И. В. Раскина
А. В. Шаповалов

КОМБИНАТОРИКА

ШКОЛЬНЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
КРУЖКИ

Школьные математические кружки
Выпуск 20

И. В. Раскина, А. В. Шаповалов

Комбинаторика

Издание второе, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО

УДК 51(07)
ББК 22.1
Р24

Раскина И. В., Шаповалов А. В.

Р24 Комбинаторика. — М.: МЦНМО, 2024. — 2-е изд., стереотип. — 136 с. — (Школьные математические кружки; Вып. 20).

ISBN 978-5-4439-4482-1

Двадцатая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена задачам классической комбинаторики. В них обычно требуется найти число элементов множества, причём порядок их перечисления не очевиден. Основное внимание уделяется общим принципам организации подсчёта и построению адекватных математических моделей. Этот подход позволяет не только запомнить базовые формулы и понятия комбинаторики и научиться их применять, но и развить математическую интуицию и логику.

Книжка содержит восемь занятий математического кружка и обширный набор дополнительных задач. Все занятия доступны ученикам 5—6 классов. Для удобства использования заключительная часть книжки, как всегда, сделана в виде раздаточных материалов. Возможность самостоятельного обучения обеспечена дублированием ответов в отдельном разделе. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям математики.

ББК 22.1

Иллюстрация и оформление обложки
художник Евгений Чижевский

Учебно-методическое издание

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ
от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком 6+

Подписано в печать 24.07.2023 г. Формат 60 × 90 1/16.
Печать офсетная. Печ. л. 8,5. Тираж 2000 экз. Заказ № 1753.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“». г. Москва,
ул. Руставели, д. 14, стр. 6. Тел./факс +7(495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

ISBN 978-5-4439-4482-1

Предисловие

> — Пишете? — вяло спросил Ухудшанский.
> — Специально для вас, — ответил великий комбинатор.
>
> *И. Ильф, Е. Петров «Золотой телёнок»*

В последние годы всё больше школьников начинают интересоваться математикой довольно рано. Чем это хорошо и чем плохо, обсуждать здесь не будем. Признаем свершившийся (точнее, свершающийся на наших глазах) факт: пик обучения «олимпиадной» математике сдвигается с уроков в старших специализированных классах на разные формы работы, от кружков и летних школ до тех же спецклассов, но уже для пяти-, шести- и семиклассников. В том возрасте, в котором многие годы считалось достаточным заинтересовать учеников и подготовить их к будущему «настоящему обучению», теперь требуется учить по-настоящему.

Не все разделы математики одинаково эффективно переносятся на несколько лет раньше. Возрастные особенности никуда не делись. Пятиклассникам по-прежнему проще считать, чем доказывать. Они норовят перебирать случаи, а не рассуждать универсально. Но ведь именно с этого — перебора вариантов и ответа на любимый детьми вопрос «Сколько?» — и начинается комбинаторика! Кроме того, в ней не слишком мало и не слишком много видов стандартных задач-одноходовок, решать которые может натренироваться почти любой ученик. Поэтому при грамотном преподавании комбинаторика усваивается в 5—6 классах ничуть не хуже традиционной школьной программы. Этим она выгодно отличается от большинства традиционных олимпиадных тем, связанных со строгими доказательствами.

Цель данной книжки — адаптировать «краткий курс комбинаторики» для кружка в 5—6 классах. Раз уж появилось слово «цель», самое время задуматься о целях изучения комбинаторики в этом возрасте.

Цель, лежащая на поверхности: изучить заранее комбинаторную часть курса теории вероятностей и статистики, на который в 7—9 классах вечно не хватает времени. Но это лучше делать со всем классом, а не на кружке. Предлагаемый нами путь к этой цели тоже приведёт, но далеко не самым экономичным путём.

Цель поглубже: научить организации вычислений. Посчитать число элементов множества, где элементы не перечислены явно, а описаны свойствами, — часто встречающаяся задача. Для её решения умение логично мыслить и анализировать важнее знания формул. Тем более важно начать эти навыки прививать с юных лет.

А что совсем в глубине? То же, что и всегда: развитие математического мышления. Если конкретнее, умение строить математические модели. Этим модным словосочетанием методисты любят называть составление уравнения по условию текстовой задачи. Ну хорошо, иногда системы или даже неравенства. Но арсенал базовых математических моделей, доступных школьнику, гораздо разнообразнее: графы, таблицы, последовательности букв или цифр (то есть слова или многозначные числа) и т. д. Их можно использовать не только при решении трудных олимпиадных задач, доступных немногим, но и для стандартизации типовых задач. И полезно учиться строить модели посложнее, комбинируя базовые.

Деятельность многих выпускников, получивших хорошее математическое образование, сегодня связана с информатикой. Профессия аналитика становится массовой. Завтра массовые профессии наших лучших учеников будет называться подругому. Но, скорее всего, на рабочем месте они по-прежнему будут решать прикладные задачи математическими методами. С чего начинается решение новой задачи? С вопросов: «Не решал ли я или кто-то ещё подобную задачу? Как решилась та задача? Как модифицировать готовое решение и применить его в новых условиях?»

Хотите дать своим ученикам конкурентное преимущество в будущем? Учите их переводить внешне разные задачи на удобный язык и видеть, что задача на самом деле одна и та же. Или, без всякого перевода на какой-то особый язык, просто узнавать, что задача похожа на вчерашнюю и решать её можно точно так же. Комбинаторика — очень удобная область для развития таких навыков. В этом и состоит стратегическая цель, а вовсе не в разучивании конкретных типов задач, которые мало где встретятся, кроме контрольной работы или олимпиады.

Сведение задачи к решённой ранее или вообще к стандартной модели в комбинаторике часто называют *кодированием*. Идея кодирования и связанного с ним родства задач красной нитью проходит через всю книжку. Наиболее подробно она обсуждается на третьем, пятом и шестом занятиях. Но подготовка к её восприятию начинается с первого занятия (придание точкам буквенных имён для удобства записи решения), продолжается на втором (неоднократно решается одна и та же задача подсчёта пар в разных формулировках) и активно повторяется на восьмом занятии. Постепенно вводятся модели, к которым удобно сводить комбинаторные задачи:

- клетки таблицы (с первого занятия);
- числа как строки цифр (с первого занятия);
- строки символов (с третьего занятия);
- слова как строки букв, включая бессмысленные (с пятого занятия).

В предварительном комментарии к пятому занятию подробно описаны методы установления родства задач, а на шестом предлагается закрепить их в игровой форме.

От стратегической цели вернёмся к тактической: перенести изучение основ комбинаторики в 5—6 классы. Её достижению мешают мифы, которые хотелось бы развеять.

1. На первом этапе надо объяснить, что такое перестановки, размещения и сочетания с повторениями и без них, натренировать решать задачи этих шести типов и не путать их. Это неправда. Многие победители олимпиад и даже профессиональные математики «знают по имени» только два из шести: перестановки и сочетания (без повторений), которые широко используются в математике. Это не мешает им успешно решать задачи.

2. Решение комбинаторных задач требует знания формул и алгебраической культуры. И это неправда. Подсчёт стоимости трёх двадцатирублёвых шоколадок не требует ведь знания формулы про цену, количество и стоимость в общем виде?

3. Комбинаторные задачи нестандартны и требуют сообразительности. Это тоже неправда. Нестандартной может быть

или не быть задача из любой области. Как раз в комбинаторике много стандартных задач, решаемых по одинаковым схемам.

4. Раз основных типов задач немного, можно обучить комбинаторике за шесть занятий, по одному на каждый тип задач. А лучше за 4, по одному на правила умножения, сложения, вычитания и деления. Ну-ну... Почему бы заодно не попробовать изучить текстовые задачи за три урока, по одному на задачи на движение, работу и проценты? А когда не получится, перенести изучение текстовых задач в старшие классы.

Последний вопрос риторический. И дело не только в разнообразии текстовых задач и сложности некоторых из них. Вообще (почти) никого (почти) ничему нельзя научить за одно занятие. Рассказать можно, а научить нет. Да и за два занятия тоже почти никого почти ничему. Где взять время на несколько занятий по каждому из четырёх правил?

Ответ известен и реализуется на хорошем школьном уроке. Позавчерашнее повторили, вчерашнее углубили, сегодняшнее узнали и слегка потренировали, на завтрашнее намекнули. В таком стиле мы и старались составлять занятия для этой книжки. Вместо набора независимых ярких сюжетов мы предлагаем одновременное развитие многих линий. Каждое занятие имеет название, подчёркивающее его основное содержание. Но чем важнее идея, тем шире она распространяется и на другие занятия. Поясним это на примере *дерева перебора*, которое мы считаем вторым по важности после кодирования методом решения комбинаторных задач. Наиболее подробный разговор о деревьях ведётся на пятом занятии, что ясно из его названия. Но эпизодически деревья используются начиная с самого первого занятия (вначале как иллюстрация к уже решённой задаче), а на третьем — довольно интенсивно. На шестом занятии подчёркивается роль деревьев в установлении родства задач-одноходовок, а на седьмом «составные» деревья используются в задачах, комбинирующих сложение и умножение.

Наряду с общими методами комбинаторики (к уже названным кодированию и деревьям добавим счёт по группам, правила умножения, сложения, вычитания и деления) ученики постепенно знакомятся с джентльменским набором типовых задач:

- подсчёт неупорядоченных пар (занятие 2),
- подсчёт строк символов (размещений) с повторениями (занятие 3) и без (занятие 5),
- подсчёт всех подмножеств данного множества (занятие 3),
- подсчёт перестановок (занятие 5),
- подсчёт сочетаний (занятие 8).

Каждый тип задач неоднократно повторяется на последующих занятиях. Перестановки с повторениями и сочетания с повторениями не вошли в этот выпуск.

Специальное внимание уделяется развитию общекультурных навыков:

- использование «маленьких случаев» для угадывания ответа и для самоконтроля,
- решение задачи двумя способами для самоконтроля и для доказательства формул,
- использование геометрических иллюстраций (в том числе графов, таблиц, кругов Эйлера).

Все перечисленные методы помогают не только найти количество элементов некоторого множества, но и осознать структуру этого множества. Вопрос «Сколько?» провоцирует учителя поскорее вооружить ученика формулами. Но формулы вторичны, а первично умение перечислять все элементы множества. В этой книжке с явного перечисления «маленьких» множеств начинается знакомство с каждым типом задач. При переходе к «большим» множествам перечисление не теряет актуальности. Вопрос «Перечислите все...» трансформируется в описание, как можно было бы перечислить все элементы множества (например, разбив случаи на группы или частично изобразив дерево перебора). В некоторых задачах требуется найти элемент множества, находящийся при перечислении на определённом месте.

Сложную структуру (каждая тема изучается на нескольких занятиях, каждое занятие преследует несколько целей) трудно транслировать без потерь. Цели занятия и роли конкретных задач поясняются в комментариях, расположенных в начале каждого занятия и после некоторых задач. Вместо лаконичных решений ко многим задачам предлагаются подробные обсуждения, включающие также возможные пути к решению, связи с другими задачами, анализ полученного ответа и т. п. К некоторым задачам предложено более одного решения. Стоит ли тратить время на второе решение? Стоит, если это способ показать или закрепить полезный метод. Здесь важен баланс. Какие-то задачи разбирает учитель, обращая внимание на все важные с его точки зрения детали. Другие решают ученики так, как им удобнее, лишь бы правильно. Какие-то из них учитель в конце занятия разберёт, какие-то нет. Разделение задач на задачи для разбора и для самостоятельного решения условно и зависит от особенностей конкретного кружка. Организовать индивидуальную работу и повторение поможет список дополнительных задач, часть из них новые, часть являются переформулировками известных.

Школьникам, работающим с книгой самостоятельно, мы предлагаем сначала познакомиться с условиями задач очередного занятия по раздаточным материалам в конце книжки и порешать их, затем проверить себя по ответам, вынесенным в отдельный раздел, и подумать ещё, если ответ не сходится. И лишь после этого прочитать полный текст занятия.

В 1969 году была впервые опубликована замечательная книга Н. Я. Виленкина и др. «Комбинаторика», адресованная старшеклассникам и первокурсникам. Похоже, все русскоязычные бумажные и электронные пособия по комбинаторике вышли из неё, как из гоголевской шинели. Через 25 лет адаптированный для учеников 6—9 классов курс комбинаторики был изложен в изданной в 1994 году книге С. А. Генкина и др. «Ленинградские математические кружки». С тех пор прошло ещё 25 лет. Авторы постарались осмыслить и частично изложить накопившийся за это время опыт работы летних математических школ (в первую очередь Кировской) и кружков. Мы надеемся, что предложенные занятия помогут освоить основы комбинаторики любознательным ученикам 5—6 классов массовой школы. Вопросы следующего уровня вынесены в отдельный выпуск. К ним, в частности, относятся связь дерева перебора с алфавитным порядком перечисления, правило деления, соответствие, треугольник Паскаля, метод шаров и перегородок.

Занятие 1
Перечисление. Таблицы. Умножение

— Ой! Теперь он и тебя сосчитал.
— Ну, он за это поплатится!

Из мультфильма
«Козлёнок, который считал до десяти»

Как узнать, сколько (детей на прогулке, монет в сундуке, отрезков на чертеже, чисел с нужными свойствами — нужное подчеркнуть)? Надёжнее всего перечислить, приговаривая «Первый, второй...» А как не запутаться, считали этого ребёнка или ещё нет? А вот пусть не бегают, а построятся по порядку. Детей многие умеют строить, но разве можно построить пересекающиеся отрезки? Можно, если строить не сами отрезки, а их имена (да и детей иногда удобнее посчитать по списку). А как посчитать быстро и точно, если детей много? Пусть построятся хотя бы парами или даже в колонну по 4. Видишь 9 таких четвёрок — значит, детей 36. Итак:

1) ответ на вопрос «Сколько?» связан с перечислением;

2) вместо самих объектов бывает удобнее считать их имена (задача 1.2);

3) удобнее считать то, что разделено на группы;

4) разделение на группы можно оформить в виде таблицы (каждая группа — строка или столбец), тогда задача сведётся к подсчёту заполненных клеток таблицы;

5) если группы равные, то число клеток таблицы находят умножением;

6) две задачи могут формулироваться совсем по-разному, но если им соответствует одинаковые таблицы (и вообще, одинаковые «картинки»), то и решения будут аналогичными, и ответы совпадут (задачи 1.2 и 1.3, а также 1.5 и 1.6).

Замечания по отдельным задачам

• В задаче 1.1 достаточно обсудить один вид таблиц. Но если кто-то из детей предложит другой вид, это тоже интересно. В задаче 1.2 рекомендуем рассмотреть оба порядка перечисления. Обычно вопрос «Кто-нибудь считал по-другому?» пользуется успехом. В крайнем случае второй способ может предложить и сам учитель. А вот в задаче 1.3 альтернативные способы подсчёта лучше замять. Аккуратный ученик может за 5 минут перечислить все нужные числа в порядке возрастания, пользы от этого никакой.

• Пятиклассники могут быть незнакомы с понятием простого числа (см. задачу 1.3). Это несложно пояснить на примерах и вместе с детьми выписать четыре нужных числа.

• Замечание к задаче 1.4 советуем не пропустить. Оно подводит к пониманию того, что разделение на группы удобно описывается таблицей, но если каждая группа разделяется на более мелкие, а те — на ещё более мелкие и так происходит несколько раз, то удобнее дерево. Переход от таблиц к деревьям отрабатывается на третьем и пятом занятиях.

Задача 1.1. Пять учеников Хогвартса изучили семь чудес и успешно сдали экзамен трём волшебникам. На экзамене каждый ученик совершил по одному чуду по указанию каждого из волшебников и получил за это плюсик.

а) Сколько всего плюсиков поставлено на экзамене?

б) Приведите пример таблицы, из которой видно, кто кому какое чудо продемонстрировал.

Обсуждение. а) Каждый из пяти учеников получил по три плюсика. А всего плюсиков $5 \cdot 3 = 15$.

б) Назовём волшебников А, Б и В, а чудеса занумеруем числами от 1 до 7. Тогда таблица могла выглядеть, например, так.

	А	Б	В
Первый ученик	1	3	7
Второй ученик	2	6	5
Третий ученик	5	4	2
Четвёртый ученик	7	4	3
Пятый ученик	5	2	3

Заполняя её, мы считали, что одного и того же ученика разные волшебники не просили совершить одно и то же чудо. Но если бы и просили, в таблице всё равно было бы 15 заполненных клеток.

Таблицу с той же самой информацией можно организовать и по-другому. В каждой строке здесь тоже по три заполненные клетки.

	1	2	3	4	5	6	7
Первый ученик	А		Б				В
Второй ученик		А			В	Б	
Третий ученик		В		Б	А		
Четвёртый ученик			В	Б			А
Пятый ученик		Б	В		А		

Задача 1.2. На прямой отметили 5 точек. Сколько отрезков образовалось на чертеже? (Считаются и отрезки, у которых, кроме концов, есть отмеченные точки внутри.)

Обсуждение. Самый простой и надёжный способ подсчитать что-то — *перечисление*. Для этого удобно ввести *обозначения* (см. рис. 1). Чтобы не запутаться, перечислять будем *в определённом порядке*. В каком именно — дело вкуса. Например, можно начать с «одинарных отрезков», их четыре: AB, BC, CD и DE. Запишем их в первый столбик. Во второй запишем «двойные» отрезки, в третий — «тройные», а четвёртый столбик будет состоять всего из одного отрезка AE (см. рис. 2). Всего отрезков $4+3+2+1=10$.

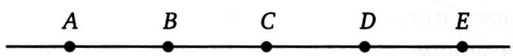


Рис. 1

AB	AC	AD	AE
BC	BD	BE	
CD	CE		
DE			

Рис. 2

AB	BC	CD	DE
AC	BD	CE	
AD	BE		
AE			

Рис. 3

Можно было перечислять точки и в алфавитном порядке: в первом столбике все на букву A, во втором — на букву B, в третьем — на C, а в четвёртом будет единственный отрезок DE (см. рис. 3).

Приглядевшись, замечаем, что рисунки 2 и 3 отличаются лишь тем, что столбики превратились в строчки и наоборот.

Задача 1.3. Выпишите без повторов все числа, которые можно представить как произведение двух однозначных простых чисел (возможно, одинаковых). Сколько их всего?

Обсуждение. В предыдущей задаче каждый отрезок описывался двумя точками — концами отрезка. А здесь каждое число будем описывать парой множителей. Составим таблицу, записывая в клетки произведения соответствующих множителей (см. таблицу). Нижняя половина не заполнена, так как из-за переместительного закона умножения числа получатся те же самые. Выпишем все числа слева направо и сверху вниз: 4, 6, 10, 14, 9, 15, 21, 25, 35, 49. Заметим, что это не совсем порядок возрастания. Всего чисел $4+3+2+1=10$. Совпадение ответов с предыдущей задачей не случайно, оно связано со сходством таблиц.

	2	3	5	7
2	4	6	10	14
3		9	15	21
5			25	35
7				49

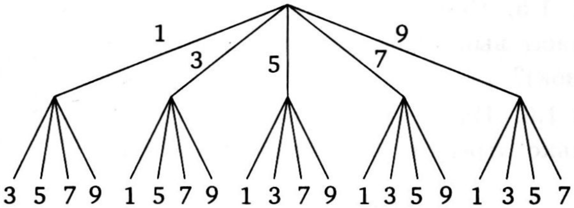
Задача 1.4. а) Мальвина велела Буратино выписать все двузначные числа, у которых обе цифры нечётны и не повторяются. Если он пропустит хотя бы одно, то Мальвине придётся посадить его в чулан. Посоветуйте Буратино, как организовать работу так, чтобы не попасть в чулан. Сколько всего чисел ему придётся выписать?

б) Тем временем Мальвина выписала все трёхзначные числа, у которых все цифры нечётны и не повторяются. Сколько времени она потратила, записывая по одной *цифре* в секунду?

Обсуждение. а) Буратино ничего не забудет, если сначала составит таблицу, учитывая, что и в разряде десятков, и в разряде единиц могут находиться цифры 1, 3, 5, 7, 9. Видно, что в таблице $2(4+3+2+1)=20$ чисел.

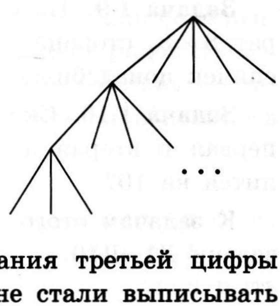
	1	3	5	7	9
1		13	15	17	19
3	31		35	37	39
5	51	53		57	59
7	71	73	75		79
9	91	93	95	97	

Количество чисел можно было подсчитать и без непосредственного выписывания их всех. На первом месте может быть любая из пяти цифр, поэтому строк в таблице пять. На втором — любая из четырёх оставшихся, то есть в каждой строке по четыре числа. А всего чисел $5 \cdot 4 = 20$. Разделение на пять групп, в каждой из которых по четыре числа, можно схематически проиллюстрировать: см рисунок. Такая схема называется *деревом*, хотя похожа скорее на куст, растущий почему-то вниз.



б) Как применить идею таблицы к трёхзначным числам? Нарисовать вместо прямоугольника параллелепипед? Сложновато. Если ограничиться двумерной таблицей, то придётся удлинить строку, записав в неё уже не 5 цифр, а 20 двузначных чисел, которые написал Буратино. Каждое можно продолжить тремя способами. Например, 13 можно продолжить до 135, 137 и 139. Поэтому Мальвина написала в 3 раза больше чисел, чем Буратино: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Для этого ей пришлось написать 180 цифр, потратив 180 секунд, или 3 минуты.

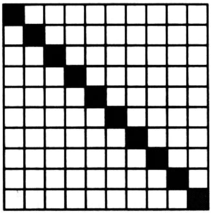
Если рассуждать не с помощью таблицы, а с помощью дерева, то придётся пририсовать третий этаж. На первом числа разбиваются на 5 групп в зависимости от первой цифры. На втором каждая из пяти групп разбивается на 4 группки поменьше в зависимости от второй цифры. В каждой маленькой группке три числа, так как для написания третьей цифры есть три возможности. Так же как мы не стали выписывать таблицу с 20 столбцами, дерево тоже незачем рисовать целиком. Достаточно, например, как на рисунке.



Замечание. С двузначными и трёхзначными числами мы разобрались. Интересно, а сколько есть четырёхзначных чисел, составленных из неповторяющихся нечётных цифр? Пририсуем к дереву ещё один этаж, на котором от каждой веточки отходят по две более мелких. Получим $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ чисел.

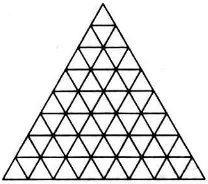
А сколько таких пятизначных чисел? Этаж-то к дереву пририсовать можно, но от добавления множителя 1 произведение не изменится, пятизначных чисел тоже 120. Подумайте, сколько шестизначных и ещё более длинных чисел.

Задачи для самостоятельного решения



Задача 1.5. Сколько клеток в квадрате 10×10 лежат выше закрашенной диагонали (см. рисунок)?

Задача 1.6. На прямой отметили 10 точек. Сколько отрезков образовалось на чертеже?



Задача 1.7. На сколько меньших треугольничков со стороной 1 разбит треугольник со стороной 8 на рисунке?

Задача 1.8. В деревне Простоквашино 16 мальчиков и 14 девочек. На 1 сентября каждый мальчик подарил по цветку каждой девочке и ещё 1 цветок Марье Ивановне, а потом девочки тоже подарили все полученные цветы Марье Ивановне. Сколько килограммов цветов принесла своей козе Марья Ивановна, если каждый цветок весил по 50 г?

Задача 1.9. Из спичек сложен разбитый на клетки квадрат 8×8, сторона каждой клетки — 1 спичка. Сколько всего спичек понадобилось?

Задача 1.10. Сколько всего трёхзначных чисел, у которых первая и вторая цифры разной чётности, а сумма цифр делится на 10?

К задачам этого занятия можно добавить дополнительные задачи Д1—Д10.

Решения

1.5. Ответ. 45 клеток.

Решение. В первой строке 9 клеток, во второй 8 и т. д. Всего $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ клеток. Для подсчёта таких сумм удобно объединять числа в пары от краёв к середине: $(9+1)+(8+2)+(7+3)+(6+4)+5=45$.

1.6. Ответ. 45 отрезков.

Решение. Обозначим, как и в задаче 1.2, отмеченные точки буквами A, B, C, ... Отрезки можно выписать в столбики как по размеру, так и по алфавиту. Важно не перепутать, сколько отрезков в первом столбике (или строке). Когда точек было 5, отрезков в первом столбике было 4. А если точек 10, то в первом столбике 9 отрезков по той же причине. А всего отрезков $9+8+\ldots+2+1=45$.

Комментарий. У задач 1.5 и 1.6 условия на первый взгляд разные, но ответы одинаковые. Почему совпали ответы? Потому что совпали вычисления: $9+8+7+6+5+4+3+2+1$. А почему совпали вычисления? Потому что совпали картинки: треугольная часть таблицы со строками в $9, 8, \ldots, 1$ клеток.

1.7. Ответ. 64 треугольника.

Решение. В верхней строке 1 треугольник, во второй 3 треугольника, в третьей 5. В последней, восьмой строке $8+7=$ $=15$ треугольников. Сложим 8 слагаемых: $1+3+\ldots+15$. Они разбиваются на 4 пары с одинаковой суммой $1+15=16$. Всего треугольников $4\cdot 16=64$.

1.8. Ответ. 12 кг.

Решение. Каждый мальчик принёс 15 цветов. Все мальчики принесли $16\cdot 15=240$ цветов. Масса всех цветов равна $50\cdot 240=12\,000$ г $=12$ кг.

1.9. Ответ. 144 спички.

Решение. Разделим спички на две группы: лежащие вертикально и лежащие горизонтально. Вертикальных рядов $8+1=$ $=9$. В каждом ряду по 8 спичек. Всего вертикальных спичек 72. Горизонтальных столько же. Всего понадобилось $2\cdot 8\cdot 9=144$ спички.

1.10. Ответ. 45 чисел.

Решение. Разобьём все числа на группы в зависимости от первой цифры. Таких групп 9, так как первая цифра не может быть нулём. У второй цифры чётность должна быть другой, поэтому для каждой первой цифры есть 5 подходящих вторых цифр (0, 2, 4, 6, 8 при нечётной первой цифре и 1, 3, 5, 7, 9 при чётной). Сумма двух первых цифр — это число от $1+0=1$ до $9+8=17$. Если сумма получилась от 1 до 10, то, прибавляя однозначное число, её единственным образом можно дополнить до 10 и нельзя дополнить до других чисел, делящихся на 10. А если от 11 до 17, то её единственным образом можно дополнить до 20 и нельзя дополнить до других чисел, делящихся на 10. Поэтому каждую пару первых двух цифр разной чётности можно единственным образом дополнить до числа, соответствующего условию задачи. А таких пар $9 \cdot 5 = 45$.

Комментарий. Мы выяснили, что каждое искомое число *однозначно задаётся* первыми двумя цифрами. Это значит, что можно было считать только пары первых двух цифр.

Занятие 2
Треугольные числа

В стране тысячи городов
всех дорог не счесть.

Китайская пословица

Это занятие построено в форме вариаций на тему подсчёта неупорядоченных пар элементов множества. К такому подсчёту сводятся задачи 2.2, 2.5*б*, 2.7. После решения эти задачи полезно сравнить и убедиться, что слова в условиях разные, но картинки (графы) им соответствуют аналогичные, поэтому и решения по сути одинаковы.

Ответами на вопросы о количестве пар служат так называемые треугольные числа. Эта последовательность часто встречается, её полезно узнавать. Задача 2.1 знакомит с её рекуррентным определением, задача 2.3 — с явной (не рекуррентной) формулой, задача 2.8 — с одним из её ярких свойств.

Задача 2.5 обращает внимание на отличие упорядоченных пар от неупорядоченных.

Деление на два того, что посчитали дважды, встречается не только при подсчёте всех неупорядоченных пар (см. задачу 2.6).

Среди несложных задач прячутся глубокие общие идеи доказательства. Оказывается, алгебраические формулы можно доказывать комбинаторным (см. замечание 2 к задаче 2.3) и геометрическим (см. задачу 2.8) методами! А верный контрпример перевешивает хитроумные, но неверные рассуждения (см. задачу 2.10). Кстати, «язык конфет», применённый в этих неверных рассуждениях, сам по себе удобен и помогает просто объяснить сложные вещи (см. задачи Д20—Д22).

С треугольными числами связан интересный факт. Он не оформлен в задачу, но может быть творчески использован учителем. Факт такой: любое натуральное число представимо в виде суммы не более трёх треугольных чисел. Это утверждение впервые сформулировано в 1638 году Пьером Ферма в письме к Мерсенну, а доказано лишь в 1796 году Карлом Фридрихом Гауссом. Можно на кружке общими усилиями проверить его, например, для первых 50 или даже 100 чисел, поручив каждому ученику несколько чисел или предложив это группе ребят в качестве домашней проектной работы. После проверки логично обсудить, что эксперимент имеет смысл, поскольку позволяет высказать правдоподобную гипотезу (что и сделал Ферма), но не является доказательством.

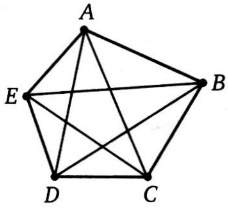
Задача 2.1. Бильярдные шары складывают в виде треугольника: в первом ряду — 1 шар, во втором — 2, в третьем — 3 и т. д. (см. рисунок).

Заполните таблицу, показывающую, сколько шаров потребуется для этого в зависимости от количества рядов.

Рядов	1	2	3	...	10
Шаров	1	3	6	...	

Обсуждение. В задаче требуется найти суммы первых нескольких натуральных чисел: 1, $1+2$, $1+2+3$ и т. д. Первые десять сумм равны 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55. Это первые десять так называемых *треугольных чисел*.

Задача 2.2. В королевстве: а) 5 городов; б) 10 городов. Король повелел соединить каждые два города отдельной дорогой. Сколько дорог придётся построить?



Обсуждение. а) Нарисуем 5 городов — точки A, B, C, D и E — и соединим их отрезками-дорогами. Пересчитаем отрезки: их десять (см. рисунок). Первая задача решена. Но для 10 городов считать по чертежу неудобно, можно запутаться. Поэтому имеет смысл разобраться с пятью городами поподробнее. Сначала построим все необходимые дороги из города A. Их четыре. Из города B дорога в A уже построена, осталось построить ещё три дороги. Из C с учётом уже построенных дорог осталось построить всего две дороги: CD и CE. Из D всего одну: DE. А город E и так соединён со всеми остальными, строить больше ничего не надо. Итак, построены $4+3+2+1=10$ дорог.

б) Рассуждая аналогично, делаем вывод, что количество дорог, соединяющих 10 городов, — это девятое треугольное число, то есть $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$.

Замечание 1. Число дорог равно числу способов выбрать пару городов.

Замечание 2. Задачу можно было решить и по-другому. Если городов пять, то из каждого должно выходить по четыре дороги. А всего дорог $5 \cdot 4 = 20$. Рассуждения отличные, а ответ почему-то другой. Где ошибка? Подумайте, если мэр каждого города попросит у короля денег на строительство четырёх дорог, разве король даст? Дорога-то AB одна, и давать деньги на её строительство и в город A, и в город B умный король не станет. А если мэр попросит на строительство четырёх *половинок дорог*? Тогда король даст. Будет построено 20 половинок дорог, или 10 целых. Вот и ответ сошёлся.

Можно сказать и по-другому: группируя по городам, мы посчитали каждую дорогу дважды. Значит, результат надо поделить на два.

В пункте б) из каждого из десяти городов выходит по девять дорог. Но мы уже понимаем, что всего дорог не $10 \cdot 9 = 90$, а вдвое меньше — 45. Ответ согласуется с первым решением.

Замечание 3. Задача про города и дороги напоминает решённую на первом занятии задачу про количество отрезков на прямой. Это неудивительно: количество дорог-отрезков не должно зависеть от того, расположены их концы-города по кругу или на прямой. Так что с треугольными числами мы уже сталкивались, только ещё не знали, что они так называются.

Задача 2.3. Учитель дал детям задачу: найти сумму натуральных чисел от 1 до 100. Пока дети трудятся, он надеялся хорошенько отдохнуть, но не тут-то было: мальчик Карл сразу назвал ответ. Найдите и вы этот ответ. Подумайте, как мог рассуждать Карл.

Обсуждение. Сгруппируем слагаемые по парам: 1 и 100, 2 и 99, 3 и 98 и т. д. Слагаемых всего сто, поэтому пар 50. Сумма чисел в каждой равна 101. А сумма всех слагаемых равна $50 \cdot 101 = 5050$.

Замечание 1. Полное имя мальчика — Иоганн Карл Фридрих Гаусс.

Замечание 2. Можно рассуждать и по-другому. Представим себе королевство со 101 городом, каждые два из которых соединены дорогой. Сколько дорог в королевстве? С одной стороны, их $100 + 99 + \ldots + 2 + 1$. Именно эту сумму учитель и просил найти. С другой стороны, их $100 \cdot 101 : 2 = 5050$. Если решать задачу двумя верными способами, ответы должны совпасть. Поэтому $100 + 99 + \ldots + 2 + 1 = 5050$.

Если бы требовалось найти сумму натуральных чисел от 1 до 99 или другого нечётного числа, решение с разбиением на пары пришлось бы дорабатывать. Но решение с помощью городов и дорог одинаково для любого числа городов, так что равенство $99 + \ldots + 2 + 1 = 99 \cdot 100 : 2$ тоже верно.

Задача 2.4. В школе есть классы с 5 по 11, по два на каждой параллели. Физкультура у каждого класса два раза в неделю. Обязательно ли у каких-то двух классов оба дня физкультуры совпадают, если в этой школе учатся:

а) шесть дней в неделю, а воскресенье — единственный выходной;

б) пять дней в неделю с выходными в субботу и воскресенье?

Обсуждение. В школе $11 - 4 = 7$ параллелей, поэтому классов $7 \cdot 2 = 14$. У каждого класса есть пара физкультурных дней. Для ответа на вопрос задачи посчитаем количество возможных пар дней для физкультуры и сравним его с 14.

