Марио Ливио

φ – ЧИСЛО БОГА

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ — ФОРМУЛА МИРОЗДАНИЯ

Международная премия Пифагора
Бестселлер №1 Amazon

СЕКРЕТ ГАРМОНИИ ВО ВСЕМ

Являются ли некоторые числа более значимыми, чем другие? Конечно же, да! Если уж у простых людей, далеких от науки или мистики, есть свои любимые и нелюбимые числа, что же говорить про математиков и физиков? Число — такой же важный компонент культуры, как слово. Нет человека, которому бы ни о чем не говорили числа 7, 13 или 666. Но есть числа, которые влияют на нашу жизнь, даже если мы о них не знаем. Таково число фи, в котором кроется секрет гармонии во всем. Марио Ливио написал эту книгу, чтобы мы не были так слепы и не думали, что нумерология — это предрассудки.

Тимоти Хью, Коннектикут

ИЗ ЧЕГО СКЛАДЫВАЕТСЯ КРАСОТА

Книга Марио Ливио полна увлекательнейших цифровых трюков, но, чтобы понять их, вовсе не нужно иметь математический склад ума. Все мы сталкиваемся с тем, что называют красотой. Но кто скажет, из чего складывается красота? Почему нам так нравится смотреть на картины старых мастеров, любоваться спиральными галактиками или разглядывать сосновую шишку? В своей книге Ливио раскрывает секреты красоты и уводит читателя в увлекательный мир математики — науки, которая объясняет все.

Элис Хоул, Лос-Анджелес

ПОТРЯСАЮЩЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Я даю этой книге пять звезд из пяти! Эта книга — и для математиков, и для тех, кто не дружит с цифрами. Если вы любите науку, вас захватит потрясающее исследование, которое автор предпринимает в своем труде, если вы любитель беллетристики — эта книга станет для вас тем же, что и хороший детектив.

Рэндом Уэсли, Сан-Франциско

ФОРМУЛА ВСЕЛЕНСКОЙ ГАРМОНИИ

Марио Ливио написал прекрасную работу, в которой дается подробный исторический обзор того, как на протяжении веков люди старались открыть универсальную формулу вселенской гармонии. Оказалось, что все гораздо проще — все сводится к одному-единственному числу, известному как золотое сечение, или число Бога. Вы можете быть математиком или всего лишь человеком, которого чуть-чуть интересует мистика. Если вам интересен окружающий мир, книга приведет вас в восторг!

Кристофер Паркер, Кембридж

ХОРОШАЯ ЛИТЕРАТУРА

«Золотое сечение» — это настоящий шедевр талантливого автора. Я был впечатлен той четкой и захватывающей манерой, которая делает научный труд книгой не только для ума, но и для отдыха. В этой книге Марио Ливио одновременно отвечает на самые актуальные вопросы современной науки и рассказывает удивительную историю, увлечься которой способен каждый. Это хорошая литература во всех отношениях.

Мишель Тернер, Колд Спринг Харбор

Марио Ливио

φ — ЧИСЛО БОГА

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ — ФОРМУЛА МИРОЗДАНИЯ

Издательство АСТ
МОСКВА

УДК 001(091)
ББК 72.3
Л55

*Права на перевод получены соглашением между Broadway Books
(Crown Publishing Group, Random House LLC, a Penguin Random House Company)
и литературным агентством «Синопсис»*

Mario Livio

**THE GOLDEN RATIO:
The Story of PHI, the World's Most Astonishing Number**

Ливио, Марио.

Л55 φ — Число Бога. Золотое сечение — формула мироздания/ Марио Ливио. — Москва : АСТ, 2018. — 432 с., ил. — (Удивительная Вселенная).

ISBN 978-5-17-983041-2

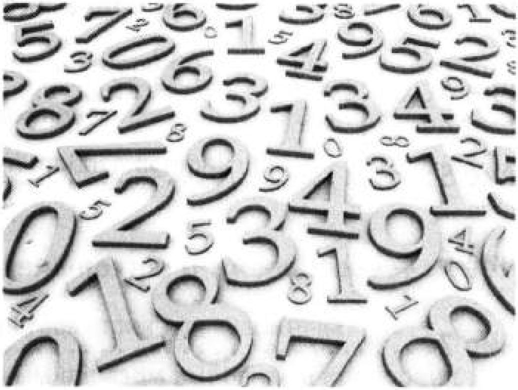
Известный американский астрофизик и популяризатор науки Марио Ливио ведет увлекательное расследование истории числа φ или 1,6180339887... Как только не называли это загадочное число: и золотым сечением, и числом Бога, и божественной пропорцией. Оно играет важнейшую роль и в геометрии живой природы, и в творениях человека, его закладывают в основу произведений живописи, скульптуры и архитектуры, ему посвящают приключенческие романы! Но заслужена ли подобная слава? Что здесь правда, а что вымысел, какова история Золотого сечения в науке и культуре, и чем вызван такой интерес к простому геометрическому соотношению?

Захватывающий сюжет, малоизвестные факты из истории науки и неожиданные сопоставления — вот что делает эту научно-популярную книгу настоящим детективом и несомненным бестселлером.

ISBN 978-0767908160 (англ.)
ISBN 978-5-17-983041-2

СОДЕРЖАНИЕ

Памяти моего отца Робина Ливио



ПРЕДИСЛОВИЕ

«Золотое сечение» — это книга об одном-единственном числе, однако число это совершенно особое. Это число — 1,61803... — встречается и в лекциях по истории искусств, и в перечнях «любимых чисел», которые составляют математики. Не менее поразительно, что оно было предметом множества экспериментов по психологии.

Так называемое «золотое сечение» заинтересовало меня пятнадцать лет назад, когда я готовился к лекции об эстетике в физике (представьте себе, это отнюдь не оксюморон), и с тех пор оно не идет у меня из головы.

В создании этой книги прямо и косвенно поучаствовало столько моих коллег, друзей и учеников, что всех и не перечислишь. Здесь я хотел бы выразить особую благодарность Иву-Алену Буа, Митчу Фейгенбауму, Гиллелю Гаухману, Теду Хиллу, Рону Лифшицу, Роджеру Пенроузу, Джоанне Постма, Полу Стейнхардту, Пат Тиль, Анне ван дер Хельм, Дивакару Вишванату и Стивену Вольфраму — за бесценные сведения и крайне продуктивные споры.

Я благодарен своим коллегам Даниэле Кальцетти, Стефано Казертано и Массимо Стиавелли за помощь с переводами с латыни и итальянского, Клаусу Лейтереру и Эрмине Ландт за помощь с переводами с немецкого, а Патрику Годону — за помощь с переводами с французского. Сара Стивенс-Рейберн, Элизабет Фрэзер и Нэнси Хэнкс очень посодействовали мне во всем, что касалось лингвистики и библиографии. Особенно я благодарен Шэрон Тулан за содействие в подготовке рукописи.

Искренне благодарю своего литературного агента Сьюзен Рабинер за то, что она не давала мне опустить руки до начала и во время работы над книгой. Я в огромном долгу перед Джеральдом Ховардом, моим редактором из издательства «Doubleday Broadway», за то, что он так тщательно вычитывал рукопись и делал такие точные, глубокие замечания. Также я благодарен Ребекке Холланд, выпускающему редактору в «Doubleday Broadway», за постоянное содействие в то время, пока книга была в печати.

И, наконец, эта книга вообще была написана исключительно благодаря постоянной помощи, терпению и поддержке Софи Ливио.

ПРЕЛЮДИЯ К ЧИСЛУ

Много есть чудес на свете.
Софокл (495–405 гг. до н. э.)
(*Пер. С. Шервинского,*
Н. Познякова)

Знаменитый английский физик лорд Кельвин (Уильям Томпсон, 1824–1907), в честь которого назван градус абсолютной температурной шкалы, во время одной своей лекции сказал: «Если знание невозможно выразить численно, значит, оно поверхностно и недостаточно». Разумеется, Кельвин имел в виду то знание, которое необходимо для научного прогресса. Однако числа и математика удивительным образом предрасположены к тому, чтобы способствовать пониманию даже того, что крайне далеко от науки — или, по крайней мере, представляется таким на первый взгляд. В «Тайне Мари Роже» Эдгара Аллана По знаменитый детектив Огюст Дюпен замечает: «Мы превращаем случайность в предмет точных исчислений. Мы подчиняем непредвиденное и невообразимое научным математическим формулам» (*пер. И. Гуровой*). Можно пояснить это и на более простом примере. Представьте себе, что вы готовитесь к приему гостей и столкнулись со следующей задачей: у вас есть шоколадка, состоящая из двенадцати долек — сколько раз нужно ее разломить, чтобы разделить все части? Ответ куда проще, чем вы думали, и почти не требует вычислений. Каждый раз, когда вы ломаете шоколадку, у вас получается на один кусок больше, чем раньше. Следовательно, если вам нужно получить двенадцать кусков, придется ломать шоколадку одиннадцать раз (убедитесь сами). А если обобщить, то количество разломов всегда будет на один меньше, чем требуемое количество кусков, независимо от того, из скольких частей состоит шоколадка.

Даже если вы не слишком любите шоколад, то все равно понимаете, что этот пример демонстрирует простой математический закон, который можно применить и во многих других случаях. Однако математические свойства, формулы и законы (многие из которых не задерживаются у нас в памяти) — это далеко не все; существуют еще и особые числа, которые настолько вездесущи, что не устают нас изумлять. Самое прославленное из них — число π (пи), отношение длины окружности к ее диаметру. Значение π — 3,14159... — завораживало много поколений математиков. Хотя изначально число π было определено в геометрии, оно очень часто и неожиданно всплывает при вычислении вероятности. Знаменитый пример — так называемая игла Бюффона, названная в честь французского математика Жоржа-Луи Леклерка, графа де Бюффона (1707–1788), который поставил и решил эту вероятностную задачу в 1777 году. Леклерк задал следующий вопрос: представьте себе, что у вас на полу лежит большой лист бумаги, разлинованный параллельными линиями через равные заданные промежутки. На лист совершенно случайным образом бросают иглу, длина которой в точности равна промежутку между линиями. Какова вероятность, что игла упадет так, что пересечет одну из линий (то есть как на рис. 1)? Как ни странно, ответ, оказывается, 2/π. То есть в принципе возможно даже вычислить π, если повторить этот эксперимент много раз и понаблюдать, какая доля бросков заканчивается пересечением иглы с линией (правда, есть и другие методы вычисления π, не такие скучные). Словосочетание «число π» настолько вошло в обиходный лексикон, что кинорежиссер Даррен Аронофски в 1998 году даже снял психологический триллер под таким названием.

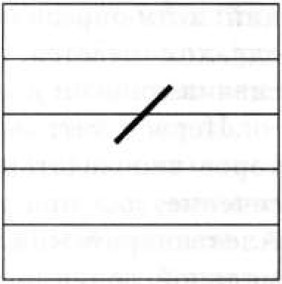


Рис. 1

Менее знаменито другое число — φ (фи), а между тем, во многих отношениях оно даже интереснее. Вот, скажем, представьте себе, что я спрашиваю у вас, что общего у изумительного расположения лепестков алой розы, композиции знаменитой картины Сальвадора Дали «Тайная вечеря», чудесного рисунка спиральной раковины и статистики размножения кроликов? Трудно поверить, что у столь разнородных явлений действительно есть нечто общее — и это некое число или геометрическая пропорция, известная человечеству еще со времен античности, число, которому в XIX веке дали почетное называние «золотое число» или «золотое сечение». А в начале XVI века в Италии вышла книга, в которой это число называлось «Божественной пропорцией» — не более и не менее.

В повседневной жизни мы применяем слово «пропорция» для обозначения соотношения между частями целого по размеру или количеству — или когда хотим подчеркнуть гармоничные отношения между разными частями. В математике термин «пропорция» применяется для описания равенства следующего типа: девять относится к трем, как шесть к двум. Как мы увидим, золотое сечение дарит нам чарующее сочетание этих определений: хотя определяется оно строго математически, однако считается, что оно обладает свойствами, обеспечивающими приятную гармонию.

Первое четкое определение соотношения, которое впоследствии станет известно как золотое сечение, дал примерно в 300 году до н. э. Евклид Александрийский, основатель геометрии как формальной дедуктивной системы. К Евклиду и его фантастическим достижениям мы еще вернемся в главе 4, а пока позвольте отметить, что Евклид вызывает столь сильное восхищение, что поэтесса Эдна Сент-Винсент Миллей в 1923 году даже посвятила ему стихотворение под названием «На обнаженность красоты Евклид взглянул» (*пер. Л. Мальцевой*). Эдна даже сохранила свою школьную тетрадь по евклидовой геометрии. Евклид определил пропорцию, выведенную из простого деления линии (отрезка), по его выражению, «в крайнем и среднем отношении»: «Прямая линия называется рассеченною в крайнем и среднем отношении, когда как целая прямая к большему отрезку, так больший к меньшему» (*пер. Ф. Петрушевского*) (рис. 2) .

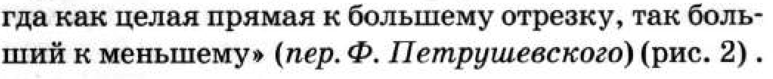


Рис. 2

Иначе говоря, если мы посмотрим на рис. 2, то увидим, что отрезок AB определенно длиннее отрезка AC, в то же время AC длиннее CB. Если отношение длины AC к длине CB такое же, как отношение длины AB к длине AC, значит, отрезок поделен «в крайнем и среднем отношении» — или в золотом сечении.

Кто бы мог подумать, что такое на первый взгляд невинное разделение отрезка, которое Евклид определил в чисто геометрических целях, окажет влияние на самые разные разделы знания — от положения листьев в ботанике до структуры галактик, состоящих из миллиардов звезд, от математики до искусства? Следовательно, золотое сечение — прекрасный пример того самого крайнего изумления и восторга, которые так высоко ценил великий физик Альберт Эйнштейн (1879–1955). Вот как он об этом писал: «Самое прекрасное, что только может выпасть нам на долю, — это тайна. Стремление разгадать ее стоит у колыбели подлинного искусства и подлинной науки. Тот, кто не знает этого чувства, утратил любопытство, не способен больше удивляться, — все равно что мертвый, все равно что задутая свеча».

Как мы еще увидим, когда проследим на страницах этой книги все необходимые вычисления, точное значение золотого сечения (то есть отношение AC к CB на рис. 2) — бесконечное непериодическое число 1,6180339887..., а такие бесконечные неповторяющиеся числа интересовали людей со времен античности. Рассказывают, что когда греческий математик Гиппас из Метапонта в V веке до н. э. обнаружил, что золотое сечение — это и не целое число (подобное нашим добрым знакомым 1, 2, 5 и т. д.), и даже не отношение двух целых чисел (подобное дробям вроде 1/2, 2/3, 3/4, которые в совокупности называются *рациональными числами*), это привело остальных пифагорейцев — то есть последователей знаменитого математика Пифагора — в полнейшее смятение. Предметом поклонения для пифагорейского мировоззрения (о котором мы подробно поговорим в главе 2) был *arithmos* — то есть имманентные качества целых чисел и их отношений и их предполагаемая роль в мироздании. А открытие, что существуют числа вроде золотого сечения, которые все тянутся и тянутся вечно и при этом в них нет никаких следов повторяемости, никакой закономерности, вызвало самый настоящий философский кризис. Легенда даже утверждает, будто пифагорейцы, совершенно потрясенные этим открытием колоссальной важности, устроили гекатомбу — пожертвовали сто быков, — хотя это вряд ли, учитывая, что пифагорейцы были строгими вегетарианцами. Тут я вынужден подчеркнуть, что большинство подобных историй основаны на недостоверном историческом материале. Так или иначе, мы даже приблизительно не знаем, когда именно были открыты числа, которые не являются ни целыми, ни дробями — так называемые *иррациональные числа*. Однако некоторые ученые датируют это открытие V веком до н. э., что, по крайней мере, соответствует только что рассказанным легендам. Очевидно одно: пифагорейцы в общем и целом считали, что существование подобных чисел так ужасно, что это, должно быть, своего рода ошибка мироздания, которую надо замолчать и держать в тайне.

Тот факт, что золотое сечение невозможно выразить в виде дроби (как рациональное число), попросту означает, что нельзя выразить в виде дроби соотношение длин АС и СВ на рис. 2. Иначе говоря, как бы мы ни трудились, мы не найдем единицы измерения, которая, скажем, укладывалась бы 51 раз в АС и 19 раз в СВ. Две длины, у которых нет подобной единицы измерения, называются *несоизмеримыми*. В своем труде «Жизнь Пифагора» (ок. 300 г. н.э.) философ и историк Ямвлих из аристократического сирийского семейства так описывает бурную реакцию на это открытие: будто бы тот, кто открыл эту тайну непосвященным, «вызвал, как говорят, такую ненависть, что его не только изгнали из общины и отлучили от пифагорейского образа жизни, но и соорудили ему надгробие, как будто действительно ушел из жизни тот, кто некогда был их товарищем» (*пер. И.Ю. Мельниковой*).

В профессиональной математической литературе золотое сечение принято обозначать греческой буквой τ (тау) — от греческого слова τομή (читается «томэ»), которое означает «сечение» или «разрез». Однако в начале XX века американский математик Марк Барр предложил обозначать золотое сечение буквой φ — по первой букве имени великого древнегреческого скульптора Фидия, жившего примерно в 490–430 гг. до н. э. Величайшие шедевры Фидия — Афина Партенос в Афинах и Зевс в Олимпии. Кроме того, полагают, что он отвечал и за другие скульптуры в Парфеноне, хотя весьма вероятно, что их создали его ученики и помощники. Барр решил, что надо почтить память скульптора, поскольку многие искусствоведы полагают, что Фидий часто и весьма точно применял золотое сечение в своих творениях (эту и подобные гипотезы мы очень дотошно разберем в нашей книге). Я буду называть его и золотым сечением, и числом φ, поскольку именно такие обозначения чаще всего встречаются в популярной математической литературе.

Величайшие математические умы в истории — и древнегреческие мудрецы Пифагор и Евклид, и средневековый итальянский ученый Леонардо Пизанский по прозвищу Фибоначчи, и астроном эпохи Возрождения Иоганн Кеплер, и современные научные светила, например, физик из Оксфорда Роджер Пенроуз, немало часов провели в размышлениях над этим простым соотношением и его свойствами. Однако золотое сечение чарует отнюдь не только математиков. Биологи, художники, историки, музыканты, архитекторы, психологи и даже мистики — все они размышляли над тем, почему это число столь вездесуще и в чем его притягательность. По сути дела, можно, пожалуй, сказать, что золотое сечение вдохновляло мыслителей из всех отраслей знания — и в этом с ним не в силах сравниться никакое другое число в истории математики.

Даже простому вопросу о происхождении названия «золотое сечение» посвящено огромное количество исследований, а особенно глубоко этим интересовался канадский математик и писатель Роджер Герц-Фишлер, о чем и рассказано в его превосходной книге «A Mathematical History of the Golden Number» («Математическая история золотого сечения»). Учитывая, какой пристальный интерес вызывало это число еще со времен античности, можно было бы подумать, что и название это античного происхождения. И в самом деле, некоторые авторитетные труды по истории математики, например, «Рождение математики во времена Платона» Франсуа Ласерре (*François Lasserre*. «The Birth of Mathematics in the Age of Plato») и «История математики» Карла Б. Бойера (*Carl B. Boyer*. «History of Mathematics»), возводят это название, соответственно, к XVI и XVII векам. Однако дело, скорее всего, не в этом. Насколько я могу судить по обширным источниковедческим данным, впервые это словосочетание применил в 1835 году немецкий математик Мартин Ом (брат знаменитого физика Георга Симона Ома, в честь которого назван закон Ома в электромагнетизме) во втором издании своей книги «Чистая элементарная математика» (*Martin Ohm*. «Die Reine Elementar-Mathematik»). В одной сноске Ом пишет: «Подобное разделение произвольного отрезка на две части принято также называть золотым сечением». Формулировка Ома однако создает впечатление, что он не сам придумал этот термин, а скорее привел уже принятое название. Тем не менее, в первом издании книги, опубликованном в 1826 году, Ом этого названия не приводит, а это заставляет сделать по крайней мере тот вывод, что выражение «золотое сечение» (нем. «*der Goldene Schnitt*») завоевало популярность лишь к 1835 году. Вероятно, ранее это было лишь разговорное выражение, применявшееся преимущественно в математических кругах. Однако нет никаких сомнений, что после книги Ома термин «золотое сечение» стал часто повторяться в немецкой литературе по математике и искусствоведению. А в англоязычной печати это выражение, по всей видимости, дебютировало в статье Джеймса Салли (*James Sully*) по эстетике, которая появилась в девятом издании Британской энциклопедии в 1875 году. Салли описывает «интересное экспериментальное исследование... проведенное Густавом Теодором Фехнером (известным немецким физиком и первопроходцем в области психологии, жившим в XIX веке) о том, что «золотое сечение» первоначально было именно зримой пропорцией» (об экспериментах Фехнера мы подробно поговорим в главе 7). В математическом контексте этот термин впервые встретился в англоязычной литературе, по всей видимости, в статье Э. Эккерманна, которая так и называлась «Золотое сечение» (*E. Ackermann.* «The Golden Section») и была напечатана в журнале «American Mathematical Monthly» в 1895 году, а также — примерно в это же время, в 1898 году — в книге «Введение в алгебру» известного преподавателя и писателя Дж. Кристала (1851–1911). Позвольте мне отметить любопытства ради, что единственное определение «золотого числа», появившееся в издании французской энциклопедии «Nouveau Larousse Illustré» 1900 года, гласит: «Число, определяющее каждый год лунного цикла». Это относится к положению календарного года в пределах 19-летнего цикла, после которого фазы луны снова приходятся на те же даты. Очевидно, во французскую математическую номенклатуру «золотое число» и тем более «золотое сечение» проникало гораздо дольше.

Однако почему это вообще так важно? Из-за чего, собственно, это число или геометрическая пропорция так сильно нас интересуют? Привлекательность золотого сечения в первую очередь коренится в том факте, что оно обладает прямо-таки пугающим свойством вылезать там, где его никак не ожидаешь.

Возьмем, к примеру, самое обычное яблоко — фрукт, который часто и, вероятно, ошибочно ассоциируется с древом познания, играющим столь заметную роль в библейском рассказе о грехопадении — и разрежем его поперек. И мы увидим, что яблочные семечки образуют пятиконечную звезду — она же пентаграмма (рис. 3). Каждый из пяти равнобедренных треугольников, составляющих лучи пентаграммы,

Рис. 3

обладает таким свойством, что соотношение длины его длинной стороны к короткой, то есть к основанию, равно золотому сечению — 1,618... Правда, вы, вероятно, решите, что это не так уж и удивительно. В конце концов, золотое сечение и определяется в первую очередь как геометрическая пропорция, так что, вероятно, не надо так уж поражаться, если эта пропорция встречается в некоторых геометрических фигурах.

Однако это лишь верхушка айсберга. Согласно буддистской традиции, Будда во время одной своей проповеди не проронил ни слова, а всего-навсего показал слушателям цветок. Чему может научить нас цветок? Скажем, роза часто служит примером природной симметрии, гармонии, любви и хрупкости. Индийский поэт Рабиндранат Тагор (1861–1941) в своей «Религии человека» пишет: «Нам почему-то кажется, что роза — это язык, который нашла любовь, чтобы достичь наших сердец». Предположим, вам нужно качественно оценить симметричное устройство розы. Возьмите розу и препарируйте ее, чтобы разобраться, каким образом ее внешние лепестки накладываются на внутренние. Как я показываю в главе 5, вы обнаружите, что лепестки расположены в соответствии с математическим законом, основанном на золотом сечении.

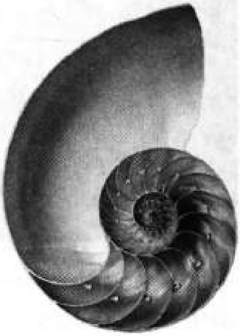


Рис. 4

Теперь обратимся к царству животных: все мы хорошо знакомы с чарующе прекрасными спиральными структурами многих раковин моллюсков, например, вида Nautilus pompilius (рис. 4). Между прочим, такую раковину держит в руке танцующий Шива из индийских легенд — это символ одного из орудий творения. Кроме того, структура этих раковин вдохновляла и многих зодчих. Например, американский архитектор Фрэнк Ллойд Райт (1869–1959) положил эту структуру в основу здания музея Гуггенхайма в Нью-Йорке. Попав в музей, посетители поднимаются по спиральному пандусу, насыщая воображение созерцанием произведений искусства — точно так же, как моллюск выстраивает новые спиральные камеры, заполняя свое физическое пространство. В главе 5 мы увидим, что рост спиральных раковин также подчиняется правилу, основанному на золотом сечении.

Рис. 5

Пожалуй, не нужно быть особым поклонником нумерологии — мистики чисел, чтобы уже сейчас почувствовать некоторый душевный трепет: столь поразительна способность золотого сечения проявляться в самых разных ситуациях, в самых разных феноменах, казалось бы, совершенно не связанных друг с другом. Более того, как я уже отметил в начале главы, золотое сечение обнаруживается не только в природных явлениях, но и в самых разных рукотворных предметах и произведениях искусства. Например, на рис. 5 мы видим картину Сальвадора Дали «Тайная вечеря», написанную в 1955 году (она хранится в Национальной галерее в Вашингтоне): соотношение сторон этой картины — ее размеры 167 на 268 см — приблизительно равно золотому сечению. Более того, над столом, словно охватывая композицию, парит фрагмент огромного додекаэдра — правильного двенадцатигранника, каждая грань которого представляет собой правильный пятиугольник. Как мы увидим в главе 4, правильные многогранники, например, куб, которые можно вписать в сферу (т. е. сделать так, чтобы все их углы лежали на сфере), а особенно додекаэдр, тесно связаны с золотым сечением. Почему Дали решил так явно подчеркнуть золотое сечение в своей картине? Художник отмечал, что «Композиция Тайной Вечери должна быть симметричной» — но это лишь начало ответа на наш вопрос. Как я показываю в главе 7, золотое сечение появляется — или по крайней мере, должно появляться по замыслу создателя — в работах многих других художников, архитекторов, дизайнеров и даже в знаменитых музыкальных произведениях. Говоря обобщенно, золотое сечение применяется в некоторых произведениях искусства с целью достичь определенного зрительного или слухового эффекта. Подобный эффект вызывается, в частности, особым соотношением размеров отдельных частей и целого, особыми пропорциями. История искусств показывает, что в результате долгих поисков неуловимого канона «совершенных» пропорций — такого, чтобы любое произведение искусства при его применении автоматически становилось эстетичным и приятным — выяснилось, что этим требованиям лучше всего удовлетворяет именно золотое сечение. Но почему?

Если подробнее рассмотреть примеры из мира природы и из мира искусства, окажется, что они заставляют задаваться вопросами на трех уровнях глубины. Прежде всего, это непосредственные вопросы: (а) все ли случаи появления числа φ в природе и искусстве, описанные в литературе, действительно имеют место или некоторые из них — всего лишь результаты неверных интерпретаций и всякого рода натяжек? (б) Если число φ и правда появляется в этих и других обстоятельствах, можем ли мы как-то это объяснить? Далее, если учесть, что мы придерживаемся определения «красоты», подобного, скажем, тому, которое дано в словаре Уэбстера: «Качество, которое делает объект приятным или приносит определенное удовлетворение» — возникает вопрос: есть ли у математики эстетическая составляющая? Если да, какова сущность этой составляющей? Это серьезный вопрос, поскольку, как заметил однажды американский архитектор, математик и инженер Ричард Бакминстер Фуллер (1895–1983): «Когда я работаю над какой-то задачей, то никогда не думаю о красоте. Думаю я только о том, как решить эту задачу. Но если я решу ее и решение окажется некрасивым, я буду знать, что ошибся». И, наконец, самый интересный вопрос звучит так: почему, собственно, математика столь могущественна и столь вездесуща? Благодаря чему математика и численные константы вроде золотого сечения играют столь важную роль во всем на свете — от фундаментальных теорий происхождения Вселенной до рынка ценных бумаг? Существует ли математика и ее принципы независимо от людей, которые ее открыли или обнаружили? Математична ли Вселенная по своей природе? Последний вопрос можно задать, переформулировав известный афоризм английского физика сэра Джеймса Джинса (1847–1946): может быть, и сам Бог — математик?

В этой книге я постараюсь обсудить все эти вопросы более или менее подробно с точки зрения увлекательной истории числа φ. История этой константы, временами запутанная, насчитывает тысячелетия и разворачивается на всех материках. Но при этом я надеюсь рассказать вам еще и интересную историю о человеческой психологии. Наш сюжет отчасти повествует о тех временах, когда физиками и математиками называли себя люди, которых попросту интересовали различные вопросы, разжигавшие в них любознательность. Зачастую подобные люди трудились и умирали, не зная, удастся ли результатам их трудов изменить ход научной мысли или они просто канут в Лету, не оставив и следа.

Однако прежде чем пуститься в этот путь, нам придется поближе познакомиться с числами вообще и с золотым сечением в частности. Откуда, в сущности, появилась сама идея золотого сечения? Что именно заставило Евклида задуматься о том, чтобы разделить отрезок именно в таком соотношении? Моя цель — помочь вам заглянуть в подлинные истоки, так сказать, «золотого исчисления». Для этого мы и предпримем краткую ознакомительную экскурсию во времена зарождения математики.

ГАММЫ И ПЕНТАГРАММЫ

В той мере, в какой математические законы относятся к реальности, они не слишком точны, а там, где они точны, они не относятся к реальности.

Альберт Эйнштейн (1879–1955)

Мне видится во Вселенной определенный порядок, и единственный способ сделать его зримым — это математика.

Мэй Сартон (1912–1995)

Когда именно человек начал считать — то есть измерять множество количественным способом — никто не знает. По сути дела, мы даже не знаем, что было раньше — количественные числительные (один, два, три) или порядковые (первый, второй, третий). Количественные числительные показывают просто множественность набора предметов — например, количество учеников в классе. А порядковые числительные, напротив, показывают порядок, последовательность конкретных элементов группы, например, дату — число в месяце — или номер места в определенном ряду в концертном зале. Изначально считалось, что счет возник именно для того, чтобы решать какие-то мелкие повседневные задачи, а из этого, конечно, следует, что первыми возникли количественные числительные. Однако некоторые антропологи полагают, что изначально числа возникли на исторической сцене в рамках каких-то ритуалов, во время которых те или иные действующие лица должны были появляться в определенном порядке, последовательно. Если это так, то, согласно этой концепции, понятие о порядковых числительных появилось раньше, чем о количественных.

Очевидно, чтобы перейти от простого пересчета предметов к подлинному осознанию чисел как абстрактных понятий, потребовался куда более значительный интеллектуальный скачок. Таким образом, поначалу число, вероятно, относилось в основном к контрасту, противопоставлению, причем в ситуациях, имеющих отношение, вероятно, к жизни и смерти (сколько там волков — один или целая стая?), а подлинное понимание того, что две руки и два дня — это выражения одного и того же числа «два», вероятно, пришло лишь спустя многие столетия. Для этого нужно было пройти этап распознавания не только контрастов, но и общих черт, соответствий. Во многих языках сохранились явные следы того, что первоначально простой акт подсчета количества не соотносился с абстрактными представлениями о числе. Например, на островах Фиджи десять кокосовых орехов называются «коро», а десять лодок — «боло». Подобным же образом у народности тауаде, живущей в Новой Гвинее, пары мужского пола, женского пола и смешанные обозначаются разными словами. Да и мы с вами зачастую обозначаем множества различных предметов разными словами: например, мы говорим «табун лошадей», но никогда не скажем «табун собак».

Конечно, абстрактному пониманию числа «два» во многом поспособствовал тот факт, что у людей столько же рук, сколько ног, глаз и грудей.

Но и здесь, скорее всего, ушло довольно много времени, чтобы научиться ассоциировать это число с предметами неодинаковыми — например, с двумя основными светилами, солнцем и луной. Нет никаких сомнений, что первоначально люди научились различать один и два, а затем — два и «много». Этот вывод делается на основании результатов исследований, проведенных в XIX веке среди племен, относительно незнакомых с европейской цивилизацией, а также лингвистических различий в терминах, обозначающих различные числа и в древних, и в современных языках.

Три — это уже много

Первые свидетельства того, что числа больше двух когда-то объединялись в понятие «много», мы находим в истории пятитысячелетней давности. В шумерском языке, на котором говорили в Междуречье, числительное «три» — «эш» — служило также обозначением множественности как таковой (как суффикс *-s* в английском языке). Подобным же образом этнографические исследования населения островов Торресова пролива между Австралией и Папуа — Новой Гвинеей, проведенные в 1890 году, показали, что местные жители пользовались так называемой «системой счета через “два”». Слово «урапун» означало у них «один», «окоса» — «два», а дальше шли различные их сочетания: «окоса-урапун» — «три», «окоса-окоса» — четыре. Для чисел больше четырех островитяне применяли слово «рас» — «много». Почти такие же системы номенклатуры обнаружены и у других туземных племен от Бразилии (ботокудо) до Южной Африки (зулусы). Например, австралийское племя аранда словом «нинта» называло «один», «тара» — «два», а дальше шли «тара-мининта» — «три», «тара-ма-тара» — «четыре», а все остальные числа назывались просто «много». Среди этих племен был также распространен обычай считать предметы не по отдельности, а парами.

Возникает интересный вопрос: почему языки, где приняты подобные системы счета, доходят именно до «четырех» и затем останавливаются (несмотря на то, что они уже выражают «три» и «четыре» через «один» и «два»)? Одно из объяснений состоит в том, что на руках у нас по четыре пальца, находящихся в похожем положении. Другое, более тонкое объяснение гласит, что ответ таится в физиологической ограниченности визуального восприятия человека. Согласно нескольким исследованиям, мы способны охватить одним взглядом — *без подсчета* — самое большее четыре-пять предметов. Может быть, вы помните, что в фильме «Человек дождя» Дастин Хоффман играет аутиста с необычайно развитой наблюдательностью и памятью на числа (на самом деле подобные способности в реальной жизни встречаются лишь в единичных случаях). В одном эпизоде по полу рассыпаются все зубочистки из коробочки, кроме четырех, и герой Хоффмана с первого взгляда подсчитывает, что на полу их 246. Конечно, рядовому человеку такой фокус не по силам. Это подтвердит всякий, кто когда-либо подсчитывал результаты голосования вручную. Обычный прием при этом — отмечать голоса пятерками, причем первые четыре обозначаются прямыми черточками, а пятый — черточкой поперек первых. Это придумали именно потому, что человеку трудно одним взглядом охватить больше четырех черточек. Подобную систему изобрели в английских пабах, где бармену приходилось подсчитывать количество кружек пива, и там она называется «ворота из пяти перекладин». Любопытно, что эксперимент, описанный историком математики Тобиасом Данцигом (1884–1956) в 1930 году в чудесной книге «Число, язык науки» (*Tobias Dantzig*, «Number, the Language of Science») показывает, что распознавать и различать до четырех предметов способны также некоторые птицы. Вот что рассказывает Данциг:

> Один помещик решил пристрелить ворону, которая свила гнездо на смотровой башне его поместья. Он несколько раз пытался застать птицу врасплох, но безуспешно: при приближении человека ворона улетала из гнезда. А затем устраивалась на дереве вдали и выжидала, когда человек покинет башню, после чего возвращалась в гнездо. Однажды помещик придумал уловку: два человека вошли в башню, один остался внутри, а другой вышел наружу и удалился. Однако обмануть птицу не удалось: она держалась в отдалении, пока не вышел тот, кто оставался в башне. В последующие дни опыт повторили с участием двух, трех, а потом и четырех человек — но безуспешно. Наконец были отправлены пять человек; как и прежде, в башню вошли все, один остался внутри, а остальные вышли и удалились. Тут-то ворона и сбилась со счета. Она не смогла отличить пять от четырех и быстро вернулась в гнездо.

Есть много и других свидетельств в пользу гипотезы, что первоначальные системы счета создавались согласно концепции «один, два, много». Это следует из лингвистических различий в образовании множественного числа и дробей. Скажем, в иврите есть особая форма множественного числа для пар одинаковых предметов (например, рук и ног) и особые слова для предметов, у которых есть две одинаковые части (то есть для брюк, очков, ножниц), отличающиеся от обычного множественного числа. Обычно существительные во множественном числе оканчиваются на «им» в мужском роде и на «от» в женском, однако множественное число для глаз, грудей и т. п. и для предметов, у которых есть две одинаковые части, кончается на «аим». Подобные формы есть и в финском и когда-то, в Средние века, были в чешском. Но главное не это: переход к дробям, который, конечно, требует более основательного знакомства с числами, характеризуется явными лингвистическими отличиями в названиях всех дробей, кроме половины. В индоевропейских языках и даже в некоторых неиндоевропейских, например, в иврите и венгерском, названия трети, пятой части и т. д. в целом образуются от соответствующих числительных — три, пять и т. д. Например, «три» на иврите — «шалош», а «одна треть» — «шлиш». По-венгерски «три» — «харом», а «одна треть» — «хармад». А вот слово «половина» и в этих языках никак не связана с числительным «два». Скажем, по-румынски «два» — «дой», а «половина» — «юмате», на иврите «два» — «штаим», а «половина» — «хеци», по-венгерски «два» — «кеттё», а «половина» — «фел». Из этого можно сделать вывод, что хотя человечество довольно рано поняло, что такое 1/2 как число, однако представление о том, что другие дроби как-то связаны с целыми числами («одна какая-то»), вероятно, возникло лишь после того, как был перейден барьер «три — это уже много».

Как подсчитать бесчисленные пальцы

Еще до того как системы счета оказались в полной мере развиты, человеку надо было иметь возможность как-то записывать определенные количества предметов. Древнейшие археологические находки, которые, как полагают, так или иначе связаны со счетом, — это кости с нанесенными через равные интервалы насечками. Самая древняя находка, датируемая примерно 35 000 лет до н. э., — бедренная кость бабуина, обнаруженная в пещере в горах Лебомбо в Африке. На этой кости нанесено двадцать девять насечек. Другая подобная «бухгалтерская» находка — волчья кость с пятьюдесятью пятью насечками (объединенными в две группы — двадцать пять и тридцать, — причем первая разбита еще и на подгруппы по пять), — обнаружена археологом Карелом Абсолоном в 1937 году на стоянке в Долне Вестонице в Чехословакии; ее относят к ориньякской культуре (около 30 000 лет назад). Группировка насечек по пять в особенности говорит в пользу концепции *основания системы счисления*, о чем я еще упомяну. Точное предназначение этих насечек нам неизвестно, однако, возможно, это учет охотничьей добычи. Группировка, вероятно, помогала охотнику вести счет, не подсчитывая каждый раз все насечки. Подобные размеченные кости были найдены и во Франции, и в пещере Пекарна в Чехии — они относятся к мадленской культуре (около 15 000 лет назад).

Большой интерес ученых вызвала так называемая кость Ишанго, обнаруженная в 1950 году археологом Жаном де Хайнзелином де Брокуром на стоянке Ишанго близ границы между Угандой и Заиром (рис. 6). Это костяная рукоять какого-то орудия, датируемая примерно 9000 г. до н. э., с тремя рядами насечек, организованных в следующие группы: (i) 9, 19, 21, 11; (ii) 19, 17, 13, 11; (iii) 7, 5, 5, 10, 8, 4, 6, 3. Сумма чисел в первых двух рядах — по 60 в каждом, что натолкнуло некоторых ученых на мысль, что они, вероятно, отражают запись фаз Луны в двух лунных месяцах (если предположить, что некоторые насечки из третьего ряда, где сумма составляет всего 48, стерлись). Были предложены и другие, более хитроумные и куда менее правдоподобные толкования. Например, де Хайнзелин, исходя из того, что второй ряд состоит из простых чисел, следующих подряд (то есть чисел, которые делятся только на 1 и сами на себя), а первый ряд — из чисел, которые на единицу отличаются от 10 или 20, предположил, что у жителей Ишанго были какие-то рудиментарные познания в арифметике и что они даже знали о простых числах. Нет нужды говорить, что многим исследователям подобная интерпретация кажется несколько смелой.

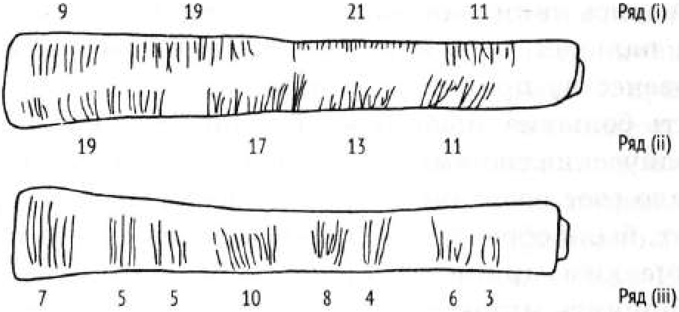


Рис. 6

Другую интересную систему записи чисел подарил нам Ближний Восток; она восходит к периоду от девятого до второго тысячелетия до н. э. В самых разных местах, от Анатолии на севере до Судана на юге, археологи находили множество маленьких, похожих на игрушки глиняных предметов разной формы. Это были диски, цилиндры, конусы, пирамидки, зверюшки и т. п. Археолог Дениза Шмандт-Бессера из Техасского университета в Остине изучала эти предметы в конце 1970 годов и выдвинула интереснейшую теорию: она убеждена, что эти глиняные предметы служили при торговле жетонами-пиктограммами и символизировали разные типы подсчитываемых предметов. Скажем, глиняный шарик, вероятно, обозначал какое-то количество зерна, один цилиндр — одну голову скота и т. д. Таким образом, доисторические ближневосточные торговцы могли, согласно гипотезе Шмандт-Бессера, вести учет своего бизнеса, выкладывая в ряды жетоны, соответствующие разным типам товаров, участвующих в торговле.

Какими бы символами ни передавали различные числа — насечками на кости, глиняными фигурками, узелками на бечевке (этой системой пользовались инки, она называлась «кипу») или просто на пальцах, — в какой-то момент в истории человечеству пришлось решать задачу, как передавать большие числа и манипулировать ими. Символические системы, у которых для каждого числа было свое название или свой обозначающий предмет, были обречены на вымирание по сугубо практическим причинам. Нужно было разработать и принять минимальный набор символов, при помощи которых можно было охарактеризовать любое число — точно так же, как буквы в алфавите в некотором смысле можно назвать минимальным набором символов, при помощи которых можно выразить весь наш лексикон, все письменные знания. Эта необходимость подвела нас к концепции основания системы счисления — идее, что числа можно организовывать иерархически, в соответствии с определенными порядками. Наша система счисления основана на 10, и мы в повседневной жизни настолько к этому привыкли, что нам трудно представить себе, как можно выбрать другое основание.

Почему у нас именно десятичная система счисления, объясняется довольно просто — что вовсе не означает, что на ее развитие не понадобилось много времени. Мы группируем состав числа таким образом, что десять единиц на каждом иерархическом уровне составляют одну единицу уровнем выше. То есть 10 раз по единице — это 1 десяток, 10 десятков составляют 1 сотню, 10 сотен — 1 тысячу и т. д. Собственно имена числительные и расположение цифр также отражают иерархическую группировку. Когда мы записываем, например, число 555, то повторяем одну и ту же цифру три раза, однако каждый раз ее значение меняется. Первая цифра справа обозначает 5 единиц, вторая — 5 десятков или 5 раз по 10, третья — 5 сотен, то есть 5 раз по 10 десятков (или 5×10^2). Это важнейшее правило позиции, *позиционную нумерацию*, придумали вавилоняне (их система счисления имела основание 60, то есть была шестидесятеричной, о чем мы поговорим чуть дальше) примерно во втором тысячелетии до н. э., а затем в течение примерно 2500 лет ее независимо открыли китайцы, майя в Центральной Америке и индийцы.

Из всех индоевропейских языков самые ранние дошедшие до нас тексты написаны на санскрите — языке, зародившемся на севере Индии. В частности, четыре древних священных писания индуизма, в названии которых есть санскритское слово «веда» — «знание» — датируются V в. до н. э. Все числа от 1 до 10 на санскрите называются разными, неродственными словами: эка, два, три, чатвар, панча, шаш, сапта, ашта, нава, даша. Все числа от 11 до 19 представляют собой просто сочетание количества единиц и слова «десять». То есть 15 — это «панча-даша», 19 — «нава-даша» и т. д. Подобные числительные имеются, скажем, в английском, где все числа от 13 до 19 кончаются на -teen. Если вам вдруг станет интересно, откуда в английском языке взялись «*eleven*» и «*twelve*» («одиннадцать» и «двенадцать»), поясню: «*eleven*» произошло от «*an*» («один») и «*lif*» («осталось» или «остаток», то есть «один остался»), а «*twelve*» — от «*two*» («два») и «*lif*» (то есть «два осталось»). То есть эти числительные означают, что после десяти осталось еще один или два. Названия десятков в английском и санскрите также образуются одинаково — при помощи числа и слова «десять» во множественном числе («*twenty*», «*thirty*» и пр.): скажем, 60 на санскрите — «шашти»; более того, все индоевропейские языки образуют числительные очень похожими способами. Так что все, кто говорит на этих языках, очевидно, усвоили одну и ту же систему счисления — десятичную.

Почти не приходится сомневаться, что практически всемирная популярность десятичной системы счисления объясняется всего-навсего тем обстоятельством, что у нас десять пальцев — так уж захотела природа. Гипотезу эту впервые выдвинул греческий философ Аристотель (384–322 до н. э.), когда в своем сочинении «Проблемы» задался вопросом: «Почему все люди, и варвары, и греки, считают до десяти, а не до какого-нибудь другого числа?» На самом деле основание 10 ничем не лучше, скажем, основания 13. Можно даже теоретически поспорить, что раз 13 — простое число, то есть делится только само на себя и на единицу, в качестве основания системы счисления оно даже удачнее 10, поскольку в такой системе счисления большинство дробей окажутся несократимыми. Например, в десятичной системе счисления число 36/100 можно записать также как 18/50 или 9/25, в системе счисления вроде тринадцатеричной подобная неоднозначность записи исключена. Однако десятичная система одержала верх, потому что у каждого человека перед глазами было десять пальцев, и пользоваться ими было просто. В некоторых малайско-полинезийских языках слово «ладонь» — «лима» — означает и «пять». Означает ли это, что десятичную систему счисления приняли все известные цивилизации? Нет.

Среди прочих оснований систем счисления, которые применяли некоторые народы по всему миру, самым популярным оказалось 20 (двадцатеричная система счисления). В этой системе, которая когда-то была распространена на больших территориях Западной Европы, разряды формируются не на основе 10, а на основе 20. Очевидно, что для расширения базы к пальцам на руках присовокупили и пальцы на ногах. Например, у эскимосов «двадцать» обозначается выражением «теперь человек цельный». Во многих современных языках следы двадцатеричной системы счисления еще сохраняются. Например, по-французски «восемьдесят» будет «*quatre-vingts*» («четыре двадцатки») и когда-то существовала и архаическая форма «*six-vingts*» («шесть двадцаток»). А еще более яркий пример — название больницы в Париже, основанной в XIII веке: она до сих пор называется *«L'Ôpital de Quinze-Vingts»* — «Больница пятнадцати двадцаток» — поскольку первоначально была рассчитана на 300 коек для слепых ветеранов. Подобным же образом по-ирландски «сорок» — *«daichead»* от *«da fiche»* («дважды двадцать»), по-датски слова «шестьдесят» и «восемьдесят» (*«tresindstyve»* и *«firsindstyve»* соответственно, сокращенно *«tres»* и *«firs»*) буквально означают «три двадцатки» и «четыре двадцатки».

Однако самая удивительная система счисления в древности, а может быть, и за всю историю человечества — это шестидесятеричная система. Этой системой пользовались шумеры, жители Междуречья, и хотя корнями она восходит к четвертому тысячелетию до н. э., следы ее заметны и в наши дни: мы измеряем время в часах, минутах и секундах и делим окружность на 360 градусов (60 × 6), а каждый градус подразделяем на минуты и секунды. Шестьдесят как основание системы счисления требует отличной памяти, поскольку подобная система, в принципе, предполагает индивидуальные названия и символы для всех чисел от 1 до 60. Шумеры понимали, что это трудно, и прибегли к некоторой уловке, чтобы числа было легче запоминать: ввели 10 как промежуточную ступень. Введение 10 позволило им ограничиться отдельными словами только для чисел от 1 до 10, а десятки от 10 до 60 передавались словосочетаниями. Скажем, шумерское слово «сорок» — «нимин» — это сочетание слова «двадцать», «ниш», и слова «два», «мин». Число 555 в шестнадцатеричной системе счисления, то есть $5 \times (60)^2 + 5 \times (60) + 5$, в нашей, десятеричной системе счисления будет означать 18 305.

По поводу того, какая логика обстоятельств вынудила шумерцев выбрать столь необычное основание для своей системы счисления, выстроено много гипотез. Некоторые из них опираются на особые математические свойства числа 60: это первое число, которое делится на 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Другие гипотезы пытаются связать 60, например, с количеством месяцев и дней в году (округлив число дней до 360) в каком-то сочетании с числами 5 и 6. Совсем недавно учитель математики и писатель из Франции Жорж Ифра в своей замечательной книге «Всеобщая история чисел» (*Georges Ifrah.* A Universal History of Numbers) заметил, что выбор числа 60 мог быть следствием смешения двух народов-иммигрантов, один из которых пользовался пятеричной, а другой — двенадцатеричной системой счисления. Очевидно, что основание 5 происходит от количества пальцев на одной руке, и следы подобной системы еще видны в некоторых языках, например, у кхмеров, жителей Камбоджи, а еще заметнее — в мертвом языке саравека, на котором говорил южно-американский народ сараве. Основание 12, множество следов которого заметны даже в современных языках и культурах — возьмем хотя бы британскую систему мер и весов — вероятно, происходит от количества фаланг на четырех пальцах (без большого пальца, потому что именно им производился подсчет).

Иногда в самых разных местах попадаются и экзотические системы счисления. В «Алисе в Стране Чудес» Льюиса Кэрролла Алиса, чтобы удостовериться, что она понимает, в каких странных обстоятельствах очутилась, говорит: «А ну-ка, проверю, помню я то, что знала, или нет. Значит так: четырежды пять — двенадцать, четырежды шесть —

тринадцать, четырежды семь... Так я до двадцати никогда не дойду!» (*Пер. Н. Демуровой*). Знаменитый писатель-популяризатор математики Мартин Гарднер в своих комментариях к книге Кэрролла приводит остроумное объяснение такой необычной таблицы умножения, к которой прибегла Алиса, почерпнутое из книги А. Л. Тейлора «Белый рыцарь» (*A. L. Taylor*. The White Knight. L., 1952): «Для системы счисления, использующей как основание 18 (“восемнадцатеричная”), 4×5 действительно равняется 12. В системе счисления с основанием 21 справедливо равенство 4×6=13. Если продолжить эту прогрессию, каждый раз увеличивая основание на 3, то произведения будут увеличиваться на единицу, пока мы не дойдем до 20. Здесь впервые наш метод откажет: 4×13 равняется не 20 (для системы чисел с основанием 42), а “1”, за которой будет следовать символ, играющий роль “10”» (*Пер. Н. Демуровой*). Эта гипотеза, несомненно, подкрепляется тем фактом, что Чарльз Доджсон, избравший себе псевдоним Льюис Кэрролл, был математиком и читал лекции в Оксфорде.

Наши числа — наши боги

Какие бы системы счисления, с какими бы основаниями ни применяли древние цивилизации, прежде всего, они понимали и усваивали множество целых (натуральных) чисел. Это прекрасно нам знакомые 1, 2, 3, 4... Когда люди сумели осознать, что эти числа — абстрактные понятия, им было уже несложно начать приписывать числам особые качества. По всему миру, от Греции до Индии, числа наделялись тайной властью. В некоторых древнеиндийских текстах утверждается, что числа практически божественны, обладают «природой Брамы». В этих манускриптах содержатся выражения, очень похожие на обожествление чисел, например, «слава единице». Подобным же образом знаменитый афоризм греческого математика Пифагора, о жизни и деятельности которого мы еще поговорим в ближайшем же будущем, гласит: «Все есть число». С одной стороны, подобная восторженность привела к значительному прогрессу в теории чисел, однако с другой — породила нумерологию, набор догм, согласно которым жизнь Вселенной во всех своих аспектах связана с числами и их индивидуальными свойствами. Для нумеролога числа — основа бытия, а их символические значения связаны с отношениями между небесами и деятельностью человека. Более того, если в священных писаниях упоминается то или иное число, это не может быть просто так, в любом числе есть потаенный смысл. Иногда нумерологические поветрия затрагивали целые страны. Например, в 1240 году христиане и иудеи Западной Европы ожидали пришествия некоего царя-мессии с Востока, поскольку так случилось, что 1240 год по христианскому календарю совпал с 5000 годом календаря иудейского. Не спешите отмахиваться от подобных всплесков эмоций — мол, все это наивная романтика, и подобное могло случиться лишь много веков назад: давайте вспомним, какая невероятная, смехотворная шумиха сопровождала конец минувшего тысячелетия.

