\ x > \dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a+3}}{2}; \end{array} \right. \end{cases}$ $\begin{cases} a \in (1;\ 3), \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

18.17. $\begin{cases} a < -2, \\ \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{-a+\sqrt{a^2+2a}}{a}, \\ \dfrac{-a-\sqrt{a^2+2a}}{a} \le x; \end{array} \right. \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le a \le 0, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < a, \\ \dfrac{-a-\sqrt{a^2+2a}}{a} \le x \le \dfrac{-a+\sqrt{a^2+2a}}{a}. \end{cases}$ **18.19.** $a \le 20$.

18.21. 1) $a > 1$; 2) $a \ge 0$. **18.22.** $x \in [3-\sqrt{6};\ 2] \cup [5;\ 3+\sqrt{6}]$.
18.23. $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$. **18.24.** $(-\infty;\ -35]$.

18.25. $\begin{cases} a < 2, \\ x \in (-\infty;\ a) \cup [2;+\infty); \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2, \\ x \ne 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 2, \\ x \in (-\infty;2] \cup (a;\infty). \end{cases}$

18.26. $\begin{cases} a < -2, \\ x \in \left(-\infty;\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right] \bigcup \left[\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2};\ 0\right); \end{cases}$

$\begin{cases} -2 \le a < 2, \\ x < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \le a, \\ x \in (-\infty;\ 0) \bigcup \left[\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2};\ \dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right]. \end{cases}$

18.27. $(-\infty;\ -6) \bigcup \left(-\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$.

18.29. $\begin{cases} a < 1, \\ a \le x < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ 1 < x \le a. \end{cases}$

18.30. $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \left[\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2};\ 0\right) \bigcup \left[\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2};\ +\infty\right). \end{cases}$

18.31. $(3-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{15}-6)$. **18.32.** $\begin{cases} a < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \le a-2, \\ -2 < x < 3; \end{array} \right. \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ -2 < x < 3; \end{array} \right. \end{cases}$

$\begin{cases}0<a<5,\\ \left[\begin{array}{l}x<-2,\\ a-2\le x<3;\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases}a=5,\\ x<-2;\end{cases}$ $\begin{cases}5<a,\\ \left[\begin{array}{l}x<-2,\\ 3<x\le a-2.\end{array}\right.\end{cases}$ **18.33.** $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup$ $\cup\left(\frac{1}{3};\infty\right)$. **18.34.** $\begin{cases}a<0,\\ x\in\left(-\infty;\ \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}\right]\cup\left(0;\ \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right];\end{cases}$

$\begin{cases}a=0,\\ 0<x\le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}0<a<\frac{1}{4},\\ x\in\left(0;\ \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a};+\infty\right);\end{cases}$ $\begin{cases}a\ge\frac{1}{4},\\ x>0.\end{cases}$

18.35. $\frac{1}{16}$. **18.36.** $\begin{cases}a\le 0,\\ x\in\emptyset;\end{cases}$ $\begin{cases}a>0,\\ -a+5<x<a+5.\end{cases}$

18.37. $\begin{cases}a<-3,\\ \frac{14}{a+3}\le x\le\frac{-4}{a+3};\end{cases}$ $\begin{cases}a=-3,\\ x\in\mathbb{R};\end{cases}$ $\begin{cases}a>-3,\\ \frac{-4}{a+3}\le x\le\frac{14}{a+3}.\end{cases}$

18.38. $\begin{cases}a<0,\\ x\in(-\infty;\ 2a);\end{cases}$ $\begin{cases}a=0,\\ x\in\emptyset;\end{cases}$ $\begin{cases}a>0,\\ x\in(0;\ +\infty).\end{cases}$ **18.39.** $a>\frac{3}{2}$.

18.40. $[-1;\ 5]$. **18.41.** $\begin{cases}a<0,\\ x\in\mathbb{R};\end{cases}$ $\begin{cases}a=0,\\ x\ne 4;\end{cases}$

$\begin{cases}a>0,\\ x\in(-\infty;\ -a+4)\cup(a+4;\ +\infty).\end{cases}$ **18.42.** $\begin{cases}a\le 0,\\ x\ge-\frac{a}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}a>0,\\ x\in\emptyset.\end{cases}$

18.43. $\begin{cases}a\le 4,\\ -\frac{a+2}{3}\le x\le 2-a;\end{cases}$ $\begin{cases}a>4,\\ x\in\emptyset.\end{cases}$

18.44. $\begin{cases}a<2,\\ \frac{9}{a-2}\le x\le\frac{-11}{a-2};\end{cases}$ $\begin{cases}a=2,\\ x\in\mathbb{R};\end{cases}$ $\begin{cases}a>2,\\ \frac{-11}{a-2}\le x\le\frac{9}{a-2}.\end{cases}$

18.45. $[-4;\ 2]$. **18.46.** $\begin{cases}a<0,\\ \left[\begin{array}{l}0<x<-a,\\ x>-a;\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases}a=0,\\ x\in\emptyset;\end{cases}$ $\begin{cases}a>0,\\ \left[\begin{array}{l}x<-3a,\\ -\frac{a}{3}<x<0.\end{array}\right.\end{cases}$

18.47. $\begin{cases}|a|>1,\\ x\in\left(-\infty;\ \frac{-1}{|a|+1}\right]\cup\left[\frac{1}{|a|-1};\ +\infty\right);\end{cases}$ $\begin{cases}|a|\le 1,\\ x\le\frac{-1}{|a|+1}.\end{cases}$

18.49. $\begin{cases} a \le 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < a, \\ 0 \le x < a^2. \end{cases}$ **18.50.** $\begin{cases} a < 0, \\ x \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le a, \\ x > a^2. \end{cases}$

18.51. $\begin{cases} a < -5, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -5 \le a \le 1, \\ 0 \le x \le (a+5)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ (a-1)^2 \le x \le (a+5)^2. \end{cases}$

18.53. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. **18.54.** $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \le a^3 - 1. \end{cases}$ **18.55.** $\begin{cases} a < 1, \\ -1 \le x < \dfrac{3-2a}{a^2-2a+1}; \end{cases}$

$\begin{cases} 1 \le a < 2, \\ -1 \le x; \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \le a, \\ \dfrac{3-2a}{a^2-2a+1} < x. \end{cases}$ **18.56.** $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ne 0, \\ -\dfrac{|a|}{\sqrt{5}} < x \le |a|. \end{cases}$

18.57. $\begin{cases} a < -1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le a \le 0, \\ 1 - \sqrt{a+1} \le x \le 1 + \sqrt{a+1}; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < a, \\ -\dfrac{a}{2} \le x \le 1 + \sqrt{a+1}. \end{cases}$ **18.58.** $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$; 2. **18.59.** $\begin{cases} a < -1, \\ a \le x \le -a; \end{cases}$

$\begin{cases} -1 \le a \le -\dfrac{1}{2}, \\ -\sqrt{-2a-1} \le x \le \sqrt{-2a-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > -\dfrac{1}{2}, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$ **18.60.** $\begin{cases} a < 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$

$\begin{cases} a = 0, \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x \in \left[-\dfrac{a}{3}; 0\right) \bigcup (8a; +\infty). \end{cases}$ **18.62.** $\begin{cases} a \le -1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$

$\begin{cases} -1 < a < -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{a^2}{2a+1} < x \le -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le a \le 0, \\ x \le -1; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x \in (-\infty; -1] \bigcup \left[0; \dfrac{a^2}{2a+1}\right). \end{cases}$

18.63. $\begin{cases} a \le 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x < \log_3 a. \end{cases}$ **18.64.** $\begin{cases} a \le 0, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x \le -\log_3 a. \end{cases}$

18.65. $\begin{cases} a < 0, \\ x > \log_3(-a); \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x > \log_3 a - 2. \end{cases}$

18.66. $[2; +\infty)$. **18.67.** $\begin{cases} a \le 0, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x \ge \log_3 a. \end{cases}$ **18.68.** $\begin{cases} a \le 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$

$\begin{cases} a > 0, \\ x > -\log_3 a. \end{cases}$ **18.69.** $\begin{cases} a < 1, \\ x \ge -1; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 1, \\ x > \left((a-1)\log_3 2\right)^2 - 1. \end{cases}$

18.70. $\begin{cases} a < 0, \\ x < \log_2(-a) - 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x < \log_2 a - 2. \end{cases}$

18.71. $(-8; 4) \cup (7; +\infty)$.

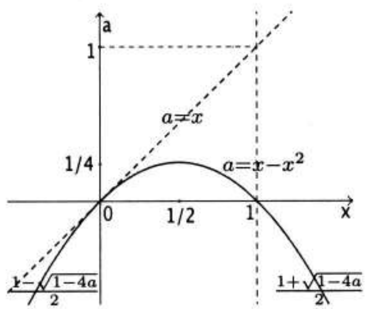
18.72. При $a \le 0$ или $a = 1$ выражение $\log_a x$ не определено;
$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < x \le a; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ x \ge a. \end{cases}$

18.73. При $a \le 0$ выражение $\log_x a$ не определено;
$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ x \in (0; a] \cup (1; +\infty); \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ x \in (0; 1) \cup (1; +\infty); \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ x \in (0; 1) \cup [a; +\infty). \end{cases}$

18.74. $\log_x (x - a) \ge 2$. *Решение.* Имеем

$$\log_x (x-a) \ge 2 \iff \log_x (x-a) \ge \log_x x^2$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x - a \le x^2 \Leftrightarrow a \ge x - x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ x - a \ge x^2 \Leftrightarrow a \le x - x^2. \end{cases} \end{array} \right.$$



Решением при $0 < x < 1$ будет "треугольник" над графиком параболы, при $x > 1$ множество от оси $x = 1$ до старшего корня параболы $a = x - x^2$:

$$x^2 - x + a = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}.$$

Ответ. $\begin{cases} a < 0, \\ 1 < x \le \dfrac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a \ge 1, \end{array} \right. \\ x \in \emptyset; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < a < \dfrac{1}{4}, \\ x \in \left(a; \dfrac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}\right] \bigcup \left[\dfrac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}; 1\right); \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{4} \le a < 1, \\ a < x < 1. \end{cases}$

18.75. $\begin{cases} a \in (-\infty; 0] \cup \left\{\dfrac{1}{2}\right\}, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right), \\ x \in [1 - \sqrt{1-a}; 1 + \sqrt{1-a}]; \end{cases}$

$\begin{cases} a \in \left(\dfrac{1}{2};\, 1\right), \\ x \in (1-\sqrt{1+a};\, 1-\sqrt{1-a}\,] \cup [\,1+\sqrt{1-a};\, 1+\sqrt{1+a}\,); \end{cases}$

$\begin{cases} a \in [\,1;\, +\infty), \\ x \in (1-\sqrt{1+a};\, 1+\sqrt{1+a}\,). \end{cases}$

18.76. При $a \le 0$ или $a = 1$ выражение $\log_a x$ не определено;
$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ x \ge a; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ 0 < x \le a. \end{cases}$

18.77. При $a \le 0$ выражение $\log_x a$ не определено;
$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ a \le x < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ 1 < x \le a. \end{cases}$

18.78. $(-7;\, -2-\sqrt{5}\,) \cup (-2+\sqrt{5};\, 3)$.

18.80. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $11+\cos^2 x > 3a^2+5a-(4a-1)\sin x$ выполняется для всех x.

Решение. Перепишем неравенство в виде:

$$11+(1-\sin^2 x) > 3a^2+5a-(4a-1)\sin x$$
$$\iff \sin^2 x-(4a-1)\sin x < -3a^2-5a+12.$$

Поскольку $-1 \le \sin x \le 1$, то максимальное значение левой части $1+|4a-1|$. Поэтому неравенство выполняется при всех x, если

$$1+|4a-1| < -3a^2-5a+12 \iff |4a-1| < -3a^2-5a+11$$

$$\iff \begin{cases} 4a-1 < -3a^2-5a+11, \\ 4a-1 > 3a^2+5a-11, \end{cases} \iff \begin{cases} 3a^2+9a-12 < 0, \\ 3a^2+a-10 < 0, \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 3(a+4)(a-1) < 0, \\ 3(a+2)\left(a-\dfrac{5}{3}\right) < 0, \end{cases} \iff \begin{cases} -4 < a < 1, \\ -2 < a < \dfrac{5}{3}, \end{cases} \iff -2 < a < 1.$$

Ответ. $(-2;\, 1)$.

18.81. $\begin{cases} a < -2, \\ \left[\begin{array}{l} k\pi-\dfrac{\pi}{2} < t \le \operatorname{arctg}\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+k\pi, \\ k\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} \le t < k\pi; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le a < 2, \\ k\pi-\dfrac{\pi}{2} < t < k\pi; \end{cases}$

$$\begin{cases} 2 \le a, \\ \left[\begin{array}{l} k\pi - \dfrac{\pi}{2} < t < k\pi, \\ k\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2} \le t \le \operatorname{arctg} \dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} + k\pi, \end{array}\right. \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

18.82. $(-5; -\sqrt{24}) \cup (-\sqrt{24}; -3)$. **18.83.** $\left[-\dfrac{24}{5}; 0\right]$.

18.84. $a \le 0,\ t \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) \bigcup$

$\bigcup \left[-\arccos \dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi k; \arccos \dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi k\right];$

$a > 0,\ t \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \arccos \dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi k\right] \bigcup$

$\left[-\arccos \dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi k; -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$

19.6. $a^4 + b^4 + c^4 \ge abc(a+b+c)$.

Доказательство. Дважды разбивая сумму трех слагаемых на три суммы двух слагаемых и применяя неравенство для средних для двух чисел $\dfrac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$, получим:

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{a^4+b^4}{2} + \frac{a^4+c^4}{2} + \frac{b^4+c^4}{2} \ge$$

$$\ge a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \frac{a^2b^2+a^2c^2}{2} + \frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} + \frac{a^2c^2+b^2c^2}{2} \ge$$

$$\ge a^2bc + b^2ac + c^2ab = abc(a+b+c).$$

19.18. $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ \beta = 0$.

19.19. Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+ac+bc=4$. Найдите $a^2+b^2+c^2$. *Решение.* Имеем

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = 25 - 8 = 17.$$

Ответ. 17.

19.25. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **19.28.** 1998. **19.42.** $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

19.46. $\dfrac{1}{10}$. **19.47.** $y_{\max} = 0$. **19.49.** $e^{\pi} > \pi^{e}$.

20.1. $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$ *Решение.* Данная система является симметрической системой относительно переменных x и y.

Сделаем замену переменных: $u=x+y$, $v=xy$. Перепишем уравнения через введенные переменные:

$x^2+y^2+xy=(x+y)^2-xy=u^2-v,$

Решим полученную систему относительно u и v, а затем вернемся к исходным переменным:

$$\begin{cases} u+v=7, \\ u^2-v=13, \end{cases} \iff \begin{cases} v=7-u, \\ u^2-(7-u)=13 \Leftrightarrow u^2+u-20=0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} v=7-u, \\ \left[\begin{array}{l} u=-5, \\ u=4, \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-5, \\ v=12, \end{cases} \\ \begin{cases} u=4, \\ v=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для нахождения x и y надо будет решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v. \end{cases}$$

По теореме Виета корни x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2-ut+v=0$.

В первом случае имеем

$$t^2+5t+12=0 \iff t\in\emptyset \ \ (D=25-48<0).$$

Во втором случае имеем

$$t^2-4t+3=0 \iff t=1;\ 3.$$

Ответ. $(1,3)$; $(3,1)$.

20.2. $(-2,3)$; $(3,-2)$. **20.3.** $(4,8)$.

20.4. $\left(1,2,\frac{1}{2}\right)$; $\left(1,\frac{1}{2},2\right)$; $\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$; $\left(2,\frac{1}{2},1\right)$; $\left(\frac{1}{2},1,2\right)$; $\left(\frac{1}{2},2,1\right)$.

20.5. $(1,2,-1)$; $(1,-1,2)$; $(2,1,-1)$; $(2,-1,1)$; $(-1,1,2)$; $(-1,2,1)$.

20.6. $(0, 0, 0)$. **20.7.** $(3, 3, 3)$. **20.8.** $(10, 15)$; $(15, 10)$.

20.9. $(12, 3)$; $(3, 12)$. **20.10.** $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$.

20.11. $\left(1,3,\frac{1}{3}\right)$; $\left(1,\frac{1}{3},3\right)$; $\left(3,1,\frac{1}{3}\right)$; $\left(3,\frac{1}{3},1\right)$; $\left(\frac{1}{3},1,3\right)$; $\left(\frac{1}{3},3,1\right)$.

20.12. $(1,2,-2); (1,-2,2); (2,1,-2); (2,-2,1); (-2,1,2); (-2,2,1)$.
20.13. $(a,0,0)$; $(0,a,0)$; $(0,0,a)$.
20.14. $(a,b,-b)$; $(a,-b,b)$; $(b,a,-b)$; $(b,-b,a)$; $(-b,a,b)$; $(-b,b,a)$.
20.15. $\pm\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right)$; $\pm\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right)$; $(0,0)$; $\pm(2,-2)$; $\pm(\sqrt{6},\sqrt{6})$. **20.16.** $(-1,-1,-1)$.

20.17. $\begin{cases} x^2-4xy+y^2=3, \\ y^2-3xy=2. \end{cases}$

Решение. Имеем неоднородную систему из двух уравнений второго порядка с двумя неизвестными.

Умножив первое уравнение последней системы на 2, а второе на -3 и сложив полученные уравнения, получим:

$$2x^2-8xy+2y^2-3y^2+9xy=6-6 \iff 2x^2+xy-y^2=0. \quad (*)$$

Если в уравнении $(*)$ $y=0$, то и $x=0$. Это будет противоречить уравнениям системы. Поэтому $y \neq 0$. Разделим обе части уравнения $(*)$ на y^2:

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}-1=0 \iff \frac{x}{y}=-1;\ \frac{1}{2}, \iff \left[\begin{array}{l} x=-y, \\ x=-\dfrac{y}{2}. \end{array}\right.$$

1) Подставим $x=-y$ во второе уравнение системы.

$$y^2+3y^2=2 \iff 4y^2=2 \iff y^2=\frac{1}{2}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} y_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ y_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{array}\right. \overset{x=-y}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ x_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

2) Подставим $x=-\dfrac{y}{2}$ во второе уравнение системы. Имеем

$$y^2-\frac{3}{2}y^2=2 \iff -\frac{y^2}{2}=2 \iff y\in\emptyset.$$

Ответ. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

20.18. $(-3,-4)$; $(5,2)$. **20.19.** $(-3\sqrt{3},-\sqrt{3})$; $(3\sqrt{3},\sqrt{3})$; $(-4,-5)$; $(4,5)$. **20.20.** $(-9,-5)$; $(9,5)$; $(-6,-5)$; $(6,5)$. **20.21.** $(9,-4)$;

$(16, -3)$. **20.22.** $\pm(4,3,2)$; $\pm\left(\frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$. **20.23.** $(-2,-8)$.

20.24. $(0,-1)$, $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $(1,1)$.

20.25. $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4{,}5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$

Решение. Заменяя второе уравнение системы суммой первого уравнения, умноженного на 3, и второго уравнения, умноженного на -2, получим, что исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ -3x - y = -5. \end{cases}$$

Подставляя $y = 5 - 3x$ из второго уравнения системы в первое, получим

$$3x^2 + 2(5-3x)^2 - 3x + 5(5-3x) = 3$$
$$\iff 7x^2 - 26x + 24 = 0 \iff x = 2;\ \frac{12}{7}.$$

Следовательно, решением системы будут две точки

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 5 - 3x_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{12}{7}, \\ y_2 = 5 - 3x_2 = -\dfrac{1}{7}. \end{cases}$$

Ответ. $(2,-1)$; $\left(\frac{12}{7}, -\frac{1}{7}\right)$.

20.26. $(1,1)$. **20.27.** 30. **20.28.** $(0,0)$; $(2,-1)$; $\left(-\frac{10}{7}, -\frac{4}{7}\right)$.

20.29. $(2,1)$. **20.30.** $(1,-1)$. **20.31.** $(4,1)$; $\left(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

20.32. $(1,-1)$; $(-3,3)$. **20.33.** $(1,2,1)$; $\left(\frac{44}{25}, -\frac{28}{5}, -\frac{108}{25}\right)$.

20.34. $(2,1)$. **20.35.** $(-1,1,2)$; $(-1,1,-2)$. **20.36.** $(2,2,-2)$.

20.37. $(-1,3)$; $(t,2)$, $t \in \mathbb{R}$. **20.38.** $(0,0)$; $(5,1)$; $\left(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

20.39. $\pm(0,\sqrt{3})$; $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{119}}, 11\sqrt{\frac{3}{119}}\right)$. **20.40.** $\pm(0,2)$; $\pm(1,-3)$.

20.41. $(2,1)$. **20.42.** $\pm\left(\sqrt{6}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. **20.43.** $(4,-3,0)$; $(2,-1,2)$.

20.44. $(-2,-1)$. **20.45.** $(2, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9})$; $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$.