а) Если первый день физкультуры — понедельник, то вторым может быть любой из пяти со вторника по субботу. Если вторник, то любой из четырёх со среды по субботу. Если среда, то любой из трёх с четверга по субботу. Если четверг, то пятница или суббота. Если пятница, то только суббота. Всего $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ пар рабочих дней. А классов только 14. Поэтому у каждого класса может быть своя пара физкультурных дней.

б) Рассуждая аналогично, получаем, что пар рабочих дней $4 + 3 + 2 + 1 = 10$, что меньше, чем классов. Поэтому у каких-то двух классов пара физкультурных дней одна и та же.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.5. а) Встретились 13 художников. Каждый нарисовал по одной карикатуре на каждого из остальных. Сколько карикатур было нарисовано?

б) Встретились 13 певцов. Каждый спел по одной песне дуэтом с каждым из остальных. Сколько песен было спето?

Задача 2.6. Сколько диагоналей у 17-угольника?

Задача 2.7. У скольких 10-значных чисел, составленных из цифр 1 и 2, сумма цифр равна 12?

Задача 2.8. Сложите два первых числа из второй строки таблицы, которую составили в первой задаче. Потом второе и третье число. Потом третье с четвёртым... и так до тех пор, пока не заметите закономерность. Всегда ли она выполняется? Попробуйте объяснить почему.

Задача 2.9. Дуремар наладил производство газированной болотной воды. В каждый вид газировки он добавляет один краситель и два разных ароматизатора. Сколько разных напитков может произвести Дуремар с помощью шести видов красителей и шести видов ароматизаторов?

Задача 2.10. 10 школьников решали 10 задач. Могло ли случиться, что все они решили поровну задач, но для каждой задачи число решивших её было различным?

К задачам этого занятия можно добавить дополнительные задачи Д11–Д22, Д29, Д31, Д33, Д45, Д55, Д60, Д62, Д77, Д89, Д91, Д92.

Решения

2.5. Ответ. а) 156 карикатур; б) 78 песен.

Решение. а) Каждый нарисовал по 12 карикатур, значит, всего карикатур $12 \cdot 13 = 156$.

б) Сфотографируем каждую пару поющих и подарим каждому участнику дуэта бумажную копию фотографии. У каждого скопится по 12 фотографий, а всего фотографий $12 \cdot 13 = 156$. Но от каждой песни осталось по 2 фотографии, значит, спето $\frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ песен.

Комментарий. Формула в задаче 2.5*б* та же, что и в задаче 2.2. Если расположить по кругу 13 точек, то их можно считать городами, а каждая пара точек — дорога. А ещё можно точки считать певцами, и тогда каждая пара точек — это песня, спетая дуэтом. Посчитав количество пар точек, мы узнаем и количество дорог, и количество песен.

2.6. Ответ. 119 диагоналей.

Решение. Разрежем каждую диагональ пополам и посчитаем половинки диагоналей. Из каждой вершины 17-угольника можно провести диагональ ко всем вершинам, кроме неё самой и двух соседних, то есть к $17-3=14$ вершинам. Получается $17 \cdot 14 = 238$ половинок. А диагоналей вдвое меньше, то есть 119.

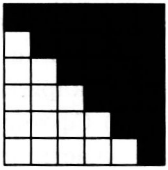
Комментарий. Деление на два полезно объяснить и по-другому. Посчитаем диагонали. Из каждой вершины выходит 14 диагоналей, вершин 17. Казалось бы, диагоналей $17 \cdot 14 = 238$. Но мы не учли, что каждая диагональ посчитана дважды, поэтому ответ получился вдвое больше правильного. А правильный ответ — $238 : 2 = 119$ диагоналей.

2.7. Ответ. 45 чисел.

Решение. Сколько единиц и сколько двоек в таких числах? Если бы все 10 цифр были единицами, сумма была бы равна 10. Раз она равна 12, две единицы надо заменить двойками. Каждое число, соответствующее условию, *полностью описывается* парой мест, на которых стоят двойки. Количество возможных пар мы считать умеем. Их $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$. Только теперь каждая пара — это не дорога, не песня, а число.

Комментарий. Обратите внимание на то, что вместо выписывания длинного 10-значного числа мы научились описывать его коротко — как пару мест — и считать количество коротких записей.

2.8. Ответ. 4, 9, 16, 25 — квадраты последовательных натуральных чисел.



Решение. Получаем суммы 4, 9, 16, 25... Это квадраты последовательных натуральных чисел. Чтобы понять причину, надо «нарисовать» соседние треугольные числа не с помощью бильярдных шаров, а с помощью половинок квадратной таблицы по одну сторону от диагонали: одной серой, другой белой, сложить половинки вместе и, подобно индийским геометрам, воскликнуть: «Смотри!»

2.9. Ответ. 90 видов.

Решение. Используя два ароматизатора из шести, можно получить $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ различных ароматов. Каждый из 15 ароматов можно сочетать с любым из 6 красителей. Поэтому Дуремар может произвести $15 \cdot 6 = 90$ видов болотной воды.

Замечание. Умножение 15 на 6 можно проиллюстрировать как таблицей 15×6, так и с помощью дерева, которое разветвляется от корня на 15 больших ветвей, а от каждой большой ветви отходят по 6 маленьких веточек.

2.10. Ответ. Могло.

Решение. *Любезный читатель! Позволь авторам похулиганить, предложив сначала неверное решение.* Пусть за каждую решённую задачу ребёнок получал конфету. Посчитаем конфеты: $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$. Слагаемые именно такие, поскольку за все задачи было выдано различное число конфет. Так как 55 конфет нельзя поровну раздать 10 школьникам, ответ отрицательный: такого случиться не могло.

А теперь внимание: правильный ответ. Такое случиться могло. Чтобы доказать это, достаточно привести пример. Это удобно сделать с помощью таблицы. Её строки соответствуют ученикам, а столбцы — задачам; если ученик решил задачу, в клетке стоит «+». Проверьте, что во всех столбцах разное число плюсиков, а во всех строках одинаковое: по 5 плюсиков.

+	+		+	+	+				
+	+		+	+	+				
+	+	+		+	+				
+	+	+		+	+				
+	+	+		+		+			
+	+	+	+			+			
+	+	+	+			+			
+	+	+	+				+		
+	+	+	+				+		
+		+	+	+				+	

В «доказательстве» не учтено, что какую-то задачу вообще мог никто не решить, то есть что среди слагаемых может встретиться 0. Чтобы сумма десяти различных слагаемых, выбранных из одиннадцати чисел $0, 1, 2, \ldots, 9, 10$, делилась на 10, надо отбросить число 5, сумма $0+1+2+3+4+6+7+$ $+8+9+10=50$ кратна 10, каждый ученик решил по 5 задач. Заполнять «плюсиками» таблицу будем, начиная с тех столбцов, где их много. Если в какой-то строке уже есть пять «плюсиков», оставим остальные клетки этой строки пустыми. Если соблюдать эти нехитрые правила, пример непременно получится.

Занятие 3
Кодирование цифрами и символами. Число подмножеств

На этой мысли великий комбинатор остановился с удовольствием.

И. Ильф, Е. Петров «Золотой телёнок»

На этом занятии развиваются важные навыки решения комбинаторных задач.

- Подсчёт по группам (повторение). Задача 3.1 нужна для активации в памяти этой идеи.
- Кодирование (в основном двоичное, но не только) и связанное с ним родство задач; в первую очередь это связка задач 3.2, 3.3 и 3.4. В задачах 3.5 и 3.7 применяется сильный приём: замена длинного кода на короткий (которым всё однозначно определяется) и подсчёт коротких кодов.
- Иллюстрация решения деревом перебора; одинаковым задачам соответствуют одинаковые деревья. При разборе задач 3.2*в*, 3.3 и 3.4 рекомендуем один раз нарисовать дерево (можно частично), а потом его с доски не стирать, а только менять значки.
- Рекурсивный подсчёт.

Дерево перебора мы пока используем как иллюстрацию к уже решённой задаче для лучшего понимания её сути, узнавания одинаковых задач и вообще для постепенного привыкания к деревьям. Отработка навыка применения деревьев как основного метода решения предстоит на пятом и седьмом занятиях. Но если продвинутый ученик сам рисует дерево вместо выписывания всех элементов множества — отлично, не надо его тормозить.

Кроме методов решения, обратим внимание и на два связанных друг с другом типа задач. Во-первых, подсчёт количества строк с повторениями (задачи 3.2, 3.3, 3.6, 3.8). Если используются k символов, а длина строки n, то разных строк будет k^n. Не пропустите задачи 3.2*г* и 3.8, так как во всех остальных $k = 2$.

Во-вторых, в задачах 3.4 и 3.7*а* подсчитывается число наборов, состоящих из элементов данного множества. Обратите внимание и на замечание к задаче 3.4.

Замечания по отдельным задачам

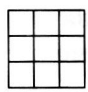
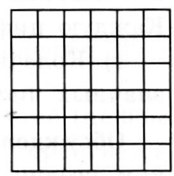
К задачам 3.3 и 3.4 мы привели только решения, опирающиеся на связь с предыдущей задачей. Для кого-то этого достаточно. А тому, кто плохо осознал рекурсивное перечисление в задаче 3.2, полезно для закрепления навыка дополнительно потренироваться и при обсуждении задач 3.3 и 3.4 выписать сначала все результаты ответа на один вопрос («+» или «−»), потом на два (в два столбика), потом на три (снова в два столбика) и так далее до полного понимания процесса.

В задаче 3.6 стоит обратить внимание на сходство последовательностей из точек и тире с последовательностями из плюсов и минусов, а также единиц и двоек. А разбиение на группы по длине слова перекликается с разбиением на группы по размеру квадрата в первой задаче.

В пунктах а) и б) задачи 3.7 повторяется подсчёт всех наборов и подсчёт числа пар. Если ученик ссылается на это как на знакомые формулы, хорошо. А если затрудняется, надо не формулу напоминать, а ещё раз проговорить подробно процесс выбора. Пункт в) сложный, так как опирается на новую идею перехода к дополнению.

Задачи 3.9 и 3.10 не содержат новых идей, не страшно, если не все ученики в них разберутся. Задача 3.10 интересна как повторение треугольных чисел.

Задача 3.1. Сколько квадратов можно увидеть на чертеже?

а)  *б)* 

Обсуждение. а) «Торопыжка» может сказать, что квадратов 9. Но это только маленьких. А ещё есть четыре квадрата 2×2 и один квадрат 3×3. Всего квадратов $9 + 4 + 1 = 14$.

б) **Решение 1.** Будем снова считать квадраты по размерам. Маленьких $6 \cdot 6 = 36$. Квадраты 2×2 считаем так: прижатых к верхнему краю пять, на один уровень ниже ещё пять и так далее, всего $5 \cdot 5 = 25$. Аналогично получаем 16 квадратов 3×3, 9 квадратов 4×4, 4 квадрата 5×5 и один квадрат 6×6. На чертеже $36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 91$ квадрат.

Решение 2. Свяжем каждый квадрат с его верхней левой клеткой. Напишем в каждой клетке, для скольких квадратов она является верхней левой (см. таблицу). Начинать записывать удобнее с правых и нижних клеток. Осталось сложить все записанные числа:

6	5	4	3	2	1
5	5	4	3	2	1
4	4	4	3	2	1
3	3	3	3	2	1
2	2	2	2	2	1
1	1	1	1	1	1

$$6 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 11 =$$
$$= 6 + 15 + 20 + 21 + 18 + 11 = 91.$$

Замечание. Подсчёт по группам важен. Но, как видим, принцип разделения на группы не обязательно связан с размерами. Кроме того, второй способ позволяет не только посчитать общее количество квадратов, но и перечислить эти квадраты. Обозначим клетки буквами (см. рисунок), а квадрат — буквой его верхней левой клетки и цифрой размера: c4, a5, g1. Это пример *кодов*. Коды позволяют задать вопрос про конкретные квадраты: например, пересекаются ли d2 и h3?

a	b	c	d	e	f
g	h				

Задача 3.2. а) Первоклассник Колечка очень умён, но умеет писать пока только цифры 1 и 2. Он выписал все двузначные числа, которые мог. Выпишите и вы эти числа.

б) Потом Колечка выписал и все трёхзначные числа, которые мог. Сколько чисел он выписал на этот раз?

в) Сколько времени потратит Колечка, чтобы выписать все пятизначные числа, в которых есть только цифры 1 и 2? Каждую цифру он пишет за одну секунду.

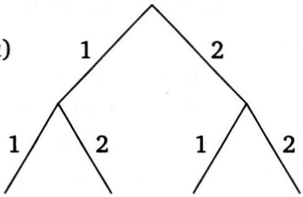
г) Колечка научился писать цифру 3. Сколько четырёхзначных чисел может он теперь написать?

Обсуждение. а) Чисел мало, их несложно выписать в каком угодно порядке. Например, в порядке возрастания: 11, 12, 21, 22.

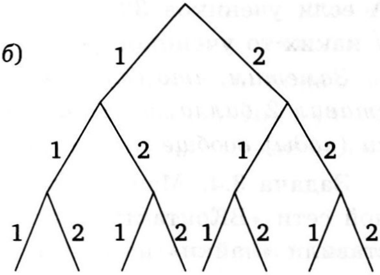
б) Чисел больше. Чтобы не пропустить ничего, выпишем сначала те, которые начинаются с единицы. Цифры, стоящие на втором и третьем местах, образуют те самые 4 двузначных числа, что записаны в пункте а). А теперь выпишем ещё четыре числа: на первом месте двойка, а на втором и третьем — ещё раз уже знакомые 4 комбинации. Из способа перечисления и без выписывания всех чисел ясно, что трёхзначных вдвое больше, чем двузначных, то есть 8.

Процесс написания числа можно проиллюстрировать с помощью дерева. Сначала Колечка выбирает, какую цифру написать на первом месте, 1 или 2. Какое бы решение он ни принял, на следующем шаге у него снова выбор из двух возможностей: 1 или 2. В пункте а) выбор происходит дважды, поэтому дерево двухэтажное и самых маленьких веточек четыре. В пункте б) добавляется третий этаж, и число маленьких веточек удваивается.

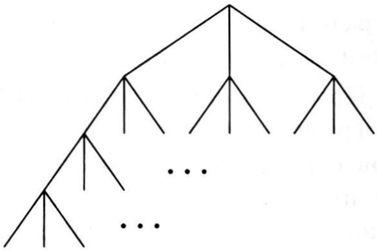
а)



б)



г)



в) Продолжим дерево ещё на два этажа. Получим $2^5 = 32$ числа.

г) Теперь Колечка делает выбор из 3 возможностей (цифры 1, 2 или 3) 4 раза, то есть количество чисел утраивается 4 раза. Всё дерево нарисовать затруднительно, нарисуем его часть и найдём ответ: $3^4 = 81$.

Задача 3.3. Учитель дал классу тест из пяти вопросов. За верный ответ на вопрос он ставил «+», за неверный или отсутствие ответа ставил «−», а в конце каждой работы записывал результат (например, «+ + − + −»). Удивительным образом ни у каких двух учеников результаты не совпали. Могло ли в классе быть 30 учеников? А 33?

Обсуждение. Сколько различных строк из пяти плюсов или минусов мог написать учитель? На первом месте может быть «+» или «−», это две возможности. На втором количество возможностей удваивается, и так происходит пять раз. Этой задаче соответствует точно такое же дерево, что и задаче 3.2*в*, только вместо 1 и 2 надо всюду писать «+» и «−». Поэтому вариантов столько же, сколько пятизначных чисел из цифр 1 и 2, то есть $2^5 = 32$. Если в классе 30 учеников, то для каждого мог бы найтись свой уникальный результат.

А если учеников 33, то на всех новых вариантов не хватит, у каких-то учеников результаты совпадут.

Заметим, что если бы учитель за каждый верный ответ ставил 2 *балла, а за каждый неверный* 1 *балл, то его записи (коды) вообще ничем бы не отличались от Колечкиных.*

Задача 3.4. Маша выложила на своей странице в социальной сети «ВКонтакте» пять новых фотографий. Её друзья поставили «лайки» на понравившиеся им фотографии. Никакие два друга не поставили «лайки» в точности одному и тому же набору фотографий. Какое наибольшее число друзей могли просмотреть Машины фотографии?

Обсуждение. Просмотр пяти фотографий с выставлением за удачные фотографии «лайков» аналогичен проверке теста из пяти вопросов с выставлением за удачные ответы плюсов (а на остальных пусть остаются минусы). В результате каждый набор «лайков» кодируется строкой из плюсов и минусов. Возможных разных строк там и тут поровну. Значит, разных наборов «лайков» столько же, сколько разных строк, оценивающих тест, то есть Машины фотографии могли просмотреть не более 32 друзей.

Замечание. Если рассматривать не процесс выбора (ставить ли «лайк» на конкретную фотографию), а его результат (какие фотографии в итоге выбраны), то в этой задаче речь идёт о количестве различных наборов понравившихся фотографий. Наборы считаются различными, если хотя бы одна фотография присутствует в одном из них и отсутствует в другом. Среди наборов особую роль играют полный (выбраны все фотографии) и пустой (не выбрана ни одна). Подсчёт количества всевозможных наборов с помощью строки плюсов и минусов (то есть с помощью поочерёдного ответа на вопрос «Брать или не брать?» для каждого элемента набора) — полезное умение. Кстати, математики чаще кодируют подмножества строками из цифр 0 и 1.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.5. а) У скольких пятизначных чисел без повторяющихся цифр запись начинается на 2018?

б) А у скольких шестизначных?

Задача 3.6. В телеграфной азбуке Морзе каждая буква кодируется с помощью последовательности точек и тире, всего от одного до пяти символов. Например, буква А записывается как «•—», Е как «•», Э как «••—••». Почему не удалось обойтись кодами, содержащими не более четырёх символов?

Задача 3.7. В кружок «Юный прогульщик» записались восемь человек. Они договорились прогуливать занятия кружка так, чтобы каждый раз состав пришедших участников оказывался разным.

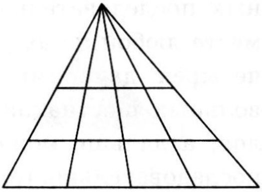
а) Сколько занятий это может продолжаться?

б) На какое наибольшее число занятий кружка могут прийти ровно два человека?

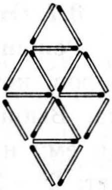
в) А ровно шесть человек?

1	2	3	4	5
$+$	$+$	$\mp$	$-$	$\pm$

Задача 3.8. За каждую из пяти задач олимпиады можно получить «$+$», «$\pm$», «$\mp$» или «$-$». В итоге составляется таблица (например, как на рисунке). Сколько разных итоговых таблиц может получиться?



Задача 3.9. Сколько треугольников на рисунке?



Задача 3.10. Из 16 спичек сложен ромб со стороной 2 спички, разбитый на треугольные клетки со стороной в одну спичку (см. рисунок). А сколько спичек понадобится, чтобы сложить разбитый на такие клетки ромб со стороной в 10 спичек?

К задачам этого занятия можно добавить дополнительные задачи Д18, Д23—Д33.

Решения

3.5. Ответ. а) 6 чисел; б) 30 чисел.

Решение. а) Все эти числа нетрудно выписать: 20183, 20184, 20185, 20186, 20187, 20189. Впрочем, количество чисел можно узнать и без выписывания: первые 4 цифры жёстко заданы условием, а на пятом месте может стоять любая из шести оставшихся цифр. Так что чисел 6.

б) Разобьём числа на группы. Числа первой группы начинаются с 20183, а на шестом месте может быть любая из оставшихся пяти цифр: 4, 5, 6, 7 или 9. Числа второй группы начинаются с 20184, а на шестом месте может быть любая из оставшихся пяти цифр: 3, 5, 6, 7 или 9, и т. д. Групп шесть, в каждой по 5 чисел, а всего чисел $6 \cdot 5 = 30$.

Замечание. Здесь мы опять, вычёркивая неизменную часть, заменяем *длинное* искомое число на *удобное* для нас *короткое* и считаем количество коротких записей. Этот приём ещё не раз поможет нам в дальнейшем.

3.6. Решение. Подсчитаем количество букв, которые удалось бы закодировать не более чем четырьмя символами. Односимвольных последовательностей всего две: «точка» и «тире». Двухсимвольных четыре: на первом месте любой из двух символов, а дальше может быть любая из двух односимвольных последовательностей. Трёхсимвольных восемь: на первом месте любой из двух символов, а дальше может быть любая из четырёх двухсимвольных последовательностей. Четырёхсимвольных шестнадцать: на первом месте любой из двух символов, а дальше может быть любая из восьми трёхсимвольных последовательностей. Получается $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ последовательностей, что меньше количества букв в алфавите.

3.7. Ответ. а) 256 занятий; б) 28 занятий; в) 28 занятий.

Решение. а) Требуется найти количество всевозможных наборов, которые можно составить из восьми участников кружка. Выбирая поочерёдно для каждого участника, приходить ли ему на это занятие (аналогично задаче 3.4), получаем ответ: $2^8 = 256$ занятий.

б) А здесь требуется подсчитать количество пар, которые могут образоваться среди 8 человек. Если отмечать плюсами присутствующих и минусами отсутствующих, то каждой паре детей соответствует пара мест, на которых стоят плюсы. Задача знакомая, ответ — $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ занятий.

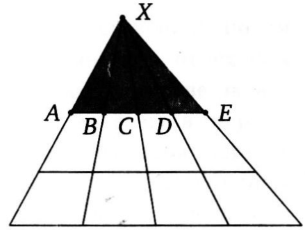
в) Требуется выбрать шесть мест из восьми, на которых стоят плюсы. Но это то же самое, что выбрать 2 места из восьми, на которых стоят минусы. Поэтому ответ тот же, что и в предыдущей задаче, — 28.

Обсуждение. Во всех пунктах мы начинаем с длинного кода: строки из восьми плюсов и минусов. Но если в пункте а) этого достаточно для подсчёта, то в пунктах б) и в) нам приходится перейти к более короткому коду — паре мест для плюсов или минусов — и считать эти короткие коды.

3.8. Ответ. 1024 таблицы.

Решение. Перейдём к более удобным обозначениям. Как принято на некоторых олимпиадах, будем ставить 4 балла за «$+$», 3 балла за «$\pm$», 1 балл за «$\mp$» и 0 баллов за «$-$». Тогда задача сводится к такой: сколько различных последовательностей длины 5 можно составить из цифр 0, 1, 3 и 4? Мы не называем последовательности пятизначными числами, так как числа не должны начинаться с нуля. Теперь задача отличается от задачи 3.2*в* только тем, что видов символов 4, а не 2, то есть на каждом этаже дерева ветвь разделяется на четыре ветки поменьше. Перемножить надо не пять двоек, а пять четвёрок. Значит, может получиться $4^5 = 1024$ таблицы.

3.9. Ответ. 30 треугольников.



Решение 1. Чтобы не упустить ни одного треугольника, разобьём их на группы по «этажам». Треугольники верхнего этажа — самые маленькие — выделены на рисунке серым цветом. У каждого из них есть вершина X, а основанием служит один из отрезков с концами в точках A, B, C, D, E. Таких отрезков, как мы выяснили на первом занятии, 10, поэтому и треугольников на верхнем этаже 10. «Средние» и «большие» треугольники считаются точно так же, их тоже по 10. А всего на чертеже 30 треугольников.

Решение 2. Чтобы задать треугольник, надо задать три прямые, на которых лежат его стороны. Одна из этих прямых должна быть горизонтальной (для её выбора есть 3 варианта), а две другие выбираются из прямых XA, XB, XC, XD и XE. Из этих пяти годится любая пара, а таких пар всего 10. Поэтому искомых треугольников $3 \cdot 10 = 30$.

3.10. Ответ. 320 спичек.

Решение 1. Есть по 11 косых отрезков длины 10 двух направлений, в них всего $11 \cdot 10 \cdot 2 = 220$ спичек. Горизонтальных спичек

$$1+2+3+\ldots+9+10+9+\ldots+1 =$$
$$= (1+2+\ldots+10)+(1+2+\ldots+9) = 55+45 = 100.$$

Итого 320 спичек.

Решение 2. Уберём горизонтальные спички, получим ромб, разбитый на $10 \cdot 10 = 100$ ромбиков. Значит, убрано 100 спичек. Оставшиеся спички образуют по 11 косых отрезков длины 10 двух направлений, в них всего $11 \cdot 10 \cdot 2 = 220$ спичек. Итого 320 спичек.

Занятие 4
Отбрось лишнее
(вычитание в комбинаторике)

Я беру глыбу мрамора и отсекаю
от неё всё лишнее.

Микеланджело Буонаротти

Вычитание в комбинаторике применяется обычно в двух ситуациях.

1. Удобнее посчитать не то, что надо, а всё остальное. А потом вычесть это остальное из всего. Такой метод называется *переходом к дополнению* и применяется на этом занятии в большинстве задач.

2. Пусть надо подсчитать общее количество элементов пересекающихся множеств. Если сложить количества элементов первого и второго множества, элементы их пересечения будут подсчитаны дважды. Для получения ответа надо из суммы вычесть число элементов пересечения. Это соображение помогает решить задачи 4.2, 4.7, 4.11 и отчасти 4.10.

Отбрасывание лишнего помогает не ошибиться на 1 из-за краевого эффекта, что не отменяет пользу самопроверки на малых числах.

В задачах 4.2 и 4.11 упоминаются круги Эйлера, можно их использовать и в задаче 4.7. Их роль на этом занятии исключительно иллюстративная. Наглядное изображение вычитания и пересечения множеств в виде кругов уместно, но вряд ли стоит совмещать это занятие с первым занятием по кругам Эйлера.

Это занятие меньше других связано с предыдущими. Правила умножения, подсчёт неупорядоченных пар и подсчёт подмножеств повторяются в первую очередь в задаче 4.2, а также в задачах 4.4 и 4.6.

Замечания по отдельным задачам

Задачи типа 4.1 встречаются очень часто, но и ошибки в них встречаются почти столь же часто. Предлагаем поступить так. Попросите всех за минуту написать в тетрадке ответ. Потом выслушайте мнения. Почти наверняка кто-то ошибся. В таком случае сначала следует обсудить проверку на малых числах (а если страницы с 1 по 2?), а уж потом рассказать изложенное решение и обратить внимание на название рассказа.

В задачах 4.8, 4.9 и 4.10 стоит обратить внимание на верное понимание условия. «Хоть одна» в задаче 4.9*б* означает «одна или больше», а «по крайней мере две» в задаче 4.8 — «две или больше». В задаче 4.10 недостаточно привести несколько примеров разбиения, приводящих к верному ответу, а требуется доказать, что никакой другой длины перегородок быть не может. Даже если в условии не было бы уточнения «Найдите все возможные ответы», его следовало бы понимать именно так.

Задача 4.1. Рассказ «Отбросим лишнее!» расположен с 34-й по 69-ю страницу в книге. Сколько страниц занимает рассказ?

Обсуждение. Запишем номера страниц книги:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 33,\ 34,\ 35,\ldots,\ 69.$$

Здесь 69 чисел. Теперь обведём в рамку страницы с 34 по 69, на которых расположен рассказ:

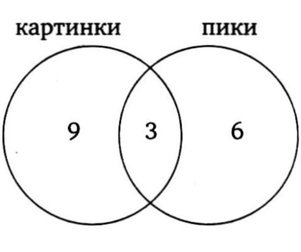
$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 33,\ 34,\ 35,\ \ldots,\ 69.$$

Видно, что первые 33 страницы лишние, а рассказ занимает $69 - 33 = 36$ страниц.

Задача 4.2. В колоде 36 карт четырёх мастей. Для гадания Аза взяла все пики и все картинки (валетов, дам и королей), а остальные карты отложила. Сколько карт выбрала Аза?

Обсуждение. В колоде, как всегда, четыре масти. Поэтому пик $36:4=9$. Картинок по 3 в каждой масти, всего 12. Пик и картинок $9+12=21$. Верно? Нет. Что не так? А то, что валет, король и дама пик посчитаны дважды. На самом деле карт у Азы на 3 меньше, то есть $21-3=18$.

Замечание 1. Такие ситуации удобно иллюстрировать с помощью кругов Эйлера (см. рисунок).



Замечание 2. Можно сразу рассмотреть два непересекающихся множества: у Азы 9 пик и по 3 картинки в остальных трёх мастях. Всего $9+9=18$ карт.

Задача 4.3. В пиццерии есть курица, ветчина, грибы, перец, помидоры, ананасы и оливки. Сколько видов пиццы с начинкой можно приготовить, если по заказу клиента можно класть в пиццу:

а) любой набор начинок;

б) любые из этих начинок, но не менее двух;

в) любые из этих начинок, но не менее трёх;

г) любые из этих начинок, но не более пяти?

Обсуждение. а) Возможных начинок 7, и каждую можно брать или не брать. Таким образом, каждому набору начинок соответствует своя строка из семи знаков «+» или «–». Всего наборов $2^7 = 128$. Но один из них пустой, он не содержит ни одной начинки и соответствует строке из семи минусов. Исключив его, получаем $128 - 1 = 127$ видов пиццы.

Замечание. Кто-то может возразить, что пустой набор не надо исключать, такая пицца самая вкусная. О вкусах не спорят, но вопрос задан про виды пиццы с начинкой.

б) Подсчитаем все виды пиццы, а затем исключим лишние: пустой набор и 7 «наборов» из одной начинки. Останется $128 - (1 + 7) = 120$ видов пиццы.

в) Подсчитаем все виды пиццы, а затем исключим лишние: пустой набор, 7 «наборов» из одной начинки и наборы из двух начинок. Из семи начинок можно составить $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ пару. Получим $128 - (1 + 7 + 21) = 99$ видов пиццы.

г) Из 128 наборов надо исключить один пустой, один полный (все семь начинок) и наборы из шести начинок. Наборам из шести начинок соответствуют строки из шести плюсов и одного минуса. Их столько же, сколько строк из шести минусов и одного плюса (и столько же, сколько наборов из одной начинки), то есть семь. Останется $128 - 1 - 1 - 7 = 119$ наборов.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.4. Сколько всего: а) двузначных; б) пятизначных чисел?

Задача 4.5. Продажа железнодорожных билетов открывается за 45 суток до отправления поезда. Когда открывается продажа билетов на 1 мая?

Задача 4.6. Пятеро студентов вместе снимают квартиру. Однажды они устроили вечеринку, на которую пришли ещё 25 их друзей, причём каждый приходящий пожимал руки всем собравшимся. Сколько получилось рукопожатий?

Задача 4.7. Пока мама гостила у камбалы, двенадцать её детей-осьминожков покачались на люстре, а семеро сшили парус из простыни. Сколько осьминожков успели и то и другое, если всего в семье шестнадцать детей, но один из них сидел в сторонке и в развлечениях братьев не участвовал?

Задача 4.8. У скольких чисел от 1 до 2019 в записи есть по крайней мере две различные цифры?

Задача 4.9. Из 1000 белых кубиков сложили куб $10\times10\times10$ и покрасили его снаружи синей краской. У скольких кубиков: а) ровно одна грань синяя; б) есть хоть одна синяя грань?

Задача 4.10. Конюшню с бетонными стенами $6\,\text{м}\times6\,\text{м}$ разбили внутренними деревянными перегородками на стойла $1\,\text{м}\times2\,\text{м}$. Чему может быть равна общая длина деревянных перегородок? Найдите все возможные ответы.

Задача 4.11. На столе гербом вверх лежали 36 монет. Лёша перевернул 30 монет, затем Макс перевернул 19 монет, а после этого Боря — 21 монету. В результате все монеты лежат гербом вниз. Сколько монет было перевёрнуто трижды?

К задачам этого занятия можно добавить дополнительные задачи Д34–Д47, Д62, Д63, Д67, Д72, Д76*б*, Д80, Д88, Д91.

Решения

4.4. Ответ. а) 90 чисел; б) 90 000 чисел.

а) **Решение 1.** Из чисел от 1 до 99 исключим 9 однозначных чисел. Останется $99-9=90$ двузначных.

Решение 2. В разряде десятков может стоять любая из 9 цифр от 1 до 9, в разряде единиц — любая из 10 цифр. С помощью таблицы или дерева убеждаемся, что двузначных чисел $9\cdot10=90$.

б) **Решение 1.** Из чисел от 1 до 99 999 исключим числа от 1 до 9999. Останется $99\,999-9\,999=90\,000$ пятизначных чисел.

Решение 2. В старшем разряде может стоять любая из 9 цифр от 1 до 9, в остальных — любая из 10 цифр. С помощью дерева убеждаемся, что пятизначных чисел

$$9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=90\,000.$$

4.5. Ответ. 17 марта.

Решение. Чтобы не ошибаться на границах месяцев, удлиним их. 1 мая назовём сначала $30 + 1 = 31$ апреля, а потом и $31 + 30 + 1 = 62$ марта. За 45 суток до 62 марта было $62 - 45 = 17$ марта.

Комментарий. В первой задаче чисел от 10 до 99 не $99 - 10 = 89$, а на 1 больше, то есть 90. А во второй мы просто вычли: $62 - 45$. Нет ли тут ошибки на один день? Выполним «проверку на малых»: если бы билеты начинали продавать за 1 сутки, то продажа билетов на 62 марта открывалась бы 61 марта. Ура, $62 - 1 = 61$, аналогичное действие для числа 1 согласуется с очевидно верным ответом!

4.6. Ответ. 425 рукопожатий.

Решение 1. После прихода первого гостя произошло 5 рукопожатий, второго — 6 и т. д. Последний, двадцать пятый гость сделал $25 + 4 = 29$ рукопожатий. Найти сумму $5 + 6 + \ldots + 29$ можно двумя способами.

1. Объединим числа в пары: $5 + 29 = 34$, $6 + 28 = 34$ и т. д. Чисел 25, поэтому получится 12 пар, а среднее число останется без пары. Какое именно? Последняя сумма пары чисел — $16 + 18 = 34$, без пары осталось слагаемое 17. Считаем всю сумму: $12 \cdot 34 + 17 = 425$.

2. Воспользуемся не методом объединения в пары, а полученной с его помощью на втором занятии формулой треугольных чисел:

$$5 + 6 + \ldots + 29 = (1 + 2 + \ldots + 29) - (1 + 2 + 3 + 4) =$$
$$= \frac{29 \cdot 30}{2} - 10 = 29 \cdot 15 - 10 = 435 - 10 = 425.$$

Решение 2. Руки друг другу пожали все присутствующие, не было только рукопожатий между хозяевами. Всего собрались $5 + 25 = 30$ студентов, между ними возможно $30 \cdot 29 : 2 = 435$ рукопожатий. Но между хозяевами не произошло $5 \cdot 4 : 2 = 10$ рукопожатий, поэтому было $435 - 10 = 425$ рукопожатий.