Среди разновидностей нумерологии особняком стоит иудейская гематрия (вероятно, слово это родственно словосочетанию «геометрическое число» на древнегреческом) и ее исламский и греческий аналоги — хисаб аль-джумал («вычисление целого») и изопсефия (от греческого ἴσος «равный» и ψῆφος «галька, камешек») соответственно. В этих системах числа приписываются каждой букве алфавита (обычно древнееврейского, древнегреческого, арабского или латинского). Если сложить числовые значения букв, составляющих слово, получаются новые слова или даже фразы, которые можно интерпретировать. Особенно распространена была гематрия в рамках иудейского мистического течения, так называемой каббалы, расцвет которой пришелся на XIII–XVIII века. Иудейские ученые зачастую поражали слушателей тем, что могли в точности повторить последовательность якобы случайных чисел, на произнесение которой уходило добрых десять минут. На самом же деле они переводили отрывок из Торы на числовой язык гематрии.

Один из самых ярких примеров нумерологии — 666, «число Зверя». «Зверем» принято считать Антихриста. В «Откровении Иоанна» (13:18) мы читаем: «Здесь мудрость. Кто имеет ум, тот сочти число зверя, ибо это число человеческое; число его — шестьсот шестьдесят шесть». Слова «это число человеческое» подвигли многих христианских мистиков на то, чтобы искать и выявлять исторических лиц, имена которых, согласно гематрии или изопсефии, имели значение 666. Среди прочих это были и Нерон Цезарь, и Диоклетиан — оба они преследовали христиан. Если написать «Нерон Цезарь» буквами древнееврейского алфавита — נרון קסר — и затем подсчитать их числовое значение согласно гематрии, получится (справа налево) 50, 200, 6, 50; 100, 60, 200 — то есть 666 в сумме. Подобным же образом, если сосчитать в имени императора Диоклетиана DIOCLES AVGVSTVS сумму значений тех букв, которые одновременно служат и римскими цифрами — *D*, *I*, *C*, *L*, *V* — получится опять же 666 (500+1+100+50+5+5+5). Очевидно, что все эти умозаключения не только надуманны, но и попросту ошибочны (например, чтобы вывести такое числовое значение слова «Цезарь», надо опустить из общепринятого написания одну букву с числовым значением 10).

Как ни поразительно, в 1994 году была «открыта» даже связь между числом зверя и золотым сечением (статья об этом опубликована в популярном журнале «*Journal of Recreational Mathematics*»). При помощи карманного калькулятора, где есть тригонометрические функции синус и косинус, можно вычислить значение выражения [$\sin 666^\circ + \cos (6 \times 6 \times 6)^\circ$]. Введите 666, нажмите клавишу [*sin*], сохраните это число, затем введите 216 (= 6×6×6), нажмите клавишу [*cos*] и сложите результат с тем числом, которое вы сохранили. Полученное число окажется довольно точным приближением к числу φ (с обратным знаком). Кстати, бывший президент США Рональд Рейган и его супруга Нэнси сменили номер своего дома в Калифорнии с 666 по Сент-Клод-роуд на 668, чтобы избежать ассоциаций с числом зверя; кроме того, кодом 666 открывался загадочный чемоданчик в фильме «Криминальное чтиво» Квентина Тарантино.

Очевидно, что мистическое отношение к целым числам зачастую связано с тем, что они проявляются в организме человека и животных и в космосе, каким его воспринимали древние культуры. Число 2, скажем, широко представлено не только в нашем теле — глаза, руки, ноги, ноздри, уши и пр.: у нас два пола, два основных светила — Солнце и Луна — и т. п. Далее, субъективное восприятие времени делится на прошлое, настоящее и будущее, а поскольку ось вращения Земли всегда направлена более или менее в одно место — примерно в сторону Полярной звезды (с небольшими отклонениями, о которых мы поговорим в главе 3) — у нас четыре времени года. Смена времен года отражает попросту то обстоятельство, что в течение года ориентация земной оси относительно солнца меняется. Чем ближе к перпендикуляру падают на Землю солнечные лучи, тем дольше день и выше температура. В целом числа во многих обстоятельствах служили своего рода посредниками между космическими явлениями и повседневной жизнью человека. Например, названия семи дней недели во многих языках, в том числе в английском, происходят от названий небесных тел, которые раньше совокупно считали планетами: Луны, Марса, Меркурия, Юпитера, Венеры, Сатурна и Солнца.

Целые числа подразделяются на четные и нечетные, и более всех подчеркивали их различия и приписывали им всевозможные диковинные качества не кто иные как пифагорейцы. В частности, как мы вскоре убедимся, интерес к золотому сечению пробудился именно благодаря тому, что пифагорейцы весьма почитали число 5 и восхищались пятиконечной звездой.

Пифагор и пифагорейцы

Пифагор родился около 570 года до н. э. на острове Самос в Эгейском море (у побережья Малой Азии), а где-то между 530 и 510 годом переселился в греческую колонию Кротон в южной Италии, которую тогда называли Великой Грецией.

По всей видимости, покинуть Самос Пифагору пришлось из-за безжалостной тирании Поликрата (казнен ок. 522 г. до н. э.), который добился доминирования Самоса в Эгейском море. Вероятно, Пифагор последовал совету математика Фалеса Милетского, который, возможно, был его учителем; так или иначе, он некоторое время (чуть ли не 22 года, по некоторым источникам) прожил в Египте, где, видимо, изучал математику и философию и перенимал религиозные воззрения у египетских жрецов. Когда Египет захватили персидские войска, Пифагора, возможно, взяли в плен и вместе с египетскими священнослужителями доставили в Вавилон. Там он, вероятно, и познакомился с математическими достижениями Междуречья. Однако египетской и вавилонской математики пытливому уму Пифагора оказалось мало. Для обоих этих народов математика ограничивалась практическими «рецептами» для конкретных вычислений. А Пифагор был одним из первых, кто понял, что числа — это абстрактные понятия, существующие сами по себе.

В Италии Пифагор начал читать лекции по философии и математике, и вокруг него быстро сложился кружок последователей, в который, возможно, входила и юная прелестная Феано (дочь Милона, оказавшего ученому гостеприимство), на которой Пифагор впоследствии женился. Атмосфера Кротона оказалась крайне благоприятной для учения Пифагора, поскольку в тамошнем обществе была мода на самые разные полумистическипе культы. Для своих последователей Пифагор установил жесткие правила, обратив особое внимание на час пробуждения и час отхода ко сну. «Все дела сначала обдумай, чтоб не было худо», — повторял про себя каждый пифагореец поутру. А вечером напоминал себе:

В успокоительный сон
не должно тебе погружаться,
Прежде чем снова не вспомнишь
о каждом сегодняшнем деле:
В чем провинился? Что мог совершить?
И чего не исполнил?
(Пер. И. Петер)

Подробности жизни Пифагора и подлинный его вклад в развитие математики скрыты завесой неопределенности. Одна легенда гласит, что на бедре у него было золотое родимое пятно (либо бедро было целиком золотое), по которому его последователи определили, что он сын бога Аполлона. До нас не дошло ни одной биографии Пифагора, написанной в античные времена, а более поздние жизнеописания, например, «О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов» Диогена Лаэртского, относящееся к III в., зачастую полагаются на множество различных источников, не всегда надежных. Очевидно, сам Пифагор не оставил сочинений, и все же его влияние было так велико, что наиболее преданные его последователи образовали тайное общество — братство — и впоследствии стали называться пифагорейцами. Аристипп из Кирены рассказывал, что Пифагора так нарекли потому, что он излагал (ἀγορεύω) истину, подобно дельфийскому оракулу (Πύθιος) .

Обстоятельства смерти Пифагора столь же туманны, сколь и факты его биографии. Согласно одной легенде, дом в Кротоне, где он жил, подожгла возмущенная толпа завистников — пифагорейцы считались элитой общества, — а сам Пифагор пытался бежать и был убит, поскольку очутился у поля, засеянного бобами, а топтать бобы он не мог:

для пифагорейцев они были священны. Другую версию предложил греческий ученый и философ Дикеарх из Мессены (ок. 355–280 гг. до н. э.), который утверждал, что Пифагор укрылся в храме Муз в Метапонте, где и умер, по доброй воле прожив сорок дней без пищи и воды. Совершенно иную историю рассказывал Гермипп: якобы Пифагора убили сиракузяне во время войны против армии Акраганта, к которой примкнул Пифагор.

Хотя ни самому Пифагору, ни его последователям нельзя с уверенностью приписать никаких конкретных математических достижений, несомненно, именно им удалось слить воедино математику, жизненную философию и религию, и это единство не знает себе равных в истории. С этой точки зрения интересно, пожалуй, отметить одно хронологическое совпадение: Пифагор был современником Будды и Конфуция.

В сущности, считается, что именно Пифагору мы обязаны словами «философия» («любовь к мудрости») и «математика» («предмет изучения»). «Философ» для Пифагора — тот, кто «всецело отдается поиску смысла и цели самой жизни... раскрытию тайн природы». Учение Пифагор ставил выше всех других занятий, поскольку, по его словам, «большинству людей от рождения или по природе недостает средств для достижения благосостояния и обретения власти, однако способность приобретать новые знания есть у всех». Кроме того, он прославился и доктриной метемпсихоза, переселения душ: согласно Пифагору, душа бессмертна и возрождается в телах людей и животных. Из этой доктрины следовало и строгое вегетарианство, которого придерживались пифагорейцы, поскольку в убитых животных, возможно, переселились души их друзей. Для очищения души пифагорейцы соблюдали строгие правила: например, им было запрещено есть бобы и предписывалось всячески упражнять память. Великий греческий философ Аристотель, по свидетельству Диогена Лаэртского, приводит несколько причин, по которым пифагорейцы воздерживались от бобов: «...то ли потому, что они подобны срамным членам, то ли вратам Аида, то ли потому, что они — не коленчатые, то ли вредоносны, то ли подобны природе целокупности, то ли служат власти немногих (ибо ими бросают жребий)» (*Пер. А.Ф. Лосева*).

Более всего Пифагор и пифагорейцы прославились тем, что, скорее всего, сыграли важнейшую роль в развитии математики и в ее применении к концепции порядка — будь то порядок музыкальный, космический или даже этический. Каждый ребенок в школе изучает теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов двух катетов равна квадрату гипотенузы. Геометрический смысл этой теоремы (рис. 7, справа) состоит в том, что площадь квадрата, построенного на самой длинной стороне (гипотенузе) прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на двух коротких сторонах. Иначе говоря, если длина гипотенузы составляет c, то площадь квадрата, который на ней построен, составит c^2, а площади квадратов, построенных на двух других сторонах (длиной a и b) равны a^2 и b^2 соответственно. Значит, теорема Пифагора может быть представлена в таком виде: в каждом прямоугольном треугольнике $a^2+b^2=c^2$. Когда в 1971 году в республике Никарагуа отбирали десять математических формул, изменивших мир, чтобы выпустить серию почтовых марок, теорема Пифагора была напечатана на второй из них. Числа вроде 3, 4 и 5 или, скажем, 7, 24 и 25 составляют пифагоровы тройки: $3^2+4^2=5^2$ $(9+16=25)$, а $7^2+24^2=25^2$ $(49+576=625)$. Треугольники с такими длинами сторон будут прямоугольными.

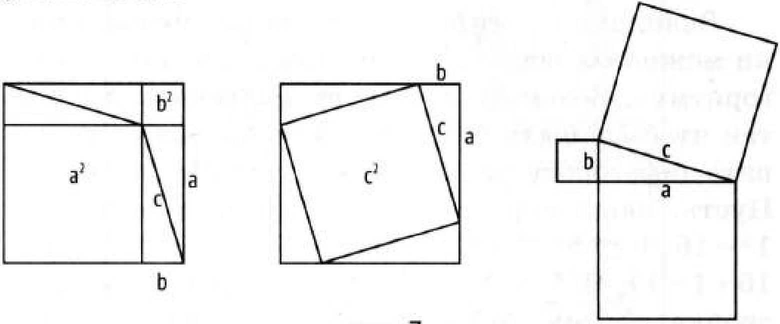


рис. 7

Кроме того, на рис. 7 представлено, пожалуй, самое простое доказательство теоремы Пифагора: с одной стороны, если вычесть из квадрата со стороной $a+b$ площади четырех равных треугольников, получится квадрат, построенный на гипотенузе (в середине). С другой стороны, если вычесть из того же квадрата те же четыре треугольника, расположив их несколько иначе (слева), получится два квадрата, построенных на коротких сторонах. То есть, очевидно, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей двух меньших квадратов. В своей книге «Пифагорейская гипотеза», вышедшей в 1940 году (*Elisha Scott Loomis.* «The Pythagorean Proposition»), математик Элиша Скотт Лумис представил 367 доказательств теоремы Пифагора — в том числе доказательства Леонардо да Винчи и Джеймса Гарфилда, двадцатого президента США.

На самом деле, пифагоровы тройки научились распознавать задолго до Пифагора, хотя теорема

Пифагора как «истина», объединяющая все прямоугольные треугольники, еще не была сформулирована. Пятнадцать таких троек перечислены на вавилонской глиняной табличке, относящейся к старовавилонскому периоду (до 1600 г. до н. э.).

Вавилоняне открыли, что пифагоровы тройки можно составлять по простому правилу — «алгоритму». Возьмите любые два целые числа p и q, так чтобы p было больше q. Теперь можно составить пифагорову тройку из чисел p^2-q^2; $2\,pq$; p^2+q^2. Пусть, например, $q=1$, $p=4$. Тогда $p^2-\ q^2=4^2-1^2=16-1=15$; $2\ pq=2\times4\times1=8$; $p^2+q^2=4^2+1^2=16+1=17$. Набор чисел 15, 8, 17 — это пифагорова тройка, потому что $15^2+8^2=17^2$ $(225+64=289)$. Вы и сами можете с легкостью показать, что это справедливо для любых целых чисел p и q. (Заинтересованный читатель найдет краткое доказательство в Приложении 1.) Следовательно, пифагоровых троек существует бесконечное множество — этот факт доказал Евклид Александрийский.

Однако в пифагорейском мире закономерности отнюдь не ограничивались одними треугольниками и вообще геометрией. Традиционно Пифагору приписывают открытие гармонических последовательностей музыкальных нот: он обнаружил, что музыкальные интервалы и высота нот соотносятся с относительной длиной вибрирующей струны. Пифагор отметил, что если разделить струну на целое количество равных промежутков, это (до некоторого предела) приводит к гармоническим и красивым (созвучным) музыкальным интервалам. Когда две произвольно выбранные музыкальные ноты звучат одновременно, обычно их сочетание кажется на наш слух грубым (несозвучным). Приятные звуки получаются лишь в отдельных сочетаниях. Пи-

Рис. 8

фагор обнаружил, что эти редкие созвучия возникают тогда, когда ноты производят похожие струны, чьи длины соотносятся как первые несколько целых чисел. Унисон достигается, если струны одинаковой длины (соотношение 1:1), октава — когда струны соотносятся как 1:2, квинта — 2:3, кварта — 3:4. Иначе говоря, можно ущипнуть струну и извлечь ноту. Если ущипнуть струну, которая натянута так же, как первая, но длиной вдвое меньше, услышишь ноту, которая выше первой ровно на одну гармоническую октаву. Подобным же образом 6/5 струны до дают ноту ля, 4/3 от нее дают ноту соль, 3/2 — ноту фа и т. д. Эти замечательные открытия, сделанные еще в древности, заложили основу для более глубокого понимания музыкальных интервалов, которое возникло в XVI веке (вышло так, что в разработке музыкальной теории в то время участвовал и Винченцо Галилей, отец Галилео Галилея). В 1492 году на фронтисписе книги «Theorica Musice» Франкино Гафури поместил чудесный рисунок, изображающий Пифагора, экспериментирующего со звукоизвлечением из различных предметов и устройств — тут и молотки, и струны, и бубенцы, и свирели (рис. 8; справа вверху — библейский Иувал, «отец всех играющих на гуслях и свирели» (Быт. 4:21)).

Но тут пифагорейцы задумались: если даже музыкальную гармонию можно выразить в числах, вдруг получится математически описать все мироздание? Поэтому они сделали вывод, что все предметы во Вселенной обязаны своими свойствами природе числа. Скажем, астрономические наблюдения показывали, что движение небесных светил также подчинено вполне определенному порядку. Это привело к концепции прекрасной «гармонии сфер» — идее о том, что небесные тела в своем размеренном движении также создают некую гармоническую музыку. Философ Порфирий (ок. 232–304 гг. н. э.), создавший свыше семидесяти трудов по истории, метафизике и литературе, написал также (в рамках четырехтомной «Истории философии») краткое жизнеописание Пифагора — оно так и называется «Жизнь Пифагора». Вот что рассказывает Порфирий: «сам же [Пифагор] умел слышать даже вселенскую гармонию, улавливая созвучия всех сфер и движущихся по ним светил, чего нам не дано слышать по слабости нашей природы» (*здесь и далее* *пер. М. Гаспарова*). Перечислив еще несколько выдающихся качеств Пифагора, Порфирий продолжает: «Звуки семи планет, неподвижных звезд и того светила, что напротив нас и называется Противоземлей, он отождествлял с девятью Музами» (Противоземля, согласно пифагорейской теории Вселенной, вращалась напротив Земли по ту сторону огня, образующего центр мироздания). Прошло более двух тысяч лет, и знаменитый астроном Иоганн Кеплер (1571–1630) возродил и переосмыслил концепцию «гармонии сфер». Кеплеру довелось узнать много горя и столкнуться с ужасами войны, и он пришел к выводу, что на самом деле Земля порождает две ноты — ми, что значит «*miseria*» (лат. «несчастье») и фа, что значит «*fames*» (лат. «голод»). Вот как писал об этом сам Кеплер: «Земля поет “ми-фа-ми”, так что даже по первому слогу можно догадаться, что в нашем доме верховодят Несчастье и Голод».

Великий Аристотель даже посмеивался над пифагорейской одержимостью математикой. В своем труде «Метафизика» (IV век до н.э.) он писал: «В это же время и раньше так называемые пифагорейцы, занявшись математикой, первые развили ее и, овладев ею, стали считать ее начала началами всего существующего» (*пер. А. Кубицкого*). Хотя в наши дни некоторые причудливые идеи пифагорейцев и вправду могут показаться забавными, однако нужно понимать, что фундаментальные истины, которые за ними стоят, на самом деле не слишком отличаются от того, что говорил Альберт Эйнштейн (в письмах к Морису Соловину): «Математика — лишь средство выразить законы, управляющие природными явлениями». И в самом деле, законы физики, которые зачастую именуют законами природы, представляют собой всего-навсего математические формулы, описывающие те естественные процессы и явления, которые мы наблюдаем. К примеру, основная мысль общей теории относительности Эйнштейна состоит в том, что гравитация — не загадочная сила притяжения, действующая на расстоянии, а скорее выражение геометрии неразделимо связанных пространства и времени. Позвольте на простом примере пояснить, как геометрическое свойство пространства можно принять за силу притяжения вроде гравитации. Представьте себе, что два человека отправляются из двух разных точек, лежащих на экваторе Земли, точно на север. Это означает, что поначалу они будут двигаться параллельно, а параллельные линии, как нас учат в школе, на плоскости никогда не пересекаются. Однако на северном полюсе путешественники неминуемо встретятся. Если эти люди не знают, что на самом деле путешествуют по изогнутой поверхности сферы, они могут сделать вывод, будто их притянула некая сила: ведь они начали двигаться по параллельным линиям, а потом пришли в одну точку. Получается, что геометрическое искривление пространства может проявляться как сила притяжения. Вероятно, пифагорейцы первыми осознали абстрактную концепцию, состоящую в том, что основные *силы* во Вселенной можно выразить языком математики.

Особенно пифагорейцев интересовали различия между четными и нечетными числами; возможно, это было связано с простыми гармоническими соотношениями в музыке — 1:2, 2:3, 3:4. Пифагорейцы приписывали нечетным числам мужские качества, а также, не без предвзятости, свет и добро, а четным — женские качества, и связывали их с темнотой и злом. Некоторые предрассудки, связанные с четными и нечетными числами сохранялись веками. Например, римский ученый Плиний Старший (23–79 н. э.) в своей «*Historia Naturalis*» (энциклопедии по естественной истории в тридцати семи томах) писал: «Почему мы придерживаемся мнения, будто для всякой цели лучше всего подходят именно нечетные числа?» Сравним эпизод из «Виндзорских насмешниц» Шекспира (акт V, сцена I), где сэр Джон Фальстаф говорит: «Я верю в нечет и всегда ставлю на нечетные числа — говорят, счастье их любит» (*пер. С. Маршака, М. Морозова*). Подобной точки зрения придерживаются и ближневосточные религии. Согласно исламской традиции, пророк Мухаммед, закончив пост, съел нечетное число фиников, а иудейские молитвы зачастую требуют нечетного числа (трех или семи) повторений.

Помимо ролей, которые пифагорейцы отвели четным и нечетным числам в целом, они еще и приписали особые качества некоторым отдельным числам. Например, число 1 считалось прародителем всех остальных чисел, а поэтому само оно словно бы не считалось числом. Кроме того, считалось, что оно характеризует здравый смысл. Геометрически число 1 соответствовало точке, которая сама по себе считалась прародительницей всех измерений. Число 2 было первым женским числом, а также числом разногласий и разделения. Это немного похоже на инь и ян китайской религиозной космологии, которым приписывались те же качества: инь — женское, отрицательное начало, пассивность и темнота, а ян — яркое, мужское начало. Даже в наши дни во многих языках число 2 так или иначе ассоциируется с лицемерием и ненадежностью — вспомним персидское слово «двуличный» или слово «двурушник» (или слова со значением «обладатель двойного языка», которые есть и в немецком, и в арабском). То, что число 2 изначально связали с женским началом, а 3 — с мужским, вероятно, было вызвано очертаниями женской груди и мужских гениталий. Этот вывод, пусть и с осторожностью, можно подтвердить тем обстоятельством, что такие же ассоциации возникли у восточно-африканской народности консо. В повседневной жизни мы прибегаем к разделению на две категории сплошь и рядом: хорошее и плохое, верх и низ, право и лево. С геометрической точки зрения, числу 2 соответствовала прямая (ее однозначно определяют две точки), у которой одно измерение. Три было первым настоящим мужским числом, а также числом гармонии, поскольку в нем сочетаются единство (число 1) и разделение (число 2). Для пифагорейцев число 3 вообще было в некотором смысле первым числом, поскольку у него есть и «начало», и «середина», и «конец», в отличие от числа 2, у которого «середины» нет. Геометрическое выражение числа 3 — треугольник, поскольку три точки, не лежащие на одной прямой, однозначно определяют треугольник, а сам он — двумерная геометрическая фигура.

Интересно, что военные подразделения в библейские времена также строились на основе тройки. Например, во Второй книге Царств (23) упоминаются «трое сих храбрых» воина под началом у царя Давида. В той же главе говорится и о «тридцати вождях», которые «пошли и вошли во время жатвы к Давиду в пещеру Одоллам», однако к концу главы редактор, перечислив храбрецов, вставляет ремарку: «Всех тридцать семь».

Очевидно, что «тридцать» здесь просто название подразделения, а на самом деле в нем могло быть и другое количество воинов. В Книге Судей, в главе 7, когда Гедеону предстоит воевать с мидьянитянами, он отбирает триста — три сотни — человек, всех тех, «кто будет лакать воду языком своим, как лакает пес». Если перейти к более крупным подразделениям, мы обнаружим, что в Первой Книге Царств, в главе 13, «выбрал Саул себе три тысячи из Израильтян», чтобы воевать с филистимлянами, поскольку «собрались Филистимляне на войну против Израиля: тридцать тысяч колесниц». Наконец, во Второй Книге Царств, «собрал снова Давид всех отборных людей из Израиля, тридцать тысяч», чтобы разгромить филистимлян.

Число 4 было для пифагорейцев числом порядка и справедливости. Четыре ветра — четыре направления — обеспечивали людям необходимые ориентиры, помогали понять, где они находятся в пространстве. Геометрически, четыре точки, не лежащие в одной плоскости, образуют тетраэдр (пирамиду с четырьмя треугольными гранями), обладающую объемом, то есть тремя измерениями. Однако особый вес числу 4 в глазах пифагорейцев придавало и еще одно обстоятельство: пифагорейцы почитали число 10, которое образовывало священную *тетрактиду* — сумму первых четырех чисел. Число 10 пифагорейцы ставили выше всех, поскольку оно символизировало мироздание в целом. А поскольку $1+2+3+4=10$, между 4 и 10 они видели тесную связь. Одновременно это соотношение свидетельствовало, что 10 не просто объединяет числа, отражающие все измерения, но и обладает всеми свойствами единства (которое символизирует число 1), полярности (символом которой служит 2), гармонии (3) и пространства и материи (4). Следовательно, 10 было числом *всего сущего*, и его свойства лучше всего выразил пифагореец Филолай около 400 г. до н. э.: «Высшее, могущественное, творец всего сущего, начало и руководитель божественного и всего живого на Земле».

Число 6 было первым *совершенным* числом, числом творения. Прилагательным «совершенный» описывали числа, которые равны сумме всех своих делителей, — например, 6=1+2+3. Кстати, следующее такое число — 28 (1+2+4+7+14), а после него — 496 (1+2+4+16+31+62+124++248); когда же мы доберемся до девятого совершенного числа, в нем окажется 37 цифр. Кроме того, 6 — порождение первого женского числа 2 и первого мужского числа 3. Иудей Филон Александрийский, эллинистический философ (ок. 20 гг. до н. э. — ок. 40 н. э.), в чьих трудах совмещалась греческая философия и иудейские священные писания, предположил, что Господь создал мир за шесть дней, поскольку шесть — совершенное число. Ту же идею разработал и дополнил Блаженный Августин (354–430) в своей книге «О граде Божием»: «Все это... ради совершенства числа шесть через шестикратное повторение того же дня совершается в шесть дней. Это не потому, что для Бога необходима была продолжительность времени, — как бы Он не мог сотворить разом все, что после соответствующими движениями производило бы времена, — но потому, что числом шесть обозначено совершенство творения».* Некоторые толкователи Библии считали, что опорным числом Верховного Зодчего было и число 28, указывая на 28 дней лунного цикла. Увлеченность совершенными числами

---

* Анонимный перевод, подготовка текста к печати С. И. Еремеева.

проникла даже в иудаизм; в двенадцатом веке рабби Иосиф бен-Иегуда ибн-Акнин пишет о них в своем трактате «Исцеление душ».

Приводя примеры особого отношения пифагорейцев к числам, я умышленно оставил число 5 напоследок, поскольку это число, кроме всего прочего, подводит нас к истокам золотого сечения. Пять — это союз между первым женским числом 2 и первым мужским числом 3, поэтому это число любви и брака. Очевидно, пифагорейцы считали пентаграмму — пятиконечную звезду (рис. 3) — символом принадлежности к своему братству и называли ее «гигия» — «здоровье». Греческий писатель и ритор II века Лукиан писал в своем «Оправдании ошибки, допущенной в приветствии»: «... Все ученики его [Пифагора] при переписке друг с другом, всякий раз как писали о чем-нибудь значительном, в самом начале письма ставили пожелание здоровья, как наиболее отвечающее ладу и души, и тела и обнимающее собою всю совокупность человеческих благ. Трижды повторенный треугольник пифагорейцев, образующий взаимосечениями пентаграмму, которой они пользовались, как условным знаком, при встрече с единомышленниками, называлась у них тем же словом, что и здоровье» (*пер. Н. Баранова*).

Изобретательное (хотя, пожалуй, не совсем логичное) объяснение, почему пентаграмма связывалась со здоровьем, предложил А. де ла Фей в своей книге «Пифагорейская пентаграмма, ее распространенность и применение в клинописи» (*A. de la Fuÿe*. Le Pentagramme Pythagoricien, Sa Diffusion, Son Emploi dans le Syllabaire Cuneiform, 1934). Де ла Фей предполагает, что пентаграмма символизирует греческую богиню здоровья Гигию, а пять лучей звезды — это схематическое изображение богини (рис. 9).

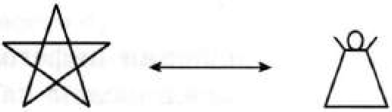


Рис. 9

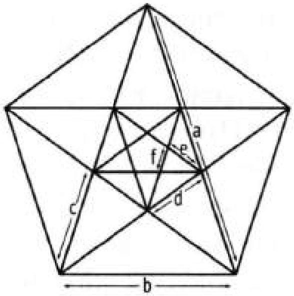


Рис. 10

Кроме того, пентаграмма тесно связана с правильным пятиугольником — геометрической фигурой с пятью равными сторонами и равными углами (рис. 10). Если соединить все вершины правильного пятиугольника диагоналями, получится пентаграмма. Кроме того, диагонали образуют еще и маленький пятиугольник в центре, а диагонали этого пятиугольника образуют пентаграмму и пятиугольник еще меньше (рис. 10). Продолжать это можно до бесконечности, создавая пятиугольники и пентаграммы все меньше и меньше. Поразительное свойство всех этих фигур состоит в том, что если посмотреть на получившиеся отрезки в порядке убывания длины (на рисунке они помечены a, b, c, d, e, f), можно с легкостью, при помощи элементарной геометрии, доказать, что *каждый отрезок меньше предыдущего на множитель, в точности равный золотому сечению — числу* φ. То есть отношение длин a и b — это число φ, отношение длин b и c — тоже число φ и т. д. А главное, можно опереться на тот факт, что процесс создания череды вписанных друг в друга пентаграмм и пятиугольников можно продолжать бесконечно, строить фигуры все меньших и меньших размеров — чтобы упорно доказывать, что диагональ и сторона пятиугольника несоизмеримы, то есть отношение их длин (равное φ) невозможно выразить отношением двух целых чисел. А это значит, что им нельзя подобрать никакую общую единицу измерения — такую, чтобы диагональ пятиугольника содержала целое число этих единиц измерения и чтобы сторона пятиугольника тоже содержала целое число таких же единиц измерения (для читателей, более склонных к точным наукам, в Приложении 2 приведено доказательство). Вспомним, что числа, которые нельзя представить в виде отношения двух целых чисел (то есть в виде дробей, или рациональных чисел) называются иррациональными числами. Следовательно, перед нами доказательство того факта, что число φ — это иррациональное число.

Несколько ученых (в том числе Курт фон Фриц в статье под названием «Гиппас из Метапонта как первооткрыватель несоизмеримости» (*Kurt von Fritz*. The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum, 1945) предположили, что открыли золотое сечение и несоизмеримость именно пифагорейцы. Эти историки математики отстаивали ту точку зрения, что одержимость пентаграммой и правильным пятиугольником, свойственная пифагорейцам, в сочетании с набором геометрических познаний, накопившихся к середине V века до н. э., весьма способствовали тому, чтобы пифагорейцы, а в частности, вероятно, Гиппас из Метапонта, открыли золотое сечение, а как следствие из него — и несоизмеримость. Доводы этих историков, по крайней мере, отчасти, подтверждаются трудами основателя сирийской неоплатонической школы Ямвлиха (ок. 245–325 гг. до н. э.). Согласно одному из рассказов Ямвлиха, пифагорейцы поставили Гиппасу надгробный камень, будто мертвому, за открытие несоизмеримости, которое подрывало самые основы их учения. Однако в другом месте Ямвлих сообщает, что «...о Гиппасе говорят, что он был из числа пифагорейцев; за то, что разгласил и достроил впервые сферу из двенадцати пятиугольников, он погиб в море как нечестивец, зато снискал славу первооткрывателя, хотя все [открытия должны принадлежать] «оному мужу» — так [пифагорейцы] величают Пифагора, не называя его по имени» (*пер. А.В. Лебедева*). Говоря «достроил сферу из двенадцати пятиугольников», Ямвлих имеет в виду (несколько неточно, поскольку получившаяся фигура на самом деле не сфера) додекаэдр, геометрическое тело с двенадцатью гранями, каждая из которых представляет собой правильный пятиугольник, — одно из пяти геометрических тел, известных как платоновы тела. Платоновы тела теснейшим образом связаны с золотым сечением, и мы еще вернемся к ним в главе 4. Несмотря на то что все эти рассказы подозрительно напоминают легенды, историк математики Уолтер Баркерт в своей книге «Древний пифагореизм. Наука и легенды» (*Walter Burkert*. Lore and Science in Ancient Pythagoreanism, 1972) приходит к заключению, что «хотя сведения о Гиппасе и овеяны легендами, в них есть здравое зерно». Доказательство справедливости этого заявления мы видим на рис. 10 (и в Приложении 2). Вывод о том, что диагональ и сторона правильного пятиугольника несоизмеримы, основан на очень простом наблюдении, что строить все меньшие и меньшие пятиугольники можно до бесконечности. То есть совершенно очевидно, что это доказательство было вполне доступно и математикам, жившим в V веке до нашей эры.

Для существа рационального невыносимо только нерациональное*

Хотя, разумеется, возможно, и даже, пожалуй, вероятно, что несоизмеримость и иррациональные числа были открыты в связи с золотым сечением, более традиционная точка зрения гласит, что на эти концепции мыслителей натолкнуло соотношение стороны и диагонали квадрата. Аристотель в своей «Первой аналитике» пишет, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной, «потому что, если допустить их соизмеримость, то нечетное было бы равно четному» (*пер. Б. Фохта*). Здесь Аристотель вскользь намекает на доказательство несоизмеримости, которое я приведу полностью, поскольку это прелестный пример доказательства логическим методом, известным как *reductio ad absurdum* («доведение до абсурда», или метод «от противного»). Более того, когда в 1988 году журнал «*The Mathematical Intelligencer*» предложил читателям проранжировать двадцать четыре теоремы в соответствии с их «красотой», доказательство, которое я сейчас представлю, заняло седьмое место.

Изящный метод «от противного» основывается на том, что верность утверждения доказывается тем, что противоположное ему утверждение ложно. Самый авторитетный иудейский ученый Средневековья Маймонид (Моше бен Маймон, 1135–1204) даже пытался применить этот логический прием, дабы доказать существование Творца. В своем фундаментальном труде «Мишне Тора» (Законы основ

---

* Парафраз известного афоризма Эпиктета: «Для существа, обладающего разумом, невыносимо только неразумное» («Беседы», кн. 1, гл. 2, пер. Г. Тароняна) — *Прим. перев.*

Торы), где делается попытка охватить все стороны религии, Маймонид пишет: «Основа основ и столп мудрости — знать, что есть Первичная Сущность, которая является причиной существования всего сущего. И все, что есть на небесах и на земле, и все, что между ними, существует благодаря Истинной Сущности. И если представить, что Его нет — ничто не могло бы существовать» (*пер. И. Верника*). В математике же метод «от противного» применяется следующим образом. Сначала вы предполагаете, что теорема, истинность которой вы стремитесь доказать, на самом деле ложна. Далее вы совершаете последовательность логических шагов и выводите нечто, представляющее собой явное логическое противоречие — например, $1=0$. Из этого вы делаете вывод, что первоначальная теорема не могла быть ложной, а следовательно, она должна быть истинной. Обратите внимание, что если вы хотите, чтобы метод оказался действенным, вам следует предположить, что теорема или утверждения могут быть *либо истинными, либо ложными*: вы либо читаете эти строки, либо нет.

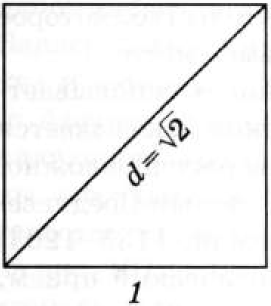


Рис. 11

Прежде всего, посмотрите на квадрат на рис. 11, сторону которого мы примем за единицу. Если мы хотим найти длину диагонали, можно при помощи теоремы Пифагора вычислить гипотенузу любого из двух прямоугольных треугольников, на которые разделен квадрат. Вспомним, что теорема гласит, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов двух катетов. Пусть длина гипотенузы — d, тогда $d^2=1^2+1^2$, а следовательно, $d^2=2$. Если мы знаем квадрат числа, то само число можем найти, если извлечем квадратный корень. Например, если мы знаем, что квадрат числа X равен 25, то $X=5$. Следовательно, из $d^2=2$ мы выводим, что $d=\sqrt{2}$. Итак, отношение диагонали к стороне квадрата равно квадратному корню из 2. (Карманный калькулятор подскажет, что $\sqrt{2}=1{,}41421356...$) А теперь нам хочется показать, что $\sqrt{2}$ невозможно выразить соотношением двух целых чисел (а следовательно, это иррациональное число). Задумайтесь на минуту: сейчас мы докажем, что хотя в нашем распоряжении бесконечное множество целых чисел, но как бы мы ни искали, нам никогда не найти двух таких, чтобы их отношение точно равнялось $\sqrt{2}$! Это же просто поразительно!

Вот как выглядит доказательство «от противного» в данном случае. Начнем мы с того, что предположим, что верно противоположное тому, что мы стремимся доказать, а именно предположим, что на самом деле $\sqrt{2}$ равен какому-то отношению двух целых чисел a и b, то есть $\sqrt{2}=a/b$. Если у a и b есть общие делители, как, например, у 9 и 6 есть общий делитель 3, можно упростить эту дробь, разделив числитель и знаменатель на эти делители, пока мы не получим два числа p и q, у которых общих делителей уже нет. (В примере с 9 и 6 это превратит 9/6 в 3/2). Очевидно, что не может быть такого, чтобы и p, и q были четными (иначе у них был бы общий делитель 2). Следовательно, наше предположение состоит в том, что $p/q=\sqrt{2}$, причем p и q — числа, у которых нет общих делителей. Теперь возводим обе части равенства в квадрат и получаем $p^2/q^2=2$. Далее умножаем обе части равенства на q^2 и получаем $p^2=2\,q^2$. Обратите внимание, что правая часть равенства, что совершенно очевидно, четное число, поскольку представляет собой какое-то число q^2, умноженное на 2, а это всегда дает четное число. Поскольку p^2 равно четному числу, p^2 тоже четное число. Однако если квадрат числа — четное число, значит, и само это число тоже четное (напомню, что квадрат — это число, умноженное само на себя, а при умножении нечетного числа на себя результат будет нечетным). Таким образом, мы доказали, что число p — четное. Вспомним, что это значит, что q должно быть нечетным: ведь у p и q нет общих делителей. Однако если p четное число, значит, его можно записать в виде $p=2r$, ведь у четного числа должен быть делитель 2. А следовательно, вышеуказанное уравнение $p^2=2\ q^2$ можно записать в виде $(2r)\ ^2$ (мы просто заменили p на $2r$), то есть поскольку $(2r)^2= (2r)\times(2r)]\ 4r^2=2\ q^2$. Теперь разделим обе части равенства на 2 и получим $2r^2=q^2$. Однако из этого следует — по тем же логическим выкладкам, которые мы только что применяли, — что q^2 — четное число (поскольку равно дважды повторенному другому числу), а следовательно, и q — *тоже четное число.* Однако отметим, что выше мы доказали, что q должно быть нечетным! Итак, мы пришли к очевидному логическому противоречию — доказали, что число должно быть и четным, и нечетным одновременно. Этот факт показывает, что наше первоначальное предположение — что существуют два целых числа p и q, отношение которых равно $\sqrt{2}$ — ложно, что и требовалось доказать. Числа вроде $\sqrt{2}$ — это новый вид чисел, *иррациональные числа*.

Похожим способом можно доказать, что квадратный корень любого натурального числа, не являющегося полным квадратом (вроде 9 или

16), — иррациональное число. Числа вроде $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ — иррациональные.

Невозможно переоценить значимость открытия несоизмеримости и иррациональных чисел. До этого открытия математики предполагали, что если у вас есть любые два отрезка, один из которых длиннее другого, всегда можно найти какую-то меньшую единицу, чтобы измерить длины обоих отрезков и получить целое число этих единиц. Если, скажем, один отрезок длиной 21,37 дюймов, а второй — 11,475 дюймов, можно измерить оба в единицах в одну тысячную дюйма, и тогда в первом будет 21 370, а во втором — 11 475 таких единиц. Поэтому древние ученые были убеждены, что подобную общую единицу измерения можно найти всегда, надо только набраться терпения. Открытие несоизмеримости означает, что два отрезка прямой, находящиеся между собой в отношении золотого сечения (АС и СВ на рис. 2), диагональ и сторона квадрата или диагональ и сторона правильного пятиугольника не обладают такой общей единицей измерения, и найти ее невозможно. В 1988 году в журнале «*Mathematics Magazine*» был опубликован стишок Стивена Кашинга, отражающий нашу естественную реакцию на иррациональные числа:

Пифагор
С давних пор
Дразнит нас скандальным
Иррациональным.

Нам станет легче осознать, какой огромный интеллектуальный скачок был проделан, чтобы открыть иррациональные числа, если мы поймем, каким судьбоносным открытием (или изобретением) для человечества стали даже дроби — рациональные числа вроде 1/2, 3/5 или 11/13. Живший в XIX веке математик Леопольд Кронекер (1823–1891) выразил свое мнение по этому вопросу следующим образом: «Господь сотворил натуральные числа, а все остальное — измышления человека».

О том, насколько древние египтяне были знакомы с дробями, мы знаем в основном по папирусу Ринда (Ахмеса). Это огромный папирус (18 футов длиной и 12 дюймов шириной), скопированный около 1650 года до н. э. писцом по имени Ахмес с более ранних документов. Найден папирус в Фивах, в 1858 году его приобрел шотландский антиквар Генри Ринд, а сейчас папирус хранится в Британском музее (за исключением нескольких фрагментов, которые неожиданно оказались собранием медицинских документов и сейчас находятся в Бруклинском музее). Папирус Ринда, в сущности, представляет собой справочник счетовода, и простыми словами в нем называются лишь дроби с числителем 1 — 1/2, 1/3, 1/4 и т. д., — а также 2/3. В некоторых других папирусах есть еще особое название для 3/4. Все прочие дроби древние египтяне выражали в виде суммы дробей с числителем 1. Например, чтобы выразить 4/5, они писали 1/2+1/5+1/10, а 2/29 выражали как 1/24+1/58+1/174+1/232. Чтобы выразить доли меры объема зерна под названием «гекат», древние египтяне применяли так называемые дроби «глаз Гора». Легенда гласит, что в битве между богом Гором, сыном Осириса и Изиды, и убийцей Осириса Сетом Гор потерял глаз, а Сет то ли раздавил его пальцем, то ли наступил на него. Затем бог письма и вычислений Тот нашел части глаза и хотел собрать его. Однако он обнаружил лишь части, которые соответствовали дробям

1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 и 1/64. Тот подсчитал сумму и выяснил, что собрал лишь 63/64 глаза, и тогда он наколдовал оставшуюся 1/64, что и позволило ему восстановить глаз.

Как ни странно, египетская система дробей с числителем 1 еще много столетий применялась и в Европе. В эпоху Возрождения составители учебников по математике приводили для тех, кому было трудно запомнить, как складывать и вычитать дроби, стихотворные правила. Забавный пример приводит Томас Хиллес в книге «Искусство популярной арифметики в целых числах и в дробях» (*Thomas Hylles*. The Art of Vulgar Arithmetic, both in Integers and Fractions), вышедшей в 1600 году.

Сумму, разность для дробей
находить не так уж сложно.
Сократить или домножить
надо каждую из них,
Чтобы был для всех един и красив,
насколько можно,
Под чертою знаменатель.
А теперь последний штрих:
Вычтем, сложим весь числитель,
и получим результат.
А единый знаменатель
спрятан под чертой и рад.

(Пер. М. Федоровой)

Несмотря на завесу тайны, которая окутывала Пифагора и содружество пифагорейцев, а может быть (в некоторой степени), и благодаря ей, пифагорейцам стремились приписать некоторые значительные математические открытия, в число которых входят и золотое сечение, и несоизмеримость. Однако если учесть колоссальный авторитет и успехи математиков Древнего Египта и Вавилона, а также то обстоятельство, что и сам Пифагор, вероятно, учился математике в Египте и Вавилоне, можно задаться вопросом: быть может, эти (или еще какие-нибудь) цивилизации открыли золотое сечение еще до пифагорейцев? Особенно интересным этот вопрос покажется, когда мы обнаружим, как много книг и статей написано о том, что золотое сечение обнаруживается в параметрах Великой пирамиды Хеопса в Гизе. Чтобы найти ответ, нам придется предпринять исследовательскую экспедицию в область археологической математики.

В ПИРАМИДЕ, К ЗВЕЗДАМ ОБРАЩЕННОЙ

Первыми мы назовем египетские пирамиды,
Далее — сад в Вавилоне, разбитый прекрасной Амитис,
Третьей — гробницу Мавсола,
творенье любви и страданий,
Следом, конечно же, храм Артемиды Эфесской,
Колосс Родосский, что медью сверкает на солнце,
Статую Зевса, что Фидий божественный создал,
И, наконец, маяк, воздвигнутый в Александрии,
Или же Кира чертог, чистым золотом запечатленный.

Неизвестный автор.
Семь чудес древнего мира

Название этой главы позаимствовано из «Посвящения Шекспиру» великого английского поэта Джона Мильтона (1608–1674). Мильтон, которого считали вторым по гениальности поэтом после Шекспира, писал:

Нуждается ль, покинув этот мир,
В труде каменотесов мой Шекспир,
Чтоб в пирамиде, к звездам обращенной,
Таился прах, веками освещенный?

(Пер. С. Маршака)

Как мы вскоре убедимся, пирамиды и в самом деле ориентировали по звездам. Однако многим писателям, похоже, оказалось мало того, что эти сооружения сами по себе столь грандиозны: они настаивают, что параметры великих пирамид основаны на золотом сечении. Для всех поклонников золотого сечения подобная связь лишь добавляет загадочности, которая в целом свойственна числу φ. Но правда ли это? Знали ли древние египтяне о числе φ — и если да, сознательно ли они обессмертили его, создав на его основе одно из Семи чудес света?

Если учесть, что первоначально интерес к золотому сечению вспыхнул, вероятно, из-за его связи с пентаграммой, нам сперва придется проследить историю пентаграммы с самого начала, поскольку это приведет нас к самым первым появлениям золотого сечения на исторической арене.

Попросите любого ребенка нарисовать звездочку — и он, скорее всего, нацарапает пентаграмму. На самом деле это следствие того, что звезды мы видим сквозь атмосферу Земли. Движение воздуха рассеивает звездный свет, и кажется, что звезды постоянно меняют очертания — вот почему они мерцают. Люди хотели передать лучики, которые видятся нам в результате мерцания, и нарисовали пентаграмму, у которой есть и еще одна привлекательная черта — ее можно начертить, не отрывая инструмента для письма от глины, папируса или бумаги.

Шли годы, и подобные «звезды» стали символом качества (вспомним пятизвездочные отели, кинофильмы и рецензии на книги), достижений (кино- и телезвезды), способностей («хватает с неба звезды») и авторитета (воинские знаки отличия). А если вспомнить, что эта символика сочетается с романтическим очарованием звездной ночи, неудивительно, что пятиконечные звезды украшают флаги более шестидесяти государств и что подобный рисунок встречается на бесчисленном множестве фирменных логотипов — от «Тексако» до «Крайслера».

Некоторые из первых дошедших до нас пентаграмм относятся к IV тысячелетию до нашей эры и найдены в Междуречье. Изображения пентаграмм были обнаружены при раскопках города Урук, где также были обнаружены и первые памятники письменности, и в Джемдет-Насре. Древний вавилонский город Урук — это, вероятно, библейский Эрех, упоминаемый в Книге Бытия (глава 10) как один из городов во владениях «сильного зверолова» Нимрода. Пентаграмма обнаружена на глиняной табличке, датируемой примерно 3200 г. до н. э. В Джемдет-Насре пентаграммы примерно того же периода были обнаружены на вазе и на пряслице. В шумерской культуре пентаграмма или ее клинописный вариант означали «все края Вселенной». Пентаграммы рисовали и в других частях древнего Ближнего Востока. В Тель-Эсдаре в израильской пустыне Негев нашли пентаграмму на кремневом скребке эпохи халколита («Медного века», 4500–3100 до н. э.). В Израиле пентаграммы обнаруживали и в других местах — при раскопках в Гезере и Тель-Захария, — однако они датируются существенно более поздним временем (V в. до н. э.). Несмотря на то что пятиконечные звезды довольно часто встречаются на древнеегипетских артефактах, геометрически правильные пентаграммы распространены не слишком сильно, хотя на кувшине в Накаде близ Фив обнаружена пентаграмма, относящаяся примерно к 3100 г. до н. э. В целом иероглифический символ звезды, вписанной в круг, означал «подземный мир» или мифическое место пребывания звезд в сумерки, а звезды без кругов служили просто обозначением ночных светил.

Однако главный вопрос, на который нам нужно ответить в контексте этой книги, состоит не в том, придавали ли ранние цивилизации какое-либо символическое или мистическое значение пентаграммам и правильным пятиугольникам, а в том, осознавали ли эти цивилизации особые геометрические свойства этих фигур, а в особенности — золотое сечение.

В те дни, как не был прахом Вавилон*

Исследования клинописных табличек, датируемых II тысячелетием до н. э. и найденных в 1936 году в Сузах в Иране, практически не оставляют сомнений, что вавилоняне времен первой династии знали формулу, позволяющую хотя бы приблизительно вычислить площадь правильного пятиугольника. Интерес вавилонян к пятиугольнику, вероятно, объяснялся тем простым фактом, что это фигура, которая получается, если прижать к глиняной табличке кончики всех пяти пальцев. На одной табличке из Суз мы читаем: «1 40, постоянная пятисторонней фигуры». Поскольку у вавилонян была принята шестидесятеричная система счисления, числа 1 40 следует толковать как $1 + 40/60$, то есть площадь правильного пятиугольника со стороной 1 равна 1,666... На самом деле площадь правильного пятиугольника со стороной 1 не так уж далека от этой величины — 1,720. Вавилоняне вычислили подобное приближенное значение и для числа π — отношения длины окружности к диаметру. По сути дела, вычисление приближенного значения и числа π, и площади правильного пятиугольника опирает-

---

* П. Б. Шелли. «Освобожденный Прометей». Пер. К. Бальмонта. — *Прим. перев.*

ся на одно и то же соотношение. Вавилоняне предположили, что периметр любого правильного многоугольника (фигуры с любым количеством равных сторон и равных углов) равен радиусу окружности, в которую вписан этот многоугольник, умноженному на 6 (рис. 12). На самом деле это совершенно справедливо для правильного шестиугольника (он и изображен на рис. 12), поскольку все шесть треугольников, из которых он состоит, равнобедренные. Согласно вычислениям вавилонян, число π равнялось 3+1/8, то есть 3,125. И правда, очень неплохое приближение, ведь значение числа π составляет 3,14159... Для правильного пятиугольника неточное предположение, что «периметр равен шести радиусам», дает приблизительное значение площади в 1,666... — то есть тот самый коэффициент, который мы видим на табличке из Суз.

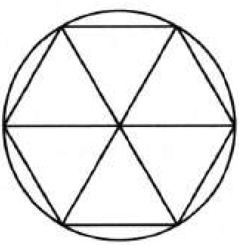


Рис. 12

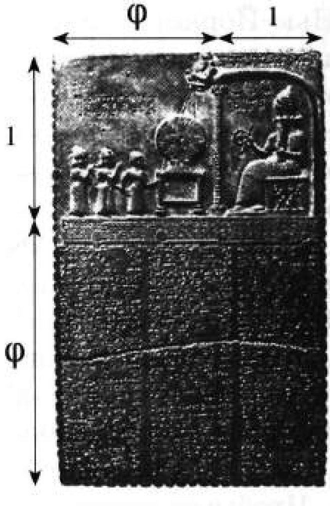


Рис. 13

Несмотря на эти важные ранние открытия в математике и на теснейшую связь системы пентаграммы-пятиугольника и золотого сечения, нет ни малейших математических свидетельств, что вавилоняне знали о золотом сечении. Тем не менее, в некоторых книгах и статьях утверждается, что золотое сечение будто бы наблюдается в пропорциях ассиро-вавилонских стел и барельефов. Например, в увлекательной книге Майкла Шнайдера «Конструирование Вселенной. Руководство для начинающих» (*Michael Schneider*. A Beginner's Guide to Constructing the Universe) утверждается, что вавилонская стела (рис. 13) с изображением жрецов, которые ведут инициируемого на «встречу» с богом Солнца, «во многих отношениях связана с золотым сечением». А в статье, опубликованной в 1976 году в журнале «*The Fibonacci Quarterly*», искусствовед Хелен Хедиан пишет, что барельеф ассирийского крылатого полубога, созданный в IX в. до н. э. (в настоящее время он хранится в музее Метрополитен в Нью-Йорке) идеально вписывается в прямоугольник с соотношением сторон, соответствующим золотому сечению. Более того, Хедиан предполагает, что четкие контуры крыльев, ног и клюва также построены в соответствии с долями числа φ. Нечто подобное Хедиан говорит и о вавилонской «Умирающей львице» из Ниневии, которую датируют примерно 600 г. до н. э. и которая сейчас хранится в Британском музее в Лондоне.

Так можно ли сказать, что при создании всех этих артефактов из Междуречья действительно было использовано золотое сечение, или это просто научное заблуждение?

Чтобы ответить на этот вопрос, нам придется ввести какие-то критерии, которые позволят определить, истинны или ложны те или иные заявления о появлении золотого сечения. Очевидно, что присутствие золотого сечения можно доказать безо всяких сомнений лишь в том случае, если сохранилась какая-то документация, из которой следует, что художники или архитекторы сознательно прибегали к этому соотношению. К несчастью, вавилонские таблички и барельефы никакой подобной документацией не подкрепляются.