20.46. $\left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right)$. **20.47.** $x = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi}$, $y = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi}$. **20.48.** $\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha, \frac{1}{3}\operatorname{tg}2\alpha, \operatorname{tg}4\alpha\right)$, где $\alpha = \pm\frac{\pi}{7}; \pm\frac{2\pi}{7}; \pm\frac{3\pi}{7}$. **20.49.** $(1,5)$; $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$.
20.50. $(3,2)$; $(-2,-3)$; $(3+\sqrt{10}, -3+\sqrt{10})$; $(3-\sqrt{10}, -3-\sqrt{10})$.
20.51. (18,2). **20.52.** $\left(\operatorname{tg}\alpha, \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{2}, \frac{\operatorname{tg}4\alpha}{2}\right)$, где $\alpha = \pm\frac{\pi}{7}; \pm\frac{2\pi}{7}; \pm\frac{3\pi}{7}$.
20.53. $x = \frac{z+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}z}$, $y = \frac{\sqrt{3}z+1}{\sqrt{3}-z}$, $0 < z < \frac{1}{\sqrt{3}}$.
20.54. $\left(\frac{217-5\sqrt{415}}{29}, \frac{180+2\sqrt{415}}{29}\right)$. **20.55.** $24\sqrt{3}$.
20.56. $y = -\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}$. **20.57.** $\max(x^2+y^2) = 8$, достигается при $z = 5$. **20.58.** $\left(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$. **20.59.** $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$. **20.60.** $(-4,-1)$.
20.61. $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

21.1. Какое из чисел $\frac{49}{18}$ и $\frac{79}{24}$ ближе к 3? *Решение.* Имеем

$$\left|\frac{49}{18} - 3\right| = \left|\frac{49-54}{18}\right| = \left|\frac{-5}{18}\right| = \frac{5}{18};\ \left|\frac{79}{24} - 3\right| = \left|\frac{79-72}{24}\right| = \left|\frac{7}{24}\right| = \frac{7}{24};$$

$$\frac{5}{18} \vee \frac{7}{24} \iff 24 \cdot 5 \vee 18 \cdot 7 \iff 120 \vee 126.$$

Значит, символ $\vee$ соответствует знаку $<$.

Ответ. Первое число ближе.

21.2. Первое число ближе. **21.3.** $\frac{53}{450}$. **21.4.** $3^{400} > 4^{300}$.
21.5. $\sqrt{2} + \sqrt{11} < \sqrt{3} + 3$.

21.6. Сравнить числа $2^{\sqrt{3}}$ и $3^{\sqrt{2}}$.

Решение. Вставка промежуточного числа. Возведем обе части сравнения в степень $\sqrt{2}$ и воспользуемся тем, что $\sqrt{6} < 3$:

$$2^{\sqrt{3}} \vee 3^{\sqrt{2}} \iff 2^{\sqrt{6}} \vee 9 \iff 2^{\sqrt{6}} < 2^3 < 9.$$

Значит, символ $\vee$ соответствует знаку $<$.

Ответ. $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$.

21.7. $\log_2 5 < \sqrt{8}$. **21.8.** $3^{\sqrt{5}-2} < \frac{4}{3}$. **21.9.** $\frac{1}{2}\log_5 6 < \log_6 5$.
21.10. $\sqrt{1997}+\sqrt{1998} > \sqrt{1996}+\sqrt{1999}$. **21.11.** $\log_\pi\left(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\right) < 0$.
21.12. $\sin\cos 1 < \cos\sin 1$. **21.13.** $\log_{189} 1323 > \log_{63} 147$.
21.14. 2. **21.15.** 16, 17. **21.16.** Второе число больше.
21.17. Первое число больше. **21.18.** Во второй четверти.
21.19. $\sqrt[3]{4} > 3-\sqrt{2}$. **21.20.** $5-\sqrt{15} > \sqrt{17}-3$.
21.21. $\sqrt{7}+\sqrt{10} < \sqrt{3}+\sqrt{19}$. **21.22.** $\log_2\pi + \log_\pi 2 > 2$.
21.23. $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} < \sqrt{9+4\sqrt{5}} + \frac{11}{1000}$. **21.24.** $\sqrt{2}^{\sqrt{3}} < \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.
21.25. $\log_{11} 119 < \log_{15} 227$. **21.26.** $\frac{1}{2}\log_4 5 < \log_5 4$.
21.27. $\log_2 3 > \log_5 8$. **21.28.** $\log_3 7 > \log_7 27$.
21.29. $\log_{3\sqrt{3}} 5 < \cos\frac{\pi}{7}$. **21.30.** Корень трехчлена больше.
21.31. $\cos 136^\circ < \operatorname{tg} 153^\circ$. **21.32.** $\operatorname{ctg} 100^\circ$, $\cos 275^\circ$, $\sin 10^\circ$, $\operatorname{tg} 190^\circ$. **21.33.** $\sin 31^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ$.

21.34. Решить уравнение в целых числах $5x+7y=6$.

Решение. Рассмотрим представления y с различными остатками от деления на 5: $y=5n, 5n+1, 5n+2, 5n+3, 5n+4$.

$y=5n \Longrightarrow 5x+7\cdot 5n=6 \iff 5(x+7n)=6 \iff x\in\emptyset$,

$y=5n+1 \Longrightarrow 5x+7\cdot(5n+1)=6 \iff 5(x+7n)+7=6 \iff 5(x+7n)=-1 \iff x\in\emptyset$,

$y=5n+2 \Longrightarrow 5x+7\cdot(5n+2)=6 \iff 5(x+7n)+14=6 \iff 5(x+7n)=-8 \iff x\in\emptyset$,

$y=5n+3 \Longrightarrow 5x+7\cdot(5n+3)=6 \iff 5(x+7n)+21=6 \iff 5(x+7n)=-15 \iff x+7n=-3 \iff x=-7n-3$,

$y=5n+4 \Longrightarrow 5x+7\cdot(5n+4)=6 \iff 5(x+7n)+28=6 \iff 5(x+7n)=-22 \iff x\in\emptyset$.

Таким образом, $y=5n+3$, $x=-7n-3$.

Ответ. $y=5n+3$, $x=-7n-3$, $n\in\mathbb{Z}$.

21.35. $d=12=204\cdot 11-372\cdot 6$, уравнение $17m+31n=1$, $m=31k+11$, $n=-17k-6$, $k\in\mathbb{Z}$. **21.36.** $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$. **21.37.** 5. **21.38.** $x=4k+3$, $y=3k+2$, $k\in\mathbb{Z}$. **21.39.** $\emptyset$. **21.40.** $-5+20m$, $m\in\mathbb{Z}$. **21.41.** $-15+180s$, $s\in\mathbb{Z}$. **21.42.** $x=-44+26k$, $y=12-7k$, $k\in\mathbb{Z}$. **21.43.** $\emptyset$. **21.44.** 333. **21.45.** $\pm(1,2)$; $\pm(5,2)$.

21.46. Найти все целые положительные решения уравнения $2x^2 + 2xy - x - y = 112$.

Решение. Разложим левую часть уравнения в произведение:

$$(2x - 1)(x + y) = 112$$

(такое разложение можно получить, разлагая квадратный относительно x многочлен на множители или группируя слагаемые).

Число $112 = 7 \cdot 16$, а число $2x - 1$ является нечетным, поэтому уравнение эквивалентно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 1 = 1, \\ x + y = 112, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 1 = 7, \\ x + y = 16, \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 111, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = 12, \end{cases} \end{array}\right.$$

(случаи $2x + 1 = -7; -1$, не дают положительных значений x и, следовательно, не подходят).

Ответ. $(1, 111)$, $(4, 12)$.

21.47. $(0,-2)$; $(2,0)$. **21.48.** $(11,-9)$. **21.49.** $\pm(1,5,0);\pm(1,-5,0)$. **21.50.** $(2,117)$; $(3,59)$. **21.51.** $a \in \left(-\frac{5}{11}; -\frac{1}{3}\right]$. **21.53.** $\pm\left(3, \frac{7}{2}\right)$. **21.54.** $a = -2009$. **21.55.** $x = 7n$, $y = 3n$, $z = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$. **21.56.** $\pm(5,-4);\pm(13,-20)$. **21.57.** $\pm(3,2)$. **21.58.** $\pm(3,0);\pm(3,3)$. **21.59.** $(12,-4)$; $(10,-2)$; $(2,-4)$; $(10,-6)$; $(4,-2)$; $(4,-6)$. **21.60.** $(9,9)$. **21.61.** $(1,37)$. **21.62.** $(15k^2 - 6k, 3k - 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **21.63.** $(-4,-3)$, $(-6,-13)$, $(-14,-5)$. **21.64.** $(4,9)$; $(5,8)$. **21.65.** $l = 5$, $k = 6$. **21.66.** $(5,4,4)$.

21.67. Решить в целых числах уравнение

$$9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0.$$

Указание. Представить многочлен в виде

$$(y(3x + 1) - 2x - 3)(y(3x + 1) - x - 2) = 0$$

и далее решить в целых числах два уравнения

$$y(3x + 1) - 2x - 3 = 0 \iff (3x + 1)(3y - 2) = 7;$$

$$y(3x + 1) - x - 2 = 0 \iff (3x + 1)(3y - 1) = 5.$$

Ответ. $(0,2)$; $(-2,0)$; $(0,3)$; $(2,1)$.

21.68. $\begin{pmatrix} 7 & + & 1 & = & 8 \\ - & & \times & & : \\ 1 & + & 3 & = & 4 \\ \| & & \| & & \| \\ 6 & : & 3 & = & 2 \end{pmatrix}$. **21.69.** $\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 342457 \\ 342457 \end{array} \\ \hline 684914 \end{array}$. **21.70.** $\dfrac{\pi}{35}$.

21.71. Таких функций не существует. **21.72.** $-\sqrt{7}$; $\sqrt{3}$.
21.73. -5. **21.74.** $(2,0)$. **21.75.** $(-5,20)$; $(-5,21)$.
21.76. $(3,2)$; $(2,3)$; $(3,3)$; $(4,3)$; $(5,4)$. **21.77.** $(0,0)$; $(2,0)$; $(1,1)$.
21.78. $(0,0)$; $(3,0)$; $(0,3)$; $(2,2)$. **21.79.** $(3,0)$; $(3,2)$; $(3,-2)$.
21.80. $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}},1,1\right)$; $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}},7,-9\right)$. **21.81.** 4.
21.82. $x=0$, $y=8$ или $x=8$, $y=0$.

21.83. $\begin{pmatrix} 1 & + & 8 & = & 9 \\ + & & : & & : \\ 6 & : & 2 & = & 3 \\ \| & & \| & & \| \\ 7 & - & 4 & = & 3 \end{pmatrix}$. **21.84.** $\begin{array}{r|l} -110768 & 112 \\ \underline{1008} & \overline{989} \\ -996 & \\ \underline{896} & \\ -1008 & \\ \underline{1008} & \\ 0 & \end{array}$

21.85. $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$.
21.86. $(1,1,1)$. **21.87.** $m=37500$, $n=3$; $m=11250$, $n=9$.
21.88. ±1; 3; 5. **21.91.** $0,1,3,4$. **21.93.** $25,76$. **21.92.** Указанное число не является полным квадратом. **21.97.** 07. **21.99.** 7.
21.100. 2; 6. **21.101.** 108; 540. **21.102.** 80; 98. **21.104.** Да.
21.107. 18, 216. **21.109.** 36. **21.112.** $(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)$.
21.113. $42\cdot2\cdot3^5$, $42\cdot2\cdot7^5$, $42\cdot3\cdot2^5$, $42\cdot3\cdot7^5$, $42\cdot7\cdot2^5$, $42\cdot7\cdot3^5$.
21.118. Не могут. **21.124.** а) нет; б) да. **21.126.** а) $0,1$; б) $0,1,4,5,6,9$. **21.127.** 0, 1. **21.132.** 30. **21.133.** $2,3,5,6,11,21$.
21.134. Нет. **21.136.** 30. **21.138.** 188. **21.139.** 3.
21.140. Указанные числа не являются полными квадратами в обоих случаях. **21.143.** Число состоит из 300 единиц.
12.210. $7744=88^2$. **21.147.** 361. **21.149.** $p=3$.
21.153. Во всех случаях а)–в) такие числа существуют.
Например, а) $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=3-\sqrt{2}$; б) $\alpha=\beta=\sqrt{2}$; в) $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=\log_{\sqrt{2}}3$. **21.154.** 34452, 34056, 34956.

Часть 6

- **Планиметрия**
- **Стереометрия**

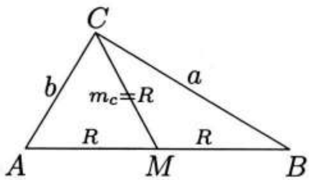
Основные формулы планиметрии

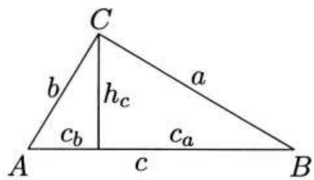
Обозначения: a, b, c — длины сторон треугольника;
α, β, γ — величины противолежащих углов;
h_a, m_a, l_a — длины высоты, медианы и биссектрисы к стороне a;
r, R — радиусы вписанной и описанной окружностей;
S — площадь; p — полупериметр.

• **Формулы для прямоугольного треугольника**

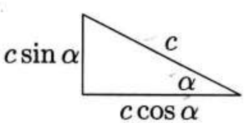
$$a^2+b^2=c^2 \quad \text{(теорема Пифагора)}, \quad S=\frac{1}{2}ab, \quad r=\frac{a+b-c}{2},$$

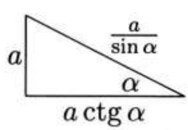
$$c=2R, \quad h_c=\sqrt{c_ac_b}, \quad a^2=c\cdot c_a, \quad b^2=c\cdot c_b,$$

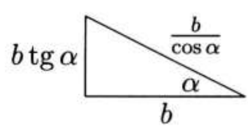




где a, b — катеты, c — гипотенуза, c_a, c_b — отрезки гипотенузы, на которые высота h_c делит гипотенузу.





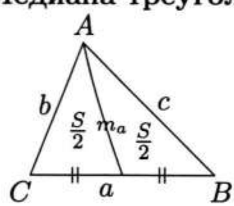


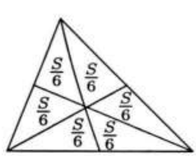
• **Формулы для произвольного треугольника**

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \quad \text{(теорема косинусов)}, \quad r=\frac{S}{p},$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R \quad \text{(теорема синусов)}, \quad R=\frac{abc}{4S}.$$

• **Медиана треугольника**





$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},$$

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}.$$

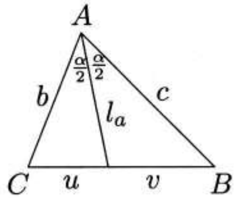
Точка пересечения медиан делит медиану в отношении два к одному, считая от вершины. Три медианы делят треугольник на 6 треугольников, равных по площади.

• **Высота треугольника**

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

• **Биссектриса треугольника**

$$\frac{u}{v} = \frac{b}{c}, \qquad l_a = \sqrt{bc-uv} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c} = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c},$$



u, v — отрезки, прилежащие к сторонам b, c, соответственно, на которые биссектриса l_a делит противоположную сторону

• **Площадь треугольника**

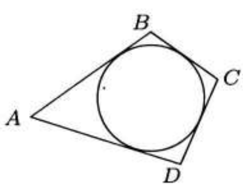
$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} = pr,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(формула Герона)},$$

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ для равностороннего треугольника со стороной a.

• **Четырехугольник**

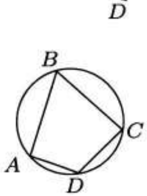
$S = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, где d_1, d_2 — диагонали, φ — угол между ними,



1) В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны:

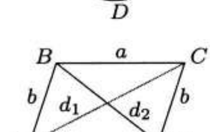
$$AB + CD = BC + AD.$$

2) $S = pr$.



Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180°:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ.$$



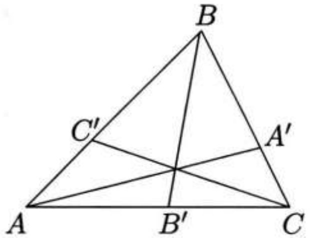
В параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей:

$$2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2.$$

- **Некоторые соотношения:**

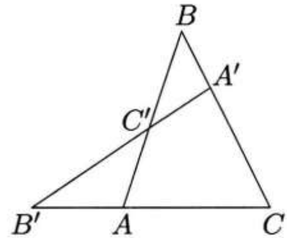
(теорема Чевы)

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$$



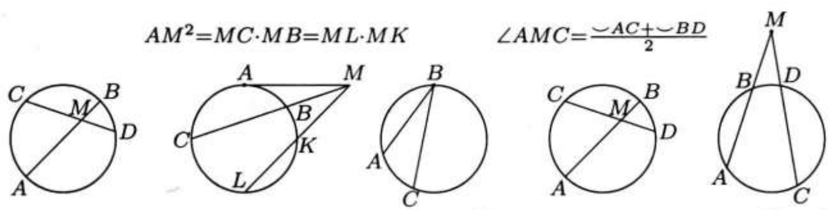
(теорема Менелая)

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$$



- **Окружности**

$AM^2=MC\cdot MB=ML\cdot MK$ $\qquad$ $\angle AMC=\frac{\smile AC+\smile BD}{2}$



$AM\cdot MB=CM\cdot MD$ $\qquad$ $\angle ABC=\frac{\smile AC}{2}$ $\qquad$ $\angle AMC=\frac{\smile AC-\smile BD}{2}$

длина окружности: $l=2\pi R$, площадь круга $S=\pi R^2$.

Формулы векторной геометрии

- **Скалярное произведение векторов**

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos\varphi,$$

где $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$, φ — угол между векторами.

- **Длина вектора**

$$|\vec{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

- **Расстояние между точками**

$$\rho(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2},$$

где $X=(x_1,x_2,x_3)$, $Y=(y_1,y_2,y_3)$.

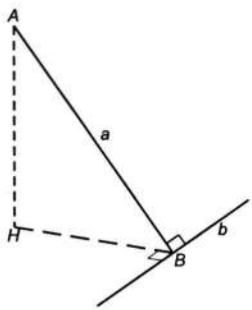
Некоторые формулы стереометрии

• Прямые и плоскости

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая a, не лежащая в плоскости β, параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости β, то прямая a будет параллельна плоскости β.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая a, не лежащая в плоскости β, перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости β, то прямая a будет перпендикулярна плоскости β.

Теорема о трех перпендикулярах.



Прямая теорема. Прямая, перпендикулярная проекции наклонной прямой, будет перпендикулярна и самой наклонной.

Обратная теорема. Прямая, перпендикулярная наклонной прямой, будет перпендикулярна и проекции этой наклонной.

Пусть $\triangle ABC$ является проекцией $\triangle A'B'C'$. Тогда косинус угла между плоскостями $\cos\varphi = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$.

• Пирамида, конус, цилиндр, сфера, шар

$V = \frac{1}{3}S_{\text{основания}} \cdot h = \frac{1}{3}S_{\textit{полн}} \cdot r$ — объем пирамиды с высотой h, $S_{\textit{полн}}$ — площадь полной поверхности, r — радиус вписанного в пирамиду шара.

$V = \frac{1}{3}S_{\text{основания}} \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ — объем конуса с высотой h,

$S_{\text{бок}} = \pi R l$ — площадь боковой поверхности конуса с радиусом основания R и образующей l,

$V = \pi R^2 h$ — объем цилиндра с высотой h,

$S = 4\pi R^2$ — площадь сферы радиуса R,

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — объем шара радиуса R.

22 Планиметрия

22.1 Теоремы планиметрии

22.1.1 Основные теоремы планиметрии

22.1. Доказать, что три биссектрисы в треугольнике пересекаются в одной точке.

22.2. Доказать, что три серединных перпендикуляра[9] в треугольнике пересекаются в одной точке.

22.3. Доказать, что три высоты в треугольнике пересекаются в одной точке.

22.4. Доказать, что три медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и точка пересечения делит медиану в отношении два к одному, считая от вершины.

22.5. Три медианы делят треугольник на 6 треугольников. Доказать, что площади всех полученных шести треугольников равны.

22.6. Найти отношение площадей треугольника и треугольника, составленного из его медиан.

22.7. Доказать, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные длинам сторон треугольника.

22.8. Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное задачи № 22.7, для биссектрисы внешнего угла треугольника.

22.9. Две окружности с центрами O', O'' касаются внешним образом в точке A. Через точку A проведена общая касательная. Она пересекается с другой общей касательной в точке C. Доказать, что $\angle O'CO'' = \frac{\pi}{2}$.

22.10. Две окружности с центрами O', O'' касаются внешним образом в точке A, а в точках B и C окружности касаются с другой общей касательной. Доказать, что $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$.

---

[9] Напомним, что *серединным перпендикуляром* к стороне треугольника называется перпендикуляр к этой стороне, проходящий через ее середину.

Домашнее задание

22.11. Доказать, что вписанный в окружность угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рассмотреть случаи: a) центр окружности лежит на стороне угла; b) центр окружности лежит между сторон угла; c) центр окружности лежит вне угла).

22.12. Через точку, лежащую внутри круга, проведены две хорды. Доказать, что угол между хордами измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами.

22.13. Через точку, лежащую вне круга, проведены к окружности две секущие. Доказать, что угол между секущими измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.

