

Ответы на домашнее задание № 6

(Принцип Дирихле)

1. Прямая разделяет плоскость на две полуплоскости. У треугольника три вершины поэтому согласно принципу Дирихле, в одной полуплоскости лежит не менее двух вершин треугольника. Прямая не пересекает сторону треугольника, соединяющую эти две вершины. Значит прямая не может пересекать все три стороны треугольника.
2. В вершине куба сходятся три грани. Согласно принципу Дирихле хотя бы две из них окрашены в один цвет. У этих двух граней есть общее ребро, они будут соседними.
3. Да, верно, 24 конфеты можно разложить по трем ящикам по 8 конфет в каждом. 25-ю конфету придется положить в один из ящиков, в котором уже лежит 8 конфет, в этом ящике окажется 9 конфет. Используется обобщенный принцип Дирихле.
4. Паша сделал 13 ошибок, остальные меньше, значит, возможные количества ошибок: 0, 1, 2, ..., 12. Всего 13 возможных чисел. По 2 одинаковые ошибки могли сделать 26 учеников. Всего же учеников, исключая Пашу, 29. Согласно обобщенному принципу Дирихле, не менее трех учеников сделали одинаковое число ошибок.
5. Представим, что если какое-то число делится на 10 сразу, то задача решена. Допустим, таких чисел нет, если число не делится на 10, у него есть остаток (1, 2, 3, ..., 9). Рассмотрим суммы: первое число, первые два числа, первые три числа, и так далее до суммы всех 10 чисел. у этих сумм тоже есть остатки при делении на 10. остатков всего 9, а сумм 10. Согласно принципу Дирихле, у каких-то двух сумм остатки будут одинаковыми. Если вычесть из одной суммы другую, то остаток будет 0. Следовательно, разность этих сумм делится на 10. Значит среди любых 10 целых чисел найдется одно или несколько, сумма которых делится на 10.
6. Рассмотрим числа, состоящие только из единиц: 1, 11, 111, 1111 и так далее. Рассмотрим остатки от деления каждого из этих чисел на 2025. Остаток при делении на 2025 может быть любым числом от 0 до 2024, всего 2025 разных остатков. Рассмотрим 2026 чисел, состоящих из единиц. По принципу Дирихле, какие-то два числа дадут одинаковый остаток при делении на 2025. Если вычесть из большего числа меньшее, то разность будет делиться на 2025. Эта разность - число, состоящее из одних единиц, умноженное на степень десятки (например, $111000 = 111 \cdot 1000$). Так как 2025 не делится на 10, то число, состоящее из одних единиц, должно делиться на 2025.
7. Выберем наугад одного ученого. Он переписывается с каждым из остальных 16 ученых только об одной теме. Докажем, что хотя бы по одной теме из трех он переписывается с 6 учеными. Пусть это не так. Тогда по каждой теме он переписывается не более чем с 5 учеными. Следовательно, по трем темам он переписывается не более чем с 15 учеными, что противоречит условию. Эту тему будем называть темой A . Если среди этих шестерых найдутся два, переписывающихся друг с другом по теме A , то задача решена. Возможен другой вариант: никто из этих 6 ученых не переписывается по теме A . Тогда они переписываются по двум другим темам. Рассмотрим одного из 6 ученых. Он переписывается с остальными 5 учеными шестерки. Найдется тема, по которой он переписывается с тремя из 5 ученых. В противном случае он переписывался бы только с 4 учеными. Назовем эту тему темой B . Если один из этих трех ученых переписывается с другим по теме B , то задача решена. Если они все трое переписываются между собой по третьей теме (теме C), то они и составили искомую тройку. Все случаи рассмотрены. Тем самым доказано, что указанная тройка всегда найдется.