4.7. Ответ. 4 осьминожка.

Решение. Если сложить качавшихся на люстре и шивших парус, получится $12 + 7 = 19$ осьминожков. Но развлекались только $16 - 1 = 15$ детей. Значит, $19 - 15 = 4$ детей мы посчитали дважды.

4.8. Ответ. 1991 число.

Решение. Перейдём к дополнению, то есть подсчитаем количество тех чисел от 1 до 2019, у которых все цифры одинаковы. Выполним подсчёт по группам в зависимости от длины числа. Подходят все однозначные числа, из двузначных — $11, 22, \ldots, 99$, из трёхзначных — $111, 222, \ldots, 999$, а из четырёхзначных — только 1111 (уже $2222 > 2019$). Итого в дополнении $3 \cdot 9 + 1 = 28$ чисел. А по крайней мере две различные цифры есть у остальных, а именно у $2019 - 28 = 1991$ числа.

4.9. Ответ. а) 384 кубика; б) 488 кубиков.

Решение. а) На каждой грани окрашенного куба $10 \times 10 \times 10$ ровно одна синяя грань у кубиков, расположенных не по краям. Видимые грани этих кубиков образуют квадрат 8×8, их 64. А на всех шести гранях таких кубиков $6 \cdot 64 = 384$.

б) Перейдём к дополнению. У каких кубиков нет ни одной синей грани? У тех, что внутри большого куба. Они составляют куб $8 \times 8 \times 8$, поэтому их $8^3 = 512$. У остальных $1000 - 512 = 488$ кубиков есть хотя бы одна синяя грань.

Комментарий. Кто-то из участников кружка может пойти другим путём: подсчитать количество кубиков с двумя синими гранями (их по 8 на каждом из 12 рёбер большого куба, а всего $12 \cdot 8 = 96$) и с тремя синими гранями (их 8, по одной при каждой вершине большого куба), а затем сложить: $384 + 96 + 8 = 488$. Приведённое решение с вычитанием в таком случае предлагаем обсудить, заметив, что решение двумя способами — хороший способ самопроверки.

4.10. Ответ. 42 м.

Решение. Площадь конюшни — 36 м^2, а каждого стойла — 2 м^2. Поэтому стойл 18. Периметр каждого равен 6 м, сумма периметров 18 стойл равна 108 м. Из них 24 м приходятся на бетонные стены конюшни, а остальные 84 м — на внутренние деревянные перегородки. Но деревянные участки относятся одновременно к двум стойлам, поэтому их общая длина вдвое меньше и равна 42 метрам. Ответ 42 м единственно возможный.

4.11. Ответ. 17 монет.

Решение. Так как все монеты вначале были перевёрнуты гербом вверх, а в результате оказались гербом вниз, каждую мог перевернуть либо один мальчик, либо все трое. Если бы каждую монету перевернул один мальчик, было бы 36 переворачиваний. Но их $30 + 19 + 21 = 70$, что на $70 - 36 = 34$ больше. Значит, $34 : 2 = 17$ монет имели по два дополнительных переворачивания, то есть перевёрнуты трижды.

Комментарий. Монеты, которые переворачивали мальчики, можно наглядно изобразить с помощью трёх кругов Эйлера (см. рисунок). То, что никакая монета не переворачивалась ровно два раза, означает, что тёмные области пусты. Если слагаемые из светлых областей сложить с числом из белой области, умноженным на 3, получится 70. Заполнив указанным выше способом белую область числом 17, нетрудно заполнить и все остальные.

Занятие 5
Чудо-дерево

> Как у наших у ворот
> Чудо-дерево растёт.
>
> *К. И. Чуковский*

Идеологически это занятие является продолжением третьего и развивает умение рисовать деревья и видеть родство задач.

О деревьях. Начинающему лыжнику палки мешают, а умелому помогают. На этом занятии мы считаем ученика достаточно умелым и для понимания сути задачи советуем переходить от таблиц к деревьям. Причины этого поясняются в замечании после задачи 5.4.

Поясняющие буквы рядом с ветвями деревьев пишут на стадии обучения; если ученики обходятся без них, писать больше не надо. Аналогично в начале обучения деревья небольшие и изображаются целиком, а если ветвей много, не надо пытаться их все изобразить.

О родстве задач. В занятии неоднократно используются аналогичные задачи. Иногда даже числа и в условии, и в ответе одни и те же, меняется только литературная оболочка. С другой стороны, внешне похожие задачи иногда решаются по-разному, и их важно не путать. Рекомендуем в конце занятия обсудить методы установления истинного родства задач (говоря по-научному, их изоморфизма).

• В задачах 5.1*а* и 5.2 естественные кодировки условия совпали с точностью до букв. Такие подарки встречаются только в заботливо подобранных задачах. Но если привыкнуть переводить задачи на одни и те же «языки», результаты перевода часто будут повторяться. Предложение занумеровать мальчиков в задаче 5.6 и обозначить богатырей буквами алфавита в задаче 5.9 не столько помогает решить конкретные задачи, сколько пропагандирует удобные языки букв и чисел.

• Изоморфным задачам соответствуют одинаковые деревья. Нарисуйте и сравните деревья к задачам 5.3*б* и 5.7, даже если некоторые дети сразу, без деревьев, готовы назвать ответ. К сожалению, это соображение редко помогает решить трудную задачу. Если дерево уже нарисовано, то и так ясно, что делать. А пока его нет, одинаковость не видна.

• Иногда удаётся вместо перевода обеих задач на общий простой язык (как в задачах 5.1*а* и 5.2) заменить некоторые слова в условии одной из задач, превратив её в другую «без посредников» (см.

замечание после решения задачи 5.7). Такое превращение называют перекодировкой задачи; оно позволяет установить родство задач на стадии чтения условия, когда решение ещё не придумано. Перекодировкой мы займёмся обстоятельнее на следующем занятии.

О типах задач. Перейдём от идеологических вопросов к содержанию задач. В задачах 5.3, 5.7 и 5.9 подсчитывается число перестановок. Само слово «перестановки» вводить не обязательно, слово «очередь» понятнее.

В задачах 5.1, 5.6*а* и 5.8*б* подсчитываются строки символов без повторений, а в задачах 5.6*б* и 5.8*а* — строки символов с повторениями (этот тип задач встречался и на занятии 3). Главная цель задач 5.6 и 5.8 — помочь почувствовать разницу.

Ещё одну разницу — между упорядоченными и неупорядоченными множествами — помогает почувствовать задача 5.6*в*, в которой давно привычные неупорядоченные пары провокационно предлагается подсчитать после пунктов а) и б), где строки были упорядоченными, поэтому деления не предполагалось. Подсчёт неупорядоченных троек и больших множеств мы считаем для большинства учеников преждевременным, хотя вопрос об отборе трёх участников смотрелся бы в задаче 5.6*в* более органично. Его можно задать как дополнительный особо продвинутым ученикам.

В задачах 5.4 и 5.5 наряду с умножением используется сложение. Более сложные задачи на сложение будут рассмотрены на занятии 7.

В задачах 5.7 *б*, *в*, *г* и 5.10 показано, что порядок построения дерева может быть важен. С необычным порядком подсчёт проходит легко, а вот при порядке, кажущемся естественным, приходится привлекать дополнительные соображения: в задачах 5.7 *б*, *в* повторяется вычитание для отбрасывания лишнего, решение 2 в задаче 5.7*г* вообще забегает вперёд: непривычны и деление (встречалось лишь при подсчёте пар, здесь другая ситуация), и идея установления соответствия не между задачами, а внутри одной задачи.

Задачи с нетривиальной организацией процесса выбора будут встречаться и дальше в этой книжке (особенно среди дополнительных задач). Как систематический метод он будет подробно рассмотрен в следующей книжке.

Задача 5.1. Даше подарили пять кубиков: белый, голубой, оранжевый, фиолетовый и красный. Даша строит из них башни с одним кубиком на каждом этаже.

а) Сколько разных двухэтажных башен может составить Даша?

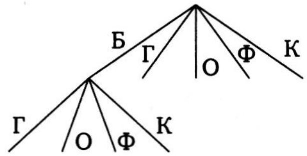
б) А сколько трёхэтажных?

Обсуждение. а) У Даши кубики есть, а у нас нет. Как коротко и ясно описать (закодировать) башню? Двумя буквами: БГ — на первом этаже белый, на втором голубой и т. п.

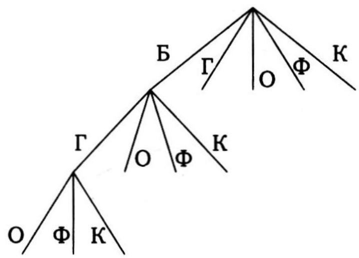
Теперь можно все виды башен перечислить с помощью таблицы. Диагональные клетки остались пустыми, так как использовать два одинаковых кубика Даша не может. В таблице 5 столбцов, так как на первом этаже может быть любой из пяти кубиков. В каждом столбце заполнены четыре клетки, так как на второй этаж Даша может поставить любой из четырёх оставшихся кубиков. Всего заполнено $5 \cdot 4 = 20$ клеток, то есть Даша может построить 20 башен.

	ГБ	ОБ	ФБ	КБ
БГ		ОГ	ФГ	КГ
БО	ГО		ФО	КО
БФ	ГФ	ОФ		КФ
БК	ГК	ОК	ФК	

Процесс постройки башни можно изобразить и с помощью дерева. Сначала Даша выбирает первый кубик, а мы рисуем 5 ветвей дерева. Если на первом этаже белый кубик, на втором могут оказаться голубой, оранжевый, фиолетовый или красный (см. рисунок) — всего 4 возможности. Если на первом этаже кубик другого цвета, то набор возможных цветов для второго кубика изменится, но их по-прежнему 4. Поэтому самых маленьких веточек у дерева $5 \cdot 4 = 20$. На рисунке мы не стали рисовать их все.



б) Переход от двухэтажной башни к трёхэтажной напоминает переход от двузначных чисел к трёхзначным в задаче 1.4. Можно рассмотреть таблицу с 20 столбцами, в каждом из которых записаны цвета двух первых кубиков. Так как незанятыми в каждом случае остались только три цвета, в каждом столбце будут заполнены три клетки, поэтому Даша может построить $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ трёхэтажных башен. Тот же результат можно объяснить проще, пририсовав к дереву третий этаж, на котором каждая из 20 веточек разделяется ещё на три.



Задача 5.2. Пять гномов: Балин, Глоин, Ори, Фили и Кили — с помощью жребия решают, кто как проведёт ночь. Один

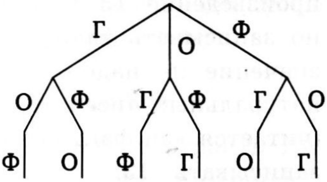
из них пойдёт в разведку, другой будет охранять троих оставшихся, а те будут мирно спать. Сколькими способами может выпасть жребий?

Обсуждение. Как закодировать результат выбора? Так же как и двухэтажную башню: двумя буквами. БГ означает, что Балин идёт в разведку, Глоин охраняет, остальные спят. Но количество упорядоченных пар букв, выбранных из пяти букв Б, Г, О, Ф и К, мы только что нашли. Можно списать у себя и решение (таблицу или дерево), и ответ (20).

Задача 5.3. а) Глоин, Ори и Фили договорились по очереди стоять на часах, пока остальные двое спят. Сколькими способами три гнома могут установить очерёдность караула?

б) Решите ту же задачу для четырёх гномов: Балина, Глоина, Ори и Фили.

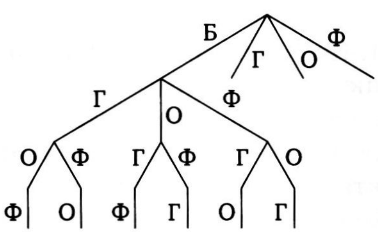
в) Сколькими способами можно установить очередь для пяти гномов? А для тринадцати?



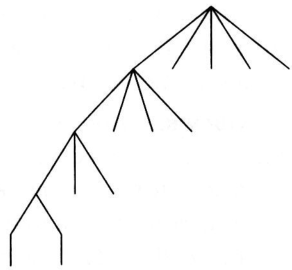
Обсуждение. а) Каждого гнома снова будем называть по первой букве имени. Для трёх гномов несложно выписать все последовательности из трёх букв; каждой первой букве соответствует два возможных порядка очереди, а всего их шесть: ГОФ, ОГФ, ФГО, ГФО, ОФГ, ФОГ.

Процесс выбора можно изобразить и с помощью дерева: первым может караулить любой из трёх гномов, вторым — любой из двух оставшихся, для третьего остаётся в каждом случае единственная возможность.

б) Изобразим дерево для четырёх гномов. От ветки Б идёт в точности дерево из предыдущего пункта, там $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ веток. Ветки Г, О и Ф ничем не отличаются, поэтому для четырёх гномов возможны $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ порядка очереди.



в) Для пяти гномов дерево выглядит аналогично. На первом этаже 5 ветвей, так как первым может стоять на часах любой из пяти гномов. Вторым может быть любой из четырёх оставшихся, поэтому от каждой из пяти ветвей отходит по 4. На третьем этаже количество ветвей утраивается, затем удваивается, а для последнего гнома выбора уже нет. Обычно на деревьях из экономии времени и места не подписывают букв и прочих обозначений. Ответ в 5 раз больше предыдущего:



$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Рассуждая аналогично, для 13 гномов получаем в ответе произведение 13 множителей: $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 1$. Ни подробно записывать такое выражение, ни тем более находить его значение не надо. Для короткой записи произведения всех натуральных чисел от 1 до n придумали специальный знак: $n!$ (читается «эн факториал»). Ответ в этой задаче так и принято записывать: 13!

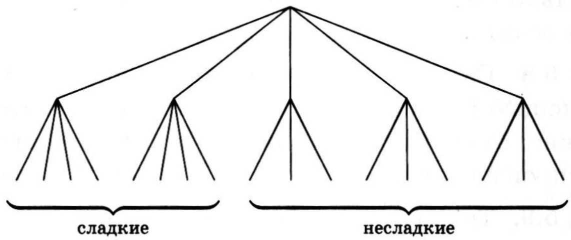
Замечание. Задачу о количестве способов построить кого-то (или что-то) в очередь называют задачей о числе перестановок.

Задача 5.4. Бабушка умеет печь пирожки с мясом, с капустой, с грибами, с яблоками, с черникой, с брусникой и с малиной. А для теста у неё есть пять рецептов.

а) Сколько всего видов пирожков может испечь бабушка?

б) Для яблок или ягод тесто должно быть сладким, а для мяса, капусты или грибов — несладким. Среди бабушкиных рецептов два вида сладкого теста и три несладкого. Сколько видов пирожков может испечь бабушка с учётом этих ограничений?

Обсуждение. Пять видов теста изображаются пятью ветвями дерева. В пункте а) от каждой ветви отходят по 7 веток, соответствующих начинкам. Получается 35 видов пирожков. Этот же результат можно было проиллюстрировать с помощью таблицы. В пункте б) от двух «сладких» ветвей отходят по четыре ветки (яблоки, черника, брусника и малина), а от трёх «несладких» — по три ветки (мясо, капуста, грибы). Получается $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$ видов пирожков.



Замечание. Как видно из разобранных примеров, дерево универсальнее таблицы. Таблица хорошо иллюстрирует задачи, связанные с умножением двух множителей. Если же множителей больше (так как выбор возможности происходит более двух раз) или вместо умножения требуется сложение (так как со сладким тестом сочетаются одни начинки, а с несладким другие), перебор возможностей лучше изображается деревом. Его так и называют — *дерево перебора*.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.5. Сколько разных башен может построить Даша из задачи 5.1? Один кубик Даша тоже считает башней — одноэтажной.

Задача 5.6. Все 15 мальчиков класса соревновались в беге. Одинаковых результатов не было. Сколькими способами могли распределиться:

а) первое, второе и третье места в кроссе на дистанции 2000 м;

б) первые места на дистанциях 60 м, 300 м и 1000 м?

в) Сколькими способами можно выбрать двух мальчиков для участия в школьных соревнованиях?

Задача 5.7. а) «В конце произошло самое невероятное: пёс забрался на спину ослу. Кот вскочил на голову псу. А юноша подпрыгнул и оказался стоящим на голове кота». Сколько пирамид могли построить четыре бременских музыканта, залезая друг на друга в разном порядке?

б) Сколько пирамид могли построить все пять бременских музыкантов (включая петуха), если петух не согласен быть в пирамиде самым средним?

в) Сколько пирамид можно построить впятером, чтобы осёл не оказался стоящим на коте?

г*) Сколько пирамид можно построить впятером, чтобы кот был выше осла?

Задача 5.8. Сколько пятибуквенных «слов» можно написать с помощью букв русского алфавита, если повторять буквы: а) можно; б) нельзя? «Слова» могут быть бессмысленными и даже непроизносимыми. Например, ЙЪЬМН тоже «слово».

Задача 5.9. Тридцать три богатыря должны чередой выйти из моря. Сколькими способами дядька Черномор может построить их в море в очередь на выход?

Задача 5.10. У скольких девятизначных чисел все цифры различны, сумма каждой пары соседних цифр нечётна, а само число делится на 4?

К задачам этого занятия можно добавить дополнительные задачи Д48—Д58, Д73 *а*, Д84 *а*, Д85, Д87, Д88, Д90.

Решения

5.5. Ответ. 325 башен.

Решение. Из пяти разноцветных кубиков Даша может построить 5 одноэтажных башен,

$$5\cdot4 = 20 \text{ двухэтажных},$$
$$5\cdot4\cdot3 = 60 \text{ трёхэтажных},$$
$$5\cdot4\cdot3\cdot2 = 120 \text{ четырёхэтажных и}$$
$$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5! = 120 \text{ пятиэтажных}.$$

Всего она может построить $5+20+60+120+120=325$ башен.

5.6. Ответ. а) $15\cdot14\cdot13$ способов; б) 15^3 способов; в) 105 способов.

Решение. а) Первое место мог занять любой из 15 мальчиков, второе — любой из 14 оставшихся, третье — любой из 13 оставшихся. Получается $15\cdot14\cdot13$ способов выбрать тройку призёров. Находить значение выражения необязательно.

б) Один и тот же мальчик не может занять и первое, и второе, и третье место в кроссе, но вполне может победить на двух или даже трёх различных дистанциях. Поэтому все три множителя на этот раз равны 15, ответ — 15^3.

в) Выбрать пару мальчиков из 15 можно

$$\frac{15 \cdot 14}{2} = 105 \text{ способами.}$$

Комментарий. 1. Для удобства мальчиков можно занумеровать. Тогда первые два пункта сводятся к следующей задаче. Сколько можно составить последовательностей из трёх натуральных чисел от 1 до 15, если числа повторять: а) нельзя; б) можно?

2. По аналогии с пунктом а) в пункте в) можно сначала выбрать любого мальчика из 15, затем любого из 14 оставшихся и получить неверный ответ $15 \cdot 14 = 210$. Почему его надо поделить на 2? Потому что при таком подсчёте мы учли сначала пару «Петя и Вася», а потом пару «Вася и Петя». Но на самом деле это одна и та же пара участников.

5.7. Ответ. а) 24 пирамиды; б), в) 96 пирамид; г) 60 пирамид.

а) **Решение.** Построить «вертикальную очередь» из четырёх музыкантов можно $4! = 24$ способами аналогично решению задачи 5.3*б*.

б) **Решение 1.** Аналогично всевозможных пирамид из пяти музыкантов $5! = 120$. Но надо отбросить негодные. Если петух средний, то остальные четыре музыканта могут расположиться на оставшихся местах $4! = 24$ способами. Значит, годятся только $120 - 24 = 96$ вариантов.

Решение 2. Начнём выбор с петуха. Для него есть только четыре подходящих места: все, кроме среднего. Для второго музыканта (например, кота) тоже четыре места: все, кроме занятого петухом. Для третьего три места, для четвёртого два, для последнего одно. Всего $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ мест.

в) Снова для начала посчитаем «плохие» варианты. Осла, стоящего на коте, можно считать единым существом. Этот «ослокот» (или «котосёл», кому как нравится), трубадур, петух и пёс могут построиться в очередь $4! = 24$ способами. Снова получаем $120 - 24 = 96$ годных вариантов.

г) **Решение 1.** Будем последовательно выбирать места для всех, в последнюю очередь — для кота и осла. Есть 5 мест для первого, 4 — для второго и 3 — для третьего. Теперь для кота и осла осталось только два места, и ясно, что выбор однозначен: кот должен выбрать верхнее из них, а осёл — нижнее. Поэтому всего вариантов $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 60$.

Решение 2. Подумаем, каких пирамид больше: где осёл выше кота или где кот выше осла? Из соображений равноправия их количества равны. Поэтому годится ровно половина пирамид: $120:2=60$.

Комментарий. Сходство между задачами 5.7 *а* и 5.3 *б* можно было бы заметить ещё при чтении условий, ничего не зная про их решения. Назовём бременских музыкантов именами гномов, получится вот что: «В конце произошло самое невероятное: Балин забрался на спину Глоина. Ори вскочил на голову Балина. А Фили подпрыгнул и оказался стоящим на голове Ори». Остаётся только заменить «забрался на спину» и «вскочил на голову» на «стоял на часах после», и задачи становятся неотличимы. Поэтому гарантировать совпадение ответов можно, даже не зная сами ответы.

5.8. Ответ. а) 33^5; б) $33\cdot32\cdot31\cdot30\cdot29$.

Решение. В пункте а) каждую букву можно выбрать 33 способами. Поэтому от корня дерева идут 33 ветки первого уровня, от каждой из них — 33 ветки второго уровня и т. д. Всего получается $33\cdot33\cdot33\cdot33\cdot33=33^5$ слов. В пункте б) на первом уровне тоже 33 ветки. На втором 32, так как выбранная буква для повтора запрещена. На третьем 31, так как теперь запрещены уже две буквы, и т. д. Всего $33\cdot32\cdot31\cdot30\cdot29$ слов. Оставим ответы в таком виде. Находить некрасивые значения красивых выражений в комбинаторике не принято.

5.9. Ответ. $33!$ способов.

Решение. Для выбора богатыря, выходящего первым, есть 33 способа. После каждого из них есть 32 способа выбрать второго богатыря и т. д. Для построения всех богатырей есть $33!$ способов.

Комментарий. Пусть вместо щитов богатыри держат таблички с буквами русского алфавита. Буква у каждого своя; и богатырей, и букв как раз по 33. Теперь ясно, что построить богатырей — всё равно что написать слово, используя каждую из 33 букв по одному разу.

5.10. Ответ. 4320 чисел.

Решение. В каждой паре соседей цифры разной чётности, значит, чётные и нечётные цифры строго чередуются. Но число делится на 4, значит, оно чётно; поэтому и последняя цифра чётна; тогда у нас пять чётных цифр на нечётных местах и четыре нечётные цифры — на чётных. Будем расставлять в два этапа: сначала чётные, потом нечётные цифры.

Подберём последнюю цифру. Надо, чтобы число, образованное двумя последними цифрами, делилось на 4. Так как предпоследняя цифра нечётна, последняя цифра должна быть 2 или 6 — в нечётных десятках только такие числа делятся на 4 ($12, 16, 32, 36, \ldots, 92, 96$). Итак, для последней цифры есть 2 варианта.

Выберем первую цифру. Она ненулевая. Кроме нуля и последней цифры осталось 3 чётные цифры. Для трёх других чётных цифр остаётся $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ вариантов. Итого для расстановки чётных цифр есть $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$ вариантов.

С нечётными цифрами проще: для первой есть 5 вариантов, для второй остаётся 4, для третьей — 3, для четвёртой — 2 варианта, итого $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ вариантов.

А всего $36 \cdot 120 = 4320$ чисел.

Занятие 6
Задачи-близнецы

Историй всего четыре. И сколько бы времени нам ни осталось, мы будем пересказывать их — в том или ином виде.

Хорхе Луис Борхес «Четыре цикла»

Это занятие построено на решении несложных задач, в основном уже знакомых типов. Кроме повторения у него есть две другие функции. Во-первых, развитие привычки видеть в задаче её математическую сущность, а не пытаться угадать ответ по внешним признакам. Для этого предлагаются конкретные методики: наклеивание ярлыков и разыгрывание сценок. Во-вторых, тренировка в понимании вопроса «Сколькими способами...» В чём его сложность, подробно написано в конце занятия, после решений задач. Преодолевать её удобно именно сейчас — после приобретения минимального опыта, но до перехода к сложным задачам.

Рекомендуем вскоре после выдачи условий установить всем вместе родство задач 6.1, 6.2 и 6.3 с помощью «наклеивания бумажек». Идея запомнится лучше, если при этом будет действительно производиться какое-то физическое действие. Например, наклеивание настоящих бумажек, вырезанных из распечатанного условия одной задачи, на условие другой. Или зачёркивание одних и дописывание других слов на доске. Если задача не будет «нечаянно» решена во время такого разбора, незачем тут же вместе решать её. Она сложнее задач для самостоятельного решения и пригодится, чтобы не скучали те, кто с ними справится сравнительно быстро. Разобрать её лучше всего в конце занятия.

Второй этап занятия — самостоятельное решение задач оставшихся десяти задач занятия. Сообщите заранее, что среди них тоже много близнецов, и предложите ребятам искать не только верные ответы для каждой по отдельности, а ещё и сходство и различия между задачами.

Разбор задач для самостоятельного решения — важная часть занятия, на которую следует оставить достаточно времени. Можно устанавливать родство задач из разных семейств разными способами. Чтобы дети лучше запомнили не только решения задач, но и саму идею математической одинаковости литературно различных задач, можно даже предложить одним и тем же восьми детям сымпровизировать мини-сценки по сюжетам всех задач-близнецов из какой-нибудь одной семьи. Например, если выбрана первая семья, сначала они встанут друг за другом и в порядке очереди получат роли из какого-нибудь общеизвестного фильма, выписанные по порядку на доске (обязательно с номерами). Вася стоял первым, поэтому ему достанется первая роль из списка и т. д. Потом эти же дети будут изображать клетки таблицы. Это очень просто: на доске рисуется таблица, и в клетки вписываются имена. Дети как-то становятся в очередь. «Я первый!» — кричит Вася, и учитель вписывает в его клетку цифру 1 и т. д. Наконец учитель раздаёт всем детям «подарки» — бумажки с цифрами. Вася, например, получит в подарок единицу.

Аналогично можно разыграть задачи из четвёртой семьи. Сначала двое ребят-«разбойников» из задачи 6.11 могут делить между собой восемь бумажек-«монет». Чтобы монеты были разными, пронумеруем их числами от 1 до 8. Потом один из ребят назначается нулём, а второй единицей и они делят те же бумажки, но теперь цифры означают номера позиций в пароле из задачи 6.10. Потом один назначается чёрным, а другой белым (например, в соответствии с цветом волос или какого-то предмета одежды), а номера на бумажках обозначают клетки таблицы с заранее написанными номерами из задачи 6.7.

Прочитайте условия трёх задач. Одинаковые или разные ответы у этих задач? Попробуйте объяснить своё мнение до того, как получите эти ответы.

Задача 6.1. Сколькими способами можно переставить буквы слова КРЫЛОВ так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

Задача 6.2. У скольких 6-значных чисел, составленных из 6 различных цифр 1, 3, 4, 5, 6, 7 (нет цифры 2), и чётные, и нечётные цифры идут в порядке возрастания?

Задача 6.3. Слон, Моська, Волк, Журавль, Ворона и Лисица пришли к И. А. Крылову за автографом. Сколькими способами они могут стать в очередь с условием, что и среди зверей, и среди птиц кто больше, тот должен получить автограф раньше?

Обсуждение. Наклеим в первой задаче поверх слова «буквы» бумажку со словом «*цифры*», поверх слова «слова» — бумажку *«числа»*, поверх слова «гласные» — бумажку *«чётные цифры»*, поверх слова «согласные» — бумажку *«нечётные цифры»*, поверх слова «КРЫЛОВ» — бумажку «134567», а поверх слов «алфавитном порядке» наклеим *«порядке возрастания»*. Получится «Сколькими способами можно переставить цифры числа 134567 так, чтобы и чётные цифры, и нечётные цифры шли в порядке возрастания?».

Поскольку мы понимаем, что способы отличаются именно полученными в результате перестановки числами, видим, что получилась в точности вторая задача.

После аналогичной замены третья задача приобретёт примерно такой вид: «1, 3, 4, 5, 6 и 7 пришли к И. А. Крылову за автографом. Сколькими способами они могут стать в очередь с условием, что и среди нечётных цифр, и среди чётных кто больше, тот должен получить автограф раньше?».

А теперь решим задачу, например, на языке задачи 6.1. Всего в слове шесть мест для букв. Выберем из них пару мест, на которых будут стоять гласные буквы. Это можно сделать $6 \cdot 5 : 2 = 15$ способами. Больше выбирать нечего: и порядок гласных букв на этих местах, и порядок согласных букв на оставшихся однозначно определяется условием. Поэтому 15 является ответом для всех трёх задач.

В задачах для самостоятельного решения не три, а, казалось бы, много задач. А сколько на самом деле? Разделите задачи на «семьи» задач-близнецов.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.4. Сколькими способами можно распределить восемь ролей среди восьми артистов?

Задача 6.5. Сколькими способами можно выбрать исполнителей ролей Красной Шапочки и Серого Волка из восьми артистов?

Задача 6.6. В Танином любимом спектакле заняты восемь артистов. Таня принесла два одинаковых букета. Сколькими способами она может выбрать двух артистов, которым сегодня подарит цветы после спектакля?

Задача 6.7. Чтобы не перепутать лекарства, Дуремар на каждую склянку наклеил таблицу 2×4, у которой каждая клетка покрашена либо в чёрный, либо в белый цвет. Сколько разных таблиц мог наклеить Дуремар?

Задача 6.8. На банки с пиявками Дуремар клеит таблицы 2×4, у которых две клетки покрашены в зелёный цвет, а остальные — в белый. Сколько разных таблиц может наклеить Дуремар?

Задача 6.9. Сколькими способами можно расставить в таблице 2×4 числа от 1 до 8?

Задача 6.10. Пароль от Wi-Fi состоит из восьми цифр — нулей и единиц. За сколько времени можно наверняка подобрать пароль, если тратить на проверку каждого варианта по 1 секунде?

Задача 6.11. Сколькими способами два разбойника могут разделить восемь различных монет между собой?

Задача 6.12. У Дуремара есть много одинаковых таблиц 2×4. В каждой таблице он красит одну клетку в чёрный цвет и одну — в зелёный, а остальные клетки оставляет белыми. Какое наибольшее число таблиц он может раскрасить по-разному?

Задача 6.13. Сколькими способами можно упаковать восемь разных подарков в восемь разных подарочных пакетов? В каждом пакете должен быть один подарок.

В этой книге есть и другие задачи-близнецы. При разборе второго близнеца полезно напомнить о первом. Обращаем внимание на близнецов, размещенных в разных занятиях или в задачнике: 1.2, 1.3, 2.2*а* и 8.4*а*; Д9 и Д32; Д10 и Д70*б*; Д29 и Д33*б*; Д73*б* и Д81.

Решения

Первая семья — задачи 6.4, 6.9, 6.13. **Ответ.** 8!.

Пояснить родство можно по-разному. Во-первых, заметив, что у них одинаковые деревья перебора. Во-вторых, наклеив новые слова вместо старых (например, роли и артистов из задачи 6.4 заменить на подарки и подарочные пакеты из задачи 6.13). В-третьих, заметив, что в каждой задаче есть очередь, и указав, кто и за чем в ней стоит: артисты за ролями, клетки за номерами или пакеты за подарками.

Вторая семья — задачи 6.5, 6.12. **Ответ.** $8 \cdot 7 = 56$.

При рисовании дерева происхождение одинакового ответа ясно. Наклеить бумажки непросто, но тоже можно:

«Сколькими способами можно выбрать ~~исполнителей ролей Красной Шапочки и Серого Волка~~ чёрную и зелёную клетки из восьми ~~артистов~~ клеток?»

Третья семья — задачи 6.6, 6.8. Это задачи на подсчёт количества пар. Не путать их с задачами предыдущей группы поможет сравнение задач 6.5 и 6.6. **Ответ.** $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

Установить родство задач очень просто: посадить артистов в клетки таблицы и подарить цветы тем двоим, кто оказался в зелёных клетках.

Четвёртая семья — задачи 6.7, 6.10, 6.11. Во всех задачах восемь раз делается выбор одного из двух вариантов.

Ответ. 2^8.

Подробнее о вопросе «Сколькими способами...»

Вопрос в комбинаторных задачах часто имеет форму «Сколькими способами можно что-то сделать?» На первых четырёх занятиях мы избегали таких вопросов, считая их сложными, на пятом допустили в отдельных задачах, на этом таких задач уже бóльшая часть. Поясним, что может сбивать с толку в таких вопросах, на примере задачи 6.4.

1. Если почти у всех артистов те же самые роли и только двое поменялись между собой — способ один и тот же? Нет, это разные способы.

2. Можно сначала выбрать исполнителя роли принцессы, а потом роли осла. А можно сначала исполнителя роли осла, а потом роли принцессы. Это разные способы? Нет, не обязательно. Важно, кто в итоге будет играть роль принцессы, а кто роль осла. А как именно организовать процесс выбора, неважно.

3. Можно выбрать исполнителей для ролей: кто играет принцессу, кто осла и т. д. А можно подбирать роли для исполнителей: какую роль дать Ане, какую Боре и т. д. Это разные способы? Нет, не обязательно. Повторим: важен не процесс выбора, а результат.

4. А что считать результатом? Список артистов с указанием розданных им ролей. Если списки разные, то и способы разные.

5. Значит, способы «Аня — принцесса, Боря — осёл, ...» и «Боря — осёл, Аня — принцесса, ...» разные, так как списки явно разные: один начинается с Ани, а второй — с Бори? Нет, важно не то, в каком месте списка ты находишься, а только то, какую роль ты играешь.

Свободное владение русским языком и опыт решения комбинаторных задач со временем делают ответы на все перечисленные вопросы интуитивно очевидными. Начинающим же бывает трудно понять, *что такое способ и какие способы считать разными, а какие одинаковыми*.

Осознав условие, полезно «*закодировать*» задачу с помощью удобной модели. Покажем, как закодировать задачу 6.4 с помощью многозначных чисел.