22.14. Доказать, что угол между касательной к окружности и хордой, проведенной в точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами.

22.15. Через точку, лежащую внутри круга, проведены две хорды. Доказать, что произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

22.16. Через точку, лежащую вне круга, проведены касательная и секущая. Доказать, что квадрат касательной равен произведению всей секущей на ее внешнюю часть.

22.17. (*теорема Пифагора*) В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

22.18. Доказать, что высота, опущенная из вершины прямого угла в прямоугольном треугольнике есть среднее геометрическое между отрезками, на которые она делит гипотенузу: $h_c = \sqrt{c_a c_b}$.

22.19. (*теорема синусов*) Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

22.20. (*обобщенная теорема синусов*)

Отношение длины стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу описанной окружности.

22.21. (*теорема косинусов*)
Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

22.22. Доказать, что радиус вписанной в треугольник[10] окружности выражается через площадь треугольника S и его полупериметр p по формуле $r = \frac{S}{p}$.

22.23. Доказать, что около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна $180°$.

22.24. Доказать, что в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны.

22.1.2 Дополнительные теоремы планиметрии

22.25. Доказать, что длина медианы в треугольнике выражается по формуле: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. *"Решение"*

22.26. Доказать, что длина высоты в треугольнике выражается по формуле:
$$h_a = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

22.27. В треугольнике известны длины двух сторон b, c и угол α между ними. Доказать, что биссектриса угла α выражается по формуле: $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$.

22.28.* Доказать, что квадрат биссектрисы в треугольнике равен произведению сторон, между которыми она заключена, минус произведение отрезков, на которые она делит противоположную сторону: $l_a^2 = bc - uv$.

22.29. Доказать, что серединный перпендикуляр к стороне треугольника и биссектриса противолежащего угла пересекаются в точке, лежащей на описанной вокруг треугольника окружности.

[10] Теорема верна и для выпуклого многоугольника.

22.30. Доказать, что точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне треугольника и биссектрисы противолежащего угла равноудалена от концов этой стороны и центра вписанной в треугольник окружности.

22.31. Доказать, что расстояние между центрами окружностей вписанной и вневписанной[11] в треугольник делится пополам окружностью, описанной около треугольника.

22.32. Доказать, что радиус вневписанной к треугольнику окружности, касающейся стороны a, выражается через площадь треугольника S и его полупериметр p по формуле $r_a = \frac{S}{p-a}$.

22.33. Доказать, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до стороны, противоположной выбранной вершине.

22.34. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA', BB', CC'. Обозначим точку пересечения высот через H. Доказать, что $AH \cdot HA' = BH \cdot HB' = CH \cdot HC'$.

22.35. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA', BB', CC'. Доказать, что высоты треугольника ABC являются биссектрисами треугольника $A'B'C'$.

22.36. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA', BB', CC'. Доказать, что треугольники $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ подобны треугольнику ABC с коэффициентами подобия $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, соответственно.

22.37. Доказать, что для углов остроугольного треугольника ABC выполнено неравенство $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1$; прямоугольного $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ и тупоугольного $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1$.

22.38.* (*теорема Птолемея*)

Доказать, что во вписанном четырёхугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

---

[11] *Вневписанной окружностью* называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других.

Домашнее задание

22.39. Доказать, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c, равен $r = \frac{a+b-c}{2}$.

22.40. Доказать, что если в треугольнике выполнено неравенство $a^2 + b^2 > c^2$, то угол C острый; если $a^2 + b^2 = c^2$, то угол C прямой; если $a^2 + b^2 < c^2$, то угол C тупой.

22.41. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

22.42. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей, причем площади треугольников AEB и CED равны. Доказать, что тогда $AD \| BC$.

22.43. Доказать, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей.

22.44. (*теорема Вариньона*) Доказать, что четырехугольник, вершины которого являются серединами сторон выпуклого четырехугольника, является параллелограммом.

22.45. Доказать, что в параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей.

22.46. (*формула Герона*) Доказать, что площадь треугольника выражается по формуле:
$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{4} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

22.47. В треугольнике длины медиан равны m_a, m_b и m_c. Доказать, что длина стороны a выражается по формуле: $a = \dfrac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$.

22.48. Доказать, что длина биссектрисы угла в треугольнике выражается по формуле: $l_a = \dfrac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.

22.49. В треугольнике длины сторон a, b, c и радиус описанной окружности R. Доказать, что площадь треугольника выражается по формуле: $S = \dfrac{abc}{4R}$.

22.50. Пусть r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных к треугольнику окружностей, касающихся соответственно сторон a, b, c; r — радиус вписанной окружности. Доказать, что $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{1}{r}$, $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$.

22.51. (*теорема Чевы*)[12] Пусть точки A', B', C' лежат на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC. Отрезки AA', BB', CC' пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда
$\dfrac{AC'}{C'B} \cdot \dfrac{BA'}{A'C} \cdot \dfrac{CB'}{B'A} = 1$.

22.52.* (*теорема Менелая*) На стороне AB треугольника ABC взята точка C_1, на стороне BC — точка A_1, на продолжении стороны AC — точка B_1. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = 1$.

22.2 Задачи на вычисление

22.2.1 Прямоугольные треугольники

22.53. (МГУ, геологический, 1999, 4(8))

Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Угол между AM и высотой AH равен $40°$. Найдите углы треугольника ABC.

22.54. (МГУ, геологический, 2005, 3(8))

В треугольнике ABC угол C прямой, тангенс угла A равен $\frac{1}{4}$, медиана BD равна $\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABD и радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABD.

---

[12] Из теоремы Чевы легко выводятся следствия: 1) три медианы в треугольнике пересекаются в одной точке; 2) три биссектрисы в треугольнике пересекаются в одной точке; 3) три отрезка, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности и противолежащих сторон, пересекаются в одной точке.

22.55. (МГУ, "Ломоносов-2011", заочный тур, 6(10))

Высота прямоугольного треугольника, опущенная на его гипотенузу, делит биссектрису острого угла в отношении $5:2$, считая от вершины. Найти величину этого угла.

22.56. (МГУ, географический, 1994, 4(5))

Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение высоты CH треугольника ABC пересекает прямую DF в точке K. Найти длину отрезка HK, если длины катетов равны 2 и 3.

22.57. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, биолог., ФФМ, ФБиБ, географический, психологический, 2007, 3(8))

В прямоугольном треугольнике DEF на гипотенузу опущены медиана DM и высота DQ. Известно, что $MD = \frac{\sqrt{17}}{2}$ и $\sin \angle DMQ = \frac{8}{17}$. Найти катеты треугольника DEF.

22.58. (МГУ, химический, 1995, 4(5))

В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $CD = CE = 1$. Точка O является точкой пересечения отрезков AD и BE. Площадь треугольника BOD больше площади треугольника AOE на $\frac{1}{2}$. Кроме того, известно, что $AD = \sqrt{10}$. Найти длину гипотенузы AB.

Домашнее задание

22.59. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность, радиус которой равен 4. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности, если известно, что $OO_1 = 2$, где O и O_1 — центры вписанной и описанной окружностей.

22.60. (МГУ, социологический, 2008, 3(7))

Один из острых углов прямоугольного треугольника равен $80°$. Найти угол между высотой и медианой, проведенными к гипотенузе.

22.61. В прямоугольном треугольнике угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины прямого угла равен $10°$. Найти острые углы треугольника.

22.62. Одна из сторон треугольника равна a и вдвое больше своей медианы. А угол этой медианы с другой стороной равен 30°. Найти площадь треугольника.

22.63. В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна 30°, а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета AB.

22.64. Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, равна h, разность между проекциями катетов на гипотенузу также равна h. Найти гипотенузу треугольника.

22.65. Найти острые углы в прямоугольном треугольнике, в котором отношение гипотенузы к высоте, опущенной из вершины прямого угла, равно $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

22.66. Вычислить длины сторон прямоугольного треугольника, если известно, что его периметр равен 12, а радиус вписанного в него круга равен 1.

22.67. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Радиус описанной около прямоугольника $ABCD$ окружности равен R, а радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен r. Найдите периметр прямоугольника.

22.68. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Треугольник ABC биссектрисой BD (точка D лежит на отрезке AC) делится на два треугольника: равнобедренный треугольник ABD и прямоугольный треугольник BCD. Известно, что длина BD равна 1. Найдите площадь треугольника ABC.

22.69. (МГУ, ВМиК, 2007, устный)

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B проведена высота BD. Известно, что периметры треугольников ADB и BDC равны соответственно P_1 и P_2. Найдите периметр треугольника ABC.

22.70. Основание треугольника равно 10, а медианы двух других сторон равны 9 и 12 соответственно. Найти площадь треугольника.

22.71. (МГУ, филологический, 1990, 3(5))
В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CM и высота CH. Найти отношение $AH : AM$, если $CM : CH = 5 : 4$ и точка H находится между точками A и M.

22.72. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, периметр которого равен $2p$, а высота, опущенная на гипотенузу, равна h.

22.73. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника, площади которых равны соответственно 6 и 54. Найти гипотенузу треугольника.

22.74. Длины медиан прямоугольного треугольника, проведенных к катетам, относятся как $m : n$. Найти углы треугольника.

22.75. (МГУ, факультет Гос. управления, 2006, 3(7))
В прямой угол равнобедренного треугольника с гипотенузой $6\sqrt{2}$ вписан круг радиуса 2. Найдите площадь той части круга, которая лежит вне этого треугольника.

22.76. (МГУ, химический, 1974, 3(5))
В прямоугольном треугольнике ABC с катетами 3 и 4 вершина C прямого угла соединена с серединой D гипотенузы AB. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.

22.77. В треугольнике ABC задана точка M на стороне AC, соединенная с вершиной B отрезком MB. Известно, что $AM = 6$, $MC = 2$, $\angle ABM = 60°$, $\angle MBC = 30°$. Найти площадь треугольника ABC.

22.78. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно $\sqrt{3} + 1$.

22.79. (МГУ, ВМиК, 1973, 3(5))

В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена биссектриса CL и медиана CM. Найти площадь треугольника ABC, если $LM = a$, $CM = b$.

22.80. (МГУ, почвоведения, 2002, 6(7))

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, а один из острых углов равен α. В треугольник помещены две окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается одного из катетов, гипотенузы и другой окружности. Найти радиусы окружностей.

22.81. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. Найти катеты.

22.2.2 Равнобедренные треугольники

22.82. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно b, $BA = BC = a$. Отрезки AK и CM — биссектрисы этого треугольника. Найти MK.

22.83. В равнобедренном треугольнике основание равно 30. Высота, опущенная на основание, равна 20. На какие части площадь треугольника делится высотой, опущенной на боковую сторону?

22.84. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2008”, 5(10))

Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

22.85. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 8(8))

Периметр равнобедренного треугольника ABC равен 18. Через середину D основания AB проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке K и делящая площадь треугольника ABC в отношении $5 : 2$, при этом угол ADK равен $135°$. Найти площадь треугольника ABC.

22.86. Вычислить $\sin 18^\circ$, исходя из геометрических соображений.

Домашнее задание

22.87. Основание равнобедренного треугольника равно $\sqrt{10}$, медиана боковой стороны равна 3. Найти длины его боковых сторон.

22.88. Боковая сторона равнобедренного треугольника ABC равна 15, а его площадь равна 67,5. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BE и AH, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь треугольника BOH.

22.89. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты BE и CH пересекаются в точке K, причем $BH = 6$, $KH = 3$. Найдите площадь треугольника CBK.

22.90. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 90, а боковая сторона равна $10\sqrt{3}$. К основанию AB и стороне BC проведены высоты CP и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь треугольника CKH.

22.91. Найти площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника, если основание этого треугольника 24, боковая сторона 13.

22.92. (МГУ, физический, 1994, 4(8))

В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и боковую сторону, равны соответственно m и n. Найти стороны треугольника.

22.93. (МГУ, филологический, 2003, 3(5))

В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медианы AM и CN пересекаются в точке D под прямым углом. Найти все углы треугольника ABC и площадь четырехугольника $NBMD$, если основание $AC = 1$.

22.94. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. В каком отношении делит площадь данного треугольника прямая, делящая его основание в отношении $2:1$ и составляющая острый угол β с меньшей частью основания?

22.95. (МГУ, химический, 2001, 2(7))
В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найти длину AD, если $CE = 2$.

22.96. (МГУ, биолого-почвенный, 1971, 5(5))
Правильный треугольник ABC со стороной, равной 3, вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причем длина хорды AD равна $\sqrt{3}$. Найти длины хорд BD и CD.

22.2.3 Треугольники

Медианы

22.97. (МГУ, социологический, 2002, 3(6))
Определить угол A треугольника между сторонами 2 и 4, если медиана, выходящая из вершины A, равна $\sqrt{7}$.

22.98. (Филиал МГУ в г. Баку, 2014, 6(8))
Медианы BK и CL в треугольнике ABC пересекаются в точке M. Известно, что $BC = 5$ см, $BK + CL = 9$ см и косинус угла $BMC = -\frac{5}{16}$. Найдите площадь треугольника ABC.

22.99. (МГУ, экономический, 1985, 3(5)) *"Решение"*
В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $AP < AQ$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $PQ = 3$. Найти AC.

22.100. (МГУ, "Ломоносов-2011", заочный тур, 8(10))
Даны три точки, расстояния между которыми равны 4, 6 и 7. Сколько существует попарно не равных друг другу треугольников, для которых каждая из этих точек — либо вершина, либо середина стороны?

22.101. (МГУ, ВМиК, 1995, 3(6))

В треугольнике ABC медианы AM и CL перпендикулярны, $BC = a$, $AC = b$. Найти площадь треугольника ABM.

Домашнее задание

22.102. В треугольнике ABC $AB = 8$, $BC = 4$, $AC = 6$. Найти: площадь треугольника, радиус вписанной и радиус описанной окружности, высоту, медиану и биссектрису, проведенные из вершины B.

22.103. (МГУ, филологический, 1999, 3(5))

В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L. Найти площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника $KCDL$ равна 5.

22.104. В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна медиане BN. Найти площадь треугольника ABC, если длина AM равна m, а длина BN равна n.

22.105. (МГУ, социологический, 2002, 3(6))

Определить угол A треугольника между сторонами 2 и 4, если медиана, выходящая из вершины A, равна $\sqrt{3}$.

22.106. Медианы равнобедренного треугольника равны соответственно 5, 5 и 6. Найти площадь треугольника.

22.107. Найти площадь треугольника ABC, если $AB = 3$, $BC = 7$ и длина медианы BM равна 4.

22.108. (МГУ, геологический, май 1994, 7(8))

У треугольника известны длины двух сторон $a = 2$, $b = 3$ и площадь $S = 3\sqrt{15}/4$. Медиана, проведенная к его третьей стороне, меньше ее половины. Найти радиус описанной около этого треугольника окружности.

22.109. (МГУ, 2011, 5(8))
Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K. Найти длину отрезка CK, если $AB = \sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырехугольника $KLCM$ можно описать окружность.

22.110. (МГУ, ИСАА, 2007, 5(7))
В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Известно, что $AB = 3$, $AC = \sqrt{5}$, длина медианы, проведенной из вершины A к стороне BC, равна $\sqrt{6}$, и длины отрезков AP, PQ, QC равны между собой. Найдите длину отрезка PQ.

22.111. (МГУ, экономический, 1983, 4(6))
В треугольнике ABC медианы AE и BD, проведенные к сторонам BC и AC, пересекаются под прямым углом. Длина стороны BC равна a. Найти длины других сторон треугольника ABC, если $AE^2 + BD^2 = d^2$.

22.112. (МГУ, геологический, 1997, 4(8))
В треугольнике ABC угол B прямой, $AB = 5$, $BC = 4$. Точка D лежит на стороне AC, M — точка пересечения медиан треугольника ABD, а N — точка пересечения медиан треугольника DBC. Найти площадь треугольника BMN.

Биссектрисы

22.113. (МГУ, ИСАА, 2006, 4(7))
В треугольнике ABC проведены медиана AE и биссектриса CD, пересекающиеся в точке M. Через точку M проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника PBQ, если длина стороны AC равна $3\sqrt{3}$, длина стороны BC равна $4\sqrt{3}$, величина угла ACB равна $\frac{\pi}{3}$.

22.114. (МГУ, филологический, 2005, 6(7))
Биссектриса CD угла ACB при основании BC равнобедренного треугольника ABC делит сторону AB так, что $AD = BC$. Найти длину биссектрисы CD и площадь треугольника ABC, если $BC = 2$.

22.115. (МГУ, 2012, 6(8)) *"Решение"*

Центр окружности лежит на стороне BC треугольника ABC. Окружность касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно и пересекает сторону BC в точках F и G (точка F лежит между точками B и G). Известно, что $BF = 1$ и $\frac{BD}{DA} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$. Найти отрезок CG.

22.116. (МГУ, мех-мат, 1969, 2(4))

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что отрезок OE имеет длину 1, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E, D, O. Найти стороны и углы треугольника EDO.

22.117. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 5(8))

В треугольнике ABC длина биссектрисы AD равна 6, отношение длин отрезков BD и DC равно $3 : 4$, периметр треугольника ABC равен 21. Чему равен косинус угла BAC?

22.118. (МГУ, географический, 1999, май, 4(6))

В треугольнике ABC биссектриса AD угла A и биссектриса BL угла B пересекаются в точке F. Величина угла BCA равна $60°$. 1) Найти величину угла AFB. 2) Вычислить длину стороны AB, если угол CDL равен $75°$ и площадь треугольника ABC равна $9\sqrt{3}$.

22.119. (МГУ, ВМиК, Олимпиада "Абитуриент-2007", 4(6))

В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC, $\angle C = 90°$, проведены медиана BN и биссектриса AM, которые пересекаются в точке K. Известно, что $KM = 2$. Найти AM.

22.120. (МГУ, мех-мат, март 2003, 3(6))

На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что $AD = 10$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60°$. Найти площадь треугольника ABC. Какова наименьшая площадь треугольника BDC при данных условиях?

Домашнее задание

22.121. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 3 и 6. Найти длину биссектрисы прямого угла.

22.122. Биссектриса прямого угла в прямоугольном треугольнике отсекает на гипотенузе отрезки 2 и 3. Найти длину этой биссектрисы.

22.123. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Известно, что $BD = 4$, $CD = 6$. Найти площадь треугольника ADC.

22.124. (МГУ, ИСАА, 1992, 4(6))

Дан треугольник со сторонами 4, 8, 9. Найти длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

22.125. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD, при этом величины углов ADC и CDB относятся как 7 : 5. Найти длину AD, если известно, что $BC = 1$, а угол BAC равен $\frac{\pi}{6}$.

22.126. Дан треугольник ABC, в котором $AB = 6$, $BC = 7$, $AC = 5$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Найти площадь треугольника ADC.

22.127. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

В треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B, $AB = 4$, $BC = 5$. Найдите сторону AC.

22.128. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD угла ABC и AE угла BAC. Найти отношение площадей треугольников ABC и CDE, если известно, что $BC = 4$, $AC = 3$, $AB = 6$.

22.129. (МГУ, филологический, 2000, 2(6))

Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую MN параллельно основанию AB (M лежит на BC, N лежит на AC). Найти периметр четырехугольника $ABMN$, если известно, что $AB = 5$, $MN = 3$.

22.130. В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в точке D такой, что $DA = DB$. Найти длину стороны BC.

22.131. (МГУ, ВМиК, 1994, 4(6))
В треугольнике ABC длина стороны AB равна 21, длина биссектрисы BD равна $8\sqrt{7}$, а длина отрезка DC равна 8. Найти периметр треугольника ABC.

22.132. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 5(8))
В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$ и $BC = 4$ проведена биссектриса BL, точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, $BO : OL = 3 : 1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABL.

22.133. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 40$ и $BC = 35$. Кроме того, угол BAC равен $60°$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, где BD — биссектриса угла ABC.

22.134. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AE, которые пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BL$, периметр треугольника равен 28, $BO = 2OL$. Найти AB.

22.135. (МГУ, почвоведения, 1997, 5(6))
В треугольнике ABC угол C равен $60°$, а биссектриса угла C равна $5\sqrt{3}$. Длины сторон AC и BC относятся как $5 : 2$ соответственно. Найти тангенс угла A и сторону BC.

22.136. В треугольнике ABC биссектриса угла A продолжена до пересечения в точке D с описанной около треугольника окружностью. Найти длину стороны BC, если $AB = 75$, $AC = 48$, $AD = 100$.

22.137. В треугольнике известны длина одной стороны a и два прилежащих к ней угла B и C. Найти длину биссектрис: а) угла B; б) угла A.

22.138. В треугольнике ABC даны угол C, равный γ, и отношение стороны BC к стороне AC, равное 3. Из вершины C проведены два луча, делящие угол C на три равные части. Найти отношение отрезков этих лучей, заключенных внутри треугольника ABC.

22.139. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

В треугольнике ABC проведены BK — медиана, BE — биссектриса, AD — высота. Найдите длину AC, если известно, что прямые BK и BE делят отрезок AD на три равные части и $AB = 4$.