Разумеется, преданный поклонник золотого сечения возразит на это, что отсутствие доказательств не есть доказательство отсутствия, и что достаточным подтверждением применения золотого сечения могут стать параметры произведения искусства сами по себе. Однако, как мы вскоре увидим, попытки найти золотое сечение в параметрах предметов — затея, которая ни к чему хорошему не приводит. Позвольте подтвердить это простым примером. На рис. 14 приведен чертеж маленького телевизора, который стоит у меня в кухне. На чертеже указаны некоторые измерения — их я сделал сам. Легко видеть, что соотношение толщины и высоты задней части телевизора равно 10,6/6,5 дюймов, то есть 1,63, а соотношение ширины передней части и высоты экрана 14/8,75=1,6, то есть оба эти соотношения, несомненно, очень близки к золотому сечению — 1,618.... Означает ли это, что изготовители телевизора решили выстроить его архитектуру в соответствии с золотым сечением? Ясно,

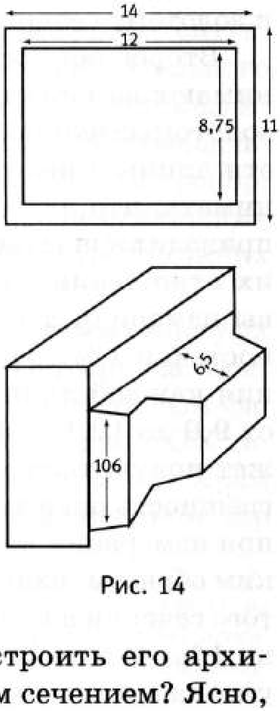


Рис. 14

что нет. Это пример просто показывает две главные ошибки тех, кто ищет золотое сечение в архитектуре или в произведениях искусства на основании одних размеров: (1) подсчеты всегда несколько натянуты, а (2) неточность измерений не учитываются. Каждый раз, измеряя параметры какой-то относительно сложной структуры (картины, стелы, телевизора), вы получаете в свое распоряжение большой набор длин — есть из чего выбрать. И есть чем пренебречь — можно не обращать внимания на остальные детали изучаемого предмета, так что нужно лишь набраться терпения и по-всякому играть и манипулировать числами, и тогда обязательно найдется какая-нибудь интересная комбинация. Вот и я, исследуя телевизор, «открыл» некоторые измерения, отношения которых близки к золотому сечению.

Второе обстоятельство, которое часто не принимают во внимание излишне рьяные любители золотого сечения, состоит в том, что я измерял все эти длины с некоторой погрешностью. Важно понимать, что любая неточность в измерении длин приводит к еще большей неточности в вычислении их отношения. Представьте себе, например, что вы измерили две длины по 10 дюймов с погрешностью в 1%. Это значит, что результат измерения каждой длины может попасть в промежуток от 9,9 до 10,1 дюймов. Отношение этих длин может получиться даже $9{,}9/10{,}1 = 0{,}98$, то есть погрешность окажется уже в 2%, вдвое больше, чем при измерении каждой длины по отдельности! Таким образом, излишне страстные почитатели золотого сечения вполне могут изменить два параметра на 1% — а это повлияет на итоговое отношение уже на 2%.

Теперь снова рассмотрим рис. 13 с учетом этих предостережений — и окажется, в частности, что длинный вертикальный сегмент был выбран так, что в него входит и база барельефа, а не только клинописный текст. Подобным же образом и точка, до которой измеряется длинный горизонтальный сегмент, выбрана произвольно и расположена правее, а не левее края барельефа.

Пересмотрев с этой точки зрения все существующие материалы, я был вынужден сделать заключение, что открытие вавилонянами золотого сечения крайне маловероятно.

По всей египетской земле*

Что же касается древних египтян, тут ситуация несколько сложнее и требует основательного детективного расследования. Здесь мы сталкиваемся с огромным количеством текстов, где утверждается, что число φ встречается, например, в пропорциях великих пирамид и других древнеегипетских монументов; казалось бы, возразить против таких доказательств нечего.

Однако позвольте начать с двух самых простых случаев — Осириона и гробницы Петосириса. Осирион — это храм, который считают кенотафом фараона Сети I, правившего Египтом в период XIX династии (ок. 1500 г. — ок. г. 1290 до н.э.). Храм обнаружил в 1901 году известный археолог сэр

---

* В оригинале названием этого раздела служит фраза «*Way down in Egypt land*» — строка из американского негритянского спиричуэл «*Let my people go*», ставшего особенно популярным в исполнении Пола Робсона. — *Прим. перев.*

Флиндерс Петри, масштабные раскопки завершились в 1927 году. Сам храм, судя по архитектурной символике, служит иллюстрацией к мифу об Осирисе. Осирис, супруг Изиды, когда-то был египетским фараоном. Его брат Сет убил его, расчленил тело и разбросал куски. Изида собрала их и возродила Осириса к жизни. Впоследствии Осирис стал царем подземного мира и богом циклических превращений — жизни, смерти и возрождения — и на личном, и на вселенском уровне. В период Среднего царства (2000–1786 гг. до н. э.) культ мертвых был развит еще больше, и Осирис стал судьей, определяющим судьбу души после смерти.

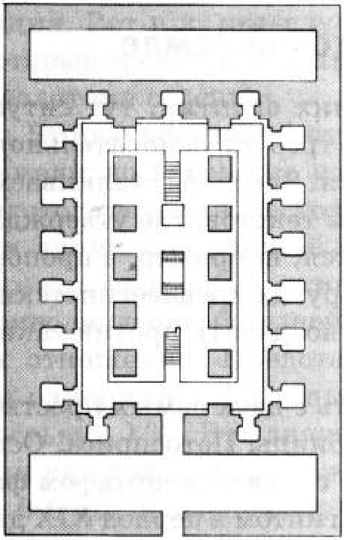


Рис. 15, *а*

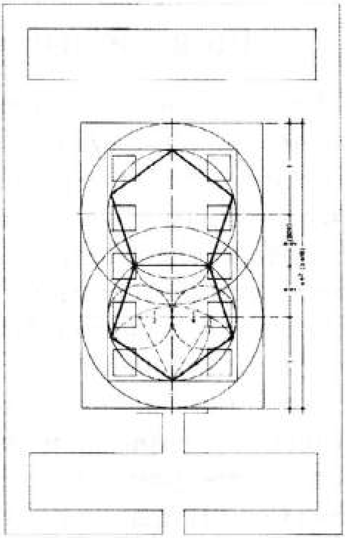


Рис. 15, *б*

Храм Осирион был целиком засыпан землей и напоминал, таким образом, могилу. На плане Осириона (рис. 15, а) видна центральная часть с десятью квадратными колоннами; видимо, она была окружена рвом, наполненным водой. Считается, что такая структура символизирует сотворение первобытных вод.

В небезынтересной книге Роберта Лоулора «Священная геометрия. Философия и практика» (*Robert Lawlor*. Sacred Geometry: Philosophy and Practice, 1982) высказано предположение, что геометрия Осириона «соответствует пропорциям золотого сечения», поскольку «золотое сечение — это трансцендентная "форма-идея", которая, несомненно, существовала априори, в вечности, до того, как в пространстве и времени возникли и развились любые прогрессии». В подтверждение своего предположения о повсеместном присутствии числа φ, золотого сечения, в архитектуре храма Лоулор предлагает подробнейший геометрический анализ, образчик которого представлен на рис. 15, *б*. Более того, автор утверждает, что «подчеркивание мотива правильного прямоугольника служит ярким символом представления о том, что после смерти фараон превратился в звезду».

Несмотря на то что геометрический анализ Лоулора отличается красотой и зрелищностью, мне он кажется неубедительным. Мало того, что линии, которые, как предполагается, отражают золотое сечение, проводятся, похоже, в совершенно произвольных местах, но и видеть правильные пятиугольники там, где ясно читается прямоугольник, это, сдается мне, некоторая натяжка. То, что сам Лоулор предлагает и другие интерпретации геометрии храма, где опять же то и дело возникает φ в соотношениях самых разных измерений, лишь подтверждает, что подобное вчитывание — в сущности, произвол и спекуляция и что при желании золотое сечение можно увидеть и там, где его нет.

Положение дел с гробницей Петосириса, которую раскопал в начале 1920 годов археолог Гюстав Лефевр, примерно такое же. Гробница гораздо моложе Осириона, она датируется лишь примерно 500 г. до н. э. и построена для верховного жреца бога Тота. Поскольку гробница датируется периодом, когда золотое сечение уже было известно (грекам), оно в принципе могло проявиться в геометрии гробницы. Более того, Лоулор в той же «Священной геометрии» приходит к выводу, что «Жрец Петосирис обладал полным и крайне глубоким представлением о золотом сечении». Этот вывод основан на анализе геометрии раскрашенного барельефа с восточной стены священной части гробницы (рис. 16, *а*). На барельефе изображен жрец, совершающий возлияние на голову мумии усопшего.

Рис. 16, *а*

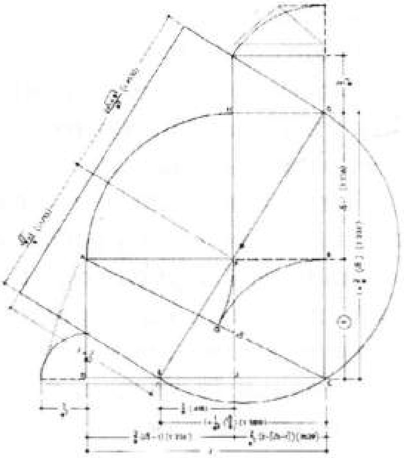


Рис. 16, *б*

К сожалению, геометрический анализ, который предлагает Лоулор, представляется несколько надуманным (рис. 16, *б*): линии проведены из произвольно выбранных точек, которые никак нельзя назвать узловыми. Более того, и отношения, которые в результате получаются, слишком громоздки (например, $(2\sqrt{1-\varphi^2})/\varphi^2$) и потому неправдоподобны. Поэтому лично мне представляется, что хотя представление Лоулора о том, что «погребальные практики в традиции фараонов были призваны не только воздать дань уважения физическому телу покойного, но и создать вместилище метафизических знаний, которые он накопил при жизни», исключительно верно, но все же, в сокровищницу метафизических знаний Петосириса золотое сечение не входило.

Следует подчеркнуть, что доказать, что золотое сечение не встречается в египетских археологических памятниках, когда об этом свидетельствуют только геометрические параметры, практически невозможно. Однако никаких документов, которые подтверждают, что египтяне сознательно применяли золотое сечение, до нас не дошло, а без них золотое сечение в произведениях искусства или в архитектуре должно прямо-таки бросаться в глаза, а не прятаться так глубоко, что для его выявления требуется очень сложный анализ. Как мы еще увидим, подробный разбор нескольких более поздних случаев, когда некоторые исследователи также полагали, что художники применяли золотое сечение, показывает, что эти предположения столь же необоснованны.

Однако я, пожалуй, не стану разбирать другие относительно малоизвестные объекты, например, египетскую стелу, датируемую примерно 2150 годом до н. э., размеры которой, как полагают некоторые ученые, также относятся как золотое сечение, а перейду сразу к кульминации — к великой пирамиде Хеопса.

Пирамида чисел

По традиции, правителем Верхнего Египта, который завоевал мятежное царство Нижнего Египта (в дельте Нила) и тем самым объединил Египет около 3110 г. до н. э., был Менес (или Нармер). В правление III династии (ок. 2780–2680 гг. до н. э.) был введен культ Солнца в качестве главной религии, а также вошли в обиход мумифицирование умерших и строительство крупных каменных монументов. Эпоха великих пирамид достигла расцвета при IV династии, около 2500 г. до н. э. — и ее высочайшим достижением стали три знаменитые пирамиды в Гизе (рис. 17). «Великая пирамида» (на фотографии она на заднем плане) служит не только памятником фараону, но и символом успеха организации древнеегипетского общества в целом. Ученый Курт Мендельсон в своей книге «Загадка пирамид» (*Kurt Mendelssohn*. The Riddle of the Pyramids, 1974) пришел к заключению, что целью всего сооружения пирамид было в большой степени не применение их по назначению, то есть в качестве надгробных сооружений, но их возведение само по себе. Иначе говоря, главным были не сами пирамиды, а их строительство. Это объясняет очевидное несоответствие между колоссальным вложением сил в то, чтобы нагромоздить около 20 миллионов тонн добытого в каменоломнях песчаника, и единственным предназначением пирамид — похоронить трех фараонов.

В 1996 году египтолог-любитель Стюарт Киркленд Вьер, работавший под эгидой Денверского музея естествознания, подсчитал, что на строительстве великой пирамиды в Гизе должны были трудиться примерно 10 000 рабочих. Оценка количества энергии, необходимой, чтобы доставить каменные блоки из каменоломни к месту строительства, а также поднять камни на требуемую высоту, позволила Вьеру прикинуть необходимое количество работы. Предположив, что строительство заняло двадцать три года (продолжительность царствования фараона Хеопса), и сделав несколько разумных допущений — сколько энергии мог потратить египетский рабочий в день и как выглядел распорядок рабочего дня, — Вьер сумел оценить количество потребовавшейся рабочей силы.

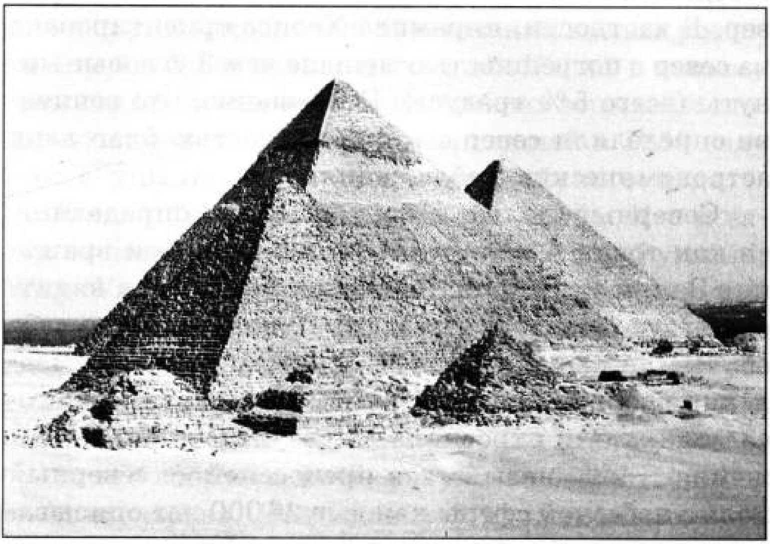


Рис. 17

До самого недавнего времени датировка пирамид в Гизе опиралась в основном на сохранившиеся перечни фараонов и продолжительность их царствования. Поскольку такие списки редки, почти никогда не бывают полными и, как известно, противоречивы, хронология, как правило, составляется с точностью примерно до ста лет. (Такая же погрешность у датировки методом радиоуглеродного анализа). В ноябре 2000 года в журнале «*Nature*» была опубликована статья, в которой Кейт Спенс (*Kate Spence*) из Кембриджского университета предлагает иной метод датировки, согласно которому великая пирамида Хеопса была выстроена в 2480 году до н. э. (с погрешностью всего в пять лет). Метод Спенс — тот самый метод, который первым предложил астроном сэр Джон Гершель в середине XIX века, а основан он на том, что пирамиды всегда ставили с очень точной ориентацией на север. В частности, пирамида Хеопса ориентирована на север с погрешностью меньше чем 3 угловые минуты (всего 5 % градуса!) Несомненно, что египтяне определяли север с такой точностью благодаря астрономическим наблюдениям.

Северный полюс небесной сферы определяется как точка в небе, соответствующая оси вращения Земли — та точка, вокруг которой, как видится глазу, вращаются звезды. Однако сама по себе ось Земли не закреплена в пространстве, она медленно вращается, примерно как ось вращающегося волчка или гироскопа. В результате этого движения — оно называется прецессией — северный полюс небесной сферы каждые 26 000 лет описывает на северном небе большой круг. В наши дни северный полюс небесной сферы определяется с погрешностью в 1 градус по положению Полярной звезды (астрономы называют ее Альфой Малой Медведицы), однако во времена строительства великих пирамид дело обстояло иначе. Спенс предположила, по каким двум звездам древние египтяне находили север — это Дзета Большой Медведицы и Альфа Малой Медведицы, — а затем тщательно изучила ориентацию восьми пирамид и сумела определить дату возведения пирамиды Хеопса: 2480 год до н. э., то есть примерно на 74 года позднее, чем полагали раньше.

Мало какие археологические сооружения окутаны такой плотной завесой легенд и противоречий, как пирамида Хеопса. Например, пристальное внимание к пирамидам и к оккультной стороне их изучения было центральной темой учения розенкрейцеров (его основал Христиан Розенкрейц в 1459 г.). Члены этой секты претендовали на весьма глубокое знание тайн природы, магических знаков и знамений и т. п. Из отдельных ответвлений культа розенкрейцеров берет начало масонство. Ближе к нашему времени интерес к науке о пирамидах вспыхнул снова — возможно, благодаря вышедшей в 1859 году книге ушедшего на покой английского издателя Джона Тейлора «Великая пирамида. Кто и зачем ее построил?» (*John Taylor*. The Great Pyramid: Why Was It Built and Who Built It?), проникнутой религиозным духом. Тейлор был настолько убежден, что пирамида до мельчайших деталей построена по математическим формулам, о которых древние египтяне и не подозревали, что сделал вывод, будто это сооружение — результат божественного вмешательства. Находясь под влиянием модного в те годы представления, что англичане будто бы потомки потерянных колен Израилевых, Тейлор, в частности, предположил, что основной единицей измерения при строительстве пирамид был библейский «локоть» (чуть больше 25 английских дюймов и в точности 25 «пирамидальных дюймов»). Предполагается, что именно на эту меру длины опирался Ной при строительстве Ковчега и царь Соломон при строительстве Храма. Тейлор пошел дальше и заявил, что этот священный локоть был дарован свыше, поскольку основан на длине радиуса Земли — расстояния от центра до полюса: «пирамидальный дюйм» якобы равен одной пятисотмиллионной доле полярной оси Земли. Эта книга, совершенно безумная, обрела горячего сторонника в лице Чарльза Пиацци Смита, королевского астронома Шотландии (то есть директора Королевской обсерватории Эдинбурга), который в 1860-е годы опубликовал ни много ни мало три объемистых тома о великой пирамиде, первый из которых назывался «Великая пирамида как наше наследие» (*Charles Piazzi Smyth.* Our Inheritance in the Great Pyramid). Энтузиазм Пиацци Смита был вызван отчасти тем обстоятельством, что он был ярым противником введения в Великобритании метрической системы. Его псевдонаучная или теологическая логика была примерно такова: великая пирамида Хеопса рассчитана в дюймах, математические свойства пирамиды показывают, что ее строительство вдохновлялось свыше, следовательно, дюйм — величина богоданная, не то что сантиметр, порождение «самой дикой, самой кровожадной, самой безбожной революции» (Великой Французской, разумеется). Далее Пиацци Смит излагает свою точку зрения на диспут о системе мер и пишет, в частности, в книге «Великая пирамида, ее секреты и раскрытые тайны» (*«The Great Pyramid, Its Secrets and Mysteries Revealed»*):

> А значит, те билли, которые предлагали в Парламенте профранцузски настроенные агитаторы за метрическую систему, столь часто не проходили не благодаря усилиям отдельных защитников британских мер и весов, а скорее из-за того, что

> эта весьма пронырливая система греховна сама по себе, и наша задача — уберечь избранный народ, сохранившийся, несмотря на все исторические коллизии, не допустить, чтобы этот народ по недомыслию облачился в отравленные одежды, в те самые, в каких явится антихрист, и, словно Исав за чечевичную похлебку, за жалкую сиюминутную выгоду в торговле отказался от установления, принадлежащего ему по праву рождения, от установления, которое наши авраамические предки так стремились сохранить до той поры, когда таинства Господни затронут, наконец, все человечество.

Прочитав этот текст, мы уже не станем удивляться, когда узнаем, что писатель Леонард Коттрел решил назвать главу о Чарльзе Пиацци Смите в своей книге «Горы фараоновы» (*Leonard Cottrell*. The Mountains of Pharaoh) «Великий пирамидиот».

И Пиацци Смит, и Тейлор своим нумерологическим анализом параметров пирамид, в сущности, поспособствовали возрождению пифагорейской одержимости числом 5. Они отметили, что у пирамиды (что очевидно) пять вершин и пять граней, если считать основание, что «священный локоть» содержит примерно 25 (5 в квадрате) дюймов (или ровно 25 «пирамидальных дюймов»), что «пирамидальный дюйм» составляет одну пятисотмиллионную земной оси и т. д. Писатель и популяризатор науки Мартин Гарднер обнаружил прелестный пример, демонстрирующий нелепость «пятерочного» анализа Пиацци Смита. В своей книге «Чудачества и заблуждения во имя науки» (*Martin Gardner*. Fads and Fallacies in the Name of Science, 1957) Гарднер пишет:

> Если заглянуть в «World Almanac» и выяснить некоторые факты, касающиеся монумента Вашингтона, можно найти довольно много «пятерочностей». Высота его составляет 555 футов 5 дюймов. Основание — квадрат со стороной 55 футов, а окна расположены на высоте в 500 футов от основания. Если умножить основание на 60 (а это число месяцев в году, умноженное на 5), получим 3300 — а это точный вес его замкового камня в фунтах. К тому же в слове «Washington» ровно десять букв — то есть дважды пять. А если умножить вес замкового камня на площадь основания, получится 181 500 — достаточно точное приближение к скорости света в милях в секунду.

Однако настала пора сделать самое скандальное заявление о великой пирамиде Хеопса с точки зрения нашего интереса к золотому сечению. В той же книге Гарднер упоминает одно утверждение, которое, если оно истинно, доказывает, что золотое сечение и вправду использовалось при проектировании великой пирамиды. Гарднер пишет: «Геродот утверждает, что пирамиду построили с таким расчетом, чтобы площадь каждой грани равнялась площади квадрата, сторона которого равна высоте пирамиды». Греческого историка Геродота (ок. 485–425 гг. до н. э.), великий римский оратор

Цицерон (106–43 гг. до н. э.) назвал «отцом истории». Гарднер не понимал, что, в сущности, следует из утверждения Геродота, однако был не первым и не последним, кто его приводит.

Знаменитый английский астроном сэр Джон (Фредерик Уильям) Гершель (1792–1871) в статье под названием «Британский модульный стандарт длины» (*«British Modular Standard of Length»*), опубликованной в *«The Athenaeum»* 28 апреля 1860 года, пишет:

> Такой же уклон... принадлежит пирамиде, характеризуемой таким свойством, что каждая из ее граней равна квадрату со стороной, равной высоте пирамиды. Это характерное соотношение, которое, как ясно и очевидно говорит нам Геродот, умышленно придали пирамиде ее строители — и теперь нам известно, что оно ей действительно придано.

А уже совсем недавно, в 1999 году, французский писатель и специалист по телекоммуникациям Мидхат Газале написал в своей интересной книге «Гномон. От фараонов до фракталов»*: «Говорили, что греческий историк Геродот узнал у египетских жрецов, что квадрат высоты великой пирамиды равен площади ее треугольной боковой стороны». Почему это утверждение так важно? По той простой причине, что это все равно что сказать, что великая пирамида была создана так, чтобы отношение высо-

---

* Перевод на русский язык вышел в 2002 г. в издательстве «Институт компьютерных исследований». — *Прим. перев.*

ты ее треугольной стороны к половине стороны основания было равно золотому сечению!

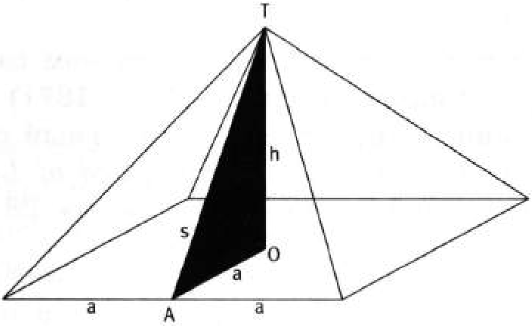


Рис. 18

Не пожалейте минуты и внимательно посмотрите на чертеж пирамиды на рис. 18, где a — половина стороны основания, s — высота треугольной стороны, а h — высота самой пирамиды. Если утверждение, которое приписывают Геродоту, верно, это будет означать, что h^2 (квадрат высоты пирамиды) равен $s \times a$ (площади треугольной стороны, см. Приложение 3). Элементарные геометрические выкладки показывают, что это равенство означает, что соотношение s/a в точности равно золотому сечению (доказательство см. в Приложении 3). Естественно, на ум сразу же приходит вопрос, так ли это. Основание великой пирамиды Хеопса на самом деле не совсем правильный квадрат, длины его сторон разнятся от 755,43 футов до 756,08 футов. Средняя длина стороны, $2a$, равна, таким образом, 755,79 футов. Высота пирамиды $h=481{,}4$ фута. Применив теорему Пифагора, мы находим, исходя из этих величин, что высота треугольной стороны s равна 612,01 футов. Итак, мы нашли, что отношение $s/a=612{,}01/377{,}90=1{,}62$, что и в самом деле очень близко к золотому сечению (погрешность составляет меньше 0,1%).

Если понимать это буквально, получается, что древние египтяне и правда знали, что такое золотое сечение, поскольку это число не просто появляется в параметрах великой пирамиды, но и существует исторический документ, подтверждающий, что именно таково было намерение создателей сооружения: об этом нам говорит Геродот. Но так ли это? Или мы просто стали свидетелями явления, которое канадский математик Роджер Герц-Фишлер называл «одной из самых хитроумных оплошностей в истории науки»?

Очевидно, что параметры пирамиды изменить нельзя, поэтому единственная часть «доказательства» наличия золотого сечения, в которой можно усомниться, это утверждение Геродота. Несмотря на то что это высказывание многократно цитируется на протяжении истории, несмотря даже на то, что невозможно устроить перекрестный допрос человеку, жившему 2500 лет назад, по меньшей мере четверо ученых взяли на себя труд проделать «детективную» работу и выяснить, что именно сказал Геродот и что он на самом деле имел в виду. Результаты двух таких расследований подытожили Герц-Фишлер и математик из Университета штата Мэн Джордж Марковски.

Оригинальный отрывок содержится в 124 параграфе книги II «Истории» Геродота, которая называется «Евтерпа». В классическом переводе читаем: «Она четырехсторонняя, каждая сторона ее шириной в 8 плефров и такой же высоты» (*пер. Г. Стратановского*). Обратите внимание, что плефр — это 100 греческих футов (примерно 101 английский). Что-то этот текст совсем не похож на то, что нам представляют как цитату из Геродота (что квадрат высоты равен площади стороны). Более того, параметры пирамиды, которые приводит Геродот, вообще не соответствуют действительности. Великая пирамида высотой далеко не 800 футов (напомним, что ее высота всего 481 фут), и даже сторона ее квадратного основания (около 756 футов) и то существенно меньше 800 футов. Так откуда же взялась эта «цитата»? Первая подсказка — статья сэра Джона Гершеля в «*The Athenaeum*». Согласно Гершелю, «заслуга выявления» этой особенности пирамиды и обнаружения цитаты из Геродота принадлежит не кому-нибудь, а Джону Тейлору в его книге «Великая пирамида. Кто и зачем ее построил?» Герц-Фишлер проследил, откуда пошла дезинформация, которая, видимо, была вызвана всего лишь неверным толкованием Геродота в книге Джона Тейлора, которая в наши дни приобрела мрачную славу.

Начинает Тейлор с перевода из Геродота, который не слишком отличается от процитированного: «Каждая грань этой пирамиды, которых четыре, с каждой стороны имеет по восемь плефров, и высота такова же». Однако тут автор дает волю воображению — и предполагает, что Геродот имел в виду, будто количество квадратных футов в каждой грани равняется количеству квадратных футов в квадрате со стороной, такой же, как высота пирамиды. Однако даже при такой «вольной» интерпретации у Тейлора остается еще одна небольшая трудность — упомянутое число (восемь плефров) сильно расходится с действительными размерами пирамиды. Тейлор предлагает способ преодолеть эту трудность — и этот способ еще возмутительнее. Без какой бы то ни было логической аргументации Тейлор заявляет, что нужно умножить восемь плефров на площадь основания одной из меньших пирамид, стоящих к востоку от пирамиды Хеопса.

Из всего этого следует, что текст Геродота едва ли можно считать документальным подтверждением наличия в проекте великой пирамиды золотого сечения. Совершенно необоснованная интерпретация текста, порожденная книгой Тейлора и впоследствии повторявшаяся бесчисленное множество раз, на самом деле бессмысленна и служит разве что очередным примером подтасовки данных.

С этим выводом согласны не все. В статье под названием «Икосаэдр как основа дизайна великой пирамиды», опубликованной в 1992 году, Хьюго Ф. Ферхейен выдвигает предположение, что золотое сечение как мистический символ, вероятно, умышленно скрыли в параметрах великой пирамиды как «послание к посвященным». Однако, как мы еще увидим, для сомнений, что золотое сечение вообще учитывалось при строительстве пирамид, есть и другие основания.

Когда мы поймем, что великая пирамида Хеопса по количеству книг, ей посвященных, опережает даже легендарную Атлантиду, нас уже не слишком удивит, что пирамидология интересуется не только числом φ — ее привлекает и другое уникальное число, число π.

Теория π впервые появилась в 1838 году в произведении Г. Эгнью под названием «Письмо из Александрии о свидетельствах практического применения квадратуры круга в конфигурации великих египетских пирамид» (*H. Agnew.* Letter from Alexandria, on the Evidence of the Practical Application of the Quadrature of the Circle, in the Configuration of the Great Pyramids of Egypt), однако в целом ее приписывают Тейлору, который на самом деле просто пересказал теорию Эгнью. Суть ее в том, что отношение периметра основания пирамиды ($8a$ в наших прежних обозначениях, где a — половина стороны основания) к высоте пирамиды h равна 2 π. Если мы подставим в эту формулу те же числа, что и раньше, то получим, что $8a/h = 4 \times 755{,}79/481{,}4 = 6{,}28$, что с достаточной точностью равно 2 π (погрешность всего около 0,05 %).

Следовательно, прежде всего надо отметить, что из параметров великой пирамиды как таковых было бы невозможно определить, использовались ли при ее строительстве φ и π (или *хотя бы одно* из этих чисел). Более того, в статье, напечатанной в 1968 году в журнале *«The Fibonacci Quarterly»*, полковник Р. С. Бирд из Беркли (Калифорния) сделал следующий вывод: «Бросьте кости и выбирайте себе теорию».

Если выбирать между φ и π как потенциальными мерилами архитектуры пирамид, очевидно, что у π перед φ есть преимущество. Во-первых, папирус Ринда (Ахмеса), один из основных источников о познаниях египетских математиков, сообщает нам, что древние египтяне, жившие в XVII веке до н. э., по крайней мере приблизительно знали значение π, а о том, что им было известно число φ, нет никаких свидетельств. Вспомним, что Ахмес переписывал свой справочник по математике примерно в 1650 году до н. э., в гиксосский период или период «царей-пастухов». Однако он отмечает, что оригинальный документ относился к периоду фараона Аменмехмета (Аменемеса) III из Двенадцатой династии, и в принципе возможно, хотя и маловероятно, что содержание документа было известно и во времена строительства великой пирамиды Хеопса. В папирусе содержится 87 математических задач, которым предшествует таблица дробей. У нас есть достаточно доказательств (и другие папирусы, и исторические источники), что этой таблицей продолжали пользоваться как справочным материалом почти две тысячи лет. Ахмес пишет, что этот документ — «врата в знания обо всем сущем и обо всех неведомых тайнах». Принятое в Египте приближенное значение числа π фигурирует в задаче номер 50 папируса Ринда, где идет речь о вычислении площади круглого поля. Ахмес предлагает такое решение: «Отними 1/9 диаметра, а остаток возведи в квадрат». Из этого мы делаем вывод, что египтяне предполагали, что π = 3,16049..., что отличается от точного значения 3,14159... менее чем на 1 процент.

Второе преимущество π перед φ следует из интересной теории о том, что строители учитывали π при проектировании пирамид, даже не зная его точного значения. Эту теорию выдвинул Курт Мендельсон в «Загадке пирамид». Логика Мендельсона такова. Поскольку нет абсолютно никаких свидетельств, что египтяне времен Древнего Царства знали математику на уровне хоть сколько-нибудь выше самого элементарного, присутствие π в геометрии пирамид наверняка можно считать следствием не теоретических, а практических строительных приемов. Мендельсон предполагает, что древние египтяне, вероятно, при измерении вертикальных и горизонтальных размеров пользовались разными мерами длины. Похоже, чтобы измерять высоту пирамид (в локтях), они применяли веревки из пальмового волокна, а чтобы измерять длину стороны основания — каталки-барабаны (диаметром в локоть). То есть горизонтальную длину считали в оборотах — можно сказать, в «катальных локтях». Выходит, египетскому зодчему оставалось всего лишь выбрать, сколько локтей в высоту должны построить рабочие на каждый горизонтальный катальный локоть. Поскольку каждый катальный локоть равен π локтям (длина окружности с диаметром в 1 локоть), этот метод строительства придал бы параметрам пирамид соотношение π, даже если строители не имели бы об этом ни малейшего представления.

Разумеется, проверить умозаключения Мендельсона у нас нет никакой возможности. Однако некоторые египтологи утверждают, что есть прямые свидетельства, что при проектировании великих пирамид *не учитывалось ни золотое сечение, ни* π. Эта теория основана на концепции секеда. Секед — это всего-навсего мера наклона граней пирамиды или, точнее, количество горизонтальных локтей, на которое надо было сместиться на каждый вертикальный локоть. Очевидно, для строителей это была важная практическая величина, ведь им нужно было, выкладывая очередной ряд каменных блоков, сохранять форму всего сооружения. Задачи, которые в папирусе Ринда значатся под номерами 56–60, как раз и относятся к вычислению секеда и подробно разобраны в великолепной книге Ричарда Дж. Джиллингса «Математика во времена фараонов» (*Richard J. Gillings.* Mathematics in the Time of the Pharaohs). В 1883 году сэр Флиндерс Петри обнаружил, что при строительстве великой пирамиды Хеопса конкретная величина секеда (наклона грани пирамиды) была выбрана таким образом, что «отношение периметра основания пирамиды к ее высоте равно 2 π» с довольно высокой точностью, однако само число π в ее дизайне не играет абсолютно никакой роли. Сторонники теории секеда подчеркивают, что точно такой же секед обнаруживается и в параметрах ступенчатой пирамиды в Медуме, выстроенной незадолго до великой пирамиды в Гизе.

С теорией секеда согласны не все. Курт Мендельсон пишет: «Было предложено великое множество математических объяснений, и среди них — даже гипотеза одного видного археолога [Петри], которая гласит, что строители будто бы случайно применили соотношение 14/11 [очень близко к 4/π], но все они, к сожалению, крайне неубедительны». С другой стороны, Роджер Герц-Фишер, изучивший ни много ни мало девять теорий, претендующих на истолкование проекта великой пирамиды, в статье, опубликованной в 1978 году в журнале «*Crux Mathematicorum*», пришел к выводу, что теория секеда, весьма вероятно, верна.

Однако с нашей точки зрения, если верна любая из двух гипотез — теория секеда или теория катальных локтей, — золотое сечение не играло никакой роли при создании великой пирамиды.

Так можно ли считать, что вопрос о золотом сечении и великой пирамиде, насчитывающий 4500 лет, наконец-то закрыт? Мы, конечно, от души на это надеемся, однако история, к несчастью, доказывает, что мистическое очарование пирамид и нумерологическая «тайна» золотого сечения оказываются сильнее даже самых основательных доказательств. Доводы, которые выдвигали Петри, Джиллингс, Мендельсон и Герц-Фишер, известны уже много десятков лет, однако это ничуть не мешает публиковать многочисленные новые книги, на все лады рассказывающие о надуманной «загадке» золотого сечения.

Так что с нашей точки зрения можно заключить, что крайне маловероятно, чтобы золотое сечение и его свойства открыли древние вавилоняне или древние египтяне — эту задачу предстояло решить греческим математикам.

ВТОРОЕ СОКРОВИЩЕ

У геометрии есть два великих сокровища: одно — теорема Пифагора, второе — деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое мы уподобим мерке золота, второе же — драгоценному самоцвету.

Иоганн Кеплер (1571–1650)

Нет никаких сомнений, что каждый, кто воспитан в западной или ближневосточной цивилизации, во всем, что касается математики, естественных наук, философии, литературы и искусства, является учеником древних греков. Немецкий поэт Гёте писал: «Именно греки умели мечтать о жизни слаще всех народов», и это лишь скромная дань уважения отважным первопроходцам и всем открытиям, которые сделали греки в различных областях знания, ими же разработанных и названных.

Однако даже самые блестящие достижения греков во всех прочих сферах меркнут рядом с их головокружительными открытиями в математике. К примеру, всего за четыреста лет — от Фалеса Милетского (ок. 600 г. до н. э.) до «великого геометра» Аполлония Пергского (ок. 200 г. до н. э.) греки полностью сформировали основы геометрической теории.

Успехи греков в математике во многом были прямым следствием страсти к познанию ради познания, а не ради практических целей. Рассказывают, что один ученик Евклида, изучив вместе с ним некую теорему, спросил: «А что я с этого получу?» Евклид приказал рабу дать мальчику медную монету, чтобы тот увидел, что наука и в самом деле занятие прибыльное.

Образование государственного деятеля во времена Платона должно было включать в себя арифметику, геометрию, стереометрию, астрономию и музыку — и все это, как рассказывает нам пифагореец Архит, подпадало под общее название «математика». По легенде, когда Александр Великий спросил своего учителя Менехма (которому приписывают открытие эллиптической кривой, параболы и гиперболы), нельзя ли изучить геометрию как-нибудь поскорее, получил ответ: «О повелитель, в странствиях по нашему царству можно найти дороги для царей и дороги для простых граждан, однако в геометрию нет царского пути».

Платон

В таком интеллектуальном окружении и вырос Платон (428/427 г. до н. э. — 348/347 г. до н. э.), один из самых влиятельных умов Древней Греции и западной цивилизации в целом. Считается, что Платон изучал математику у пифагорейца Феодора Киренского, который первым доказал, что не только $\sqrt{2}$, но и $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и так далее вплоть до $\sqrt{17}$ — иррациональные числа. Почему он остановился на 17, никто в точности не знает, однако общего доказательства он, очевидно, вывести не сумел. Некоторые исследователи утверждают, что Феодор, вероятно, приводит самое легкое доказательство несоизмеримости, опираясь на понятие золотого сечения (идея примерно та же, что и в Приложении 2).

В своем «Государстве» Платон пишет, что математику совершенно необходимо включать в программу образования всех философов и государственных деятелей. Подобным же образом надпись над входом в его школу (Академию) гласила: «Не геометр да не войдет!» Историк математики Дэвид Юджин Смит в своей книге «Наш долг перед Грецией и Римом» (*David Eugene Smith.* Our Debt to Greece and Rome) называет это первым требованием к абитуриентам в истории. Восхищение математикой очевидно и тогда, когда Платон не без зависти пишет об отношении к математике в Египте, где на потеху детишкам изобрели арифметические игры, которые они изучают с удовольствием и забавы ради.

Оценивая роль Платона в развитии математики в целом и в понимании золотого сечения в частности, мы должны будем изучить не только его вклад в собственно математику, достаточно скромный, но и последствия его влияния на математические изыскания других ученых и в его собственном, и в последующих поколениях, и поддержки, которую он оказывал науке в целом. В некотором смысле Платона можно считать одним из первых чистых теоретиков. Примером его теоретических наклонностей может служить отношение к астрономии, где он предпочитал не наблюдать движение светил, а советовал «оставить небеса в покое» и сосредоточиться на более абстрактных математических небесах. Согласно Платону, настоящие звезды — это всего лишь отображение математических небес, подобно тому как геометрические чертежи — отображение абстрактных понятий точки, линии и окружности. Любопытно, что в своей выдающейся книге «История греческой математики» (*Thomas Heath*. A History of Greek Mathematics), изданной в 1921 году, сэр Томас Хит пишет: «Трудно разобраться, что же имел в виду Платон, когда проводил различие между видимой небесной тканью (то есть видимыми звездами, их расположением и движением), которая, безусловно, прекрасна, и подлинной небесной тканью, которым видимые небеса лишь подражают и которые бесконечно чудеснее и прекраснее».

Как астрофизик-теоретик я должен отметить, что Платон в неявном виде высказывает некоторые соображения, которым я симпатизирую. Здесь проводится различие между красотой космоса как такового и красотой теории, которая объясняет устройство Вселенной. Для наглядности приведу принцип, который открыл великий немецкий художник Альбрехт Дюрер (1471–1528).

Сложим шесть правильных пятиугольников (рис. 19) так, чтобы получился один большой пятиугольник с пятью отверстиями в форме *золотых треугольников* (равнобедренных треугольников с отношением стороны к основанию, равным φ). Шесть таких пятиугольников, в свою очередь, образуют еще один правильный пятиугольник, большой и более дырчатый — и так до бесконечности.

Думаю, все согласятся, что получившаяся фигура (рис. 19) удивительно красива. Однако у нее есть и обаяние другого рода — математическое: оно состоит в простоте принципа, по которому она строится. Так вот, мне кажется, это и есть математические небеса, о которых говорил Платон.

Не приходится сомневаться, что общее руководство научными изысканиями, которое осуществлял

Платон в годы своего правления, гораздо важнее его непосредственного вклада в исследования. В тексте, который приписывают Филодему и относят к первому веку, мы читаем: «В те времена в математике [был достигнут] большой прогресс, и Платон им руководил и задавал задачи, которые математики ревностно решали».

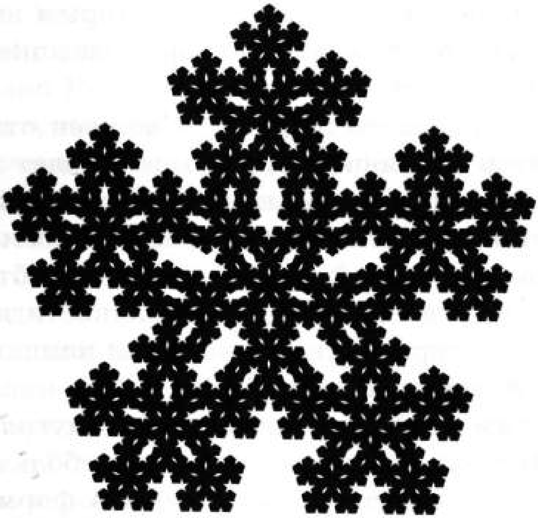


Рис. 19

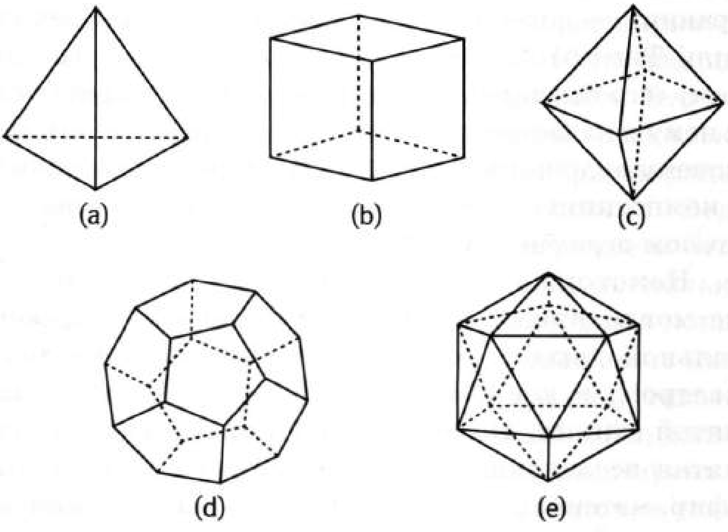
Тем не менее, Платон и сам очень интересовался свойствами чисел и геометрических фигур. В частности, в «Законах» он предполагает, что оптимальное число граждан в государстве — 5040, поскольку это число (а) делится на 12, 20 и 21, (б) его двенадцатая часть тоже делится на 12, (в) у него 59 делителей, в том числе все целые числа от 1 до 12, кроме 11, зато на 11 делится практически соседнее число 5038. Выбор этого числа с его свойствами позволил Платону разработать свою социально-экономическую утопию. Скажем, земля в государстве делится на 5040 наделов, а 420 из них составляют территорию каждой из двенадцати «фил». Сами жители государства делятся на четыре общественные категории — класса: свободные граждане с женами и детьми, их рабы, поселенцы-иностранцы и разнообразные заезжие гости. При выборах совета члены каждого из четырех классов избирают из своей среды по девяносто человек.

С Платоном связано и еще одно число — 216. Его он упоминает в «Государстве» в довольно-таки темном отрывке, где речь идет о том, что 216 — это шесть в кубе, а 6 — это одно из чисел, символизирующих брак (поскольку это произведение женского числа 2 и мужского числа 3). Платон и сам был учеником пифагорейцев и прекрасно знал, что сумма кубов сторон знаменитого пифагорейского треугольника — 3–4–5 — тоже равна 216.

Золотое сечение интересовало Платона, поскольку его очень занимали две темы: несоизмеримость и *платоновы тела*. В «Законах» Платон признается, что ему неловко, что с идеей несоизмеримости длин и с иррациональными числами он познакомился сравнительно поздно, и сокрушается, что многие греки его поколения до сих пор о них не знают.

В диалоге «Гиппий Больший» Платон признает, что подобно тому, как любое четное число может быть суммой либо двух четных, либо двух нечетных чисел, так и сумма двух иррациональных чисел может быть и иррациональной, и рациональной. Поскольку мы уже знаем, что φ — число иррациональное, рациональный отрезок прямой (то есть отрезок единичной длины), разделенный в соответствии с золотым сечением, служит примером последнего случая, хотя Платон этого, возможно, и не знал. Некоторые ученые придерживаются той точки зрения, что Платон интересовался золотым сечением как таковым. В доказательство они приводят слова Прокла Диадоха (ок. 411–485), который в «Комментарии к I книге «Начал» Евклида» пишет: «Евдокс... взяв у Платона начала сечений, разработал множество их видов» (*здесь и далее пер. А. Щетникова*), и полагают, что здесь говорится о том, что Платон (и Евдокс) занимались золотым сечением. Однако такое толкование вызывает серьезные сомнения со второй половины XIX века, когда многие исследователи сделали вывод, что слово «сечение», вероятно, не имеет здесь никакого отношения к золотому сечению — Прокл говорит о сечениях геометрических тел или вообще о разделении отрезков. Так или иначе, не приходится сомневаться, что основы для того, чтобы сформировать понятие о золотом сечении и вывести его определение, были заложены в годы, предшествующие открытию Платоновской Академии в 386 г. до н. э., и за время ее существования. Вероятно, ключевой фигурой и движущей силой при выведении теорем, относящихся к золотому сечению, был Теэтет (ок. 417 г. — ок. 369 г. до н. э.), который, согласно византийской энциклопедии «Суды», «первым построил пять так называемых правильных геометрических тел». Математик Папп, живший в IV веке, пишет, что Теэтет к тому же «отличал соизмеримые длины от несоизмеримых». Теэтет не принадлежал к Академии непосредственно, однако наверняка поддерживал с ней неофициальные связи.

В диалоге «Тимей» Платон берет на себя сложнейшую задачу — рассказывает о происхождении и устройстве космоса. В частности, он пытается объяснить структуру материи на примере пяти правильных многогранников, которые уже были в некоторой степени изучены пифагорейцами и подробно — Теэтетом. Пять платоновых тел (рис. 20) отличаются следующими свойствами: это единственные геометрические тела, у каждого из которых все грани — равные и равносторонние и которые можно вписать в сферу (то есть поместить все их вершины на поверхность сферы). Платоновы тела — это тетраэдр (рис. 20, *a*, с четырьмя гранями в виде равносторонних треугольников), куб (рис. 20, *b*, шесть квадратных граней), октаэдр (рис. 20, с, восемь треугольных граней), додекаэдр (рис. 20, *d*, двенадцать граней в виде правильных пятиугольников) и икосаэдр (рис. 20, *e*, двадцать треугольных граней).


(a) (b) (c)

(d) (e)

Рис. 20

Платон свел воедино идеи Эмпедокла (ок. 490–430 гг. до н. э.), согласно которому материя состоит из четырех стихий — земли, воды, огня и воздуха, —

и «атомарную» теорию материи (существование невидимых частиц), которую выдвинул Демокрит из Абдеры (ок. 460 г. – ок. 370 г. до н. э.). «Единая» теория Платона предполагала, что каждой из четырех стихий соответствует своя фундаментальная частица и одно из платоновых тел. Надо понимать, что за исключением некоторых подробностей, пусть и заметных, основная идея, на которой основана теория Платона, не слишком отличается от того, как формулировал суть современной химии в XIX веке Джон Дальтон. Согласно Платону, стихия земли связана с устойчивым кубом, «всепроникающее» свойство огня — с относительно простым заостренным тетраэдром, воздух с его «подвижностью» — с октаэдром, а многоликая вода — с многогранным икосаэдром. А пятый правильный многогранник — додекаэдр — символизирует по Платону (или Тимею) Вселенную в целом или, по его словам, «его бог определил для Вселенной и прибегнул к нему в качестве образца» (*пер. С. Аверинцева*). Вот почему художник Сальвадор Дали решил включить в композицию своей «Тайной Вечери» парящий над столом огромный додекаэдр (см. рис. 5).

Некоторые последователи Платона никак не могли примириться с отсутствием фундаментальной стихии, которая была бы связана с додекаэдром, и кое-кто постулировал существование пятой стихии. Например, Аристотель считал, что пятая вселенская стихия (квинтэссенция) — это эфир, материал, из которого созданы небесные тела и который, по мнению Аристотеля, пронизывал всю Вселенную. Аристотель утверждал, что пятая стихия, пронизывающая всю материю, обеспечивает движение и изменение в соответствии с законами природы. Идея субстанции, пропитывающей пространство и служащей средой для распространения света, доминировала в науке вплоть до 1887 года, когда американский физик Альберт Абрахам Майкельсон и химик Эдвард Уильямс Морли провели свой знаменитый опыт и доказали, что такой среды не существует (согласно современной теории света, она и не нужна). В сущности, в ходе опыта ученые измерили скорость двух лучей света, направленных в разные стороны. Ожидалось, что поскольку Земля движется сквозь эфир, скорости двух лучей окажутся разными, однако опыт однозначно показал, что это не так. Результат опыта Майкельсона-Морли натолкнул Эйнштейна на поиски теории относительности.

Затем события приняли неожиданный поворот: в 1998 году две группы астрономов обнаружили, что наша Вселенная не просто расширяется (что уже доказал астроном Эдвин Хаббл в двадцатые годы), но расширяется *с ускорением*. Это открытие вызвало настоящее потрясение, поскольку астрономы, естественно, полагали, что расширение должно замедляться из-за силы тяготения. Ведь если бросить мяч вверх, стоя на поверхности Земли, его движение будет замедляться, поскольку на него действует сила тяготения, которая в конце концов и заставит его изменить направление движения на противоположное, — так и сила тяготения всей материи во Вселенной, казалось бы, должна замедлить скорость космического расширения. Открытие, что расширение не замедляется, а ускоряется, наводит на мысль о существовании какой-то «темной энергии», которая проявляется как отталкивающая сила, которая в нашей нынешней Вселенной пересиливает силу тяготения. Физики еще спорят о том, каков источник и природа этой «темной энергии». Согласно одной гипотезе эта энергия связана с квантовым полем, пронизывающим весь космос наподобие знакомого нам электромагнитного поля. Это поле очень похоже на невидимую среду Аристотеля и даже иногда называется «квинтэссенция». Кстати, в научно-фантастическом фильме Люка Бессона «Пятый элемент» «пятой стихией» — «квинтэссенцией» — была названа сила самой жизни, то, что оживляет неживое.

Теория Платона отнюдь не сводилась к символической связи фигур и стихий. Он отметил, что грани первых четырех правильных многогранников можно составить из двух видов прямоугольных треугольников: равнобедренного, с углами $45^\circ - 90^\circ - 45^\circ$, и треугольника с углами $30^\circ - 90^\circ - 60^\circ$. Далее Платон объясняет, как при помощи этих свойств можно объяснить основные «химические реакции». Например, согласно платоновой «химии», когда огонь нагревает воду, получается две частицы пара (воздуха) и одна частица огня. Формулу этой реакции можно записать так:

$$[\text{вода}] \rightarrow 2\,[\text{воздух}] + [\text{огонь}]$$

А если сбалансировать количество участвующих в реакции граней платоновых тел, которые соответствуют этим стихиям, то получится $20 = 2 \times 8 + 4$. Хотя это, конечно, никак не соответствует современному пониманию структуры материи, основная идея, что большинство фундаментальных частиц в нашей Вселенной и их взаимодействия можно описать математической теорией, которой свойственна некоторая симметрия, — краеугольный камень современных исследований в области физики частиц.

Сложные явления, которые мы наблюдаем во Вселенной, для Платона не играли существенной роли: он считал, что подлинно фундаментальна именно лежащая в их основе симметрия, а она не меняется. Это представление отнюдь не противоречит современным представлениям о законах природы. Ведь эти законы, в частности, одинаковы во всех уголках Вселенной. По этой причине законы, которые мы выводим из лабораторных экспериментов, можно применить, скажем, при изучении атома водорода и здесь, на Земле, и в галактике, лежащей в миллиардах световых лет от нас. Эта симметрия законов природы проявляется и в том, что величина, которую мы называем *импульсом* (равная произведению массы тела и его скорости и имеющая направление), сохраняется, то есть имеет одно и то же значение что сегодня, что через год. Подобным же образом, поскольку законы природы с течением времени не меняются, сохраняется и величина, которую мы называем энергией. Энергию невозможно получить из ничего. Вот почему современные теории, основанные на симметриях и на законах сохранения, — законы подлинно платонические.