Построим артистов в шеренгу. Например, на первое место поставим Аню, на второе — Борю и т. д. Роли занумеруем произвольным образом. Например, принцесса — 1, осёл — 2 и т. д. Раздача ролей артистам теперь означает расстановку цифр от 1 до 8 на восьми местах. Например, запись «21...» означает, что Аня играет осла, Боря принцессу и т. д. Задача о распределении ролей сведена к подсчёту количества восьмизначных чисел, в которых по одному разу встречаются числа от 1 до 8.

Заключительный этап решения задачи — *организация выбора способа*. Если задача закодирована восьмизначными числами, то выберем сначала одну из восьми цифр на первое место, затем одну из семи оставшихся на второе и т. д. Получим ответ 8!. Если кодировки не было, то выберем сначала одну из восьми ролей для Ани, потом одну из семи оставшихся для Бори и т. д. Получим тот же ответ.

Мы не призываем обсуждать с учениками этапы решения и сообщать им, что именно они могли бы неправильно понять. Если проблемы с пониманием условия нет, незачем её создавать. Но если ребёнок никак не может решить, казалось бы, простую задачу, часто надо просто помочь ему осознать условие.

Обратим внимание на задачи 6.7, 6.8, 6.9 и 6.12. Независимо от наличия или отсутствия слов «сколькими способами» во всех четырёх задачах надо понимать, какие таблицы считать разными. По умолчанию таблицы сравнивают, накладывая друг на друга без поворотов и отражений. В данных задачах ничего не говорится о вертикалях и горизонталях. Значит, ничто не мешает отрезать в таблице нижний ряд и приклеить его к верхнему справа: результат сравнения таблиц не изменится. Новая таблица — это строка, что привычнее. Фактически это значит, что таблица (способ) кодируется строкой из восьми символов (например, цифр), а задачи равносильны таким.

Задача 6.7. Сколькими способами можно раскрасить цифры числа 12 345 678 в чёрный и белый цвета?

Задача 6.8. Сколькими способами можно покрасить в зелёный цвет две цифры в числе 12 345 678?

Задача 6.9. Сколько различных чисел можно записать, используя по одному разу каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

Задача 6.12. Сколькими способами можно в числе 12 345 678 покрасить одну цифру в чёрный цвет, а другую — в зелёный?

Занятие 7
Сложение, вычитание и умножение

Великий комбинатор не
стал раздумывать.

И. Ильф, Е. Петров «Золотой телёнок»

До сих пор мы, как правило, решали задачи на одну идею. С каждой идеей связано своё арифметическое действие. Чаще всего применяется умножение (занятия 1, 3, 5). Оно связано с делением на равные группы, ещё чаще — с поэтапным выбором. Вычитание (занятие 4) связано с отбрасыванием лишнего при переходе к дополнению и в случае, когда что-то подсчитано дважды. Разбиение объектов или комбинаций на группы, часто неравные (обычно при переборе), приводит к сложению.

Решая задачи вперемешку (именно это нам и предстоит), сложение и умножение легко перепутать. Задачи 7.1 и 7.2 — удобный повод обратить внимание на разницу между разбиением на группы (сложение) и поэтапным выбором частей комбинации (умножение). И тут и там есть разбиение. Но в первом случае мы делим на группы искомое *множество готовых комбинаций и складываем численность групп*. Во втором мы делим на части каждую комбинацию и *перемножаем количества частей*. Обсуждение задачи 7.1 очень подробно, аналогично рассуждать имеет смысл и в дальнейшем в тех задачах, в которых ученики перепутают сложение с умножением. Задачи 7.2*б* и 7.4 напоминают оба основных типа задач, связанных с вычитанием. В задаче 7.4*б* уместна иллюстрация с помощью кругов Эйлера.

Отдельного занятия по сложению не было не случайно. Само по себе сложение связано с разбиением на группы и поочерёдным перебором взаимоисключающих случаев. Всё это регулярно встречается и вне комбинаторики. Соответственно, таким способом подсчёта неплохо владеют даже начинающие математики. К задачам 7.2, 7.3, 7.7 и отчасти 7.6*а* можно относиться как к задачам на перебор.

Большинство задач этого занятия решаются более чем в одно действие и требуют предварительного планирования и комплексного применения нескольких идей и техник. Верный план решения не всегда единственный. Чтобы подчеркнуть это, мы привели альтернативные решения к задачам 7.2*б* и 7.6*а*. Разумеется, разные верные решения приводят к одному и тому же ответу.

Задача 7.1. В магазине игрушек есть три медведя, семеро козлят и тридцать восемь попугаев, все разные. Сколькими способами покупатель может выбрать: а) одну игрушку; б) по одной игрушке каждого из трёх видов; в) две игрушки разных видов?

Обсуждение. а) В магазине всего $3 + 7 + 38 = 48$ игрушек, выбрать одну можно 48 способами.

б) Три игрушки — это уже комбинация, выбор делаем поэтапно. Выберем сначала медведя одним из 3 способов (рисуем три ветви дерева). Затем козлёнка одним из 7 способов (каждая ветвь разделяется на семь веток поменьше). Выбор одного из 38 попугаев разделяет каждую из $3 \cdot 7 = 21$ веток ещё на 38, то есть выбрать по одной игрушке каждого вида можно $3 \cdot 7 \cdot 38 = 798$ способами.

Замечание. Решение пункта б) удобно изобразить деревом (см. рис. 1), ответ получается умножением. Но и пункту а) тоже соответствует дерево (см. рис. 2). Три его ветви соответствуют возможности выбрать медведя (3 способа), козлёнка (7 способов) или попугая (38 способов). Однако ответ получается сложением. Таким образом, дерево не даёт возможности автоматически отличить умножение от сложения. Важно, как оно устроено. В пункте а) *случаи разделяются на три взаимоисключающие группы* (медведь, козлёнок или попугай), количество элементов в группах складывается. А в пункте б) в три этапа выбираем части покупки: сначала выбирается медведь, затем *для каждого* медведя – козлёнок, наконец *для каждой пары* «медведь + козлёнок» выбирается попугай. Такому *постепенному выбору* (или *постепенному построению* набора) соответствует умножение.

в) Пары могут быть трёх видов: «медведь + козлёнок», «медведь + попугай» и «попугай + козлёнок». Дерево с тре-

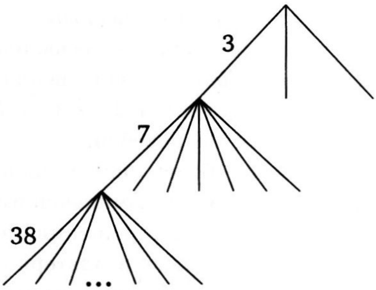


Рис. 1

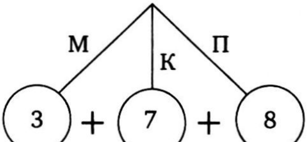


Рис. 2

мя ветвями (см. рис. 3) напоминает пункт а), но слагаемые в кружочках не даны в условии. Количество пар «медведь + + козлёнок» иллюстрируется деревом (см. рис. 4) и находится с помощью умножения: $3 \cdot 7 = 21$. С другими парами разбираемся аналогично, всего пар $3 \cdot 7 + 3 \cdot 38 + 7 \cdot 38 = 21 + 380 = 401$.

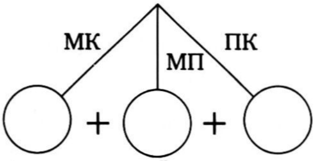


Рис. 3

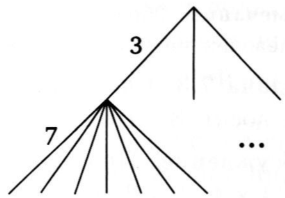


Рис. 4

Задача 7.2. В классе учатся 5 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно выбрать:

а) пару учеников одинакового пола;

б) пару учеников, где хотя бы один мальчик;

в) четырёх учеников, среди которых мальчиков и девочек поровну?

Обсуждение. Мы уже не задумываясь умеем находить число пар из любого количества объектов или людей, для этого нет необходимости строить дерево. Дерево понадобится, чтобы *комбинировать* числа пар. Соответственно, и число ветвей из одного узла у нас здесь будет равно числу пар.

а) Множество возможных пар одинакового пола разбивается на взаимоисключающие подмножества пар девочек (их $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$) и пар мальчиков (их $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$). Количество элементов в множестве складывается из их количеств в подмножествах, поэтому всего будет $45 + 10 = 55$ пар.

б) Легко найти множество всех пар, временно забыв об условии «хотя бы один мальчик». Всего у нас $10 + 5 = 15$ учеников, из них можно составить $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ пар учеников. Возвращаемся к условию: из этих пар нам не подходят 45 пар девочек. Значит, всего пар с мальчиком $105 - 45 = 60$.

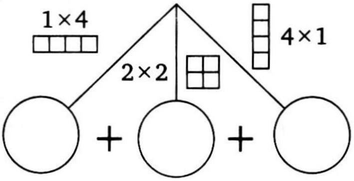
Замечание. Можно и по-другому: сложить число пар мальчиков с числом пар мальчик—девочка (их $5 \cdot 10 = 50$).

в) Требуемая четвёрка учеников составляется из двух частей: пары мальчиков и пары девочек. Строим четвёрку *в два этапа*: сначала выбираем любую пару девочек из 45, затем к каждой паре можем добавить любую из 10 пар мальчиков (такое построение иллюстрируется *двухэтажным* деревом). Тем самым всего получаем $45 \cdot 10 = 450$ четвёрок.

Замечание. Обратите внимание на то, что ни пара мальчиков, ни пара девочек не является элементом множества четвёрок.

Задача 7.3. Сколькими способами можно вырезать из клетчатой доски 8×10 прямоугольник из 4 клеток?

Обсуждение. Прямоугольник из 4 клеток может иметь размеры 1×4, 2×2 или 4×1. Найдём по отдельности количество способов вырезать прямоугольник каждого из этих видов, а результаты сложим. Этот план решения изображён на рисунке.



В каждой из 8 строк прямоугольник 1×4 может быть расположен 7 способами (так как для его самой левой клетки есть 7 мест), в первом кружочке записываем $8 \cdot 7 = 56$. Для левой верхней клетки квадрата 2×2 есть $7 \cdot 9 = 63$ места. В каждом из 10 столбцов верхняя клетка прямоугольника 4×1 может быть расположена 5 способами, всего таких прямоугольников $10 \cdot 5 = 50$. Всего имеется $56 + 63 + 50 = 169$ способов вырезать прямоугольник из 4 клеток.

Задача 7.4. Леночка нарисовала зелёную ёлочку, украшенную шестью шариками (см. рисунок).

Каждый шарик она может раскрасить одним из четырёх цветов: красным, жёлтым, синим или оранжевым. Сколькими способами Леночка может раскрасить шарики, чтобы:

а) хотя бы один из них был жёлтым;

б) среди шариков был хотя бы один жёлтый и хотя бы один красный?

Обсуждение. Эту задачу удобно решать методом «отбрасывания лишнего». Леночка шесть раз (для каждого шарика) выбирает один из четырёх цветов, поэтому всего есть 4^6 способов раскрасить шарики.

а) Если ни одного жёлтого шарика нет, то используются лишь три оставшихся цвета. Поэтому без жёлтого шарика есть 3^6 способов раскраски, остальные $4^6 - 3^6$ содержат хотя бы один жёлтый шарик.

б) Без жёлтого шарика 3^6 способов, без красного тоже 3^6. Но если сложить $3^6 + 3^6$, то способы, в которых нет ни жёлтого, ни красного шарика, окажутся посчитанными дважды. Чтобы и они были посчитаны однократно, их количество надо вычесть из суммы $3^6 + 3^6$. Какие это способы? Такие, в которых каждый из шести шариков либо синий, либо оранжевый. Цветов осталось только два, поэтому способов 2^6. Итак, «плохих» способов раскраски, не содержащих жёлтого или красного шарика, $3^6 + 3^6 - 2^6$. Остальные $4^6 - 3^6 - 3^6 + 2^6$ «хорошие», содержат и жёлтый, и красный шарики.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.5. Сколькими способами можно выстроить в шеренгу четырёх мальчиков и четырёх девочек так, чтобы среди первых четырёх человек была хотя бы одна девочка?

Задача 7.6. Сколькими способами можно разместить на шахматной доске пару одинаковых королей:

а) бьющих друг друга;

б) не бьющих друг друга?

Задача 7.7. Кузнечик прыгает по числовому лучу вправо прыжками длины 2 или 5, при этом у него есть силы совершить не более трёх прыжков длины 5. Сколькими способами он может попасть с 1 на 33?

Задача 7.8. а) Есть одна карточка с цифрой 5, две карточки с цифрой 3 и сто карточек с цифрой 2. Сколькими способами можно составить из них *десятизначное* число, у которого произведение цифр оканчивается на 0?

б) Все такие числа выписали подряд по возрастанию. Какое число стоит на 455-м месте?

Задача 7.9*. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 31 шашку так, чтобы никакие две шашки не стояли в клетках с общей стороной?

К задачам этого занятия можно добавить дополнительные задачи Д5, Д14, Д15, Д29, Д45, Д59–Д72, Д82, Д86, Д87, Д92.

Решения

7.5. Ответ. $8! - 4! \cdot 4! = 39\,744$ способов.

Решение. Построить в шеренгу 8 человек можно $8! = 40\,320$ способами. Из них «плохие» те, в которых сначала стоят четыре мальчика, а потом четыре девочки. Четырёх мальчиков можно построить $4!$ способами, четырёх девочек тоже $4!$ способами. Сделать сначала одно, потом другое можно $4! \cdot 4!$ способами. Остальные $8! - 4! \cdot 4!$ способов хорошие. Ответ можно оставить в таком виде, а можно и вычислить: $8! - 4! \cdot 4! = 40\,320 - 576 = 39\,744$.

7.6. Ответ. а) 210 способов; б) 1806 способов.

Решение 1. Короли могут бить друг друга по горизонтали, вертикали или диагонали. В первом случае левый король может быть на любой клетке, кроме восьми клеток правого края, а место правого определится однозначно; итого 56 пар. Аналогично 56 пар во втором случае. Третий случай разобьём на два подслучая: нижний король стоит справа или слева от верхнего. Если справа, то он может быть в любой клетке, кроме клеток верхней горизонтали и левой вертикали. Такие клетки образуют квадрат 7×7. Значит, положений для нижнего короля и нужных пар 49. Аналогично для подслучая, когда нижний король слева от верхнего.

Всего будет $2 \cdot 56 + 2 \cdot 49 = 210$ пар.

Решение 2. Разделим все клетки на 3 группы.

1. Есть 4 угловые клетки, с которых король бьёт по 3 клетки, всего есть $4 \cdot 3 = 12$ пар бьющих королей с участием угловых.

2. С 24 крайних (без угловых) король бьёт по 5 клеток, с участием крайних есть $24 \cdot 5 = 120$ пар (некоторые сосчитаны дважды).

3. Есть 36 центральных клеток, с них король бьёт по 8 клеток, итого $36 \cdot 8 = 288$ пар. Всего $12 + 120 + 288 = 420$ пар бьющих друг друга королей, но каждая пара сосчитана дважды. Значит, на самом деле пар $420 : 2 = 210$.

б) Выбрать пару мест для королей на 64 клетках доски можно $\frac{64 \cdot 63}{2} = 2016$ способами. Из них в 210 случаях короли бьют друг друга, а в остальных $2016 - 210 = 1806$ случаях — не бьют.

7.7. Ответ. 79 способов.

Решение. Кузнечик должен сдвинуться на 32. Маршрут кузнечика определяется количеством прыжков длины 5 и их расположением. По условию их 0, 1, 2 или 3.

Если их нет вообще, то сдвинуться прыжками длины 2 надо на 32, таких прыжков 16, это один способ.

Если прыжок длины 5 один, то сдвинуться прыжками длины 2 надо на $32 - 5 = 27$, что невозможно, так как 27 — нечётное число.

Если прыжков длины 5 два, то сдвинуться двойными прыжками надо на $32 - 10 = 22$, таких прыжков 11, а всего прыжков 13. Маршрут определяется тем, какие номера у прыжков длины 5. Выбрать пару из 13 номеров можно $\frac{13 \cdot 12}{2} = 78$ способами.

Если прыжков длины 5 три, то сдвинуться прыжками длины 2 надо на $32 - 15 = 17$, что невозможно, так как 17 — нечётное число.

Итак, попасть с 1 на 33 кузнечик может $1 + 78 = 79$ способами.

7.8. Ответ. а) 460 способов; б) 5 322 222 322.

Решение. а) Среди выбранных наверняка окажутся карточки с двойкой, поэтому произведение цифр чётное. Оно оканчивается на 0 тогда и только тогда, когда карточка с пятёркой тоже попала в число выбранных. Карточек с тройкой может быть 0, 1 или 2.

1. Троек нет. Пятёрка может быть на любом из 10 мест, остальные заняты двойками. Таких чисел 10.

2. Тройка одна. Тогда пятёрка может стоять на любом из 10 мест, тройка на любом из 9 оставшихся мест. Таких чисел $10 \cdot 9 = 90$.

3. Троек две. Сначала выбираем одно из 10 возможных мест для пятёрки, затем пару мест из 9 оставшихся для троек. Второе можно сделать $\frac{9\cdot 8}{2}=36$ способами, а всего чисел с одной пятёркой и двумя тройками $10\cdot 36=360$.

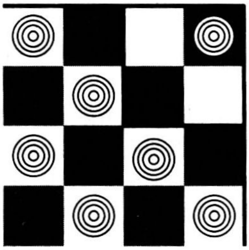
Сложив числа из трёх групп, получим $10+90+360=460$ чисел.

Замечание. Возможен и другой порядок перечисления. Сначала выберем место для пятёрки, а потом для каждого из этих мест рассмотрим три случая в зависимости от количества троек. Такому решению соответствует выражение $10\cdot\left(1+9+\frac{9\cdot 8}{2}\right)$. Ответ тот же, это можно и вычислить, и увидеть из распределительного закона умножения.

б) Место 455 близко к концу, то есть там стоит одно из самых больших чисел. Такие числа начинаются на 53. Их девять: $532\ldots 2$, $532\ldots 23$, $532\ldots 32$, $\ldots$, $5332\ldots 2$. Эти числа идут по возрастанию и занимают места с 452 по 460. Значит, на 455-м месте стоит число 5 322 222 322.

7.9. Ответ. 68 способов.

Решение. Разобьём доску на 16 квадратиков 2×2. Ясно, что один из квадратиков *особый*, в нём только одна шашка, а в остальных пятнадцати — по две шашки, причём в противоположных углах. Итак, в неособом квадратике либо обе шашки стоят на белых, либо обе — на чёрных клетках. Но тогда и в соседнем (по стороне) квадратике шашки стоят на клетках того же цвета. Тем самым это распространяется на все неособые квадратики, то есть вне особого квадратика все шашки стоят на клетках одного цвета: либо все стоят на чёрных, либо все на белых клетках. Заведомо можно в особом квадратике поставить шашку на любую из клеток того же цвета. Итого мы получаем 64 варианта: отмечаем любую клетку и занимаем шашками все клетки того же цвета, кроме отмеченной.



Но есть ещё случаи, когда шашка в особом квадрате ставится на клетку противоположного цвета. Пусть для определённости в неособых квадратах заняты белые клетки. Если особый квадрат граничит с тремя или четырьмя неособыми, то каждая чёрная клетка в нём граничит с занятой белой и шашку на чёрную клетку поставить нельзя. Рассмотрим особые квадраты в углах доски. Если угловая клетка белая, то с чёрными клетками возникает та же проблема. Но в тех углах, где угловая клетка чёрная, она не граничит с неособыми квадратами, и туда всё-таки можно поставить шашку (см. рисунок)! Итого, кроме 64 «одноцветных», есть ещё 4 «разноцветные» расстановки: по одной для каждого угла. А всего их $64+4=68$.

Занятие 8
Сочетания

Сначала надо промять пальцами все тройки прутьев, чтобы потом они были более послушными... Перебрав все, можно поставить вазочку широкой стороной на стол.

Игорь Скрипник «Плетение из лозы»

Занятие преследует две цели. Во-первых, научить узнавать задачи на число сочетаний (то есть на число подмножеств заданного размера) и уверенно находить к ним ответ.

Во-вторых, познакомить с идеей деления в случаях, когда каждый способ подсчитывается одинаковое количество раз.

Предлагаем вначале, до выдачи всех заданий, дать задачу 8.1 *б* и предложить найти её ответ, не объясняя пока решения. Если кто-то вскоре предложит неверный ответ 60 или 20, то попросить его перечислить способы (60 перечислять страшно, но попросите тогда хоть 15 перечислить). При попытке перечисления обнаружатся повторяющиеся способы. После этого уместно перейти к простой задаче 8.1 *а*, которая поможет и ответ в задаче 8.1 *б* получить, и идею деления в простом виде вспомнить.

Подсчёт пар в задаче 8.1 *а* не должен вызвать трудностей. Но количество пар некоторые ученики привыкли считать как сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, а другие просто запомнили формулу и отвыкли задумываться о её происхождении. Важно вспомнить, откуда берётся деление и почему именно на 2.

Задачи 8.2, 8.3 и 8.5 закрепляют навык нахождения числа сочетаний. Их дополнительные роли такие. Задача 8.2 обращает внимание на разницу между сочетаниями и размещениями без повторений. (Это важно и закрепляется в задаче 8.7; произносить термин «размещения» и отдельно разучивать их формулу мы считаем излишним.) Задача 8.3 подводит к свойству $C_n^k = C_n^{n-k}$, которое доказывается в задаче 8.6. Задача 8.5 *а* напоминает о кодировании и родстве задач.

Задача 8.8 имеет короткое решение, но разглядеть в ней сочетания непросто.

В задачах 8.9 и 8.10 кроме сочетаний требуются и дополнительные соображения.

Формулу $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ мы не доказываем в общем виде и не используем при решении задач, чтобы снизить возрастной порог.

Кроме того, запись k множителей в числителе поясняет суть задачи, а автоматическое применение формулы нет.

Уместно ли на первом занятии разбирать пример вычисления C_{12}^5 и несколько аналогичных ему, зависит от вычислительной культуры учащихся. В пятом или начале шестого класса это может отнять слишком много сил. Но если так никогда и не потренироваться не путать количество множителей, а затем сокращать дробь, то после заучивания формулы в общем виде многие будут выписывать по 12 множителей в числителе и знаменателе, а потом решать пример на умножение и деление в 23 действия. Или считать задачу неприемлемо сложной.

Заметим, что, как и в других комбинаторных задачах, доводить ответ на вопрос «Сколько..?» до числа не всегда уместно. Если число большое, то достаточно ограничиться выражением, использующим «цэшки» (*см. задачу* 8.9 *г*). *Если числа небольшие, а в задаче много действий, логично проводить вычисления полностью* (*см. задачу* 8.9 *в*). *А задачу* 8.10 *и вовсе невозможно решить, если полениться вычислить* C_6^3.

Проверять ответы, не доведённые до чисел, иногда непросто. Чтобы продемонстрировать это, мы в задаче 8.9 *б* кроме безупречного решения 1 привели и решение 2, приводящее к менее красивому, но не менее верному ответу. Надеемся, что учитель одобрит любое верное решение. А затем, возможно, покажет своё, более изящное.

Менее очевидна ситуация, когда ученик неверно понимает условие задачи. Это не всегда его ошибка. Иногда это ошибка автора задачи, которому не удалось её чётко и однозначно сформулировать. Часто автор подразумевает негласные общепринятые договорённости, к которым ученик ещё не привык. Честный учитель пояснит эти договорённости или скажет: «Задачу можно понимать по-разному. Давайте *договоримся*, что имелось в виду вот что...» Например, в задаче 8.9 *а* ученик не догадался разделить на 2. Но кто сказал, что команды действительно равноправны? На равноправие можно было намекнуть, вставив в условие, что команды должны сыграть между собой. А так, может быть, одна будет играть с командой семиклассников, а другая — с командой пятиклассников, и тогда разница очень даже есть. Но даже если они будут играть между собой, то половинки поля бывают неравноправны, например, из-за солнца. Вместо торжествующего «Неправильно! Вы не учли, что команды равноправны!» можно проверить ответ для деления, например, четырёх человек на две пары на конкретных четырёх детях. Затем заметить, что полученный ответ без деления на два верен, если команды не считать равноправными. А затем решить задачу для равноправных команд. Сказанное касается не только этой задачи и не только этого занятия. Готовность рассматривать альтернативные точки зрения и договариваться важна всегда.

Задача 8.1. Пять друзей сняли в гостинице два номера: двухместный и трёхместный. Сколькими способами можно выбрать тех, кто поселится:

а) в двухместном номере; б) в трёхместном номере?

Обсуждение. а) Выбрать двоих из пятерых можно $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ способами. Вспомним, откуда берётся деление на 2 и почему рассуждение «выберем первого жителя двухместного номера одним из пяти способов, затем второго одним из четырёх способов, получим ответ $5 \cdot 4 = 20$» неверно. Потому что способы «в двухместный — Пётр и Иван» и «в двухместный — Иван и Пётр» — на самом деле один и тот же способ, а при подсчёте $5 \cdot 4 = 20$ он считался дважды, как и все остальные способы.

б) Выберем сначала первого жителя трёхместного номера одним из пяти способов, затем второго одним из четырёх способов, затем третьего одним из трёх способов, получим ответ $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Как и в пункте а), его надо разделить... на 3? Тогда получим ответ 20. Это настораживает. Ведь если выбраны два жителя двухместного номера, то в трёхместный должны пойти остальные трое. Поэтому ответы в пунктах а) и б) должны быть одинаковыми. А почему, собственно, мы решили 60 на что-то делить? Потому что каждый способ считался не один раз. Но и не 3. Выбрать Ивана, Петра и Николая можно шестью способами: ИПН, ИНП, ПНИ, ПИН, НПИ и НИП. Ответ $60 : 6 = 10$ ожидаемо совпадает с ответом в пункте а).

Задача 8.2. В колоде 32 карты. Сколько существует способов:

а) выложить в ряд 10 карт; б) получить 10 карт на руки?

Обсуждение. а) Для выбора первой карты есть 36 возможностей, после каждой из них — 35 возможностей выбрать вторую карту и т. д. Постепенно выстраивается дерево из 10 «этажей», на последнем у него $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$ веточки. Вычислять произведение не стоит. Применив основное свойство дроби, его можно записать короче: $\frac{32!}{22!}$.

б) Если перечислить все возможные способы выкладывания 10 карт в ряд, окажутся перечисленными и все способы получить их на руки. Каждый способ будет перечислен неоднократно, так как порядок их получения теперь неважен: «тройка, семёрка, туз, ...» и «семёрка, туз, ..., тройка» — это один и тот же набор карт. Сколько раз мы считали каждый набор из 10 карт? Столько, сколькими способами эти 10 карт можно выложить в ряд, то есть 10! раз. Поэтому ответ предыдущего пункта надо разделить на 10!. Получится $\frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23}{10!}$ способов. Короткая запись: $\frac{32!}{10!\cdot 22!}$ способов.

Замечание. Вычислять значение выражения в таких случаях не принято, от этого ответ станет менее понятным. Коротко он записывается так: C_{32}^{10}. Вообще, количество способов выбрать k предметов из n без учёта их порядка называется числом сочетаний из n по k и обозначается C_n^k (читается «Це из эн по ка»).

Предлагаем удобный способ вычисления значения C_n^k без калькулятора для не слишком больших чисел. Например, надо найти C_{12}^5. Пишем черту дроби и начинаем постепенно выписывать множители в числитель и в знаменатель парами, начиная с самых больших и постепенно уменьшая их на 1. На первом шаге получается $\frac{12}{5}$ (самые большие множители берутся из записи C_{12}^5, надо только не перепутать верх и низ), на втором $\frac{12\cdot 11}{5\cdot 4}$, затем $\frac{12\cdot 11\cdot 10}{5\cdot 4\cdot 3}$, $\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$ и наконец $\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$. Всё, в знаменателе дошли до 1, теперь пора сокращать дробь. Сократив 12 и $4\cdot 3$, получим $\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 2\cdot 1}$. Теперь сократим на 5 и на 2. Получим $11\cdot 9\cdot 8 = 792$.

А что делать, если после всех сокращений в знаменателе что-то осталось и нацело не делится? Должно разделиться! Проверьте ещё раз, вы где-то ошиблись...

Задача 8.3. На математический кружок ходят 10 человек. Сколько можно из них составить разных команд для участия: а) в математической регате (4 человека); б) в математическом бое (6 человек)?

Обсуждение. Задача похожа на предыдущую. В пункте а) требуется найти C_{10}^4, а в пункте б) — C_{10}^6. Поясним ещё раз подробно все три действия.

а) 1. Выбрать первого участника можно 10 способами, второго — 9, третьего — 8, четвёртого — 7. Получается $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ способов.

2. Каждой команде соответствует много способов организации выбора. Например, можно было выбрать сначала Антона, потом Диму, потом Еву и потом Олю, а можно сначала Олю, потом Диму, потом Еву, потом Антона; результат тот же. Сколько способов организовать выбор соответствует одной и той же команде? Столько же, сколькими способами четверых ребят можно построить в очередь, то есть 4!.

3. Если каждую команду считать 4! раз, получится $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. А если считать по одному разу, то $C_{10}^4 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ команд. Это и есть ответ.

б) Рассуждая аналогично, получим

$$C_{10}^6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210.$$

Сокращение дроби на 6 и на 5 привело нас к тому же ответу, что в пункте а).

Замечание. Совпадение ответов можно было предсказать не только до их вычисления, но даже до начала работы над пунктом а). Если регата и матбой проходят одновременно, то, выбрав четверых участников регаты, мы тем самым автоматически составили из шестерых оставшихся команду для матбоя. Поэтому количество команд одинаковое.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.4. Назовём друзей из первой задачи именами А, Б, В, Г и Д. Перечислите явно все возможные:

а) пары для заселения в двухместный номер;

б) тройки для заселения в трёхместный номер.

Задача 8.5. Сколько десятизначных чисел можно составить:

а) из четырёх единиц и шести двоек;

б) из четырёх единиц и шести нулей?

в) Выпишите в порядке возрастания первые пять чисел в каждом из предыдущих пунктов.

Задача 8.6. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Задача 8.7. У людоеда в подвале томятся 25 пленников.

а) Сколькими способами он может выбрать одного из них себе на завтрак, другого на обед, третьего на полдник, а четвёртого на ужин?

б) А сколько есть способов выбрать четверых, чтобы отпустить на свободу?

Задача 8.8. Провели 20 прямых; любые две пересеклись, но никакие три не пересеклись в одной точке. Сколько получилось: а) точек пересечения; б) треугольников со сторонами на этих прямых?

Задача 8.9. а) Сколькими способами можно разделить 12 человек на две волейбольные команды по 6 человек?

б) Тот же вопрос, если Петя с Васей должны оказаться в разных командах.

в*) Сколькими способами можно разделить 4 мальчиков и 8 девочек на две команды по 6 человек, если в каждую команду должен входить хотя бы один мальчик?

г) Сколькими способами можно разделить 18 человек на три команды по 6 человек?

Задача 8.10. На кружке по рисованию двадцать учеников, у всех одинаковые наборы из шести фломастеров. Каждый использовал по три фломастера из набора. Оказалось, что никакие два ученика не выбрали один и тот же набор цветов. Сколькими способами ребята могли выбрать фломастеры?

К задачам этого занятия можно добавить дополнительные задачи Д73–Д84, Д86, Д92.

Решения

8.4. Ответ. а) АБ, АВ, АГ, АД, БВ, БГ, БД, ВГ, ВД, ГД;
б) АБВ, АБГ, АБД, АВГ, АВД, АГД, БВГ, БВД, БГД, ВГД.

Решение. а) Эта задача — близнец задачи 1.2 про подсчёт отрезков. Названия точек A, B, C, D, E кодируют имена друзей А, Б, В, Г, Д. Запишем ответ в алфавитном порядке: АБ, АВ, АГ, АД, БВ, БГ, БД, ВГ, ВД, ГД.

б) Ответ снова можно выписывать в алфавитном порядке. Получится список: АБВ, АБГ, АБД, АВГ, АВД, АГД, БВГ, БВД, БГД, ВГД. Если выписывать дополнения к парам из пункта а), порядок окажется противоположным.

8.5. Ответ. а) $C_{10}^4 = 210$ чисел; б) $C_9^3 = 84$ числа;

в) 1 111 222 222, 1 112 122 222, 1112 212 222, 1 112 221 222, 1 112 222 122 для пункта а);

1 000 000 111, 1 000 001 011, 1 000 001 101, 1 000 001 110, 1 000 010 011 для пункта б).

Решение. а) Чтобы задать число, надо выбрать из 10 мест 4, на которых будут стоять единицы. Это можно сделать

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \text{ способами.}$$

Комментарий. Выражение $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ являлось ответом и в задаче 8.3 *а*. Было подсчитано, что $C_{10}^4 = 210$. Но интересно не столько число 210, сколько причина совпадения. Задачу о выборе 4 участников регаты из 10 членов кружка можно закодировать с помощью единиц и двоек. Для этого кружковцев надо построить в ряд и тех, кто стоит на месте 1, взять в команду, а тех, кто стоит на месте 2, не взять.

б) На первом месте 0 стоять не может, там стоит 1. Осталось выбрать из 9 оставшихся мест 3 места для остальных единиц (или 6 мест для нулей). Получится

$$C_9^3 = C_9^6 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ числа.}$$

8.6. Решение 1. Выбрать k человек из n для участия в регате — всё равно что выбрать $n-k$ человек, которые в ней участвовать не будут. Первое можно сделать C_n^k способами, а второе — C_n^{n-k}.

Решение 2. Сколько n-значных чисел можно записать с помощью k единиц и $n-k$ двоек? Если выбирать места для единиц, то C_n^k, а если для двоек, то C_n^{n-k}. Но ответы должны совпасть.

Комментарий. Доказанное свойство помогает упростить вычисление C_n^k при $k > \frac{n}{2}$. Например, $C_{12}^7 = C_{12}^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$.

8.7. Ответ. а) $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$ способов; б) $C_{25}^4 = 25 \cdot 23 \cdot 22$ способов.

Решение. В пункте а) порядок выбора важен (что съесть на завтрак, а что на ужин, людоеду не всё равно), а в пункте б) нет.