Высоты

22.140. (МГУ, мех-мат, 1978, 3(5))

В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AA' и CC' на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника $BA'C'$ равна 2, а длина отрезка $A'C'$ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

22.141. (МГУ, экономический, 1993, 6(6))

Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найти площадь треугольника.

Домашнее задание

22.142. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB.

22.143. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр описанной окружности. Известно, что $BC = 2$, $MN = 1$. Найдите радиус окружности, описанной около $\triangle BOC$.

22.144. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 2$, $MN = 1$. Найдите радиус окружности, описанной около $\triangle BOC$.

22.145. Точки A_1, B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $90°$, $60°$ и $30°$. Найдите углы треугольника ABC.

22.146. (МГУ, хим, географ, биолог, психолог, ФББ, ФФМ, ФНМ, физико-химический, 2008, 4(7))

Около треугольника ABC с высотами BB' и CC' описана окружность радиуса 6. Найдите радиусы окружностей, описанных около треугольников $BB'C$ и $AB'C'$, если $\cos A = -\dfrac{1}{3}$.

22.147. (МГУ, ВМиК, 1981, 3(6))

В треугольнике ABC величина угла A равна $\dfrac{\pi}{3}$, длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB равна $\sqrt{3}$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 5. Найти длины сторон треугольника ABC.

22.148. В треугольнике ABC проведены высоты $AA_1 = 2$, $CC_1 = 4$, BL — биссектриса треугольника, $AL = \frac{5}{3}$. Найти длину LC и площадь треугольника ABC.

Площади

22.149. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2010”, 2(10))

На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E, а на боковых сторонах AB и BC точки D и F соответственно так, что $DE \| BC$ и $EF \| AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF, если $BF : EF = 2 : 3$?

22.150. Найти площадь треугольника со сторонами: а) 5, 9, 12; б) 1, 2, 5; в) $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$.

22.151. (МГУ, ВМиК, Олимпиада “Абитуриент-2005”, 4(6))

На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке L. Площади треугольников AML, CNL и ALC равны соответственно 1, 6 и 4. Найдите площадь треугольника MBN.

22.152. (МГУ, биологический, 1985, 4(5))

На гипотенузе LM прямоугольного треугольника LKM лежит точка N. На прямой LM взята точка P так, что точка M находится между точками N и P, а угол NKP прямой. Найти площадь треугольника NKM, если известно, что площади треугольников LKM и NKP равны a и b соответственно, а величина угла LKP равна φ.

22.153. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 2008, 5(6))

На биссектрисе CL треугольника ABC как на диаметре построена окружность с центром в точке O, пересекающая сторону BC в точке P, а сторону AC — в точке Q, причем $\dfrac{PB}{QA} = \dfrac{BL}{AL}$. Найти площадь той части треугольника ABC, которая лежит вне данной окружности, если известно, что $\angle CBL = \angle QLA + \angle ACL$, $CP = 3$.

22.154. (МГУ, ВМиК, 2008, 4(6))

На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки E и D соответственно так, что $\angle BAD = 4\angle DAC$, $\angle BCE = 4\angle ECA$. Известно, что $AB \cdot CE = BC \cdot AD$, $AB = 2$, радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. Найти площадь треугольника ABC.

Домашнее задание

22.155. (МГУ, геологический, 2007, устный)

В треугольнике длина каждой из сторон не превосходит 2. Докажите, что площадь треугольника не превосходит $\sqrt{3}$.

22.156. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 6(8))

Периметр треугольника ABC равен 36, а площадь равна 60. Найти стороны AB и AC, если $BC = 10$.

22.157. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 5, сумма длин двух других сторон равна 7, косинус угла BAC равен $\frac{4}{5}$. Найти площадь треугольника ABC.

22.158. В треугольнике ABC угол C равен 30°, BH — высота, BM — медиана. Найти площадь треугольника ABC, если $AH = 1$, $AM = 2$.

22.159. (МГУ, биологический, 2000, 3(5))
Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $AC = 4$, $BC = 8$. Точка D лежит на стороне AB, а точка E — на стороне AC, причём $AD = 2$, $AE = 3$. Найти площадь треугольника ADE.

22.160. (МГУ, физический, 1997, 4(8))
Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M, а сторону AC — в точке N. Площадь треугольника MCN в два раза больше площади трапеции $ABMN$. Найдите $CM : MB$.

22.161. (МГУ, почвоведения, 2001, 4(6))
В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны, основание AC равно 2, а угол при основании равен 30°. Из вершины A проведены биссектриса AE и медиана AD. Найти площадь треугольника ADE.

22.162. (МГУ, геологический, 1978, 4(5))
В треугольнике ABC длина стороны AC равна 3, угол $BAC = \frac{\pi}{6}$ и радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 2. Доказать, что площадь треугольника ABC меньше 3.

22.163. (МГУ, геологический, 1978, 4(5))
В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK : BK = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL : BL = 2 : 1$. Пусть Q — точка пересечения прямых AL и CK. Найти площадь треугольника ABC, если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.

22.164. (МГУ, географический, май 2002, 3(6))
В треугольнике ABC точки E и F являются серединами сторон AB и BC соответственно. Точка G лежит на отрезке EF так, что $EG : AE = 1 : 2$ и $FG = BE$. Найти:

а) отношение площадей треугольников ABG и AGC;

б) $\angle GCA$, если $\angle AGC = 90^\circ$.

22.165. (МГУ, экономический, 2008, 4(7))
На биссектрисе BL треугольника ABC как на диаметре построена окружность с центром в точке O, пересекающая сторону AB в точке D, а сторону BC — в точке E, причем $AD \cdot LC = EC \cdot AL$. Найти площадь той части треугольника ABC, которая лежит вне данной окружности, если известно, что $\angle BAL = 2\angle BEO$, $DE = \sqrt{3}$.

22.166. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2008, 4(6))
На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки E и D так, что $\angle BAD = 2\angle DAC$, $\angle BCE = 2\angle ECA$. Известно, что $AB \cdot CE = BC \cdot AD$, $AB = \sqrt{2}$, радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\sqrt{3} - 1$. Найти площадь треугольника ABC.

Углы

22.167. В треугольнике известны длины двух сторон a и b и угол между ними C. Найти тангенс угла A.

22.168. Длины двух сторон треугольника равны 1 и 2, а синус угла между ними равен $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Найти длину третьей стороны и величины двух других углов.

22.169. В треугольнике ABC заданы стороны $BC = a$, $AC = b$ $(a > b)$. Радиус описанной вокруг треугольника окружности равен R. Найти длину стороны AB.

22.170. Продолжение биссектрисы угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E. Вписанная окружность касается стороны AC в точке F. Найти площадь треугольника, если $CE = 4\sqrt{13}$, $AF = 6$, а радиус описанной окружности равен 13.

22.171. (МГУ, географический, 1996, 4(5))
Углы треугольника ABC удовлетворяют равенству $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$. Найти площадь этого треугольника, если известны радиусы вписанной $r = \sqrt{3}$ и описанной $R = 3\sqrt{2}$ окружностей.

22.172.* (МГУ, экономический, 1984, 4(6))

В треугольнике ABC заданы длины двух сторон: $BC = 4$, $AB = 2\sqrt{19}$. Кроме того, известно, что центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найти AC.

Домашнее задание

22.173. Длины сторон треугольника равны 5, 12 и 13. Найти углы треугольника.

22.174. Существует ли треугольник с углами $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$?

22.175. Длины двух сторон треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен $\frac{\pi}{3}$. Найти длину третьей стороны и величины двух других углов.

22.176. (МГУ, мех-мат, тест, 2003, 2(10))

Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает биссектрису внешнего угла C этого треугольника в точке D. Найти угол ABC, если $\angle ADC = 15^\circ$.

22.177. (МГУ, физический, 1989, 2(6))

В треугольнике известна длина c одной из сторон и величины α и β прилегающих к ней углов. Найти площадь треугольника.

22.178. (МГУ, ИСАА, 2000, 2(7))

Тупой угол со сторонами 3 и 6 вписан в окружность радиуса $\sqrt{21}$. Определить величину дуги, на которую он опирается.

22.179. Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{13}$. Радиус описанной окружности равен 32,5. Найти стороны и площадь треугольника.

22.180. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, углом B равным 30° и катетом $CA = 1$ проведена медиана CD. Кроме того из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F. Найти площадь треугольника CDF.

22.181. В треугольнике ABC $AB = 4$, $AC = 5$, радиус окружности, описанной около треугольника, равен $\sqrt{7}$. Найти площадь треугольника ABC.

22.182. В остроугольном треугольнике ABC $(AB = BC)$ AM — медиана, AK — высота, $CM = 5$, $MK = 2{,}2$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

22.183. (МГУ, географический, май 2003, 2(6))
В треугольнике ABC проведены медиана BM и биссектриса BK. Известно, что $\angle ABM = \dfrac{\pi}{4}$, $\angle CBM = \dfrac{\pi}{6}$, $AK = 6$. Найти KM.

22.184. (МГУ, филологический, 1998, 2(6))
Длина стороны BC треугольника ABC равна 12. Около треугольника описана окружность с центром в точке O радиуса 10. Найти длины сторон AB и AC треугольника, если известно, что прямая OA делит сторону BC на два равных отрезка.

22.185. (МГУ, филологический, 2002, 2(6))
Окружность радиуса 3 проходит через середины трёх сторон треугольника ABC, в котором величины углов A и B равны 60° и 45° соответственно. Найти площадь треугольника.

22.186. (МГУ, биологический, 1998, 5(6))
В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность, проведенная через точки M и N и C, касается стороны AB, а ее радиус равен $\sqrt{2}$. Длина стороны AC равна 2. Найти синус угла $\angle ACB$.

22.187. (МГУ, мех-мат, май 2003, 3(6))
В треугольнике ABC с углом $\angle B = 50^\circ$ и стороной $BC = 3$ на высоте BH взята такая точка D, что $\angle ADC = 130^\circ$ и $AD = \sqrt{3}$. Найти угол между прямыми AD и BC, а также $\angle CBH$.

22.188. (МГУ, географический, май 2000, 4(6))
В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно, причем $BM = BN$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная BC, а через точку N — прямая, перпендикулярная AB. Эти прямые пересекаются в точке O. Продолжение отрезка BO пересекает сторону AC в точке P и делит её на отрезки $AP = 5$ и $PC = 4$. Найдите длину отрезка BP, если известно, что длина отрезка BC равна 6.

22.2.4 Окружности

22.189. (Филиал МГУ в г. Баку, 2015, 6(8))

Окружность радиуса 5 проходит через вершины A и B прямоугольника $ABCD$ и касается стороны CD. Длина диагонали прямоугольника равна $\sqrt{37}$. Найдите площадь прямоугольника.

22.190. (Филиал МГУ в г. Астана, 2017, 6(8))

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $AD = 24$, $BC = 13$. Окружность с центром на стороне AD касается сторон AB, BC и CD. Найдите длины сторон AB и CD.

22.191. (МГУ, почвоведения, 1996, 5(6))

В треугольнике ABC $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{7}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Биссектриса угла ABC продолжена до пересечения в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника. Найдите длину BD.

22.192. (МГУ, физический, 1993, 6(8)) *"Решение"*

Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b. Найти расстояние от точки C до хорды AB.

22.193. (МГУ, филологический, 1991, 5(6))

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найти расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 4$, а $BC = 3$.

22.194. (МГУ, физический, 1978, 6(6))

Дана окружность с диаметром AB. Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую в точках C и D, а диаметр AB в точке E. На дуге CE, не содержащей точки D, взята точка M, отличная от точек C и E. Луч BM пересекает первую окружность в точке N. Известно, что $CN = a$, $DN = b$. Найти MN.

22.195. (МГУ, химический, май 2002, 4(6))
В треугольнике ABC биссектрисы углов при вершинах A и C пересекаются в точке D. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности, если радиус окружности с центром в точке O, описанной около треугольника ADC, равен $R = 6$ и $\angle ACO = 30°$.

22.196. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2007", 5(10))
На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найти AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

22.197. (МГУ, психологический, 2006, 4(6))
Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C). Другая прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках D и E (точка D лежит между точками A и E). Продолжения отрезка BD за точку D и отрезка CE за точку E пересекаются в точке F, $EF = 1$, $AC = 2AE$. Найти FD.

22.198. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 4(10))
Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E. Известно, что $BD = 9$, $BE = 12$. Найти радиусы окружностей.

22.199. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2008, 5(10))
Окружность касается сторон угла ABC в точках A и C. Прямая, проходящая через точку B, пересекает окружность в точках D и E, причем $AE \| BC$. Прямые AD и BC пересекаются в точке F. Найти BF, если $AB = 1$.

22.200. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2007, 6(10))
Окружность касается другой окружности в точке A, а её хорды BC — в точке D. Найти радиус второй окружности, если $BC = 6$ и угол $BAD = 30°$.

22.201. (МГУ, 2014, 5(8))

Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2 : O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.

22.202. (МГУ, 2015, 5(8))

Окружность радиуса $\dfrac{3}{2}$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E, так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться AC, если $\angle BAC = 30°$?

22.203. (МГУ, 2016, 5(8))

Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырехугольника $TACB$, если известно, что $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5 : 8$.

22.204. (МГУ, 2017, 5(8))

Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямых AC и BC. На этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на расстоянии $\sqrt{2}$ от прямой AB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от прямой BC. Найдите угол $\angle DBC$, если известно, что $\angle ABD = \angle BCD$.

22.205. (МГУ, мех-мат, май 1999, 4(6))

Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E. Найти AE, если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

22.206. (МГУ, мех-мат, 2000, 4(6))

Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C. Касательная к первой окружности, проходящая через точку B, пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $AB = 5$ и $AC = 4$. Найти длину отрезка CE и расстояние от точки A до центра окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.

22.207. (МГУ, мех-мат, 2003, 4(6))

Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC, а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB. Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E, а продолжение хорды AD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. Найти отношение $AE : EC$, если $AB = 5$ и $BC = 9$. Сравнить площади треугольников ABC и ABF.

22.208. (МГУ, мех-мат, 2005, 4(6))

На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка E, лежащая на одной окружности с точками A, C и D. Другая окружность, проходящая через точки A, B и C, касается прямой CD. Найти BC, если $AB = 12$ и $BE : EC = 4 : 5$. Найти все возможные значения отношения радиуса первой окружности к радиусу второй при данных условиях.

22.209. (МГУ, 2010, 4(6)) *"Решение"*

В 4-угольнике $ABCD$ диагональ AC длины 9 является биссектрисой острого угла BAD и делит 4-угольник на 2 треугольника с площадями $6\sqrt{2}$ и $12\sqrt{2}$. Этот 4-угольник вписан в окружность. Найдите ее радиус.

22.210. (МГУ, ВМиК, май 1994, 4(6))

В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP — точка N так, что углы BMC и ANC — прямые. Найти биссектрису CL треугольника CMN, если $\angle MCN = 30°$, а расстояние между точками M и N равно $4 + 2\sqrt{3}$.

Домашнее задание

22.211. Прямая касается окружностей радиусов R и r в точках A и B. Известно, что расстояние между центрами равно a, причем $r < R$ и $r + R < a$. Найдите AB.

22.212. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 6. Известно, что $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите AC.

22.213. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90°$, $\angle AO_2B = 60°$, $O_1O_2 = 1$. Найдите радиусы окружностей.

22.214. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен $60°$. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

22.215. (МГУ, геологический, 2007, устный)

Из точки A, расположенной вне окружности, проведены к данной окружности касательная $AK = 4$ и секущая AC, внешняя часть которой равна $AB = 3$. Найдите длину отрезка BC.

22.216. (МГУ, ВМиК, 2007, устный)

В трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Окружность, построенная на AB как на диаметре, пересекает CD в двух точках, делящих ее в отношении $2 : 1 : 3$, считая от вершины C. Найдите острый угол трапеции.

22.217. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 4(10))

В окружности единичного радиуса с центром в точке O диаметры AB и CD перпендикулярны. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков OA, OC и исходной окружности.

22.218. (МГУ, экономический, 1980, 2(5))

В прямоугольный треугольник вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания на отрезки длиной 5 и 12. Найти площадь треугольника.

22.219. (МГУ, геологический, 1986, 2(6))
Длины сторон AB, BC и AC треугольника ABC в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найти отношение высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A на сторону BC, к радиусу вписанной окружности.

22.220. (МГУ, биологический, 1981, 3(5))
Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что длина отрезка OC равна 5.

22.221. (МГУ, ф-т Государственного управления, 2008, 3(7))
В треугольнике ABC точка O — центр вписанной окружности. Величина угла ACB равна 120°. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $AO = \sqrt{6}$, $BO = 3$.

22.222. (МГУ, ВМиК, 2007, 3(6))
В треугольнике ABC точка D является основанием высоты, опущенной из точки A на сторону BC. Окружность диаметра $2\sqrt{3}$ проходит через точки B и D и касается внешним образом окружности, описанной около треугольника ACD. Известно, что $AC = 4\sqrt{3}$, а величина угла ABC равна 30°. Найдите длину BC.

22.223. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2005, 5(6))
Вписанная в треугольник ABC окружность радиуса 1 касается сторон AB, BC и AC в точках K, M и N. Известно, что углы $\angle MKN$ и $\angle ABC$ оба равны 45°. Найдите длины сторон треугольника ABC.

22.224. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Найти радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8.

22.225. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Найти длину касательной.

22.226. (МГУ, экономический (менеджмент), 1996, 5(6))

Через точку A, находящуюся вне окружности на расстоянии 7 от ее центра, проведена прямая, пересекающая окружность в точках B и C. Найти радиус окружности, если известно, что $AB = 3$, $BC = 5$.

22.227. Каждая из боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части, и через четыре точки деления на этих сторонах проведена окружность, высекающая на основании AC хорду DE. Найти отношение площадей треугольников ABC и BDE, если $AB = BC = 3$ и $AC = 4$.

22.228. (МГУ, почвоведения, 2006, 6(7))

В треугольнике ABC известны стороны $AB = 9$, $BC = 8$, $AC = 7$, а AD — биссектриса угла BAC. Окружность проходит через точку A, касается стороны BC в точке D и пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Найти EF.

22.229. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 6(7))

Треугольник ABC, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию, вписан в окружность радиуса $\frac{14}{\sqrt{3}}$. Найдите периметр треугольника, если он меньше 40 и $AC = 14$.

22.230. Две окружности, отношение радиусов которых равно $2 : 3$, касаются друг друга внутренним образом. Через центр меньшей окружности проведена прямая, перпендикулярная линии центров, и из точек пересечения этой прямой с большей окружностью проведены касательные к меньшей окружности. Найти углы между этими касательными.

22.231. (МГУ, геологический, май 2001, 5(8))

Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, касается стороны BC в точке M и пересекает стороны AC и AB соответственно в точках L и K, отличных от вершины A. Найдите отношение $AC : AB$, если известно, что длина отрезка LC в два раза больше длины отрезка KB, а отношение $CM : BM = 3 : 2$.

22.232. (МГУ, биолого-почвенный, 1971, 4(5))

В прямоугольном треугольнике ABC даны $AB = 3$, $BC = 4$ — катеты, через середины AB и AC проведена окружность, касающаяся BC. Найти длину отрезка гипотенузы AC, который лежит внутри этой окружности.

22.233. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2005", 5(10))

На окружности взята точка A, а на ее диаметре BC — точки D и E, а на его продолжении за точку B — точка F. Найти BC, если $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF = \angle CAE$, $BD = 2$, $BE = 5$ и $BF = 4$.

22.234. (МГУ, мех-мат, 2008, 4(6))

Окружность радиуса 6 проходит через вершину B треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Центр O окружности лежит на стороне AC, $AO = 12$, $CO = 10$, $\angle OBC = \angle BCO + \angle EOA$. В каком отношении прямая BO делит отрезок EF? Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

22.235. (МГУ, ИСАА, 1995, 4(6))

Сторона AB треугольника ABC равна 3, $BC = 2AC$, E — точка пересечения биссектрисы CD данного треугольника с описанной около него окружностью, $DE = 1$. Найти сторону AC.

22.236. (МГУ, ИСАА, 2001, 5(7))

В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ и $AC = 3$. Сравните величину угла BOC и 112,5°, если O — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

22.237. В треугольнике ABC со сторонами $BC = 7$, $AC = 5$, $AB = 3$ проведена биссектриса AD. Вокруг треугольника ABD описана окружность, а в треугольник ACD вписана окружность. Найти произведение радиусов.

22.238. Опеределить длину хорды, если известны радиус r и расстояние d от одного конца хорды до касательной, проведенной через другой ее конец.

22.239. (МГУ, геологический, 1991, 5(6))

Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Угол AEC в 5 раз больше угла BAF, а угол ABC равен 72°. Найти радиус окружности, если $AC = 6$.

22.240. В треугольнике ABC $AB = \sqrt{14}$, $BC = 2$. Окружность проходит через точку B, через середину D отрезка BC, через точку E на отрезке AB и касается стороны AC. Найти отношение, в котором эта окружность делит отрезок AB, если DE — диаметр этой окружности.

22.241. Сторона AB треугольника ABC является хордой некоторой окружности. Стороны AB и BC лежат внутри окружности, продолжение стороны AC пересекает окружность в точке D, а продолжение стороны BC — в точке E, причем $AB = AC = CD = 2$, $EC = \sqrt{2}$. Чему равен радиус окружности?