Вероятно, интерес к многогранникам у пифагорейцев был первоначально вызван наблюдениями над кристаллами пирита в Южной Италии, где находилась пифагорейская школа. Кристаллы пирита, он же серный колчедан, часто имеют в форму додекаэдра. Однако платоновы тела, их красота и математические свойства поражали воображение ученых и спустя много столетий после Платона — и упоминания о них мы встречаем в самых неожиданных местах. Например, в научно-фантастическом романе Сирано де Бержерака (1619–

1655) «Иной мир» автор строит летательный аппарат в виде икосаэдра, чтобы сбежать из башни, где он заточен, и приземлиться на Солнце.

Золотое сечение, число φ, играет важнейшую роль в пропорциях и симметрических свойствах некоторых платоновых тел. В частности, додекаэдр с длиной ребра (места, где сходятся две грани) в одну единицу, имеет площадь поверхности в $15\times\varphi/(\sqrt{3-\varphi})$ и объем $5\times\varphi^3/(6-2\times\varphi)$. Подобным же образом икосаэдр с длиной ребра в одну единицу имеет объем $(5\times\varphi^5)/6$.

Из симметрии платоновых тел можно вывести интересные следствия. Например, у куба и октаэдра одинаковое число ребер — 12, — однако число граней и вершин взаимно обратное — у куба шесть граней и восемь вершин, а у октаэдра восемь граней и шесть вершин. То же самое можно сказать о додекаэдре и икосаэдре — у обоих по 30 ребер, но у додекаэдра 12 граней и 20 вершин, а у икосаэдра — наоборот. Это симметрическое сходство платоновых тел позволяет очень интересно вписывать правильный многогранник в его «двойник». Если соединить центры граней куба, получится октаэдр (рис. 21), а если соединить центры граней октаэдра, получится куб. Ту же самую процедуру можно проделать, чтобы вписать икосаэдр в додекаэдр и наоборот — а соотношение длин ребер каждого многогранника (одного в другом) опять же можно выразить при помощи золотого сечения: это $\varphi^2/\sqrt{5}$. А тетраэдр — сам себе «двойник»: если соединить

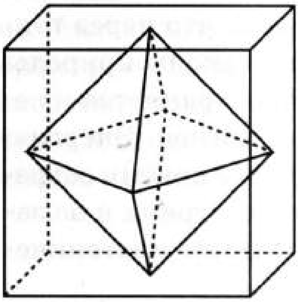


Рис. 21

четыре центра граней тетраэдра, получится другой тетраэдр.

Хотя в античности были известны не все свойства платоновых тел, ни от Платона, ни от его последователей не скрылась их красота. В некотором смысле даже трудности при построении этих фигур, которые поначалу возникали (пока не были выведены методы, связанные с золотым сечением), можно считать их имманентными свойствами. Ведь последние слова диалога «Гиппий Больший» гласят: «Прекрасное — трудно». Греческий историк Плутарх (ок. 46 – ок. 120) в своем сочинении «Об упадке оракулов» пишет: «Пирамида [тетраэдр], октаэдр, икосаэдр, додекаэдр, все первоначальные фигуры, которые предсказывает Платон, прекрасны благодаря симметрии и равенствам в их отношениях, и ничего лучше и даже ничего сопоставимого с ними Природа не создала».

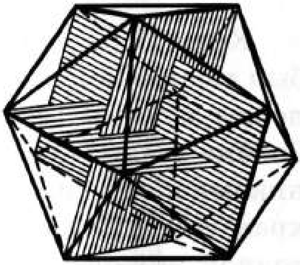


Рис. 22

Как уже упоминалось, икосаэдр и додекаэдр тесно связаны с золотым сечением, и связей этих несколько. Например, 12 вершин икосаэдра можно объединить в три группы по четыре, и вершины из каждой группы будут лежать на углах золотого прямоугольника, то есть прямоугольника, у которого длины сторон соотносятся как φ. Прямоугольники перпендикулярны друг другу, а единственная их общая точка лежит в геометрическом центре икосаэдра (рис. 22). Подобным же образом центры 12 пятиугольных граней додекаэдра можно объединить в три группы по четыре, и каждая из этих групп также составит золотой прямоугольник. Тесные связи между некоторыми плоскими фигурами, скажем, правильным пятиугольником и пентаграммой, и золотым сечением привели к неизбежному выводу, что интерес греков к золотому сечению начался, вероятно, с попыток построить подобные плоские фигуры и геометрические тела. Подобные математические изыскания велись примерно в начале IV века до н. э. Однако до нас дошли и многочисленные утверждения, что на основе золотого сечения создан и архитектурный проект Парфенона, который был построен и украшен в 447–432 годах до н. э., в правление Перикла. Насколько обоснованны подобные заявления?

Обитель Девы

Храм Парфенон (по-гречески «Обитель Девы») был выстроен на Афинском Акрополе для отправления культа Афины Парфенос (Афины Девы). Зодчих звали Иктин и Калликрат, а Фидию с учениками и помощниками было поручено обеспечить храм скульптурами. Фронтоны с западной и восточной стороны здания украшали скульптурные группы. На одной из них изображалось рождение Афины и состязание между Афиной и Посейдоном. Со своей кажущейся простотой Парфенон по сей день остается одним из прекраснейших шедевров архитектуры, идеалом единства и ясности линий. Двадцать шестого сентября 1687 года при попытке отбить Афины у Османской Империи Парфенон был разрушен прямым попаданием венецианского снаряда; турки устроили в храме пороховой склад. Разрушения были очень велики, однако основная конструкция здания осталась нетронутой.

Генерал Кёнигсмарк, сопровождавший главнокомандующего, вспоминал: «Как огорчила его светлость гибель прекрасного храма, простоявшего три тысячи лет!» В дальнейшем, особенно после окончания турецкого владычества (в 1830 году), были предприняты многочисленные попытки выявить математические и геометрические принципы, которые, предположительно, легли в основу проекта Парфенона и обеспечили его совершенную красоту. В большинстве книг о золотом сечении утверждается, что параметры Парфенона — когда треугольные фронтоны были еще целы — идеально соответствовали золотому прямоугольнику. Обычно в доказательство приводят чертеж наподобие того, что мы видим на рис. 23. Считается, что золотое сече-

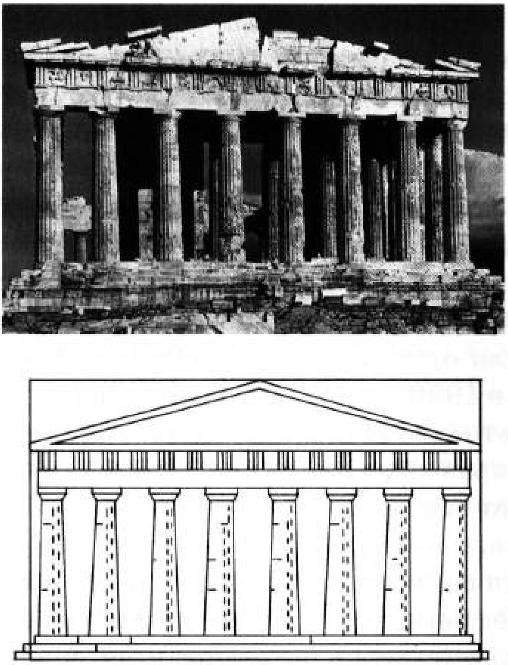


Рис. 23

ние соблюдено и в других параметрах Парфенона. Например, одна из самых дотошных монографий о золотом сечении — «Золотое сечение» Адольфа Цайзинга (*Adolph Zeising*. Der Goldener Schnitt, 1884) — сообщает, что высота фасада от вершины тимпана (внутреннего поля фронтона) до подножия пьедестала под колоннами разделяется вершиной колонн в соответствии с золотым сечением. Это утверждение повторяется во множестве книг, в том числе, например, в достаточно известном и авторитетном труде Матилы Гика «Золотое сечение» (*Matila Ghyka*. Le Nombre d'or, 1931). Другие авторы, например, Милутин Бориссавлевич в книге «Золотое сечение и научная эстетика архитектуры» (*Miloutine Borissavlievitch*. The Golden Number and the Scientific Aesthetics of Architecture, 1958), хотя и не отрицают наличие числа φ в дизайне Парфенона, предполагают, что своей красотой и гармонией храм обязан скорее правильному ритму, который обеспечивается повторением одинаковых колонн.

Серьезные сомнения в проявлении золотого сечения в Парфеноне высказал математик из Университета штата Мэн Джордж Марковски в статье «Заблуждения относительно золотого сечения», которая была опубликована в «*College Mathematics Journal*» в 1992 году. Марковски прежде всего указывает на то, что те или иные детали Парфенона (например, края пьедестала под колоннами, рис. 23) неизменно выдаются за границы золотого прямоугольника, однако все горячие сторонники золотого сечения закрывают глаза на это обстоятельство. А главное, параметры Парфенона в разных источниках указываются по-разному — вероятно, потому, что при измерениях использовались разные опорные точки. Это очередной пример подтасовки чисел, которой так часто грешат теории, основанные исключительно на измерениях длин. Лично я отнюдь не убежден, что параметры Парфенона имеют какое бы то ни было отношение к золотому сечению; скажем, если взять за основу числа, которые приводят Марвин Трахтенберг и Изабель Хайман в книге «Архитектура с доисторических времен до постмодернизма» (*Marvin Trachtenberg*, *Isabelle Hyman*. Architecture: From Prehistory to Post-Modernism, 1985), получается вот что. Эти авторы сообщают, что высота Парфенона — 45 футов 1 дюйм, а ширина фасада — 101 фут 3,75 дюйма. Такие величины дают соотношение ширины к высоте примерно в 2,25, то есть очень далеко от золотого сечения — 1,618… Марковски подчеркивает, что даже если бы мы взяли высоту вершины фронтона от пьедестала, на котором стоит череда колонн — а Стюарт Росситер в своей книге «Греция» (*Stuart Rossiter*. Greece, 1977) утверждает, что она составляла 59 футов, — все равно у нас получится соотношение ширины к высоте примерно 1,72, что, конечно, ближе к φ, но все же существенно отличается от него. Другие исследователи также скептически относятся к роли φ в дизайне Парфенона. Кристина Флон в своей книге «Архитектурный атлас мира» (*Christine Flon*. The World Atlas of Architecture, 1984) отмечает, что хотя «вполне вероятно, что некоторые зодчие… хотели бы основывать свои творения на строгой системе соотношений… обобщать было бы неверно».

Так использовалось ли золотое сечение при проектировании Парфенона? Точно сказать трудно. Хотя большинство математических теорем, имеющих касательство к золотому сечению (или к делению «в крайнем и среднем отношении»), видимо, были сформулированы уже после постройки Парфенона, однако пифагорейцы располагали значительными познаниями в этой области. Следовательно, зодчие Парфенона могли бы решить, что его конструкция будет основана на каком-то принципе эстетического канона. Однако это отнюдь не так очевидно, как убеждают нас многие книги, и не очень хорошо подтверждаются размерами, которыми обладает Парфенон в действительности. Учитывалось золотое сечение при строительстве Парфенона или нет, неизвестно, зато мы точно знаем, что сводом всех математических «программ», связанных с золотым сечением и выведенных древними греками в IV веке до н. э., стали «Начала» Евклида, вышедшие в свет примерно в 300 году до н. э. И в самом деле, с точки зрения логики, глубины и последовательности «Начала» издавна считались апофеозом достоверности человеческого познания.

В крайнем и среднем отношении

В 336 году до н. э. двадцатилетний Александр Македонский унаследовал трон, а затем одержал череду блистательных побед, завоевал большую часть Малой Азии, Сирию, Египет и Вавилон и стал правителем Персидской империи. За несколько лет до безвременной смерти — Александр умер в тридцать три года — он основал величайший памятник самому себе: город Александрию в устье Нила.

Александрия располагалась на пересечении трех великих цивилизаций — египетской, греческой и иудейской. В результате она превратилась в незаурядный интеллектуальный центр, просуществовавший много сотен лет и давший жизнь выдающимся открытиям и шедеврам — в том числе «Септуагинте» («переводе семидесяти»), переводу Ветхого Завета на древнегреческий, который, согласно легенде, выполнили 72 переводчика. Работа началась в III веке до н. э. и продолжалась в несколько этапов свыше ста лет.

После смерти Александра власть над Египтом и африканскими владениями Александра получил Птолемей I, и в числе первых его распоряжений было учреждение в Александрии подобия университета (Музейона). В него входила и библиотека; на ее комплектацию были брошены значительные силы, и считается, что в определенный момент в ней хранилось 700 000 книг (некоторые были конфискованы у незадачливых заезжих иностранцев). В первый штат преподавателей Александрийской школы входил и Евклид, автор «Начал», самой прославленной книги за всю историю математики. Хотя Евклид был «автором бестселлера» (по количеству проданных экземпляров «Начала» до XX века уступали лишь Библии), весьма вероятно, что он учился в Афинах у кого-то из учеников Платона. Прокл, в частности, пишет о Евклиде: «Этот муж жил при Птолемее I... Он моложе окружения Платона и старше Эратосфена и Архимеда».

«Начала», тринадцатитомный труд по геометрии и теории чисел, настолько колоссален по размаху, что мы иногда забываем, что Евклид написал еще с десяток книг на самые разные темы — от музыки до механики и оптики. До нас дошли лишь четыре его трактата: «О делении», «Оптика», «Явления» и «Данные». В «Оптике» содержатся некоторые первые исследования перспективы. Едва ли кто-нибудь станет спорить, что «Начала» — величайший и авторитетнейший учебник математики в истории человечества. Рассказывают, что Авраам Линкольн, желая разобраться, что на самом деле значит слово «доказательство» в юридическом контексте, изучал «Начала» в своей хижине в Кентукки. Знаменитый английский философ и логик Бертран Рассел описывает в автобиографии свое знакомство с «Началами» Евклида (в одиннадцать лет!) и говорит, что это была «величайшая веха в моей жизни, событие ослепительное, словно первая любовь».

При прочтении «Начал» складывается впечатление, что автор этого труда — человек совестливый, почитающий традиции и очень скромный. Евклид нигде не пытается присвоить себе чужие мысли и достижения. В сущности, он вообще не претендует на оригинальность, несмотря на совершенно очевидный факт, что он предлагает множество новых доказательств, совершенно иначе организует знания, которым другие ученые посвятили целые тома, и самостоятельно продумывает структуру своего труда. Дотошность, честность и скромность Евклида снискали восхищение Паппа Александрийского, который около 340 года н. э. составил «Математическое собрание» — бесценный обзор многих аспектов греческой математики.

В «Началах» Евклид делает попытку охватить основную часть всего свода математических знаний своего времени. Книги I–VI посвящены геометрии плоских фигур, которую мы теперь изучаем в школе и которая получила название в честь Евклида — евклидова геометрия. Из них в книгах I, II, IV и VI говорится о линиях и плоских фигурах, в книге III собраны теоремы об окружности, а в книге V подробно рассказывается о следствиях из предположения, которое сделал Евдокс Книдский (408–

355 г. до н. э.). Книги VII–X посвящены теории чисел и основам арифметики. В частности, в книге X подробно рассказывается об иррациональных числах, и ее содержание в основном посвящено трудам Теэтета. В книге XI излагаются основы стереометрии, в книге XII, где в основном разобраны труды Евдокса, дана теорема о площади круга, а в книге XIII, также основанной на трудах Теэтета, рассказано, как построить пять платоновых тел.

Еще в античности к «Началам» писали комментарии — этим занимались Герон (I в. н.э.), Папп (IV в.) и Прокл (V в.) — все из Александрии — и Симпликий Афинский (VI в.). В IV в. н.э. появилась новая редакция труда, выполненная Теоном Александрийским; именно с нее делались все переводы вплоть до XIX века, когда в Ватикане была обнаружена рукопись с несколько иным текстом. В Средние века «Начала» трижды переводили на арабский. Первый из переводов выполнил Аль-Хаджжадж ибн Юсуф по заказу халифа Гарун-аль-Рашида (правил в 786–809 гг.), о котором мы знаем по сказкам из «Тысячи и одной ночи». В Европе «Начала» стали известны в латинских переводах арабской версии. Арабский текст получил в свое распоряжение английский монах-бенедиктинец Аделард (Аделяр) Батский (ок. 1070–1145), который, как рассказывают, путешествовал по Испании, называясь студентом-магометанином; около 1120 года он выполнил перевод на латынь. Этот перевод лег в основу всех европейских изданий вплоть до XVI века. Затем последовали переводы на многие современные языки.

Сам Евклид, вероятно, и не был величайшим математиком в истории, однако нет никаких сомнений, что как преподавателю математики ему не было и нет равных. Его учебником практически в неизменном виде пользовались больше двух тысяч лет, до середины XIX века. Даже сыщик Шерлок Холмс, плод воображения Артура Конан-Дойла, в «Этюде в багровых тонах» утверждает, что его выводы, сделанные методом дедукции, «безошибочны, как теоремы Евклида» (*пер. Н. Треневой*).

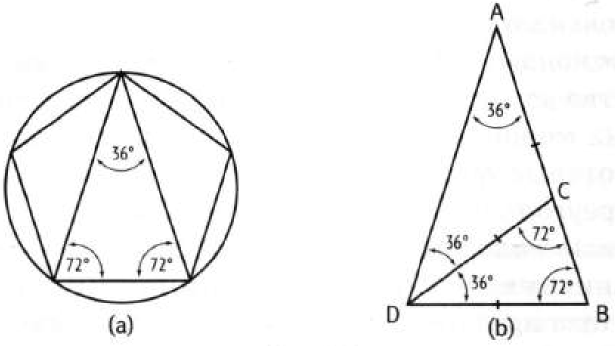
Речь о золотом сечении заходит в «Началах» несколько раз. Первое определение золотого сечения («в крайнем и среднем отношении») мы встречаем в книге II, где оно применяется к площадям и о нем говорится несколько расплывчато. Второе, более четкое определение — применительно к пропорциям — дано в книге VI. Евклид опирается на золотое сечение, в частности, при построении правильного пятиугольника (в книге IV), додекаэдра и икосаэдра (в книге XIII).

Рис. 24

Давайте при помощи самой простой геометрии изучим определение Евклида и поймем, почему золотое сечение играет такую важную роль в построении пятиугольника. На рис. 24 изображен отрезок AB, разделенный на две части точкой C. Евклидово определение из книги IV, где говорится о крайнем и среднем отношении, означает, в сущности, что (длинная часть) / (короткая часть) = (целый отрезок/длинная часть). Иначе говоря, на рис. 24:

$$AC/CB=AB/AC$$

Так как же подобное деление отрезка связано с пятиугольником? У любой правильной плоской фигуры (то есть с равными сторонами и внутренними углами, такие фигуры еще называют правильными многоугольниками) сумма углов равна $180\times(n-2)$, где n — число сторон. Например, у треугольника $n=3$, и сумма всех углов равна 180 градусам. У правильного пятиугольника $n=5$, и сумма всех углов, следовательно, равна 540 градусов. Значит, каждый угол правильного пятиугольника равен $540/5=108$ градусов. А теперь представим себе, что мы проводим из одного угла пятиугольника две диагонали, как на рис. 25, *a*, и у нас получается три равнобедренных треугольника. Поскольку два угла при основании любого равнобедренного треугольника равны, углы при основании треугольников по бокам равны 36 градусов каждый: (180−108)/2.



(a) (b)

Рис. 25

Поэтому получается, что углы среднего треугольника равны 36–72–72, как помечено на рис. 25, *a*. Если разделить любой из 72-градусных углов при основании треугольника (как на рис. 25, *b*) биссектрисой, получится маленький треугольник *DBC* с такими же углами (36–72–72), как и большой треугольник *ADB*. При помощи самой элементарной геометрии мы можем показать, что по определению Евклида точка C делит сторону AB в золотом сечении. Более того, отношение AD к DB также равно золотому сечению (краткое доказательство приводится в Приложении 4). Иначе говоря, отношение длины диагонали к длине стороны у правильного пятиугольника равно числу φ. Этот факт показывает, что умение разделить отрезок в золотом сечении дает нам еще и простой способ построить правильный пятиугольник. Необходимость построить правильный пятиугольник и была главной причиной интереса древних греков к золотому сечению. Треугольник, который на рис. 25,*а* находится в середине — с отношением стороны к основанию, равным φ — известен также как *золотой треугольник*, а два треугольника по сторонам от него, у которых отношение стороны к основанию равно 1/φ, называют иногда *золотыми гномонами*. Рис. 26 иллюстрирует уникальное свойство золотых треугольников и золотых гномонов: их можно рассекать на треугольники поменьше, которые также будут представлять собой золотые треугольники и золотые гномоны.

Связь золотого сечения с правильными пятиугольниками, пятисторонняя симметрия и платоновы тела представляют интерес сами по себе, и их, конечно, было бы более чем достаточно, чтобы возбудить любознательность древних греков. Пифагорейцы были прямо-таки очарованы правильным пятиугольником и пентаграммой, а Платон пристально интересовался правильными многогранниками и был убежден, что они служат отражением фундаментальных вселенских сущностей; поэтому поколения математиков, не покладая рук, трудились над формулировкой многочисленных теорем, имеющих отношение к φ. Однако золотое сечение никогда не заняло бы такого видного места и не снискало бы почтения на грани поклонения, если бы не некоторые его алгебраические свойства, поистине уникальные. Но чтобы понять, каковы эти свойства, нам нужно сначала точно вычислить значение φ.

Снова рассмотрим рис. 24; возьмем длину короткой части CB за единицу, а длину длинной части AC за x единиц. Если отношение x к 1 таково же, как $(x+1)$ — то есть длины отрезка AB — к x, значит, отрезок разделен в крайнем и среднем отношении. Мы можем легко найти значение x в золотом сечении. По определению крайнего и среднего отношения

$$\frac{x}{1} = \frac{(x+1)}{x}.$$

Умножим обе части на x; тогда у нас получится $x^2 = x+1$, или простое квадратное уравнение

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Если вы вдруг подзабыли, как решать квадратные уравнения, в Приложении 5 приведена краткая памятка. Два корня уравнения золотого сечения равны

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Положительный корень $x_1 = (1+\sqrt{5})/2 =$ 1,6180339887... и дает нам значение золотого сечения. Теперь очевидно, что число φ — иррациональное, поскольку представляет собой половину суммы $1+\sqrt{5}$. Тут можно сразу заподозрить, что у этого числа есть интересные свойства; для этого нам понадобится простой карманный калькулятор. Введите число 1,6180339887 и нажмите клавишу $[x^2]$. Ну как, ничего удивительного не замечаете? Теперь снова введите то же самое число и на сей раз нажмите клавишу $[1/x]$. Поразительно, правда? Квадрат числа 1,6180339887... дает 2,6180339887..., его обратное число («один к x») равно 0,6180339887... — знаки после запятой полностью совпадают! Золотое сечение обладает уникальными свойствами — чтобы получить его квадрат, достаточно прибавить к нему 1, а чтобы получить число, ему обратное, — вычесть 1. Кстати, отрицательный корень уравнения $x_2=(1-\sqrt{5})/2$ равен в точности $-1/\varphi$.

Пол С. Брукманс из города Конкорд в штате Калифорния в 1977 году опубликовал в журнале «*Fibonacci Quarterly*» забавный стишок под названием «*Constantly Mean*», что можно перевести и как «Постоянное Среднее» (здесь он называет золотое сечение золотым средним):

Закономерность этого числа
терзает мир давно:
Как дробь простая нам никак
не представляется оно.
Ах, это иррационально? Да!
Быть может, и безумно? Нет!
Уверенно даю ответ.

Но числам иррациональным не чета
Та странная загадка, пустячок и ерунда,
Что «золотая середина» называют чинно.
На вид она проста и вроде бы невинна.

Однако — погляди, попробуй-ка переверни ее!
Получишь ты ее же самоё,
Уменьшенную ровно на один, —
Такой забавный есть у мирозданья клин.

А если фокус провернешь другой,
Прибавив к ней же единицу,
Она своим квадратом обратится.
Вот так. Могу лишь покачать я головой.

(Пер. М. Федоровой)

Итак, мы получили алгебраическое выражение золотого сечения и теперь можем, в принципе, вычислить его с высокой точностью. Именно это и проделал М. Берг в 1966 году, когда он за 20 минут на большом компьютере *IBM* 1401 вычислил число φ с точностью до 4599 знака после запятой (результат был опубликован в «*Fibonacci Quarterly*»). Сегодня можно проделать то же самое практически на любом персональном компьютере меньше чем за две секунды. Более того, в декабре 1996 года золотое сечение было вычислено до десятимиллионного знака после запятой, и ушло на это около получаса. Для подлинных любителей интересных чисел на следующем развороте приведено значение числа φ до 2000 знака после запятой (справа для удобства — указаны номера десятичных позиций).

Конечно, все вышеприведенные свойства числа φ весьма интересны, однако читатель вправе решить, что они едва ли оправдывают звание «золотого» или «божественного» числа — и будет, конечно, прав. Однако пока что мы лишь стоим на пороге поразительных чудес.

Значение числа φ до 2000 знака после запятой

1,61803	39887	49894	84820	45868	34365	63811	77203	09179	80576	*50*
28621	35448	62270	52604	62818	90244	97072	07204	18939	11374	*100*
84754	08807	53868	91752	12663	38622	23536	93179	31800	60766	
72635	44333	89086	59593	95829	05638	32266	13199	28290	26788	*200*
06752	08766	89250	17116	96207	03222	10432	16269	54862	62963	
13614	43814	97587	01220	34080	58879	54454	74924	61856	95364	*300*
86444	92410	44320	77134	49470	49565	84678	85098	74339	44221	
25448	77066	47809	15884	60749	98871	24007	65217	05751	79788	*400*
34166	25624	94075	89069	70400	02812	10427	62177	11177	78053	
15317	14101	17046	66599	14669	79873	17613	56006	70874	80710	*500*
13179	52368	94275	21948	43530	56783	00228	78569	97829	77834	
78458	78228	91109	76250	03026	96156	17002	50464	33824	37764	
86102	83831	26833	03724	29267	52631	16533	92473	16711	12115	
88186	38513	31620	38400	52221	65791	28667	52946	54906	81131	
71599	34323	59734	94985	09040	94762	13222	98101	72610	70596	
11645	62990	98162	90555	20852	47903	52406	02017	27997	47175	
34277	75927	78625	61943	20827	50513	12181	56285	51222	48093	
94712	34145	17022	37358	05772	78616	00868	83829	52304	59264	
78780	17889	92199	02707	76903	89532	19681	98615	14378	03149	

97411	06926	08867	42962	26757	56052	31727	77520	35361	39362	*1000*
10767	38937	64556	06060	59216	58946	67595	51900	40055	59089	
50229	53094	23124	82355	21221	24154	44006	47034	05657	34797	
66397	23949	49946	58457	88730	39623	09037	50339	93856	21024	
23690	25138	68041	45779	95698	12244	57471	78034	17312	64532	
20416	39723	21340	44449	48730	23154	17676	89375	21030	68737	
88034	41700	93954	40962	79558	98678	72320	95124	26893	55730	
97045	09595	68440	17555	19881	92180	20640	52905	51893	49475	
92600	73485	22821	01088	19464	45442	22318	89131	92946	89622	
00230	14437	70269	92300	78030	85261	18075	45192	88770	50210	
96842	49362	71359	25187	60777	88466	58361	50238	91349	33331	
22310	53392	32136	24319	26372	89106	70503	39928	22652	63556	
20902	97986	42472	75977	25655	08615	48754	35748	26471	81414	
51270	00602	38901	62077	73224	49943	53088	99909	50168	03281	
12194	32048	19643	87675	86331	47985	71911	39781	53978	07476	
15077	22117	50826	94586	39320	45652	09896	98555	67814	10696	
83728	84058	74610	33781	05444	39094	36835	83581	38113	11689	
93855	57697	54841	49144	53415	09129	54070	05019	47754	86163	
07542	26417	29394	68036	73198	05861	83391	83285	99130	39607	
20144	55950	44977	92120	76124	78564	59161	60837	05949	87860	
06970	18940	98864	00764	43617	09334	17270	91914	33650	13715	*2000*

Сокровищница сюрпризов

Всем знакомо это восхитительное чувство, когда мы приходим на вечеринку, где, как мы были твердо убеждены, никого не знаем, и вдруг узнаем лицо старого друга. Такой же наплыв эмоций возникает, когда на выставке сворачиваешь за угол и вдруг видишь свою любимую картину. Близкие устраивают нам приятные сюрпризы именно потому, что нежданная радость многим из нас приносит колоссальное удовольствие. А у математики и, в частности, у золотого сечения в запасе полным-полно сюрпризов.

Представьте себе, что мы хотим вычислить значение вот такого необычного выражения, состоящего из бесконечного числа квадратных корней:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

Как тут вообще подступиться к ответу? Есть один довольно-таки громоздкий метод: сначала вычислить $\sqrt{1+\sqrt{1}}$, что даст нам $\sqrt{2}=1,414\ldots$, затем вычислить $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$ и т. д., уповая на то, что рано или поздно значения начнут быстро сходиться к какому-то числу. Но ведь, возможно, есть и другой метод вычисления, проще и изящнее. Обозначим искомую величину x. Тогда у нас получается

$$x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

Теперь возведем в квадрат обе части равенства. В левой получим x^2, а при возведении в квадрат правой части мы просто уберем тот квадратный корень, под которым стоит все выражение (по определению квадратного корня), и получим

$$x^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$$

Однако обратите внимание, что поскольку выражение в правой части нашего равенства тянется до бесконечности, оно равно нашему первоначальному x. Поэтому у нас получается квадратное уравнение: $x^2=1+x$. Но ведь это и есть равенство, которое описывает золотое сечение! А следовательно, мы выяснили, что наше бесконечное равенство в точности равно числу φ!

А теперь рассмотрим совсем другое бесконечное выражение, на сей раз — с дробями:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

Это особое математическое понятие, известное как *цепная* или *непрерывная* дробь; такие дроби довольно часто используются в теории чисел. Как же нам подсчитать значение этой непрерывной дроби? В принципе, можно понемногу отсечь единицы снизу доверху, надеясь нащупать предел, к которому сходится непрерывная дробь. Однако опыт уже научил нас, что лучше начать с того, чтобы приравнять это выражение к x. Итак,

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

Однако отметим, что поскольку непрерывная дробь тянется бесконечно, знаменатель второго слагаемого в правой части равен x. И вот мы получаем выражение

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

Умножим обе части на x — и получим $x^2 = 1 + x$, а это опять же равенство, определяющее золотое сечение! Смотрите-ка, удивительная непрерывная дробь тоже равна числу φ. Об этом свойстве тоже упоминается в стихотворении Пола С. Брукманса:

> *Цепная дробь получится красивой!*
> *Она из единиц, и единиц и... снова единиц!*
> *И вроде проще нет ее:*
> *ни отклонений, ни извивов,*
> *Но мозг кипит, и я*
> *Едва*
> *Держусь у разума границ.*
>
> (Пер. М. Федоровой)

Поскольку непрерывная дробь, соответствующая золотому сечению, состоит из одних единиц, она очень медленно сходится. В этом отношении золотое сечение «труднее» выразить в виде непрерывной дроби, нежели любое другое иррациональное число: воистину оно самое иррациональное из всех иррациональных чисел!

Теперь оставим бесконечные выражения и обратимся к золотому прямоугольнику с рис. 26. Длины сторон этого прямоугольника соотносятся друг с другом в соответствии с золотым сечением. Теперь предположим, что мы отрезаем от этого прямоугольника квадрат, как показано на рисунке. У нас останется прямоугольник поменьше, и это тоже будет золотой прямоугольник. Габариты этого «производного» прямоугольника меньше, чем у «исходного», с коэффициентом ровно φ. Теперь отрежем квадрат от «производного» золотого прямоугольника — и у нас получится еще один золотой прямоугольник с габаритами, которые опять же меньше с коэффициентом φ. Этот процесс можно продолжать до бесконечности, создавая золотые прямоугольники все меньше и меньше (каждый раз их габариты «сдуваются» на множитель φ). Если бы мы изучали все уменьшающиеся по размеру золотые прямоугольники в лупу, причем брали бы линзу все сильнее и сильнее, они были бы все одинаковые. Золотой прямоугольник — единственный прямоугольник, обладающий таким свойством, что если отрезать от него квадрат, получится подобный прямоугольник. Проведите диагонали в любой паре из «исходного» и «производного» треугольника из этой череды, как на рис. 26, и они все пересекутся в одной точке. К этой недостижимой точке и схо-

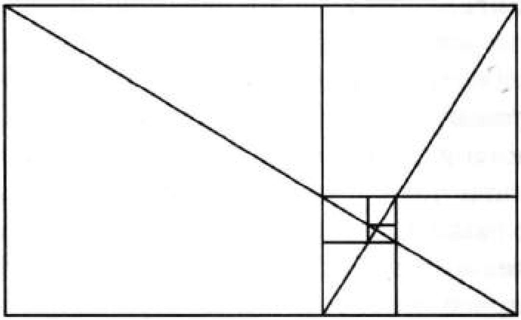


Рис. 26

дятся уменьшающиеся прямоугольники. Благодаря «божественным» качествам, приписываемым золотому сечению, математик Клиффорд А. Пиковер предложил назвать эту точку «Оком Господним».

Если у вас не идет кругом голова при одной мысли, что во всех этих математических обстоятельствах, таких разных, мы приходим к одному и тому же числу φ, возьмите простенький карманный калькулятор, и я покажу вам потрясающий фокус. Выберите два любых числа (число разрядов не имеет значения) и запишите их подряд. Теперь при помощи калькулятора (или в уме) составьте (и запишите) третье число, сумму первых двух. Теперь составьте четвертое число — прибавив к получившейся сумме третье, пятое — прибавив четвертое к третьему, шестое — сложив пятое с четвертым и т. д., пока у вас не получится последовательность из двадцати чисел. Скажем, если первыми числами у вас были 2 и 5, у вас должна получиться последовательность 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131... Теперь при помощи калькулятора поделите двадцатое число на девятнадцатое. Узнаете результат? Разумеется, это φ. К этому фокусу и его «разоблачению» я вернусь в главе 5.

Мрачное Средневековье

Когда Евклид в «Началах» давал определение золотого сечения, его интересовала в первую очередь геометрическая интерпретация этого понятия и его применение в построении правильного пятиугольника и некоторых платоновых тел. Греческие математики следующих столетий вывели еще несколько геометрических результатов, связанных с золотым сечением. Например, в дополнительной книге к «Началам» Евклида (ее иногда так и называют книгой XIV «Начал») содержится важная теорема о додекаэдре и икосаэдре, вписанных в одну и ту же сферу. Текст книги XIV приписывают Гипсиклу Александрийскому, который, вероятно, жил во II веке н. э., однако считается, что в ней содержатся также теоремы Аполлония Пергского (ок. 262–190 до н. э.), одного из трех светил Золотого Века греческой математики (приблизительно 300–200 годы до н. э.) наряду с Евклидом и Архимедом. После этого к изучению золотого сечения возвращались лишь от случая к случаю, и эти исследования были связаны в основном с именами Герона (I в. н. э.), Птолемея (II в. н. э.) и Паппа (IV в. н. э.). Герон в своей «Метрике» предлагает формулы для приближенного вычисления площади поверхности правильного пятиугольника и правильного десятиугольника и объема икосаэдра и додекаэдра, однако умалчивает о том, как эти формулы были получены.

Птолемей (Клавдий Птолемей) жил примерно в 100–179 г. н.э., однако о его жизни практически ничего неизвестно, кроме того, что работал он в основном в Александрии. На основании своих собственных астрономических наблюдений, а также знаний, полученных его предшественниками, Птолемей разработал знаменитую геоцентрическую модель Вселенной, согласно которой солнце и небесные тела вращаются вокруг Земли. Конечно, в рассуждениях Птолемея была фундаментальная ошибка, однако при помощи этой модели удалось объяснить наблюдаемое движение планет (хотя бы в первом приближении), и идеи Птолемея определяли ход мыслей астрономов в течение тринадцати веков.

Собственные астрономические изыскания Птолемей согласовал с выводами других греческих астрономов, в особенности Гиппарха Никейского, и свел весь корпус знаний воедино в своем энциклопедическом тринадцатитомном труде «Великое математическое построение по астрономии», или попросту «Великое» (по-гречески «мегисте»), которое в Европе стало известно под арабизированным названием «Альмагест» — «мегисте» с приставкой «аль-» — определенным артиклем. Кроме того, Птолемею принадлежат важные заслуги и в географической науке, он написал авторитетный труд «Руководство по географии».

В «Альмагесте» и «Руководстве по географии» Птолемей приводит один из самых ранних эквивалентов тригонометрической таблицы для множества углов. В частности, он вычислил длины хорд, соединяющих две точки на окружности под разными углами, в том числе под углами 36, 72 и 108 градусов: эти величины, если вы помните, появляются и в правильном пятиугольнике, а следовательно, тесно связаны с золотым сечением.

Последним великим греческим геометром, который занимался теоремами, связанными с золотым сечением, был Папп Александрийский. В своем «Математическом собрании» (ок. 340 г. н. э.) Папп предлагает новый метод построения додекаэдра и икосаэдра, а также сравнивает объемы платоновых тел, и во всех этих выкладках присутствует золотое сечение. Комментарии Паппа к евклидовой теории иррациональных чисел сохранились в арабских переводах трудов Паппа и прекрасно отражают историческое развитие представлений об иррациональных числах. Однако эти героические усилия остановить общий упадок и разложение математики и, в частности, геометрии оказались безуспешны, и после смерти Паппа интерес к золотому сечению угас на долгие годы, что, впрочем, соответствовало общей тенденции: Запад утратил интерес к науке. Великая Александрийская библиотека была уничтожена в несколько этапов, сначала римлянами, а затем христианами и магометанами. Даже Платоновской Академии пришел конец — это случилось в 529 году, когда византийский император Юстиниан распорядился закрыть все греческие учебные заведения. Последовало мрачное Средневековье, и французский историк и епископ Григорий Турский (538–594) сокрушался, что «ученость среди нас погибла». В сущности, научно-исследовательская жизнь в Европе заглохла, и интеллектуальное первенство осталось за Индией и арабским миром. Знаменательным событием в этот период стало введение так называемых индо-арабских цифр и десятичной позиционной системы счисления. Виднейшим индийским математиком VI века был Ариабхата (476–ок. 550). Самая известная его книга называется «Ариабхатия», и там мы находим следующую фразу: «От разряда к разряду каждое в десять раз больше предыдущего», что свидетельствует о введении разрядов чисел, то есть записи, где важно положение цифры. Сохранилась индийская надпись, относящаяся к 595 году, где содержится запись даты индийскими цифрами в десятичной позиционной системе, а значит, к этому времени подобная запись уже была в ходу. Первым признаком того, что индийские цифры проникают на Запад (хотя тогда они еще не прижились), можно считать их упоминание в трудах Севера Себохта, жившего в Кенешре на реке Евфрат. В 662 году он писал: «Не стану обсуждать индийскую науку... и их ценные методы вычисления, которые превосходят всяческие описания. Скажу лишь, что они производят вычисления посредством девяти знаков».

По мере того, как набирал силу ислам, важным центром математических исследований становился магометанский мир. Если бы не интеллектуальный подъем в мусульманских странах в VIII веке, до нас не дошли бы труды большинства античных математиков. В частности, халиф аль-Мамун (786–853) учредил в Багдаде Бейт аль-хикма («Дом мудрости»), похожий на знаменитый александрийский университет — Музейон. В сущности, Аббасидский халифад по крупицам собирал остатки александрийской учености. Легенда гласит, что калифу во сне явился Аристотель, после чего он решил перевести все греческие ученые труды на арабский.

Важнейшие изыскания магометанских ученых в основном касались алгебры и если и затрагивали золотое сечение, то лишь весьма поверхностно. Тем не менее, следует упомянуть по меньшей мере троих математиков: это аль-Хорезми и Абу Камил Шуджа, жившие в IX веке, и Абу-л-Вафа, живший в X веке.

Мухаммад ибн-Муса аль-Хорезми работал в Багдаде и примерно в 825 году написал здесь книгу, которая считается самым авторитетным трудом по алгебре той эпохи — «Книга восполнения и противопоставления», «*Kitab al-jabr wa al-muqabalah*». От ее названия — «аль-джебр» — пошло привычное для нас название науки «алгебра», поскольку это был первый учебник по этой дисциплине в Европе. Более того, слово «алгоритм», которым называется любой особый метод решения математической задачи при помощи набора определенных шагов-процедур, тоже происходит от искаженного «аль-Хорезми». «Книга восполнения» на несколько столетий стала синонимом теории уравнений. Уравнение, которое требовалось для решения одной задачи, представленной аль-Хорезми, очень похоже на уравнение-определение золотого сечения. Аль-Хорезми говорит: «Я поделил десять на две части; первую я умножил на десять, вторую — на саму себя, и результаты оказались одинаковыми». Неизвестную величину аль-Хорезми обозначил как «шай» — «вещь». Следовательно, первая часть условия вышеприведенной задачи сводится к фразе «умножаешь “вещь” на десять, получается десять “вещей”». Таким образом, первое уравнение выглядит так: $10 \times x = (10 - x)^2$, то есть формула для вычисления меньшей части отрезка длиной в 10 единиц, разделенного в золотом сечении. Вопрос в том, имел ли аль-Хорезми в виду золотое сечение, когда формулировал эту задачу. Под влиянием аль-Хорезми неизвестную стали в ранних латинских работах называть «*res*», а в переводах на итальянский — «*cosa*» («вещь, дело»). Соответственно, алгебра прославилась как «*l'arte della cosa*» («искусство вещи», «искусство неизвестной»). Иногда ее называли также «*ars magna*» — «великое искусство» — в противоположность арифметике, которая считалась не таким великим искусством.

Другой арабский математик, внесший свой вклад в историю золотого сечения, — это Абу Камил Шуджа по прозвищу аль-Хасиб аль-Мисри, что значит «вычислитель из Египта». Родился он около 850 года, вероятно, в Египте, а умер около 930 года. Он написал много книг, некоторые из которых, в том числе «Книга об алгебре», «Книга о редкостях искусства арифметики» и «Книга о геометрии», дошли до нас. Возможно, Абу Камил был первым математиком, который не просто искал решения задачи, а интересовался поиском всех возможных решений. В своей книге «О редкостях искусства арифметики» он даже описывает задачу, к которой нашел 2678 решений! Однако с точки зрения истории золотого сечения главное — что книги Абу Камила стали основой для некоторых книг итальянского математика Леонардо Пизанского, известного под прозвищем Фибоначчи, с которым мы скоро познакомимся. Трактат Абу Камила «О пятиугольнике и десятиугольнике» содержит двадцать задач с решениями, где ученый вычисляет площади фигур, длины их сторон и радиусы описанных вокруг них окружностей. В некоторых этих вычислениях, но не везде, он применяет и золотое сечение. Несколько алгебраических задач из «Алгебры» Абу Камила, вероятно, тоже вдохновлены понятием золотого сечения.

Последний исламский математик, которого мне хочется здесь упомянуть, — Мухаммад Абу-л-Вафа (940–998). Абу-л-Вафа родился в Бузгане на территории современного Ирана и жил в правление династии Буидов в западном Иране и Ираке. Эта династия достигла расцвета в царствование Адуда аль-Давла, который был горячим поклонником и покровителем математики, естественных наук и искусств. Абу-л-Вафа был среди математиков, которых в 959 году пригласили в Багдад ко двору Адуда аль-Давла. В его первом солидном труде — книге «О том, что нужно знать писцам, дельцам и другим в науке арифметики», по словам самого ученого, «содержатся все арифметические знания, которые необходимы ученику, подчиненному или начальнику». Интересно, что хотя сам Абу-л-Вафа был специалистом в применении индийских цифр, весь текст его книги написан вообще без цифр, одними словами, а вычисления проводятся только в уме. К X веку индийские цифры еще не нашли применения в деловых кругах. То, что Абу-л-Вафа интересуется золотым сечением, видно из другой его книги — «О том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений». В этой книге Абу-л-Вафа приводит изобретательные методы построения правильного пятиугольника и десятиугольника, вписывания правильных многоугольников в окружности и в другие многоугольники. Уникальную черту его работы составляет серия задач, которые он решает при помощи линейки (прямой, без делений) и циркуля, в котором угол между ножками зафиксирован (так называемый «ржавый циркуль»). Возможно, на этот жанр ученого вдохновило «Собрание» Паппа, однако не исключено, что такие решения просто отражают подход Абу-л-Вафы к практическим задачам: решения при помощи циркуля с фиксированным углом между ножками более точны.

Книги этих и других арабских математиков несколько углубили знания о золотом сечении, и их открытия сыграли важную, хотя и не очень большую роль. Как часто бывает в науке, подобные подготовительные периоды медленного прогресса необходимы для следующего прорыва. Великий драматург Джордж Бернард Шоу как-то выразил свое представление о прогрессе следующими словами: «Разумный человек приспосабливается к миру; неразумный — упорно пытается приспособить мир к себе. Поэтому прогресс зависит от неразумных людей». В случае золотого сечения квантовый скачок дожидался появления одного из самых выдающихся математиков Средневековой Европы — Леонардо Пизанского.

СЫН ДОБРОЙ МАТЕРИ-ПРИРОДЫ

Девять индийских цифр — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 — и знак 0... позволяют записать любое число, как будет показано ниже.

Леонардо Фибоначчи
(ок. 1170–ок. 1250).

Этими словами Леонардо Пизанский (по-латыни — *Leonardus Pisanus*), известный также как Леонардо Фибоначчи, начал свою первую и самую известную книгу — «*Liber abaci*» («Книгу абака»), увидевшую свет в 1202 году. Ко времени появления этой книги с индо-арабскими цифрами, которыми мы пользуемся сегодня, были знакомы лишь несколько привилегированных европейских интеллектуалов, взявших на себя труд изучить переводы книг аль-Хорезми и Абу Камила. Некоторое время Фибоначчи помогал отцу — отец Леонардо был чиновником по таможенным и торговым делам в городе Беджаи (на территории современного Алжира), а затем путешествовал и по другим средиземноморским странам, в том числе побывал в Греции, Египте и Сирии, так что у него была возможность изучить и сравнить разные системы записи чисел и методы проведения арифметических операций.

В конце концов Фибоначчи пришел к выводу, что индо-арабские цифры, при помощи которых числа записывались в позиционной системе, гораздо лучше всех прочих, и первые семь глав своего труда посвятил объяснениям, что такое индо-арабские цифры и как применять их на практике.

Леонардо Фибоначчи родился в 1170 году в семье дельца и правительственного чиновника по имени Гильельмо. Прозвище Фибоначчи (от латинского «*filius Bonacci*», «сын семьи Боначчи» или «сын доброй матери-природы»), вероятнее всего, придумал историк математики Гийом Либри в примечании к своей книге «История математических наук в Италии», вышедшей в 1838 году (*Guillaume Libri*. Histoire des Sciences Mathematique en Italie), хотя некоторые исследователи считают, что впервые это слово встречается у итальянских математиков конца *XVIII* века. В некоторых рукописях и документах Леонардо называет себя либо Леонардо Биголло (или Леонарди Биголли Пизани), где слово «*Bigollo*» означает что-то вроде «путешественник» или «важное лицо» — на тосканском и венецианском диалектах соответственно. Пиза XII века была оживленным морским портом, через который шла торговля и с материка, и из заморских стран. Дальневосточные специи проходили через Пизу на своем пути в Северную Европу, и их пути пересекались в порту с путями вина, соли и масла, перевозившихся в разные области Италии, Сицилии и Сардинии. В Пизе процветала кожевенная промышленность, козлиные шкуры для которой ввозили из Северной Африки, и по берегам реки Арно, на которой стоит город, часто можно было встретить дубильщиков, обрабатывавших кожи. Также город славился кузнецами и корабелами. Сегодня главная достопримечательность Пизы — покосившаяся башня, строительство которой началось в годы юности Фибоначчи. Очевидно, для всей этой бурной коммерческой деятельности нужна была обширная документация и учет запасов и цен. Несомненно, у Леонардо были возможности наблюдать разнообразных писцов за работой — он видел, как они составляли прейскуранты римскими цифрами и складывали числа на счетах-абаке. Арифметические действия с римскими цифрами — это вам не шутки. Например, чтобы получить сумму 3786 и 3843, нужно сложить MMMDCCLXXXVI и MMMDCCCXLIII. Ну как, громоздко? Это вы еще не пробовали умножать эти числа. Однако пока средневековым дельцам не приходилось выходить за пределы простого сложения и вычитания, им на худой конец годились и римские цифры. Римским цифрам, само собой, недоставало одной фундаментальной составляющей — позиционной системы, такой, в которой число, записанное как 547, на самом деле означает $(5\times10^2)+(4\times10^1)+(7\times10^0)$. Отсутствие позиционного принципа записи в Западной Европе преодолевали при помощи счетов-абака. Вероятно, слово «абак» произошло от древнееврейского слова «*avaq*» — «пыль», поскольку первые вычисления, по всей видимости, производились на доске, посыпанной песком, на которой палочкой выводили цифры. Во времена Фибоначчи это уже были более или менее привычные для нас бухгалтерские счеты с бусинами, которые ездили по проволокам. Разные виды счетов играли роль позиционной системы. У типичных счетов было четыре проволоки, бусины на нижней играли роль единиц, на второй снизу — десятков, на третьей — сотен и на четвертой — тысяч. Так что хотя при простых арифметических операциях счеты очень помогали (я был потрясен, когда во время поездки в Москву в 1990 году обнаружил, что на кассе в гостиничном кафе считают на счетах!), для более сложных вычислений они, конечно, совсем не годились. О том, чтобы подсчитать на счетах «миллиарды и миллиарды», о которых пишет популяризатор астрономии Карл Саган, не может быть и речи.

В городе Беджаи в Алжире Фибоначчи познакомился с искусством записи при помощи девяти индийских цифр — вероятно, как он сам выразился, под «блестящим руководством» наставника-араба. Затем Фибоначчи объехал все Средиземноморье, где еще сильнее расширил свой математический кругозор, после чего и решил опубликовать книгу, при помощи которой надеялся шире внедрить индо-арабские цифры в коммерческий обиход. В этой книге Фибоначчи скрупулезно объясняет, как переводить римские числа в новую систему и как производить арифметические операции с новыми цифрами. Он приводит многочисленные примеры, где демонстрируется применение «новой математики» для решения самых разных задач — от коммерческих сделок и заполнения и опорожнения резервуаров до движения судов. В начале книги Фибоначчи счел нужным извиниться перед читателем: «Если я случайно упустил что-то более или менее нужное или относящееся к делу, прошу простить меня, поскольку у всех есть недостатки и невозможно все предусмотреть».

Во многих случаях Фибоначчи давал не одно решение задачи, а несколько и проявлял невероятную гибкость и находчивость при выборе нескольких методов решения. Кроме всего прочего, его алгебра во многом риторична: он объясняет решение словами, а не решает уравнения, как сделали бы мы в наши дни. Приведу прелестный пример одной из задач из «*Liber abaci*» — «Книги счетов» (в том виде, в каком она приведена в чудесной книге Джозефа и Фрэнсис Гиз «Леонардо из Пизы и новая математика Средневековья» — *Joseph and Frances Gies*. Leonard of Pisa and the New Mathematics of the Middle Ages):

> Некий человек, почувствовав, что дни его сочтены, призвал к себе сыновей и сказал: «Поделите мои деньги так, как я скажу». Старшему сыну он сказал: «Тебе причитается 1 безант [золотая монета, чеканившаяся в Византии] и седьмая часть остатка». Второму сыну он сказал: «Возьми 2 безанта и седьмую часть остатка». Третьему сыну он сказал: «Тебе полагается 3 безанта и седьмая часть остатка». После этого он дал каждому сыну на 1 безант больше, чем предыдущему, и седьмую часть оставшихся денег, а последнему — все, что осталось. Тщательно исполнив отцовские распоряжения, сыновья обнаружили, что он разделил свое наследство поровну. Сколько было сыновей и какое было наследство?

Заинтересованный читатель найдет и алгебраическое (современное) решение этой задачи, и риторическое решение Фибоначчи в Приложении 6.

Книга «*Liber abaci*» снискала Фибоначчи значительную известность, и слава о нем дошла до ушей императора Священной Римской империи Фредерика II по прозвищу «*Stupor Mundi*» («Всемирное диво») за покровительство математике и естественным наукам. Фибоначчи пригласили предстать перед императором в Пизе в начале 1220 годов, где один из придворных математиков Иоганн Палермский задал ему целый ряд математических задач — как полагали, очень трудных. Одна из задач гласила: «Найти *рациональное* число [то есть целое число или дробь], такое, что если из его квадрата вычесть 5 или прибавить к его квадрату 5, получатся также квадраты рациональных чисел». Фибоначчи решил все эти задачи весьма изобретательными методами. Затем он описал две из них в короткой книге под названием «*Flos*» («Цветок»), а вышеуказанную привел в прологе к книге «*Liber quadratorum*» («Книга квадратов»), которую посвятил императору. Сегодня мы не можем не восхищаться, что Фибоначчи сумел найти решение вышеуказанной задачи безо всяких компьютеров и калькуляторов, а просто благодаря виртуозному владению теорией чисел: 41/12. И в самом деле, $(41/12)^2+5=(49/12)^2$, а $(41/12)^2-5=(31/12)^2$.