а) На завтрак можно выбрать любого из 25 пленников, на обед — любого из 24 оставшихся, на полдник — любого из

23 оставшихся, на ужин — любого из 22 оставшихся. По правилу умножения получаем ответ $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$.

б) Начало решение — как в пункте а). Но теперь каждую четвёрку счастливчиков мы считали $4! = 24$ раза. Поэтому ответ в 24 раза меньше предыдущего и равен

$$C_{25}^{4} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{24} = 25 \cdot 23 \cdot 22.$$

8.8. Ответ. а) $C_{20}^{2} = 190$ точек пересечения;

б) $C_{20}^{3} = 1140$ треугольников.

Решение. а) Точек пересечения столько же, сколько пар прямых, то есть $C_{20}^{2} = \dfrac{20 \cdot 19}{2!} = 190$.

б) Треугольников столько же, сколько троек прямых. А три прямые из двадцати можно выбрать

$$C_{20}^{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140 \text{ способами.}$$

Комментарий. Получив ответ с помощью абстрактных рассуждений, приятно и полезно убедиться в его правильности для маленьких чисел. Если прямых было бы не 20, а 3, то аналогичная формула имела бы вид $\dfrac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = 1$. Отлично, три прямые уж точно задают один треугольник. Если прямых 4, то получим ответ $\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$, что тоже легко подтверждается чертежом. Дальше рисовать прямые и считать треугольники сложно, но цель и так достигнута, решение выдержало проверку.

8.9. Ответ. а) $C_{12}^{6} : 2 = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6! \cdot 2}$ способов;

б) $C_{10}^{5} = \dfrac{10 \cdot 19 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252$ способа;

в) 434 способа; г) $C_{18}^{6} \cdot C_{12}^{6} : 6$ способов.

Решение. а) Выбрать 6 человек из 12 можно

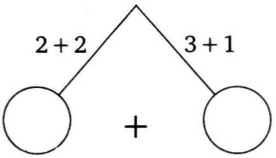
$$C_{12}^{6} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6!} \text{ способами.}$$

Но правильный ответ вдвое меньше и равен $\dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 6!}$, поскольку для любых шести человек выбор этих шести человек и выбор оставшихся шести человек приводит к одному и тому же разбиению на команды.

б) **Решение 1.** В команду для Пети надо выбрать 5 человек из 10 (кроме него самого и Васи). Это можно сделать

$$C_{10}^{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252 \text{ способами.}$$

Решение 2. Посчитаем сначала «плохие» способы, когда Петя с Васей в одной команде. Добавить к ним в команду ещё четырёх человек можно $C_{10}^4 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!}$ способами. Остальные $C_{12}^6 : 2 - C_{10}^4 = 252$ способа хорошие.



в) В командах могут быть либо по два мальчика, либо в одной три, в другой один. Подсчитаем количество разбиений на команды в каждом случае, а потом сложим их (см. рисунок).

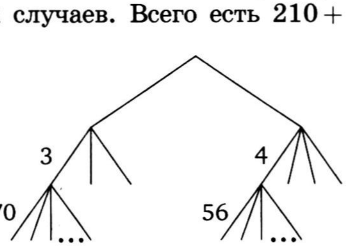
Рассмотрим первый случай: в каждой команде по два мальчика. Выбрать двух мальчиков из четырёх можно $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ способами. Аналогично пункту а) разделить четырёх мальчиков на две группы по два человека можно не 6, а $6 : 2 = 3$ способами. Этот результат можно было получить и проще: добавить к Пете в команду можно любого из трёх мальчиков. Теперь в Петину команду надо добавить любых четырёх девочек. Это можно сделать $C_8^4 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70$ способами. Сформировать две команды по 2 мальчика и четыре девочки в каждой можно $3 \cdot 70 = 210$ способами.

Второй случай: в одной команде один мальчик (его можно выбрать четырьмя способами), в другой — остальные трое. Осталось из восьми девочек выбрать трёх, которые дополнят команду с тремя мальчиками. Это можно сделать

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56 \text{ способами.}$$

Получаем $4 \cdot 56 = 224$ способа. Заметим, что вместо трёх девочек можно было выбирать и пятерых в команду к одинокому мальчику, результат бы не изменился, так как $C_8^5 = C_8^3$.

Осталось сложить результаты двух случаев. Всего есть $210 + 224 = 434$ разбиения на команды.



Замечание. По ходу решения можно постепенно рисовать дерево (см. рисунок).

г) Сначала выберем шестерых ребят в одну команду одним из C_{18}^6 способов. Затем шестерых из оставшихся 12 ребят в другую команду одним из C_{12}^6 способов. Остальных шестерых запишем в третью команду. Сделать сначала один выбор, а потом другой можно $C_{18}^6 \cdot C_{12}^6$ способами. Как и в пункте а), заметим, что команды равноправны, поэтому каждый способ мы считали несколько раз. Сколько? Столько, сколькими способами можно упорядочить три команды, то есть $3! = 6$ раз. Поэтому правильный ответ: $C_{18}^6 \cdot C_{12}^6 : 6$.

8.10. Ответ. 20!.

Решение. Выбрать три цвета из шести можно $C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$ способами. Все они по разу использованы учениками. Расположить двадцать троек фломастеров по порядку можно 20! способами.

Дополнительные задачи

Д1. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? (Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору, экватор тоже является параллелью.)

Д2. У скольких двузначных чисел сумма цифр — простое число?

Д3. В Кругляндии все двадцать городов расположены на кольцевой дороге. Турагентство предлагает жителям каждого города по одному туру во все города, кроме ближайших соседних. Сколько разных туров предлагает турагентство?

Д4. На окружности по часовой стрелке отмечены точки

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J,\ K,\ L,\ M,\ N.$$

Красным отрезком соединены точки E и M. Сколько отрезков с концами в остальных точках пересекают EM?

Д5. В стране 3 города: Айск, Бийск и Вийск. Из Айска в Бийск летает 7 прямых рейсов, из Айска в Вийск — 11 прямых рейсов, из Бийска в Вийск — 13 прямых рейсов. Сколько всего маршрутов из Айска в Вийск (прямых и с пересадкой в Бийске)?

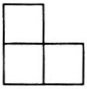
Д6. По кругу расположены 4 каюты, в первой едет 13, во второй — 16, третьей — 17, четвёртой — 24 пассажира. Каждый пассажир обменялся рукопожатиями со всеми пассажирами соседних кают. Сколько всего было рукопожатий?

Д7. *Палиндромом* называется число, которое не меняется при записи задом наперёд (например, 9, 11, 2002). Сколько трёхзначных палиндромов делятся на 3?

Д8. Планета Рубик имеет форму куба с ребром 4000 км. Каналы идут по рёбрам куба и по граням, так что вся суша разделена на одинаковые квадратные клетки, каждая со стороной 200 км. Найдите общую длину каналов на планете (в километрах).

Д9. Выбираются пары чисел из набора $1, 2, \ldots, 31$. У скольких пар сумма входящих в них чисел будет нечётной?

Д10. От шахматной доски отрезли 4 угловые клетки. Сколькими способами на испорченной доске можно закрасить уголок из трёх клеток (см. рисунок).



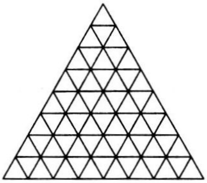
Д11. У скольких двузначных чисел сумма цифр двузначна?

Д12. В хоккейном турнире каждая из 12 команд-участниц сыграла по одному разу с каждой другой.

а) Сколько всего матчей сыграно?

б) Командам давали по 2 очка за победу в матче, по 1 очку за ничью и 0 за поражение. Найдите сумму очков, набранных всеми командами.

Д13. Из спичек сложен треугольник со стороной треугольной клетки в одну спичку (см. рисунок). Сколько всего спичек понадобилось?



Д14. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 31 два разных числа так, чтобы их сумма была чётной?

Д15. У скольких десятизначных чисел сумма цифр равна: а) 3; б) 88?

Д16. Каждая грань кубика Рубика разделена на девять квадратиков со стороной 1 см. У Рубика есть бумажный прямоугольник 1×2 см. Он хочет наклеить прямоугольник на кубик так, чтобы закрыть ровно два квадратика (возможно, что прямоугольник придётся перегнуть через ребро кубика). Сколькими способами можно наклеить прямоугольник?

Д17. Восемь рассеянных путешественников, встретившись в ресторане гостиницы после длительных приключений, увлеклись рассказами о пережитом и перепутали ключи от своих номеров. На попытку (удачную или неудачную) открыть дверь каким попало ключом им требуется минута. Две двери одновременно они открывать не пытаются. Докажите, что за полчаса они смогут разобраться, где чей ключ. (Каждый ключ открывает только свою дверь.)

Д18. Сколькими способами из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ можно выбрать набор из двух или более последовательных чисел? (Примеры: само множество, $\{3, 4\}$, $\{9, 10, 11\}$, $\{10, 11, \ldots$ $\ldots, 20\}$.)

Д19. В ежедневном сериале шесть главных героев. В каждой серии какие-то двое из них выясняют отношения, а какие-то двое становятся свидетелями преступления. В одной и той же серии с человеком может случиться и то и другое. Если в двух сериях и выяснять отношения, и наблюдать преступление будут одни и те же пары героев, зрителю надоест. Может ли этот сериал не надоесть зрителю за восемь месяцев?

Д20. На каждом из четырёх занятий математического кружка присутствовало по 20 школьников. Девять учеников посетили ровно по три занятия из этих четырёх, пять учеников — ровно по два занятия, а трое были только на одном занятии. Сколько школьников посетили все занятия?

Д21. Несколько школьников стояли в очереди в столовую, первой стояла Наташа, а последним — Вася. От скуки каждый послал некоторым из стоящих впереди него СМС с весёлым смайликом. Известно, что каждый, кроме Васи и Наташи, получил столько же смайликов, сколько и сам отправил. Докажите, что Наташа получила ровно столько смайликов, сколько отправил Вася.

Д22. Ася, Боря и Ваня играли в «наборщика». Каждый составил по 33 слова. Некоторые слова совпали, разных слов оказалось всего 45. Назовём слово пустым, если его написали все трое (за такие слова в игре не дают очков), и уникальным, если его написал кто-то один. Каких слов — пустых или уникальных — среди написанных 45 больше и на сколько?

Д23. Гангстеры Петя и Вася вскрывают сейф. Для этого они хотят подобрать код к замку, состоящему из четырёх колёсиков, каждое из которых может принимать десять положений. На проверку каждой комбинации уходит 8 секунд. Справятся ли они за сутки непрерывной работы?

Д24. В шеренге лицом к сержанту стояли 16 солдат. По команде «Нале-во!» некоторые повернулись налево, остальные — направо. Сколькими способами они могли встать так, чтобы каждый видел впереди себя не менее трёх солдат?

Д25. Король прошёлся по шахматной доске. Стартовав из левой нижней клетки, он сделал семь ходов. Каждый ход был вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Найдите число возможных маршрутов.

Д26. В классе 16 учеников. Каждый месяц учитель делит класс на две группы.

Какое наименьшее количество месяцев должно пройти, чтобы каждые два ученика в какой-то из месяцев оказались в разных группах?

Д27. *Палиндромом* называется число или слово, не меняющееся при записывании задом наперёд (например, БОБ, АННА, 1991, ЙЪЭЪЙ).

а) Сколько семибуквенных палиндромов можно составить из русских букв?

б) А восьмибуквенных?

Д28. У Даши есть много синих и красных кубиков, из них можно построить много разных по окраске башен из восьми кубиков. Сколько из них содержат нечётное число кубиков каждого цвета?

Д29. Сколькими способами можно расставить четыре ладьи на клетчатой доске 6×6 так, чтобы каждая била ровно две другие?

Д30. Слово из одиннадцати букв начинается с М, а каждая следующая буква либо совпадает с предыдущей, либо идёт в алфавите вслед за предыдущей (например, МНННОППРСТТ). Сколько всего таких слов?

Д31. Сколько решений имеет ребус

$$П < Р < И < Д < У < М < А < Й,$$

где разными буквами обозначены разные цифры?

Д32. Большой отрезок длины 30 разбит точками на отрезки длины 1. Отмечены эти точки и концы большого отрезка. Сколько можно выбрать отрезков нечётной длины с концами в отмеченных точках? (Выбранные отрезки могут пересекаться и быть частью друг друга.)

Д33. Сколькими способами можно закрасить одну или несколько клеток так, чтобы был закрашен прямоугольник:

а) в клетчатой полоске 1×30;

б) в клетчатом квадрате 5×5?

Д34. а) День пребывания в санатории стоит 1000 рублей. Сколько стоит путёвка в санаторий с 4 по 16 августа?

б) За пребывание в хостеле платят 500 рублей с человека за ночь. Четверо студентов жили в хостеле с 3 по 8 ноября. Сколько они заплатили?

Д35. На каждой перемене Робин-Бобин съедает по шоколадке. Сколько шоколадок он мог съесть за апрель, если уроки были каждый день, кроме воскресений, 1 апреля была среда, а всего за месяц было 100 уроков?

Д36. Из 101 далматинца у 29 пятно только на левом ухе, у 17 — только на правом ухе, а у 22 далматинцев нет пятен на ушах. Сколько далматинцев имеют пятно на правом ухе?

Д37. Двенадцать малышей вышли во двор играть в песочнице. Каждый, кто принёс ведёрко, принёс и совочек. Забыли дома ведёрко девять малышей, забыли дома совочек двое. На сколько меньше малышей, которые принесли ведёрко, чем тех, которые принесли совочек, но забыли ведёрко?

Д38. Каждый из трёх игроков записывает 10 слов, после чего записи сравнивают. Если слово встретилось хотя бы у двоих, то его вычёркивают из всех списков. Могло ли случиться так, что у первого игрока осталось 8 слов, у второго — 7 слов, а у третьего — 2 слова?

Д39. У каждого из тридцати шестиклассников есть одна ручка, один карандаш и одна линейка. После их участия в олимпиаде оказалось, что 26 учеников потеряли ручку, 23 — линейку и 21 — карандаш. Найдите наименьшее возможное количество шестиклассников, потерявших все три предмета.

Д40. Среди чисел 1, 2, ..., 300 Валя подчеркнула все те, у которых общий делитель с числом 99 больше 1. Сколько всего чисел она подчеркнула?

Д41. Компьютерная программа создаёт список всех дробей с трёхзначным числителем и знаменателем 999 и печатает из них только несократимые дроби. Сколько дробей будут напечатаны?

Д42. В игре «Хоп!» игроки по очереди быстро называют натуральные числа в порядке возрастания начиная с 1. Если число содержит в своей записи цифру 3 или делится на 3 без остатка, оно *плохое*, и вместо него надо сказать «Хоп!» Кто ошибся (назвал плохое число или сказал «Хоп» вместо хорошего), вылетает, а игра продолжается. Кто остался последним, тот и победитель.

Дети играли в «Хоп!». Когда Кирилл сказал «99», Толя оказался победителем. Сколько всего ребят играло, если слово «Хоп!» было названо 40 раз, причём никто не сказал «Хоп!» вместо хорошего числа?

Д43*. Трое сумасшедших маляров принялись красить пол комнаты площади 20 м^2 каждый в свой цвет. Один успел закрасить красным 16 м^2, другой зелёным — 15 м^2, третий синим — 12 м^2. Какова наименьшая площадь части пола, закрашенной всеми тремя красками?

Д44. У скольких пятизначных чисел нет четырёх одинаковых цифр подряд?

Д45. Сколько наборов из двух или более последовательных двузначных чисел не содержат числа 77?

Д46. Центр клетчатого квадрата 12×12 надо соединить с контуром квадрата ломаной, составленной из шести диагоналей клеток. Сколько есть таких ломаных?

Д47. Король прошёлся по клетчатой доске 9×8. Стартовав из левой нижней клетки, он сделал восемь ходов. Каждый ход был вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Найдите число возможных маршрутов.

Д48. У Коли есть 5 карточек с 1, 2, 3, 4 и 5.

а) Сколько различных четырёхзначных чисел он может из них составить?

А сколько из этих чисел делятся: б) на 5; в) на 2; г) на 3; д) на 4?

Д49. Колдун закрыл Василису Прекрасную в темницу на кодовый замок. Ключ к замку — перестановка букв слова САЛАМАНДРА. Узнав это, Иван-царевич добрался до двери темницы и перебирает по одному варианту в секунду. Сколько часов неустанной работы нужно Ивану, чтобы наверняка открыть замок?

Д50. Сколькими способами можно расставить 4 неразличимые ладьи на нижнюю половину шахматной доски так, чтобы они не били друг друга?

Д51. Сколько различных 6-буквенных слов (включая бессмысленные) можно составить из букв П, А, Л, Ь, Т, О так, чтобы мягкий знак стоял после согласной?

Д52. У скольких четырёхзначных чисел сумма цифр чётна?

Д53. Сколькими способами можно переставить буквы слова ОЦЕНКА так, чтобы в нём гласные не стояли рядом и согласные тоже не стояли рядом?

Д54. Если перевернуть вверх ногами лист с цифрами, то 0, 1, 8 не изменятся, 6 превратится в 9, 9 превратится в 6, остальные цифры потеряют смысл. Сколько существует девятизначных чисел, которые при переворачивании листа не изменяются?

Д55. Павел хочет выбрать пароль из 10 прописных букв, повторив по 2 раза каждую из букв своего имени. Он хочет напечатать все варианты пароля, а потом выбрать самый надёжный. На лист помещается 40 строк по 5 вариантов в строке. Хватит ли Павлу пачки в 500 листов?

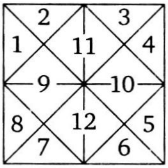
Д56. Сколькими способами можно клетчатый квадрат 8×8 разбить на 9 семиклеточных прямоугольников и одноклеточный квадратик?

Д57. У Коли есть четыре карточки с числами 0, 10, 100, 1000 и три карточки со знаками действий «+» (прибавить), «×» (умножить) и «:» (разделить). Коля хочет выложить их в ряд так, чтобы получился правильный пример (то есть между числами были знаки действий и не было деления на 0; при этом результат вычисления не обязан быть целым). Сколько разных примеров может выложить Коля?

Д58. Кузнечик прыгает по числовой прямой вправо на 2 или 3. Ему запрещено попадать на простые числа.

а) Сколькими способами он может попасть с 1 на 24?

б*) А с 1 на 36?



Д59. На сколько частей распадётся клетчатый квадрат 30×30, если каждую его клетку разрезать по обеим диагоналям? (На картинке для примера нарисован так разрезанный квадрат 2×2: он распадается на 12 частей.)

Д60. Сколькими способами можно из чисел $1, 2, 3, \ldots, 100$ выбрать два, у которых:

а) сумма делится на 10;

б) произведение делится на 100?

Д61. а) У скольких девятизначных чисел все цифры различны и сумма чётных цифр равна сумме нечётных?

б) Тот же вопрос про восьмизначные числа.

Д62. У Змея девять разных голов. Медаль «За победу над Змеем» дают тому, кто срубит и принесёт князю не меньше трёх голов. Сколькими способами можно получить медаль?

Д63. У скольких трёхзначных чисел при увеличении числа на 123 сумма цифр уменьшится?

Д64. У скольких шестизначных чисел сумма последних трёх цифр в 9 раз больше суммы первых трёх цифр?

Д65. У Даши есть 7 белых, 1 красный, 1 синий и 1 жёлтый кубики. Из них можно построить много разных по окраске башен из 10 кубиков. У скольких башен между красным и синим кубиками столько же кубиков, сколько между синим и жёлтым?

Д66. Художник написал четыре пейзажа, пять натюрмортов и два портрета. Сколькими способами можно выбрать несколько его картин для выставки так, чтобы среди выбранных были и пейзаж, и натюрморт, и портрет?

Д67. Шесть альпинисток восходят на вершину, идя гуськом одна за другой. Инструктор настаивает, чтобы Поля не шла сразу за Олей, а Таня — сразу за Аней. Сколько порядков восхождения удовлетворят инструктора?

Д68. а) Может ли при увеличении трёхзначного числа на 12 сумма его цифр уменьшиться ровно на 5?

б) У скольких трёхзначных чисел при увеличении числа на 12 сумма цифр уменьшится ровно на 6?

в) Все числа из пункта б) выписали в порядке возрастания. Какое число записано на 207-м месте?

Д69*. Сколькими способами можно в клетчатом квадрате 8×8 разместить 8 неперекрывающихся семиклеточных прямоугольников (их границы должны идти по границам клеток)?

Д70. а) Сколькими способами можно разместить на шахматной доске четыре одинаковых короля так, чтобы каждый бил трёх других и не стоял в углу доски?

б) Сколькими способами можно разместить на шахматной доске три одинаковых короля так, чтобы каждый бил двух других и не стоял в углу доски?

Д71*. Окна трёхэтажного дома обращены к морю, на каждом этаже по три окна, все окна одинаковы, окна на разных этажах расположены ровно друг по другом. Агент 007 подаёт сигнал кораблю в море, освещая некоторые окна. К сожалению, в темноте не видно самого дома, а видна только картинка зажжённых окон (например, если горят только левое и правое окна на одном этаже, можно понять, что они не соседние, но нельзя понять, на каком они этаже). Сколько разных сигналов можно подать?

Д72. К повару-волку на обед выстроилась очередь из трёх поросят и семерых козлят (все животные разные). Сколько разных очередей возможны при условии, что три поросёнка не стоят подряд?

Д73. а) В высшей лиге чемпионата по квиддичу среди 16 команд разыгрываются золотая, серебряная и бронзовая медали. Сколькими способами могут определиться три победителя?

б) На том же чемпионате три команды, занявшие последние места, должны перейти в первую лигу. Сколькими способами могут определиться эти три аутсайдера?

Д74. Докажите, что

$$C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1.$$

Д75. Комплект из 8 шахматных фигур (король, ферзь и по два одинаковых коня, слона и ладьи) расставляют на первой горизонтали шахматной доски так, чтобы король был между ладьями (не обязательно рядом), а слоны стояли на полях разного цвета. Сколько всего таких расстановок?

Д76. Даша нарисовала башню из 14 кубиков. Она хочет раскрасить 4 кубика в красный цвет, а остальные — в синий.

а) Сколько есть разных раскрасок башни?

б) А у скольких из этих раскрасок и в нижней, и в верхней половинке синих кубиков больше, чем красных?

Д77. Сколькими способами закреплённую клетчатую полоску 2×22 можно разбить на 10 квадратов 2×2 и два домино 2×1?

Д78. Сколько решений имеет ребус

$$\text{П} < \text{О} < \text{Д} < \text{У} < \text{М} < \text{А} > \text{Й},$$

где разными буквами обозначены разные цифры?

Д79. Кузнечик прыгает по числовой прямой вправо на 2 или 3. Сколькими способами он может попасть с 1 на 24?

Д80. Сколькими способами можно из чисел $1, 2, 3, \ldots, 15$ выбрать три, у которых произведение делится на 15?

Д81. На клетчатой доске 4×17 шахматный король за 16 ходов дошёл из левого нижнего в правый верхний угол, не делая ходов по диагонали вправо-вниз. Сколькими маршрутами король мог пройти?

Д82. У скольких семизначных чисел сумма цифр равна 60?

Д83*. Сколькими способами можно разместить на шахматной доске 3 одинаковые ладьи так, чтобы каждая была под боем какой-то другой? (Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или вертикали.)

Д84*. а) В ряду кинотеатра 10 мест, на них должны сесть 5 мальчиков и 5 девочек. Сколькими способами можно это сделать так, чтобы у каждой девочки был сосед-мальчик, а ни у какого мальчика соседа-мальчика не было?

б) В ряду кинотеатра 20 мест, на них должны сесть 8 мальчиков и 12 девочек. Сколькими способами можно это сделать так, чтобы каждая девочка сидела рядом с мальчиком, а каждый мальчик сидел между двумя соседками-девочками?

Д85. Сколькими способами можно раскрасить клетки таблицы 2×5 в 3 цвета так, чтобы каждая пара клеток с общей стороной была покрашена в разные цвета?

Д86. Из чисел $1, 2, \ldots, 31$ выбирают тройку чисел. У скольких троек сумма будет нечётной?

Д87*. Сколькими способами можно расставить различные цифры от 1 до 9 в клетки таблицы 3×3 так, чтобы сумма трёх цифр в каждой строке, каждом столбце и каждой диагонали была не меньше 8?

Д88*. Дан семизначный номер телефона. Из скольких восьмизначных номеров его можно получить вычёркиванием одной цифры?

Д89. а) Домино — это прямоугольник из двух квадратных половинок, на каждой половинке число (точек) — от 0 до 6. В комплект домино каждая пара чисел, включая пары одинаковых чисел, входит ровно по разу (2—5 и 5—2 — это одно домино). Сколько домино в комплекте?

б) Сколько домино содержал бы комплект, если бы числа на половинках изменялись от 0 до 12?

Д90. а) Грани кубика красят в чёрный и белый цвета. Сколько по-разному окрашенных кубиков можно получить? (Разрешены одноцветные кубики.)

б) Грани кубика красят в 6 данных цветов, цвета всех граней различны. Сколько по-разному окрашенных кубиков можно получить?

(Кубики окрашены одинаково, если их можно повернуть и расположить так, чтобы цвета верхних граней были одинаковы, цвета передних граней были одинаковы и т. д.)

Д91. Петя изготовил два игральных кубика (возможно, неодинаковых), нанеся на каждую грань от 0 до 6 точек. Приставляя кубики друг к другу разными способами, он получает на паре верхних граней изображения домино. Какое наибольшее число разных домино сможет получить Петя? (Играет роль только количество точек на грани, их расположение несущественно.)

Д92. Из домино (см. задачу Д89 *а*) можно сложить цепочку, приставляя их друг к другу половинками с равными числами (например, 1—2 к 2—5 или 3—3 к 3—4 и далее к 4—0).

а) Сколькими способами из комплекта можно выбрать пару домино, из которых составляется цепочка?

б*) Сколькими способами из комплекта можно выбрать тройку домино, из которых составляется цепочка?

Ответы

1.1. а) 15 плюсиков. **1.2.** 10 отрезков.
1.3. 10 чисел: 4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 25, 35, 49.
1.4. а) 20 чисел; б) 3 минуты. **1.5.** 45 клеток.
1.6. 45 отрезков. **1.7.** 64 треугольника. **1.8.** 12 кг.
1.9. 144 спички. **1.10.** 45 чисел.
2.1. Первые десять сумм равны 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55.
2.2. а) 10 дорог; б) 45 дорог. **2.3.** 5050.
2.4. а) Не обязательно; б) обязательно.
2.5. а) 156 карикатур; б) 78 песен. **2.6.** 119 диагоналей.
2.7. 45 чисел.
2.8. 4, 9, 16, 25 — квадраты последовательных натуральных чисел.
2.9. 90 видов. **2.10.** Могло.
3.1. а) 14 квадратов; б) 21 квадрат.
3.2. а) 11, 12, 21, 22; б) 8 чисел; в) 32 числа; г) 81 число.
3.3. 30 учеников могло быть, а 33 не могло. **3.4.** 32 друга.
3.5. а) 6 чисел; б) 30 чисел. **3.6.** Букв 33, а кодов только 30.
3.7. а) 256 занятий; б) 28 занятий; в) 28 занятий.
3.8. 1024 таблицы. **3.9.** 30 треугольников. **3.10.** 320 спичек.
4.1. 36 страниц. **4.2.** 18 карт.
4.3. а) 127 видов; б) 120 видов; в) 99 видов; г) 119 видов.
4.4. а) 90 чисел; б) 90 000 чисел. **4.5.** 17 марта.
4.6. 425 рукопожатий. **4.7.** 4 осьминожка. **4.8.** 1991 число.
4.9. а) 384 кубика; б) 488 кубиков. **4.10.** 42 м.
4.11. 17 монет.
5.1. а) 20 башен; б) 60 башен. **5.2.** 20 способов.
5.3. а) 6 способов; б) 24 способа; в) 120 способов для пяти гномов и 13! способов для 13 гномов.
5.4. а) 35 видов; б) 17 видов. **5.5.** 325 башен.
5.6. а) $15 \cdot 14 \cdot 13$ способами; б) 15^3 способами; в) 105 способами.
5.7. а) 24 пирамиды; б) 96 пирамид; в) 96 пирамид; г) 60 пирамид.
5.8. а) 33^5 слов; б) $33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$ слов. **5.9.** 33! способов.
5.10. 4320 чисел. **6.1.** 15 способов. **6.2.** 15 способов.
6.2. 15 способов. **6.4.** $8! = 40\,320$ способов. **6.5.** $8 \cdot 7 = 56$ способов.
6.6. $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ способов. **6.7.** $2^8 = 256$ таблиц. **6.8.** $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ таблиц.
6.9. $8! = 40\,320$ способов. **6.10.** $2^8 = 256$ с $= 4$ мин 16 с.
6.11. $2^8 = 256$ способов. **6.12.** $8 \cdot 7 = 56$ таблиц.
6.13. $8! = 40\,320$ способов.
7.1. а) 48 игрушек; б) 798 троек; в) 401 пара.

7.2. а) 55 пар; б) 60 пар; в) 450 четвёрок.
7.3. 169 прямоугольников.
7.4. а) 4^6-3^6 раскрасок; б) $4^6-3^6-3^6+2^6$ раскрасок.
7.5. $8!-4!\cdot4!=39\,744$ шеренги.
7.6. а) 210 пар; б) 1806 пар. **7.7.** 79 маршрутов.
7.8. а) 460 чисел; б) 5 322 222 322. **7.9.** 68 расстановок.
8.1. а) 10 пар; б) 10 троек. **8.2.** а) $\frac{32!}{22!}$ рядов; б) $\frac{32!}{10!\cdot22!}$ наборов.
8.3. а) 210 команд; б) 210 команд.
8.4. а) АБ, АВ, АГ, АД, БВ, БГ, БД, ВГ, ВД, ГД;
б) АБВ, АБГ, АБД, АВГ, АВД, АГД, БВГ, БВД, БГД, ВГД.
8.5. а) $C_{10}^4=210$ чисел; б) $C_9^3=84$ числа;
в) 1 111 222 222, 1 112 122 222, 1112 212 222, 1 112 221 222, 1 112 222 122 для п. а);
1 000 000 111, 1 000 001 011, 1 000 001 101, 1 000 001 110, 1 000 010 011 для п. б).
8.7. а) $25\cdot24\cdot23\cdot22$ способов; б) $C_{25}^4=25\cdot23\cdot22$ способов.
8.8. а) $C_{20}^2=190$ точек пересечения; б) $C_{20}^3=1140$ треугольников.
8.9. а) $C_{12}^6:2=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6!\cdot2}=252$ способа;
б) $2\cdot7\cdot C_7^3+(C_7^2)^2=C_{14}^4-2\cdot C_7^4=931$ раскраска;
в) 434 разбиения; г) $C_{18}^6\cdot C_{12}^6:6$ разбиений.
8.10. 20! способов.
Д1. 432 части. **Д2.** 33 числа. **Д3.** 340 туров.
Д4. 35 отрезков. **Д5.** 102 маршрута. **Д6.** 1200 рукопожатий.
Д7. 30 палиндромов. **Д8.** 960 000 км. **Д9.** 240 пар.
Д10. 184 способа. **Д11.** 45 чисел.
Д12. а) 66 матчей; б) 132 очка. **Д13.** 108 спичек.
Д14. 225 способов. **Д15.** а, б) 55 чисел. **Д16.** 108 способов.
Д18. 190 способов. **Д19.** Не может. **Д20.** 10 человек.
Д22. Пустых на 9 больше. **Д23.** Справятся. **Д24.** 1024 способа.
Д25. 3^7 маршрутов. **Д26.** 4 месяца. **Д27.** а, б) 33^4 палиндромов.
Д28. 128 башен. **Д29.** 225 способов. **Д30.** 1024 слова.
Д31. 45 решений. **Д32.** 240 отрезков.
Д33. а) 465 способов; б) 225 способов.
Д34. а) 13 000 руб.; б) 10 000 руб.
Д35. 74 шоколадки. **Д36.** 50 далматинцев. **Д37.** На 4 малыша.
Д38. Не могло. **Д39.** 10 человек. **Д40.** 118 чисел.
Д41. 584 дроби. **Д42.** 7 человек. **Д43.** 3 м^2. **Д44.** 89 829 чисел.
Д45. 2442 набора. **Д46.** 252 ломаные.
Д47. $3^8-2^8=6305$ маршрутов.
Д48. а) 120 чисел; б) 24 числа; в) 48 чисел; г) 24 числа; д) 24 числа.
Д49. 42 часа. **Д50.** 1680 способов. **Д51.** $3\cdot5!=360$ слов.

Д52. 4500 чисел. **Д53.** 72 способа. **Д54.** 1500 чисел.
Д55. Не хватит. **Д56.** 16 способов. **Д57.** 108 примеров.
Д58. а) 8 способов; б) 48 способов. **Д59.** 1860 частей.
Д60. а) 490 способов; б) 223 способа.
Д61. а) $8 \cdot 8!$ чисел; б) $8! + 2 \cdot 7 \cdot 7! = 22 \cdot 7!$ чисел.
Д62. $2^9 - 46 = 466$ способов. **Д63.** 452 числа.
Д64. $1 \cdot 55 + 3 \cdot 55 + 6 \cdot 1 = 226$ чисел. **Д65.** 40 башен.
Д66. $(2^4 - 1)(2^5 - 1)(2^2 - 1) = 1395$ способов.
Д67. $6! - 2 \cdot 5! + 4! = 504$ порядка.
Д68. а) Нет; б) 208 чисел; в) 978. **Д69.** 632 способа.
Д70. а) 45 способов; б) 184 способа. **Д71.** 400 сигналов.
Д72. $10! - 6 \cdot 8!$ очередей.
Д73. а) $16 \cdot 15 \cdot 14$ способов; б) $C_{16}^3 = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$ способов.
Д75. 960 расстановок.
Д76. а) $C_{14}^4 = 1001$ раскраска;
б) $2 \cdot 7 \cdot C_7^3 + (C_7^2)^2 = C_{14}^4 - 2 \cdot C_7^4 = 931$ раскраска.
Д77. 77 способов. **Д78.** 720 решений.
Д79. $C_{11}^1 + C_{10}^3 + C_9^5 + C_8^7 = 265$ способов.
Д80. $C_{15}^3 - C_{12}^3 - C_{10}^3 + C_8^3 = 171$ способ.
Д81. $C_{16}^3 = 560$ маршрутов. **Д82.** 84 числа.
Д83. $16 \cdot C_8^3 + 64 \cdot 7^2 = 4032$ расстановки.
Д84. а) $6 \cdot 5! \cdot 5!$ способов; б) $C_7^3 \cdot 8! \cdot 12!$ способов.
Д85. $6 \cdot 3^4 = 486$ способов. **Д86.** 2240 троек.
Д87. $9! - 8 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 6! = 293\,760$ расстановок.
Д88. 73 номера. **Д89.** а) 28 домино; б) 91 домино.
Д90. а) 10 кубиков; б) 30 кубиков. **Д91.** 26 домино.
Д92. а) 147 пар; б) 791 тройка.