22.242. (МГУ, биологический, 2002, 3(5))

Длины сторон треугольника ABC равны 4, 6 и 8. Вписанная в этот треугольник окружность касается его сторон в точках D, E и F. Найти площадь треугольника DEF.

22.243. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 7(8))

Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 21$, $BM = 9$, а угол ABC равен 60°.

22.244. В равнобедренный треугольник с основанием 12 вписана окружность, и к ней проведены три касательные, отсекающие от данного треугольника три малых треугольника. Сумма периметров малых треугольников равна 48. Найти боковую сторону данного треугольника.

22.245. В треугольник с периметром, равным 20, вписана окружность. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, равен 2,4. Найти основание треугольника.

22.246. (МГУ, биологический, май 2002, 3(5))

Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найти радиус окружности, если $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и площадь треугольника ABC равна S.

22.247. (МГУ, физический, 1990, 4(6))

На стороне BC треугольника BCD взята точка A так, что $BA = AC$, $\angle CDB = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $BD = b$. Пусть CE — высота треугольника BCD. Окружность проходит через точку A и касается стороны BD в точке E. Найти радиус этой окружности.

22.248. (МГУ, геологический, 1971, 4(5))

Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Определить радиус r, если $AB = 12$, $R = 8$.

22.249. (МГУ, биологический, 1978, 3(5))

Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности. Величина угла OAK равна $\frac{\pi}{3}$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

22.250. На отрезке AC дана точка B, причем $AB = 14$, $BC = 28$. На отрезках AB, BC и AC как на диаметрах построены полуокружности в одной полуплоскости относительно границы AC. Найти радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей.

22.251. (МГУ, экономический, отд. экономики, 2005, 5(7))

Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках K, N и M. Известно, что в треугольнике KNM угол $\angle M$ равен $75°$, произведение всех сторон равно $9 + 6\sqrt{3}$, а вершина K делит отрезок AC пополам. Найдите длины сторон $\triangle ABC$.

22.252. (МГУ, экономический (отд. экономики), 2006, 5(7))
В прямоугольном треугольнике ADC гипотенуза DC является хордой окружности радиуса 1, которая пересекает катеты AD и AC в точках E и B соответственно. Найдите DB, если $\angle DBE = 30°$, $S_{DEC} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$.

22.253. (МГУ, химический, 1998, 5(6))
Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E, причем $CE = DE$. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке K. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника CKM, если $AB = 10$, $AE = 1$.

22.254. (МГУ, психологический, 1992, 3(5))
Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника KLM, если $LM \| KN$, $KM \| NP$, $MN \| LP$, угол LOM равен $45°$, где O — точка пересечения хорд LN и MP.

22.2.5 Параллелограммы

22.255. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 3(7))
Площадь круга, вписанного в ромб, в два раза меньше площади ромба. Найти величину острого угла ромба.

22.256. (МГУ, филологический, 1982, 3(5))
В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 6, а высота, проведенная к основанию AD, равна 3. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $MC = 4$. Пусть N — точка пересечения биссектрисы AM и диагонали BD. Найти площадь треугольника BNM.

22.257. (МГУ, ВМиК (отд. специалистов), 2006, 6(7))
В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 10, 8 и 6. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Домашнее задание

22.258. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке K, причем $AM = 10$, $BK = 6$. Найдите площадь четырехугольника $ABMK$.

22.259. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AD = 10$, $BD = 8$, а отрезок, соединяющий вершину B с серединой стороны AD, равен $\sqrt{15}$.

22.260. Внутри параллелограмма $ABCD$ с острым углом A и стороной $AD = 7{,}7$ расположена окружность, радиус которой равен 2,4, так, что она касается сторон AD, AB и BC. Точка касания делит AB в отношении $16 : 9$, считая от вершины A. Найдите периметр параллелограмма.

22.261. (МГУ, биологический, 1973, 4(5))

Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найти площадь четырехугольника $OMCD$.

22.262. (МГУ, химический, ФНМ, 2006, 4(6))

Биссектрисы внутренних углов параллелограмма $ABCD$ образуют четырёхугольник $EFGH$, каждая вершина которого получена как пересечение двух биссектрис. Найти сумму квадратов всех сторон в четырёхугольнике $EFGH$, если $AB = BC + \frac{3}{2}$.

22.263. (МГУ, физический, 2000, 4(8))

В параллелограмме $KLMN$ биссектриса $\angle MNK$ пересекает сторону KL в точке Q такой, что $LQ/QK = 1/3$, $\angle LNQ = \alpha$. Найти $\angle LKN$.

22.264. (МГУ, биологический, 1980, 4(5))

Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26. Величина угла ABC равна $120°$. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCD, равен $\sqrt{3}$. Найти длины сторон параллелограмма, если известно, что $AD > AB$.

22.265. (МГУ, мех-мат, 2001, 3(6))

Через вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E, причем $BE = 9$. Найти диагональ BD.

22.2.6 Трапеции

При решении задач с трапециями часто используются дополнительные построения: проведение из вершины трапеции прямой параллельной диагонали или боковой стороне до пересечения с основанием, достроение трапеции до треугольника путем продолжения боковых сторон.

22.266. (МГУ, почвоведения, 1977, 4(5))

Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, а длина боковой стороны BC равна b. Найти площадь трапеции.

22.267. Найти площадь трапеции, у которой большее основание равно a, а меньшее основание равно b и острые углы между боковыми сторонами и большим основанием равны α и β.

22.268. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 6(8))

В равнобочной трапеции основания относятся как $3 : 2$, диагональ делит острый угол пополам. Найдите площадь трапеции, если длина диагонали равна 4.

22.269. (МГУ, мех-мат, 1973, 2(5))

В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований равен 2. Найти площадь трапеции.

22.270. (МГУ, 2018, 5(8)) *"Решение"*

Дана произвольная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите всевозможные значения площади треугольника DMK, если известно, что, $AD : BC = 3 : 2$, а площадь треугольника ABL равна 4.

22.271. (МГУ, социологический, апрель 2005, 4(6))
В равнобочной трапеции $ABCD$ $AD \| BC$, биссектриса угла BAD проходит через точку M, которая является серединой стороны CD. Известно, что $AB = 5$, $AM = 4$. Найти основания трапеции.

22.272. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 6(10))
В прямоугольной трапеции бо́льшая диагональ длины 11 делит острый угол трапеции в отношении $2:1$, а расстояние от вершины тупого угла до этой диагонали равно 4. Какие значения может принимать площадь трапеции?

Домашнее задание

22.273. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

22.274. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ равна $2\sqrt{13}$, а средняя линия равна 4.

22.275. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

22.276. В трапеции $ABCD$ стороны $AB = 25$, $CD = 24$, основание $BC = 9$, биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в ее середине. Найти основание AD.

22.277. (МГУ, почвоведения, май 2001, 6(6))
В равнобедренной трапеции средняя линия равна m, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

22.278. (МГУ, биологический, 2005, 3(6))
Диагонали трапеции равны 12 и 6, а сумма длин оснований равна 14. Найти площадь трапеции.

22.279. В прямоугольной трапеции меньшая диагональ равна 15 и перпендикулярна большей боковой стороне. Меньшая боковая сторона 12. Найти большее основание трапеции.

22.280. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2005”, 3(10))

Найти площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC = 5$, если расстояние от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

22.281. (МГУ, филологический, 2001, 3(5))

В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $CD = 2AB$. На сторонах AD и BC выбраны соответственно точки P и Q так, что $DP : PA = 2$, $BQ : QC = 3 : 4$. Найти отношение площадей четырехугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

22.282. (МГУ, географический, 2005, 2(6))

Произведение средней линии трапеции и отрезка, соединяющего середины ее диагоналей, равно 25. Найти площадь трапеции, если ее высота втрое больше разности оснований.

22.283. (МГУ, географический, 1998, 3(6))

Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ равна 48, а площадь треугольника AOB, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найти отношение оснований трапеции $AD : BC$.

22.284. (МГУ, экономический, 1995, 3(6))

В трапеции $KLMN$ боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\angle KLM = \arccos(-\frac{1}{3})$. Найти диагональ LN.

22.285. (МГУ, филологический, 1986, 4(5))

В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна CD. Диагонали BD и AC трапеции пересекаются в точке O, причем треугольник BOC является равносторонним. Найти длину стороны BC, если $AB = 5$, $CD = 3$.

22.286. Найти площадь трапеции, если её основания равны 5 и 2, а боковые стороны равны 3 и 1.

22.287. (МГУ, почвоведения, 1979, 4(5))

Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найти площадь треугольника BCE, если длины оснований трапеции $AB = 30$, $DC = 24$, боковой стороны $AD = 3$ и угол $DAB = 60°$.

22.288. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, сумма диагоналей AC и BD равна 36, угол CAD равен $60°$. Отношение площадей треугольников AOD и BOC, где O — точка пересечения диагоналей, равно 4. Найти площадь трапеции.

22.289. (МГУ, мех-мат, 1980, 3(5))

В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величины $40°$ и $50°$. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований равна 1.

22.290. (МГУ, экономический, 1999, 4(7))

В трапеции $ABCD$ $(AB\|CD)$ диагонали $AC = a$, $BD = \frac{7}{5}a$. Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.

22.291. (МГУ, геологический, 1996, 7(8))

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям и имеет длину 6. Длина основания AD равна 8, а длина отрезка DO, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 6. Найти площадь треугольника COD.

22.292. (МГУ, почвоведения, 1993, 4(5))

Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Длина отрезка EF равна 2. Найдите длины оснований, если их отношение равно 4.

22.293. (МГУ, биолого-почвенный, отд. биологии, 1970, 4(5))

Дана трапеция $ABCD$, причем $BC = a$ и $AD = b$. Параллельно ее основаниям BC и AD проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке P, диагональ AC в точке L, диагональ BD в точке R и сторону CD в точке Q. Известно, что $PL = LR$. Найти PQ.

22.294. AD и BC — основания трапеции $ABCD$, P — точка пересечения биссектрис углов DAB и ABC, Q — точка пересечения биссектрис углов BCD и CDA. Найти длину средней линии трапеции, если $AB = 4$, $CD = 10$, $PQ = 1$.

22.295. (МГУ, почвоведения, май 2000, 5(5))

Высота трапеции $ABCD$ равна 5, а основания BC и AD соответственно равны 3 и 5. Точка E находится на стороне BC, причем $BE = 2$, F — середина стороны CD, а M — точка пересечения отрезков AE и BF. Найти площадь четырёхугольника $AMFD$.

22.296. (МГУ, мех-мат, 2007, устный)

В трапецию $ABCD$ вписан параллелограмм $KLMN$ так, что вершины L и N лежат на основаниях BC и AD, а вершины K и M — на сторонах AB и CD соответственно, причём $AK : BK = 2 : 3$ и $BL : CL = 7 : 5$. Найти отношение площадей треугольников BKL и CLM.

22.297. (МГУ, мех-мат, 2007, устный)

В трапецию $ABCD$ вписан параллелограмм $KLMN$ так, что вершины L и N лежат на основаниях BC и AD, а вершины K и M — на сторонах AB и CD соответственно, причём $AK : BK = 1 : 4$ и $AN : BL : CL = 4 : 2 : 3$. Какую часть площади трапеции занимает параллелограмм?

Трапеции описанные и вписанные в окружности

22.298. В равнобедренную трапецию с верхним основанием равным единице вписана окружность радиуса единица. Найти площадь трапеции.

22.299. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2005, 4(8))

Найдите площадь трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$), вписанной в окружность с центром в точке O, если ее высота равна 2, а угол COD равен 60°.

22.300. (МГУ, геологический, 1970, 5(5))
В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 39$, $BC = 26$ и боковые стороны $AB = 5$ и $CD = 12$. Найти радиус окружности, которая проходит через точки A и B и касается стороны CD или ее продолжения.

22.301. (МГУ, 2013, 6(8)) *"Решение"*
Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен $\frac{3}{4}$.

Домашнее задание

22.302. В круг радиуса 1 вписана трапеция, основания которой видны из центра круга под углами $60°$ и $90°$. Найти площадь трапеции.

22.303. (МГУ, ИСАА, 1991, 2(6))
В равнобочную трапецию с боковой стороной, равной 9, вписана окружность радиуса 4. Найти площадь трапеции.

22.304. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найти радиус окружности, если длины оснований трапеции равны a и b.

22.305. (МГУ, геологический, 1972, 4(5))
Около трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 6. Центр описанной окружности лежит на основании AD. Основание BC равно 4. Найти площадь трапеции.

22.306. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 128. Острый угол трапеции равен $30°$. Найти стороны трапеции.

22.307. (МГУ, биолого-почв., отд. почвоведения, 1970, 3(5))
Около круга описана трапеция с углами при основании α и β. Найти отношение площади трапеции к площади круга.

22.308. (МГУ, психологический, 2003, 4(5))

В окружность радиуса $\sqrt{7}$ вписана трапеция с меньшим основанием 4. Через точку на этой окружности, касательная в которой параллельна одной из боковых сторон трапеции, проведена параллельная основаниям трапеции хорда окружности длины 5. Найти длину диагонали трапеции и площадь трапеции.

22.2.7 Многоугольники

22.309. (МГУ, Черноморский филиал, 2005, 7(10))

Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площади треугольников ADO и BCO, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна 15, а площади треугольников ABO и CDO равны 2 и 6 соответственно.

22.310. (Филиал МГУ в г. Астана, 2018, 4(8))

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагональ BE параллельна стороне CD и пересекает диагональ AD в точке F. Найдите площадь треугольника ABE, если известно, что площадь треугольника ACF равна 1 и что $BE : CD = 3 : 2$.

22.311. (МГУ, экономический, 1985, 6(6))

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, $AD = 3$. Найти сторону BC.

22.312. (Филиал МГУ в г. Баку, 2016, 6(8))

Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке F. Известно, что $AD = 30$, $CF = 16$, а площади треугольников AFB, BFC, CFD равны соответственно 40, 80, 120. Какие значения может принимать величина угла DAC?

22.313. (МГУ, химический, май 2001, 5(7))

В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы при вершинах равны. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $EF = 1$. Найти длины сторон DE и AF.

22.314.* (МГУ, химический, май 2003, 6(6))

В пятиугольник $ABCDE$ вписана окружность. P — точка касания этой окружности со стороной BC. Найти длину отрезка BP, если известно, что длины всех сторон пятиугольника являются целыми числами, $AB = 1$ и $CD = 3$.

22.315. (МГУ, мех-мат, май 1998, 3(6))

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно, $\angle A = 35°$, $\angle D = 145°$, а площадь треугольника BCE равна 11. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$.

22.316.* (МГУ, экономический, 1984, 5(6))

В трапеции $ABCD$ угол BAD равен $\frac{\pi}{3}$, а верхнее основание BC равно 5. Найти длину боковой стороны CD, если площадь трапеции равна $\dfrac{1}{2}(AD \cdot BC + AB \cdot CD)$.

Домашнее задание

22.317. (МГУ, геологический, 2007, 4(8))

Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 9, радиус вписанной в него окружности равен 1, а длины сторон AB и BC равны 3 и 5 соответственно. Чему равны длины сторон AD и CD?

22.318. В четырехугольник, три последовательные стороны которого равны соответственно 2, 3 и 4, вписана окружность радиусом 1,2. Найти площадь четырехугольника.

22.319. (МГУ, факультет Гос. управления, 2007, 3(7))

Диагональ разбивает выпуклый четырехугольник на два равных треугольника со сторонами длин 5, 12 и 13. Найдите радиус наименьшего круга, в который можно поместить такой четырехугольник.

22.320. (МГУ, химический, 1994, 4(5))

В квадрат площадью 18 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Стороны прямоугольника относятся как $1 : 2$. Найти площадь прямоугольника.

22.321. Площадь четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, равна S. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

22.322. (МГУ, географический, 2003, 4(5))

Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, перпендикулярны. Известно, что $AC = 4$, $\angle CAB + \angle DBA = 75°$. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$ и сравнить её с числом $2\sqrt{15}$.

22.323. (МГУ, почвоведения, май 1995, 6(6))

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом $60°$, а их длины относятся как $1 : 3$. Чему равна меньшая диагональ четырехугольника $ABCD$, если большая равна $\sqrt{39}$.

22.324. На стороне CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка E так, что отрезок AE делит четырехугольник $ABCD$ на ромб и равнобедренный треугольник, отношение площадей которых $\dfrac{13}{3}$. Найти величину $\angle BAD$.

22.325. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2005, 4(10))

В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно, причем $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AN = CM$. Найти AD.

22.326. (МГУ, ИСАА, 2005, 6(7))

В выпуклом четырехугольнике с вершинами в точках A, B, C, D заданы длины отрезков $AD = 2$, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2(\sqrt{3} - 1)$. Величины углов DAB и ABC равны $\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{\pi}{3}$ соответственно. Вычислите все углы четырёхугольника.

22.327. (МГУ, психологический, 2005, 4(6))

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали BD и AC равны стороне AB. Найти угол BCD и сторону AB, если угол CDA прямой, $BC = 4$, $AD = 5$.

22.328. (МГУ, ВМиК, 2007, устный)

В квадрате $ABCD$ точка K — середина стороны AB, а точка L лежит на диагонали AC, причем $AL = 3LC$. Найдите $\angle KLD$.

22.329. (МГУ, ВМиК, 2005, 4(6))

На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle AMD = \angle ADB$ и $\angle ACM = \angle ABC$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $CD = 20$. Найдите радиус вписанной в треугольник ACD окружности.

22.330. (МГУ, ИСАА, 2008, 6(8))

Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что длины сторон AB, BC, CD, DE равны $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{57}}{2}$, $\frac{\sqrt{19}}{2}$, $\sqrt{3}$ соответственно. Диагональ CA параллельна стороне DE, величина угла между диагоналями CA и CE равна $\frac{\pi}{6}$. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$.

22.331.* (МГУ, экономический, 1984, 5(6))

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ вершины A и C противоположны, длина стороны AB равна 3. Угол ABC равен $\frac{\pi}{4}$, угол BCD равен $\frac{2\pi}{3}$. Найти длину стороны AD, если известно, что площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

22.332.* (МГУ, биологический, апрель 2003, 5(6))

В квадрате $PQRS$ точка B лежит на стороне RS, а точка A на стороне SP. Отрезки QB и RA пересекаются в точке T, причем косинус угла BTR равен $-0{,}2$. Найти сторону квадрата, если известно, что $RA = 10$, а $QB = a$.

Многоугольники вписанные в окружность

22.333. (МГУ, социологический, 2003, 3(6))
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Радиус окружности равен 2, сторона AB равна 3. Диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Найти CD.

22.334. (МГУ, мех-мат, март 1999, 4(6))
Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = AD$, CA — биссектриса угла C, $\angle BAD = 140°$, $\angle BEA = 110°$. Найти угол CDB.

22.335. (МГУ, мех-мат, 2002, 4(6))
Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка X лежит на его стороне AD, причем $BX \| CD$ и $CX \| BA$. Найти BC, если $AX = \frac{3}{2}$ и $DX = 6$.

Домашнее задание

22.336. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 7(8))
Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке E. Найдите периметр и площадь треугольника ABC, если $BC = CD = 6$, $AB = 7$ и $CE = 3$.

22.337. (МГУ, биологический, ФББ, ФФМ, 2006, 3(6))
Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$, $BC=3$, $CD = 2$, $AD = 1$ вписан в круг. Найти радиус этого круга.

22.338. (МГУ, социологический, 2001, 4(6))
Диагональ AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ является диаметром описанной около него окружности. Найти отношение S_{ABC} и S_{ACD}, если известно, что диагональ BD делит AC в отношении $2:1$ (считая от точки A), а $\angle BAC = 30°$.

22.339. (МГУ, геологический, 1998, 6(8))
Четырехугольник $PQRS$ вписан в окружность. Диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $PS = 13$, $QM = 10$, $QR = 26$. Найти площадь четырехугольника $PQRS$.

22.340. (МГУ, психологический, 1999, 5(6))
Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон AB и CD равны соответственно 9 и 4, $AC = 7$, $BD = 8$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

22.341. (МГУ, социологический, 2000, 5(6))
В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность радиуса 2. Угол DAB — прямой. Сторона AB равна 5, сторона BC равна 6. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$.

22.342. (МГУ, химический, май 2000, 4(6))
Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Найти её длину, если $BC = CE$, площадь треугольника ADE равна площади треугольника CDE, площадь треугольника ABC равна площади треугольника BCD, а $3AC + 2BD = 5\sqrt{5}$.

22.343. (МГУ, географический, 1989, 5(5))
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90°$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найти длину стороны BC.

22.3 Задачи на максимум и минимум

22.344. (*задача Евклида*) В треугольнике ABC на стороне BC берется M. Через точку M проводятся прямые MK и MN параллельно сторонам AC и AB соответственно до пересечения со сторонами треугольника в точках K и N. Выбрать точку M так, чтобы площадь параллелограмма $AKMN$ была максимальной.

22.345. Дан угол A и точка M, лежащая внутри угла. Провести через точку M отрезок BC (точки B и C лежат на сторонах угла), так чтобы площадь треугольника ABC была минимальной.