Роль Фибоначчи в истории золотого сечения поистине поражает. С одной стороны, в задачах, где он сознательно прибегает к золотому сечению, он добивается значительного прогресса — пусть и не поразительного. С другой — он сформулировал задачу, которая на первый взгляд не имеет к золотому сечению никакого отношения, однако благодаря этой задаче Фибоначчи радикально расширил сферу применения золотого сечения и углубил его понимание.

Непосредственный вклад в литературу о золотом сечении Фибоначчи сделал своей короткой книгой о геометрии «*Practica Geometriae*» («Практика геометрии»), которая вышла в свет в 1225 году. Там ученый представил новые способы вычисления диагонали и площади правильного пятиугольника, формулы для вычисления длин сторон правильного пятиугольника и правильного десятиугольника по диаметру окружностей, описанных вокруг них и вписанных в них, и формулы для вычисления объемов додекаэдра и икосаэдра, и все это тесно связано с золотым сечением. В решениях этих задач Фибоначчи проявляет глубочайшее понимание евклидовой геометрии. Хотя его математические приемы до определенной степени опираются на работы предшественников, в особенности на труд Абу Камила «О пятиугольнике и десятиугольнике», не приходится сомневаться, что Фибоначчи вывел на новый уровень применение свойств золотого сечения при решении различных геометрических задач. Однако величайшую славу Фибоначчи принесла невинная на вид задача из *«Liber abaci»*, которая и стала главным вкладом ученого в исследования золотого сечения.

Все помыслы кролика — лишь о кроликах

Многие из тех, кто изучал математику, естественные науки или искусства, слышали о Фибоначчи исключительно благодаря следующей задаче из главы XII *«Liber abaci»*.

> Некий человек поместил пару кроликов в огороженное со всех сторон место. Сколько пар кроликов произойдет от этой пары за год, если предположить, что каждый год каждая пара порождает

новую пару, которая еще через месяц становится способна приносить потомство?

Как так вышло, что количество потомков пары кроликов имеет такое важное значение для математики? Ведь задача решается довольно просто. Сначала у нас одна пара. Проходит первый месяц, первая пара порождает еще пару, их становится две.

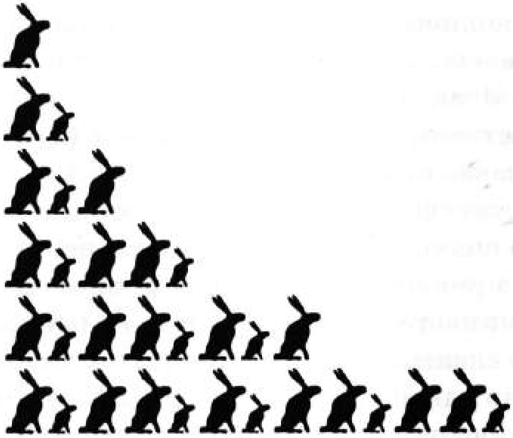


Рис. 27

На рис. 27 пара взрослых кроликов обозначена крупной фигуркой, а пара молодых — мелкой. Проходит второй месяц, взрослая пара порождает еще одну юную пару, а молодая пара тем временем подрастает. Итак, у нас три пары, что и отображено на рисунке. Проходит третий месяц, каждая из двух взрослых пар порождает еще по паре, а юная пара подрастает, итак, у нас уже пять пар. Проходит четвертый месяц, каждая из трех взрослых пар порождает еще по паре, а две юные пары подрастают, следовательно, у нас уже восемь пар. После пяти месяцев у нас по юной паре от каждой из пяти взрослых пар плюс три подрастающие пары — всего тринадцать пар. Теперь мы уяснили закономерность и знаем, как получить число взрослых пар и юных пар и общее число пар кроликов в каждый последующий месяц. Предположим, нас интересует только число взрослых пар в каждый конкретный месяц. Это число состоит из числа взрослых пар в предыдущий месяц плюс количество юных пар (к данному моменту успевших повзрослеть) в тот же предыдущий месяц. Однако количество юных пар месяц назад на самом деле равен количеству взрослых пар в позапрошлом месяце. Итак, в каждый конкретный месяц, начиная с третьего, количество взрослых пар просто-напросто равно сумме количества взрослых пар за два предшествующих месяца. Итак, количество взрослых пар подчиняется последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8... Из рисунка очевидно, что количество юных пар подчиняется в точности той же последовательности со сдвигом на один месяц. То есть количество юных пар равно 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8... Естественно, общее количество пар — сумма этих последовательностей, и оно совпадает с последовательностью для количества взрослых пар без числа за первый месяц (1, 2, 3, 5, 8...). Последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233..., в которой каждое число, начиная с третьего, представляет собой сумму двух предыдущих чисел, в девятнадцатом веке получила название «Числа Фибоначчи»; придумал этот термин французский математик Эдуард Люка (1842–1891). Последовательности чисел, в которых отношение между соседними членами выражаются математической формулой, называются рекурсивными. Числа Фибоначчи — первая известная в Европе рекурсивная последовательность. Общее свойство рис. 27 таково, что каждый член последовательности равен сумме двух предыдущих членов, и математически это выражается следующим образом (формулу предложил в 1654 году математик Альбер Жирар): $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Здесь n — это номер члена последовательности (например, F_5 — это пятый член последовательности), F_{n+1} — это следующий за член последовательности (то есть если $n=5$, то $n+1=6$), а F_{n+2} — это член последовательности, следующий за F_{n+1}.

Фибоначчи так знаменит в наши дни, поскольку применение чисел Фибоначчи отнюдь не сводится к разведению кроликов. Кстати, название этого раздела подсказала цитата из «Естественной истории интеллекта» Ральфа Уолдо Эмерсона, вышедшей в свет в 1893 году. Эмерсон говорит: «Все помыслы черепахи — лишь о черепахах, а кролика — о кроликах». С последовательностью Фибоначчи мы еще встретимся при изучении поразительно разнообразных явлений, на первый взгляд никак не связанных друг с другом.

Для начала рассмотрим явление, пожалуй, предельно далекое от генеалогии кроликов — оптику, науку о том, как распространяются лучи света. Предположим, у нас есть две стеклянные пластины, сделанные из стекла разного сорта (с разными показателями преломления света или «индексами рефракции»), и мы поставили их вплотную друг к другу (как на рис. 28, *а*). Если мы посветим сквозь пластины, лучи света в принципе могут отразиться внутри от четырех отражающих поверхностей и лишь затем выйти наружу (рис. 28, *а*). А точнее, они могут либо пройти сквозь стекло, вообще не отразившись, либо, прежде чем выйти наружу, отразиться внутри конструкции один, два, три и т. д.

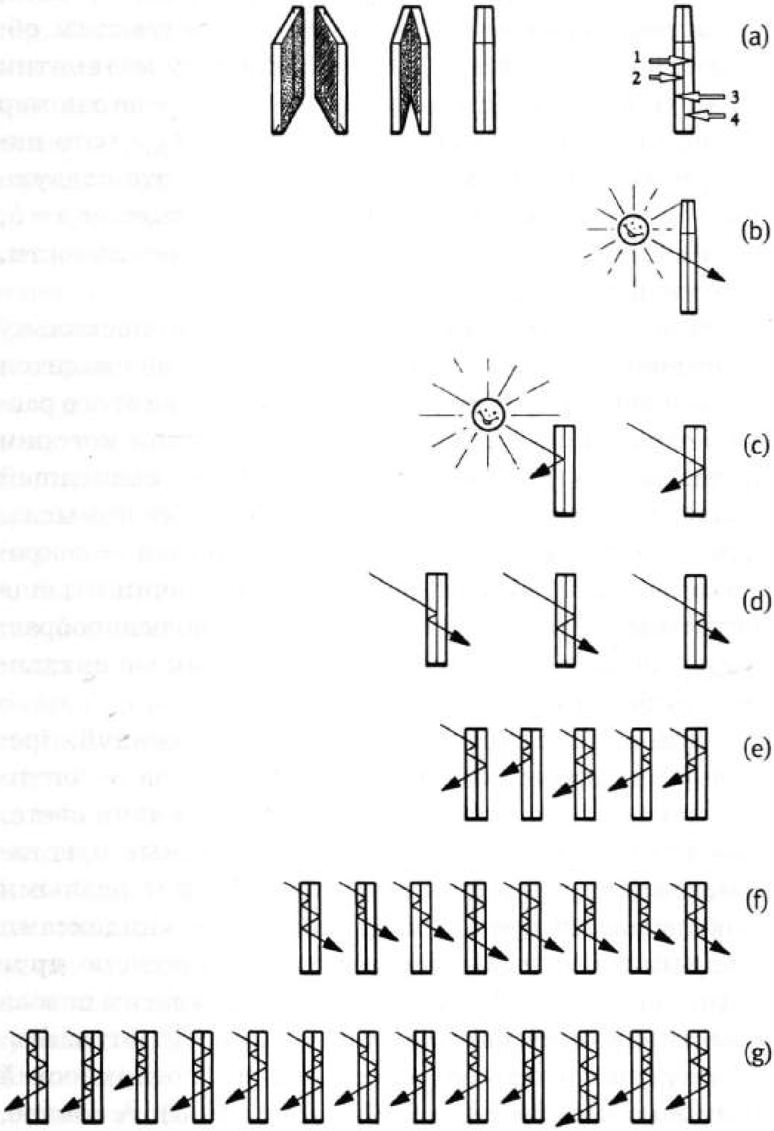


Рис. 28

раз — потенциально число отражений может быть и бесконечным. Законы оптики допускают все варианты развития событий. Если внутренних отражений вообще не было, на выходе будет только один луч (рис. 28, *b*). Если рассмотреть все варианты, при которых лучи претерпевают ровно одно внутреннее отражение (рис. 28, c), на выходе будет два луча, поскольку тогда лучи могут пройти двумя путями. При рассмотрении всех вариантов, когда внутренних отражений будет два, на выходе будет три луча (рис. 28, *d*), пять лучей — для трех внутренних отражений (рис. 28, e), восемь — если луч отразится четырежды (рис. 28, *f*), тринадцать — для пяти отражений (рис. 28, *g*) и т. д. Количество лучей на выходе — 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... — это последовательность Фибоначчи.

А теперь рассмотрим еще одну задачу, совершенно иную. Ребенок взбирается по лестнице. Максимальное количество ступеней, которые он может одолеть за раз, — две; то есть он может за один шаг подняться либо на одну, либо на две ступени. Всего ступеней n. Сколькими способами C_n ребенок может подняться по лестнице? Если ступеней только одна, то есть $n=1$, очевидно, способ только один: $C_1=1$. Если ступеней две, ребенок может либо подняться сразу на две ступеньки, либо преодолеть их по одной, то есть способов два: $C_2=2$. Если ступеней три, способов подняться три: 1 + 1 + 1, 1 + 2, 2 + 1, следовательно, $C_3=3$. Если ступеней четыре, количество способов возрастает до $C_4=5$: 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 2 + *l* + *l*, 2 + 2. Для пяти ступеней способов уже $C_5=8$: *l* + 1 + *l* + *l* + *l*, 1 + 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + 2, 1 + 2 + 2. Оказывается, количество вариантов *l*, 2, 3, 5, 8 ... снова составляет последовательность Фибоначчи.

Наконец, исследуем генеалогическое древо самца пчелы — трутня. В трутней превращаются неоплодотворенные яйца пчел-работниц. То есть у трутня нет отца, только мать. С другой стороны, яйца пчелы-царицы оплодотворяются трутнями, и из них получаются самки (рабочие пчелы или царицы). То есть у рабочей пчелы есть и мать, и отец. Итак, у одного трутня есть один родитель, мать, одна пара бабушек и дедушек — родители матери, двое прабабушек и прадедушка, всего трое (мать и отец бабушки и мать дедушки), пять прапрабабушек и прапрадедушек (двое на каждую прабабушку и мать прадедушки) и т. д. То есть число ветвей на генеалогическом древе трутня составляет 1, 1, 2, 3, 5 — снова последовательность Фибоначчи. Схему такого генеалогического древа см. на рис. 29.

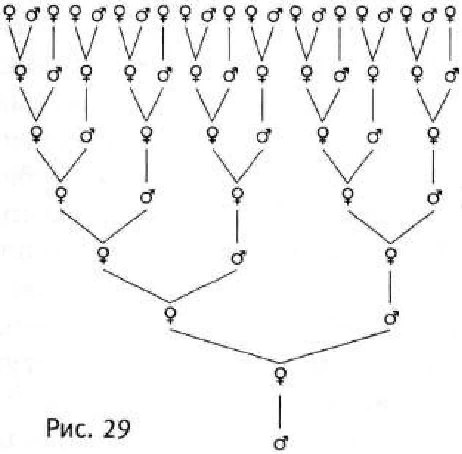


Рис. 29

Все это очень занимательно: одна и та же последовательность чисел относится и к кроликам, и к оптике, и к ступенькам лестницы, и к предкам трутня; но какое отношение числа Фибоначчи имеют к золотому сечению?

Золотые числа Фибоначчи

Снова рассмотрим последовательность Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987 — и на сей раз посмотрим на отношения последовательных членов этого ряда (вычислять будем до шестого знака после запятой):

1/1 = 1,000000
2/1 = 2,000000
3/2 = 1,500000
5/3 = 1,666666
8/5 = 1,6000001
3/8 = 1,625000
21/13 = 1,615385
34/21 = 1,619048
55/34 = 1,617647
89/55 = 1,6180561
44/89 = 1,617978
233/144 = 1,618056
377/233 = 1,618026
610/377 = 1,618037
987/610 = 1,618033

Узнаете это число? Чем дальше мы продвинемся по последовательности Фибоначчи, тем ближе отношение двух соседних чисел Фибоначчи будет колебаться (то чуть больше, то чуть меньше) вокруг золотого сечения, неуклонно приближаясь к нему. Если обозначить n-ный член последовательности Фибоначчи как F_n, а следующий за ним — как F_{n+1}, то суть нашего открытия состоит в том, что чем больше n, тем ближе отношение F_n/F_{n+1} к числу φ. Это свойство чисел Фибоначчи открыл в 1611 году знаменитый немецкий астроном Иоганн Кеплер (а возможно, его опередил неизвестный итальянский математик), однако прошло более ста лет, прежде чем связь между числами Фибоначчи и золотым сечением была доказана, да и то не до конца, шотландским математиком Робертом Симсоном (1687–1768). Кстати, Кеплер, очевидно, открыл последовательность Фибоначчи совершенно самостоятельно, а не из «Книги абака».

Но почему члены последовательности, выведенной из схемы разведения кроликов, подводят нас к соотношению, выведенному из деления отрезка? Чтобы понять эту связь, придется вернуться к поразительной непрерывной дроби, с которой мы познакомились в главе 4. Вспомним, что мы обнаружили, что золотое сечение можно записать в виде:

$$\varphi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

В принципе, можно вычислить значение φ методом последовательных приближений: прерывая непрерывную дробь все ниже и ниже. Предположим, мы именно так и поступим. Тогда у нас получится целый ряд значений (напомню: 1 к a/b — это все равно, что b/a).

$$1=1{,}00000$$

$$1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}=2{,}00000$$

$$1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}=1{,}50000$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=\frac{5}{3}=1{,}66666$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}=\frac{8}{5}=1{,}60000$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}=\frac{13}{8}=1{,}62500$$

Иными словами, последовательные приближения, при помощи которых мы ищем золотое сечение, в точности равны соотношениям чисел Фибоначчи. Ничего удивительного, что чем дальше мы продвигаемся по последовательности, тем ближе они сходятся к золотому сечению. Это качество прекрасно описано в книге «О росте и форме» знаменитого натуралиста сэра Д'Арси Уэнтворта Томпсона (1860–1948) (*Sir D'Arcy Wentworth Thompson*. On Growth and Form). Вот как он пишет о числах Фибоначчи: «Один мой друг, сведущий в математике, пишет мне б этих прославленных, поразительных числах: "Вся романтика непрерывных дробей, линейных рекурретнтых последовательностей... все это есть в них, и они — источник бесконечного интереса; как увлекательно наблюдать, с каким рвением они стремятся достичь недостижимого — например, золотого сечения; а ведь это всего лишь одно из сотен подобных соотношений"». Кстати, сходимость золотого сечения объясняет математический фокус, который я показал вам в главе 4. Если определить последовательность чисел так, что каждый член последовательности (начиная с третьего) равен сумме двух предшествующих, то с каких бы двух чисел вы ни начали, если зайти по последовательности достаточно далеко, отношение двух последовательных членов будет приближаться к золотому сечению.

Числа Фибоначчи, подобно «предмету устремлений» их отношений — золотому сечению, — обладают поистине поразительными свойствами. Перечень математических закономерностей, связанных с числами Фибоначчи, буквально бесконечен. Приведу лишь несколько из них.

«Квадрат из прямоугольников»

Если составить сумму нечетного числа произведений последовательных чисел Фибоначчи, например, три произведения $1\times1+1\times2+2\times3$, эта сумма (в нашем случае $1+2+6=9$) равна квадрату последнего числа Фибоначчи, которое вы задействовали в произведениях (в нашем случае $3^2=9$). Другой пример: возьмем сумму семи произведений $1\times1+1\times2+2\times3+3\times5+5\times8+8\times13+13\times21=441$, и эта сумма будет равна квадрату последнего задействованного числа: $441=21^2$. Подобным же образом сумма одиннадцати произведений $1\times1+1\times2+2\times3+3\times5+5\times8+8\times13+13\times21+21\times34+34\times55+55\times89+89\times144=144^2$. Это качество прекрасно видно из чертежа на рис. 30. Любое нечетное число прямоугольников, стороны которых равны последовательным числам Фибоначчи, прекрасно складывается в квадрат. На нашем чертеже таких прямоугольников семь.

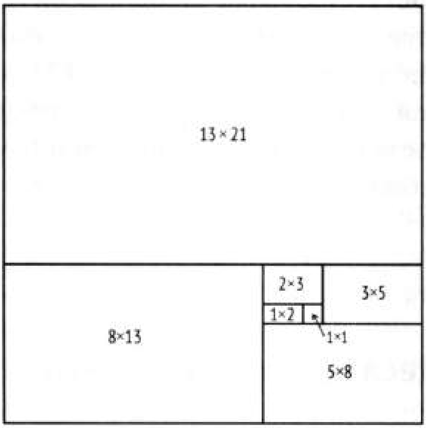


Рис. 30

Греховное число одиннадцать

В драме «Пикколомини» немецкого поэта и драматурга Фридриха Шиллера астролог Сени заявляет: «Одиннадцать — число греховное. Оно зашло за десять — число господних заповедей» (*«Elf ist die Sünde. Elfe überschreiten die zehn Gebote»*) (*Пер. Н. Славятинского*). Это еще средневековое суеверие. С другой стороны, у чисел Фибоначчи есть свойство, связанное с числом 11, которое отнюдь не грешно, а, наоборот, очень красиво.

Вычислим сумму первых десяти чисел Фибоначчи: $1+1+2+3+5+8+13+21+34+55=143$. Эта сумма нацело делится на 11 ($143/11=13$). То же самое верно для суммы любых десяти последовательных чисел Фибоначчи. Например, 55+89+144+ +233+377+610+987+1597+2584+4181=10857, а 10857 нацело делится на 11: 10857/11=987. Внимательно поглядев на эти примеры, можно заметить еще кое-что. Сумма любых десяти последовательных чисел Фибоначчи всегда равна седьмому из этих чисел, умноженному на 11. Можете воспользоваться этим свойством, чтобы поражать зрителей скоростью, с которой вы сложите любые десять последовательных чисел Фибоначчи.

Месть шестидесятеричной системы?!

Как вы, должно быть, помните, древние вавилоняне по не вполне понятным причинам взяли за основание своей системы счисления число 60 (шестидесятеричная система). Число 60 играет свою роль и в последовательности Фибоначчи, хотя с вавилонской системой счисления это и не связано.

Числа Фибоначчи очень быстро возрастают, поскольку каждое следующее число получается сложением двух предыдущих. По сути дела, нам крупно повезло, что кролики не бессмертны, иначе они бы нас одолели. Пятое число Фибоначчи — всего-навсего 5, а 125-е — уже 59 425 114 757 512 643 212 875 125. Интересно, что число единиц повторяется периодически — через каждые 60 чисел. Например, второе число — 1, 62-е — 4 052 739 537 881 (тоже кончается на 1), 122-е — 14 028 366 653 498 915 298 923 761 — тоже кончается на 1, как и 182 и т. д. Подобным же образом 14-е число равно 377, 74-е — на 60 чисел дальше в последовательности — равно 1 304 969 544 928 657 и тоже кончается на 7 и т. д. Это свойство обнаружил в 1774 году французский математик, итальянец по рождению, Жозеф Луи Лагранж (1736–1813), из-под чьего пера вышло много трудов по теории чисел и механике (еще он изучал устойчивость солнечной системы). Последние две цифры, то есть 01, 01, 02, 03, 05, 08, 13, 21..., повторяются в последовательности с периодичностью 300, а последние три цифры — с периодичностью 1500 чисел. В 1963 году Стивен П. Геллер при помощи компьютера *IBM* 1620 доказал, что последние четыре цифры повторяются с периодичностью раз в 15 000, последние пять — с периодичностью раз в 150 000 и, наконец, повторение последних шести цифр появляется раз в 1 500 000; компьютеру потребовалось на поиск этой закономерности три часа работы. Геллер не задумался над тем фактом, что можно доказать общую теорему о периодичности последних цифр, и отметил: «Похоже, догадаться, каков будет следующий период, невозможно, однако, вероятно, можно написать новую программу для машины, которая допускает инициализацию в любом месте последовательности, и это сократит время работы компьютера настолько, чтобы получить новые данные». Однако вскоре после этого израильский математик Дов Ярден показал, что можно строго доказать, что для любого количества последних цифр, начиная с трех и больше, периодичность равна всего-навсего пятнадцать на десять в степени на единицу меньше, чем количество цифр (то есть для семи цифр это 15×10^6 — то есть 15 миллионов).

Почему именно 1/89?

Свойства нашей Вселенной, от размера атомов до размера галактик, определяются величинами нескольких так называемых фундаментальных постоянных. В число этих постоянных входят четыре величины, определяющие величину четырех основных сил — силы тяготения, электромагнитной силы и двух сил, действующих на масштабах атомного ядра. Например, знакомая нам электромагнитная сила, возникающая между двумя электронами, в физике выражается через фундаментальную постоянную, называемую постоянной тонкой структуры. Величина этой постоянной почти точно равна 1/137, что весьма озадачивало несколько поколений физиков. Знаменитый английский физик Поль Дирак (1902–1984), один из основателей квантовой механики, шутил по этому поводу, что если на небесах ему будет позволено задать Господу всего один вопрос, это будет вопрос «Почему именно 1/137?».

В последовательность Фибоначчи тоже входит совершенно удивительное число — это ее одиннадцатый член 89. Если записать значение 1/89 в виде десятичной дроби, то получится 0,01123595... А теперь представим себе, что мы записываем числа Фибоначчи как десятичные дроби следующим образом:

0,01
0,001
0,0002
0,00003
0,000005
0,0000008
0,00000013
0,000000021
...

Иначе говоря, разряд единиц первого числа Фибоначчи приходится на второй знак после запятой, разряд единиц второго числа приходится на третий знак после запятой и так далее, то есть разряд единиц n-ного числа Фибоначчи приходится на $(n-1)$-й знак после запятой. А теперь давайте сложим эти числа. И получится у нас 0,01123595..., то есть 1/89.

Фокус с молниеносным сложением

Некоторые люди умеют очень быстро складывать в уме. Числа Фибоначчи помогают производить подобные молниеносные математические операции без особых усилий. Сумма всех чисел Фибоначчи от первого до n-ного равна попросту числу номер $(n+2)$, из которого вычли единицу. Например, сумма первых десяти членов последовательности $1+1+2+3+5+8+13+21+34+55=143$, то есть двенадцатый член (144) минус 1. Сумма первых 78 членов последовательности равна восьмидесятому члену минус 1 и т. д. Следовательно, можете заставить приятеля написать длинную колонку цифр, начиная с 1, 1, 2 и далее, следуя формуле последовательности Фибоначчи, то есть каждое следующее число должно быть суммой двух предшествующих. Затем попросите собеседника пометить галочкой любое число в колонке — после чего вы мгновенно скажете, чему равна сумма всех чисел до галочки: это будет число через одно от отмеченного минус 1.

Пифагоровы Фибоначчи

Как ни странно, числа Фибоначчи можно связать даже с пифагоровыми тройками. Как вы, наверное, помните, пифагоровы тройки — это тройки чисел, которые могут служить длинами сторон прямоугольного треугольника (в частности, это числа 3, 4, 5). Возьмите любые четыре последовательных числа Фибонанччи, ну, скажем, 1, 2, 3, 5. Произведение внешних — то есть первого и четвертого — равно 5, удвоенное произведение внутренних — то есть второго и третьего — равно 12, сумма квадратов внутренних чисел $2^2+3^2=13$ — и это и будут три стороны пифагорейского треугольника ($5^2+12^2=13^2$). Но это еще не все! Обратите внимание, что третье число — 13 — само по себе число Фибоначчи! Это свойство обнаружил математик Чарльз Райн.

Учитывая, сколько чудес таят в себе числа Фибоначчи (а вскоре мы познакомимся со множеством других их секретов), не стоит удивляться, что математики давно ищут эффективный метод вычисления произвольного члена последовательности F_n для любого n. В принципе это не так уж сложно: если нам нужно сотое число, надо сложить девяносто восьмое и девяносто девятое, однако это все равно означает, что сначала надо вычислить все члены последовательности до девяносто девятого, а это несколько утомительно. Как писал покойный юморист Джордж Бернс в своей книге «Как прожить сто лет и больше» (*George Burns*. How to Live to Be 100 or More): «Как прожить сто лет и больше? Кое над чем придется потрудиться. Главное — обязательно дотянуть до девяносто девяти».

В середине XIX века французский математик Жак-Филипп-Мари Бине (1786–1856) заново открыл формулу, которую, по всей видимости, еще в XVIII веке знали и самый плодовитый математик в истории человечества Леонард Эйлер (1707–1783), и французский математик Абрахам де Муавр (1667–1754). По этой формуле можно найти значение любого числа Фибоначчи F_n, если известно его место в последовательности — n. Так вот, эта формула Бине целиком опирается на золотое сечение.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

На первый взгляд это не формула, а сущий кошмар: не очевидно даже, что при подстановке в нее различных значений n получатся целые числа, а ведь все члены последовательности Фибоначчи — целые. Поскольку мы уже знаем, что числа Фибоначчи тесно связаны с золотым сечением, нас, пожалуй, несколько обнадежит, когда мы поймем, что первый член в скобках — это, в сущности, золотое сечение в степени n, φ^n, а второй — $(-1/\varphi)^n$. (Вспомним, что выше мы обсуждали, что отрицательный корень квадратного уравнения, определяющего число φ, равен $-1/\varphi$). Вооружившись простым инженерным карманным калькулятором, можно самостоятельно ввести несколько значений n и убедиться, что формула Бине дает числа Фибоначчи в точности. При достаточно больших значениях n второй член в скобках становится очень маленьким, так что можно просто считать, что F_n — это ближайшее целое число к $\varphi^n/\sqrt{5}$. Например, при $n = 10$, $\varphi^n/\sqrt{5} = 55{,}0036$, а десятое число Фибоначчи и есть 55.

Можно задаться вопросом — так, забавы ради, — существует ли число Фибоначчи, состоящее ровно из 666 цифр. Математик и писатель Клиффорд А. Пиковер называет числа, связанные с 666, «апокалиптическими». Он обнаружил, что число Фибоначчи номер 3184 состоит из 666 знаков.

Итак, стоило лишь открыть числа Фибоначчи, и они, как по волшебству, стали возникать тот тут, то там, в том числе и в живой природе. Вот и ботаника дарит нам несколько интереснейших примеров.

Так подсолнух глядит на закат божества*

Листья вдоль стебля растения или веточки от сука обычно растут так, чтобы солнца, воздуха и дождя им доставалось ровно столько, сколько нужно. Когда побег тянется вверх, листья на нем появляются через достаточно правильные интервалы. Однако растут они не прямо друг над другом — ведь тогда нижние листья не получали бы вдоволь света и влаги. На самом деле соседние листья или побеги на одной ветке располагаются вокруг стебля более или менее как резьба на винте (см. рис. 31). Подобное расположение повторяющихся элементов видно на примере и чешуек ананаса, и семечек подсолнуха. Называется это явление *филлотаксис* (от греч. «расположение листьев»), и этот термин ввел в 1754 году швейцарский натуралист Шарль Бонне (1720–1793). Например, у липы листья растут в основном с про-

---

* Строка из стихотворения Томаса Мура «Поверь, если прелести юной твоей...». Пер. Г. Кружкова.

тивоположных сторон ветки (то есть через полоборота вокруг ветки), и это называется «винтовая ось типа 1/2». У других растений — орешника, черники, березы — листья на ветках и стеблях располагаются через 1/3 оборота, и это называется «винтовая ось типа 1/3». У яблони, абрикосового дерева и вечнозеленого калифорнийского дуба листья растут через 2/5 оборота, а у груши и плакучей ивы — через 3/8. На рис. 31 показан случай, когда восемь побегов располагаются на протяжении трех полных оборотов — винтовая ось типа 3/8. Обратите внимание, что все указанные дроби — это соотношения чисел Фибоначчи, взятых через одно.

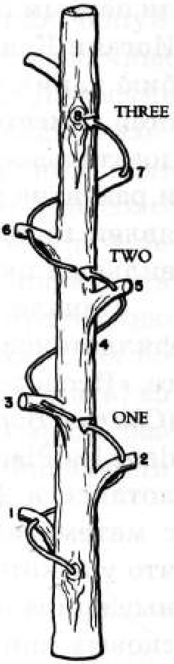


Рис. 31

То обстоятельство, что листья растений следуют определенному образцу, первым отметил древнегреческий ученый Феофраст (ок. 372–ок. 287 гг. до н. э.) в своем труде «История растений»: «У тех, у которых листья плоские, они располагаются через правильные промежутки». Плиний Старший (23–79 гг. н. э.) отметил то же явления в своей масштабной «Естественной истории», где тоже пишет о правильных промежутках между листьями, расположенными на ветке по кругу. До XV века исследования филлотаксиса недалеко отошли от этих первых качественных наблюдений, но затем Леонардо да Винчи (1452–1519) нашел количественные закономерности в расположении листьев, отметив, что листья растут по спирали циклами по 5 (то есть под углом в 2/5 оборота). Связь между филлотаксисом и числами Фибоначчи первым почувствовал — интуитивно — астроном Иоганн Кеплер. Кеплер писал: «По образу и подобию таких саморазвивающихся последовательностей [имеется в виду рекурсивное свойство последовательности Фибоначчи], на мой взгляд, строится и развитие растений, так, например, в цветке проявлен природный символ этого качества — правильный пятиугольник».

Начало серьезному изучению наблюдаемого филлотаксиса положил Шарль Бонне. В своей книге «Исследования применения листьев растений» (*Charles Bonnet*. Recherches sur l'Usage des Feuilles dans les Plantes, 1754) он дает четкое описание филлотаксиса 2/5. Вероятно, Бонне в сотрудничестве с математиком Жаном-Луи Каландрини открыл, что у некоторых растений наблюдаются и правильные спиральные узоры, например, чешуйки на сосновых шишках или на ананасе (теперь эти узоры называются парастихии).

История же подлинно математического филлотаксиса, в противоположность чисто описательному подходу, начинается лишь в XIX веке в работах ботаника Карла Фридриха Шимпера (вышли в свет в 1830 году), его друга Александера Брауна (1835) и кристаллографа Огюста Браве и его брата-ботаника Луи (1837). Эти ученые обнаружили общее правило, согласно которому соотношения, описывающие филлотаксис, можно выразить дробями, состоящими из членов последовательности Фибоначчи (например, 2/5 или 3/8), а также отметили, что в парастихиях сосновых шишек и ананасов также проявляются закономерности, описываемые числами Фибоначчи.

И в самом деле, нет прелестнее иллюстрации филлотаксиса на основе чисел Фибоначчи, чем ананас (рис. 32). Каждая шестиугольная чешуйка на поверхности ананаса входит в три различные спирали. На рисунке хорошо видны один из восьми параллельных рядов, которые полого поднимаются из левого нижнего угла в правый верхний, один из тринадцати параллельных рядов, которые более круто поднимаются из правого нижнего угла в левый верхний, и один из двадцати одного параллельного ряда, которые поднимаются очень круто (тоже из левого нижнего угла в правый верхний). На поверхности у большинства ананасов видны пять, восемь, тринадцать или двадцать одна спираль разной степени крутизны. Все это числа Фибоначчи.

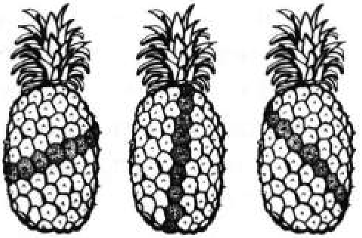


Рис. 32

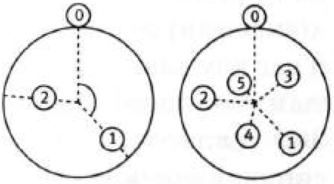


Рис. 33

Откуда растения знают, что нужно расставлять листья по закономерностям Фибоначчи? Зона роста у растения расположены на верхушке стебля и называется «меристема» — она конической формы и заостряется кверху. Листья, которые отстоят от меристемы дальше всего, то есть самые старые, если смотреть сверху, дальше всего отходят от середины стебля, поскольку и сам стебель там толще. На рис. 33 показан подобный вид на стебель сверху, а листья пронумерованы в порядке появления. Лист номер 0 появился первым и теперь находится в самом низу, дальше всех от меристемы, и отстоит дальше всех от середины стебля. Важную роль такого представления для понимания сущности филлотаксиса первым подчеркнул ботаник А. Г. Черч в своей книге «Связь филлотаксиса с законами механики» (*A.H. Church*. On the Relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws, 1904). Если мы представим себе кривую, которая на рис. 33 соединяет листья с 0 по 5, то обнаружим, что листья последовательно вырастают вдоль туго закрученной спирали — ее называют золотой спиралью. Важная характеристика расположения листьев — угол между линиями, соединяющими центр стебля с последовательно вырастающими листьями. Одно из открытий братьев Браве в 1837 году и состояло в том, что новые листья растут примерно под одним и тем же углом по кругу и что этот угол (так называемый угол расхождения) обычно близок к 137,5 градусам. Сейчас я вас изумлю: это значение тоже определяется золотым сечением! Если поделить полный круг, то есть 360 градусов, на φ, получится 222,5 градуса. Поскольку это больше половины круга (180 градусов), лучше измерять этот угол по оставшемуся сегменту круга. То есть нам надо вычесть 222,5 из 360 — и мы получим наблюдаемый угол в 137,5 градусов (иногда его называют золотым углом).

В 1907 году была опубликована революционная работа немецкого математика Г. ван Итерсона, где доказывалось, что если тесно расставить последовательные точки, разделенные под углом в 137,5 градусов, на туго свернутой спирали, то глаз будет выхватывать одно семейство спиральных узоров, которые закручиваются по часовой стрелке, и другое — против часовой. Количество спиралей в этих семействах — это обычно два соседних числа Фибоначчи, поскольку их отношение стремится к золотому сечению. Такие спирали, свивающиеся в противоположные стороны, особенно наглядно заметны в расположении семечек подсолнуха. Если рассмотреть цветок подсолнуха (рис. 34), можно отметить, что семечки образуют спиральные узоры и по часовой стрелке, и против. Очевидно, что семечки растут так, чтобы горизонтальное пространство распределялось между ними оптимально. Количество спиралей зависит, как правило, от размера цветка. Чаще всего их 34 в одну сторону и 55 в другую, однако ученым попадались и подсолнухи с соотношением количества спиралей 89/55, 144/89 и даже (по меньшей мере один, о котором одна семейная пара из Вермонта написала в 1951 году в журнал «*Scientific American*») 233/144. Все это, конечно, соотношения соседних чисел Фибоначчи. У самых крупных подсолнухов структура меняется от центра к окружности — переходит от одной пары соседних чисел Фибоначчи к следующей.

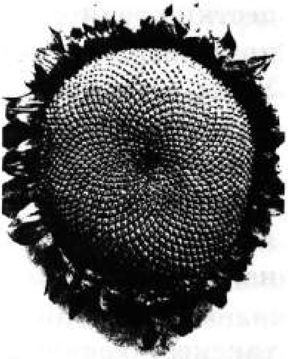


Рис. 34

Числа Фибоначчи и связь с золотым сечением прослеживается также в числе и расположении лепестков. Иные люди даже доверяют свою жизнь, по крайней мере, символически, количеству лепестков ромашки, дабы решить животрепещущий вопрос «любит — не любит». У большинства полевых ромашек лепестков 13, 21 или 34 — и все это числа Фибоначчи (вот было бы славно заранее знать, четное или нечетное количество лепестков у попавшейся вам ромашки!). Количество лепестков отражает всего-навсего количество спиралей в одном из семейств.

Прелестное расположение лепестков розы также основано на золотом сечении. Если препарировать розу, снимая по лепестку, станет видно, что ее многочисленные, тесно прижатые друг к другу лепестки крепятся определенным образом. На рис. 35 приводится схема, где лепестки пронумерованы. Углы, определяющие положение лепестков (в долях окружности) — это дробная часть произведений φ на целые числа. Лепесток 1 расположен в 0,618 оборота от лепестка 0 (дробная часть 1×φ), лепесток 2 — в 0,236 оборота от лепестка 1 (дробная часть 2×φ) и т. д.

Это описание показывает, что загадка филлотаксиса, насчитывающая уже 2300 лет, сводится к простому вопросу: почему последовательные листья разделены золотым углом в 137,5 градусов? Попытки найти ответ на этот вопрос идут, так сказать, под двумя соусами: теории, сосредоточенные на геометрии этой конфигурации и на простых математические законах, которые могли бы породить такую геометрию, с одной стороны, и модели, ищущие, какая движущая сила стоит за наблюдаемым поведением растений, с другой. Основные труды первого типа, авторами которых были, в частности, математики Гарольд С. М. Коксетер и И. Адлер и кристаллограф Н. Ривье, показывают, что почки, расположенные вдоль золотой спирали и разделенные золотым углом, упакованы экономичнее всего. Это легко по-

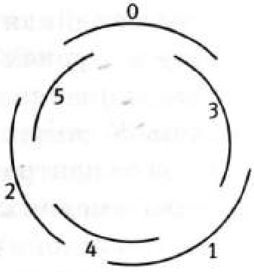


Рис. 35

нять. Если бы угол расхождения был, скажем, 120 градусов (360/3) или представлял собой любую другую рациональную долю 360 градусов, листья торчали бы в три стороны, а между ними бы оставалось много пустого места. С другой стороны, иррациональная доля 360 градусов вроде золотого угла обеспечивает, что не будет ни одного направления, которое листья «предпочли бы», и почки будут равномерно и экономно занимать все пространство. Однако золотой угол, оказывается, даже лучше любой другой иррациональной доли угла в 360 градусов, поскольку золотое сечение — самое иррациональное из всех иррациональных чисел, а в каком смысле, мы сейчас увидим. Вспомним, что золотое сечение равно непрерывной дроби, составленной исключительно из единиц. Эта непрерывная дробь сходится медленнее любой другой непрерывной дроби. Иначе говоря, выразить золотое сечение дробью еще труднее, чем любое другое иррациональное число.

В статье, опубликованной в «*Journal de Physique*» в 1984 году, группа ученых во главе с Н. Ривье из Университета Прованса в Марселе придумала простой математический алгоритм, который показывает, что если строить определенную геометрическую фигуру на основе угла, равный золотому углу, получатся структуры, очень похожие на сердцевину подсолнуха (рис. 36). Ривье с сотрудниками предположили, что здесь таится ответ на вопрос, заданный в классическом труде биолога сэра Д'Арси Уэнтворта Томпсона. В своем фундаментальном труде «О росте и форме» (первое издание — 1917, второе, пересмотренное, — 1942) Томсон восклицает: «...и не самая очевидная черта этого явления [филлотаксиса] — то, насколько ограниченно и даже мало число возможных комбинаций, которые мы наблюдаем и распознаем!» Группа Ривье обнаружила, что необходимые условия однородности (то есть структура должна быть везде одинакова) и самоподобия (если изучить структуру на разных масштабах, от мелкого до крупного, она будет выглядеть везде совершенно одинаково) очень сильно ограничивают количество возможных структур. Вероятно, этих двух свойств достаточно, чтобы понять, почему числа Фибоначчи и золотое сечение столь вездесущи в филлотаксисе, однако почему так получается физически, они не объясняют.

Возможно, подлинные движущие силы, стоящие за филлотаксисом, следует искать не в ботанике, а в физике — в экспериментах Л. С. Левитова (1991) и Стефана Дюади и Ива Куде (1992 и 1996). Эксперимент Дюади и Куде особенно интересен. Исследователи поместили плоскую чашку, наполненную силиконовым маслом, в магнитное поле так, чтобы поле у краев чашки было сильнее, чем в середине. Периодически в центр чашки капали магнитной жидкостью, капли которой вели себя как крошечные магнитиные палочки. Магнитики отталкивались друг от друга, а градиент магнитного поля толкал их к краям. Дюади и Куде обнаружили осциллирующие узоры, которые в целом сходились к спирали, на которой следующие друг за другом капли разделялись золотым углом. Физические системы обычно стремятся к состоянию, в котором энергия минимальна. По предположению ученых, филлотаксис просто отражает состояние минимальной энергии системы взаимно отталкивающихся почек. Другие модели, в которых листья появлялись в местах наибольшей концентрации какого-то питательного вещества, также обычно показывают разделение под золотыми углами.

Надеюсь, когда вам в следующий раз придется лакомиться ананасом, посылать любимой алую розу или любоваться на «Подсолнухи» Ван Гога, вы вспомните, что закон роста этих растений опирается на чудесное число, которое мы называем золотым сечением. Однако не забывайте, что рост растений зависит и от других факторов, а не только от оптимального расстояния между листьями. Следовательно, законы филлотаксиса, о которых я рассказал, нельзя считать такими же универсальными, как законы физики. Напротив, по словам знаменитого канадского математика Коксетера, это не более чем «на удивление сильная *тенденция*».

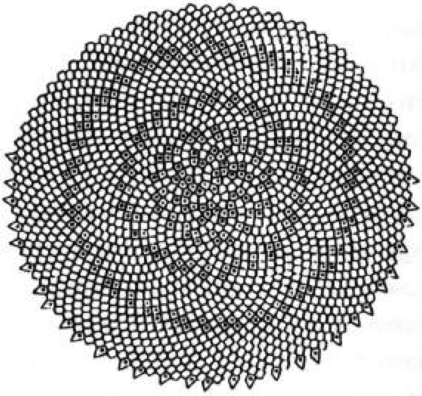


Рис. 36

Однако ботаника — не единственная область в природе, где можно наткнуться на золотое сечение и числа Фибоначчи. Они проявляются в явлениях самого различного масштаба, от микроскопического до галактического. И их появление зачастую принимает обличье величественной спирали.

Измененная, вновь воскресаю прежней

В истории математика не было семейства, породившего столько знаменитых математиков, сколько семья Бернулли: целых тринадцать!

Испугавшись «Испанской ярости» — кровопролитного восстания, поднятого в Нидерландах испанскими солдатами, — семейство бежало из Нидерландов, находившихся под властью испанских католиков, в Швейцарию, в город Базель. Три члена семьи, братья Якоб (1654–1705) и Иоганн (1667–1748) и второй сын Иоганна Даниил (1700–1782), были в интеллектуальном отношении на голову выше остальных родственников. Как ни странно, ожесточенные семейные распри прославили Бернулли чуть ли не в той же степени, что и многочисленные достижения в математике. Однажды Якоб с Иоганном повздорили особенно сильно. Началась ссора из-за разногласий по поводу решения знаменитой задачи по механике. Эта задача известна под названием «брахистохрона» (от греческих слов «брахистос», «кратчайший», и «хронос», «время») и состоит в том, чтобы найти кривую, по которой частица попадет из точки А в точку В под воздействием одной лишь силы гравитации за кратчайшее время. Братья независимо пришли к одному и тому же решению, однако в выкладках Якоба была ошибка, и он впоследствии пытался выдать выкладки Иоганна за свои. Печальным последствием этих событий стало то, что Иоганн стал профессором в Гронингене и до самой смерти брата ни разу не наведывался в Базель.

Связь Якоба Бернулли с золотым сечением прослеживается благодаря другой знаменитой кривой. Якоб написал трактат под названием «*Spira Mirabilis*» («Чудесная спираль») и посвятил ее особой разновидности спирали. Красота так называемой логарифмической спирали (рис. 37, названием она обязана тому, как радиус кривой возрастает по мере движения по часовой стрелке) настолько заворожила Якоба, что он завещал начертать эту фигуру и девиз, который он ей приписал — «*Eadem mutate resurgo*», «Измененная, вновь воскресаю прежней» — на своем надгробии.

Девиз отражает фундаментальное уникальное качество логарифмической кривой: с увеличением размера она не меняет формы. Эта черта называется самоподобием. Очарованный этим качеством, Якоб писал, что логарифмическую спираль «можно сделать символом как стойкости и постоянства в трудных обстоятельствах, так и человеческого организма, который после всех перемен, даже после смерти, восстанавливает точное свое подобие и полное совершенство».

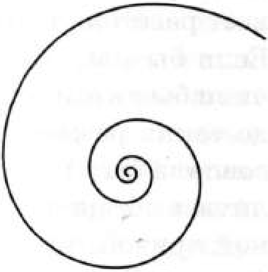


Рис. 37

Если немного подумать, станет ясно, что именно это свойство требуется для многих явлений роста и развития в природе. Например, по мере того как моллюск наутилус помпилиус (рис. 4) растет в своей раковине, он создает камеры все просторнее и просторнее, а те, которые стали ему малы, запечатывает. Каждая прибавка в длине раковины влечет за собой и пропорциональное увеличение радиуса, поэтому общая форма раковины остается неизменной. То есть «домик» у наутилуса всю жизнь одинаковый, и моллюску не приходится потом, например, сдвигать центр тяжести раковины. То же свойство присуще и бараньим рогам — они тоже имеют форму логарифмической спирали, хотя и не лежат в одной плоскости, — и изгибу слоновьих бивней. Логарифмическая спираль, набирая размер, становится шире, расстояние между «витками» увеличивается по мере отдаления от центра — так называемого полюса. Причем поворот на равные углы увеличивает расстояние от полюса на равные промежутки. Если бы мы, вооружившись микроскопом, увеличили бы витки, невидимые невооруженным глазом, до таких размеров, как на рис. 37, они в точности совпали бы с большой спиралью. Это свойство и отличает логарифмическую спираль от другой известной кривой, так называемой архимедовой спирали (в честь великого греческого математика Архимеда (ок. 287–212 гг. до н. э.), который подробно описал ее в своем трактате «О спиралях»). Архимедову спираль мы наблюдаем на торце рулонов туалетной бумаги или в рисунке каната, свернутого на полу. У спирали этого типа расстояние между витками всегда постоянно. К сожалению, каменщик, изготавливавший надгробие Якоба Бернулли, изобразил на нем по ошибке скорее архимедову, чем логарифмическую спираль, что, конечно, наверняка очень огорчило бы ученого.

Природа обожает логарифмические спирали. Похоже, это ее любимый узор — она украшает им все подряд, от подсолнухов и ракушек до водоворотов, смерчей и гигантских спиральных галактик. Постоянная форма логарифмической спирали любого размера прекрасно проявляется в природе и в очертаниях раковин микроскопических одноклеточных организмов под названием фораминиферы. Хотя спиральные ракушки в данном случае — структуры сложные, это не просто трубочка, рентгеновские изображения внутренней структуры ископаемых раковин этих существ показывают, что за много миллионов лет их рисунок — логарифмическая спираль — остался прежним. В своем классическом труде «Изгибы жизни» (*Theodore Andrea Cook*. The Curves of Life, 1914) английский писатель и издатель Теодор Андреа Кук приводит массу примеров появления спиралей, не только логарифмических, как в природе, так и в искусстве. Он пишет о спиралях в самых разных предметах — это и вьющиеся растения, и человеческий организм, и винтовые лестницы, и татуировки маори. Когда Кук объясняет, что подвигло его на создание книги, то пишет: «...Существованию этих глав о спиральных структурах нет никаких оправданий, кроме увлекательности и красоты самих исследований». Скажем, в этюде к мифологическому сюжету «Леда и лебедь» Леонардо да Винчи косы Леды почти точно повторяют форму логарифмической спирали (рис. 38). Леонардо много раз повторял этот мотив в этюдах спиралей в облаках и в воде — этому посвящен потрясающий цикл рисунков «Потоп». В этом произведении Леонардо сочетал научные исследования над катастрофическими наводнениями с аллегорическими аспектами разрушительных сил, грянувших с небес. Вот как Леонардо описывает бурный поток: «Внезапно нахлынувшие воды обрушиваются в омут, который их вмещает, сметая разнообразные препятствия своими бурными завихрениями... Натиск водоворота, возникающего в месте низвержения воды, швыряет воду прямо на другие водовороты, закрученные в противоположном направлении».

Художник Эдвард Б. Эдвардс, живший в XX веке, разработал на основе логарифмической спирали сотни декоративных мотивов — многие из них приведены в его книге «Дизайн и орнаменты с динамической симметрией» (*Edward B. Edwards*. Pattern and Design with Dynamic Symmetry), например, узоры, показанные на рис. 39.

Рис. 38

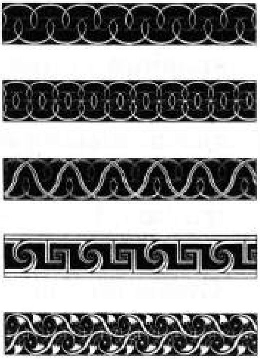


Рис. 39

Логарифмическая спираль и золотое сечение неотделимы друг от друга. Рассмотрим серию сложенных воедино золотых прямоугольников, которые получились у нас, когда мы отрезали квадраты от золотых прямоугольников побольше (рис. 40; об этом мы уже немного говорили в главе 4). Если последовательно соединить точки, в которых эти «вертящиеся квадраты» делят стороны в золотом сечении, у нас получится логарифмическая спираль, сворачивающаяся внутрь, к полюсу (то есть в точку на пересечении диагоналей на рис. 25, которой дали пышное название «Око Господне».

Логарифмическую спираль можно получить и из золотого треугольника. В главе 4 мы видели, что если начать с золотого треугольника (напомню, что это равнобедренный треугольник, в котором сторона относится к основанию в золотом сечении) и разделим биссектрисой угол при основании, у нас получится золотой треугольник поменьше. Если и дальше делить биссектрисами углы при основании треугольника — до бесконечности — получится водоворот из треугольников. Если соединить их вершины, получится логарифмическая спираль (рис. 41).

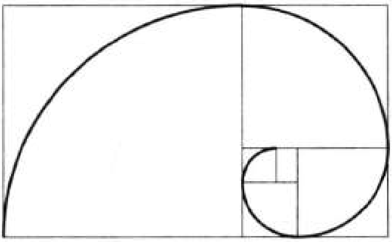


Рис. 40

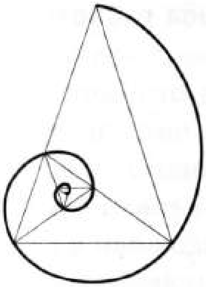


Рис. 41

Еще логарифмическую спираль называют равноугольной спиралью. Этот термин ввел в 1638 году французский математик и философ Рене Декарт (1596–1650), по имени которого названы числа, определяющие положение точки на плоскости относительно двух осей — декартова система координат.

Слово «равноугольная» отражает другое уникальное качество логарифмической спирали. Если прочертить прямую линию из полюса к любой точке спирали, она пересечет кривую под одним и тем же углом (рис. 42). Этим качеством пользуются соколы, когда бросаются на добычу. Соколы-сапсаны — одни из самых быстрых птиц на земле, когда они пикируют к цели, то разгоняются до двухсот километров в час. Однако они могли бы летать даже быстрее, если бы приближались к добыче по прямой, а не по спиральной траектории. Биолог Ванс Э. Такер из Университета Дюка в Северной Каролине многие годы интересовался, почему же сапсаны не выбирают кратчайший путь к добыче. Затем он понял, что поскольку глаза у соколов расположены по сторонам головы, то чтобы

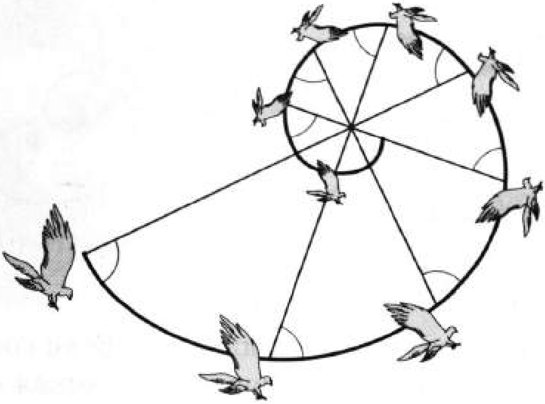


Рис. 42

воспользоваться преимуществом, которое дает этим птицам острейшее зрение, им приходится поворачивать голову на 40 градусов в ту или иную сторону. В ходе экспериментов в аэродинамической трубе Такер выяснил, что такой поворот головы заметно тормозит движение сокола. Результаты этих исследований были опубликованы в ноябрьском выпуске «*Journal of Experimental Biology*» за 2000 год и показывают, что соколы держат голову прямо и летят по логарифмической спирали. А поскольку спираль обладает свойством равноугольности, такая траектория позволяет птице, разгоняясь до предельных скоростей, не упускать добычу из виду.