Решения дополнительных задач

Д1. Ответ. 432 части.

Решение. Параллели делят поверхность на 18 частей. Меридианы делят каждую из них ещё на 24 части. Всего частей $18 \cdot 24 = 432$.

Д2. Ответ. 33 числа.

Решение. Удобнее задавать число не двумя цифрами, а первой цифрой и простой суммой (каждое искомое число по этим данным *определится однозначно*, так как вторая цифра вычисляется). Сумма цифр двузначного числа принимает значения от 1 до 18, среди них 7 простых: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Нарисуем таблицу 9×7, строки соответствуют первым цифрам от 1 до 9, столбцы — простым суммам. Легко отметить клетки, для которых есть подходящее двузначное число. Например, в строке 6 подходят только суммы от $6 + 0$ до $6 + 9$, то есть 7, 11, 13. Отметив такие клетки в каждой строке, посчитаем их.

Д3. Ответ. 340 туров.

Решение. Из каждого города нет туров в два соседних и в сам этот город, значит, есть в 17 остальных городов. Поэтому предлагается 17 туров из каждого из 20 городов, а всего $20 \cdot 17 = 340$ туров.

Д4. Ответ. 35 отрезков.

Решение. По одну сторону от EM лежат 5 точек N, A, B, C, D, а по другую — 7 точек F, G, H, I, J, K, L. Любой отрезок с концами на окружности по разные стороны от EM пересечёт EM. Соединяя точки из разных групп каждую с каждой, получим $5 \cdot 7 = 35$ отрезков.

Д5. Ответ. 102 маршрута.

Решение. Составной маршрут Айск—Бийск—Вийск можно получить, комбинируя каждый прямой маршрут Айск—Бийск с каждым прямым маршрутом Бийск—Вийск. Так получим $7 \cdot 13 = 91$ комбинированный маршрут. К ним надо добавить 11 прямых маршрутов.

Д6. Ответ. 1200 рукопожатий.

Решение. Заметим, что каждый пассажир из чётной каюты пожал руку в точности всем пассажирам из нечётных кают, а рукопожатий других видов не было. В нечётных каютах всего $13+17=30$ пассажиров, в чётных — $16+24=40$. Значит, было $30 \cdot 40=1200$ рукопожатий.

Д7. Ответ. 30 палиндромов.

Решение. Средняя цифра может быть любой, а первая и последняя цифра равны друг другу и не равны 0. Чтобы сумма цифр делилась на 3, надо, чтобы все цифры имели одинаковый остаток при делении на 3. Это разбивает цифры на 3 группы: $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$ и $\{0, 3, 6, 9\}$. Мы выяснили, что каждое искомое число *однозначно задаётся* первыми двумя цифрами (третья определится автоматически). Значит, можно считать только пары первых двух цифр. Составим таблицу 10×9, где строки нумеруются *второй* цифрой числа, а столбцы — *первой* (первая цифра не 0, поэтому столбцов только 9). В каждой клетке будет не более одного числа. Выбираем сначала вторую цифру, то есть строку в таблице. Она может быть любой из 10. Если она выбрана из первой или второй группы, то и первая цифра может быть любой цифрой из трёх цифр той же группы. Если же вторая цифра выбрана из третьей группы, то первая может быть любой из трёх ненулевых цифр этой группы. Итак, в каждой строке таблицы есть по 3 числа, значит, всего у нас $10 \cdot 3=30$ чисел.

Д8. Ответ. 960 000 км.

Решение. Вдоль ребра куба укладывается $4000:200=20$ клеток. Чтобы разбить грань на клетки, понадобится 19 продольных и 19 поперечных разрезов-каналов, каждый длиной 4000 км. Всего на 6 гранях $6 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 4000$ км таких каналов. К ним надо добавить каналы на 12 рёбрах куба: $12 \cdot 4000$ км. Итого $19 \cdot 12 \cdot 4000+1 \cdot 12 \cdot 4000=20 \cdot 12 \cdot 4000=960\,000$ км.

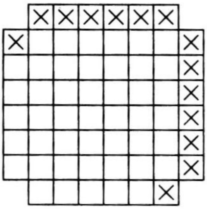
Д9. Ответ. 240 пар.

Решение. Одно число в паре должно быть чётным, другое — нечётным. В наборе 15 чётных и 16 нечётных чисел. Каждое из 16 нечётных можно взять в пару с каждым из 15 чётных, поэтому всего подходит $16 \cdot 15=240$ пар.

Замечание. Эта задача — близнец задачи Д32.

Д10. Ответ. 184 способа.

Решение 1. Уголок можно повернуть (ориентировать) 4 способами. Для данной ориентации расположение уголка на доске задаётся местом его средней клетки. Для ориентации со



средней клеткой уголка слева внизу это может быть любая из оставшихся клеток, кроме примыкающих к верхней и правой границе (они помечены крестиками на рисунке), то есть $64 - 4 - 14 = 46$ положений. Ввиду симметрии столько же будет и для каждой другой ориентации уголка, то есть всего есть $4 \cdot 46 = 184$ способа.

Решение 2. См. решение Д70*б*.

Замечание. Эта задача — близнец задачи Д70*б*.

Д11. Ответ. 45 чисел.

Решение. Посмотрим, сколькими способами можно к данной цифре десятков приписать цифру единиц так, чтобы сумма стала двузначной. К 1 можно приписать только 9 (1 вариант), к 2 — только 9 или 8 (2 варианта), к 3 — 9, 8, 7 (3 варианта), ..., к 9 — любую цифру от 1 до 9 (9 вариантов). Итого $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$.

Замечание. Запишем все двузначные числа в таблицу 9×10 (строки соответствуют цифре деятков, столбцы — цифре единиц) и заштрихуем подходящие числа. Видим, что заштрихован ступенчатый треугольник.

Д12. Ответ. а) 66 матчей; б) 132 очка.

Решение. а) Каждая из 12 команд сыграла по 11 матчей, но каждый матч учтён дважды. Поэтому было всего $12 \cdot 11 : 2 = 66$ матчей.

б) Будем считать сумму очков не по командам, а по матчам. В каждом матче в сумме было набрано $2 + 0$ или $1 + 1$, то есть всегда 2 очка. Значит, всего было набрано $66 \cdot 2 = 132$ очка.

Д13. Ответ. 108 спичек.

Решение 1. Посчитаем сначала горизонтальные спички. Они разбиваются на линии. Идя сверху вниз, видим линии из $1, 2, 3, \ldots, 8$ спичек, поэтому всего горизонтальных спичек $1 + 2 + \ldots + 8 = 36$ — треугольное число. Ровно столько же спичек, параллельных левой стороне треугольника, и столько же параллельных правой стороне. Итого у нас $3 \cdot 36 = 108$ спичек.

Решение 2. Треугольник разбит на треугольнички двух типов: с горизонтальной стороной снизу и с горизонтальной стороной сверху. В каждый треугольник первого типа положим по шару. Количество шаров — это треугольное число 36. Каждая спичка ограничивает ровно один треугольник первого типа, поэтому спичек втрое больше, чем треугольников, то есть $3 \cdot 36 = 108$.

Д14. Ответ. 225 способов.

Решение. Оба числа должны быть одинаковой чётности. Пару чётных чисел можно выбрать $15 \cdot 14 : 2 = 105$ способами, пару нечётных — $16 \cdot 15 : 2 = 120$ способами, а всего пар с чётной суммой $105 + 120 = 225$.

Замечание. Пар различных чисел от 1 до 31 всего $31 \cdot 30 : 2 = 465$. Из задачи Д9 мы знаем, что пар с нечётной суммой 240. Это приятно: $240 + 225$ как раз равно 465. Похоже, мы не ошиблись!

Д15. Ответ. а, б) 55 чисел.

Решение. а) Если из записи числа выбросить нули, то оно «схлопнется» до одного из чисел 3, 21, 12, 111. Осталось только расположить эти цифры на 10 местах так, чтобы на первом месте не оказалось нуля. Для цифры 3 способ единственный — в начало, для комбинаций 21 и 12 по девять (одна цифра на первом месте, а вторая — на любом из девяти), для 111 — $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ способов (одна из единиц на первом месте, для двух других надо выбрать пару из девяти мест со второго по десятое). Всего $1 + 2 \cdot 9 + 36 = 55$ способов.

б) Если бы в каждом разряде стояла цифра 9, сумма цифр была бы 90. Но 88 на 2 меньше 90, поэтому либо вместо двух девяток использованы восьмёрки, либо одна девятка заменена на семёрку. В первом случае надо выбрать для пары восьмёрок два места из десяти, это даёт $10 \cdot 9 : 2 = 45$ способов. Во втором случае место для семёрки можно выбрать десятью способами. Итого $45 + 10 = 55$ способов.

Д16. Ответ. 108 способов.

Решение. Всего есть $6 \cdot 9 = 54$ квадратика. Каждый граничит ровно с четырьмя другими. Квадратик можно заклеить четырьмя способами, все квадратики — $54 \cdot 4 = 216$ способами. Однако каждый способ учтён дважды, поэтому их $216 : 2 = 108$.

Д17. Решение. Берём первый ключ и пытаемся по очереди открывать все двери. За 7 минут мы проверим 7 дверей. Если какая-то дверь открылась, ключ от неё найден. Если никакая не открылась, то мы выяснили, что этот ключ от последней, не проверенной двери. Осталось распределить 7 ключей по 7 дверям. Аналогично находим дверь для второго ключа не более чем за 6 минут, для третьего — не более чем за 5 минут и т. д. Всего нам хватит $7+6+5+\ldots+1=28$ минут, что меньше получаса.

Д18. Ответ. 190 способов.

Решение. Используем для набора короткий код: укажем только первое и последнее число набора. Это пара, а число пар мы считать умеем: $20\cdot 19:2=190$.

Д19. Ответ. Не может.

Решение. Посчитаем число комбинаций пар свидетелей и выясняющих отношения. Пару из 6 человек можно выбрать $6\cdot 5:2=15$ способами. Нам надо выбрать дважды, и первая выбранная пара никак не мешает выбирать вторую. Значит, две пары можно выбрать $15\cdot 15=225$ способами. В месяце (кроме февраля) не менее 30 дней, значит, в восьми месяцах заведомо не менее $7\cdot 30+28=238$ дней. Как бы авторы ни старались, за 8 месяцев им придётся повторить комбинацию пар.

Д20. Ответ. 10 человек.

Решение. Будем давать по конфете каждому ученику за посещение каждого занятия. Тогда всего истрачено 80 конфет. Из них 27 конфет получили дети, пришедшие на три занятия, 10 — посетившие два занятия, 3 — посетившие одно занятие. Оставшиеся $80-27-10-3=40$ конфет получили $40:4=10$ ребят, пришедшие на все 4 занятия.

Д21. Решение. Удобнее вместо смайликов считать конфеты. Можно также считать, что дети передавали их друг другу по очереди от конца к началу, начиная с последнего: сначала Вася передал конфеты всем, кому хотел, затем это сделал человек, стоявший перед ним, и т. д. Ни у кого, кроме Васи и Наташи, количество конфет не изменилось; будем считать, что они передавали ровно те же конфеты, что получили. Это означает, что все Васины конфеты и только они в итоге достались Наташе, то есть сколько Вася передал, столько Наташа и получила.

Д22. Ответ. Пустых на 9 больше.

Решение. Пусть за каждое написанное слово игроку дают по конфете. Дети получат $3\cdot 33=99$ конфет. Если бы каждое из 45 слов было написано ровно дважды, то за эти слова дали бы 90 конфет. Если слово «тонкость» уникальное, слово «банальность» пустое, а остальные слова написаны дважды, то всё равно 90 («тонкость» даст одну конфету, а «банальность» — три, то есть это то же самое, как если бы и «тонкость», и «банальность» дали бы по две конфеты). Аналогично с любой парой пустого и уникального слов, то есть если бы их было поровну, то потребовалось бы 90 конфет. Почему же потребовались 99? Потому что слов, за которые дали по три конфеты (то есть пустых), было на $99 - 90 = 9$ больше.

Д23. Ответ. Справятся.

Решение. Закодируем положения колёсика цифрами от 0 до 9, тогда код замка — это комбинация из четырёх цифр, таких кодов $10^4 = 10\,000$. Для проверки всех комбинаций понадобится $8 \cdot 10\,000 = 80\,000$ с. В сутках $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$ с, что больше $80\,000$.

Д24. Ответ. 1024 способа.

Решение. Трое левых крайних обязаны смотреть вправо, так как слева от каждого из них меньше трёх других. Аналогично трое правых крайних должны смотреть влево. А вот каждый из остальных десяти может смотреть как вправо, так и влево — по обе стороны солдат достаточно. Закодируем повернувшихся налево буквой Л, а направо — П. Укоротим код до десяти средних позиций (обе тройки крайних определены однозначно). Получим слово из 10 букв, на каждом месте может быть одна из двух букв, поэтому всего есть $2^{10} = 1024$ способа.

Д25. Ответ. 3^7 маршрутов.

Решение. Обозначим ход вправо буквой П, вверх — В, вправо-вверх по диагонали — Д. Тогда каждый маршрут кодируется семибуквенным словом из этих букв. Все слова подходят, так как будет не более 7 сдвигов вверх и не более 7 — вправо, поэтому за пределы доски король не выйдет. На каждом из 7 мест есть выбор из 3 букв, значит, слов и маршрутов — 3^7.

Д26. Ответ. 4 месяца.

Решение. *Пример.* На рисунке показано, как нужно разбивать класс на две группы так, чтобы каждые два ученика в какой-то из четырёх месяцев оказались в разных группах. Каждому ученику соответствует столбец таблицы, а каждому месяцу — её строка. Ноль, стоящий в клетке таблицы, означает, что данный ученик входит в первую группу, а единица означает, что данный ученик входит во вторую группу. Поскольку совпадающих столбцов нет, каждые два ученика хотя бы один месяц из четырёх находятся в разных группах.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Оценка. Докажем, что за три месяца выполнить условие нельзя. Составим аналогичную таблицу 3×16. В столбце можно расставить нули и единицы только 8 способами, поэтому найдутся два одинаковых столбца. Соответствующие этим столбцам ученики все три месяца попадают в одну группу.

Д27. Ответ. а, б) 33^4 палиндромов.

Решение. (Коротким) кодом палиндрома сделаем его первые 4 буквы. По этим буквам остальные буквы однозначно определяются. На каждом месте кода могут стоять 33 буквы, поэтому всего кодов 33^4.

Д28. Ответ. 128 башен.

Решение. Достаточно проследить за нечётностью числа синих кубиков. Закодируем каждую башню строкой из восьми цифр: синий цвет — 1, красный — 0, нижнему кубику соответствует первая цифра, следующему — вторая и т. д. Тогда число синих кубиков равно сумме цифр кода. Нас интересуют только коды с нечётной суммой цифр. У этих кодов мы последнюю цифру определим по всем остальным (а именно, это 0, если сумма предыдущих цифр нечётна, и 1, если сумма чётна). Но если так, то первые 7 цифр будут *коротким кодом.* Такие коды легко посчитать: есть 7 позиций, на каждой одна из двух цифр, значит, у $2^7 = 128$ башен нечётное число кубиков каждого вида.

Д29. Ответ. 225 способов.

Решение. Ладьи стоят в вершинах прямоугольника, то есть на пересечении двух вертикалей и двух горизонталей. Пару вертикалей можно выбрать $6 \cdot 5 : 2 = 15$ способами, пар горизонталей тоже 15. Выбирая сначала пару вертикалей, а к ней — пару горизонталей, получим всего $15 \cdot 15 = 225$ четвёрок ладей.

Замечание. Эта задача — близнец задачи Д33*б*.

Д30. Ответ. 1024 слова.

Решение. Само слово является кодом, но неудобным: чем дальше, тем больше возможностей, при этом число возможностей зависит от предыдущих букв. К счастью, для пары соседей есть только две возможности: буквы либо совпадают, либо соседи по алфавиту. Давайте вставим между буквами знаки «=» или «<», получится $М < Н = Н = Н = О < П = П < Р < С < Т = Т$. Заметим, что если буквы стереть, то по оставшейся строке знаков $<===<=<<<=$ мы их однозначно восстановим: первая буква всегда М, а дальше знак подскажет, повторять букву или брать следующую по алфавиту. При этом даже если все знаки в строке будут $<$, то за пределы алфавита мы не выйдем. Значит, мы нашли для наших слов *короткие коды*. Посчитаем их: на каждой позиции выбор из двух знаков, позиций 10, поэтому кодов $2^{10} = 1024$.

Д31. Ответ. 45 решений.

Решение. Каждое решение содержит 8 различных цифр. Если набор цифр известен, то по буквам они распределяются однозначно, в порядке возрастания. Так как разных цифр всего 10, проще задать набор той *парой цифр*, которая в него *не входит*. Это и будет коротким кодом решения. Количество таких пар равно $10 \cdot 9 : 2 = 45$.

Д32. Ответ. 240 отрезков.

Решение. Занумеруем точки слева направо числами $1, 2, \ldots, 31$. Отрезок кодируется номерами его концов, а длина отрезка равна разности этих номеров. Разность будет нечётной, если числа на концах разной чётности. У нас нечётных чисел 16, а чётных — 15. Поэтому есть $15 \cdot 16 = 240$ отрезков нечётной длины.

Замечание. Эта задача — близнец задачи Д9.

Д33. Ответ. а) 465 способов; б) 225 способов.

Решение. а) Пронумеруем вертикальные границы клеток от 1 до 31. Задать прямоугольник — значит выбрать пару границ. А пару из 31 числа можно выбрать $31 \cdot 30 : 2 = 465$ способами.

б) Пронумеруем вертикальные прямые, идущие по границам клеток, от 1 до 6, и аналогичные горизонтальные прямые — от 1 до 6. Задать прямоугольник — значит выбрать пару вертикальных и пару горизонтальных границ. То и другое можно сделать $6 \cdot 5 : 2 = 15$ способами, поэтому всего прямоугольников $15 \cdot 15 = 225$.

Замечание. Пункт а) — близнец задачи Д18 с изменёнными числами. Пункт б) — близнец задачи Д29.

Д34. Ответ. а) 13 000 руб.; б) 10 000 руб.

Решение. а) Отбросим первые три дня августа. Путёвка на $16 - 3 = 13$ дней стоит 13 000 рублей.

б) Будем считать, что за каждую ночь платить надо утром следующего дня: с 4 по 8 ноября. Отбросим три лишних ноябрьских утра: $8 - 3 = 5$ раз 4 студента платили по 500 рублей, всего они заплатили $5 \cdot 4 \cdot 500 = 10\,000$ рублей.

Д35. Ответ. 74 шоколадки.

Решение. Робин Бобин ест шоколадку после каждого урока, кроме последнего. Последних уроков столько же, сколько учебных дней. Поскольку 1 апреля была среда, воскресений в апреле было 4, а учебных дней $30 - 4 = 26$. За апрель Робин Бобин съел $100 - 26 = 74$ шоколадки.

Д36. Ответ. 50 далматинцев.

Решение. Достаточно из 101 вычесть количество далматинцев, у которых пятно только на левом ухе, и количество тех, у кого пятен нет совсем. На правом ухе пятно у $101 - 22 - 29 = 50$ далматинцев.

Д37. Ответ. На 4 малыша.

Решение. 3 малыша принесли ведёрко, а значит, и совочек. 10 малышей принесли совочек. Значит, 7 малышей принесли совочек без ведёрка. $7 - 3 = 4$.

Д38. Ответ. Не могло.

Решение. Раз у третьего игрока осталось 2 слова, то остальные $10 - 2 = 8$ слов совпали со словами других игроков. Но у первого таких слов только $10 - 8 = 2$, в у второго — только $10 - 7 = 3$. Поэтому больше $2 + 3 = 5$ слов второй игрок вычеркнуть не мог.

Д39. Ответ. 10 человек.

Решение. *Оценка.* Из условия следует, что у четырёх шестиклассников есть ручка, у семи — линейка и у девяти — карандаш. Таким образом, обладать хотя бы одним предметом могут не более чем $4+7+9=20$ человек. А значит, не менее чем $30-20=10$ человек потеряли все три предмета.

Пример. Пусть 7 учеников потеряли ручку и карандаш, 9 — ручку и линейку, 4 — карандаш и линейку, а 10 — ручку, линейку и карандаш.

Д40. Ответ. 118 чисел.

Решение. Валя подчеркнула числа, кратные 3 или 11. Среди чисел от 1 до 300 кратно 3 каждое третье, их 100; кратно 11 каждое одиннадцатое, их 27. Числа, кратные 33, мы посчитали дважды, их 9. Валя подчеркнула $100+27-9=118$ чисел.

Д41. Ответ. 584 дроби.

Решение. Всего в списке $999-99=900$ дробей. Найдём, сколько из них сократимы, то есть у скольких чисел от 100 до 999 общий делитель с числом 999 больше 1. Мы знаем, что $999=3^3\cdot 37$. Среди 900 рассматриваемых чисел 300 чисел кратны 3, а 25 чисел кратны 37. Но 9 чисел кратны и тому, и другому, так как они кратны 111. Сократимых дробей $300+25-9=316$. А несократимых $900-316=584$.

Д42. Ответ. 7 человек.

Решение. Было названо 99 чисел. Из них цифра 3 в разряде единиц есть у 10 чисел, в разряде десятков — тоже у 10 чисел, но одно число — 33 — входит в оба множества. Значит, цифру 3 содержат в записи $10+10-1=19$ чисел от 1 до 99. Делятся на 3 без остатка $99:3=33$ числа. Из них цифра 3 есть у 6 чисел: 3, 33, 36, 39, 63, 93. Итак, плохих чисел $19+33-6=46$. Так как «Хоп!» было сказано 40 раз, $46-40=6$ ребят вылетели из игры, значит, вместе с победителем играли 7 человек.

Д43. Ответ. 3 м^2.

Решение. *Оценка.* Красным цветом не закрашено 4 м^2, зелёным — 5 м^2, синим — 8 м^2. Поэтому не закрашено всеми тремя красками не более $4+5+8=17$ м^2 пола, а

$$20-17=3\ \text{м}^2$$

заведомо закрашены.

Пример. Пусть 4 м^2 закрашено синим и зелёным, 5 м^2 — красным и синим, 8 м^2 — зелёным и красным, 3 м^2 — всеми тремя красками.

Замечание. Сравните с задачей Д39.

Д44. Ответ. 89 829 чисел.

Решение. Пятизначных чисел $99999 - 9999 = 90\,000$. Рассмотрим, где могут стоять четыре одинаковые цифры. Они могут стоять на первых четырёх позициях, для этого есть 9 возможностей, и для каждой их них есть 10 возможных пятых цифр, всего 90 чисел. Четыре одинаковые цифры могут стоять на последних четырёх позициях, для этого есть 10 возможностей, и для каждой их них есть 9 возможных первых цифр, всего тоже 90 чисел. При этом числа с пятью одинаковыми цифрами посчитаны дважды, их 9. Значит, количество чисел, имеющих четыре одинаковые цифры подряд, равно $90 + 90 - 9 = 171$. А не имеют их $90\,000 - 171 = 89\,829$ чисел.

Д45. Ответ. 2442 набора.

Решение 1. Набор последовательных чисел однозначно задаётся парой из первого и последнего числа. Поскольку есть 90 двузначных чисел, всего таких пар (и наборов) $90 \cdot 89 : 2$. Из них надо отбросить те, которые начинаются или заканчиваются на 77 (таких $90 - 1 = 89$), и те, которые начинаются на число, меньшее 77, и заканчиваются на число, большее 77. Есть 67 двузначных чисел, меньших 77, и 22 числа, бóльших 77, поэтому надо отбросить ещё $67 \cdot 22$ числа.

Решение 2. Такие наборы задаются парами двузначных чисел, где либо оба числа меньше 77, либо оба больше 77. Всего таких пар $67 \cdot 66 : 2 + 22 \cdot 21 : 2 = 2442$.

Д46. Ответ. 252 ломаные.

Решение. Ломаную к данной стороне можно провести $2^6 = 64$ способами, сторон четыре. Но в $4 \cdot 64 = 256$ способов входят 4 половинки диагоналей квадрата, учтённые по два раза. Вычтем лишнее: $256 - 4 = 252$ ломаные.

Д47. Ответ. $3^8 - 2^8 = 6305$ маршрутов.

Решение. Обозначим ход вправо буквой П, вверх — В, вправо-вверх по диагонали — Д. Тогда каждый маршрут кодируется восьмибуквенным словом из этих букв. На каждом из 8 мест есть выбор из 3 букв, значит, слов и маршрутов всего 3^8. Подходят все слова, кроме тех, которые выводят короля за пределы доски. Расширим доску на одну вертикаль справа до квадрата 9×9. За 8 ходов король не поднимется выше 9-й горизонтали и не сдвинется правее 9-й вертикали, то есть за пределы квадрата не выйдет. Но он может выйти на 9-ю вертикаль, если каждый раз сдвигается вправо. Это равносильно тому, что каждый ход обозначен П или Д. Число слов из П и Д равно 2^8, их и надо отбросить.

Д48. Ответ. а) 120 чисел; б) 24 числа; в) 48 чисел; г) 24 числа; д) 24 числа.

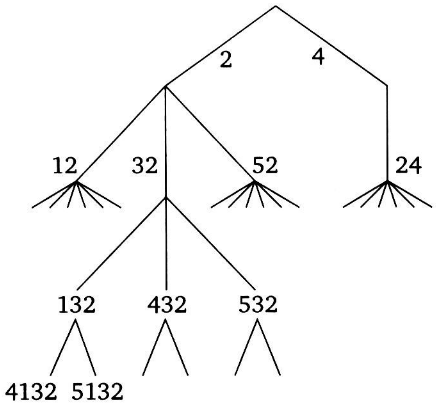
Решение. а) На первое место Коля может поставить любую из 5 цифр, на второе — любую из 4 оставшихся, на третье — любую из трёх оставшихся, на четвёртое — любую из двух оставшихся. Всего получится $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5! = 120$ различных чисел.

б) Подбираем последовательно цифры с конца. Последней должна быть цифра 5 (1 вариант), для предпоследней остался выбор из 4 цифр, для 3-й с конца — выбор из 3 цифр, для последней с конца — выбор из 2 цифр. Всего получаем $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ числа.

в) Аналогично пункту б) подбираем цифры с конца, только последняя цифра должна быть чётной, там выбор из 2 вариантов, остальное аналогично. Всего $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ чисел.

г) Чтобы число делилось на 3, надо, чтобы сумма цифр делилась на 3. Так как сумма $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ делится на 3, отбросить надо цифру, кратную 3, то есть цифру 3. Оставшиеся цифры можно расставить в любом из $4! = 24$ порядков.

д) Делимость на 4 определятся последними цифрами, поэтому будем подбирать цифры с конца, рисуя дерево вариантов. Число должно быть чётным, поэтому последняя цифра чётна. Если последняя цифра 2, то число оканчивается на 12,



32 или 52, а если последняя цифра 4, то на 24. На третьем с конца месте стоит любая цифра из трёх оставшихся, тогда на четвёртом с конца — любая из двух оставшихся. Итак, для любой из 4 пар последних цифр у нас есть 6 вариантов выбора первой пары цифр, поэтому всего вариантов $4 \cdot 6 = 24$.

Д49. Ответ. 42 часа.

Решение. Будем выбирать места согласных букв по очереди. Для С есть 10 мест, после этого для Л — 9, для М — 8, для Н — 7, для Д — 6, для Р — 5, а остальные места будут однозначно для букв А. Всего $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ случаев и столько же секунд. Так как в часе $60 \cdot 60 = 3600$ секунд, а $3600 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5$, Ивану потребуется $6 \cdot 7 = 42$ часа, чтобы перебрать все варианты.

Д50. Ответ. 1680 способов.

Решение. Надо поставить по одной ладье на каждую из четырёх нижних горизонталей. Будем выставлять их последовательно снизу вверх. На 1-ю горизонталь ладью можно поставить 8 способами. Теперь на 2-й горизонтали осталось 7 непобитых полей, ставим на любое. На 3-й горизонтали осталось 6 непобитых полей, выбирем любое. Наконец на 4-й горизонтали для ладьи осталось 5 непобитых полей. Значит, всего есть $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ способов расстановки.

Д51. Ответ. $3 \cdot 5! = 360$ слов.

Решение. Выполним расстановку букв в два шага. Сначала приклеим Ь справа к любой из 3 согласных и будем считать это одной буквой. Теперь у нас стало 5 букв. На втором шаге расставим наши буквы в любом из 5! порядков. Так получим $3 \cdot 5!$ слов.

Д52. Ответ. 4500 чисел.

Решение 1. Первой может быть любая из девяти цифр от 1 до 9, на втором и третьем месте — любая из 10 цифр. Если сумма этих трёх цифр чётна, то на последнее место надо ставить чётную цифру, а если нечётна, то нечётную. В любом случае годятся пять цифр. Получаем $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$ чисел.

Решение 2. Всего четырёхзначных чисел $9999 - 999 = 9000$. Числа с чётной и нечётной суммой цифр в каждом десятке чередуются. Поэтому их поровну независимо от происходящего на границах между десятками. Итак, четырёхзначных чисел с чётной и нечётной суммой цифр — по $9000 : 2 = 4500$.

Д53. Ответ. 72 способа.

Решение. Понятно, что гласные и согласные должны строго чередоваться. Будем выставлять буквы слева по порядку. На первое место можно поставить любую букву. Поставим гласную (3 варианта). Тогда на второе место идёт согласная (3 варианта), на третье — любая из оставшихся гласных (2 варианта), затем — любая из оставшихся согласных (2 варианта), дальше гласная и согласная однозначно. Всего мы получили $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ вариантов. Столько же получится, если на первое место поставить согласную.

Д54. Ответ. 1500 чисел.

Решение. Все такие числа должны состоять из цифр, имеющих смысл при переворачивании листа, причём число задаётся первыми пятью своими цифрами, остальные определяются однозначно. Пятая цифра при переворачивании не сдвигается, поэтому не меняется. Тогда она не может быть равна 6 или 9. Первая цифра не может быть 0. Итак, для первой цифры имеем 4 варианта, для второй, третьей и четвёртой — по 5, а для пятой — 3 варианта. Таким образом, всего таких чисел $4 \cdot 5^3 \cdot 3 = 1500$.

Д55. Ответ. Не хватит.

Решение. Будем последовательно выбирать места для пары одинаковых букв. Для П есть $10 \cdot 9 : 2 = 45$ вариантов, после этого для А остаётся $8 \cdot 7 : 2 = 28$ вариантов, для В — $6 \cdot 5 : 2 = 15$, для Е — $4 \cdot 3 : 2 = 6$ и для Л — 1 вариант. Итого $45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 = 113\,400$ паролей. А на 500 листах поместится только $500 \cdot 40 \cdot 5 = 100\,000$ паролей.

Д56. Ответ. 16 способов.

Решение. Для краткости назовём семиклеточный прямоугольник *полоской.*

Невозможно закрыть все 4 угловые клетки полосками: тогда таких полосок 4 и они накрывают все клетки на краю квадрата, оставляя в середине квадрат 6×6, куда полоска не помещается. Значит, одна угловая клетка накрыта квадратиком 1×1. Противоположный угол накрыт полоской. Она накрывает 7 клеток вдоль стороны квадрата, оставляя незакрытой вторую угловую клетку у этой стороны. Эта клетка накрыта полоской, перпендикулярной первой. Остаётся не накрыт квадрат 7×7. Его можно накрыть двумя способами:

7 вертикальными или 7 горизонтальными полосками. Всего имеем 3 последовательных выбора.

1. Угол, накрытый квадратиком 1×1, — 4 варианта.

2. Направление полоски из противоположного угла — 2 варианта. Следующая полоска кладётся однозначно.

3. Направление остальных 7 полосок — 2 варианта. Итого $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ способов.

Д57. Ответ. 108 примеров.

Решение. В каждом примере чередуются знаки и числа, начинаем с числа. Наметим 4 места для чисел и 3 — для знаков и сначала расставим знаки, а потом — числа. Знак «+» можно поставить на любое из трёх мест, знак «×» — на любое из двух оставшихся, знак «:» — на единственное оставшееся. Итого $3! = 6$ расстановок.

Теперь расставим числа. 0 можно поставить на любое место, кроме места за знаком деления (3 варианта), 10 — на любое из 3 оставшихся, 100 — на любое из двух оставшихся, 1000 — на последнее оставшееся.

Всего получаем $6 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 108$ примеров.

Д58. Ответ. а) 8 способов; б) 48 способов.

Решение. Заметим, что если число окружено двумя простыми, то кузнечик обязан на него наступить. Такие «обязательные» числа разбивают весь путь на участки. Мы можем комбинировать как угодно варианты прохождения участков, поэтому общее число способов будет равно произведению чисел способов на всех участках.

а) Есть четыре «обязательных» числа: 4, 6, 12, 18. До числа 6 путь однозначен, а дальше есть 3 неоднозначных участка: 6—12, 12—18 и 18—24. Каждый из них можно пройти двумя способами: тремя прыжками длины 2 (по чётным числам) или двумя прыжками длины 3 (по числам, кратным 3). Тогда всего способов $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

б) Есть пять «обязательных» чисел: 4, 6, 12, 18, 30 — и четыре неоднозначных участка: 6—12, 12—18, 18—30 и 30—36. Каждый участок, кроме 18—30, проходится двумя способами (3 прыжка по 2 или 2 прыжка по 3). Длинный участок 18—30 хочется разбить на 2 коротких. У нас нет числа в промежутке, на которое кузнечик обязательно наступит. Однако, перепрыгнув через простое число 23, кузнечик наступит либо на 24, либо на 25. На оба числа в одном способе он наступить не может, поэтому либо будет пара участков 18—24, 24—30, либо пара 18—25, 25—30. Каждый из участков 18—24 и 24—30 проходится двумя способами, 18—25 — единственным способом 18—20—22—25, а 25—30 — двумя способами (25—27—30 и 25—28—30). Поэтому участок 18—30 проходится $2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6$ способами, а весь маршрут — $2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 = 48$ способами.