22.346. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Доказать, что $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Домашнее задание

22.347. В данный треугольник вписать параллелограмм наибольшей площади с данным острым углом так, чтобы две вершины параллелограмма лежали на основании, а две другие — на боковых сторонах.

22.348. Дан угол A и точка M, лежащая внутри угла. Провести через точку M отрезок BC (точки B и C лежат на сторонах угла), так чтобы периметр треугольника ABC был минимальным.

22.349. Пусть a, b, c — стороны треугольника, причем $a+b+c=1$. Доказать, что $a^2+b^2+c^2<\dfrac{1}{2}$.

22.350. На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения (прямые находятся в общем положении, если среди них нет параллельных и никакие три из этих прямых не пересекаются в одной точке)?

22.351. (МГУ, мех-мат, 2001, устный)

Какую максимальную площадь может иметь четырехугольник, стороны которого последовательно равны $1-7a$, $7-6a$, $5-3a$, $14a+5$? Найти все значения a, при которых она достигается.

22.352. (МГУ, ВМиК, 2007, устный)

Докажите, что в $\triangle ABC$ со сторонами a, b, c и углом A, противолежащим стороне a, справедливо неравенство $\sin\dfrac{A}{2}\le\dfrac{a}{b+c}$.

22.353. Доказать, что из всех четырехугольников с одними и теми же сторонами четырехугольник, около которого можно описать окружность, имеет наибольшую площадь.

22.4 Использование метода координат и векторов

22.354. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 4(8))

Найдите периметр треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A(-3, 5)$, $B(3, -3)$ и точки $M(6, 1)$, являющейся серединой стороны BC.

22.355. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2005, 4(8)) *"Решение"*

В основании четырехугольной пирамиды с вершиной S находится прямоугольник $ABCD$. Известно, что $SA = 7$, $SB = 2$, $SC = 6$. Найти SD.

22.356. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 9(10))

В тетраэдре все плоские углы при одной вершине — прямые. Некоторая точка пространства удалена от указанной вершины тетраэдра на расстояние 3, а от остальных его вершин — на расстояния $\sqrt{5}, \sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$. Найдите расстояния от центра описанной около тетраэдра сферы до каждой из его граней.

22.357. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, биолог., ФФМ, ФБиБ, географический, психологический, 2007, 5(8))

Прямая l_1 проходит через точки $(-3, 2)$ и $(1, 1)$ координатной плоскости. Прямая l_2 проходит через точку $(-5, 4)$ и перпендикулярна прямой l_1. Найти координаты точки пересечения l_1 и l_2.

22.358. (МГУ, мех-мат, устный)

Найти наименьшее значение выражения

$$s = |x| + |y| + \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}.$$

22.359. Пусть α, β, γ — углы треугольника ABC. Доказать, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \dfrac{3}{2}$, а равенство достигается только для равностороннего треугольника.

Домашнее задание

22.360. Пусть $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ — вектора единичной длины, исходящие из одной точки O. Доказать, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$ тогда и только тогда, когда углы между всеми векторами равны по 120°.

22.361. (МГУ, почвоведения, 2005, 6(6))

На плоскости даны точки с координатами $A=(1,2)$, $B=(2,1)$, $C=(3,-3)$, $D=(0,0)$. Они являются вершинами выпуклого четырехугольника $ABCD$. В каком отношении точка пересечения его диагоналей делит диагональ AC?

22.362. Пусть α, β, γ — углы треугольника ABC. Доказать, что $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2}$, а равенство достигается только для равностороннего треугольника.

22.363. (МГУ, мех-мат, устный)

Найти наибольшее значение выражения

$$s=|y|\sqrt{1-x^2}+\sqrt{16-y^2}\cdot|x|.$$

22.364. (МГУ, факультет Гос. управления, 2005, 3(7))

В четырехугольнике $ABCD$ найдите точку E так, чтобы отношение площадей треугольников EAB и ECD было равно $1:2$, а треугольников EAD и EBC — $3:4$, если известны координаты всех его вершин: $A(-2,-4)$, $B(-2,3)$, $C(4,6)$, $D(4,-1)$.

22.365. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 8(8))

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1||BB_1||CC_1||DD_1)$ точка R лежит на диагонали AC, а точка Q — на диагонали DC_1, при этом RQ — общий перпендикуляр к прямым AC и DC_1. Чему равна величина угла RDQ?

22.366. (МГУ, ИСАА, 2006, 7(7))

Точки K,L,M,N с координатами $(-2;3)$, $(1;4)$, $(3;2)$, $(-1;-1)$ лежат на сторонах AB,BC,CD,DA квадрата $ABCD$ соответственно. Найдите его площадь.

23 Стереометрия

23.1 Вписанные и описанные шары

23.1. Дана пирамида, в которой все боковые ребра равны. Доказать, что вершина проектируется в центр описанного около основания круга.

23.2. Дана треугольная пирамида, в которой все боковые грани наклонены под одинаковым углом к плоскости основания. Доказать, что вершина проектируется в центр вписанного в основание круга или одного из трех вневписанных кругов.

23.3. Найти радиус шара, описанного около тетраэдра со стороной равной единице.

23.4. Найти радиус шара, вписанного в тетраэдр со стороной равной единице.

23.5. Дана треугольная пирамида. Доказать, что $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3} + \dfrac{1}{h_4}$, где r — радиус шара, вписанного в пирамиду, h_1, h_2, h_3, h_4 — длины перпендикуляров, опущенных из вершины пирамиды на противоположные грани.

23.6. (МГУ, 2011, 7(8))

Дан короб в форме куба со стороной 8. Шар радиуса 2 касается его основания и двух соседних граней. Второй шар радиуса 3 касается двух других граней и первого шара. Найти высоту, на которой находится центр второго шара над плоскостью основания.

23.7.* (МГУ, 2012, 8(8))

В основании пирамиды $ABCS$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$. Боковые ребра пирамиды равны соответственно $SA = SB = 4$, $SC = 5$. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается одной из сторон треугольника ABC. Найдите радиус основания цилиндра.

23.8.* (МГУ, 2013, 7(8))

В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC такой, что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D так, что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

23.9.* (МГУ, 2018, 7(8)) *"Решение"*

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK : KB = 4 : 5$, $BL : LC = 3 : 1$, $CM : MD = 7 : 2$, $DN : NA = 3 : 1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR = 1$, $AB : BC = 3 : 2$.

Домашнее задание

23.10. Дана пирамида, все боковые ребра которой наклонены под одинаковым углом к плоскости основания. Доказать, что вершина проектируется в центр описанного около основания круга.

23.11. (Филиал МГУ в г. Баку, 2016, 8(8))

В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра SA, SB, SC попарно перпендикулярны и $SA = 4$, $SB = 5$, $SC = 9$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

23.12. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор с центральным углом $288°$ и площадью 320π. Через вершину конуса перпендикулярно к одной из образующих проведена плоскость, делящая конус на две части. Найдите объем шара, вписанного в ту из образовавшихся частей, которая не содержит высоты конуса, так, что центр шара равноудален от точек пересечения секущей плоскости и окружности основания конуса.

23.13. (МГУ, геологический, 1977, 5(5))

Найти радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна b, а угол между боковыми ребрами равен α.

23.14. Ребро куба равно a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины нижнего основания куба и касающейся ребер верхнего его основания.

23.15. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 6(8))
Найдите минимально возможный объём прямого кругового конуса, описанного вокруг шара единичного радиуса.

23.16. (МГУ, мех-мат, 2002, 2(6))
Три сферы, радиусы которых соответственно равны $\sqrt{6}$, 1 и 1, попарно касаются друг друга. Через прямую, содержащую центры A и B второй и третьей сфер, проведена плоскость γ так, что центр O первой сферы удален от этой плоскости на расстояние 1. Найти угол между проекциями прямых OA и OB на плоскость γ и сравнить его с $\arccos \frac{4}{5}$.

23.17. (МГУ, физический, 1989, 4(6))
В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды.

23.18. (МГУ, социологический, 2002, 5(6))
В шар радиуса R вписана четырехугольная пирамида с квадратным основанием. Одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее боковое ребро образует с ней угол α. Найти боковую поверхность пирамиды и вычислить её значение при $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{8}{17}}$, $R = \sqrt{17}$.

23.19. (МГУ, ВМиК, Олимпиада "Абитуриент-2005", 5(6))
Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Известно, что длина перпендикуляра, опущенного из основания H высоты пирамиды SH на грань SDC, равна $\sqrt{6}$, а угол наклона бокового ребра SB к плоскости основания равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$.

23.20. (МГУ, психологический, 2000, 5(5))
В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник со сторонами $AB = AC = 5$ и $BC = 6$. Ребро SA перпендикулярно основанию пирамиды. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды, если известно, что отношение радиуса вписанной в пирамиду сферы к ребру SA равно $\dfrac{2}{7}$.

23.21. (МГУ, географический, май 1999, 6(6))
Дана треугольная пирамида, длины ребер которой равны 2, 6, 6, 8, 8, 10. Найти радиус описанной вокруг пирамиды сферы и объем пирамиды.

23.22. Доказать,что наименьший объем имеет описанный около шара конус, высота которого вдвое больше диаметра шара.

23.23.* (МГУ, "Ломоносов-2011", заочный тур, 10(10))
Сфера касается всех ребер пирамиды $SABC$, причем боковых ребер SA, SB и SC — в точках A', B' и C'. Найти объем пирамиды $SA'B'C'$, если $AB = BC = SB = 5$ и $AC = 4$.

23.2 Объемы

23.24. Бильярдный шар весит 200 г. Сколько граммов будет весить шарик вдвое меньшего радиуса, сделанный из того же материала?

23.25. (Филиал МГУ в г. Астана, 2018, 8(8)) *"Решение"*
В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех ребер одинаковы. Точка M в пространстве такова, что $MA = MB = MC = \sqrt{3}$ см и прямая AM пересекается с высотой треугольника SBC, опущенной из вершины B. Найти объем пирамиды $SABC$.

23.26. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2007", 8(10))
Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиусом 5 образуя с его осью углы в 70° и 80°, а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от нее на расстояние 11. Найти объем части цилиндра расположенной внутри двугранного угла.

23.27. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ проведены главная диагональ AC' и диагональ грани $B'D'$. Найти угол и расстояние между этими диагоналями.

23.28. (МГУ, ВМиК, 2002, устный)
В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ проведены диагонали граней $B'D'$ и DC'. Найти угол и расстояние между этими диагоналями.

23.29. Доказать, что объем произвольного тетраэдра $DABC$ равен $V = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin\varphi$, где d — расстояние между прямыми AB и CD, а φ — угол между ними.

23.30. (МГУ, геологический, 2005, 8(8))
В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы ABC и SAB прямые, двугранный угол между плоскостями ABS и ABC равен $\operatorname{arcctg}\frac{2\sqrt{10}}{3}$. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины B на плоскость ASC, если $BC = 7$, $AB = 4$.

Домашнее задание

23.31. Объем данного правильного тетраэдра равен 2 см^3. Найдите объем правильного тетраэдра, ребро которого в 3 раза больше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в см^3.

23.32. Радиус основания первого конуса в 2 раза меньше, чем радиус основания второго конуса, а образующая первого конуса в 3 раза больше, чем образующая второго. Чему равна площадь боковой поверхности первого конуса, если площадь боковой поверхности второго равна 22 см^2? Ответ дайте в см^2.

23.33. (Филиал МГУ в г. Баку, 2014, 8(8))
Металлический бак в форме куба объема V без крышки стоит на горизонтальной поверхности. На дне бака внутри стоит треугольная пирамида объема $\frac{1}{3}V$ из сплошного металла, причем основание пирамиды занимает треть площади дна бака. В бак налита вода до краев. Определите объем налитой воды.

23.34. (МГУ, ф-т Государственного управления, 2008, 4(7))
В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ и $A'B'C'D'$ — основания, $AA'||BB'||CC'||DD'$) известны длины отрезков: $AD' = \sqrt{34}$, $AC = \sqrt{58}$, $AB' = \sqrt{74}$. Найти объём параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$.

23.35. (МГУ, ИСАА, 1999, 4(7))
Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом $\dfrac{\pi}{8}$. Каждое боковое ребро равно $\sqrt{6}$ и наклонено к плоскости основания под углом $\dfrac{5\pi}{13}$. Определить объем пирамиды.

23.36. Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой два противоположных ребра 4 и 12, а каждое из остальных ребер равно 7.

23.37. (МГУ, физический, 1997, 6(8))
В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту пирамиды.

23.38. (МГУ, мех-мат, тест, 2002, 8(10))
Найти максимально возможный объём треугольной пирамиды при условии, что две её грани — равные треугольники со сторонами 5, 6 и 7.

23.39. (МГУ, мех-мат, тест, 2003, 9(10))
В тетраэдре $ABCD$ с ребрами $AB = 5$, $BC = 11$ и $CD = 8$ ближайшая к вершине A точка ребра BC есть точка B, а ближайшая к вершине D точка грани ABC есть точка E, лежащая на ребре BC и делящая его в отношении $BE : EC = 6 : 5$. Какова при этих условиях наименьшая длина ребра AD?

23.40. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2005”, 7(10))
Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а ее высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 30°. Какой наибольший объем может иметь такая пирамида?

23.41. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2005", 10(10))

При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством $3|x|^n + |8y|^n + |z|^n < 1$, а тело Φ — объединение тел Φ_n. Найти объем Φ.

23.3 Углы между плоскостями и прямыми

23.42. (МГУ, 2014, 7(8)) *"Решение"*

В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

23.43. (МГУ, 2015, 7(8))

В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и ребрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите ее радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.

23.44. (МГУ, 2017, 7(8))

Из вершины D на плоскость основания ABC пирамиды $ABCD$ опущена высота DH. Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HBC$, $\triangle HAC$, $\triangle HAB$ равны соответственно $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, и что все три плоских угла при вершине D прямые.

23.45. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

23.46. В треугольной пирамиде $DABC$ известно, что $BC = 10$, $AD = 24$, расстояние между серединами ребер AC и BD равно 13. Найти угол между прямыми AD и BC.

23.47. Диаметр окружности цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Домашнее задание

23.48. В основании конуса проведена хорда. Через данную хорду и вершину конуса C проведена плоскость так, что угол при вершине C, образовавшегося в сечении треугольника, равен $60°$. Найдите расстояние от центра основания конуса O до данной плоскости, если высота конуса равна 2, а образующая равна $\frac{8}{3}$.

23.49. Точки K и M лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла наклона прямой KM к плоскости основания цилиндра равен $\frac{3}{5}$, $KM = 10$, объем цилиндра равен 150π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

23.50. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна $3\sqrt{2}$, а объем — 24. Найдите расстояние от вершины основания C до прямой AS.

23.51. В конусе с радиусом основания $1 + \sqrt{3}$ и высотой $3 + \sqrt{3}$ проведено осевое сечение плоскостью SFK, где S — вершина конуса, SK и SF — образующие, SO — высота. Точка M лежит на образующей SF. Найдите расстояние от точки M до SK, если $\angle MOK = 135°$.

23.52. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.

23.53. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и A_1C.

23.54. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

23.55. (МГУ, 2014, 7(8))

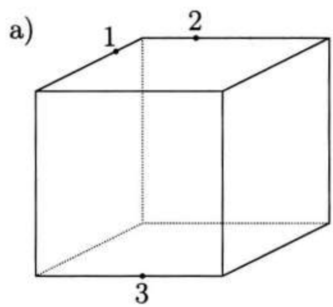
В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{7}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

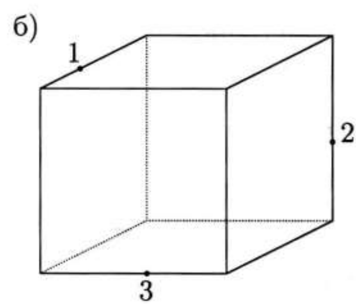
23.56. (Филиал МГУ в г. Астана, 2017, 8(8))

В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ (S — вершина пирамиды) вписан шар. Через центр шара и ребро AB проведена плоскость, которая в пересечении с пирамидой дает 4-угольник $ABMN$. Объемы пирамид $SABMN$ и $SABCD$ относятся как $7:25$. Найдите косинус двугранного угла между боковой гранью и основанием исходной пирамиды.

23.4 Сечения

23.57. В кубе построить сечения по трем точкам, лежащим на ребрах куба.





23.58. (Филиал МГУ в г. Баку, 2015, 8(8))

В правильной треугольной пирамиде площадь боковой грани равна 6, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро пирамиды и ее высоту, равна 3. Найдите длину стороны основания этой пирамиды.

23.59. (МГУ, "Ломоносов-2009", 4(9))

Можно ли данный двугранный угол величиной $90°$ пересечь плоскостью так, чтобы в полученном сечении образовался угол величиной $140°$?

23.60. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

В основании правильной треугольной призмы лежит треугольник ABC со стороной a. На боковых ребрах взяты точки A', B' и C', расстояния от которых до плоскости основания равны $\frac{a}{2}, a$ и $\frac{3a}{2}$. Найдите угол между плоскостями ABC и $A'B'C'$.

23.61. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2008", 8(10))

Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ служит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 3$ и $AC = 4$. Через середину бокового ребра $BB' = 10$ параллельно AC проведена прямая l. Какие значения может принимать площадь параллелограмма, у которого две вершины — точки A и B, а остальные две вершины лежат на прямых $A'C$ и l соответственно?

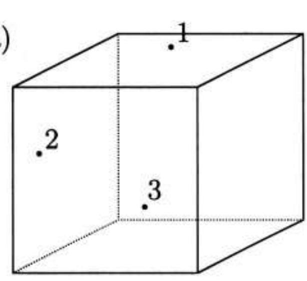
23.62.* (МГУ, мех-мат, 1969, 4(4))

Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами 1. Найти периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон имеет длину $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

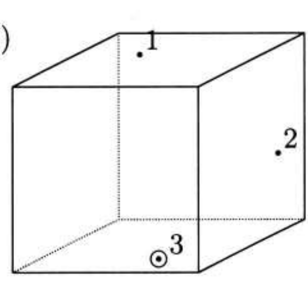
Домашнее задание

23.63. В кубе построить сечения по трем точкам, лежащим на гранях куба.

а)



б)



23.64. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

В пространстве задано некоторое множество точек M. Проекции этого множества на каждую из двух пересекающихся плоскостей являются прямыми линиями. Может ли множество точек M не быть прямой линией?

23.65. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, $AD = a$, $AB = b$. На ребре DD' выбрана точка M так, что получившийся в сечении прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, C' и M, четырёхугольник имеет наименьший возможный периметр. Найдите $DM : MD'$.

23.66. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, которая отсекает от противоположной грани треугольник площадью 4. Найти боковую поверхность пирамиды, которая отсечена проведенной плоскостью от данной пирамиды, если боковая поверхность данной пирамиды равна 25.

23.67. (МГУ, химический, 1983, 3(5))

Треугольная призма $ABCA'B'C'$ с нижним основанием ABC и боковыми ребрами AA', BB', CC' рассечена плоскостью, проходящей через точки E, F, C, где точка E является серединой ребра AA', точка F лежит на ребре BB', причем $BF : FB' = 1 : 2$. Найти объем части призмы $ABCA'B'C'$, заключенный между секущей плоскостью и нижним основанием этой призмы, если известно, что объем призмы равен V.

23.68. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2005, 7(8))

Верхняя грань $ABCD$ куба $ABCDA'B'C'D'$ ($AA' \| BB' \| CC' \| DD'$ — боковые ребра) является одновременно основанием правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, у которой высота вдвое меньше длины ребра куба. Найдите угол между прямыми AB' и $A'S$.

23.69. (МГУ, физический, 1986, 5(6))

В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M, делящая отрезок SB в отношении $3:5$, считая от точки S. Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

23.70. (МГУ, ФНМ, май 2000, 5(6))

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Длина ребра куба равна 6. Через вершину A, середину M ребра B_1C_1 и некоторую точку K на ребре DD_1 проведена плоскость. Линия пересечения этой плоскости с гранью $A_1B_1C_1D_1$ делит грань $A_1B_1C_1D_1$ на две части, площади которых относятся как $1:19$. Найти длину отрезка AK.

23.71. (МГУ, почвоведения, 1998, 5(6))

На ребрах AA' и CC' куба $ABCDA'B'C'D'$ отмечены соответственно точки E и F такие, что $AE = 2A'E$, $CF = 2C'F$. Через точки B, E и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношение объема части, содержащей точку B', к объему всего куба.

23.72. (МГУ, почвоведения, май 2003, 6(6))

Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно a. Найти периметр и площадь сечения, проведенного через диагональ DC' параллельно $D'B$.

23.73. (МГУ, биологический, май 2002, 5(5))

На ребрах AD и BC куба $ABCDA'B'C'D'$ соответственно взяты точки P и Q так, что $AP:PD = 2:1$, $BQ:QC = 1:3$. В каком отношении делит объём куба плоскость, проходящая через точки P, Q и центр грани $CC'D'D$?

23.74. (МГУ, географический, 1984, 4(5))

Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Найти площадь этого сечения, если длина бокового ребра равна 4, а угол между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равен $\dfrac{\pi}{3}$.