Как ни удивительно, та же самая спиральная кривая, какую мы наблюдаем у ракушек одноклеточных фораминифер и в сердцевине подсолнуха, та же, которая направляет полет сокола, обнаруживается и в «звездных системах, группирующихся в одной плоскости, наподобие Млечного пути», о которых философ Иммануил Кант (1724–1804) размышлял задолго до того, как их удалось пронаблюдать (рис. 43). Эти системы было принято называть «островные Вселенные» — гигантские галактики, в которых таких звезд, как наше Солнце, сотни миллиардов. Наблюдения на орбитальном телескопе им. Э. Хаббла показали, что в наблюдаемой Вселенной примерно сто миллиардов галактик, многие из них спиральные. Трудно придумать более удачную иллюстрацию к величественному видению английского поэта, художника и мистика Уильяма Блейка (1757–1827), писавшего:

В одном мгновенье видеть вечность,
Огромный мир — в зерне песка,
В единой горсти — бесконечность
И небо — в чашечке цветка.

(Пер. С. Маршака)

Почему же галактики так часто имеют форму спирали? Спиральные галактики вроде нашего Млечного пути — это относительно плоский диск, вроде блина, состоящий из газа, звездной пыли и звезд. Весь галактический диск вращается вокруг центра галактики. Например, по соседству от Солнца орбитальная скорость вокруг центра Млечного пути составляет примерно 225 километров в секунду, а на полный оборот понадобится около 225 миллионов лет. На других расстояниях от центра и скорость иная — чем ближе к центру, тем больше, а на дальних дистанциях меньше, то есть галактический диск вращается не как твердый диск, а дифференциально. Если посмотреть на диск сверху, у спиральных галактик видны спиральные рукава, которые начинаются вблизи от центра и расходятся в разные стороны по большей части диска, как на рис. 43, где изображена галактика Водоворот. Спиральные рукава — это те области галактического диска, где рождается много новых звезд.

Рис. 43

Поскольку новые звезды самые яркие, спиральную структуру других галактик нам видно издалека. Главный вопрос, на который надо было ответить астрофизикам, состоял вот в чем: как спиральным рукавам удается так долго сохранять форму? Ведь внутренние части диска вращаются быстрее внешних, так что любой крупномасштабный узор, так или иначе связанный с материалом диска, то есть со звездами, долго бы не удержался. Спиральная структура, привязанная к одному и тому же скоплению звезд и облаков газа, неизбежно нарушилась бы, а наблюдениями это не подтверждается. Долголетие спиральных рукавов объясняется *волнами плотности* — волнами сжатия газа, проходящими по галактическому диску, — которые по пути сжимают газовые облака и способствуют зарождению новых звезд. Спиральный узор, который мы наблюдаем, это попросту проявление тех областей диска, где плотность выше средней и много новых звезд. Поэтому узор постоянно воссоздается и не нарушается. Подобное же положение дел мы наблюдаем поблизости от огороженного участка дорожных работ на крупном шоссе. Плотность машин поблизости от закрытого участка выше, потому что водители вынуждены там притормаживать. Если сделать фотографию шоссе с птичьего полета с большой выдержкой, можно зафиксировать плотность пробки поблизости от места ремонта. Волна плотности машин не связана с каким-то конкретным набором автомобилей, точно так же и спиральный узор не связан с тем или иным «куском» материала диска. Еще одна общая черта — тот факт, что волна плотности движется через диск медленнее движения самих звезд и газа, точно так же как скорость, с которой участок дорожных работ перемещается вдоль шоссе, как правило, гораздо медленнее, чем двигаются отдельные автомобили, которым ничто не мешает.

Движущая сила, которая отражает движение звезд и газовых облаков и порождает спиральную волну плотности (аналогично тому, как дорожные работы ограничивают движение автомобилей, оставляя им меньше полос) — это сила тяготения, вызванная тем обстоятельством, что распределение материи в галактике не полностью симметрично. Например, набор эллиптических орбит вокруг центра галактики (рис. 44, *а*), в котором каждая орбита несколько возмущена (повернута), причем сила возмущения меняется в зависимости от расстояния от центра, приводит к возникновению спирального узора (рис. 44, *b*).

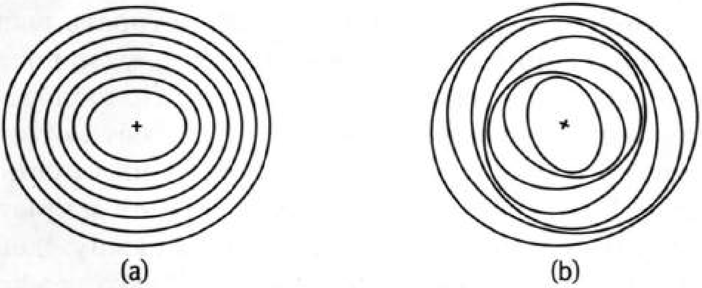


Рис. 44

В сущности, надо радоваться, что сила тяготения ведет себя в нашей Вселенной именно так, а не иначе. Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, всякая масса притягивает всякую другую массу и сила притяжения уменьшается с расстоянием. В частности, увеличение расстояния вдвое ослабляет силу тяготения в четыре раза (сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния). Ньютоновы законы движения показывают, что в результате зависимости силы тяготения от расстояния орбиты планет вокруг Солнца имеют форму эллипсов. А теперь представьте себе, что было бы, живи мы во Вселенной, где гравитация ослабевает при удвоении расстояния с коэффициентом восемь, а не четыре — то есть если бы сила тяжести уменьшалась в зависимости от куба расстояния. В такой Вселенной законы Ньютона предсказывали бы одну-единственную возможную орбиту для планеты — логарифмическую спираль. Иначе говоря, Земля либо по спирали устремилась бы к Солнцу, либо умчалась бы в космос.

Леонардо Фибоначчи, благодаря которому в Европе и началась кипучая математическая деятельность, в наши дни отнюдь не забыт. В сегодняшней Пизе, в садах Скотто на территории Новой крепости работы Сангалло стоит памятник Фибоначчи, воздвигнутый в XIX веке, а неподалеку проходит улица, названная в его честь — она идет вдоль южного берега реки Арно. Начиная с 1963 года Общество Фибоначчи издает журнал под названием «*Fibonacci Quarterly*». Это общество основали математики Вернер Эмиль Хоггатт (1921–1981) и брат Альфред Брюссо (1907–1988) «с целью обмениваться идеями и стимулировать исследования чисел Фибоначчи и смежных тем». С тех пор — вопреки обстоятельствам — «*Fibonacci Quarterly*» превратился в весьма уважаемый научный журнал по теории чисел. Как с юмором отметил брат Брюссо: «В 1963 году мы собрали теплую компанию — и стали выпускать математический журнал, как и положено компании отпетых зануд». Десятая Международная конференция по числам Фибоначчи и их применению прошла 24–28 июня 2002 года в Университете Северной Аризоны, в городе Флагстафф. И все это — лишь скромная дань уважения человеку, который, при помощи кроликов, открыл математическую концепцию, правящую миром. Однако при всей важности вклада Фибоначчи в развитие науки история золотого сечения в XIII веке не завершилась, и в Европе эпохи Возрождения ее ждали удивительные открытия.

БОЖЕСТВЕННАЯ ПРОПОРЦИЯ

> *Поиски нашего происхождения — вот сок того сладкого плода, который приносит столько удовлетворения разуму философов.*
>
> Лука Пачоли
> (1445–1517)

Лишь немногие великие живописцы в истории человечества были и одаренными математиками. Однако выражение «Человек Возрождения» означает в нашем лексиконе человека, воплощавшего возрожденческий идеал широчайшего кругозора и образованности. Вот и три самых знаменитых художника эпохи Возрождения — итальянцы Пьеро делла Франческа (ок. 1412–1492) и Леонардо да Винчи и немец Альбрехт Дюрер, также сделали весьма значительный вклад в математику. Пожалуй, нет ничего удивительного, что математические изыскания всех троих были связаны с золотым сечением. Самым деятельным математиком из этого блистательного трио виртуозов был Пьеро делла Франческа. Сочинения Антонио Марии Грациани, который приходился родственником правнукам Пьеро и приобрел дом художника, свидетельствуют о том, что Пьеро родился в 1412 году в Борго Сансеполькро в Центральной Италии. Его отец Бенедетто был преуспевающим кожевенником и сапожником. О детстве Пьеро почти ничего больше не известно, однако недавно были обнаружены документы, из которых очевидно, что до 1431 года он провел некоторое время в учениках у художника Антонио Д'Ангиари, работы которого до нас не дошли. К концу 1430 годов Пьеро перебрался во Флоренцию, где начал сотрудничать с художником Доменико Венециано. Во Флоренции молодой художник познакомился с работами художников раннего Возрождения — в том числе фра Анджелико и Мазаччо — и со скульптурами Донателло. Особенно сильное впечатление произвела на него величественная безмятежность работ фра Анджелико на религиозные темы, и его собственный стиль отражает это влияние во всем, что касается светотени и колорита. В последующие годы Пьеро трудился не покладая рук в самых разных городах — в том числе в Римини, Ареццо и Риме. Фигуры кисти Пьеро либо отличались архитектурной строгостью и монументальностью, как в «Бичевании Христа» (сейчас картина хранится в Национальной галерее Марке в Урбино; рис. 45), либо были словно бы естественным продолжением фона, как в «Крещении» (в настоящее время находится в Национальной галерее в Лондоне; рис. 46). Первый историк искусств Джорджо Вазари (1511–1574) в своих «Жизнеописаниях наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих» пишет, что Пьеро с ранней юности выказывал недюжинные математические способности, и приписывает ему написание «многочисленных» математических трактатов. Некоторые из них были созданы в старости, когда художник по немощи уже не мог писать картины. В посвятительном письме герцогу Гвидобальдо Урбинскому Пьеро упомина-

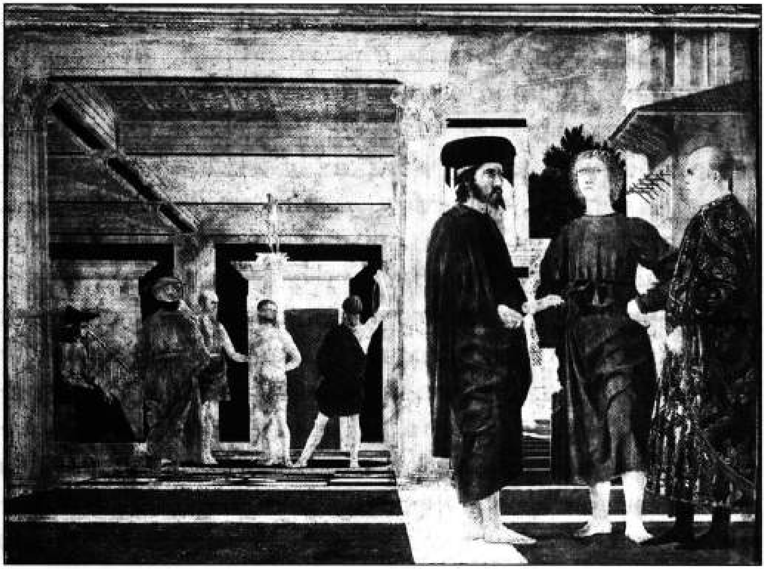


Рис. 45

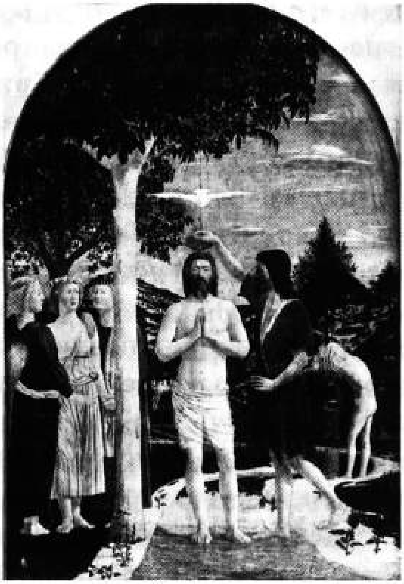


Рис. 46

ет одну из своих книг, сочиненную, «дабы разум его не закоснел от неупотребления». До нас дошли три труда Пьеро по математике: «*De Prospectiva pingendi*» («О перспективе в живописи»), «*Libellus de Quinque Corporibus Regularibus*» («Книжица о пяти правильных многогранниках») и «*Trattato d'Abaco*» («Трактат о счетах»).

В трактате «О перспективе» (середина 1470 годов — 1480 годы) содержится много отсылок к «Началам» и «Оптике» Евклида, поскольку Пьеро делла Франческа решил доказать, что техника передачи перспективы в живописи полностью основана на математических и физических свойствах визуальной перспективы. На картинах самого художника перспектива представляет собой просторное вместилище, находящееся в полном соответствии с геометрическими свойствами заключенных в нем фигур. По сути дела, для Пьеро сама живопись в первую очередь сводилась к «показу на плоскости тел уменьшенного или увеличенного размера». Такой подход прекрасно виден на примере «Бичевания» (рис. 45 и 47): это одна из немногих картин эпохи Возрождения, где перспектива выстроена и проработана весьма тщательно. Как пишет современный художник Дэвид Хокни в своей книге «Тайное знание» (*David Hockney*. Secret Knowledge, 2001), Пьеро пишет фигуры «такими, какими, по его убеждению, они должны быть, а не такими, какими он их видит».

По случаю пятисотой годовщины со дня смерти Пьеро, ученые Лаура Джеатти из Римского университета и Лучано Фортунати из Национального совета по исследованиям в Пизе проделали подробнейший анализ «Бичевания» с помощью компьютера. Они оцифровали всю картину, определили ко-

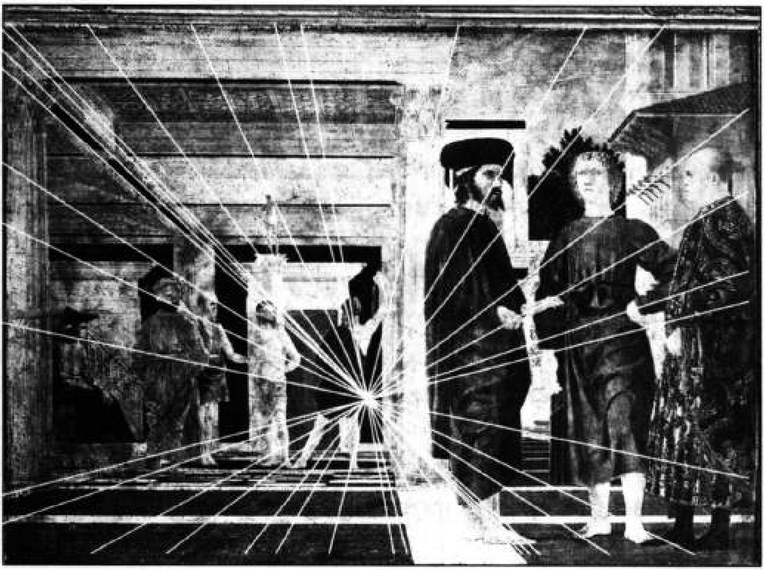


Рис. 47

ординаты всех точек, перемерили все расстояния и составили полный анализ перспективы на основе алгебраических вычислений. Это позволило им точно определить местоположение «точки схода», где пересекаются все линии, уходящие к горизонту от зрителя (рис. 47), благодаря чему Пьеро и сумел добиться «глубины», которая производит такое сильное впечатление.

Книга Пьеро о перспективе, отличающаяся ясностью изложения, стала стандартным руководством для художников, пытавшихся рисовать плоские фигуры и геометрические тела, а те ее разделы, которые не перегружены математикой (и более понятны), вошли в большинство последующих работ по перспективе. Вазари утверждает, что Пьеро получил солидное математическое образование и поэтому «лучше любого другого геометра понимал, как лучше всего проводить круги в правильных телах, и именно он пролил свет на эти вопросы» (*здесь и далее пер. А. Габричевского и А. Бенедиктова*). Примером того, как тщательно Пьеро разработал метод рисования правильного пятиугольника в перспективе, может служить рис. 48.

И в «Трактате о счетах», и в «Книжице о пяти правильных многогранниках» Пьеро ставит (и решает) множество задач с участием пятиугольника и пяти платоновых тел. Он вычисляет длины сторон и диагоналей, площади и объемы. Многие решения опираются и на золотое сечение, а некоторые приемы Пьеро свидетельствуют о его изобретательности и оригинальности мышления.

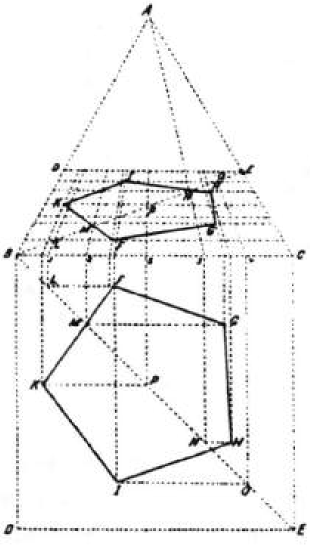


Рис. 48

Пьеро, как и его предшественник Фибоначчи, написал «Трактат о счетах» в основном ради того, чтобы снабдить своих современников-дельцов арифметическими «рецептами» и геометрическими правилами. В тогдашнем мире коммерции не было ни унифицированной системы мер и весов, ни даже соглашений о размерах и формах емкостей, так что без умения вычислять объем фигур было никак не обойтись. Однако математическая любознательность выводила Пьеро далеко за рамки тем, сводившихся к повседневным нуждам. Поэтому в его книгах мы находим и «бесполезные» задачи — например, вычисление длины ребра октаэдра, вписанного в куб, или диаметра пяти маленьких кругов, вписанных в круг большего диаметра (рис. 49). Для решения последней задачи используется правильный пятиугольник, а следовательно, и золотое сечение.

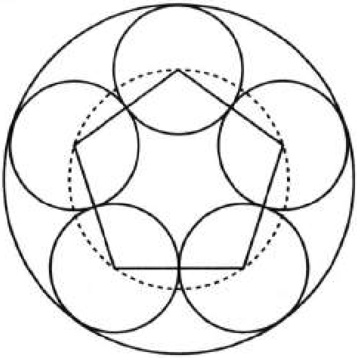


Рис. 49

Алгебраические изыскания Пьеро в основном вошли в книгу, которую выпустил в свет Лука Пачоли (1445–1517) под названием «*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*» («Свод познаний в арифметике, геометрии, пропорциях и пропорциональности»). Труды Пьеро по многогранникам, написанные на латыни, перевел на итальянский тот же Лука Пачоли — и опять же включил (ну, или, выражаясь не столь деликатно, попросту украл) в свою знаменитую книгу о золотом сечении под названием «О божественной пропорции» (*«Divina Proportione»*).

Кто же он был, этот полный противоречий математик Лука Пачоли? Величайший плагиатор в истории математики — или все же великий популяризатор математической науки?

Невоспетый герой Возрождения?

Лука Пачоли родился в 1445 году в том же тосканском городке Борго Сансеполькро, где родился и держал мастерскую Пьеро делла Франческа. Более того, начальное образование Лука получил именно в мастерской Пьеро. Однако, в отличие от других учеников, выказывавшим способности к живописи — некоторым из них, например, Пьетро Перуджино, суждено было стать великими живописцами, — Лука оказался более склонным к математике. Пьеро и Пачоли сохраняли дружеские отношения и в дальнейшем: доказательством тому служит то, что Пьеро изобразил Пачоли в виде Св. Петра Веронского (Петра Мученика) на «Алтаре Монтефельтро». Еще сравнительно молодым человеком Пачоли перебрался в Венецию и стал там наставником трех сыновей состоятельного торговца. В Венеции он продолжил математическое образование под руководством математика Доменико Брагадино и написал первую книгу по арифметике.

В 1470 годах Пачоли изучал теологию и постригся в монахи-францисканцы. С тех пор его стало принято называть фра Лука Пачоли. В последующие годы он много путешествовал, преподавал математику в университетах в Перудже, Задаре, Неаполе и Риме. В то время Пачоли, вероятно, некоторое время учил и Гвидобальдо Монтефельтро, которому в 1482 году предстояло стать герцогом Урбинским. Лучший, пожалуй, портрет математика — это картина кисти Якопо де Барбари (1440–1515), изображающая, как Лука Пачоли дает урок геометрии (рис. 50, картина находится в музее Каподимонте в Неаполе). Справа на книге Пачоли «*Summa*» покоится одно из платоновых тел — додекаэдр. Сам Пачоли во францисканской рясе (тоже похожий на правильный многогранник, если приглядеться) копирует чертеж из XIII книги «Начал» Евклида. Прозрачный многогранник под названием ромбокубоктаэдр (одно из архимедовых тел, многогранник с 26 гранями,

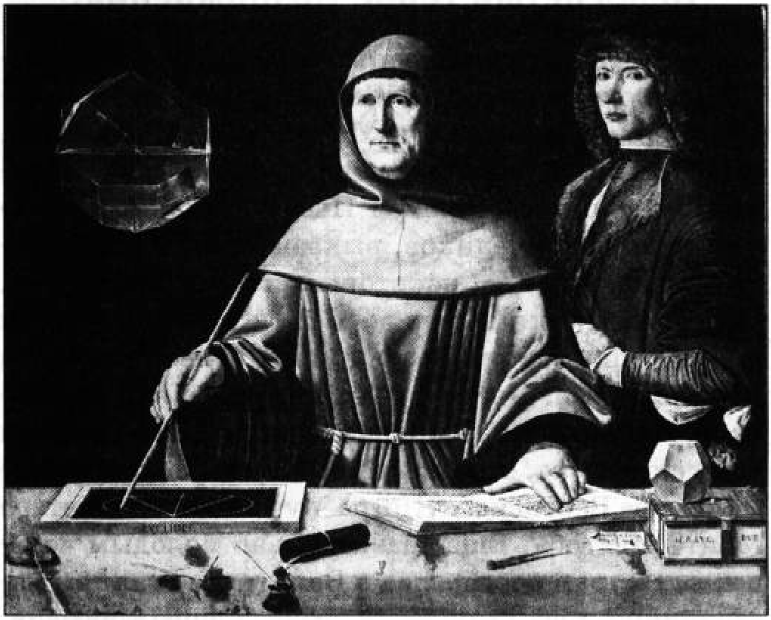


Рис. 50

18 из которых — квадраты, а 8 — равносторонние треугольники), висящий в воздухе и наполовину наполненный водой, символизирует чистоту и вечность математики. Художнику удалось с поразительным искусством передать преломление и отражение света в стеклянном многограннике. Личность ученика Пачоли, изображенного на этой картине, стала предметом споров. В частности, предполагают, что этот юноша — сам герцог Гвидобальдо. Английский математик Ник Маккиннон в 1993 году выдвинул интересную гипотезу. В своей статье «Портрет фра Лука Пачоли», опубликованной в «*Mathematical Gazette*» и основанной на весьма солидных исследованиях, Маккиннон делает вывод, что это портрет великого немецкого живописца Альбрехта Дюрера, которого очень интересовали и геометрия, и перспектива (а к его отношениям с Пачоли мы еще вернемся чуть ниже). И в самом деле, лицо ученика поразительно похоже на автопортрет Дюрера.

В 1489 году Пачоли вернулся в Борго Сансеполькро, получив некоторые привилегии от самого Папы, однако местный религиозный истеблишмент встретил его с ревнивой недоброжелательностью. Около двух лет ему даже запрещали преподавать. В 1494 году Пачоли отправился в Венецию печатать свою книгу «*Summa*», которую посвятил герцогу Гвидобальдо. «*Summa*» по природе и по размаху (около 600 страниц) — подлинно энциклопедический труд, где Пачоли свел воедино все, что было на то время известно в области арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. В своей книге Пачоли не стесняется заимствовать задачи об икосаэдре и додекаэдре из «Трактата» Пьеро делла Франческа и другие задачи по геометрии, а также по алгебре, из трудов Фибоначчи и других ученых (правда, обычно выражает благодарность автору, как полагается). Пачоли признается, что его главный источник — это Фибоначчи, и говорит, что там, где нет ссылок на кого-то другого, труды принадлежат Леонардо Пизанскому. Интересный раздел «*Summa*» — бухгалтерская система двойной записи, метод, позволяющий прослеживать, откуда деньги пришли и куда ушли. Эту систему изобрел не сам Пачоли, он лишь свел воедино приемы венецианских купцов эпохи Возрождения, однако считается, что это первая книга по бухгалтерии в истории человечества. Так и получилось, что желание Пачоли «позволить дельцу незамедлительно получать сведения о своих активах и денежных обязательствах» стяжало ему прозвище «Отец бухгалтерии», и в 1994 году бухгалтеры всего мира отмечали пятисотлетие «*Summa*» в Сансеполькро, как теперь называется этот город.

В 1480 году место герцога Миланского фактически занял Людовико Сфорца. На самом деле он был всего лишь регентом при настоящем герцоге, которому тогда было только семь лет; это событие положило конец периоду политических интриг и убийств. Людовико решил украсить свой двор художниками и учеными и в 1482 году пригласил Леонардо да Винчи в «коллегию герцогских инженеров». Леонардо очень интересовался геометрией, в особенности — ее практическим приложением в механике. По его словам, «Механика — это рай среди математических наук, поскольку именно она порождает плоды математики». А впоследствии, в 1496 году, именно Леонардо, скорее всего, добился, чтобы герцог пригласил ко двору и Пачоли в качестве учителя математики. Леонардо, несомненно, учился геометрии и у Пачоли, а ему привил любовь к живописи.

Во время пребывания в Милане Пачоли завершил работу над трехтомным трактатом «О божественной пропорции», вышедшим в свет в Венеции в 1509 году. Первый том, «*Compendio de Divina Proportione*» («Компендиум о божественной пропорции»), содержит подробный свод всех качеств золотого сечения (его Пачоли называет «божественной пропорцией) и исследование платоновых тел и других многогранников. На первой странице «О божественной пропорции» Пачоли несколько выспренно заявляет, что это «труд, необходимый всем пытливым, ясным человеческим умам, в котором всякий, кто любит изучать философию, перспективу, живопись, ваяние, зодчество, музыку и иные математические дисциплины, найдет весьма тонкое, изящное и прелестное учение и получит наслаждение от разнообразных вопросов, затрагивающих все тайные науки».

Первый том трактата «О божественной пропорции» Пачоли посвятил Людовико Сфорца, а в пятой главе он перечисляет пять причин, почему, по его мнению, золотое сечение следует именовать не иначе как божественной пропорцией.

1. «Она одна, едина и всеобъемлюща». Пачоли сравнивает уникальность золотого сечения с тем обстоятельством, что «Единый» — «Высочайший эпитет самого Господа».
2. Пачоли видит сходство между тем, что определение золотого сечения включает в себя ровно три длины (AC, CB и AB на рис. 24), и существованием Святой Троицы — Отца, Сына и Святого Духа.
3. Для Пачоли непостижимость Бога и то обстоятельство, что золотое сечение — иррациональное число, эквивалентны. Вот как он пишет: «Подобно тому, как Господа нельзя определить должным образом и невозможно постичь его посредством слов, так и наша

пропорция не может быть передана постижимыми цифрами и выражена через какое бы то ни было рациональное количество, она навеки останется тайной, сокрытой от всех, и математики именуют ее иррациональной».

4. Пачоли сравнивает вездесущесть и неизменность Бога с самоподобием, которое связывают с золотым сечением: его значение всегда неизменно и не зависит от длины отрезка, который делят в соответствующей пропорции, или с размером правильного пятиугольника, в котором вычисляют соотношения длин.
5. Пятая причина показывает, что Пачоли придерживался даже более платоновских взглядов на бытие, чем сам Платон. Пачоли утверждает, что подобно тому, как Господь дал жизнь мирозданию посредством квинтэссенции, нашедшей отражение в додекаэдре, так и золотое сечение дало жизнь додекаэдру, поскольку невозможно построить додекаэдр без золотого сечения. Пачоли добавляет, что невозможно сравнить остальные платоновы тела (символы воды, земли, огня и воздуха) друг с другом без опоры на золотое сечение.

В самой книге Пачоли постоянно разглагольствует о качествах золотого сечения. Он последовательно анализирует 13 так называемых «эффектов» «божественной пропорции» и каждому из этих «эффектов» приписывает эпитеты вроде «неотъемлемый», «неповторимый», «чудесный», «высочайший» и т. д. Например, тот «эффект», что золотые прямоугольники можно вписать в икосаэдр (рис. 22), он называет «непостижимым». Он останавливается на 13 «эффектах», сделав вывод, что «следует завершить этот перечень ради спасения души», поскольку именно 13 человек сидели за столом во время Тайной Вечери.

Не приходится сомневаться, что Пачоли очень интересовался живописью, и целью создания трактата «О божественной пропорции» отчасти было отточить математическую основу изящных искусств. На первой же странице книги Пачоли выражает желание посредством золотого сечения открыть художникам «тайну» гармонических форм. Чтобы обеспечить привлекательность своего труда, Пачоли заручился услугами лучшего иллюстратора, о каком только мог мечтать любой писатель: сам Леонардо да Винчи снабдил книгу 60 рисунками многогранников как в виде «скелетов» (рис. 51), так и в виде сплошных тел (рис. 52). За благодарностью дело не встало — Пачоли написал о Леонардо и его вкладе в книгу так: «Лучший живописец и мастер перспективы, лучший зодчий, музыкант, человек, наделенный всеми возможными достоинствами — Леонардо да Винчи, который придумал и исполнил цикл схематических изображений правильных геометрических тел». Сам же текст, признаться, не достигает

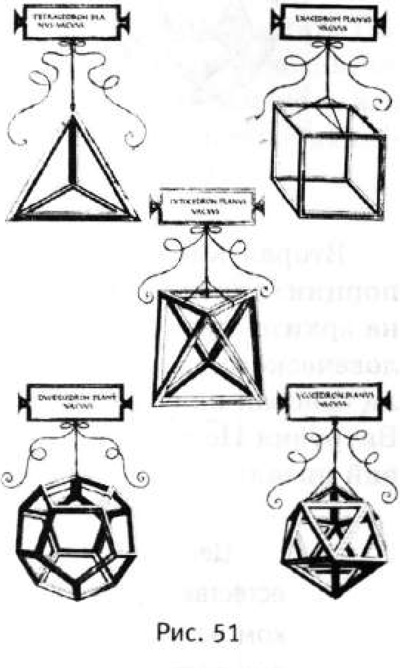


Рис. 51

заявленных высоких целей. Хотя начинается книга с сенсационных тирад, далее следует довольно-таки обычный набор математических формул, небрежно разбавленных философскими определениями.

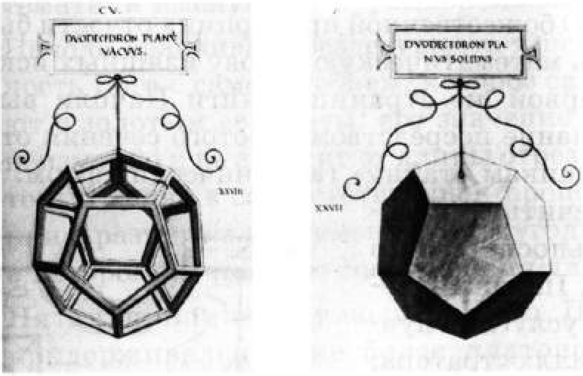


Рис. 52

Вторая книга трактата «О божественной пропорции» посвящена влиянию золотого сечения на архитектуру и его проявлениям в структуре человеческого организма. В основном трактат Пачоли основан на работе римского архитектора Марка Витрувия Поллиона (ок. 70–25 гг. до н. э.). Витрувий писал:

> Центральная точка человеческого тела — это, естественно, пупок. Ведь если человек ляжет ничком на спину и раскинет руки и ноги, а на пупок ему поставить циркуль, то пальцы рук и ног у него коснутся описанной окружности. И подобно тому, как тело человека вписывается в круг, так можно из него получить и квадрат. Ведь если мы измерим расстояние от подошв до макушки, а затем применим эту меру к раскинутым рукам, то окажется,

> что ширина фигуры в точности равна высоте, как и в случае плоских поверхностей, имеющих форму идеального квадрата.

Ученые Возрождения считали этот отрывок очередным доказательством связи между природной и геометрической основой красоты, и это привело к созданию концепции витрувианского человека, которого так прекрасно изобразил Леонардо (рис. 53, в настоящее время рисунок хранится в Галерее Академии в Венеции). Подобным же образом книга Пачоли начинается с обсуждения пропорций человеческого тела, «поскольку в теле человека можно найти пропорции любых видов, по воле Всевышнего явленные через сокровенные тайны природы».

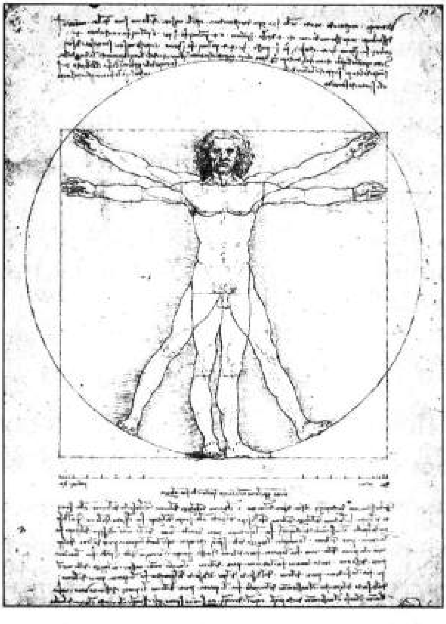


Рис. 53

В литературе можно часто встретить утверждения, что Пачоли будто бы считал, что золотое сечение определяет пропорции всех произведений искусства, однако на самом деле все совсем не так. Говоря о пропорции и внешнем устройстве, Пачоли в основном ссылается на витрувианскую систему, основанную на простых (рациональных) дробях. Писатель Роджер Герц-Фишлер проследил, откуда взялось распространенное заблуждение, что золотое сечение будто бы служило для Пачоли каноном пропорций: оно восходит к ложному утверждению, сделанному в издании «Истории математики» французских математиков Жана Этьена Монтюкла и Жерома де Лаланда 1799 года (*Jean Etienne Montucla*, *Jérôme de Lalande*. Histoire de Mathématiques).

Третий том трактата «О божественной пропорции» (короткая книга в трех частях о пяти правильных геометрических телах), в сущности, представляет собой дословный перевод на итальянский «Пяти правильных многогранников» Пьеро делла Франческа, написанных на латыни. То, что Пачоли ни разу не упоминает, что он всего лишь переводчик книги, вызвало у историка искусств Джорджо Вазари горячее осуждение. Вазари пишет о Пьеро делла Франческа:

> Почитаясь редкостным мастером в преодолении трудностей правильных тел, а также арифметики и геометрии, он, пораженный в старости телесной слепотой, а затем и смертью, не успел выпустить в свет доблестные труды свои и многочисленные книги, им написанные, кои и поныне

> хранятся в Борго, у него на родине. Тот, кто должен был всеми силами стараться приумножить его славу и известность, ибо у него научился всему, что знал, пытался как злодей и нечестивец изничтожить имя Пьеро, своего наставника, и завладеть для себя почестями, которые должны были принадлежать одному Пьеро, выпустив под своим собственным именем, а именно брата Луки из Борго [Пачоли], все труды этого почтенного старца, который помимо вышеназванных наук был превосходным живописцем. (*Пер. М. Глобачева*)

Так можно ли считать Пачоли плагиатором? Весьма вероятно, хотя в «*Summa*» он все же воздает Пьеро должное, называя его «монархом в живописи наших времен» и человеком, который «знаком читателю по многочисленным трудам по искусству живописи и силе линии в перспективе».

Р. Эмметт Тейлор (1889–1956) в 1942 году выпустил книгу под названием «Нет царского пути. Лука Пачоли и его время» (*R. Emmett Taylor*. No Royal Road: Luca Pacioli and His Times). В этой книге Тейлор относится к Пачоли с большой симпатией и отстаивает ту точку зрения, что, если исходить из стиля, Пачоли, вероятно, не имеет никакого отношения к третьему тому трактата «О божественной пропорции», и это сочинение ему лишь приписывают.

Так это или не так, неизвестно, однако несомненно, что если бы не *печатные* труды Пачоли, идеи и математические конструкции Пьеро, которые не были опубликованы в печатном виде, вероятно, не стяжали бы той известности, которая им в результате досталась. Более того, до времен Пачоли золотое сечение было известно под устрашающими названиями вроде «крайнее и среднее отношение» или «пропорция, имеющая среднее и два экстремума», и само это понятие было известно одним лишь математикам.

Публикация «О божественной пропорции» в 1509 году вызвала новую вспышку интереса к теме золотого сечения. Теперь концепцию рассматривали, что называется, свежим взглядом: раз о ней издали книгу, значит, она достойна уважения. Само название золотого сечения оказалось наделено теолого-философским смыслом (*божественная* пропорция), а это также делало золотое сечение не просто математическим вопросом, а темой, в которую могли углубиться интеллектуалы самого разного толка, причем это разнообразие со временем лишь ширилось. Наконец, с появлением труда Пачоли золотое сечение стали изучать и художники, поскольку теперь о нем говорилось не только в откровенно математических трактатах — Пачоли рассказал о нем так, что этим понятием можно было пользоваться.

Рисунки Леонардо к трактату «О божественной пропорции», начертанные (по выражению Пачоли) «его неописуемой левой рукой», также оказали определенное воздействие на читательскую аудиторию. Вероятно, это были первые изображения многогранников в схематическом, скелетоподобном виде, что позволяло легко представить их себе со всех сторон. Возможно, Леонардо рисовал многогранники с деревянных моделей, поскольку в документах Совета Флоренции сохранились записи о том, что город приобрел набор деревянных моделей Пачоли, дабы выставить их на всеобщее обозрение. Леонардо рисовал не только схемы для книги Пачоли, наброски всевозможных многогранников мы видим повсюду в его заметках. В одном месте Леонардо дает приблизительный метод построения правильного пятиугольника. Слияние математики с изобразительным искусством достигает пика в «*Trattato della pittura*» («Трактате о живописи»), который составил Франческо Мельци, унаследовавший рукописи Леонардо, по его записям. Начинается трактат с предупреждения: «Тот, кто не математик, да не прочтет мои труды!» — едва ли такое заявление найдешь в современных учебниках по изобразительному искусству!

Рисунки геометрических тел из трактата «О божественной пропорции» вдохновили и фра Джованни да Верона на создание работ в технике *интарсии*. Интарсия — это особый вид инкрустации деревом по дереву, создание сложных плоских мозаик. Около 1520 года фра Джованни создал инкрустированные панели с изображением икосаэдра, причем в качестве образца он почти наверняка пользовался схематическими рисунками Леонардо.

Пути Леонардо и Пачоли несколько раз пересекались и после завершения трактата «О божественной пропорции». В октябре 1499 года оба бежали из Милана, когда его захватила французская армия короля Людовика XII. Потом ненадолго останавливались в Мантуе и в Венеции и на некоторое время осели во Флоренции. За тот период, когда они дружили, Пачоли создал еще два труда по математике, прославивших его имя — перевод на латынь «Начал» Евклида и книгу о математических развлечениях, оставшуюся неопубликованной. Перевод «Начал», который выполнил Пачоли, был аннотированной версией, основанной на более раннем переводе Джованни Кампано (1220–1296), который был напечатан в Венеции в 1482 году (это было первое *печатное* издание). Добиться публикации сборника занимательных задач по математике и поговорок «*De Viribus Quantitatis*» («О способностях чисел») Пачоли при жизни так и не смог — он скончался в 1517 году. Эта работа была плодом сотрудничества между Пачоли и Леонардо, и в заметках самого Леонардо содержится довольно много задач из трактата «*De Viribus Quantitatis*».

Конечно, прославила фра Луку Пачоли отнюдь не оригинальность научной мысли, а его влияние на развитие математики в целом и на историю золотого сечения в частности, и этих его заслуг отрицать никак нельзя.

Меланхолия

Интересное сочетание художественных и математических интересов было свойственно и другому великому мыслителю эпохи Возрождения — знаменитому немецкому живописцу Альбрехту Дюреру.

Дюрера часто считают величайшим немецким художником эпохи Возрождения. Родился он 21 мая 1471 года в имперском городе Нюрнберге в семье ювелира, трудившегося не покладая рук. Уже в 19 лет Альбрехт проявлял недюжинный талант живописца и резчика по дереву и заметно превзошел своего учителя, лучшего нюрнбергского живописца и книжного иллюстратора Михаэля Вольгемута. Поэтому Дюрер на четыре года отправился путешествовать и за это время пришел к убеждению, что математика — «самая точная, логичная и графически выверенная из всех наук» — должна быть важной составной частью изобразительного искусства.

Вернувшись, он пробыл в Нюрнберге совсем недолго, но за это время успел жениться на Агнесе Фрей, дочери преуспевающего ремесленника, а затем снова отправился в путешествие — в Италию — с целью расширить свой кругозор и в математике, и в изобразительном искусстве. Видимо, этой цели он вполне достиг во время визита в Венецию в 1494–1495 году. Встреча с основателем венецианской школы живописи Джованни Беллини (ок. 1426–1516) произвела на молодого художника неизгладимое впечатление, он восхищался Беллини до конца своих дней. В это же время Дюрер познакомился и с Якопо де Барбари, тем самым, который написал портрет Луки Пачоли (рис. 50), а в результате изучил и труды Пачоли о математике и ее значении в изобразительном искусстве. В частности, де Барбари показал Дюреру, как строить мужскую и женскую фигуры при помощи геометрических методов, и это подтолкнуло Дюрера к изучению пропорций и движения человеческого тела.

Возможно, Дюрер встречался с Пачоли и лично — это было в Болонье во время его второго визита в Италию (1501–1507). В письме того времени он упоминает, что поездка в Болонью предпринималась «ради искусства, поскольку там есть человек, который научит меня тайному искусству перспективы». Загадочный «человек из Болоньи», по мнению многих толкователей, — именно Пачоли, хотя предлагаются и другие имена, например, выдающийся зодчий Донато ди Анджело Браманте (1444–1514) и теоретик архитектуры Себастьяно Серлио (1475–1554). Во время того же путешествия в Италию Дюрер снова встретился с Якопо ди Барбари. Однако второй визит для Дюрера был омрачен параноидальными подозрениями: он боялся, как бы другие художники, позавидовав его славе, не навредили ему. В частности, он отказывался от приглашений на обеды из опасения, что кто-нибудь попытается его отравить.

С 1495 года Дюрер демонстрирует серьезный интерес к математике. Он долго изучал «Начала» (приобрел в Венеции латинский перевод, хотя латынь знал не очень хорошо), сочинения Пачоли по математике и изобразительному искусству и авторитетные труды по архитектуре, пропорциям и перспективе римского зодчего Витрувия и итальянского зодчего и теоретика Леона Баптисты Альберти (1404–1472).

Вклад Дюрера в историю золотого сечения состоит и в письменных трудах, и в произведениях изобразительного искусства. В 1525 году вышел в свет его главный трактат «*Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit*» («Трактат об измерениях при помощи циркуля и линейки»), одна из первых книг по математике, опубликованных в Германии. В этом сочинении Дюрер жалуется, что очень многие художники невежественны в геометрии, «без которой никто не может ни быть, ни стать совершенным художником». В первой из четырех книг, составляющих «Трактат», даны подробные рекомендации, как строить различные кривые, в том числе и логарифмическую (равноугольную) спираль, которая, как мы уже видели, тесно связана с золотым сечением. Вторая книга содержит точные и приблизительные способы построения различных многоугольников, в том числе и два способа построения правильного пятиугольника (один точный, другой приблизительный). В четвертой книге обсуждаются платоновы тела, а также и другие многогранники — некоторые из них Дюрер изобрел сам — и теория перспективы и светотени. Книга Дюрера задумана не как учебник по геометрии, в частности, он дает лишь один пример доказательства. Напротив, Дюрер всегда начинает с практического применения, а затем перечисляет самые основные теоретические сведения. Книга содержит и первые примеры разверток многогранников. Развертка — это рисунок на плоскости, где изображена поверхность многогранника в таком виде, что ее можно вырезать и сложить из получившейся фигуры трехмерный многогранник. Чертеж развертки додекаэдра (связанного, как мы знаем, с золотым сечением), выполненный Дюрером, мы видим на рис. 54.

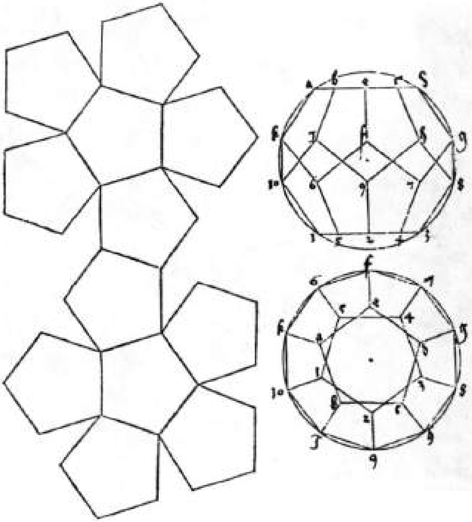


Рис. 54

Интерес к гравюре и резьбе по дереву в сочетании с интересом к математике отражен в загадочной аллегорической работе Дюрера «Меланхолия I» (рис. 55). Это одна из трех изысканных гравюр (две другие называются «Рыцарь, Смерть и Дьявол» и «Св. Иероним в своей келье»). Предполагается, что эту гравюру Дюрер создал во время приступа меланхолии после смерти матери. Центральная фигура «Меланхолии» — крылатая женщина, в полном отчаянии и апатии сидящая на каменном парапете. В правой руке у нее циркуль, ножки которого растворены, словно для измерений. Почти все, что изображено на этой гравюре, наделено сложным символическим значением, и его толкованию посвящены целые статьи. Например, полагают, что

Рис. 55

горшок на очаге слева посередине и весы наверху — символы алхимии. «Магический квадрат» справа вверху (то есть квадрат, в котором суммы чисел в каждом ряду, колонке, по диагонали и сумма чисел в четырех углах и сумма четырех центральных чисел равны 34 — кстати, это число Фибоначчи), видимо, символизирует математику (рис. 56). Два средних числа в нижнем ряду составляют 1514 — дату создания гравюры. Вероятно, магический квадрат — следствие влияния Пачоли, поскольку в трактате Пачоли «*De Viribus*» приводится целый ряд магических квадратов. Видимо, основное значение гравюры со всеми ее геометрическими фигурами, ключами, летучей мышью, морским пейзажем и прочим — это меланхолия, охватившая художника или мыслителя, погрязшего в сомнениях и размышлениях о том, чем он занимается, а между тем время — песочные часы наверху — не стоит на месте.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 56

Странный многогранник слева посередине стал предметом серьезного обсуждения и различных попыток реконструкции. На первый взгляд это куб, у которого срезаны два противолежащих угла (что спровоцировало кое-какие фрейдистские интерпретации), но на самом деле это не так. Большинство исследователей сходятся на том, что это так называемый ромбоэдр (геометрическое тело с шестью гранями, каждая из которых — ромб, см. рис. 57), обрезанный так, чтобы его можно было вписать в сферу. Он покоится на одной из треугольных граней, и его передняя часть направлена прямо на волшебный квадрат. Углы грани многогранника также были предметом споров. Многие ученые предполагают, что они составляли 72 градуса, что связало бы фигуру с золотым сечением (см. рис. 25), однако голландский специалист по кристаллографии К.Г. Макгиллаври заключил на основе анализа перспективы, что углы составляют 80 градусов. Загадочные свойства этого геометрического тела прекрасно описаны в статье Т. Линча, опубликованной в 1982 году в «*Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*». Вот к какому выводу приходит автор: «Поскольку изображение многогранников считалось одной из главных задач геометрии перспективы, Дюрер, желая доказать свою осведомленность в этой области, едва ли мог найти для этого способ лучше, чем поместить на свою гравюру геометрическое тело, столь новое и, возможно, даже уникальное, и предоставить другим геометрам решать, что это и откуда оно взялось».

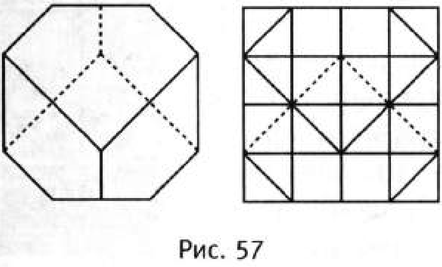


Рис. 57

За исключением авторитетного труда Пачоли и изысканий художников Леонардо и Дюрера на стыке математики и изобразительного искусства, ничего особенно нового в истории золотого сечения в XVI веке не произошло. Хотя многие математики, в том числе Рафаэль Бомбелли (1526–1572) и Франсуа Фуа (Флуссатес) (1502–1594), опирались на золотое сечение при решении самых разнообразных задач, в том числе связанных с правильным пятиугольником и платоновыми телами, более интересные применения нашего соотношения появились лишь в самом конце этого столетия. Однако труды Пачоли, Дюрера и других ученых оживили интерес к учениям Платона и Пифагора. Мыслители эпохи Возрождения внезапно увидели реальную возможность связать математику и рациональную логику с устройством Вселенной — в духе платоновского мировоззрения. Концепции вроде «божественной пропорции», с одной стороны, выстраивали мосты между математикой и устройством мироздания, а с другой — обеспечивали связь между физикой, теологией и метафизикой. И особенно ярко воплотил эту чарующую смесь математики и мистики в своих идеях и трудах не кто иной, как Иоганн Кеплер.

Mysterium Cosmographicum

Иоганна Кеплера помнят в основном как выдающегося астронома, оставившего нам, помимо всего прочего, три закона движения планет, носящие его имя. Однако Кеплер был также и талантливым математиком, тонким метафизиком и плодовитым писателем. Родился он во времена больших политических потрясений и религиозных войн, которые коренным образом повлияли и на его образование, и на жизнь, и на мышление. Кеплер родился 27 декабря 1571 года в Германии, в имперском городе Вайль-дер-Штадт, в доме своего деда Зебальда. Отец

Иоганна Генрих, наемный солдат, почти все детские годы сына провел в походах, а во время кратких побывок, по словам Кеплера, вел себя «оскорбительно, резко и задиристо». Когда Кеплеру было около шестнадцати, отец ушел из дома, и больше его не видели. Видимо, он участвовал в каком-то морском походе в составе флота Неаполитанского королевства и умер по дороге домой. Следовательно, воспитывала Кеплера в основном его мать Катарина, работавшая в гостинице, которую держал ее отец. Сама Катарина была женщина со странностями, довольно-таки неприятная, собирала травы и была убеждена в их волшебных целительных свойствах. Стечение обстоятельств — личные обиды, неудачные сплетни и алчность — в конечном счете привело к тому, что Катарина уже в старости, в 1620 году, была арестована по обвинению в ведовстве. В то время подобные обвинения были нередки, в период с 1615 по 1629 год в Вайль-дер-Штадте казнили за колдовство как минимум 38 женщин. Кеплер на момент ареста матери был уже известным человеком, и весть о суде над матерью вызвала у него «несказанное огорчение». В сущности, он взял на себя ее защиту в суде и заручился помощью юридического факультета Тюбингенского университета. Процесс был долгим, но в конце концов обвинение с Катарины Кеплер было снято, в основном благодаря ее собственным показаниям, данным под угрозой страшных пыток: Катарина упорно отрицала свою вину. Эта история передает атмосферу, в которой проходила научная работа Кеплера, и доминирующие в то время умонастроения. Кеплер родился в обществе, всего за полвека до этого пережившем отход Мартина Лютера от католической церкви и его заявление, что единственное, что нужно Господу от человека — это вера. Этому обществу еще предстояло погрузиться в кровавое безумие Тридцатилетней войны. Можно лишь изумляться, как Кеплер, человек из подобной среды, на долю которого выпали такие взлеты и падения, столь бурная жизнь, сумел сделать открытие, которое многие считают подлинным рождением современной науки.

Научные изыскания Кеплер начал еще в школе при монастыре Маульбронн, а затем, в 1589 году, выиграл стипендию герцога Вюртембергского и получил возможность посещать лютеранскую семинарию при Тюбингенском университете. Больше всего его интересовали две темы, теология и математика; в его представлении они были теснейшим образом связаны. Астрономию в то время считали частью математики, и наставником Кеплера в астрономии был выдающийся ученый Михаэль Местлин (1550–1631); связь с ним Кеплер поддерживал и после отъезда из Тюбингена. Во время официальных занятий Местлин, конечно, учил лишь традиционной птолемеевой, геоцентрической системе, согласно которой Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер и Сатурн вращаются вокруг стационарной Земли. Однако Местлин был прекрасно осведомлен о гелиоцентрической системе Николая Коперника, сведения о которой были опубликованы в 1543 году, и в частных беседах обсуждал со своим любимым учеником Кеплером достоинства этой системы. По системе Коперника шесть планет (включая Землю, однако исключая Луну, которая считалась уже не планетой, а «спутником») вращаются вокруг Солнца. Примерно так же, как из движущегося автомобиля можно наблюдать лишь относительное движение других машин, в системе

Коперника движение планет во многом попросту отражает движение самой Земли.