Д59. Ответ. 1860 частей.

Решение. Части бывают двух сортов: треугольники в четверть клетки и косые квадраты, составленные из двух таких треугольников. Диагонали разбили каждую из 900 клеток на 4 части, образовалось $4 \times 900 = 3600$ треугольников. Из них $4 \cdot 30 = 120$ примыкают к внешним границам и являются отдельными частями. А остальные $3600 - 120 = 3480$ образуют $3440 : 2 = 1740$ квадратных частей. Всего частей $120 + 1740 = 1860$.

Замечание. Количество квадратных частей можно посчитать и независимо от треугольных. Склейка двух треугольников идёт по каждой внутренней границе клетки. А все такие границы лежат на 29 вертикальных отрезках и на 29 горизонтальных, по 30 границ на каждом отрезке, всего $2 \cdot 29 \cdot 30 = 1740$ границ.

Д60. Ответ. а) 490 способов; б) 255 способа.

Решение. а) Сумма будет делиться на 10, если у выбранных чисел будет одна из следующих пар последних цифр: (0, 0), (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5). На каждую цифру заканчивается по 10 чисел. Для пар, где цифры разные, мы можем скомбинировать любые числа из этих десятков, поэтому каждая такая пара даёт по $10 \cdot 10 = 100$ пар. А для пар с одинаковыми цифрами надо выбрать два разных числа из десяти, это даёт по $10 \cdot 9 : 2 = 45$ пар. Значит, всего $4 \cdot 100 + 2 \cdot 45 = 490$ пар.

б) Разложим 100 на два множителя: $100 = 100 \cdot 1 = 50 \cdot 2 = 25 \cdot 4 = 20 \cdot 5 = 10 \cdot 10$. Будем подбирать пары так, чтобы первое число делилось на первый множитель, а второе — на второй. Чтобы не повторить случаи, будем исключать делимость на больший множитель в каждой из предыдущих пар.

$100 \cdot 1$. Первое число — 100, а второе — любое из 99 оставшихся. Итого 99 пар.

$50 \cdot 2$. Первое число не делится на 100, поэтому это только 50. Второе число — любое чётное, кроме 50 и 100, таких чисел 48. Итого 48 пар.

$25 \cdot 4$. Первое число не делится на 50, подходят только 25 и 75. Всего есть 25 чисел, кратных 4, но 100 делится на 100, остаётся 24 числа. Итого $2 \cdot 24 = 48$ пар.

$20 \cdot 5$. Есть 4 числа, кратных 20, но не кратных 100. Числа, кратные 5 могут быть кратны и 20. Чтобы это учесть, разобьём случай на два подслучая: либо оба числа кратны 20, либо только одно. Если оба, то из 4 чисел кратных 20 можно выбрать пару 6 способами. Если только одно, то из 20 чисел кратных 5 надо отбросить те, которые не кратны 25 или 20. Останется 12 чисел, они образуют $4 \cdot 12 = 48$ пар с числами кратными 20. Итого $6 + 48 = 54$ пары.

$10 \cdot 10$. Есть 4 числа, кратных 10, но не кратных ни 50, ни 20. Из них можно выбрать пару 6 способами.

Всего способов $99 + 48 + 48 + 54 + 6 = 255$.

Д61. Ответ. а) $8 \cdot 8!$ чисел;

б) $8! + 2 \cdot 7 \cdot 7! = 22 \cdot 7!$ чисел.

Решение. а) Так как среди всех 10 цифр сумма нечётных на 5 больше суммы чётных, для 9 цифр равенство сумм будет только при выкидывании цифры 5. Из 9! перестановок оставшихся цифр не подходят начинающиеся нулём, таких 8! (число перестановок 8 ненулевых цифр): $9! - 8! = (9 - 1) \cdot 8! = 8 \cdot 8!$.

б) Найдём возможные наборы оставшихся цифр. Надо выкинуть 2 цифры из 10. Так как изначально сумма нечётных больше суммы чётных на 5, а в итоге эти суммы должны быть равны, надо выкинуть одну чётную цифру и одну нечётную, бóльшую чётной на 5. Подходят пары (0, 5), (2, 7) и (4, 9).

Случай 1. Выкинув 0 и 5, оставим 8 ненулевых цифр, любая из 8! их перестановок подходит.

Случаи 2 *и* 3. Выкинув пару (2, 7) или пару (4, 9), получим 8 цифр с нулём. Аналогично пункту а) из них можно составить $8! - 7! = 7 \cdot 7!$ чисел.

Д62. Ответ. $2^9 - 1 - 9 - 9 \cdot 8 : 2 = 466$ способов.

Решение. Всего наборов голов $2^9 = 512$. Из них надо выкинуть наборы с 0, 1 и 2 головами, которых соответственно 1, 9 и $9 \cdot 8 : 2$.

Д63. Ответ. 452 числа.

Решение. При сложении чисел суммы цифр складываются, но каждый переход через десяток уменьшает сумму цифр на 9. Так как 9 больше, чем $1+2+3$, сумма цифр уменьшится тогда и только тогда, когда есть переход через десяток. Посчитаем сначала плохие случаи, когда при сложении перехода через десяток не будет. Для этого необходимо и достаточно, чтобы цифра сотен была от 0 до 8, цифра десятков — от 0 до 7, цифра единиц — от 0 до 6. Учтём ещё, что цифра сотен не 0. Имеем для цифр сотен и десятков по 8 вариантов, а для цифры единиц 7 вариантов. Комбинируя эти цифры произвольно, получаем $8\cdot 8\cdot 7=448$ плохих случаев. Тогда хороших $900-448=452$.

Д64. Ответ. $1\cdot 55+3\cdot 55+6\cdot 1=226$ чисел.

Решение. Сумма последних трёх цифр не более 27, тогда сумма первых трёх не более $27:9=3$, то есть может быть равной 1, 2 или 3. Общее число вариантов складывается из трёх случаев.

1. Сумма первых трёх цифр равна 1. Тогда эти три цифры образуют число 100, а сумма последних трёх равна 9. Рассматривая случаи, когда четвёртая цифра равна $9, 8, 7, \ldots, 0$, получаем для последних двух цифр $1, 2, \ldots, 10$ вариантов соответственно. Итого в нашем случае число вариантов равно $1+2+\ldots+10=55$.

2. Сумма первых трёх цифр равна 2. Первая тройка образует одно из трёх чисел 200, 110 или 101, а сумма цифр второй тройки равна 18. Рассматривая случаи, когда четвёртая цифра равна $0, 1, 2, \ldots, 9$, получаем для последних двух цифр $1, 2, \ldots, 10$ вариантов соответственно. Итого во втором случае число вариантов равно $3(1+2+\ldots+10)=165$.

3. Сумма первых трёх цифр равна 3. Первая тройка образует одно из шести чисел 300, 210, 201, 120, 102 или 111, а сумма цифр второй тройки равна 27, то есть эта тройка образует число 999. Итого в третьем случае число вариантов равно $6\cdot 1=6$.

Д65. Ответ. 40 башен.

Решение. Ясно, что синий (С) кубик находится между красным (К) и жёлтым (Ж). Цветные кубики могут располагаться в одном из двух порядков: КСЖ или ЖСК. Между К и С, как и между С и Ж, может быть по 0, 1, 2 или 3 белых кубика, из оставшихся белых кубиков часть находится до КСЖ, а часть после. Переберём четыре указанных случая.

0. До КСЖ может быть 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 белых кубиков (а их число после КСЖ определяется однозначно). Итого 8 вариантов.

1. До КСЖ может быть 0, 1, 2, 3, 4, 5 белых кубиков, это 6 вариантов.

2. До КСЖ может быть 0, 1, 2, 3 белых кубиков, это 4 варианта.

3. До КСЖ может быть 0 или 1 белый кубик, это 2 варианта.

Всего $8+6+4+2=20$ вариантов. В сочетании с двумя возможными вариантами порядка цветных кубиков получаем $2\cdot 20=40$ способов.

Д66. Ответ. $(2^4-1)(2^5-1)(2^2-1)=1395$ способов.

Решение. Разделим процесс выбора на три этапа: сначала разберёмся с пейзажами, затем с натюрмортами, а затем с портретами. Каждый пейзаж можно брать или не брать, поэтому способов выбора пейзажей $2^4=16$. Вариант «не брать ни одного пейзажа» надо исключить, останется 15 способов. Аналогично имеется $2^5-1=31$ способ выбрать натюрморты и $2^2-1=3$ способа — портреты.

На первом этаже дерева 15 ветвей. После выбора любого из 15 непустых наборов пейзажей можно выбрать любой из 31 непустого набора натюрмортов, поэтому от каждой из 15 ветвей на втором этаже отходит по 31 ветви. А каждая из них разделяется, в свою очередь, на три маленькие веточки при выборе набора портретов. Получается $15\cdot 31\cdot 3=1395$ способов выбрать картины.

Д67. Ответ. $6!-2\cdot 5!+4!=504$ порядка.

Решение. Из 6! порядков надо убрать те, которые плохи с точки зрения инструктора. Без Поли они могут встать 5! способами. Вставив в любой из них Полю сразу за Олей, получим 5! плохих способов. Точно так же можно получить 5! способов, плохих тем, что Таня стоит за Аней. Однако некоторые способы мы посчитали дважды, а именно те, где есть оба нарушения. Их можно получить так: построиться без Поли и Тани (4! способов), а затем вставить и Полю, и Таню с нарушениями. Значит, плохих способов $5!+5!-4!$, а хороших — $6!-2\cdot 5!+4!=4!(6\cdot 5-2\cdot 5+1)=24\cdot 21=504$.

Д68. Ответ. а) Нет; б) 208 чисел; в) 978.

Решение. а) При сложении с 12 сумма цифр увеличивается на $1+2=3$, если нет перехода через десяток. Каждый переход через десяток уменьшает увеличенную сумму цифр на 9. При сложении с трёхзначным числом переход через десяток может случиться в каждом из трёх разрядов. При одном переходе сумма цифр уменьшится на $9-3=6$, при двух — на $2\cdot 9-3=15$, при трёх — на 24. Но тогда на 5 сумма цифр уменьшиться не может.

б) Сумма цифр уменьшится ровно на 6, если при сложении будет ровно один переход через десяток. Рассмотрим взаимоисключающие случаи.

1. Переход в разряде единиц. Тогда последняя цифра числа равна 8 или 9 (2 возможности), а предпоследняя — не более 7 (8 возможностей). Так как цифра сотен может быть любой от 1 до 9, всего имеем $9\cdot 8\cdot 2=144$ числа.

2. Переход в разряде десятков. Тогда последняя цифра числа — любая от 0 до 7 (8 возможностей), предпоследняя — 9 (1 возможность), а первая — любая от 1 до 8 (8 возможностей). Комбинируя цифры, имеем $8\cdot 1\cdot 8=64$ числа.

Общее количество складывается из этих двух случаев:

$$144+64=208.$$

в) Так как всего есть 208 чисел, 207-е число стоит на предпоследнем месте. В первой группе самые большие числа — 978 и 979, а во второй группе — 896 и 897. Тогда 978 находится на предпоследнем месте.

Д69. Ответ. 632 способа.

Решение. Для краткости назовём семиклеточный прямоугольник *полоской*.

Ясно, что невозможно уложить без перекрытия две вертикальные и две горизонтальные полоски одновременно. Поэтому способы делятся на 2 группы: 1) все полоски параллельны; 2) 7 полосок параллельны, одна им перпендикулярна. Будем разбирать только случаи, когда параллельные полоски вертикальны, а потом результат умножим на 2.

1. Все полоски вертикальны. Тогда есть по полоске в каждой из 8 вертикалей и у каждой полоски есть 2 возможности: примыкать к верхнему или нижнему краю. Всего получим $2^8=256$ способов.

2. 7 полосок вертикальны, одна горизонтальна. Для горизонтальной полоски есть 4 равноправные возможности: быть в верхней или нижней горизонтали (другие горизонтали невозможны), примыкать к левому или правому краю. Пусть она примыкает к верхнему и правому краям. Занимаем вертикальными полосками 7 из 8 вертикалей, одна вертикаль свободна. Если свободна левая вертикаль, то положения остальных вертикальных полосок заданы однозначно — способ единственный. Если занята левая вертикаль, то есть 2 варианта расположения полоски в ней и 7 вариантов выбора свободной вертикали, всего $7 \cdot 2$ способов. Итого 15 способов для данного расположения горизонтальной полоски. С учётом же 4 способов для горизонтальной всего будет $4 \cdot 15 = 60$ способов.

А общее число способов равно

$$2 \cdot (256 + 60) = 632.$$

Д70. Ответ. а) 45 способов; б) 184 способа.

Решение. а) Четвёрка клеток с бьющими друг друга королями образует квадрат 2×2. Расположение квадрата определяется местом его левой нижней клетки. На полной доске она может быть всюду, кроме правого и верхнего края. Такие клетки заполняют квадрат 7×7, то есть их 49. Из этих квадратов надо исключить 4 квадрата, закрывающие угловые клетки, остаются $49 - 4 = 45$.

б) Тройка клеток с бьющими друг друга королями образует уголок. Такой уголок на доске однозначно дополняется до квадратика 2×2. Всего на доске $7 \cdot 7 = 49$ квадратиков, в каждом 4 способа размещения уголка, итого 196 способов. Из них надо исключить способы с королём в углу. Есть 3 способа накрыть угловую клетку уголком, поэтому надо исключить $3 \cdot 4 = 12$ способов.

Замечание. Пункт б) — близнец задачи Д10.

Д71. Ответ. 400 сигналов.

Решение. Можно считать, что окна образуют таблицу 3×3, освещённое окно — это раскрашенная клетка и наблюдатель на корабле видит только картинку из раскрашенных клеток, не видя линий таблицы. Значит, картинки, которые можно получить друг из друга сдвигами вправо-влево и вверх-вниз, неразличимы. Поэтому любую картинку можно, сдвинув влево до упора и вверх до упора, заменить картинкой, где есть закрашенные клетки в левом столбце и в верхней строке. Разберём 2 случая.

1. Закрашена клетка в левом верхнем углу. Каждая из 8 остальных клеток может быть окрашена или нет, значит, есть $2^8 = 256$ вариантов сигнала.

2. Левая верхняя клетка не окрашена. Тогда окрашены хотя бы одна из двух оставшихся клеток верхней строки ($2^2 - 1 = 3$ варианта) и хотя бы одна из двух оставшихся клеток левого столбца (тоже 3 варианта). Для оставшихся 4 клеток есть $2^4 = 16$ вариантов раскраски, а всего в случае 2 есть $3 \cdot 3 \cdot 16 = 144$ варианта.

Значит, всего агент 007 может подать $256 + 144 = 400$ различных сигналов.

Д72. Ответ. $10! - 6 \cdot 8!$ очередей.

Решение. Всего есть $10!$ вариантов очереди без условий. Посчитаем «плохие» способы со стоящими подряд тремя поросятами. Пусть Наф-Наф и Нуф-Нуф опоздали, а Ниф-Ниф успел занять очередь сразу на всех троих. Вместе с семерыми козлятами стоит восемь животных, для них есть $8!$ порядков. Каждый из этих порядков разбивается ещё на $3! = 6$ в зависимости от расстановки поросят, когда они придут. Всего плохих вариантов $6 \cdot 8!$. Остальные $10! - 6 \cdot 8!$ хорошие.

Д73. Ответ. а) $16 \cdot 15 \cdot 14$ способов;
б) $C_{16}^3 = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$ способов.

Решение. а) Какая бы из 16 команд ни стала золотым призёром чемпионата, «серебро» могла завоевать одна из оставшихся 15 команд, а «бронзу» — одна из оставшихся 14.

б) В отличие от пункта а), три последние команды равноправны, поэтому ответ в пункте а) надо разделить на $3!$.

Замечание. Пункт б) — близнец задачи Д81.

Д74. Решение. Пусть в классе n человек и мы должны набрать из них команду добровольцев для уборки класса. Каждый может вызваться или отказаться, поэтому выбор команды можно сделать 2^n способами (это включает и случай, когда все отказались). Команд с хотя бы одним добровольцем будет $2^n - 1$. А теперь рассортируем эти команды на группы с одинаковым числом добровольцев. Команд из k человек будет ровно C_n^k. Складывая по всем возможным числам добровольцев от 1 до n, получим сумму в левой части.

Д75. Ответ. 960 расстановок.

Решение. Будем расставлять последовательно в 4 шага.

1. Выбираем места для слонов. Первого ставим на белое поле (4 варианта), второго — на чёрное (тоже 4 варианта). Итого $4 \cdot 4 = 16$ вариантов.

2. Выбираем тройку мест для ладей и короля. Осталось 6 свободных полей, поэтому выбор можно сделать $C_6^3 = 20$ способами. Фигуры на выбранных полях располагаются однозначно: ладьи — на крайние поля, король — на среднее.

3. Выбираем место для ферзя: любое из 3 свободных.

4. На последние два места однозначно ставятся два коня.

Всего есть $16 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 1 = 960$ расстановок.

Комментарий. Каждая из расстановок определяет начальную позицию в *шахматах Фишера* (их ещё называют *шахматы* 960).

Д76. Ответ. а) $C_{14}^4 = 1001$ раскраска;
б) $2 \cdot 7 \cdot C_7^3 + (C_7^2)^2 = C_{14}^4 - 2 \cdot C_7^4 = 931$ раскраска.

Решение. Раскраска полностью определяется выбором мест для красных кубиков.

а) Выбрать 4 места для 14 кубиков можно C_{14}^4 способами.

б) **Решение 1.** В одну половину может попасть не более 3 красных кубиков, значит, в другую половину — не менее одного. Разберём случаи.

1. В нижней половине 1 красный кубик. Он может быть на любом из 7 мест. Тогда в верхней половине 3 красных кубика. Места для них можно выбрать $C_7^3 = 35$ способами. А всего таких раскрасок $7 \cdot 35 = 245$.

2. В нижней половине 2 красных кубика. Тогда в верхней — тоже 2. В каждой половине места для красных можно выбрать $C_7^2 = 21$ способом. А всего раскрасок будет $21^2 = 441$.

3. В нижней половине 3 красных кубика. Тогда в верхней — всего 1. Случай аналогичен первому, здесь 245 раскрасок.

Всего есть $245 + 441 + 245 = 931$ раскраска.

Решение 2. Посчитаем сначала «плохие» раскраски. Условие нарушается, если в какой-то из половин окажутся все 4 красных кубика. Выбирая сначала, какая из половин будет плохой (2 варианта), а затем 4 места для красных кубиков в этой половине ($C_7^4 = 35$ вариантов), получаем $2 \cdot 35 = 70$ плохих способов. Тогда хороших $C_{14}^4 - 2 \cdot C_7^4 = 1001 - 70 = 931$.

Д77. Ответ. 77 способов.

Решение 1. Разберём два случая.

Случай 1. Домино образуют квадрат 2×2. Тогда полоска разбита на 11 таких квадратов и один из них разбит на домино. Имеется 11 вариантов выбора квадрата и 2 способа разбить его на домино, итого $11 \cdot 2 = 22$ способа.

Случай 2. Домино не образуют квадрата. Тогда оба стоят вертикально и так, что по обе стороны от них чётное число вертикалей. Поскольку при этом и между домино останется чётное число вертикалей, такой парой разбиение задаётся однозначно. Мысленно разобьём полоску на квадраты 2×2. Тогда домино попадут в разные квадраты, и в левом квадрате домино попало в левый столбец, а в правом квадрате — в правый. Тем самым разбиение задаётся парой квадратов (заметим, что домино не попадут в соседние столбцы, даже если квадраты соседние). Способов выбрать два квадрата $C_{11}^2 = 55$.

Всего $22 + 55 = 77$ способов.

Решение 2. *Случай* 1. Домино лежат горизонтально. Тогда они образуют квадрат 2×2. Значит, полоска разбита на 11 таких квадратов и один из них разбит на домино. 11 вариантов выбора квадрата дают 11 способов.

Случай 2. Домино стоят вертикально. Тогда полоска разбита на 12 прямоугольников высоты 2, из них 2 узкие, имеют ширину 1. Выбрать пару узких можно $C_{12}^2 = 66$ способами.

Всего $11 + 66 = 77$ способов.

Д78. Ответ. 720 решений.

Решение. Сначала выберем из десяти цифр семь любым из $C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120$ способов. Ясно, что А — наибольшая из семи цифр, а Й — любая из остальных шести. После выбора А и Й остальные 5 цифр в порядке возрастания назначим буквам П, О, Д, У и М. Таким образом, получим $120 \cdot 6 = 720$ решений.

Д79. Ответ. $C_{11}^1 + C_{10}^3 + C_9^5 + C_8^7 = 265$ способов.

Решение. Кузнечик должен сдвинуться вправо на 23. Последовательность прыжков можно закодировать строкой из двоек и троек с суммой цифр 23. Так как 23 нечётно, троек должно быть нечётное число, то есть 1, 3, 5 или 7. Разберём эти случаи.

Пусть тройка одна. Тогда сумма двоек равна $23-3=20$, значит, двоек 10, а всего цифр 11. Выбор места для тройки даёт $C_{11}^1=11$ вариантов.

Пусть троек 3. Сумма двоек равна 14, двоек 7, всего цифр 10, места для троек выбираем $C_{10}^3=120$ способами.

Пусть троек 5. Аналогично имеем 9 цифр и выбор мест для троек $C_9^5=126$ способами.

Пусть троек 7, тогда цифр 8, выбор места для троек даёт $C_8^7=8$ вариантов.

Всего кузнечик может пропрыгать $11+120+126+8=265$ способами.

Д80. Ответ. $C_{15}^3-C_{12}^3-C_{10}^3+C_8^3=171$ способ.

Решение. Три числа можно выбрать C_{15}^3 способами. Посчитаем число «плохих» троек. Чтобы произведение не делилось на 15, оно должно не делиться на 3 или на 5. Если выкинуть числа, кратные 3, останется 10 чисел, из них тройку чисел можно выбрать C_{10}^3 способами. Если выкинуть числа, кратные 5, останется 12 чисел, из них тройку чисел можно выбрать C_{12}^3 способами. Но при этом тройки, не кратные ни 3, ни 5, мы посчитали и там и тут. Чисел, не кратных ни 3, ни 5, всего 8, тройку из них можно выбрать C_8^3 способами. Значит, всего плохих троек $C_{12}^3+C_{10}^3-C_8^3$, а хороших

$$C_{15}^3-C_{12}^3-C_{10}^3+C_8^3=455-220-120+56=171.$$

Д81. Ответ. $C_{16}^3=560$ маршрутов.

Решение. Каждым ходом король обязан сдвигаться на 1 вправо. Значит, он мог делать только ходы вправо-вверх и вправо (ход вправо-вниз запрещён). Чтобы подняться на 4-ю горизонталь, король должен был трижды сходить вправо-вверх. Маршрут полностью определён номерами таких ходов. Выбрать 3 хода из 16 можно $C_{16}^3=560$ способами.

Замечание. Эта задача — близнец задачи Д73*б*.

Д82. Ответ. 84 числа.

Решение. Если бы в каждом разряде стояла цифра 9, сумма цифр была бы равна 63. Так как 60 на 3 меньше, одна, две или три цифры меньше 9. Разберём случаи.

1. Одна цифра меньше 9. Тогда она равна 6 и может стоять на любом из 7 мест. Это даёт 7 чисел.

2. Две цифры меньше 9. Тогда одна равна 7, а другая равна 8. Выберем места для этих цифр последовательно. Для 7 есть 7 мест, а для 8 остаётся только 6 мест. Это даёт всего $7 \cdot 6 = 42$ числа.

3. Три цифры меньше 9. Тогда каждая равна 8. Три места из 7 можно выбрать $C_7^3 = 35$ способами.

Всего имеем $7 + 42 + 35 = 84$ числа.

Д83. Ответ. $16 \cdot C_8^3 + 64 \cdot 7^2 = 4032$ расстановки.

Решение. Рассмотрим два случая.

1. Ладьи стоят на одной вертикали или горизонтали. У нас есть 16 таких рядов, и можно выбрать любые три клетки на одном ряду (это $C_8^3 = 56$ способов). Итого есть $16 \cdot 56 = 896$ расстановок.

2. Ладьи не стоят на одном ряду. Тогда есть *средняя* ладья, которая бьёт обе другие, одну по вертикали, другую по горизонтали. Среднюю ладью можно поставить на любую из 64 клеток, вторую ладью на одну вертикаль со средней 7 способами и третью ладью на одну горизонталь со средней тоже 7 способами. Итого $64 \cdot 7 \cdot 7 = 3136$ расстановок.

А всего есть $896 + 3136 = 4032$ расстановки.

Д84. Ответ. а) $6 \cdot 5! \cdot 5!$ способов; б) $C_7^3 \cdot 8! \cdot 12!$ способов.

Решение. а) Пусть дети уже сели как надо. Разберёмся сначала, в каком порядке могут следовать друг за другом мальчики и девочки. Мальчики не могут сидеть рядом. Значит, есть 5 одиноких мальчиков, между ними 4 промежутка, в каждом хотя бы одна девочка. А пятая девочка может сидеть с краю либо быть второй в любом из промежутков. Итак, если мальчиков обозначить М, а девочек Д, то принципиально у нас может быть 6 схем расположения: ДМДМДМДМДМ, МДДМДМДМДМ, МДМДДМДМДМ, МДМДМДДМДМ, МДМДМДМДДМ и МДМДМДМДМД. Теперь вспомним, что мальчики различаются между собой и девочки — тоже. Значит, для каждой схемы есть 5! вариантов рассадки мальчиков по «мальчиковым» местам и аналогично 5! порядков для девочек. Последовательно выбирая схему, затем порядок для мальчиков и порядок для девочек, получим $6 \cdot 5! \cdot 5!$ способов рассадки.

б) Разберёмся сначала, по какой схеме могут следовать друг за другом мальчики и девочки. Мальчики сидят поодиночке, а на местах между ними, а также на обоих краях ряда сидят девочки. Посадим так, чередуя, 9 девочек и 8 мальчиков.

Куда можно рассадить оставшихся девочек? На край нельзя, тогда рядом с крайней не будет мальчика. Двух девочек в один промежуток тоже нельзя, так как в промежутке окажутся три девочки и у средней не будет мальчика рядом. Значит, трёх оставшихся девочек надо распределить по одной в три промежутка. Это можно сделать $C_7^3 = 35$ способами, то есть имеется 35 схем рассадки. Теперь вспомним, что мальчики различаются между собой и девочки — тоже. Значит, для каждой схемы есть 8! вариантов рассадки мальчиков по «мальчиковым» местам и аналогично 12! порядков для девочек. Последовательно выбирая схему, затем порядок для мальчиков и порядок для девочек, получим $35 \cdot 8! \cdot 12!$ способов рассадки.

Д85. Ответ. $6 \cdot 3^4 = 486$ способов.

1	2
2	1

1	2
2	3

1	3
2	1

Решение. Будем красить столбцы последовательно слева направо. Левый столбец можно покрасить 6 способами: 3 цвета для верхней клетки и два оставшихся — для нижней. Каждый следующий столбец можно покрасить 3 способами: см. раскраску пары соседних столбцов на рисунке, цвета обозначены цифрами.

Д86. Ответ. 2240 троек.

Решение. Сумма будет нечётной в двух случаях: среди выбранных чисел ровно одно нечётное либо все три нечётны. Среди данных чисел 15 чётных и 16 нечётных. В первом случае надо выбрать одно нечётное число из 16 и пару чётных из 15, итого $16 \cdot (15 \cdot 14 : 2) = 1680$ троек. Во втором случае надо выбрать набор из трёх нечётных чисел, итого $16 \cdot 15 \cdot 14 : 3! = 560$ троек. А всего будет $1680 + 560 = 2240$ троек.

Д87. Ответ. $9! - 8 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 6! = 293\,760$ расстановок.

Решение. Всего возможно 9! расстановок. Сколько из них плохи? Троек цифр с суммой меньше 8 только две: $1 + 2 + 3 = 6$ и $1 + 2 + 4 = 7$. У них есть две общие цифры, поэтому такие тройки не могут возникнуть сразу в двух рядах. Итак, в плохой расстановке есть ровно один плохой ряд. Строим плохую расстановку последовательно: выбираем ряд (8 вариантов), выбираем плохой набор для этого ряда (2 варианта), расставляем выбранный набор в указанном ряду (3! перестановок), расставляем оставшиеся 6 цифр на оставшихся клетках (6! расстановок). Всего получаем $8 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 6!$ плохих расстановок, остальные 293 760 — хорошие.

Д88. Ответ. 73 номера.

Решение. Пусть дан семизначный номер телефона АБВГДЕЖ (цифры не обязательно различны). Чуть изменим задачу: подсчитаем, сколько восьмизначных номеров можно *получить* из данного *добавлением* одной цифры. Можно добавлять любую из 10 цифр в 8 местах: в начале, в конце или в любом из 6 промежутков между цифрами. Надо, однако, учесть, что некоторые из полученных номеров могут оказаться одинаковыми. Поэтому будем добавлять в места по порядку, справа налево, и следить, чтобы очередной номер не совпал с ранее полученным. Заметим, что, добавляя 10 различных цифр в одно и то же место, мы получим 10 различных номеров: они различаются как раз по добавленной цифре. Кроме того, при добавлении двух *разных* цифр в *разные* места мы получим разные номера: они отличаются набором цифр (так, если мы к номеру 111 223 добавили в первый раз цифру 1, а второй раз — в другое место цифру 2, то эти номера будут отличаться количеством цифр 1).

Пусть теперь номера совпали при добавлении одной и той же цифры в разные места: скажем, цифры Ц между А и Б и между Г и Д. Получается, что АЦБВ*Г*ДЕЖ = АБВГ*Ц*ДЕЖ. Значит, цифры на одинаковых местах равны и, в частности, Г = Ц (выделены курсивом). Заметим, что номер совпал с ранее полученным, когда мы добавили в промежуток *после* Г *равную ей цифру* Ц = Г. Но такой номер точно не может быть новым: он уже встречался, когда мы добавляли цифру Ц = Г в промежуток перед Г (номер АБВЦГДЕ). Это значит, что в любое место, кроме начала, можно добавить любую из цифр, кроме цифры слева.

Посчитаем варианты. Перед номером можно приписать любую из 10 цифр, а на каждое из мест после цифры — любую из 9 не равных ей цифр. Всего получим $10 + 7 \cdot 9 = 73$ номера.

Д89. Ответ. а) 28 домино; б) 91 домино.

Решение. а) Нарисуем таблицу 7×7. Пронумеруем в ней строки и столбцы от 0 до 6. Повернём каждое домино так, чтобы число слева было не меньше числа справа. Считая левое число номером строки, а правое — номером столбца, положим домино в соответствующую клетку таблицы. Заполненные клетки образуют ступенчатый треугольник, в нём $7+6+5+4+3+2+1=28$ домино.

б) Есть 13 домино с равными половинками, от 0—0 до 12—12, и $13\cdot12:2=78$ пар разных чисел, всего 91 домино.

Д90. Ответ. а) 10 кубиков; б) 30 кубиков.

Решение. а) Ясно, что у одинаково окрашенных кубиков белых граней поровну. Найдём число разных раскрасок для каждого количества белых.

0. Все грани чёрные — 1 раскраска.

1. Поставим кубики на единственную белую грань, раскраски совпадут. Значит, 1 раскраска.

2. Белые грани либо противоположны, либо нет. В первом случае можно поставить кубик так, чтобы белыми были верхняя и нижняя грани, во втором — чтобы верхняя и правая грани. Итого имеем 2 раскраски.

3. У нас либо есть две противоположные белые грани, либо таких нет. В первом случае можно поставить кубик так, чтобы белыми были верхняя, нижняя и левая грани, во втором — чтобы верхняя, левая и передняя грани. Итого имеем 2 раскраски.

Случаи 4, 5 и 6 белых граней — это случаи 2, 1 и 0 чёрных, они аналогичны случаям 2, 1 и 0.

Всего имеем $1+1+2+2+2+1+1=10$ раскрасок.

б) Пусть среди 6 цветов есть белый, синий и красный. Будем красить кубик постепенно. Покрасим нижнюю грань в белый цвет. Для противоположной ей верхней грани есть выбор из 5 цветов. Если у двух кубиков грани, противоположные белой, окрашены по-разному, то эти раскраски различны. Рассмотрим варианты раскрасок, когда верхняя грань красная. У всех них одна из оставшихся граней должна быть синей. Покрасим её и повернём кубик так, чтобы верхняя грань осталась красной, а левая стала синей. Теперь положение кубика задано жёстко. Для трёх оставшихся граней есть $3!=6$ вариантов раскраски в 3 оставшихся цвета, и все они дадут разные раскраски. Всего мы получили $5\cdot3!=30$ раскрасок.

Д91. Ответ. 26 домино.

Пример. На первый кубик наносим числа от 0 до 5, на второй — от 1 до 6. Тогда можно получить 26 домино 0—1, 0—2, ..., 0—6, 1—1, 1—2, ..., 1—6, 2—2, 2—3, ..., 2—6, ..., 5—6. Нельзя получить только дубли 0—0 и 6—6.

Оценка. Всего в комплекте 28 домино (см. задачу Д89 *а*). Пусть можно получить 27 из них. Тогда не получено всего одно домино. Значит, как минимум 6 из 7 дублей получены, скажем, 1—1, 2—2, ..., 6—6. Но для этого на обоих кубиках должны быть числа от 1 до 6, а значит, нет нулей. Все пары без 0 получить можно, а вот ни одну из 7 пар с нулями получить нельзя, то есть мы получили только 21 домино. Противоречие.

Д92. Ответ. а) 147 пар; б) 791 тройка.

Решение. а) Фактически надо выбрать 4 числа на половинках домино. Выберем числа в два шага: сначала общее число на приложенных половинках (7 вариантов), потом пару разных чисел на вторых половинках ($7 \cdot 6 : 2 = 21$ вариант). Итого $7 \cdot 21 = 147$ пар.

б) Выбираем тройку домино в несколько шагов. Сначала выбираем среднее домино цепочки. Это можно сделать 28 способами. Однако дальнейший выбор зависит от того, является ли среднее домино дублем или нет. Рассмотрим 2 случая.