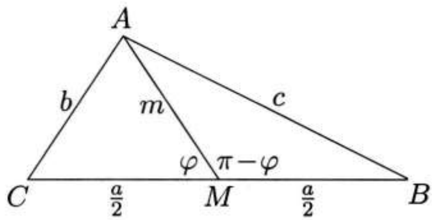
Ответы, указания, решения

22.6. $\frac{4}{3}$.

22.25. Доказать, что длина медианы в треугольнике выражается по формуле: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Доказательство.

Обозначим $\angle AMC = \varphi$. Тогда $\angle AMB = \pi - \varphi$.



По теореме косинусов для треугольника AMC

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2AM \cdot MC \cos\varphi \iff$$

$$b^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m \cdot \frac{a}{2}\cos\varphi \iff b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - ma\cos\varphi.$$

По теореме косинусов для треугольника AMB

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM \cdot MB\cos(\pi - \varphi) \iff$$

$$c^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2m \cdot \frac{a}{2}\cos\varphi \iff c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} + ma\cos\varphi.$$

Складывая полученные два равенства, имеем

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{4} \iff m^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$\iff m = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

22.53. 90°, 25°, 65°. **22.54.** $S_{\triangle ABD} = 1$, $R = \frac{\sqrt{85}}{2}$.

22.55. $\arccos\frac{5}{7}$. **22.56.** $\frac{25}{2\sqrt{13}}$. **22.57.** 1 и 4. **22.58.** 5. **22.59.** 1,5.

22.60. 70°. **22.61.** 35°, 55°. **22.62.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **22.63.** $\sqrt{15 + 6\sqrt{3}}$.

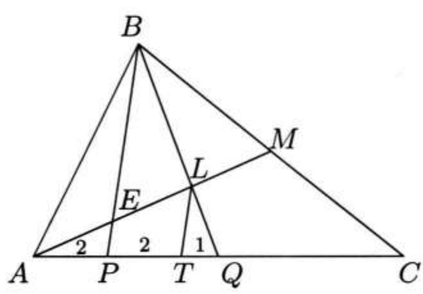
22.64. $h\sqrt{5}$. **22.65.** 30° и 60°. **22.66.** $3, 4, 5$. **22.67.** $4(R + r)$.

22.68. 1 или $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **22.69.** $\sqrt{P_1^2 + P_2^2}$. **22.70.** 72. **22.71.** $2 : 5$.

22.72. $\dfrac{2p^2}{2p+h}$. **22.73.** 20. **22.74.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{4n^2-m^2}}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, $\dfrac{\pi}{2}-A$.
22.75. $\pi-2$. **22.76.** $\dfrac{5\sqrt{13}}{12}$. **22.77.** $8\sqrt{3}$. **22.78.** $30°$; $60°$.
22.79. $\dfrac{b^2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}$. **22.80.** $\dfrac{c}{2+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **22.81.** 3 и 4.
22.82. $\dfrac{ab}{a+b}$. **22.83.** 84, 216. **22.84.** 3 или $2\sqrt{3}$. **22.85.** 12.
22.86. $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$. **22.87.** 4. **22.88.** 24. **22.89.** 15. **22.90.** 32.
22.91. $(16{,}9)^2\pi$. **22.92.** $\dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, $\dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, $\dfrac{2mn}{\sqrt{4m^2-n^2}}$.
22.93. $\angle A=\angle C=\operatorname{arctg}3$, $\angle B=\pi-2\operatorname{arctg}3$; $S_{NBMD}=\dfrac{1}{4}$.
22.94. $\dfrac{9\sin(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\sin\beta}$. **22.95.** 1. **22.96.** $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. **22.97.** $60°$. **22.98.** $\dfrac{3\sqrt{231}}{4}$.

22.99. В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $AP<AQ$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $PQ=3$. Найти AC.

Решение. Поскольку прямая BQ делит медиану AM в отношении $2:1$, считая от вершины A, то отрезок BQ является медианой стороны AC. Обозначим E и L — точки пересечения медианы AM с прямыми BP и BQ соответственно.



Проведем из точки L прямую LT, параллельную прямой BP, до пересечения со стороной AC в точке T. Треугольник LQT подобен треугольнику BQP с коэффициентом подобия $1:3$, значит

$QT = \dfrac{1}{3}QP = 1$, а $PT = PQ - TQ = 3 - 1 = 2$.

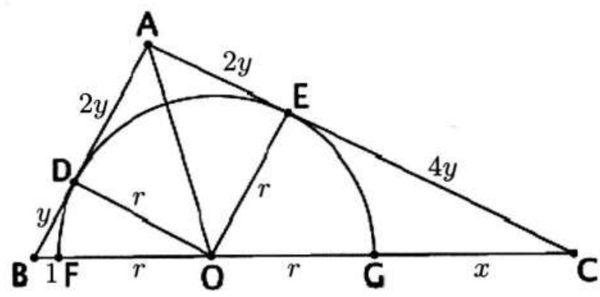
Так как $AE = EL$, то по теореме Фалеса $AP = PT = 2$. Тогда $AQ = AP + PQ = 2 + 3 = 5$ и, следовательно, $AC = 2AQ = 10$.

Ответ. 10.

22.100. 11. **22.101.** $\dfrac{\sqrt{5a^2b^2 - a^4 - 4b^4}}{4}$. **22.102.** $3\sqrt{15}$, $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$, $\dfrac{16}{\sqrt{15}}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{31}$, $2\sqrt{6}$. **22.103.** 15. **22.104.** $\dfrac{2mn}{3}$. **22.105.** 120°. **22.106.** 16. **22.107.** $6\sqrt{3}$. **22.108.** $\dfrac{8}{\sqrt{15}}$. **22.109.** 1. **22.110.** $-5 + 2\sqrt{10}$. **22.111.** $AB = \dfrac{2d}{3}$, $AC = \dfrac{\sqrt{20d^2 - 9a^2}}{3}$. **22.112.** $\dfrac{20}{9}$. **22.113.** $\dfrac{7\sqrt{13}}{10}$. **22.114.** $CD = 2$, $S_{\triangle ABC} = \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{5}$.

22.115. Центр окружности лежит на стороне BC треугольника ABC. Окружность касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно и пересекает сторону BC в точках F и G (точка F лежит между точками B и G). Известно, что $BF = 1$ и $\frac{BD}{DA} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$. Найти отрезок CG.

Решение.



Обозначим $BD = y$. Тогда в силу заданного отношения $DA = 2y$. Касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, поэтому $AE = AD = 2y$. В силу заданного отношения $EC = 4y$. Пусть радиус окружности равен r, а $GC = x$.

Точка O лежит на биссектрисе угла BAC. По свойству биссектрисы AO треугольника ABC имеем $\dfrac{OC}{OB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4y}{2y} = 2 \Rightarrow \dfrac{r+x}{r+1} = 2 \Leftrightarrow x + r = 2 + 2r \Leftrightarrow r = x - 2$ $(\Rightarrow x > 2)$.

Поскольку $OE \perp AC$, $OD \perp AB$ (радиусы, проведенные в точку касания), то $EC^2 = OC^2 - OE^2 = (r+x)^2 - r^2 = (x-2+x)^2 - (x-2)^2 = (2x-2)^2 - (x-2)^2 = 3x^2 - 4x$, $BD^2 = BO^2 - OD^2 = (1+r)^2 - r^2 = 1 + 2r = 1 + 2(x-2) = 2x - 3$. Так как $EC^2 = (4BD)^2$, то

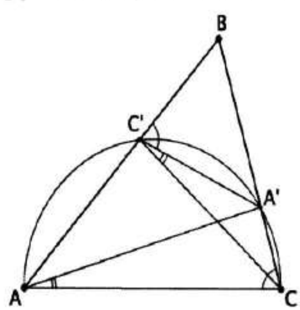
$$3x^2 - 4x = 16(2x-3) \iff x^2 - 12x + 16 = 0 \overset{x>2}{\iff} x = 6 + 2\sqrt{5}.$$

Ответ. $6 + 2\sqrt{5}$.

22.116. Стороны: $1, 1, \sqrt{3}$; углы: $30°$, $30°$, $120°$. **22.117.** $\frac{17}{32}$.
22.118. $\angle AFB = 120°$, $AB = 3\sqrt{6}$. **22.119.** $4+\sqrt{2}$.
22.120. $25\sqrt{3}$, $75\sqrt{3}$. **22.121.** $2\sqrt{2}$. **22.122.** $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$.
22.123. $12\sqrt{5}$. **22.124.** $\sqrt{14}$. **22.125.** $3-\sqrt{3}$. **22.126.** $\frac{5\sqrt{6}}{2}$.
22.127. $\sqrt{29}-2$. **22.128.** $\frac{15}{2}$. **22.129.** 11. **22.130.** $\sqrt{b(b+c)}$.
22.131. 60. **22.132.** $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **22.133.** $\frac{20\sqrt{3}}{6+\sqrt{21}}$ или $\frac{20\sqrt{3}}{4+\sqrt{7}}$.
22.134. 8. **22.135.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 7. **22.136.** 98,4. **22.137.** а) $\frac{a\sin C}{\sin(\frac{B}{2}+C)}$; б) $\frac{a\sin B\sin C}{\sin(B+C)\cos\frac{B-C}{2}}$. **22.138.** $\frac{3+2\cos\frac{\gamma}{3}}{1+6\cos\frac{\gamma}{3}}$. **22.139.** $\sqrt{13}$.

22.140. В остроугольном $\triangle ABC$ из вершин A и C опущены высоты AA' и CC' на стороны BC и AB. Известно, что площадь $\triangle ABC$ равна 18, $S_{\triangle BA'C'} = 2$, а длина отрезка $A'C'$ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

Решение.



Докажем, что $\triangle C'BA'$ подобен $\triangle ABC$. На отрезке AC как на диаметре опишем окружность. Поскольку углы $\angle AC'C$, $\angle AA'C$ — прямые, то эта окружность пройдет через точки C' и A'. Вписанные углы, опирающиеся на дугу $A'C$, равны, поэтому $\angle A'C'C = \angle A'AC$. Угол $BC'A'$ дополняет угол $A'C'C$ до $90°$, а угол BCA дополняет угол $A'AC$ в треугольнике $AA'C$ до $90°$, следовательно, $\angle BC'A' = \angle BCA$. Значит, $\triangle A'BC'$ подобен $\triangle ABC$ по первому признаку подобия треугольников (угол ABC — общий и по доказанному $\angle BC'A' = \angle BCA$).

Из подобия треугольников

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BC'A'}} = \frac{18}{2} = 9 = \frac{AC^2}{C'A'^2} = \frac{AB^2}{BA'^2}. \qquad (*)$$

Отсюда $AC = 3C'A' = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Обозначим $BA' = x$, тогда из соотношения $(*)$ $AB = 3BA' = 3x$.

Из прямоугольного $\triangle ABA'$ $\cos\angle B = \frac{BA'}{AB} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$. Значит, $\sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. По обобщенной теореме синусов для $\triangle ABC$: $2R = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{6\sqrt{2}\cdot 3}{2\sqrt{2}} = 9 \Leftrightarrow R = \dfrac{9}{2}$.

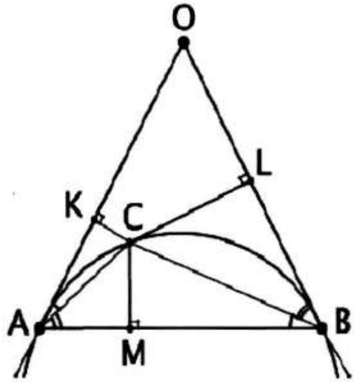
Ответ. $\dfrac{9}{2}$.

22.141. 340. **22.142.** $45°$ или $135°$. **22.143.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **22.144.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ или 2. **22.145.** $45°$, $75°$, $60°$ или $135°$, $15°$, $30°$ или $120°$, $15°$, $45°$ или $105°$, $30°$, $45°$. **22.146.** $4\sqrt{2}$, 2. **22.147.** $AB = 1+6\sqrt{2}$, $AC = 2$, $BC = 5\sqrt{3}$. **22.148.** $LC = \dfrac{10}{3}$, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{2(-3+2\sqrt{21})}{3}$. **22.149.** $\dfrac{6}{25}$. **22.150.** а) $4\sqrt{26}$; б) такого треугольника нет; в) $\dfrac{7}{2}$. **22.151.** $\dfrac{15}{2}$. **22.152.** $\dfrac{a+b-\sqrt{(a+b)^2-4ab\sin^2\varphi}}{2}$. **22.153.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2} - \pi$. **22.154.** $\sqrt{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2}$. **22.156.** $AB = AC = 13$. **22.157.** 6. **22.158.** $2\sqrt{3}$ или $\dfrac{10}{\sqrt{3}}$. **22.159.** $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$. **22.160.** $2+\sqrt{6}$. **22.161.** $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{6}$. **22.163.** $\dfrac{7}{4}$.

22.164. а) 1 : 3; б) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{8}}$. **22.165.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}-\dfrac{\pi}{3}$. **22.166.** $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. **22.167.** $\operatorname{tg} A=\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}$. **22.168.** $\sqrt{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{6}$ или $\sqrt{7}$, $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$. **22.169.** $\dfrac{a\sqrt{4R^2-b^2}\pm b\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$. **22.170.** 120. **22.171.** $3(2\sqrt{6}+1)$. **22.172.** 10. **22.173.** $\dfrac{\pi}{2}$, $\arcsin\dfrac{5}{13}$, $\arcsin\dfrac{12}{13}$. **22.174.** Нет. **22.175.** $\sqrt{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{6}$. **22.176.** 30°. **22.177.** $\dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **22.178.** 240°. **22.179.** 25, 39, 56; 420. **22.180.** $\dfrac{\sqrt{3}+1}{8}$. **22.181.** $5\sqrt{3}$ или $\dfrac{15\sqrt{3}}{7}$. **22.182.** $\dfrac{5\sqrt{14}}{2\sqrt{3{,}01}}$ или 6,25. **22.183.** $3(\sqrt{2}-1)$. **22.184.** $AB=AC=2\sqrt{10}$. **22.185.** $9(3+\sqrt{3})$. **22.186.** $\dfrac{1}{2}$. **22.187.** 90°, 20°. **22.188.** 5. **22.189.** 6. **22.190.** 16 и 9. **22.191.** $4\sqrt{3}$.

22.192. Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b. Найти расстояние от точки C до хорды AB.

Решение.



Проведем хорды AC и BC и опустим перпендикуляры CK, CL и CM. Углы CAK и CBM измеряются половиной дуги AC (по теореме об угле между касательной и хордой и по теореме о вписанном угле), поэтому они равны друг другу. Следовательно, прямоугольные треугольники AKC и BMC подобны. Аналогично, подобны треугольники BLC и AMC. Поэтому

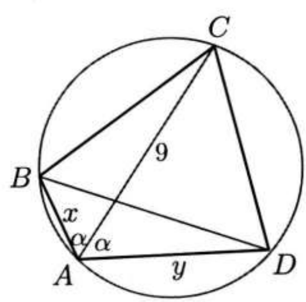
$$\frac{CK}{CM} = \frac{AC}{BC} = \frac{CM}{CL} \Longrightarrow CM^2 = CK \cdot CL = ab.$$

Ответ. $\sqrt{ab}$.

22.193. $2\sqrt{3}$. **22.194.** $\sqrt{ab}$. **22.195.** 6. **22.196.** 10. **22.197.** 2. **22.198.** 36; 8. **22.199.** $\frac{1}{2}$. **22.200.** $2\sqrt{3}$. **22.201.** 1 : 1. **22.202.** $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$. **22.203.** $8\sqrt{2}$. **22.205.** 24. **22.206.** $CE = 6$; $OA = 2$. **22.207.** 25:81; равны. **22.208.** 18; $\frac{r_1}{r_2} \in \left(\frac{1}{3};\, 1\right) \bigcup \left(1;\, \frac{5}{3}\right)$.

22.209. В 4-угольнике $ABCD$ диагональ AC длины 9 является биссектрисой острого угла BAD и делит 4-угольник на 2 треугольника с площадями $6\sqrt{2}$ и $12\sqrt{2}$. Этот 4-угольник вписан в окружность. Найдите ее радиус.

Решение.



Обозначим $AB = x$, $AD = y$, $\angle BAC = \angle DAC = \alpha$, R — радиус описанной около четырехугольника окружности.

По условию $\begin{cases} S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 9x \sin\alpha, \\ S_{\triangle ADC} = 12\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 9y \sin\alpha. \end{cases}$ Поэтому $y = 2x$.

Поскольку равные вписанные углы в окружности опираются на равные дуги, а равные дуги стягиваются равными хордами, то $BC = CD$. Выразив с помощью теоремы косинусов эти длины из треугольников ABC и ADC соответственно и приравняв между собой, получим, что

$$x^2+81-18x\cos\alpha=4x^2+81-36x\cos\alpha \Longrightarrow x=6\cos\alpha.$$

$S_{\triangle ABC}=6\sqrt{2}=\dfrac{9}{2}x\sin\alpha=\dfrac{9}{2}\cdot 6\cos\alpha\sin\alpha \Longrightarrow \sin 2\alpha=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$.

Т. к. $\angle ABD$ — острый, то $\cos 2\alpha=\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{32}{81}}=\dfrac{7}{9}$.

Отсюда $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Значит, $x=6\cos\alpha=4\sqrt{2}$.

По теореме косинусов для $\triangle ABD$ находим $BD=\sqrt{x^2+4x^2-4x^2\cos 2\alpha}=\dfrac{4\sqrt{34}}{3}$, а по обобщенной теореме синусов находим $R=\dfrac{BD}{2\sin 2\alpha}=\dfrac{\frac{4\sqrt{34}}{3}}{2\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9}}=\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$.

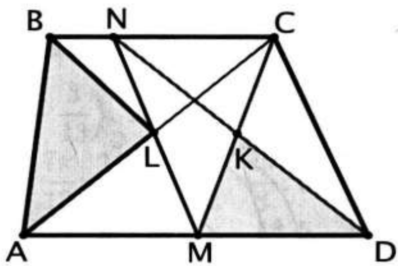
Ответ. $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$.

22.210. $7+4\sqrt{3}$. **22.211.** $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$. **22.212.** $2(\sqrt{8}\pm\sqrt{3})$. **22.213.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ или $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$. **22.214.** 105° или 165°. **22.215.** $\dfrac{7}{3}$. **22.216.** $\arccos\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}$. **22.217.** $\sqrt{2}-1$. **22.218.** 60. **22.219.** 3. **22.220.** $\dfrac{147}{8}$. **22.221.** $\sqrt{5+3\sqrt{2}}$. **22.222.** $\dfrac{36}{\sqrt{13}}$. **22.223.** $2+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}+2$. **22.224.** $\dfrac{15}{4}$; $\dfrac{20}{3}$. **22.225.** 6. **22.226.** 5. **22.227.** $\sqrt{2}$. **22.228.** 6. **22.229.** 30. **22.230.** 90°. **22.231.** 9 : 8. **22.232.** 1,1. **22.233.** 11. **22.234.** а) 6 : 5; б) 13. **22.235.** $\sqrt{3}$. **22.236.** $112{,}5^\circ$, равны. **22.237.** $\dfrac{35}{32}$. **22.238.** $\sqrt{2dr}$. **22.239.** 3. **22.240.** 4 : 3. **22.241.** $\sqrt{5}$. **22.242.** $\dfrac{15\sqrt{15}}{32}$. **22.243.** $S=90\sqrt{3}$. **22.244.** 18. **22.245.** 4 или 6. **22.246.** $\sqrt{\dfrac{S\sin(\alpha+\beta)}{2\sin^3\alpha\sin\beta}}$. **22.247.** $\dfrac{b\sin\alpha}{4\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}$. **22.248.** 24. **22.249.** $2-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **22.250.** 6. **22.251.** $2\sqrt{3}+4$, $2\sqrt{3}+4$, $4\sqrt{3}+6$.

22.252. $\sqrt{2}$. **22.253.** $\frac{27}{4}$. **22.254.** 4. **22.255.** $\arcsin\frac{2}{\pi}$. **22.256.** $\frac{27}{8}$.
22.257. 672. **22.258.** 30. **22.259.** 28. **22.260.** 25,4. **22.261.** $\frac{5}{12}$.
22.262. $\frac{9}{2}$. **22.263.** $\pi-2\operatorname{arctg}(7\operatorname{tg}\alpha)$. **22.264.** 5 и 8. **22.265.** $\frac{34}{9}$.
22.266. $\frac{3ab}{4}$. **22.267.** $\frac{(a^2-b^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **22.268.** $S=2\sqrt{15}$.
22.269. $S=6$.

22.270. Дана произвольная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите всевозможные значения площади треугольника DMK, если известно, что, $AD : BC = 3 : 2$, а площадь треугольника ABL равна 4.

Решение.