Похоже, система Коперника Кеплеру сразу понравилась. Фундаментальная идея этой космологии, согласно которой центральное Солнце окружено сферой неподвижных звезд, причем между Солнцем и сферой остается некоторое пространство, в точности соответствовала представлению Кеплера о мироздании. Кеплер был человек глубоко религиозный и верил, что Вселенная — отражение Творца. Единство Солнца, звезд и пространства между ними были для него символическим подобием Святой Троицы — Отца, Сына и Святого Духа.

Когда Кеплер с отличием закончил факультет изящных искусств и был уже готов завершить теологическое образование, произошло событие, изменившее его выбор профессии: он стал не пастором, а учителем математики. Протестантская семинария австрийского города Грац попросила Тюбингенский университет порекомендовать заместителя для одного из своих преподавателей математики, который скоропостижно скончался, и университет выбрал Кеплера. В марте 1594 года Кеплер не по своей воле отправился в путешествие в Грац в австрийской провинции Стирия; на дорогу ушел целый месяц.

Поняв, что судьба навязала ему карьеру математика, Кеплер преисполнился решимости исполнить свой христианский долг так, как он его себе представлял: постигнуть творение Господне, устройство Вселенной. Поэтому он проштудировал переводы «Начал» и труды александрийских геометров Аполлония и Паппа. Опираясь на основной принцип коперниковой гелиоцентрической системы, Кеплер решил найти ответы на два главных вопроса: почему планет именно шесть и что определяет именно такие расстояния между планетарными орбитами. Вопросы «почему» и «что» в астрономии были в новинку. В отличие от своих предшественников, которым было довольно всего-навсего отмечать наблюдаемые положения планет, Кеплер стремился вывести теорию, которая бы все объясняла. Свой новый подход, выход на новый уровень любознательности Кеплер объяснял очень красиво:

> При любых умственных изысканиях бывает так, что начинаем мы с того, что поражает чувства, а затем благодаря своему устройству разум возносится к вышнему, к тому, чего не постигнуть, сколь бы остры ни были наши чувства. То же самое бывает и в астрономических занятиях, когда мы прежде всего воспринимаем глазами различные положения планет в разное время, а затем в дело вступает логика и на основании этих наблюдений ведет разум к постижению устройства Вселенной.

Однако Кеплер задавался еще одним вопросом: при помощи какого орудия Господь проектировал Свою Вселенную? Первые мысли, которые впоследствии сложились в совершенно фантастические ответы на космические вопросы, посетили Кеплера 19 июля 1595 года, когда он пытался объяснить конъюнкцию внешних планет — Юпитера и Сатурна (положение, при котором у двух небесных тел одни и те же небесные координаты). В общих чертах Кеплер понял вот что: если вписать равносторонний треугольник в окружность (так, чтобы его вершины лежали на окружности), а потом вписать другую окружность в этот треугольник (так, чтобы она касалась середин сторон, см. рис. 58), соотношение радиуса большей окружности к радиусу меньшей будет примерно таким же, как соотношение размеров орбиты Сатурна к размерам орбиты Юпитера. Продолжая рассуждать в том же духе, Кеплер решил, что, дабы получить орбиту Марса (следующей планеты, ближе к Солнцу), нужно вписать в маленький круг следующую геометрическую фигуру, то есть квадрат. Однако при этом нужного размера не получилось. Кеплер не сдался, а поскольку он уже ступил на путь платоновского образа мысли — был убежден, что «Господь геометризирует», — то, естественно, сделал следующий геометрический шаг и обратился к трехмерным телам. В результате этого умственного упражнения Кеплер впервые прибегнул к геометрическим телам, связанным с золотым сечением.

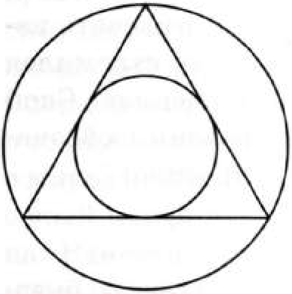
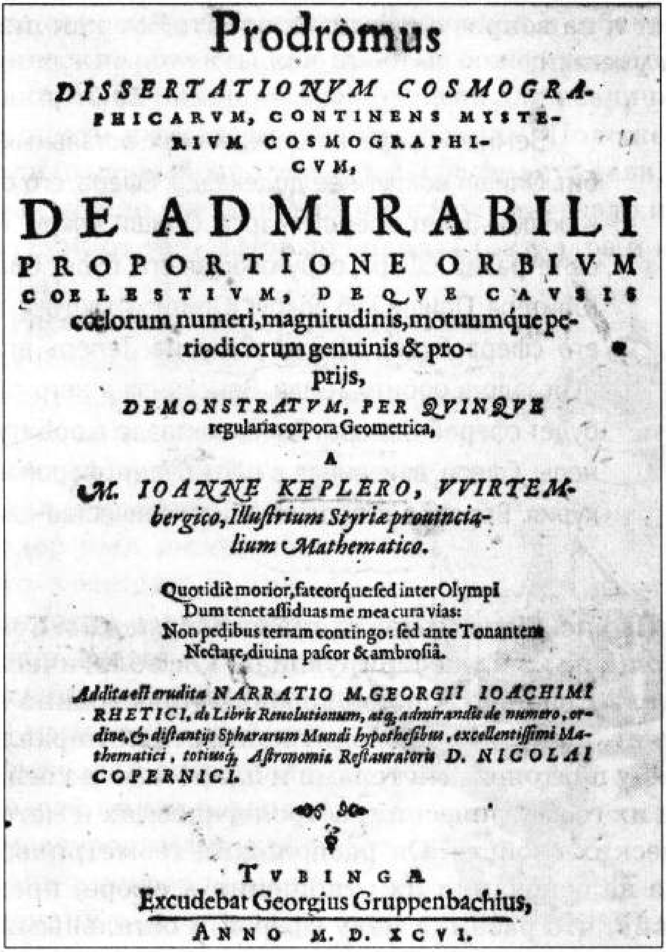


Рис. 58

Ответ на первые два вопроса, которые занимали Кеплера, дан в первом его трактате под названием «*Mysterium Cosmographicum*» («Космографическая загадка»), который вышел в свет в 1597 году. Полное название, приведенное на титульном листе книги (рис. 59; хотя там стоит дата публикации 1596, вышла книга только в следующем году) гласит: «Предварительное введение в космографические рассуждения, содержащее вселенскую загадку восхитительных пропорций Небесных Сфер, а также Истинные и Подлинные Причины их Размеров, Количества и Периодического Движения Небес, доказанные при помощи Пяти Правильных Геометрических Тел».



Prodromus
DISSERTATIONVM COSMOGRA-
PHICARVM, CONTINENS MYSTE-
RIVM COSMOGRAPHI-
CVM,
DE ADMIRABILI
PROPORTIONE ORBIVM
COELESTIVM, DEQVE CAVSIS
cœlorum numeri, magnitudinis, motuumque pe-
riodicorum genuinis & pro-
prijs,
DEMONSTRATVM, PER QVINQVE
regularia corpora Geometrica,
A
M. IOANNE KEPLERO, VVIRTEM-
bergico, Illuſtrium Styriæ prouincia-
lium Mathematico.

Quotidiè morior, fateorque: ſed inter Olympi
Dum tenet aſſiduas me mea cura vias:
Non pedibus terram contingo: ſed ante Tonantem
Nectare, diuina paſcor & ambroſiâ.

Addita eſt erudita NARRATIO M. GEORGII IOACHIMI
RHETICI, de Libris Reuolutionum, atq; admirandis de numero, or-
dine, & diſtantijs Sphærarum Mundi hypotheſibus, excellentiſſimi Ma-
thematici, totiusq; Aſtronomiæ Reſtauratoris D. NICOLAI
COPERNICI.

TVBINGÆ
Excudebat Georgius Gruppenbachius,
ANNO M. D. XCVI.

Рис. 59

Ответ на вопрос, почему планет именно шесть, дался Кеплеру очень просто: потому что правильных платоновых тел ровно пять. Если считать, что они задают промежутки между планетами, получается шесть промежутков, считая внешнюю сферическую границу — небеса с фиксированными звездами. Более того, модель Кеплера призвана дать ответ и на вопрос о размерах орбит. Вот как пишет сам ученый:

> Земная сфера есть мера всех остальных орбит. Опиши вокруг нее додекаэдр. Сфера, его окружающая, будет сферой Марса. Опиши вокруг Марса тетраэдр. Сфера, окружающая его, будет сферой Юпитера. Опиши куб вокруг Юпитера. Окружающая его сфера будет сферой Сатурна. Теперь впиши икосаэдр в орбиту Земли. Вписанная в него сфера будет сферой Венеры. Впиши октаэдр в орбиту Венеры. Сфера, вписанная в него, будет сферой Меркурия. Вот тебе и обоснование количества планет.

На рис. 60 показана схема из «*Mysterium Cosmographicum*», иллюстрирующая космологическую модель Кеплера. Кеплер довольно пространно объясняет, почему он проводит конкретные параллели между платоновыми телами и планетами на основании их геометрических, астрологических и метафизических свойств. Он расположил геометрические тела на основании их отношения к сфере, предположив, что разница меду сферой и остальными геометрическими телами отражает разницу между творцом и творением. Подобным же образом куб характеризуется *одним-единственным* углом — прямым. Для Кеплера это символизировало одиночество, которое ассоциируется с Сатурном, и т. д. Вообще говоря, астрология была для Кеплера так важна, поскольку «Человек есть венец Вселенной и всего творения», и метафизический подход обосновывался тем обстоятельством, что «математические свойства — причины физических, поскольку Бог с самого начала времен заключал в себе математические объекты как простые божественные абстракции, служившие прототипами для различных количеств на материальном уровне». Положение Земли было выбрано так, чтобы разделять тела, которые можно поставить стоймя (куб, тетраэдр и додекаэдр), от тел, которые «парят» (октаэдра и икосаэдра).

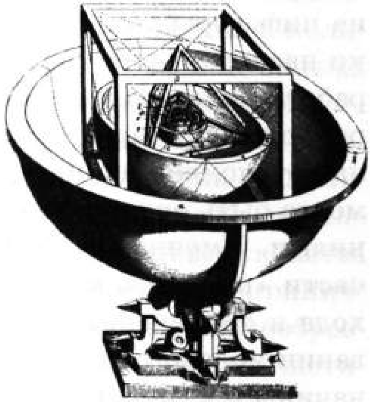


Рис. 60

Расстояния между планетами, полученные из этой модели, в одних случаях вполне совпадали с действительностью, а в других заметно отличались, правда, различие составляло не более 10 %. Кеплер был непоколебимо убежден в правильности своей модели и несоответствия списывал на погрешности измерения орбит. Он разослал экземпляры своей книги различным астрономам, чтобы они высказали свои замечания и предложения; в их числе был и один из самых выдающихся ученых того времени датчанин Тихо Браге (1546–1601). Один экземпляр попал даже в руки великому Галилео Галилею (1564–1642), который сообщил Кеплеру, что тоже уверен в правильности модели Коперника, однако с огорчением признал, что «огромному множеству людей, ибо таково количество дураков», Коперник «представляется достойным предметом для осмеяния и освистывания».

Нет нужды говорить, что космологическая модель Кеплера, основанная на платоновых телах, была не просто совершенно неверной, но и безумной даже по меркам современников ученого. Открытие Урана (следующей планеты после Сатурна, если считать от Солнца) в 1781 году и Нептуна (следующей после Урана) в 1846 году забили последний гвоздь в крышку гроба этой мертворожденной идеи. Тем не менее, нельзя недооценивать значение модели Кеплера в истории науки. Как отметил астроном Оуэн Джинджерич в статье, посвященной биографии Кеплера: «В истории редко случалось, чтобы столь ошибочная книга направила дальнейшее течение науки в столь верное русло». Кеплер опирался на пифагорейскую идею мироздания, и математики назвали бы это большим шагом вперед. Он разработал *математическую модель* Вселенной, которая, с одной стороны, была основана на имевшихся на тот момент данных наблюдений, а с другой — могла быть *опровергнута* последующими наблюдениями. Именно это и есть необходимые составные части «научного метода» — организованного подхода к объяснению наблюдаемых фактов на основании модели природы. Идеальный научный метод начинается со сбора фактов, затем предлагается модель, а потом то, что она предсказывает, проверяется в ходе либо искусственных экспериментов, либо дальнейших наблюдений. Иногда этот процесс описывают тремя словами: индукция, дедукция, проверка. В 1610 году Галилей при помощи своего телескопа открыл еще четыре небесных тела в Солнечной системе. Если бы было доказано, что это планеты, теории Кеплера был бы нанесен смертельный удар еще при жизни ученого. Однако, к вящей радости Кеплера, новые тела оказались спутниками Юпитера, подобными нашей Луне, а не новыми планетами, обращающимися вокруг Солнца.

Современные физические теории, нацеленные на объяснение существования всех элементарных (субатомных) частиц и основных взаимодействий между ними, также основаны на математической симметрии и в этом смысле очень похожи на теорию Кеплера, который опирался на симметричные качества платоновых тел, дабы объяснить количество и свойства планет. У модели Кеплера была еще одна общая черта с современной фундаментальной теорией Вселенной: обе теории по своей природе *редукционистские*, то есть они стремятся объяснить много явлений малым количеством физических законов. Например, модель Кеплера выводит и количество планет, и свойства их орбит из платоновых тел. Подобным же образом современные теории — например, теория струн — опирается на основополагающие сущности (струны), очень маленькие (более чем в миллиард миллиардов раз меньше атомного ядра), из которых выводятся все свойства элементарных частиц. Струны — подобно скрипичной струне — вибрируют и порождают разнообразные «тоны», и все известные элементарные частицы всего-навсего воплощают эти тоны.

Во время пребывания в Граце Кеплер интересовался золотым сечением, что привело к другому интересному результату. В октябре 1597 года ученый написал своему бывшему учителю Местлину о следующей теореме: «Если на отрезке, разделенном в крайнем и среднем отношении, построить прямоугольный треугольник так, чтобы прямой угол лежал на перпендикуляре, проведенном в точке разделения, то меньший катет будет равняться большему сегменту разделенного отрезка». Чертеж к этой теореме представлен на рис. 61. Отрезок AB разделен точкой C в золотом сечении. Кеплер строит прямоугольный треугольник *ADB* с гипотенузой AB так, что прямой угол *D* лежит на перпендикуляре, проведенном из точки золотого сечения C. Затем он доказывает, что *BD* (короткий катет прямоугольного треугольника) равен AC (более длинному сегменту отрезка, разделенного в золотом сечении). Кроме применения золотого сечения, такой треугольник примечателен еще и тем, что исследователь пирамид Фридрих Ребер в 1855 году приводит его при доказательстве одной из ложных теорий, предполагавших применение золотого сечения при строительстве пирамид. О трудах Кеплера Ребер не знал, однако применил похожее построение, чтобы подтвердить свое мнение о важнейшей роли «божественной пропорции» в архитектуре.

Публикация *«Mysterium Cosmographicum»* стала поводом для знакомства Кеплера с Тихо Браге; местом встречи, состоявшейся 4 февраля 1600 года, стала Прага, в то время — резиденция императора Священной Римской Империи. В итоге этой встречи в октябре того же 1600 года Кеплер перебрался в Прагу и стал помощником Тихо Браге (из-за своей лютеранской веры он был вынужден покинуть католический Грац). После смерти Браге 24 октября 1601 года Кеплер стал придворным математиком.

Тихо оставил массу наблюдений, в особенности связанных с орбитой планеты Марс, и Кеплер, опираясь на эти данные, открыл первые два закона движения планет, названные его именем. Первый закон Кеплера гласит, что орбиты известных планет вокруг Солнца — не окружности, а эллипсы с Солнцем в одном из фокусов (рис. 62; для наглядности эллипс вытянут гораздо сильнее, чем на самом деле). У эллипса есть две точки, так называемые фокусы, такие, что сумма расстояний любой точки эллипса до обоих фокусов всегда постоянна. Второй закон Кеплера утверждает, что планета движется быстрее всего, когда она ближе всего к Солнцу (эта точка называется перигелий), а медленнее всего — в самой дальней точке (афелии), так что линия, соединяющая планету с Солнцем, описывает (заметает) равные площади за равные промежутки времени (рис. 62). Вопрос о том, благодаря чему законы Кеплера справедливы, был главной нерешенной загадкой науки почти семьдесят лет после того, как Кеплер опубликовал свои законы. Понадобился гений Исаака Ньютона (1642–1727), чтобы сделать вывод, что планеты держатся на орбитах благодаря силе тяготения. Ньютон объяснил законы Кеплера при помощи уравнений, где законы, описывающие движение тел, сочетались с законом всемирного тяготения. Он показал, что эллиптические орбиты с переменной скоростью (согласно законам

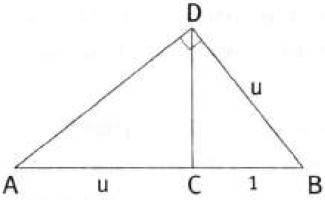


Рис. 61

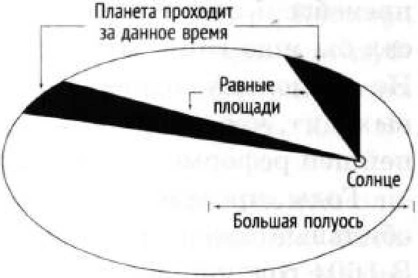


Рис. 62

Кеплера) и предоставляют собой единственное возможное решение этих уравнений.

Героические усилия Кеплера по расчету орбиты Марса (много сотен листов арифметических выкладок и их толкований, которые сам он называл «моей военной кампанией против Марса»), по мнению многих исследователей, знаменуют рождение современной науки. В частности, в какой-то момент Кеплер обнаружил круговую орбиту, которая соответствовала почти всем наблюдениям Тихо Браге. Однако в двух случаях эта орбита предсказывала позиции, отличавшиеся от наблюдений примерно на четверть углового диаметра полной луны. Об этом Кеплер писал так: «Стоило мне предположить, что мы можем пренебречь этими восемью минутами [дуги], и я вписал бы мою гипотезу в соответствующую 16 главу. Но поскольку пренебрегать ими непозволительно, выходит, что эти восемь минут указали путь к полнейшей реформе астрономии».

Годы, проведенные Кеплером в Праге, принесли обильные плоды и в астрономии, и в математике. В 1604 году он обнаружил «новую» звезду, известную теперь как Сверхновая Кеплера. Сверхновая — это мощный взрыв, при котором звезда, конец которой близок, сбрасывает свои внешние оболочки, которые при этом движутся со скоростью в десятки тысяч километров в секунду. В нашей родной галактике Млечный Путь подобная вспышка, по расчетам ученых, должна происходить в среднем раз в сто лет. И в самом деле, Тихо Браге открыл сверхновую в 1572 году (Сверхновая Тихо Браге), а Кеплер открыл свою в 1604 году. Однако с тех пор, по неясным причинам, других сверхновых в Млечном пути не было (кроме еще одной, которая, судя по всему, вспыхнула в 1660 годах, но осталась незамеченной).

Астрономы шутят, что подобное отсутствие сверхновых, скорее всего, связано с тем, что после Тихо Браге и Кеплера не было великих астрономов.

В июне 2001 года я побывал в Праге, в доме, где жил Кеплер, по адресу Карлова улица, 4. Сейчас это оживленная торговая улица, и ржавую мемориальную дощечку над номером 4, где значится, что здесь с 1605 по 1612 год жил Кеплер, легко не заметить. Владелец магазинчика, расположенного прямо под квартирой Кеплера, даже не знал, что здесь жил один из величайших астрономов в истории. Правда, в унылом внутреннем дворике стоит маленькая армиллярная сфера с вырезанным на ней именем Кеплера, а возле почтовых ящиков висит еще одна мемориальная дощечка. Однако квартира Кеплера вообще никак не отмечена и не открыта для публики — сейчас это просто жилая квартира, каких много на верхних этажах над магазинами, и ее занимает обычное семейство.

Математические труды Кеплера внесли несколько ярких штрихов в историю золотого сечения. В тексте письма, которое Кеплер написал в 1608 году одному лейпцигскому преподавателю, мы обнаруживаем, что он открыл соотношение между числами Фибоначчи и золотым сечением. Об этом открытии он сообщает также в эссе, где изучает, почему снежинки имеют шестиконечную форму. Кеплер пишет:

> Из двух правильных геометрических тел — додекаэдра и икосаэдра... эти два правильных многогранника и, по сути дела, структуру самого правильного пятиугольника невозможно выстроить без божественной пропорции, как называют ее нынешние геометры. Она устроена так, что два мень-

> ших члена прогрессии вместе составляют третий, а два последних, если их сложить, составляют непосредственно следующий за ними, и так далее до бесконечности, если не нарушать и продолжать эту пропорцию... Чем дальше мы отходим от номера первого, тем совершеннее становится пример. Пусть самыми маленькими числами будут 1 и 1... сложи их, и сумма будет 2, прибавь это число к последнему из 1, получишь 3, прибавь к нему 2 и получишь 5, прибавь три — получишь 8; 5 к 8–13; 8 к 13–21. Как 5 к 8, так и 8 к 13 — приблизительно, — и как 8 к 13, так и 13 к 21 — приблизительно.

Иначе говоря, Кеплер обнаружил, что отношение последовательных чисел Фибоначчи сходится к золотому сечению. По сути дела, он открыл и еще одно интересное свойство чисел Фибоначчи — что квадрат любого члена последовательности отличается не более чем на 1 от произведения двух соседних членов последовательности. Например, поскольку последовательность Фибоначчи — 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ..., то если мы рассмотрим $3^2=9$, то 9 лишь на 1 отличается от произведений двух членов последовательности, соседних с 3: $2\times5=10$. Подобным же образом $13^2=169$ отличается на 1 от $8\times21=168$ и т. д. Это качество чисел Фибоначчи подводит нас к удивительному парадоксу, который первым обнаружил великий изобретатель математических головоломок Сэм Лойд (1841–1911).

Рассмотрим квадрат со стороной 8 (с площадью $8^2=64$) на рис. 63. Теперь разрежем его на четыре части по намеченным линиям. Из этих четырех кусочков можно составить прямоугольник (рис. 64) со сторонами 13 и 5 — то есть с площадью 65! Откуда взялся дополнительный квадратик?! Ответ на этот парадокс состоит в том, что на самом деле детали головоломки не сходятся идеально вдоль длинной диагонали прямоугольника, получается длинный узкий параллелограмм, которого не видно из-за жирной линии, обозначающей длинную диагональ на рис. 64, и его площади как раз хватает на площадь одного квадратика-единицы. Само собой, 8 — число Фибоначчи, и его квадрат $8^2=64$ отличается на 1 от произведения двух соседних чисел Фибоначчи ($3\times5=65$): свойство, которое открыл Кеплер.

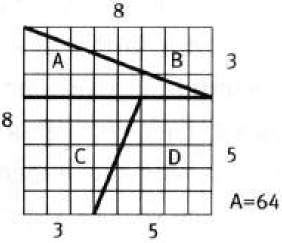


Рис. 63

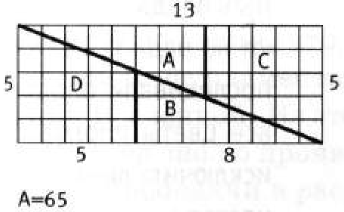


Рис. 64

Наверное, вы уже заметили, что Кеплер именует золотое сечение «божественной пропорцией, как называют ее нынешние геометры». Все научные изыскания Кеплера окрашены сочетанием рациональных рассуждений с христианскими убеждениями. Кеплер был естествоиспытателем-христианином и считал своим долгом понять не только устройство Вселенной, но и намерения ее Творца. Свою гипотезу о Солнечной системе он строил под влиянием сильной тяги к числу 5, перенятой у пифагорейцев, и о золотом сечении писал следующим образом:

Особенность этого соотношения заключается в том, что похожую пропорцию можно построить из целого и большей части, и то, что раньше было большей частью, теперь становится меньшей, а то, что раньше было целым, теперь становится большей частью, а сумма их обладает соотношением целого. Так происходит до бесконечности, а божественная пропорция всегда сохраняется. Я полагаю, что эта геометрическая пропорция и послужила идеей Творцу, когда Он творил подобное из подобного по образу и подобию Своему – и это тоже происходит до бесконечности. Число пять я вижу почти во всех цветках, которые прокладывают путь плодам, то есть творению, и которые существуют не ради себя самих, а ради того, чтобы за ними последовали плоды. Сюда можно включить почти все цветы плодовых деревьев; следует, вероятно, исключить лимоны и апельсины, хотя я не видел их цветов и сужу лишь по плодам или ягодам, которые поделены не на пять, а на семь, одиннадцать или девять долек. Однако воплощение числа пять в геометрии, то есть правильный пятиугольник, строится посредством божественной пропорции, которую мне бы хотелось [предположительно считать] прототипом Творения. Более того, [она] наблюдается и между движением Солнца (или, как я полагаю, Земли) и Венеры, которая стоит на вершине порождающей способности соотношения 8 и 13, которое, как мы еще услышим, подходит очень близко к божественной пропорции. Наконец, согласно Копернику, сфера Земли расположена посере-

> дине между сферами Марса и Венеры. Пропорцию между ними можно получить из додекаэдра и икосаэдра, оба из которых в геометрии производятся из божественной пропорции — однако акт творения происходит именно на нашей Земле.
>
> Теперь рассмотрим, как из божественной пропорции проистекают изображения мужчины и женщины. На мой взгляд, размножение растений и продолжение рода у животных состоят в том же соотношении, что и геометрическая пропорция, пропорция, выраженная частями отрезка, или арифметическая или численно выраженная пропорция.

Проще говоря, Кеплер искренне верил, что золотое сечение послужило для Бога фундаментальным инструментом сотворения Вселенной. Из этого отрывка следует также, что Кеплер знал о проявлениях золотого сечения и чисел Фибоначчи в расположении лепестков растений.

Относительно спокойный и плодотворный с профессиональной точки зрения период жизни в Праге кончился для Кеплера в 1611 году, когда его постигла череда несчастий. Сначала умер от оспы его сын Фридрих, затем от заразной лихорадки, которую принесли австрийские оккупанты, скончалась его жена Барбара. В конце концов, император Рудольф отрекся от престола в пользу своего брата Матиаса, известного нетерпимым отношением к протестантам. Поэтому Кеплер был вынужден перебраться в Линц, на территорию современной Австрии.

Венцом трудов Кеплера, созданных в Линце, стала публикация в 1619 году его второй главной работы по космологии — «*Harmonice Mundi*» («Гармония мира»).

Вспомним, что для Пифагора и пифагорейцев музыка и гармония была первым доводом в пользу того, что космические явления можно описать математически. Созвучные тоны порождали лишь те струны, длины которых соответствовали простым дробям. Соотношение 2:3 звучало как квинта, 3:4 как кварта и т. д. Считалось, что похожее гармоническое расположение планет также порождает «музыку сфер». Кеплер был хорошо знаком с этой концепцией, поскольку прочитал почти всю книгу отца Галилео Галилея Винченцо «Диалоги о древней и современной музыке», хотя и не был согласен с некоторыми идеями Винченцо. Поскольку он был также убежден, что создал исчерпывающую модель Солнечной системы, то смог даже рассчитать небольшие «мотивы» для разных планет (рис. 65).

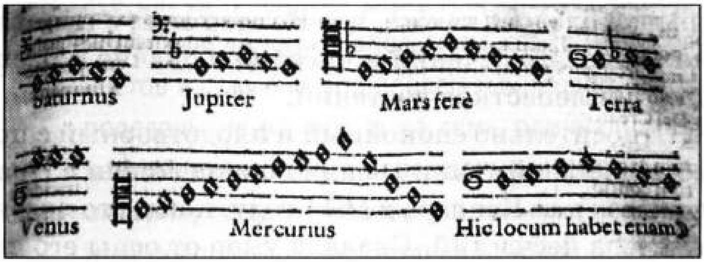



Рис. 65

Поскольку Кеплер был уверен, что «еще до начала вещей геометрия была столь же вечной, сколь и Божественный Разум», «Гармония мира» была по большей части посвящена геометрии. Один аспект этого труда был особенно важен для истории золотого сечения — я имею в виду изыскания Кеплера в области геометрического паркета.

Паркетом в геометрии называют узор или структуру, состоящую из «плиток» одной или нескольких форм, которые полностью покрывают плоскость, не оставляя промежутков — подобно мозаике из плиток на полу. В главе 8 мы увидим, что некоторые математические концепции, наблюдаемые в таких «паркетах», теснейшим образом связаны с золотым сечением. Хотя Кеплер не знал обо всех математических тонкостях паркетов, интерес к отношениям между разными геометрическими фигурами и почитание правильного пятиугольника, который воплощает божественную пропорцию нагляднее всего, позволил ему создать интересную работу о паркете. Особенно Кеплера занимала конгруэнтность («подогнанность» друг к другу) геометрических фигур и тел вроде многогранников и многоугольников. На рис. 66 показан пример из «Гармонии мира». Этот узор паркета составлен из четырех фигур — и все они связаны с золотым сечением: это правильные пятиугольники, пентаграммы, десятиугольники и сдвоенные десятиугольники. Для Кеплера это воплощение «гармонии», поскольку по-гречески это слово означает «соответствие друг другу».

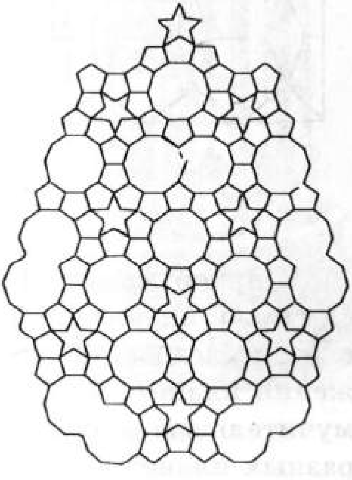


Рис. 66

Интересно, что интерес к паркетам проявляли до Кеплера еще два человека, также сыгравшие важную роль в истории золотого сечения (и уже упоминавшиеся на страницах нашей книги): это Абу-л-Вафа и художник Альбрехт Дюрер. Оба они рассматривали узоры из фигур с пятилучевой симметрией (пример из набросков Дюрера приведен на рис. 67).

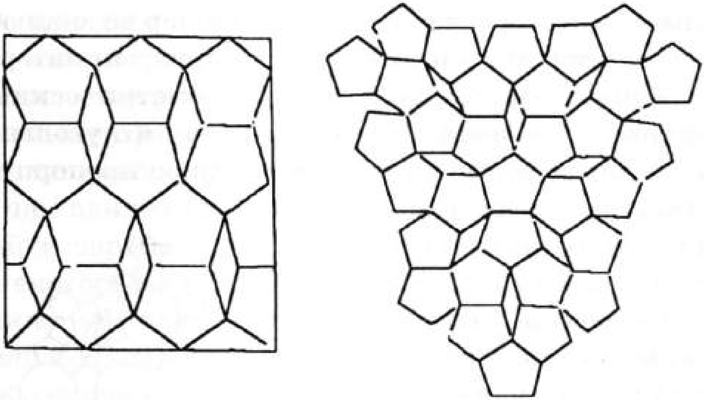


Рис. 67

В пятой книге «Гармонии мира» содержится самый значительный результат астрономических исследований Кеплера — Третий закон движения планет. Здесь сполна выразились все его мучительные раздумья по поводу размеров орбит разных планет и периодов их обращения вокруг Солнца. Двадцать пять лет работы сконцентрировались в поразительно простом законе: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей орбит планет, и это отношение одинаково для всех планет (большая полуось — это половина длинной оси эллипса, см. рис. 62). Кеплер открыл этот основополагающий закон, послуживший Ньютону отправной точкой для формулировки закона всемирного тяготения, когда «Гармония мира» была уже в печати. Не в силах сдержать ликования, ученый объявил: «Я похитил золотые сосуды египтян, чтобы вдали от Египта выстроить жертвенник Господу моему». Суть закона естественно следует из закона всемирного тяготения: сила тяготения тем больше, чем ближе планета к Солнцу, вот почему планеты, которые ближе к нему, вынуждены вращаться быстрее, иначе они упадут на Солнце.

Рис. 68

В 1626 году Кеплер переехал в Ульм и завершил там работу над «Рудольфовыми таблицами» — на тот момент это были самые подробные и точные астрономические таблицы в истории. Когда я в июне 2001 года был в Венском университете, мне показали первое издание таблиц, хранящееся в библиотеке обсерватории (до наших дней дошло 147 экземпляров). На фронтисписе книги (рис. 68) символически изображена история астрономии, а в левом нижнем углу, возможно, находится единственный автопортрет Кеплера (рис. 69). На нем Кеплер трудится при свете свечи под виньеткой, где перечислены главные его публикации.

Рис. 69

Умер Кеплер в полдень 15 ноября 1630 года и похоронен в Регенсбурге. Судьба и после смерти не оставила его в покое, будто бы мало было бурной жизни: войны стерли с лица земли его могилу. К счастью, сохранился набросок надгробия, который выполнил друг Кеплера, и на нем есть и эпитафия ученому:

Я небеса измерял, ныне тени Земли измеряю.
Дух мой на небе жил, здесь же тень тела лежит.

В наши дни, пожалуй, невозможно представить себе ученого, столь оригинального и плодовитого, как Кеплер. Надо понимать, что на долю этого человека выпали невообразимые страдания: в частности, в 1617–1618 году он меньше чем за полгода потерял троих детей. Наверное, лучше всего о нем сказал английский поэт Джон Донн (1572–1631) в памфлете «Игнатий и его конклав»: Кеплер «вменил себе в обязанность следить, чтобы в небесах без его ведома ничего нового не происходило».

РАВНОПРАВИЕ ПОЭТОВ И ЖИВОПИСЦЕВ

> *Живопись — не эстетическая операция, это своего рода магия, предназначенная служить посредником между нами и этим чуждым, враждебным миром.*
>
> Пабло Пикассо
> (1881–1973)

В эпоху Возрождения история золотого сечения потекла по совершенно новому руслу. Эта концепция перестала быть чисто математической. Теперь золотое сечение проложило себе путь в исследования природных явлений и в мир искусства.

Мы уже сталкивались с заявлениями, что архитектурные проекты различных сооружений древности, будь то великая пирамида Хеопса или Парфенон, основаны на золотом сечении. Однако при более пристальном разборе этих заявлений оказывается, что в большинстве случаев они бездоказательны. Представление о «божественной пропорции» и понимание, что без математики невозможно выстроить перспективу, позволили многим художникам примириться с тем, что теперь им придется применять в работе научные методы вообще и золотое сечение в частности. Современный график и живописец Дэвид Хокни в своей книге «Тайное знание» утверждает, к примеру, что начиная примерно с 1430 года, художники начали тайно от всех применять оптические устройства — всевозможные линзы, вогнутые зеркала и *camera obscura*, дабы придавать правдоподобия своим творениям. Однако применяли ли они золотое сечение? И если да, ограничивалось ли применение золотого сечения изобразительным искусством или же оно проникло и в другие области художественного творчества?

Тайная геометрия для художника

Многие претензии на применение золотого сечения в живописи прямо связаны с тем, что золотому прямоугольнику приписывают особые эстетические свойства. Подлинность (и мнимость) этого эстетического канона мы обсудим чуть дальше. А сейчас мне хотелось бы ненадолго остановиться на гораздо более простом вопросе: действительно ли художники Проторенессанса и эпохи Возрождения основывали композиции своих работ на золотом прямоугольнике? Попытка ответить на этот вопрос заставит нас вернуться в XIII век.

«Мадонна Оньиссанти», известная также как «Мадонна во славе» (рис. 70, хранится в Галерее Уффици во Флоренции) — одна из величайших алтарных картин кисти великого итальянского живописца и зодчего Джотто ди Бондоне (1267–1337). Картина выполнена между 1306 и 1310 годом и изображает Деву Марию, с полуулыбкой восседающую на престоле и нежно поглаживающую колено Младенца Христа. Мадонна с Младенцем окружены святыми и ангелами, расположенными в своего рода «иерархической перспективе». Во многих книгах и статьях о золотом сечении на все лады повторяется утверждение, что будто бы картина в целом и центральные фигуры точно вписываются в золотые прямоугольники (рис. 71).

Рис. 70

Рис. 71

Нечто подобное утверждают и по поводу двух других картин на тот же сюжет: это «Мадонна Ручеллаи» великого сиенского живописца Дуччо ди Буонисенья (иногда его зовут просто Дуччо, ок. 1255–1319), и «Мадонна Санта Тринита» Ченни ди Пепо, известного как Чимабуэ (ок. 1240–1302). Волею судьбы сегодня все три картины висят в одном и том же зале Галереи Уффици во Флоренции. Параметры Мадонн «Оньиссанти», «Ручеллаи» и «Санта Тринита» дают соотношение высоты и ширины в 1,59, 1,55 и 1,73 соответственно. Все эти числа и вправду не очень далеки от золотого сечения, однако два из них ближе к рациональному числу 1,6, чем к иррациональному числу φ. Если это о чем-то и говорит, то лишь о том, что художники руководствовались советом Витрувия и выбирали простые пропорции, соотношение двух целых чисел, а не золотое сечение. Внутренний прямоугольник «Мадонны Оньиссанти» (рис. 71) оставляет столь же неоднозначное впечатление. Границы прямоугольника на иллюстрациях к книгам — например, к прелестной книге Труди Хэммел Гарланд «Чудесные числа Фибоначчи» (*Trudi Hammel Garland*. Fascinating Fibonaccis) — обычно проводят очень жирными линиями, отчего любые измерения становятся весьма неопределенными, но тут и верхняя горизонтальная линия проведена, прямо скажем, произвольно. Мы помним, как опасно полагаться на одни лишь измерения, поэтому вправе задаться вопросом, есть ли другие основания заподозрить, что эти художники сознательно учитывали при создании своих картин золотое сечение. Ответ на этот вопрос, судя по всему, отрицательный — разве что к этому соотношению мастеров влекло некое подсознательное эстетическое чутье (о вероятности такого поворота событий мы еще поговорим). Вспомним, что все три Мадонны были написаны более чем за два столетия до публикации трактата «О божественной пропорции», который привлек к золотому сечению более широкое внимание.

Французский художник и писатель Шарль Було в своей книге «Тайная геометрия художника, вышедшей в 1963 году (*Charles Bouleau*. The Painter's Secret Geometry) придерживается иной точки зрения. Он не приводит в пример конкретные картины Джотто, Дуччо и Чимабуэ, однако пишет, что книга Пачоли знаменует не начало новой эпохи, а конец старой. Було утверждает, что трактат «О божественной пропорции» «свидетельствует об идеях, которые долгие столетия передавались исключительно в устной традиции», когда золотое сечение «считалось выражением совершенной красоты». Будь все действительно так, Чимабуэ, Дуччо и Джотто и в самом деле могли бы сознательно применить общепризнанный стандарт совершенства. К сожалению, я не нашел никаких подтверждений гипотезы Було. Напротив, задокументированная история золотого сечения отнюдь не свидетельствует, что в течение столетий, предшествующих публикации трактата Пачоли, художники питали к этому соотношению какое-то особое уважение. Более того, серьезные специалисты, исследовавшие творчество трех вышеупомянутых художников (см. книги «Джотто» Франчески Флорес Д'Арсэ и «Чимабуэ» Лучано Беллози (*Francesca Flores D'Arcais*. Giotto; *Luciano Bellosi*. Cimabue)), ни разу не упоминают, что эти художники могли применять золотое сечение: подобные заявления встречаются только в сочинениях энтузиастов золотого сечения и основаны исключительно на сомнительных доказательствах вроде измерений.

Практически все, кто заявляет о появлении золотого сечения в изобразительном искусстве, упоминают и еще одно имя — Леонардо да Винчи. Некоторые авторы даже приписывают Леонардо изобретение термина «божественная пропорция». Обычно разговоры ведутся вокруг пяти произведений итальянского мастера: это неоконченная картина «Св. Иероним», два варианта «Мадонны в скалах», набросок «Голова старика» и прославленная «Джоконда». О «Джоконде» я здесь говорить не буду по двум причинам: во-первых, эта картина и так уже стала предметом бесчисленного множества пространных спекуляций, как научных, так и популярных, посвященных вопросам, на которые в принципе невозможно дать однозначный ответ, во-вторых, золотое сечение ищут в параметрах прямоугольника, описанного вокруг лица Моны Лизы. В отсутствие каких бы то ни было ясных (и задокументированных) указаний, где именно следует чертить этот прямоугольник, подобная идея подает лишь очередной повод для подтасовки цифр. Однако я еще вернусь к более общей теме пропорций лиц у Леонардо, когда мы будем обсуждать «Голову старика».

Случай с двумя вариантами «Мадонны в скалах» (один хранится в Лувре, в Париже, рис. 72, а второй — в Национальной галерее в Лондоне, рис. 73). Отношение высоты к ширине у картины, которая, как полагают, была написана раньше, примерно 1,64, а у более поздней — 1,58; обе эти величины относительно близки к φ, однако близки и к простому соотношению 1,6.

Датировка и подлинность двух «Мадонн в скалах» также придают интересный поворот заявлениям о присутствии в их параметрах золотого сечения. Специалисты, изучавшие эти две картины, пришли к выводу, что луврская версия, вне всяких сомнений, была создана рукой самого Леонардо, а версия, хранящаяся в Национальной галерее, вероятно, представляет собой результат совместного труда и по-прежнему вызывает споры. Считают, что луврская версия — это одна из первых работ, которые Леонардо написал в Милане, вероятно, между 1483 и 1485 годами. Вариант из Национальной галереи, с другой стороны, по мнению большинства, был завершен около 1506 года. Эти даты важны для нас по той причине, что с Пачоли Леонардо познакомился в 1496 году при Миланском дворе. Семьдесят первая глава трактата «О божественной гармонии» (конец первой части книги), по словам Пачоли, «была завешена сегодня, 14 декабря, в Милане, в нашем тихом монастыре». Следовательно, первая версия (та, в подлинности которой нет никаких сомнений) была завершена примерно за десять лет до того, как Леонардо получил возможность из первых рук узнать о «божественной пропорции». Утверждение, что Леонардо будто бы применял золотое сечение в «Мадонне в скалах», следователь-

Рис. 72

Рис. 73

но, сводится к убеждению, что художник будто бы получил представление об этой пропорции и начал ее применять еще до начала сотрудничества с Пачоли. Не то чтобы это было невозможно, однако такая интерпретация ничем не подтверждается.

Оба варианта «Мадонны в скалах» — бесспорные шедевры Леонардо. Пожалуй, ни в одной другой картине он не нашел лучшего воплощения своему художественному принципу: «Каждое непрозрачное тело окружено и окутано по всей поверхности светом и тенью». Фигуры на картинах буквально распахнуты к зрителю, вовлекают его в эмоциональное общение. Утверждать, будто эти картины хотя бы отчасти обязаны силой воздействия простому соотношению частей, без нужды принижает и упрощает гений Леонардо. Давайте не будем обманываться: благоговение, которое охватывает нас при виде «Мадонны в скалах», не имеет практически никакого отношения к тому, применялось ли золотое сечение в композиции картин.

С той же неопределенностью можно судить и о незаконченном «Святом Иерониме» (рис. 74, хранится в музеях Ватикана). Дело не только в том, что картина датируется 1483 годом — то есть написана задолго до переезда Пачоли в Милан: утверждение, которое можно найти в некоторых книгах и статьях (например, у Давида Бергамини (*David Bergamini*) и редакторов тома «Математика» в серии научно-популярных книг журнала «*Life*»), что Святой Иероним будто бы точно вписывается в золотой прямоугольник, весьма и весьма натянуто. На самом деле стороны прямоугольника не касаются контуров фигуры, особенно слева, и проходят совсем далеко от головы, зато рука выдается далеко за пределы прямоугольника.

Последний пример гипотетического применения золотого сечения на картинах Леонардо — «Голова старика» (рис. 75, рисунок хранится в Галерее Академии в Венеции). Профиль и схема пропорций нарисованы пером около 1490 года. Около 1530–1504 годов на том же листе были сделаны два наброска всадников сангиной — полагают, что это этюды к фреске «Битва при Ангиари».

Рис. 74

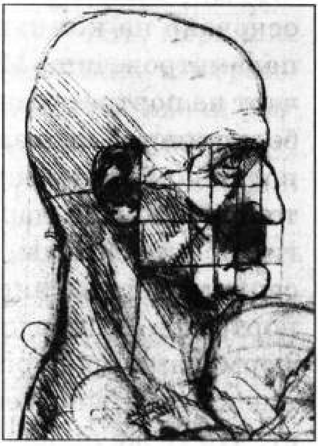


Рис. 75

Сеть вспомогательных линий, конечно, не оставляет сомнений, что Леонардо всерьез интересовался пропорциями лица, однако сделать из этого наброска какие-либо определенные выводы очень трудно. Например, прямоугольник слева вверху — это более или менее золотой прямоугольник, однако линии начерчены так небрежно, что мы не можем ничего утверждать с уверенностью. Тем не менее, этот рисунок, пожалуй, ближе всего подводит к доказательству, что Леонардо и правда определял параметры своих картин при помощи прямоугольников и даже, вероятно, подумывал о том, не применить ли в своем творчестве золотое сечение.

Интерес Леонардо к пропорциям лица, возможно, нашел и другое, не менее любопытное проявление. В статье, напечатанной в «*Scientific American*» в 1995 году, историк искусства и графический дизайнер Лилиан Шварц рассказала об интересном наблюдении. По мнению Шварц, в отсутствии модели для «Джоконды» Леонардо придал портрету некоторые собственные черты. Предположение Шварц основано на компьютерном сравнении различных параметров лица Моны Лизы и соответствующих черт на портрете сангиной, который, по убеждению большинства исследователей (если даже не по единодушному их мнению) считается единственным автопортретом Леонардо. Однако, как указывали другие искусствоведы, подобие пропорций, вероятно, свидетельствует лишь о том, что при создании этих портретов Леонардо пользовался одними и теми же формулами пропорций (входило в них золотое сечение или нет, неизвестно). Да и сама Шварц отмечает, что те же пропорции, что и на рисунке «Головы старика», Леонардо применяет даже на гротесковых рисунках — серии уродливых лиц с карикатурно увеличенными подбородками, ртами, носами и лбами.

Однако если есть сильные сомнения в том, что сам Леонардо, не просто личный друг Пачоли, но и иллюстратор его трактата «О божественной пропорции», применял золотое сечение в композиции своих работ, значит ли это, золотое сечение не мог применить кто-то другой? Конечно, не значит. В конце XIX века появилось огромное множество ученых трудов, посвященных золотому сечению, и художники, само собой, стали обращать внимание на это понятие. Но прежде чем мы поговорим о художниках, которые и в самом деле опирались на золотое сечение, необходимо развенчать еще один миф.

Несмотря на многочисленные заявления об обратном, французский пуантилист Жорж Сёра (1859–1891), вероятно, не применял золотое сечение в своих работах. Сёра интересовался цветовосприятием и сочетаниями цветов и при помощи особой техники — пуантилизма, или множества разноцветных точек — пытался передать переливчатость, мерцание света. В последние годы жизни он также интересовался художественными средствами передачи различных чувств. В письме, написанном в 1890 году, Сёра вкратце перечисляет некоторые свои воззрения.

> Искусство есть гармония. Гармония есть сопоставление подобного и противоположного в тоне, светотени, линии, выбранных по принципу и под влиянием игры света в сценах веселых, легких, печальных. Противоречия — это... в том, что касается линий — прямой угол... веселые линии — линии над горизонталью... спокойствие — горизонталь, печальные линии направлены вниз.

Все эти идеи Сёра выразил в своем полотне «Цирковой парад» (рис. 76, хранится в музее Метрополитен в Нью-Йорке). Обратите особое внимание на прямой угол между балюстрадой и вертикальной линией справа посередине полотна. Вся композиция основана на принципах, которые Сёра почерпнул в книге теоретика-искусствоведа Давида Саттера «Философия изящных искусство применительно к живописи» (*David Sutter*. La philosophie des Beaux-Arts appliqu*ée à* la peinture, 1870). Саттер писал: «Если доминанта горизонтальна, на ней нужно поместить череду вертикальных предметов, поскольку тогда эта последовательность будет конкурировать с горизонтальной линией».

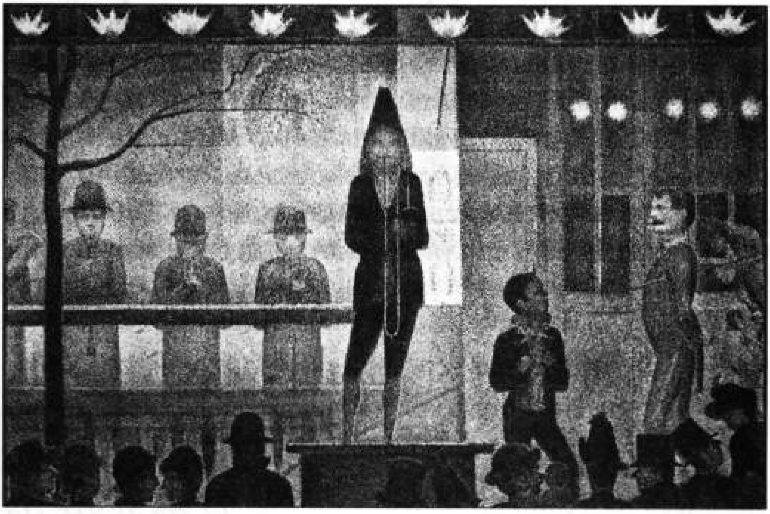


Рис. 76

Страстные поклонники золотого сечения зачастую приводят анализ «Парада» (наряду с другими работами Сёра, в частности, «Цирком»), в «доказательство», что художник сознательно применял φ. Даже в чудесной книге «Математика» Бергамини и редакторов журнала «*Life*» мы читаем: ««Парад», написанный мелкими точками, в характерной манере французского импрессиониста Жоржа Сёра, содержит множество примеров золотых пропорций». Более того, в книге приводится цитата («по словам одного искусствоведа»), где говорится, что Сёра «к каждому своему холсту подступал с золотым сечением». К сожалению, все эти утверждения безосновательны. Горячим сторонником и распространителем этого мифа был родившийся в Румынии священник и писатель Матила Гика (1881–1965), еще один «искусствовед», которого цитирует Бергамини. Гика опубликовал две авторитетные книги — «Эстетику пропорций в природе и в искусстве» («*Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts*», 1927) и уже упоминавшуюся книгу «Золотое сечение», полное название которой — «Золотое сечение, пифагорейские ритуалы и ритмы в развитии Западной цивилизации» («*Le Nombre d'Or: Rites et rythmes pytagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale*», 1931). Обе книги представляют собой полумистические толкования математических фактов. В них рука об руку с точным описанием математических свойств золотого сечения приводятся анекдотические материалы о появлении золотого сечения в искусстве (Парфенон, египетские пирамиды и прочее). Парадоксально, но факт: эти книги были очень авторитетны.

Что касается самого «Парада», горизонтальная линия на нем и в самом деле разделена в пропорциях, близких к золотому сечению (в действительности, в простом соотношении восемь пятых), однако вертикаль — отнюдь нет. Анализ всей композиции этого и других полотен Сёра, а также работ художника-символиста Пьера Пюви де Шаванна (1824–1898), заставляет даже такого горячего сторонника золотого сечения, как художник и писатель Шарль Було, сделать печальный вывод: «Не думаю, чтобы мы могли без подтасовки данных сказать, что его [Пюви де Шаванна] композиции основаны на золотом сечении. То же самое относится и к Сёра». Подробный анализ всех картин, записей и набросков Сёра, который в 1980 году выполнил Роджер Герц-Фишлер, подводит к тем же выводам. Более того, математик, философ и художественный критик Чарльз Генри (1859–1926) еще в 1890 году твердо заявил, что «современные художники полностью пренебрегают» золотым сечением.

Так кто же тогда применял золотое сечение как в своих картинах, так и в теории живописи? Вероятно, первым выдающимся художником и теоретиком искусства, кто сознательно применял золотое сечение, был Поль Серюзье (1864–1927). Серюзье родился в Париже, некоторое время изучал философию, а затем поступил в прославленную школу искусств «Академия Жюлиана». Знакомство с художниками Полем Гогеном и Эмилем Бернаром заставило его перенять их колорит и символистские воззрения. Вместе с художниками-постимпрессионистами Пьером Боннаром, Эдуаром Вилларом, Морисом Дени и другими он основал группу под названием «Наби», что на древнееврейском значит «пророки». Название объяснялось полусерьезным, полушутовским отношением участников группы к своему новому стилю, который они представляли как своего рода религиозное просветление. С этой группой был связан и композитор Клод Дебюсси. Серюзье, вероятно, впервые услышал о золотом сечении между 1896 и 1903 годами, во время одной из поездок к своему другу, голландскому художнику Яну Веркаде (1868–1946). Веркаде был послушником в бенедиктинском монастыре в городе Бойрон на юге Германии. Там группы художников-монахов исполняли довольно скучные композиции на религиозные темы с соблюдением «священных пропорций» согласно теории отца Дидье Ленца. По гипотезе отца Ленца, все величайшие творения древности (Ноев ковчег, египетские шедевры зодчества и пр.) были основаны на простых геометрических понятиях — окружности, равностороннем треугольнике и правильном шестиугольнике. Эта теория показалась Серюзье чрезвычайно привлекательной, и он писал Веркаде: «Представь себе, [я] много говорил о геометрических параметрах, о которых ты мне рассказывал». Художник Морис Дени (1870–1943) оставил о Серюзье биографические заметки, из которых мы узнаем, что в число «геометрических параметров» отца Ленца входило и золотое сечение. Хотя Серюзье признает, что первоначально изучение математики Бойрона было для него «делом нелегким», идеи о золотом сечении и его предположительной связи с великой пирамидой Хеопса и произведениями древнегреческого зодчества проникла и в важную книгу Серюзье по теории искусств «Азбука живописи» (*Paul Sérusier*. L'ABC de la Peinture).