1. Среднее домино — дубль (7 вариантов). Оба других домино содержат то же число, что на дубле. Таких домино осталось 6, подойдёт любая из $6 \cdot 5 : 2 = 15$ пар. Итого в этом случае $7 \cdot 15 = 105$ вариантов.

2. Среднее домино — не дубль (21 вариант). Есть 6 домино, которые можно приставить к левому концу среднего, и 6 других — к правому концу. Итого получается $21 \cdot 6 \cdot 6 = 756$ вариантов.

Тем самым всего мы нашли $105 + 756 = 861$ тройку, из которых складываются цепочки. Цепочки, очевидно, различны, однако тройки могут повторяться: из некоторых троек можно сложить больше одной цепочки. Это возможно тогда и только тогда, когда числа на концах цепочки одинаковы (например, из тройки 1—2, 2—3, 3—1 можно ещё сложить цепочки 2—3, 3—1, 1—2 и 3—1, 1—2, 2—3). Закодируем все такие плохие тройки домино тройками чисел на них. По тройке чисел домино однозначно восстанавливаются (например, тройка чисел $\{0, 2, 5\}$ определяет тройку домино 0—2, 2—5, 5—0). Троек чисел $C_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 : 3! = 35$. Каждая из них учтена *трижды*, поэтому два случая из трёх надо отбросить, то есть отбросить $2 \cdot 35 = 70$ случаев. Окончательный ответ: $861 - 70 = 791$ тройка.

Раздаточный материал

Занятие 1

1.1. Пять учеников Хогвартса изучили семь чудес и успешно сдали экзамен трём волшебникам. На экзамене каждый ученик совершил по одному чуду по указанию каждого из волшебников и получил за это плюсик.

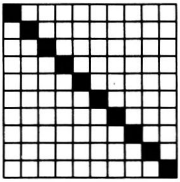
а) Сколько всего плюсиков поставлено на экзамене?

б) Приведите пример таблицы, из которой видно, кто кому какое чудо продемонстрировал.

1.2. На прямой отметили 5 точек. Сколько отрезков образовалось на чертеже? (Считаются и отрезки, у которых, кроме концов, есть отмеченные точки внутри.)

1.3. Выпишите без повторов все числа, которые можно представить как произведение двух однозначных простых чисел (возможно, одинаковых). Сколько их всего?

1.4. а) Мальвина велела Буратино выписать все двузначные числа, у которых обе цифры нечётны и не повторяются. Если он пропустит хотя бы одно, то Мальвине придётся посадить его в чулан. Посоветуйте Буратино, как организовать работу так, чтобы не попасть в чулан. Сколько всего чисел ему придётся выписать?



б) Тем временем Мальвина выписала все трёхзначные числа, у которых все цифры нечётны и не повторяются. Сколько времени она потратила, записывая по одной *цифре* в секунду?

1.5. Сколько клеток в квадрате 10×10 лежат выше закрашенной диагонали (см. рисунок)?

1.6. На прямой отметили 10 точек. Сколько отрезков образовалось на чертеже?

1.7. На сколько меньших треугольничков со стороной 1 разбит треугольник со стороной 8 на рисунке?

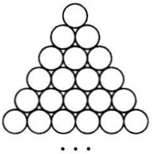
1.8. В деревне Простоквашино 16 мальчиков и 14 девочек. На 1 сентября каждый мальчик подарил по цветку каждой девочке и ещё 1 цветок Марье Ивановне, а потом девочки тоже подарили все полученные цветы Марье Ивановне. Сколько килограммов цветов принесла своей козе Марья Ивановна, если каждый весил по 50 г?

1.9. Из спичек сложен разбитый на клетки квадрат 8×8, сторона каждой клетки — 1 спичка. Сколько всего спичек понадобилось?

1.10. Сколько всего трёхзначных чисел, у которых первая и вторая цифра разной чётности, а сумма цифр делится на 10?

Занятие 2

2.1. Бильярдные шары складывают в виде треугольника: в первом ряду — 1 шар, во втором — 2, в третьем — 3 и т. д. (см. рисунок).



Заполните таблицу, показывающую, сколько шаров потребуется для этого в зависимости от количества рядов.

Рядов	1	2	3	...	10
Шаров	1	3	6	...	

2.2. В королевстве: а) 5 городов; б) 10 городов. Король повелел соединить каждые два города отдельной дорогой. Сколько дорог придётся построить?

2.3. Учитель дал детям задачу: найти сумму натуральных чисел от 1 до 100. Пока дети трудятся, он надеялся хорошенько отдохнуть, но не тут-то было: мальчик Карл сразу назвал ответ. Найдите и вы этот ответ. Подумайте, как мог рассуждать Карл.

2.4. В школе есть классы с 5 по 11, по два на каждой параллели. Физкультура у каждого класса два раза в неделю. Обязательно ли у каких-то двух классов оба дня физкультуры совпадают, если в этой школе учатся:

а) шесть дней в неделю, а воскресенье — единственный выходной;

б) пять дней в неделю с выходными в субботу и воскресенье?

2.5. а) Встретились 13 художников. Каждый нарисовал по одной карикатуре на каждого из остальных. Сколько карикатур было нарисовано?

б) Встретились 13 певцов. Каждый спел по одной песне дуэтом с каждым из остальных. Сколько песен было спето?

2.6. Сколько диагоналей у 17-угольника?

2.7. У скольких 10-значных чисел, составленных из цифр 1 и 2, сумма цифр равна 12?

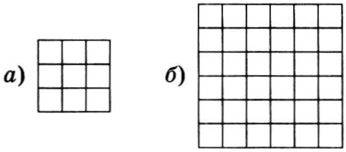
2.8. Сложите два первых числа из второй строки таблицы, которую составили в первой задаче. Потом второе и третье число. Потом третье с четвёртым... и так до тех пор, пока не заметите закономерность. Всегда ли она выполняется? Попробуйте объяснить почему.

2.9. Дуремар наладил производство газированной болотной воды. В каждый вид газировки он добавляет один краситель и два разных ароматизатора. Сколько разных напитков может произвести Дуремар с помощью шести видов красителей и шести видов ароматизаторов?

2.10. 10 школьников решали 10 задач. Могло ли случиться, что все они решили поровну задач, но для каждой задачи число решивших её было различным?

Занятие 3

3.1. Сколько квадратов можно увидеть на чертеже?



3.2. а) Первоклассник Колечка очень умён, но умеет писать пока только цифры 1 и 2. Он выписал все двузначные числа, которые мог. Выпишите и вы эти числа.

б) Потом Колечка выписал и все трёхзначные числа, которые мог. Сколько чисел он выписал на этот раз?

в) Сколько времени потратит Колечка, чтобы выписать все пятизначные числа, в которых есть только цифры 1 и 2? Каждую цифру он пишет за одну секунду.

г) Колечка научился писать цифру 3. Сколько четырёхзначных чисел может он теперь написать?

3.3. Учитель дал классу тест из пяти вопросов. За верный ответ на вопрос он ставил «+», за неверный или отсутствие ответа ставил «–», а в конце каждой работы записывал результат (например, «+ + – + –»). Удивительным образом ни у каких двух учеников результаты не совпали. Могло ли в классе быть 30 учеников? А 33?

3.4. Маша выложила на своей странице в социальной сети «ВКонтакте» пять новых фотографий. Её друзья поставили «лайки» на понравившиеся им фотографии. Никакие два друга не поставили «лайки» в точности одному и тому же набору фотографий. Какое наибольшее число друзей могли просмотреть Машины фотографии?

3.5. а) У скольких пятизначных чисел без повторяющихся цифр запись начинается на 2018?

б) А у скольких шестизначных?

3.6. В телеграфной азбуке Морзе каждая буква кодируется с помощью последовательности точек и тире, всего от одного до пяти символов. Например, буква А записывается как «•—», Е как «•», Э как «••—••». Почему не удалось обойтись кодами, содержащими не более четырёх символов?

3.7. В кружок «Юный прогульщик» записались восемь человек. Они договорились прогуливать занятия кружка так, чтобы каждый раз состав пришедших участников оказывался разным.

а) Сколько занятий это может продолжаться?

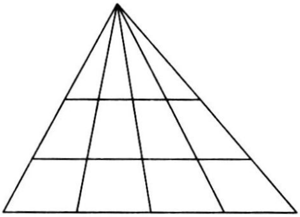
б) На какое наибольшее число занятий кружка могут прийти ровно два человека?

в) А ровно шесть человек?

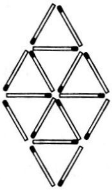
3.8. За каждую из пяти задач олимпиады можно получить «$+$», «$\pm$», «$\mp$» или «$-$». В итоге составляется таблица (например, как на рисунке). Сколько разных итоговых таблиц может получиться?

1	2	3	4	5
$+$	$+$	$\mp$	$-$	$\pm$

3.9. Сколько треугольников на рисунке?



3.10. Из 16 спичек сложен ромб со стороной 2 спички, разбитый на треугольные клетки со стороной в одну спичку (см. рисунок). А сколько спичек понадобится, чтобы сложить разбитый на такие клетки ромб со стороной в 10 спичек?



Занятие 4

4.1. Рассказ «Отбросим лишнее!» расположен с 34-й по 69-ю страницу в книге. Сколько страниц занимает рассказ?

4.2. В колоде 36 карт четырёх мастей. Для гадания Аза взяла все пики и все картинки (валетов, дам и королей), а остальные карты отложила. Сколько карт выбрала Аза?

4.3. В пиццерии есть курица, ветчина, грибы, перец, помидоры, ананасы и оливки. Сколько видов пиццы с начинкой можно приготовить, если по заказу клиента можно класть в пиццу:

а) любой набор начинок;

б) любые из этих начинок, но не менее двух;

в) любые из этих начинок, но не менее трёх;

г) любые из этих начинок, но не более пяти?

4.4. Сколько всего:

а) двузначных;

б) пятизначных чисел?

4.5. Продажа железнодорожных билетов открывается за 45 суток до отправления поезда. Когда открывается продажа билетов на 1 мая?

4.6. Пятеро студентов вместе снимают квартиру. Однажды они устроили вечеринку, на которую пришли ещё 25 их друзей, причём каждый приходящий пожимал руки всем собравшимся. Сколько получилось рукопожатий?

4.7. Пока мама гостила у камбалы, двенадцать её детей-осьминожков покачались на люстре, а семеро сшили парус из простыни. Сколько осьминожков успели и то и другое, если всего в семье шестнадцать детей, но один из них сидел в сторонке и в развлечениях братьев не участвовал?

4.8. У скольких чисел от 1 до 2019 в записи есть по крайней мере две различные цифры?

4.9. Из 1000 белых кубиков сложили куб $10 \times 10 \times 10$ и покрасили его снаружи синей краской. У скольких кубиков:

а) ровно одна грань синяя;

б) есть хоть одна синяя грань?

4.10. Конюшню с бетонными стенами $6\text{ м} \times 6\text{ м}$ разбили внутренними деревянными перегородками на стойла $1\text{ м} \times 2\text{ м}$. Чему может быть равна общая длина деревянных перегородок? Найдите все возможные ответы.

4.11. На столе гербом вверх лежали 36 монет. Лёша перевернул 30 монет, затем Макс перевернул 19 монет, а после этого Боря — 21 монету. В результате все монеты лежат гербом вниз. Сколько монет было перевёрнуто трижды?

Занятие 5

5.1. Даше подарили пять кубиков: белый, голубой, оранжевый, фиолетовый и красный. Даша строит из них башни с одним кубиком на каждом этаже.

а) Сколько разных двухэтажных башен может составить Даша?

б) А сколько трёхэтажных?

5.2. Пять гномов: Балин, Глоин, Ори, Фили и Кили — с помощью жребия решают, кто как проведёт ночь. Один из них пойдёт в разведку, другой будет охранять троих оставшихся, а те будут мирно спать. Сколькими способами может выпасть жребий?

5.3. а) Глоин, Ори и Фили договорились по очереди стоять на часах, пока остальные двое спят. Сколькими способами три гнома могут установить очерёдность караула?

б) Решите ту же задачу для четырёх гномов: Балина, Глоина, Ори и Фили.

в) Сколькими способами можно установить очередь для пяти гномов? А для тринадцати?

5.4. Бабушка умеет печь пирожки с мясом, с капустой, с грибами, с яблоками, с черникой, с брусникой и с малиной. А для теста у неё есть пять рецептов.

а) Сколько всего видов пирожков может испечь бабушка?

б) Для яблок или ягод тесто должно быть сладким, а для мяса, капусты или грибов — несладким. Среди бабушкиных рецептов два вида сладкого теста и три несладкого. Сколько видов пирожков может испечь бабушка с учётом этих ограничений?

5.5. Сколько разных башен может построить Даша из задачи 5.1? Один кубик Даша тоже считает башней — одноэтажной.

5.6. Все 15 мальчиков класса соревновались в беге. Одинаковых результатов не было. Сколькими способами могли распределиться:

а) первое, второе и третье места в кроссе на дистанции 2000 м;

б) первые места на дистанциях 60 м, 300 м и 1000 м?

в) Сколькими способами можно выбрать двух мальчиков для участия в школьных соревнованиях?

5.7. а) «В конце произошло самое невероятное: пёс забрался на спину ослу. Кот вскочил на голову псу. А юноша подпрыгнул и оказался стоящим на голове кота». Сколько пирамид могли построить четыре бременских музыканта, залезая друг на друга в разном порядке?

б) Сколько пирамид могли построить все пять бременских музыкантов (включая петуха), если петух не согласен быть в пирамиде самым средним?

в) Сколько пирамид можно построить впятером, чтобы осёл не оказался стоящим на коте?

г*) Сколько пирамид можно построить впятером, чтобы кот был выше осла?

5.8. Сколько пятибуквенных «слов» можно написать с помощью букв русского алфавита, если повторять буквы: а) можно; б) нельзя? «Слова» могут быть бессмысленными и даже непроизносимыми. Например, ЙЪЬМН тоже «слово».

5.9. Тридцать три богатыря должны чередой выйти из моря. Сколькими способами дядька Черномор может построить их в море в очередь на выход?

5.10. У скольких девятизначных чисел все цифры различны, сумма каждой пары соседних цифр нечётна, а само число делится на 4?

Занятие 6

Прочитайте условия трёх задач. Одинаковые или разные ответы у этих задач? Попробуйте объяснить своё мнение до того, как получите эти ответы.

6.1. Сколькими способами можно переставить буквы слова КРЫЛОВ так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

6.2. У скольких 6-значных чисел, составленных из 6 различных цифр 1, 3, 4, 5, 6, 7 (нет цифры 2), и чётные, и нечётные цифры идут в порядке возрастания?

6.3. Слон, Моська, Волк, Журавль, Ворона и Лисица пришли к И. А. Крылову за автографом. Сколькими способами они могут стать в очередь с условием, что и среди зверей, и среди птиц кто больше, тот должен получить автограф раньше?

Вот ещё, казалось бы, десять разных задач. А сколько на самом деле? Разделите задачи на «семьи» задач-близнецов.

6.4. Сколькими способами можно распределить восемь ролей среди восьми артистов?

6.5. Сколькими способами можно выбрать исполнителей ролей Красной Шапочки и Серого Волка из восьми артистов?

6.6. В Танином любимом спектакле заняты восемь артистов. Таня принесла два одинаковых букета. Сколькими способами она может выбрать двух артистов, которым сегодня подарит цветы после спектакля?

6.7. Чтобы не перепутать лекарства, Дуремар на каждую склянку наклеил таблицу 2×4, у которой каждая клетка покрашена либо в чёрный, либо в белый цвет. Сколько разных таблиц мог наклеить Дуремар?

6.8. На банки с пиявками Дуремар клеит таблицы 2×4, у которых две клетки покрашены в зелёный цвет, а остальные — в белый. Сколько разных таблиц может наклеить Дуремар?

6.9. Сколькими способами можно расставить в таблице 2×4 числа от 1 до 8?

6.10. Пароль от Wi-Fi состоит из восьми цифр — нулей и единиц. За сколько времени можно наверняка подобрать пароль, если тратить на проверку каждого варианта по 1 секунде?

6.11. Сколькими способами два разбойника могут разделить восемь различных монет между собой?

6.12. У Дуремара есть много одинаковых таблиц 2×4. В каждой таблице он красит одну клетку в чёрный цвет и одну — в зелёный, а остальные клетки оставляет белыми. Какое наибольшее число таблиц он может раскрасить по-разному?

6.13. Сколькими способами можно упаковать восемь разных подарков в восемь разных подарочных пакетов? В каждом пакете должен быть один подарок.

Занятие 7

7.1. В магазине игрушек есть три медведя, семеро козлят и тридцать восемь попугаев, все разные. Сколькими способами покупатель может выбрать:

а) одну игрушку;

б) по одной игрушке каждого из трёх видов;

в) две игрушки разных видов?

7.2. В классе учатся 5 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно выбрать:

а) пару учеников одинакового пола;

б) пару учеников, где хотя бы один мальчик;

в) четырёх учеников, среди которых мальчиков и девочек поровну?

7.3. Сколькими способами можно вырезать из клетчатой доски 8×10 прямоугольник из 4 клеток?

7.4. Леночка нарисовала зелёную ёлочку, украшенную шестью шариками (см. рисунок).

Каждый шарик она может раскрасить одним из четырёх цветов: красным, жёлтым, синим или оранжевым. Сколькими способами Леночка может раскрасить шарики, чтобы:

а) хотя бы один из них был жёлтым;

б) среди шариков был хотя бы один жёлтый и хотя бы один красный?

7.5. Сколькими способами можно выстроить в шеренгу четырёх мальчиков и четырёх девочек так, чтобы среди первых четырёх человек была хотя бы одна девочка?

7.6. Сколькими способами можно разместить на шахматной доске пару одинаковых королей:

а) бьющих друг друга;

б) не бьющих друг друга?

7.7. Кузнечик прыгает по числовому лучу вправо прыжками длины 2 или 5, при этом у него есть силы совершить не более трёх прыжков длины 5. Сколькими способами он может попасть с 1 на 33?

7.8. а) Есть одна карточка с цифрой 5, две карточки с цифрой 3 и сто карточек с цифрой 2. Сколькими способами можно составить из них *десятизначное* число, у которого произведение цифр оканчивается на 0?

б) Все такие числа выписали подряд по возрастанию. Какое число стоит на 455-м месте?

7.9*. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 31 шашку так, чтобы никакие две шашки не стояли в клетках с общей стороной?

Занятие 8

8.1. Пять друзей сняли в гостинице два номера: двухместный и трёхместный. Сколькими способами можно выбрать тех, кто поселится:

а) в двухместном номере;

б) в трёхместном номере?

8.2. В колоде 32 карты. Сколько существует способов:

а) выложить в ряд 10 карт;

б) получить 10 карт на руки?

8.3. На математический кружок ходят 10 человек. Сколько можно из них составить разных команд для участия:

а) в математической регате (4 человека);

б) в математическом бое (6 человек)?

8.4. Назовём друзей из первой задачи именами А, Б, В, Г и Д. Перечислите явно все возможные:

а) пары для заселения в двухместный номер;

б) тройки для заселения в трёхместный номер.

8.5. Сколько десятизначных чисел можно составить:

а) из четырёх единиц и шести двоек;

б) из четырёх единиц и шести нулей?

в) Выпишите в порядке возрастания первые пять чисел в каждом из предыдущих пунктов.

8.6. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

8.7. У людоеда в подвале томятся 25 пленников.

а) Сколькими способами он может выбрать одного из них себе на завтрак, другого на обед, третьего на полдник, а четвёртого на ужин?

б) А сколько есть способов выбрать четверых, чтобы отпустить на свободу?

8.8. Провели 20 прямых; любые две пересеклись, но никакие три не пересеклись в одной точке. Сколько получилось:

а) точек пересечения;

б) треугольников со сторонами на этих прямых?

8.9. а) Сколькими способами можно разделить 12 человек на две волейбольные команды по 6 человек?

б) Тот же вопрос, если Петя с Васей должны оказаться в разных командах.

в*) Сколькими способами можно разделить 4 мальчиков и 8 девочек на две команды по 6 человек, если в каждую команду должен входить хотя бы один мальчик?

г) Сколькими способами можно разделить 18 человек на три команды по 6 человек?

8.10. На кружке по рисованию двадцать учеников, у всех одинаковые наборы из шести фломастеров. Каждый использовал по три фломастера из набора. Оказалось, что никакие два ученика не выбрали один и тот же набор цветов. Сколькими способами ребята могли выбрать фломастеры?

Содержание

Авторы задач

Если задача придумана совместно, то она включена в списки обоих авторов и выделена курсивом.

Берлов С. — Д38.
Волченков С. — Д17.
Женодаров Р. — 7.9.
Раскина И. — 2.9, 3.7, 4.7, 5.4, *5.7*, 6.3, *Д19*, Д22, *Д35*, Д42, Д66.
Семёнова М. — Д1.
Тамаркин Д. — Д26.
Шаповалов А. — 1.8, 3.10, 4.10, *5.7*, 5.10, 7.3, 7.7, 7.8, Д3, Д7, Д8, Д10, Д11, Д15, Д16, *Д19*, Д24, Д29, Д30, Д33, *Д35*, Д41, Д45, Д46, Д47, Д49, Д51, Д53–Д65, Д67–Д70, Д72, Д76*б*, Д77–Д87, Д91, Д92.

Издательство МЦНМО представляет книги по математике для школьников и учителей

- *Акияма Д., Руис М.-Д.* Страна математических чудес
- *Андреева А. Н., Барабанов А. И., Чернявский И. Я.* Саратовские математические олимпиады 1950/51–1994/95
- *Аносов Д. В.* Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем
- *Арнольд В. И.* Геометрия кватернионов
- *Арнольд В. И.* Задачи
- *Арнольд В. И.* Математическое понимание природы
- *Бегунц А. В. и др.* Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
- *Блинков А. Д., Горская Е. С.* (сост.) Задачи московских устных математических олимпиад 6–7 классов
- *Блинков А. Д.* (сост.) Московские математические регаты. Части 1–3
- *Богданов А. И.* Геометрические головоломки
- *Богданов А. И.* Логические головоломки
- *Бураго А. Г.* Дневник математического кружка: первый год занятий
- *Бураго А. Г.* Дневник математического кружка: второй год занятий
- *Варламов С. Д. и др.* Задачи Московских городских олимпиад по физике 1986–2007
- *Варламов С. Д. и др.* Задачи Московских олимпиад школьников по физике 2006–2016
- *Васильев В. А.* Топология для младшекурсников
- *Васильев В. А.* Геометрия дискриминанта
- *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л.* Прямые и кривые
- *Виленкин Н. Я.* Рассказы о множествах
- *Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А.* Комбинаторика
- *Волчкевич М. А.* Уроки геометрии в задачах. 7–8 классы
- Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009. Заключительные этапы
- *Высоцкий И. Р.* Кружок по теории вероятностей
- *Высоцкий И. Р.* Дидактические материалы по теории вероятностей

- *Высоцкий И. Р., Ященко И. В.* Задачи заочных интернет-олимпиад по теории вероятностей и статистике
- *Гейдман Б. П.* Логарифмические и показательные уравнения и неравенства
- *Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э.* Функции и графики (основные приёмы)
- *Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л.* Тригонометрия
- *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки
- *Гик Е. Я.* Три игры: домино, морской бой, крестики-нолики
- *Гик Е. Я.* Сто пятьдесят спортивных головоломок. Спорт и математика
- *Голенищева-Кутузова Т. И. и др.* Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Части 1, 2
- *Горбачёв Н. В.* Сборник олимпиадных задач по математике
- *Гордин Р. К.* Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы
- *Гордин Р. К.* Теоремы и задачи школьной геометрии
- *Грибалко А. В., Медников Л. Э., Шаповалов А. В.* XIX–XX Турниры математических боёв им. А. П. Савина
- *Грибалко А. В., Медников Л. Э.* XXI–XXII турниры математических боёв имени А. П. Савина
- *Грибалко А. В., Медников Л. Э.* XXIII–XXIV турниры математических боёв имени А. П. Савина
- *Евдокимов М. А.* От задачек к задачам
- *Екимова М. А., Кукин Г. П.* Задачи на разрезание
- *Еремин Н. Н., Еремина Т. А.* Занимательная кристаллография
- Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике
- *Звонкин А. К.* Малыши и математика. Домашний кружок для дошкольников
- *Земляков А. Н.* Математический анализ реальности. Дифференциальные уравнения для школьников
- *Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.* Как решают нестандартные задачи

- *Канель-Белов А. Я., Трепалин А. С., Ященко И. В.* Олимпиадный ковчег
- Квантик. Альманах для любознательных. Выпуски 1–20
- *Кириллов А. А.* Повесть о двух фракталах
- *Козлова Е. Г.* Сказки и подсказки (задачи для математического кружка)
- *Кушнир И. А.* Геометрия. Поиск и вдохновение
- *Медников Л. Э., Шаповалов А. В.* Турнир городов: мир математики в задачах
- Московские математические олимпиады 1937–1957 г.
- Московские математические олимпиады 1958–1967 г.
- Московские математические олимпиады 1981–1992 г.
- Московские математические олимпиады 1993–2005 г.
- *Муравенко Е. В.* Ярмарка слов. Словесные головоломки для детей и взрослых
- *Прасолов В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу
- *Прасолов В. В.* Задачи по стереометрии
- *Прасолов В. В.* Наглядная топология
- *Прасолов В. В.* Рассказы о числах, многочленах и фигурах
- *Смирнов В. А., Смирнова И. В., Ященко И. В.* Наглядная геометрия
- *Смирнов С. Г.* Задачник по истории науки. От Фалеса до Ньютона
- *Смирнов С. Г.* Задачник по истории науки. От Ньютона до наших дней
- *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Правильные, полуправильные и звездчатые многогранники
- *Спивак А. В.* Математический кружок. 6–7 классы
- *Сусленкова С. П.* Задачи на логику... и не только. 4–6 класс
- *Табачников С. Л., Фукс Д. Б.* Математический дивертисмент
- *Тао Т.* Структура и случайность
- *Толпыго А. К.* Задачи Международного математического Турнира городов
- *Успенский В. А.* Простейшие примеры математических доказательств
- *Уфнаровский В. А.* Математический аквариум

- *Фомин Д. В., Кохась К. П.* Ленинградские математические олимпиады 1961–1991
- *Фомин Д. В., Кохась К. П.* Санкт-петербургские математические олимпиады 1992–2008
- *Шаповалов А. В.* Принцип узких мест
- *Шаповалов А. В., Медников Л. Э.* XVII Турнир математических боев имени А. П. Савина
- *Шаповалов А. В., Медников Л. Э.* Как готовиться к математическим боям. 400 задач Турниров имени А. П. Савина
- *Шарыгин Г. И.* Лекции по элементарной геометрии
- *Шень А.* Вероятность: примеры и задачи
- *Шень А.* Геометрия в задачах
- *Шень А.* Логарифм и экспонента
- *Шень А.* Математическая индукция
- *Шень А.* Перестановки
- *Шень А.* Программирование: теоремы и задачи

Серия книг «Школьные математические кружки»

- *Медников Л. Э.* Чётность. Выпуск 1
- *Гуровиц В. М., Ховрина В. В.* Графы. Выпуск 2
- *Чулков П. В.* Арифметические задачи. Выпуск 3
- *Блинков А. Д., Блинков Ю. А.* Геометрические задачи на построение. Выпуск 4
- *Кноп К. А.* Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. Выпуск 5
- *Мерзон Г. А., Ященко И. В.* Длина, площадь, объём. Выпуск 6
- *Блинков А. Д.* Классические средние в арифметике и геометрии. Выпуск 7
- *Сгибнев А. И.* Делимость и простые числа. Выпуск 8
- *Шаповалов А. В.* Как построить пример? Выпуск 9
- *Заславский А. А., Френкин Б. Р.* Задачи о турнирах. Выпуск 10
- *Раскина И. В., Шноль Д. Э.* Логические задачи. Выпуск 11
- *Блинков А. Д., Гуровиц В. М.* Непрерывность. Выпуск 12

- *Шаповалов А. В.* Математические конструкции: от хижин к дворцам. Выпуск 13
- *Раскина И. В.* Логика для всех: от пиратов до мудрецов. Выпуск 14
- *Блинков А. Д.* Геометрия в негеометрических задачах. Выпуск 15
- *Кноп К. А.* Азы теории чисел. Выпуск 16
- *Блинков Ю. А., Горская Е. С.* Вписанные углы. Выпуск 17
- *Блинков А. Д.* Последовательности. Выпуск 18
- *Сгибнев А. И.* Геометрия на подвижных чертежах. Выпуск 19
- *Раскина И. В., Шаповалов А. В.* Комбинаторика. Выпуск 20
- *Шаповалов А. В.* Индукция без формальностей. Выпуск 21
- *Блинков А. Д.* Геометрия для 7 класса, обычная и не очень. Части 1, 2. Выпуск 22
- *Блинков А. Д., Филипповский Г. Б.* Геометрические задачи на экстремумы. Выпуск 23
- *Раскина И. В., Шаповалов А. В.* Комбинаторика: заседание продолжается. Выпуск 24
- *Раскина И. В., Блинков А. Д.* Текстовые задачи. Выпуск 25
- *Сиротовский И. Я.* Клетки и таблицы. Выпуск 26

Серия книг «Библиотечка „Квант“»

- *Тихомиров В. М.* Рассказы о максимумах и минимумах. Библиотечка «Квант». Выпуск 56
- *Ахмедов Э. Т., Громов А. В.* Картины фундаментальной физики. Библиотечка «Квант». Выпуск 138
- *Заславский А. А.* Олимпиады им. И. Ф. Шарыгина. 2015–2019 гг. Библиотечка «Квант». Выпуск 139
- *Произволов В. В.* Задачи на вырост. Библиотечка «Квант». Выпуск 140

Серия книг «Библиотечка журнала „Квантик“»

- *Евдокимов М. А.* Сто граней математики. Библиотечка журнала «Квантик». Выпуск 1
- *Федин С. Н.* Перепутаница. Библиотечка журнала «Квантик». Выпуск 2
- *Кохась К. П.* Как Бусенька что-то-там. Математические сказки. Библиотечка журнала «Квантик». Выпуск 3

Серия книг «Необычная математика»

- *Кац Е. М.* Тетрадь логических заданий для детей 4 лет
- *Кац Е. М.* Тетрадь логических заданий для детей 5–6 лет
- *Кац Е. М.* Тетрадь логических заданий для детей 6–7 лет
- *Кац Е. М.* Необычная математика после уроков. Для детей 7 лет
- *Кац Е. М.* Необычная математика после уроков. Для детей 8 лет
- *Кац Е. М.* Необычная математика после уроков. Для детей 9 лет
- *Кац Е. М.* Пирог с математикой. Игры для детей 4–7 лет
- *Кац Е. М.* Математика вприпрыжку. Программа игровых занятий математикой с детьми 4–6 лет
- *Кац Е. М.* Математика вприпрыжку. Варианты логических заданий для детей 4–6 лет
- *Кац Е. М.* Математика с ножницами

Книги по биологии

- *Барабанов С. В.* Человек: атлас
- *Волкова П. А.* Приятная наука. Основы общей экологии
- *Волошина П. В.* (сост.) Практическая биология для олимпиадников
- *Ганчарова О. С. и др.* Олимпиада по биологии. Взгляд изнутри
- *Глаголев С. М., Волкова П. А., Беркинблит М. Б.* Общая биология: экология, эволюция, история жизни на Земле
- *Дольник В. Р., Козлов М. А.* Беспозвоночные животные: атлас
- *Дольник В. Р., Козлов М. А.* Хордовые животные: атлас
- *Квашенко А. Н.* Теоретическая драконистика. Могла ли эволюция создать дракона?
- *Черепанов И. В.* Бактерии, грибы, лишайники, растения: атлас

Получить более подробную информацию об этих и других книгах издательства, а также заказать их можно в нашем интернет-магазине на сайте `http://biblio.mccme.ru/`.

Книги можно купить в магазине «Математическая книга», который расположен на первом этаже Московского центра непрерывного математического образования. Магазин работает ежедневно, кроме воскресенья.

Адрес магазина: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Проезд до станции метро «Смоленская» или «Кропоткинская», далее пешком. Телефон для справок: (495) 745–80–31. E-mail: biblio@mccme.ru.

В СЕРИИ «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ» ВЫШЛИ КНИГИ:

26. ***И. Я. Сиротовский.*** Клетки и таблицы
25. ***И. В. Раскина, А. Д. Блинков.*** Текстовые задачи
24. ***И. В. Раскина, А. В. Шаповалов.*** Комбинаторика: заседание продолжается
23. ***А. Д. Блинков, Г. Б. Филипповский.*** Геометрические задачи на экстремумы
22. ***А. Д. Блинков.*** Геометрия для 7 класса, обычная и не очень
21. ***А. В. Шаповалов.*** Индукция без формальностей
20. ***И. В. Раскина, А. В. Шаповалов.*** Комбинаторика
19. ***А. И. Сгибнев.*** Геометрия на подвижных чертежах
18. ***А. Д. Блинков.*** Последовательности
17. ***Ю. А. Блинков, Е. С. Горская.*** Вписанные углы
16. ***К. А. Кноп.*** Азы теории чисел
15. ***А. Д. Блинков.*** Геометрия в негеометрических задачах
14. ***И. В. Раскина.*** Логика для всех: от пиратов до мудрецов
13. ***А. В. Шаповалов.*** Математические конструкции: от хижин к дворцам
12. ***А. Д. Блинков, В. М. Гуровиц.*** Непрерывность
11. ***И. В. Раскина, Д. Э. Шноль.*** Логические задачи
10. ***А. А. Заславский, Б. Р. Френкин, А. В. Шаповалов.*** Задачи о турнирах
9. ***А. В. Шаповалов.*** Как построить пример?
8. ***А. И. Сгибнев.*** Делимость и простые числа
7. ***А. Д. Блинков.*** Классические средние
6. ***Г. А. Мерзон, И. В. Ященко.*** Длина. Площадь. Объем
5. ***К. А. Кноп.*** Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам
4. ***А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков.*** Геометрические задачи на построение
3. ***П. В. Чулков.*** Арифметические задачи
2. ***В. М. Гуровиц, В. В. Ховрина.*** Графы
1. ***Л. Э. Медников.*** Чётность

ISBN 978-5-4439-4482-1
9 785443 944821 >