Треугольник NCK подобен треугольнику DMK, а треугольник NCL подобен треугольнику MAL. Ввиду равенства $DM = MA$ коэффициент подобия одинаков. Поэтому

$$\frac{CK}{MK}=\frac{NC}{DM}=\frac{NC}{MA}=\frac{CL}{AL}.$$

Отсюда

$$\frac{MC}{MK}=\frac{MK+KC}{MK}=1+\frac{CK}{MK}=1+\frac{CL}{AL}=\frac{AL+LC}{AL}=\frac{AC}{AL}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle DMK}=\frac{MK}{MC}S_{\triangle DMC}=\frac{MK}{MC}\cdot\frac{DM}{BC}S_{\triangle ABC}=$$

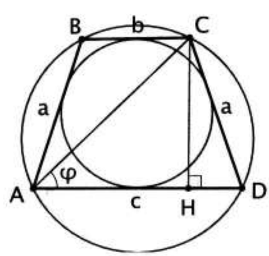
$$=\frac{MK}{MC}\cdot\frac{DM}{BC}\cdot\frac{AC}{AL}S_{\triangle ABL}=\frac{DM}{BC}S_{\triangle ABL}=\frac{AD}{2BC}S_{\triangle ABL}=\frac{3}{2\cdot 2}\cdot 4=3.$$

Ответ. 3.

22.271. 1,1; 3,9. **22.272.** $\frac{121}{5}+22$; $\frac{726}{25}+22$. **22.273.** 14. **22.274.** 24. **22.275.** 39 или 9. **22.276.** 15. **22.277.** m^2. **22.278.** $16\sqrt{5}$. **22.279.** 25. **22.280.** 25. **22.281.** $\frac{19}{44}$. **22.282.** 150. **22.283.** 3. **22.284.** 36 или $8\sqrt{19}$. **22.285.** $\frac{15}{7}$. **22.286.** $\frac{7\sqrt{35}}{12}$. **22.287.** $10\sqrt{3}$. **22.288.** $90\sqrt{3}$. **22.289.** 5 и 3. **22.290.** $\frac{42\sqrt{51}}{625}a^2$. **22.291.** $\frac{48}{5}$. **22.292.** 5; $\frac{5}{4}$. **22.293.** $\frac{3ab}{2a+b}$. **22.294.** 8 или 6. **22.295.** $\frac{49}{4}$. **22.296.** 21 : 10. **22.297.** $\frac{12}{25}$. **22.298.** 5. **22.299.** $S_{ABCD}=4\sqrt{3}$. **22.300.** 12,5.

22.301. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R=12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен $\frac{3}{4}$.

Решение.



Поскольку трапеция является вписанной, то она равнобочная. Пусть в трапеции $ABCD$ боковые стороны $AB=CD=a$, верхнее основание $BC=b$, нижнее основание $AD=c$. Так как трапеция описана около окружности, то $b+c=2a$. Опустим перпендикуляр CH на сторону AD. Тогда $CH=2r$, $AH=\frac{b+c}{2}$ (поскольку точки касания окружности делят основания пополам). Следовательно, для угла $\angle CAD=\varphi$, с одной стороны,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2r}{a}, \tag{1}$$

с другой стороны, по обобщенной теореме синусов для $\triangle CAD$

$$\frac{CD}{\sin\varphi}=2R \iff \sin\varphi=\frac{a}{2R}. \tag{2}$$

Перемножая равенства (1) и (2), получаем:
$\dfrac{2r}{a}\cdot\dfrac{a}{2R}=\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi \iff \dfrac{r}{12}=\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{1-\cos^2\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{1-\frac{9}{16}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{7}{12}$.
Откуда $r=7$.

Ответ. 7.

22.302. $\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{4}$ или $\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{4}$. **22.303.** 72.

22.304. $\dfrac{ab}{a+b}$. **22.305.** $32\sqrt{2}$. **22.306.** 16; $16\pm 8\sqrt{3}$.

22.307. $\dfrac{2(\sin\alpha+\sin\beta)}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$. **22.308.** 5; $\dfrac{975\sqrt{3}}{196}$. **22.319.** $\dfrac{13}{2}$.

22.310. $\dfrac{3}{2}$. **22.309.** 3 и 4; 4 и 3. **22.311.** 3. **22.312.** 30° или 150°.

22.313. 6 и 8. **22.314.** $\dfrac{1}{2}$. **22.315.** 22. **22.316.** $\dfrac{5}{\sqrt{2}\sin 15^\circ}$.

22.317. $AD=4$, $CD=6$. **22.318.** 7,2. **22.320.** 8. **22.321.** $2S$.

22.322. $S=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})<2\sqrt{15}$. **22.323.** $\sqrt{21}$.

22.324. $\arccos\Big(-\dfrac{3}{13}\Big)$. **22.325.** $\sqrt{\dfrac{2b^2+c^2-a^2}{2}}$, $2b^2+c^2\geq a^2$.

22.326. а) $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{7\pi}{12}$; $\dfrac{11\pi}{12}$; б) $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; α; $\dfrac{5\pi}{6}-\alpha$, где
$\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}$. **22.327.** $\arccos\dfrac{5}{8}+\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{4\sqrt{22}}{\sqrt{13}}$. **22.328.** 90°.

22.329. $4\sqrt{10}-2\sqrt{15}$. **22.330.** $\dfrac{47\sqrt{3}}{8}$. **22.331.** $\dfrac{3\sin\frac{5\pi}{24}}{\sin\frac{11\pi}{24}}$.

22.332. $\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-8a\sqrt{6}+100}}$. **22.333.** $\sqrt{7}$. **22.334.** 50°. **22.335.** 3.

22.336. $P=25$; $S=\dfrac{5}{4}\sqrt{143}$. **22.337.** $\dfrac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$. **22.338.** 7 : 8.

22.339. 319. **22.340.** $\dfrac{1820\sqrt{21}}{341}$. **22.341.** $17\dfrac{11}{17}$. **22.342.** $\pi\sqrt{5}$.

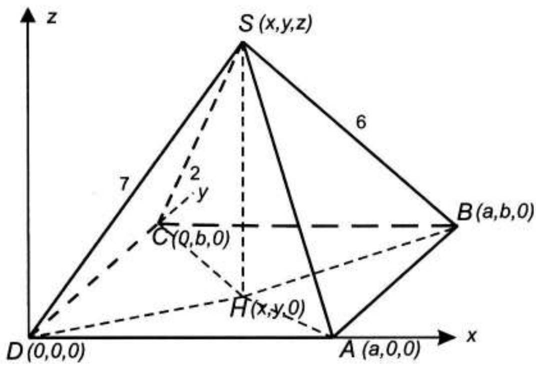
22.343. $\sqrt{3}$. **22.344.** Точка M должна быть серединой стороны BC. **22.345.** Отрезок BC в точке M должен делиться пополам.
22.347. В искомом параллелограмме сторона является средней линией, параллельной основанию.

22.348. Искомый отрезок касается в точке M окружности, проходящей через точку M и касающейся сторон данного угла.

22.350. $\dfrac{n^2+n+2}{2}$. **22.351.** 16 при $a=0$. **22.354.** 32.

22.355. В основании четырехугольной пирамиды с вершиной S находится прямоугольник $ABCD$. Известно, что $SA=7$, $SB=2$, $SC=6$. Найти SD.

Решение. Введем систему координат в трехмерном пространстве.



По условию имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} SA^2=(x-a)^2+y^2+z^2=7^2=49, \\ SB^2=(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=2^2=4, \\ SC^2=x^2+(y-b)^2+z^2=6^2=36. \end{cases}$$

Надо найти $SD^2=x^2+y^2+z^2$. Сложим первое и третье уравнение и из полученной суммы вычтем второе. Получим

$$SD^2=x^2+y^2+z^2=49+36-4=81=9^2 \Longrightarrow SD=9.$$

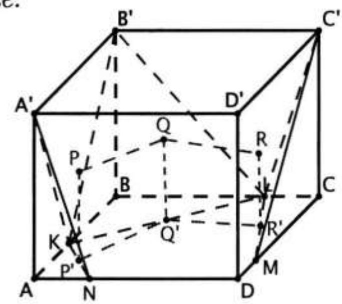
Ответ. 9.

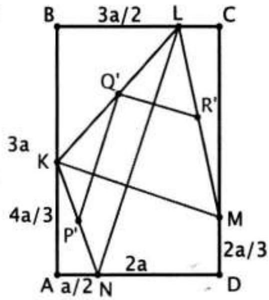
22.356. 1, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. **22.357.** $\left(-\dfrac{91}{17}; \dfrac{44}{17}\right)$. **22.358.** $\sqrt{10}$.
22.361. 1 : 3, считая от точки A. **22.363.** 4. **22.364.** $E(0,0)$.
22.365. $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ $\left(=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$. **22.366.** $S=25$.

23.3. $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **23.4.** $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. **23.6.** $2+\sqrt{7}$. **23.7.** $\dfrac{5}{14}$.
23.8. $\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$.

23.9. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK : KB = 4 : 5$, $BL : LC = 3 : 1$, $CM : MD = 7 : 2$, $DN : NA = 3 : 1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR = 1$, $AB : BC = 3 : 2$.

Решение.





Точка P равноудалена от точек A, A', следовательно, она лежит в плоскости, проходящей через середины боковых ребер параллелепипеда. Аналогично, точки Q, R лежат в этой же плоскости, параллельной плоскости основания. Пусть точки P', Q', R' — проекции точек PQR на плоскость ABC. Они будут центрами окружностей, описанных около треугольников AKN, BLK, CML соответственно. В прямоугольных треугольниках они находятся на серединах гипотенуз KN, LK, ML соответственно.

Пусть $AB = 3a$, тогда по условию $AD = 2a$, $AK = \frac{4}{9}AB = \frac{4}{3}a$, $AN = \frac{AD}{4} = \frac{a}{2}$, $BL = \frac{3}{4}BC = \frac{3a}{2}$, $MD = \frac{2}{9}CD = \frac{2a}{3}$. Отметим, что $Q'R'$, $P'Q'$ — средние линии треугольников KLM, LKN. Тогда по условию

$$2 = 2Q'R' = KM = \sqrt{\left(\frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a\right)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{\frac{4}{9} + 4} = \frac{2\sqrt{10}\,a}{3}.$$

Откуда $a = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

$$PQ = P'Q' = \frac{1}{2}NL = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3a}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + (3a)^2} = a\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ответ. $\frac{3}{2}$.

23.11. $\dfrac{\sqrt{122}}{2}$. **23.12.** $\dfrac{32}{3}\pi$. **23.13.** $\dfrac{b}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

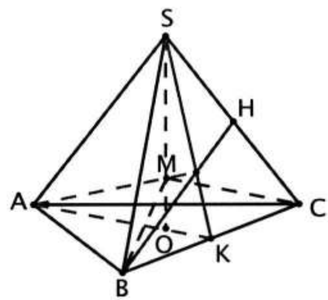
23.14. $\dfrac{a\sqrt{41}}{8}$. **23.15.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **23.16.** $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ $\left(\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}} < \arccos\dfrac{4}{5}\right)$. **23.17.** $\dfrac{r}{a}=\dfrac{1}{3+\sqrt{21}}$.

23.18. $\sqrt{2}R^2\cos\alpha\,(2\sin\alpha+\sqrt{2+2\sin^2\alpha})=54$. **23.19.** $\dfrac{2\sqrt{42}}{3}$.

23.20. $\dfrac{\sqrt{769}}{8}$. **23.21.** 5; $\dfrac{2}{3}\sqrt{551}$. **23.23.** $\dfrac{2\sqrt{59}}{15}$. **23.24.** 25.

23.25. В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех ребер одинаковы. Точка M в пространстве такова, что $MA = MB = MC = \sqrt{3}$ см и прямая AM пересекается с высотой треугольника SBC, опущенной из вершины B. Найти объем пирамиды $SABC$.

Решение.



Так как $MA = MB = MC$, то их проекции на плоскость ABC равны. Следовательно, точка M проектируется в центр правильного треугольника ABC — точку O. Значит, M лежит на высоте пирамиды SO. Плоскость SAO проходит через апофему SK, следовательно, она перпендикулярна ребру BC. Поэтому прямая AM, пересекающая высоту BH, проходит через центр правильного треугольника BSC. Следовательно, точка M является центром правильного тетраэдра $SABC$ и $SM = MA = MB = MC = \sqrt{3}$. Пирамида $SABC$ составлена из 4-х одинаковых пирамид с вершинами в точке M, основаниями которых являются грани пирамиды $SABC$. Поэтому объем пирамиды $MABC$ в 4 раза меньше объёма пирамиды $SABC$. А так как у этих пирамид общее основание

ABC, то $MO = \dfrac{1}{4}SO$, $SM = \dfrac{3}{4}SO$. Откуда

$$SO = \frac{4}{3}SM = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}},\ MO = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$AO = \sqrt{AM^2 - MO^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}},$$

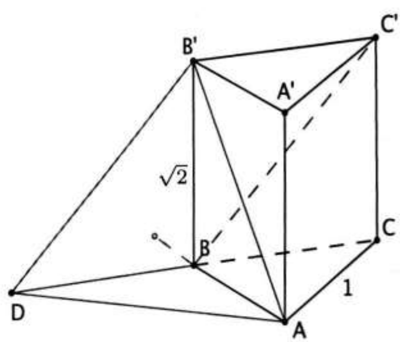
$$AB = \sqrt{3}AO = 2\sqrt{2},\ S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = 2\sqrt{3},$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot SO = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{8}{3}$ см^3.

23.26. $275\pi(\operatorname{tg}20^\circ \pm \operatorname{tg}10^\circ)$. **23.27.** 90°; $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **23.28.** 60°; $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **23.30.** $\dfrac{12}{5}$. **23.31.** 54. **23.32.** 33. **23.33.** $\dfrac{62}{81}V$. **23.34.** 105. **23.35.** $\sqrt{3}\sin\dfrac{10\pi}{13}\cos\dfrac{5\pi}{13}$. **23.36.** 24. **23.37.** $\dfrac{21\sqrt{15}}{10}$. **23.38.** $V_{\max} = \dfrac{144}{5}$. **23.39.** 10. **23.40.** $150\sqrt{3}$. **23.41.** 1.

23.42. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.
Решение.



Поскольку все пары скрещивающихся диагоналей боковых граней переходят друг в друга при помощи поворотов относительно оси симметрии призмы и симметрий относительно вертикальных плоскостей симметрии, не ограничивая общности можно взять диагонали AB' и $C'B$. Проведем из точки B' прямую, параллельную $C'B$ до пересечения с прямой BC в точке D. Тогда расстояние между скрещивающимися диагоналями равно расстоянию от точки B до плоскости ADB'.

Поскольку $B'D \| C'B$, то $DB = B'C' = 1$, $\angle DBA = 120°$. По теореме косинусов для $\triangle ABD$ $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos \angle ABD = 1^1 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3}$. Нетрудно видеть, что $AB' = C'B = B'D = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$. Считая дважды объем треугольной пирамиды $ADBB'$, найдем искомое расстояние h от точки B до плоскости ADB'.

$$3V = S_{ADB'}h = S_{ADB}BB' \Longrightarrow$$

$$h = \frac{S_{ADB}BB'}{S_{ADB'}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BD \sin 120° \cdot \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}AD^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

23.43. $\frac{13}{6}$. **23.44.** $\frac{2\sqrt[4]{2}}{9\sqrt[4]{3}}$. **23.45.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **23.46.** $90°$. **23.47.** 2 или 14. **23.48.** 1. **23.49.** 60. **23.50.** 4,8. **23.51.** 3. **23.52.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **23.53.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **23.54.** $\frac{1}{4}$. **23.55.** $\frac{\sqrt{7}}{6}$. **23.56.** $\frac{3}{4}$. **23.58.** $2\sqrt[4]{72}$. **23.59.** Да. **23.60.** $45°$. **23.61.** $3\sqrt{29}$ или $3\sqrt{61}$. **23.62.** $4\sqrt{\frac{3}{2}}$. **23.64.** Может. **23.65.** $DM : MD' = a : b$. **23.66.** 20,25. **23.67.** $\frac{5}{18}V$. **23.68.** $\frac{\pi}{2}$; $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. **23.69.** 9 : 95. **23.70.** $2\sqrt{10}$. **23.71.** $\frac{25}{72}$. **23.72.** $a(\sqrt{2}+\sqrt{5})$, $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **23.73.** 133 : 803. **23.74.** $5\sqrt{2}$.

Литература

[1] Амелькин В. В., Рабцевич В. Л. Задачи с параметрами. Минск: Изд-во "Асар", 2002.

[2] Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Пособие для учащихся 10-11 классов. М.: Изд-во "Наука", 1987.

[3] Вступительные экзамены по математике 2000 — 2002. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2003.

[4] Задачник по элементарной математике для программируемого обучения. Алгебра 1–3. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2001.

[5] Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. М, 1976.

[6] Кравцев С. В., Макаров Ю. Н., Максимов М. И., Нараленков М. И., Чирский В. Г., Методы решения задач по алгебре. М.: Изд-во "Экзамен", 2001.

[7] Математика. Задачи вступительных экзаменов с ответами и решениями. (1993 — 1997 гг.) М.: Издат. отдел УНЦ ДО МГУ, 1998.

[8] Моденов В. П. Пособие по математике. Часть I. М.: Изд-во МГУ, 1977.

[9] Натяганов В. Л., Лужина Л. М. Методы решения задач с параметрами. М.: Изд-во МГУ, 2003.

[10] Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства. Пособие для учащихся 10-11 классов. М.: Изд-во "Экзамен", 1998.

[11] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Часть 1. М.: Изд-во "Наука", 1991.

[12] Родионов Е. М. Решение задач с параметрами. Пособие для поступающих в ВУЗы. М.: Изд-во МП "Русь – 90", 1995.

[13] Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебное пособие. /Под редакцией Сканави М. И., М.: Изд-во "Высшая школа", 1980.

[14] Садовничий Ю. В. Алгебра. Конкурсные задачи с решениями. Москва.: Изд-во "ЭКЗАМЕН", 2007.

[15] ЕГЭ 2011. Математика. Под редакцией Семенова А.Л., Ященко И.В. М.: Изд-во АСТ. Астрель, 2010.

[16] Сергеев И. Н. ЕГЭ. Математика. Задания типа С. Москва.: Изд-во "ЭКЗАМЕН", 2009.

[17] Сильвестров В. В. Обобщенный метод интервалов. Чебоксары.: Изд-во Чувашского университета, 1998.

[18] Тиняков Г. А., Тиняков И. Г. Задачи с параметрами. М., 1996.

[19] Ципкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. М.: Изд-во"Наука", 1989.

[20] Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену. М.: Изд-во Рольф: Айрис пресс, 1999.

[21] Якушева Е. В., Попов А. В., Якушев А. Г. Математика. Все для экзамена. М.: Изд-во "Экономика", 2000.

Сведения об авторах

Галеев Эльфат Михайлович закончил математический класс средней школы с золотой медалью. Поступил на механико-математический факультет МГУ в 1969 г. После окончания учился в аспирантуре МГУ. Там же в 1977 г. защитил кандидатскую, а в 1993 докторскую диссертации.

В настоящее время — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Специалист в области теории аппроксимации, функционального анализа, теории экстремальных задач и методики преподавания элементарной математики. Автор более 200 научных работ, в том числе ряда монографий по теории экстремальных задач, теории аппроксимации, математическому анализу и учебно-методических пособий по подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ. Неоднократно участвовал в составлении вариантов и приеме вступительных экзаменов на различные факультеты МГУ.

Галеева Альфира Эльфатовна — специалист в области методики преподавания элементарной математики. Обучалась на механико-математическом факультете МГУ, являлась соросовским стипендиатом. Много лет преподает математику на различных курсах по подготовке к вступительным экзаменам в МГУ и подготовке к ЕГЭ. Принимает участие в проведении олимпиад для школьников и абитуриентов. Является автором учебно-методических пособий по подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ.

Замечания и предложения по улучшению содержания книги или вопросы можно направлять по

e-mail: galeevem@mail.ru

e-mail: alf.ir.a@mail.ru

Получить информацию о дополнительной подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ можно как по приведенным e-mail, так и по тел. 8 (925) 729-44-28.

Учебное издание

Галеев Эльфат Михайлович, Галеева Альфира Эльфатовна

МАТЕМАТИКА

Практический курс по подготовке к дополнительному вступительному испытанию в МГУ

Учебно-методическое пособие

Подготовка оригинал-макета: *Э. М. Галеев, А. Э. Галеева*
Оформление обложки: *Ю. Н. Симоненко*

Подписано в печать 24.12.2018. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Офсетная печать. Усл. печ. л. 28,5. Тираж 1000 экз. Изд. № 11140. Заказ № Г309/18128

Издательство Московского университета

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
(ул. Академика Хохлова, 11).
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com
http://msupress.com

Отдел реализации.
Тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Амирит».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 88. Тел.: 8-800-700-86-33 | (845-2) 24-86-33.
E-mail: zakaz@amirit.ru Сайт: amirit.ru

Галеев Эльфат Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Специалист в области теории аппроксимации, функционального анализа, теории экстремальных задач и методики преподавания элементарной математики. Автор более 200 научных работ, в том числе учебно-методических пособий по подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ.

Галеева Альфира Эльфатовна — специалист в области методики преподавания элементарной математики. Много лет преподает математику на различных курсах по подготовке к вступительным экзаменам в МГУ и подготовке к ЕГЭ. Принимает участие в проведении олимпиад для школьников и абитуриентов. Является автором учебно-методических пособий по подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ.

Издательство Московского университета

МГУ — ШКОЛЕ

ISBN 978-5-19-011326-6

9 785190 113266