Похоже, интерес Серюзье к золотому сечению был скорее философским, чем практическим, однако художник и в самом деле применил это соотношение в композиции некоторых своих работ, в основном с целью «подтвердить, а иногда просто проверить свои изобретения в области формы и композиции».

Серюзье проложил концепции золотого сечения путь и в другие художественные объединения, в основном — в среду кубистов. Термин «кубизм» придумал художественный критик Луи Восель (которому мы, кстати, обязаны и словами «фовизм» и «экспрессионизм») после выставки Жоржа Брака в 1908 году. Официальное начало этому движению положили картины «Авиньонские девицы» Пикассо и «Большая обнаженная» Брака. Пикассо и Брак восстали против страстного колорита и неуемных форм экспрессионизма и разработали свой строгий, практически монохромный стиль, сознательно отказавшись от любой тематики, которая могла бы вызвать эмоциональные ассоциации. Предметы вроде музыкальных инструментов и даже человеческие тела разделялись на многогранные геометрические фигуры, которые затем комбинировались, причем перспектива постоянно менялась. Применение геометрических понятий вроде золотого сечения очень подходило для такого анализа формы тел, целью которого было обнажить их структуру. И в самом деле, первые кубисты, в том числе Жак Вийон и его братья Марсель Дюшан и Раймон Дюшан-Вийон, а также Альбер Глез и Франсис Пикабиа в октябре 1912 года организовали в Париже целую выставку, которая так и называлась «Золотое сечение» («*Section d'Or*»). Несмотря на крайне многообещающее название, золотого сечения не было в композиции ни одной из выставленных картин. Организаторы выбрали этот термин лишь ради того, чтобы подчеркнуть свой интерес к вопросам связи искусства с наукой и философией. Тем не менее некоторые кубисты, в том числе художник испанского происхождения Хуан Грис (1887–1927) и родившийся в Литве скульптор Жак (Хаим-Яков) Липшиц (1891–1973) и в самом деле руководствовались золотым сечением в некоторых поздних работах. Липшиц писал: «В то время я очень интересовался теориями математических пропорций, как и прочие кубисты, и пытался применить их в своих скульптурах. Всех нас очень занимала идея золотого правила или золотого сечения — считалось, что эта система заложена во всем искусстве и архитектуре Древней Греции». Липшиц помогал Хуану Грису при создании скульптуры «Арлекин» (Художественный музей Филадельфии, рис. 77) — для достижения желаемых пропорций художники применили треугольник Кеплера (основанный на золотом сечении, см. рис. 61).

Рис. 77

В начале 1920 годов золотое сечение применял еще один художник — итальянский живописец Джино Северини (1883–1966). В своей работе Северини пытался примирить несколько противоречивые цели футуризма и кубизма. Футуризм отражал стремление группы итальянских мыслителей, работавших в области литературы, изобразительного искусства, театра, музыки и кинематографа, способствовать обновлению итальянской культуры. По словам самого Северини: «Мы решили сосредоточить внимание на предметах в движении, поскольку современный тип чувствительности особенно предрасположен к тому, чтобы ухватить идею скорости». Первый манифест художников-футуристов был подписан в 1910 году и всячески побуждал молодых итальянских художников «глубоко презирать всевозможную имитацию». Оставаясь футуристом, Северини обрел в кубизме «идею меры», которая соответствовала его честолюбивому стремлению «живописными средствами создать объект, столь же совершенный с точки зрения мастерства, что и великолепный буфет работы краснодеревщика». Такое стремление к геометрическому совершенству заставило Северини применять золотое

Рис. 78

сечение в подготовительных эскизах к нескольким работам (см. «Материнство», сейчас хранится в частной коллекции в Риме, рис. 78). Интересный пример роли золотого сечения в кубистическом искусстве — творчество русской художницы-кубистки Марии Воробьевой, известной как Маревна (1892–1984). В 1974 году Маревна написала книгу «Моя жизнь с художниками “Улья”», где очень увлекательно рассказывает о жизни и работе своих друзей — группы, куда входили художники Пикассо, Модильяни, Сутин, Ривера (от которого у Маревны родилась дочь) и другие — в Париже в двадцатые годы. Хотя Маревна не приводит никаких конкретных примеров, а ее исторические замечания зачастую неточны, из текста следует, что Пикассо, Ривера и Грис применяли золотое сечение как очередной, более сложный способ делить плоскость, предназначенный для знатоков и ценителей.

В начале XX века золотым сечением очень интересовался и американский искусствовед Джей Хембридж (1867–1924). Хембридж выпустил целый ряд статей и книг, где определял два типа симметрии в классическом и современном искусстве. Первый он назвал статической симметрией, и такая симметрия основана на правильных фигурах наподобие квадрата и равностороннего треугольника и, по мнению исследователя, приводила к созданию безжизненных произведений искусства. В создании другой симметрии, которую он назвал динамической, главную роль играли золотое сечение и логарифмическая спираль. Главный тезис Хембриджа состоял в том, что применение динамической симметрии в композиции приводит к созданию живых и трогательных произведений искусства. Сегодня лишь немногие воспринимают его идеи всерьез.

Одним из самых ярых сторонников применения золотого сечения в искусстве и архитектуре был знаменитый швейцарско-французский архитектор и художник Ле Корбюзье (Шарль-Эдуар Жаннере-

Гри, 1887–1965). Жаннере родился в Ла-Шо-Де-Фон в Швейцарии, где учился живописи и гравюре. Отец его работал эмальером в часовой мастерской, а мать была пианисткой и учительницей музыкой и, помимо более абстрактных занятий, всячески склоняла сына стать музыкантом-виртуозом.. В 1905 году Жаннере стал изучать архитектуру и впоследствии стал одной из самых влиятельных фигур в современной архитектуре. Зимой 1916–1917 года Жаннере переехал в Париж и познакомился там с Амеде Озанфаном, который был вхож в высшее парижское общество художников и мыслителей. Благодаря Озанфану Жаннере познакомился с кубистами и невольно перенял их эстетические взгляды. В частности, Хуан Грис заразил его интересом к системам пропорций и их роли в эстетике. Осенью 1918 года Жаннере и Озанфан устроили совместную выставку в галерее Тома. Точнее, две картины Жаннере соседствовали с куда более многочисленными полотнами Озанфана. Озанфан и Жаннере назвали себя пуристами, а каталог своей выставки озаглавили «*Après le Cubisme*» — «После кубизма». Пуризм возрождает идеи Пьеро делла Франческа и платоновской эстетической теории: он утверждает, что «произведение искусства не должно быть случайным, исключительным, импрессионистским, неорганичным, протестным, картинным — напротив, оно должно быть обобщенным, статичным, выразительным за счет постоянства».

Псевдоним Ле Корбюзье (позаимствованный у предков с материнской стороны, чья фамилия была Лекорбезье) Жаннере взял лишь в 33 года, когда он уже пустил корни в Париже и был уверен в своем будущем. Судя по всему, он в целом хотел перечеркнуть мелкие неудачи прошлого и создать миф о том, что его архитектурный гений расцвел в одночасье. Поначалу Ле Корбюзье относился к применению золотого сечения в искусстве довольно-таки скептически и даже отрицательно — он предостерегал против того, чтобы «замещать здравый смысл мистицизмом при помощи золотого сечения». Более того, подробный анализ архитектурных проектов и «пуристских» работ Ле Корбюзье, который проделал Роджер Герц-Фишлер, показывает, что до 1927 года Ле Корбюзье ни разу не применял золотое сечение. Ситуация резко переменилась после выхода в свет уже упоминавшегося авторитетного труда Матилы Гика «Эстетика пропорций в природе и искусстве», а с появлением в 1931 году его «Золотого сечения» мистические аспекты φ стали волновать читающую публику еще сильнее. Ле Корбюзье увлекся «Эстетикой» и золотым сечением по двум причинам. С одной стороны, это было следствием его интереса к основным геометрическим формам и структурам, скрытым за природными явлениями. С другой стороны, в семье Ле Корбюзье приветствовали музыкальное образование, и он вполне мог оценить пифагорейское стремление к гармонии, достигаемой соотношениями чисел. Он писал: «Более тридцати лет назад по жилам моих работ — и архитектурных, и живописных — заструился сок математики, ибо музыка никогда меня не покидает». Поиски стандартизированной пропорции достигли пика в создании новой системы пропорций — Модулера.

Предполагалось, что Модулер станет «гармонической мерой человеческого масштаба, применимой универсально в архитектуре и в механике». В сущности, такое определение — не более чем перефразированное знаменитое изречение Протагора, высказанное в V веке до н. э.: «Человек есть мера всех вещей». Естественно, Модулер был основан на пропорциях человеческого тела (рис. 79) — в духе «Витрувианского человека» (рис. 53) и общей философской задачи создать систему пропорций, эквивалентной той, что создала природа. Человек ростом шесть футов (около 183 см), несколько напоминающий знакомого «мишленовского человечка» с рекламы шин, с поднятой рукой (общая высота составляет 226 см, или 7 футов 5 дюймов), вписан в квадрат (рис. 80). Отношение его роста (183 см, 6 футов) к расстоянию от подошв до пупка

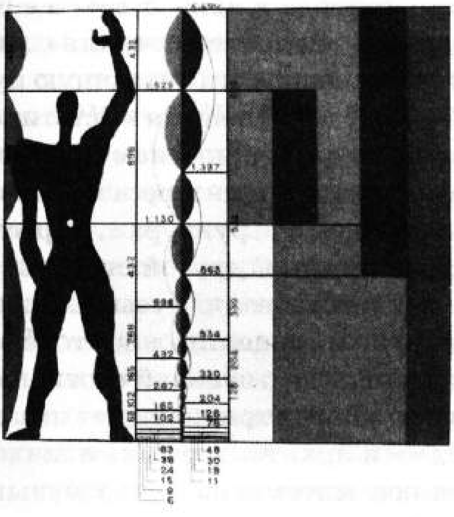


Рис. 79

(на середине общей высоты — 113 см, 3 фута 8,5 дюймов) — это в точности золотое сечение. Общая высота — от подошв до кончиков пальцев поднятой руки — также делится в золотом сечении (на 140 см и 86 см) на уровне запястья опущенной руки. Два отношения — 113/70 и 140/86 — подразделялись далее на более мелкие величины в соответствии с последовательностью Фибоначчи — каждое число есть сумма двух предыдущих (рис. 81). Окончательная версия Модулера (рис. 79 и 81), таким образом, опиралась на две взаимопроникающие шкалы чисел Фибоначчи («красная и голубая серии»). По предложению Ле Корбюзье Модулер должен был обеспечить гармонические пропорции всему — от размеров дверных ручек и шкафов до зданий и городов. В мире, где постоянно росла потребность в массовом производстве, Модулер должен был предоставить модель для стандартизации. Ле Корбюзье выпустил две книги — «Модулер» (1948) и «Модулер II» (1955) (*Le Corbusier*. Le Modulor; *Le Corbusier*. Modulor II), которые вызвали пристальное внимание в кругах специалистов по архитектуре и до сих пор служат аргументом в любом споре о пропорциях. Ле Корбюзье очень гордился тем, что ему представился случай показать «Модулер» самому Альберту Эйнштейну — они встречались в Принстоне в 1946 году. Вот как архитектор вспоминал этот момент: «Я плохо говорил, плохо рассказал о Модулере, завяз в трясине причинно-следственных связей». Тем не менее, Эйнштейн написал ему письмо, где сказал о Модулере так: «Это шкала пропорций, благодаря которой сделать плохо станет трудно, а сделать хорошо — легко».

Свою теорию Модулера Ле Корбюзье воплощал на практике во многих своих проектах. Скажем, в предварительных заметках к проекту целого индийского города Чандигарх, где стоят четыре крупных правительственных здания — парламент, дворец правосудия и два музея — мы читаем: «Однако, разумеется, при разработке ритма окон учитывается Модулер... в общей части здания, где, в частности, многочисленные кабинеты и залы суда должны укрываться от солнца, Модулер обеспечивает един-

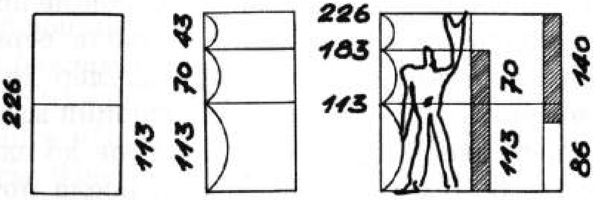


Рис. 80

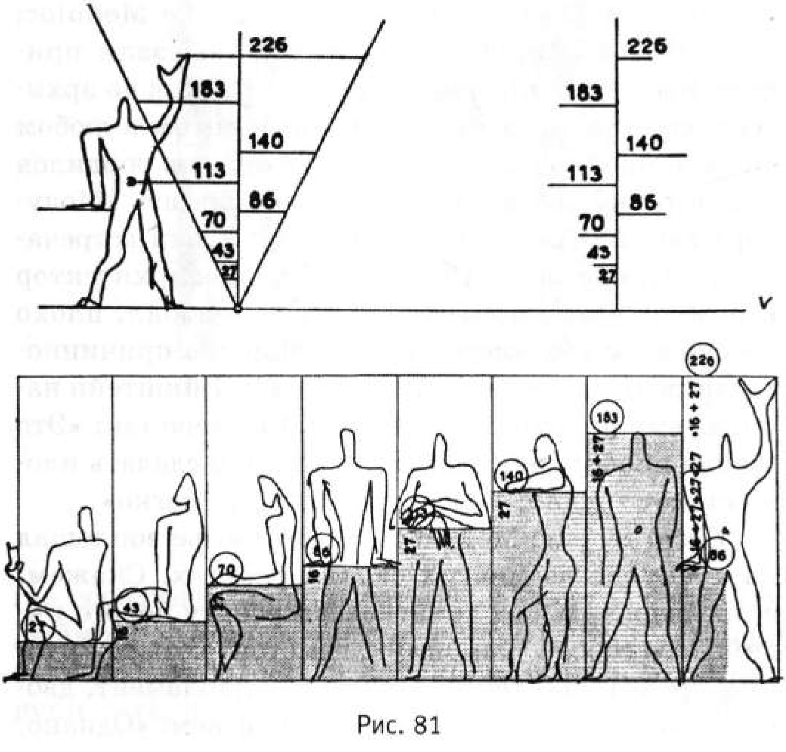


Рис. 81

ство текстуры. В дизайне фасадов Модулер (с точки зрения текстуры) задействует красную и голубую серию в пределах пространств, уже ограниченных оконными рамами».

Разумеется, художники интересовались золотым сечением и после Ле Корбюзье, однако большинство его последователей увлекались скорее математико-философски-историческими качествами этого соотношения, нежели его предполагаемыми эстетическими свойствами. Скажем, английский абстракционист Энтони Хилл в 1960 году применил последовательность Фибоначчи в параметрах своей работы «Конструктивный рельеф» (рис. 82). Подобным же образом современный израильский художник и скульптор Игаль Тумаркин сознательно включил формулу φ ($\varphi = (1+\sqrt{5})/2$) в одну из своих картин.

Итальянец Марио Мерц превратил последовательность Фибоначчи в важную составляющую своих работ. Мерц родился в Милане в 1925 году,

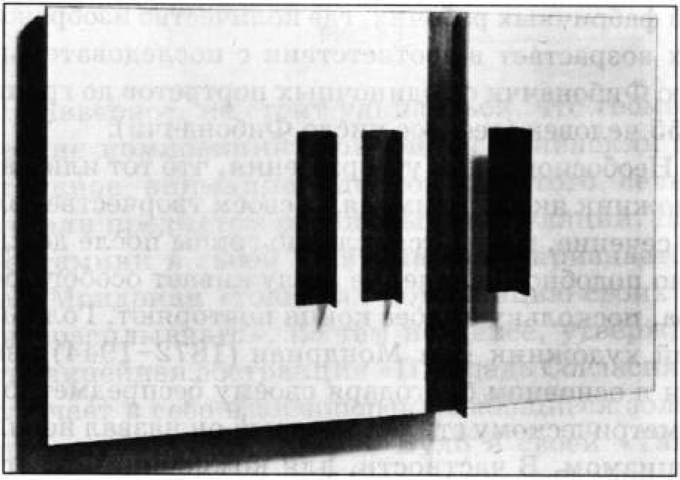


Рис. 82

а в 1967 году примкнул к художественному течению «Арте повера» (итал. «*Arte Povera*» — «бедное искусство»), куда также входили художники Микеланджело Пистолетто, Лучано Фабро и Яннис Кунеллис. Название движения (его придумал критик Джермано Челант) объясняется стремлением участников применять в своем творчестве простые повседневные материалы в знак протеста против негуманного общества потребления, каким они его видели. Применять последовательность Фибоначчи Мерц начал в 1970 году в серии «концептуальных» работ, куда входили последовательности чисел и разнообразные спирали.

Мерц так стремился применять числа Фибоначчи, поскольку эта последовательность лежит в основе многих закономерностей роста и развития в природе. В своей работе 1987 года под названием «Ударная волна» («*Onda d'urto*») художник разместил длинный ряд стопок газет, над каждой из которых сияют неоновые числа Фибоначчи. Работа «Неаполь Фибоначчи» (1970) состоит из 10 фотографий фабричных рабочих, где количество изображенных возрастает в соответствии с последовательностью Фибоначчи от одиночных портретов до группы из 55 человек (десятое число Фибоначчи).

Необоснованные утверждения, что тот или иной художник якобы применял в своем творчестве золотое сечение, множатся, словно грибы после дождя. Одно подобное заявление заслуживает особого разбора, поскольку его без конца повторяют. Голландский художник Пит Мондриан (1872–1944) известен в основном благодаря своему беспредметному геометрическому стилю, который он назвал неопластицизмом. В частности, для композиции многих его картин характерно применение исключительно вертикальных и горизонтальных линий, прямоугольников и квадратов и только основных цветов (иногда — с вкраплениями черного и серого) на белом фоне, как, например, в картине «Буги-вуги на Бродвее» (рис. 83, хранится в Музее современного искусства в Нью-Йорке). Изогнутые линии, трехмерность, реалистичность изображения в его творчестве полностью исключались.

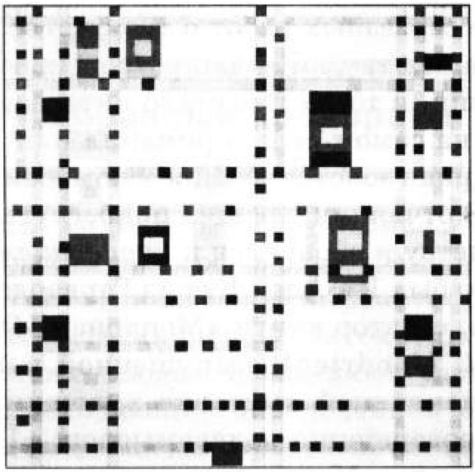


Рис. 83

Наверное, не стоит удивляться, что геометрические композиции Мондриана привлекли пристальное внимание адептов золотого сечения и стали предметом различных спекуляций. Дэвид Бергамини в своей «Математике» признает, что сам Мондриан «толковал композицию своих картин расплывчато», но тем не менее, утверждает, что линейная абстракция «Площадь Согласия» заключает в себе взаимоперекрывающиеся золотые прямоугольники. Шарль Було в своей «Тайной геометрии художника» позволяет себе еще более смелые заявления: он утверждает, что «Французские художники никогда не осмеливались заходить так далеко в чистую геометрию и так строго и последовательно применять золотое сечение, как холодный и безжалостный голландец Пит Мондриан». Далее Було говорит, что в «Буги-вуги на Бродвее» «почти все горизонтали и вертикали, составляющие картину, построены на золотом сечении». Я потратил некоторое время на изучение более серьезных работ о творчестве Мондриана и не нашел там ни единого упоминания о золотом сечении, и тогда мне стало интересно, как же все было на самом деле: применял или не применял Мондриан золотое сечение в композиции своих картин? В отчаянии я решил прибегнуть к последнему средству и обратился к *настоящему* специалисту. Это был Ив-Ален Буа из Гарвардского университета, соавтор книги «Мондриан» (*Yves-Alain Bois et al.* Mondrian), выпущенной в 1999 году к ретроспективной выставке художника. Ответ Буа был совершенно недвусмыслен: «Насколько мне известно, у Мондриана никогда не было никакой системы пропорций, если не считать своего рода сеток из модулей, которые он писал в 1918–1919 годах, но там система выводилась из формата самих картин — восемь на восемь единиц». Далее Буа добавил: «Помнится, и сам Мондриан язвил по поводу того, что в его работах якобы использовались арифметические выкладки». «Думаю, что золотое сечение применительно к Мондриану — чистой воды чушь». Все эти занимательные исторические анекдоты оставляют один нерешенный вопрос. По какой же причине столь много художников задумывались о том, как задействовать золотое сечение в композиции своих работ — если не считать чисто интеллектуального любопытства? Может быть, это соотношение, выраженное в виде золотого прямоугольника, и в самом деле обладает какими-то имманентными эстетическими свойствами, которые ставят его выше других пропорций? Сами по себе попытки ответить на этот вопрос привели к массе психологических экспериментов и написанию множества книг и статей.

Должным образом выбранные пропорции радуют глаз

Словами, вынесенными в название этого раздела, итальянский философ-схоласт Фома Аквинский (ок. 1225–1274) попытался выразить фундаментальные отношения между математикой и красотой. Похоже, людям доставляют удовольствие «формы», обладающие определенной симметрией или подчиняющиеся определенным геометрическим правилам.

При изучении гипотетической эстетической ценности золотого сечения мы сосредоточимся на эстетике очень простых, беспредметных линий и форм, а не на сложном визуальном материале и произведениях искусства. Более того, в большинстве психологических экспериментов, о которых я здесь расскажу, слова «красота» преднамеренно избегали. Вместо него употреблялись слова вроде «приятный» или «привлекательный». Тогда можно обойтись без определения, что такое «красивый», и опереться на тот факт, что у большинства людей есть достаточно четкое представление о том, что им нравится, даже если они не могут объяснить, почему.

Очень многие авторы утверждали, что золотой прямоугольник — самый эстетически приятный прямоугольник на свете. В новое время интерес к этому вопросу был во многом вызван чередой несколько странноватых публикаций немецкого исследователя Адольфа Цайзинга, которая началась с выпущенной в 1854 году книги «Новейшая теория пропорций человеческого тела» (*Adolph Zeising*. Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers), а ее кульминацией стало посмертное издание труда Цайзинга «Золотое сечение» (*«Der Goldener Schnitt»*, 1884). В этих работах Цайзинг сочетал идеи Пифагора и Витрувия в собственной вольной трактовке и на их основании отстаивал ту точку зрения, что «деление на части человеческого тела, структура тела многих животных, для которых характерно хорошее сложение, фундаментальные типы различных видов растений... гармонии самых приятных музыкальных аккордов и пропорциональность самых прекрасных произведений архитектуры и скульптуры» — все это основано на злотом сечении. Поэтому для Цайзинга золотое сечение становилось ключом к пониманию всех пропорций «самых утонченных форм в природе и искусстве». Задачу проверить излюбленную теорию Цайзинга взял на себя Густав Теодор Фехнер (1801–1887), один из основателей современной психологии.

Фехнера считают основоположником экспериментальной эстетики. В одном из своих первых экспериментов он провел опрос общественного мнения: просил посетителей Дрезденской галереи сравнить красоту двух почти одинаковых изображений Мадонны («Дрезденской Мадонны» и «Дармштадтской Мадонны»), выставленных рядом. Обе картины приписывают немецкому художнику Гансу Гольбейну Младшему (1497–1543), хотя было подозрение, что «Дрезденская Мадонна» — всего лишь позднейшая копия. Эксперимент потерпел полный провал: из 11 842 посетителей ответить на вопросы анкеты согласились лишь 113 — и это были в основном художественные критики или люди так или иначе предвзятые.

Первые эксперименты с прямоугольниками Фехнер проводил в 1860 годы, а их итоги подвел в книге «Введение в эстетику» (*«Vorschule der Aesthetik»*, 1876). Фехнер горячо протестовал против «нисходящего» подхода к эстетике, который начинается с формулировки абстрактных принципов красоты, а отстаивал развитие экспериментальной эстетики — снизу вверх. Эксперимент Фехнера был достаточно прост: перед испытуемым помещали десять прямоугольников, а затем просили отобрать самый приятный и самый неприятный. По отношению длины и ширины прямоугольники варьировались от квадрата (соотношение 1,0) до продолговатого прямоугольника (соотношение 2,5). Три прямоугольника были более вытянутые, чем золотой прямоугольник, шесть — ближе к квадрату. Согласно тому, как описывал ход эксперимента сам Фехнер, испытуемые часто медлили и колебались, отвергая то один, то другой прямоугольник. Между тем экспериментатор объяснял, что они должны выбрать самый приятный, гармоничный, изящный прямоугольник. В ходе эксперимента Фехнера 76 % испытуемых выбирали три прямоугольника с соотношением сторон 1,75, 1,62 и 1,50, а большинство — именно золотой прямоугольник (1,62). Все остальные прямоугольники получали менее 10 % «голосов» каждый.

Задумывая этот эксперимент, Фехнер был небеспристрастен. Он сам признавал, что на опыт его вдохновило «видение мира, где мысль, дух и материя едины и связаны тайной чисел». Обвинять Фехнера в подтасовке результатов никто не станет, однако некоторые отмечают, что он, вероятно, бессознательно создавал обстановку, способствовавшую желаемому результату. И в самом деле, неопубликованные работы Фехнера показывают, что он проводил подобные эксперименты и с эллипсами, однако в итоге не обнаружил никакого предпочтения золотому сечению и публиковать результаты не стал.

Впоследствии Фехнер измерил параметры тысяч печатных изданий, картинных рам в галереях, оконных рам и других предметов прямоугольной формы. Результаты у него были довольно интересны и зачастую даже забавны. Например, он обнаружил, что игральные карты в Германии печатались несколько более продолговатыми, чем золотой прямоугольник, а во Франции были ближе к нему. С другой стороны, Фехнер обнаружил, что отношение длины и ширины обложек сорока романов из публичной библиотеки близко к Φ. Картины (исследовалась область внутри рамы), по данным измерений Фехнера, были «существенно короче» золотого прямоугольника. Что же касается оконных рам, Фехнер сделал по их поводу следующее наблюдение, которое в наши дни сочли бы политически некорректным: «Лишь в крестьянских домах окна часто бывают квадратными, что согласуется с тем фактом, что люди с низким уровнем образования предпочитают эту форму чаще, чем люди образованные». Далее Фехнер утверждает, что на могильных крестах перекладина в среднем пересекает вертикальный шест в золотом сечении.

В течение всего XX века многие исследователи повторяли подобные эксперименты с различными результатами. Те, кто слишком страстно любит золотое сечение, зачастую утверждали, будто эти эксперименты вроде бы подтверждают идею, что золотое сечение эстетически предпочтительнее. Однако более тщательные исследования выявляют крайне непрофессиональную подготовку и методологические дефекты многих таких экспериментов. Иногда оказывается, что результаты, например, зависят от того, как треугольники показывали испытуемым — длинной стороной по вертикали или по горизонтали, — от размера и цвета прямоугольников, от возраста испытуемых, от культурных различий, а особенно — от применявшегося экспериментального метода. В статье, опубликованной в 1965 году, американские психологи Л. А. Стоун и Л. Дж. Коллинз предположили, что предпочтение золотого треугольника, которое отмечали некоторые экспериментаторы, связано с полем зрения человека. Эти исследователи выявили, что «средний прямоугольник» из тех прямоугольников, которые очерчивали внутри и вокруг бинокулярного поля зрения у большого количества испытуемых, обладал отношением длины и ширины, равным 1,5, то есть не очень далеким от золотого сечения. Однако последующие эксперименты не подтвердили этих находок. В ходе эксперимента, который провел в 1966 году Х. Р. Шиффман из Ратгерского Университета, испытуемых просили начертить на листе бумаги «самый эстетически приятный прямоугольник», какой они только смогут. По завершении чертежа испытуемых просили ориентировать фигуру вертикально или горизонтально (относительно длинной стороны) самым приятным образом. Шиффман выявил, что подавляющее большинство предпочитает горизонтальное положение, что соответствует форме поля зрения, однако среднее соотношение длины и ширины было около 1,9 — очень далеко и от золотого сечения, и от «среднего прямоугольника» с параметрами поля зрения.

Психолог Майкл Годкевич из Университета Торонто заставляет еще сильнее сомневаться, что самый «приятный» прямоугольник — это именно золотой прямоугольник. Годкевич первым указал на тот важный факт, что средние преференции группы могут вовсе и не отражать, какой прямоугольник самый «приятный», по мнению отдельного участника эксперимента. Зачастую то, что в среднем выбирают чаще всего, не стоит на первом месте ни у кого. Например, вполне может быть, что марка шоколада, которая у каждого стоит на втором месте, займет первое место в среднем по результатам опросов, но на самом деле ее никто даже не купит! Следовательно, более разумная мера преференции — это именно количество случаев, когда что-то занимает первое место, а не средние значения количества предпочтений. Далее Годкевич отмечает, что если золотое сечение действительно искренне предпочитает большинство, значит, его чаще всего будут выбирать первым номером, независимо от того, какие еще прямоугольники показывают испытуемым.

В 1974 году Годкевич опубликовал результаты исследования, в котором участвовали 27 прямоугольников с соотношением длины и ширины в трех диапазонах. В одном диапазоне золотой прямоугольник был ближе к самому продолговатому треугольнику, в другом находился примерно посередине, в третьем был близок к самому короткому прямоугольнику. Согласно Годкевичу, результаты эксперимента показали, что золотой прямоугольник предпочитали в зависимости от положения в диапазоне прямоугольников и от того обстоятельства, что в более ранних экспериментах применялось среднее ранжирование по преференции, а не учитывалось количество случаев, когда золотой прямоугольник занимал первое место. Годкевич делает вывод, что «На главный вопрос — есть или нет в западном мире надежное, вербально выраженное эстетическое предпочтение определенного соотношения между длиной и шириной прямоугольных фигур — получен, вероятно, отрицательный ответ. Едва ли остается какое бы то ни было разумное основание считать золотое сечение решающим фактором при определении формальной визуальной красоты».

С выводами Годкевича согласны не все. Английский психолог Крис Макманус в 1980 году опубликовал результаты тщательного исследования, где применялся метод сопоставления по парам, то есть суждение выносилось по каждой паре прямоугольников. Считается, что этот метод лучше других экспериментальных методов, поскольку существуют солидные доводы в пользу того, что любое ранжирование — это скорее процесс последовательного сопоставления в парах. Макманус сделал вывод, что «есть умеренно надежные свидетельства в пользу феномена, на котором настаивал Фехнер, хотя метод, которым пользовался для его доказательства сам Фехнер, в лучшем случае можно назвать крайне подозрителеным и приводящим к артефактам». Однако Макманус признал, что «Важно ли при этом золотое сечение как таковое, в противоположность простым соотношениям (1,5, 1,6 или даже 1,75), совершенно неясно».

Можете протестировать самого себя или своих друзей и узнать, какой прямоугольник нравится вам больше всего. На рис. 84 изображено 48 прямоугольников одной высоты, но разной ширины, которая варьируется от 0,4 до 2,5 высоты. Математик Джордж Марковски из Университета штата Мэн пользовался этой коллекцией в своих неофициальных экспериментах. Интересно, займет ли у вас первое место именно золотой треугольник? (Пятый слева в четвертом ряду.)

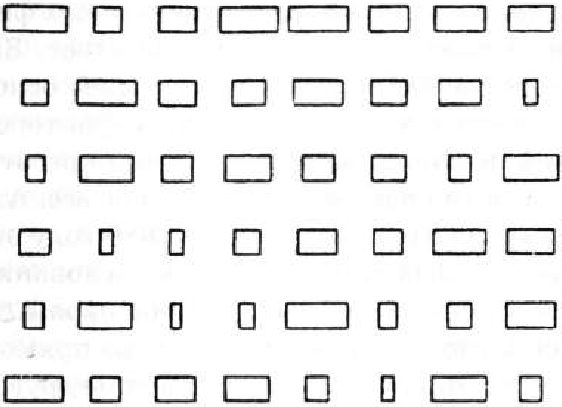


Рис. 84

Золотая музыка

Пифагор открыл, что разные музыкальные тоны соотносятся между собой как рациональные числа, и этим открытием в наши дни пользуются все струнные квартеты и все симфонические оркестры. Более того, в перечень обязательных образовательных дисциплин, принятый у древних греков и оставшийся неизменным до времен Средневековья, музыка входила как раздел математики, а музыканты сосредотачивали свои усилия на понимании математической основы тонов. Концепция «музыки сфер» — великолепный синтез музыки и математики, и в воображении философов и музыкантов именно она позволяла — пусть и немногим избранным и одаренным — представить себе мироздание как единый величественный замысел. По словам великого римского оратора и философа Цицерона (ок. 106–43 гг. до н. э.) «звук, о котором говорилось выше, производимый необычайно быстрым круговращением всего мира, столь силен, что человеческое ухо не может его воспринять, — подобно тому, как вы не можете смотреть прямо на Солнце, когда острота вашего зрения побеждается его лучами» (Пер. И. Горенштейна). Лишь в XII веке музыка перестала рабски следовать математическим формулам и предписаниям. Однако даже в XVIII веке немецкий философ-рационалист Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) писал: «*Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi*» («Музыка есть тайное арифметическое упражнение духа, который не знает, что он занят вычислениями»).

Примерно в это же время великий немецкий композитор Иоганн Себастьян Бах (1685–1750) необычайно увлекался разнообразными играми с участием чисел и музыкальных тонов. В частности, он при помощи музыкального шифра закодировал в некоторых своих сочинениях собственную подпись. Согласно старой немецкой системе записи нот буква В соответствовала си-бемоль, а Н — си; А — это ля, С — до, поэтому Бах записал свою фамилию ВАСН нотами — си-бемоль, ля, до, си. Кроме того, Бах применял и шифр, основанный на Гематрии. Буквенное обозначение ноты ля — A — соответствует число 1, ноты си — B — числу 2, до — C — числу 3 и т. д., поэтому *B-A-C-H*=14, а *J-S-B-A-C-H*=41 (поскольку во времена Баха *I* и *J* в немецком алфавите были одной и той же буквой). Эрик Альтшулер, математик и большой любитель творчества Баха, в своей увлекательной книге «Баханалия» (*Eric Altschuler*. Bachanalia, 1994) приводит многочисленные примеры зашифрованных в музыке композитора чисел 14 (*BACH*) и 41 (*JSBACH*); он убежден, что Бах сознательно употреблял именно такие последовательности нот. Например, тема первой фуги Баха, в фуге до-мажор из первого тома «Хорошо темперированного клавира», состоит из четырнадцати нот. Кроме того, из двадцати четырех повторений темы в двадцати двух она доведена до завершения, в двадцать третьем — почти до завершения и лишь в одном, четырнадцатом, вообще не завершена. Альтшулер делает вывод, что то, что Бах так увлеченно ставил в своих произведениях шифрованную подпись, сродни пристрастию художников включать автопортреты в создаваемые картины или манеры Альфреда Хичкока исполнять во всех своих фильмах маленькую роль-камео.

Если учесть исторические отношения музыки с числами, на ум сам собой приходит вопрос, играло ли золотое сечение (или числа Фибоначчи) ту или иную роль как в развитии музыкальных инструментов, так и в музыкальных композициях.

Золотое сечение очень часто применяется в конструкции скрипки. Как правило, очертания корпуса скрипки составляют не менее двенадцати кривых — они и создают ее характерные изгибы. Центром самой плоской кривой, внизу, как правило, служит точка, делящая центральную линию скрипки в золотом сечении.

Пожалуй, самые знаменитые скрипки — это инструменты работы Антонио Страдивари (1644–1737) из итальянского города Кремона. На чертежах мастера (рис. 85) видно, что Страдивари особенно тщательно рассчитывал геометрическое положение так называемых эфов — прорезей на передней части корпуса, — и помещал их в точки, определенные золотым сечением. Однако лишь немногие — возможно, таких и вовсе нет, — полагают, будто скрипки Страдивари обязаны своим непревзойденным качеством и звучанием именно золотому сечению. Гораздо чаще «секретом» Страдивари называют лак, клей, древесину и, конечно, мастерство изготовителя. Многие специалисты сходятся на том, что популярность скрипок XVIII века в целом объясняется их прекрасным звучанием в больших концертных залах. Большинство этих специалистов скажет вам также, что никакого «секрета» у скри-

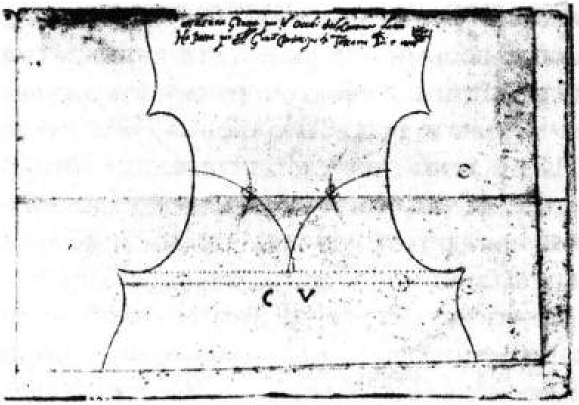


Рис. 85

пок Страдивари нет: это прекрасно выполненное изделие, которое вполне можно повторить, сумма тщательно изготовленных частей, составляющих добротное целое.

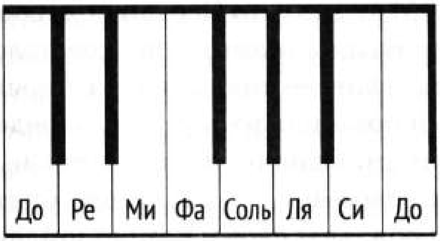


Рис. 86

В связи с числами Фибоначчи упоминают и другой музыкальный инструмент — фортепиано. Октава на клавиатуре фортепиано состоит из тринадцати клавиш, восьми белых и пяти черных (рис. 86). Черные клавиши, в свою очередь, объединены в две группы — две и три. Так вышло, что числа 2, 3, 5, 8 и 13 — последовательные числа Фибоначчи. А то, что главная тональность — до мажор, объясняется отчасти тем, что эту гамму играют только на белых клавишах. Однако очень может быть, что связь между клавиатурой фортепиано и числами Фибоначчи — всего лишь случайность, порождающая необоснованные домыслы. Во-первых, обратим внимание, что хроматическая гамма — на рисунке от ноты «до» до ноты «си» — на которой строится вся западная музыка, состоит на самом деле из двенадцати, а не тринадцати полутонов. Одна и та же нота «до» играется в октаве дважды, дабы подчеркнуть завершенность цикла. Во-вторых и в-главных, расположение клавиш в два ряда, когда диезы и бемоли сгруппированы по два и по три в верхнем ряду, восходит к началу XV века, то есть сложилась задолго до публикации книги Пачоли и тем более до любых серьезных исследований чисел Фибоначчи.

Страстные поклонники золотого сечения утверждают, что это соотношение обладает особыми эстетическими свойствами не только в изобразительном искусстве, но и в музыке, где оно создает особенно приятные созвучия. Например, в книгах о золотом сечении сплошь и рядом пишут, что многие считают, будто самые благозвучные музыкальные интервалы — это большая и малая сексты и что эти интервалы связаны с золотым сечением. Для чистого музыкального тона характерна определенная частота, выраженная в количестве колебаний в секунду, и определенная амплитуда, определяющая громкость в конкретный момент времени. Обычно для настраивания музыкальных инструментов используют ноту ля, которой соответствует частота 440 колебаний в секунду. Большая секста получается из сочетания ля с до: последней соответствует частота около 264 колебаний в секунду. Отношение частот 440/264 сокращается до 5/3 — то есть до отношения двух последовательных чисел Фибоначчи. Большая секста получается, если взять верхнее до (528 колебаний в секунду) и ми (330 колебаний в секунду). В этом случае отношение 528/330 сокращается до 8/5, то есть тоже до отношения двух последовательных чисел Фибоначчи — это уже очень близко к золотому сечению (напомню, что отношения последовательных чисел Фибоначчи стремятся к золотому сечению). Однако и здесь, как и в живописи, понятие «самого благозвучного» музыкального интервала несколько неоднозначно.

Инструменты, ноты у которых фиксированы, например, фортепиано, настраивают по «равномерно темперированному строю», который популяризировал Бах, где каждый полутон обладает таким же отношением частот, что и следующий, поэтому легко играть в любой тональности. Отношение двух соседних частот у хорошо темперированного инструмента равно $2^{1/12}$ (то есть корень 12 степени из 2). Откуда взялось это число? Его происхождение восходит к Древней Греции. Вспомним, что октава получается, если поделить струну на две равные части (то есть соотношение частот должно быть 2 к 1), а квинта — если соотношение частот будет 3 к 2 (то есть при делении струны на две части — две трети и одна треть). Один из вопросов, особенно занимавших пифагорейцев, состоял в том, можно ли создать целое число октав, повторяя процедуру создания квинты (то есть последовательно применяя соотношение частот 3 к 2). В математических терминах это все равно что спросить, существуют ли два целых числа n и m, такие, что $(3/2)^n = 2^m$. Как выясняется, целых чисел, удовлетворяющих этому равенству, нет, однако при $n = 12$ и $m = 7$ мы подходим к решению довольно близко, ведь по странному совпадению $2^{1/12}$ примерно равняется $3^{1/19}$ (корень 19 степени из 3). Поэтому двенадцать частот октавы — это приблизительно равные степени базового соотношения частот $2^{1/12}$. Кстати, хотите верьте, хотите нет, но $19/12 = 1{,}58$, не так уж далеко от φ.

Золотое сечение в принципе могло бы повлиять на то, какое удовольствие мы получаем от музыкального произведения, если учесть концепцию пропорционального равновесия. Однако положение дел здесь несколько сложнее, чем в изобразительном искусстве. Неудачная композиция картины сразу бросается в глаза. С другой стороны, в музыке нужно выслушать произведение с начала до конца, а потом уже делать выводы. Тем не менее не приходится сомневаться, что опытные композиторы строят свои произведения так, чтобы не только разные части прекрасно гармонировали друг с другом, но можно было оценивать и каждую часть в отдельности — она служит сама себе мерилом.

Мы видели много примеров, когда приверженцы золотого сечения изучали пропорции всевозможных произведений искусства в поисках действительного или мнимого применения φ. Эти страстные поклонники подвергли подобному обращению и многие музыкальные композиции. Результаты получились очень похожие: наряду с единичными случаями, когда золотое сечение и в самом деле легло в основу той или иной системы пропорций, налицо множество ошибочных предположений.

Пол Ларсон из Университета Темпл в 1978 году заявил, что обнаружил золотое сечение в нотной записи первой европейской музыки — в хоралах «*Kyrie*» из собрания грегорианских хоралов «*Liber Usualis*». Тридцать хоралов «*Kyrie*» в этом собрании созданы с разбросом более чем в шестьсот лет, начиная с X века. Ларсон утверждал, что проанализировал 146 частей хоралов «*Kyrie*» и в 105 из них обнаружил значимые «события» (например, начало или конец музыкальной фразы), разделенные в отношении золотого сечения. Однако в отсутствие каких бы то ни было исторических данных, подтверждающих, что композиторы тех времен применяли золотое сечение при создании этих хоралов, и каких бы то ни было рациональных объяснений, зачем это было делать, можно лишь считать, что перед нами, к сожалению, очередной пример жонглирования цифрами.

В целом подсчет нот и ритма нередко выявляет определенные численные соотношения между разными частями музыкальной пьесы, и у того, кто проводит этот анализ, возникает, конечно, понятное и естественное искушение сделать вывод, что композитор сознательно все рассчитал. Однако если нет надежных документальных свидетельств — а во многих случаях их нет — подобные предположения сомнительны.

В 1995 году математик Джон Ф. Путц из колледжа Альма в Мичигане исследовал вопрос о том, пользовался ли Моцарт (1756–1791) золотым сечением в двадцати девяти частях фортепианных сонат, каждая из которых, в свою очередь, состоит из двух отчетливо выраженных фрагментов: сначала идет экспозиция, когда слушателя знакомят с музыкальной темой, а затем разработка, где тема развивается и пересматривается. Поскольку музыкальные произведения делятся на одинаковые по продолжительности единицы под названием «такты», Путц изучил отношение количества тактов в двух частях сонат. Моцарт, который в школьные годы, по свидетельству его сестры, «не говорил и не думал ни о чем, кроме цифр», вероятно, один из лучших кандидатов на то, чтобы строить свои сочинения на математической основе. Более того, и до Путца было опубликовано несколько статей, где утверждалось, что в фортепианных сонатах Моцарта и в самом деле видно влияние золотого сечения. Первые результаты Путца оказались очень многообещающими. В сонате № 1 до мажор, к примеру, в первой части разработка состоит из шестидесяти двух тактов, а экспозиция из тридцати восьми. Отношение 64/38 = 1,63 очень близко к золотому сечению. Однако тщательное изучение всех данных в целом убедило Путца, что нет, Моцарт не применял в своих сонатах золотое сечение и вообще неочевидно, что простое соотношение длительности частей произведения делает его особенно приятным. Поэтому, хотя многие называют музыку Моцарта подлинно божественной, божественная пропорция тут ни при чем.

А вот знаменитый венгерский композитор Бела Барток (1881–1945), судя по всему, применял золотое сечение довольно часто. Бела Барток был не только пианистом-виртуозом, но и фольклористом и сочетал элементы, заимствованные у других композиторов, которыми он восхищался — в том числе, у Штрауса, Листа и Дебюсси — с фольклорными мотивами, что и придавало его музыке ярчайшую индивидуальность. Как-то раз Барток сказал, что «мелодический мир моих струнных квартетов если и отличается от народных песен, то несущественно». Ритмическая живость его музыки в сочетании с тщательно рассчитанной симметрией форм делает его одним из самых оригинальных композиторов XX века.

Венгерский музыковед Эрне Лендваи долго и внимательно изучал музыку Бартока и опубликовал об этом много книг и статей. Лендваи утверждает, что «стилистический анализ музыки Бартока позволил мне заключить, что главная черта его хроматической техники — подчинение законам золотого сечения в любом музыкальном движении». Согласно Лендваи, то, как Барток строит ритм своих композиций — превосходный пример применения золотого сечения в музыке. Анализируя, в частности, фугу из «Музыки для струнных, ударных и челесты» Бартока, Лендваи показывает, что 89 тактов фуги разделены пирамидальным пиком громкости на две части — 55 и 34 такта. Дальнейшее деление производится при помощи сурдины, приглушающей звук различных инструментов — начало и конец ее действия отмечают границы сегментов — и другими изменениями текстуры (рис. 87).

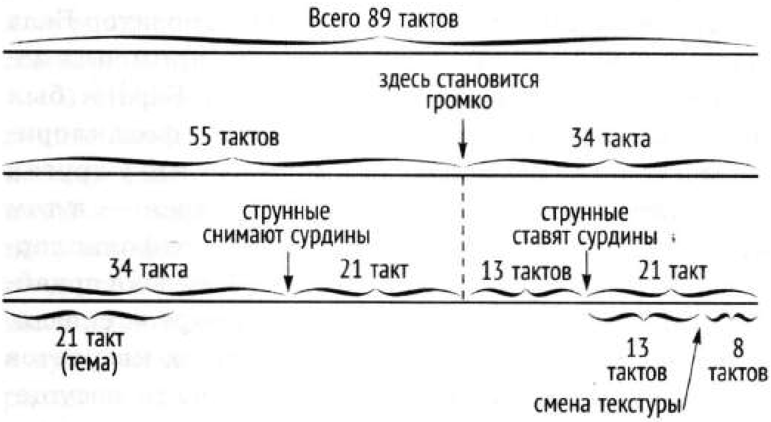


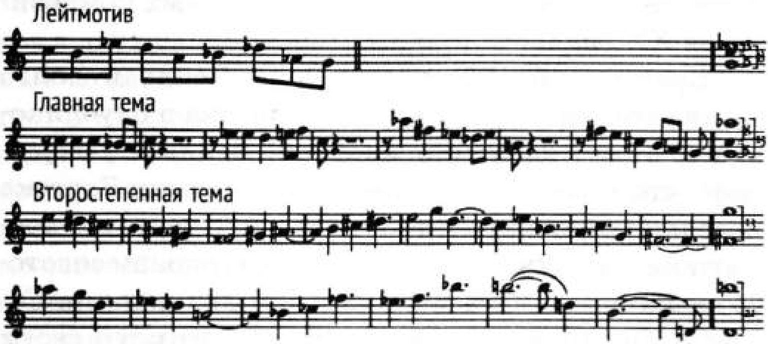
Рис. 87

Лейтмотив	3 + 5 = 8
Главная тема	5 + 8 = 13
Второстепенная тема	13, 21

Рис. 88

Количество тактов всегда совпадает с числами Фибоначчи, а отношения между крупными частями близки к золотому сечению (например, 55/34). Подобным же образом в «Сонате для двух фортепиано и ударных» различные темы развиваются в порядке чисел Фибоначчи и согласно золотому сечению по количеству полутонов (рис. 88).

Не все музыковеды согласны с анализом Лендваи. Сам Лендваи признает, что Барток о своих композициях говорил очень мало, почти ничего: «Пусть моя музыка говорит сама за себя, я не претендую ни на какую интерпретацию своих работ». То обстоятельство, что Барток не оставил никаких черновиков, из которых следовало бы, что он математически выводил ритмы и соотношения, превращает любой анализ в гипотезу и не более того. Кроме того, Лендваи даже уклоняется от вопроса, сознательно ли Барток применял золотое сечение. Венгерский музыковед Ласло Сомфаи в своей книге «Бела Барток. Композиция, концепции и собственноручные документы» (*Laszlo Somfai*. Béla Bartók: Composition, Concepts and Autograph Sources», 1996) решительно опровергает гипотезу о том, что Барток опирался на золотое сечение. На основании тщательного анализа примерно 3600 страниц, занявшего тридцать лет, Сомфаи приходит к выводу, что Барток сочинял музыку безо всяких продуманных теоретических построений. Другие музыковеды, в том числе Рут Татлоу и Пол Гриффитс, также называют исследования Лендваи «сомнительным».

Рой Ховат из Кембриджского университета в своей занимательной книге «Дебюсси в пропорциях» (*Roy Howat*. Debussy in Proportion) отстаивает ту точку зрения, что французский композитор Клод Дебюсси (1862–1918), чье новаторство в гармонии оказало сильнейшее влияние на целые поколения композиторов, применял золотое сечение во многих своих произведениях. Например, в пьесе для фортепиано «Отражения в воде», входящей в цикл «Образы», первое повторение рондо происходит после такта 34, то есть в точке, которая делит отрывок пьесы с начала произведения до начала кульминации — такт 55 — в золотом сечении. Напоминаю, что и 34, и 55 — числа Фибоначчи, а отношение 34/21 — очень близкое приближение к числу φ. Та же структура зеркально повторена во второй части, разделенной в отношении 24/15 (что равно отношению двух чисел Фибоначчи 8/5 и опять же близко к золотому сечению, см. рис. 89). Подобные деления Ховат обнаруживает в трех симфонических эскизах «Море», фортепианной пьесе «Сады под дождем» и других произведениях.

Рис. 89

Должен признать, что, учитывая историю создания «Моря», мне трудновато поверить, что Дебюсси при сочинении именно этого произведения опирался на какие бы то ни было математические соображения. Работать над «Морем» Дебюсси начал в 1903 году и в письме к своему другу Андре Мессаже писал: «Быть может, ты не знаешь, что мне была уготована судьба моряка и что по иному пути я пошел лишь случайно. Однако страстная любовь к нему [к морю] сохранилась у меня навсегда». Ко времени завершения «Моря» в 1905 году вся жизнь Дебюсси буквально перевернулась. Он ушел от первой жены Лили (Розали Тексье) к очаровательной Эмме Бардак, Лили пыталась покончить с собой, затем и Лили, и Эмма подали на композитора в суд. Если вслушаться в «Море» — вероятно, самое искреннее и страстное произведение Дебюсси, в ушах буквально раздается музыкальный портрет моря, вдохновленный, возможно, работами английского живописца Джозефа Мэлфорда Уильяма Тернера, однако очевидно, что это не только изобразительная музыка, но еще и выражение бурного периода в жизни композитора.

Поскольку сам Дебюсси особенно не распространялся о своих композиторских приемах, нужно провести четкое различие между навязанной интерпретацией и подлинными сознательными намерениями композитора, о которых мы ничего не знаем. В доказательство своего анализа Ховат приводит два внешних обстоятельства: во-первых, Дебюсси был тесно связан с художниками-символистами, о которых достоверно известно, что они интересовались золотым сечением, во-вторых, сохранилось письмо Дебюсси, написанное в августе 1903 года его издателю Жаку Дюрану. В этом письме, которое прилагалось к вычитанным гранкам «Садов под дождем», Дебюсси говорит, что в одном месте выпал такт, и объясняет: «Он, однако, необходим, так как имеет отношение к числу — к божественному числу». Напрашивается вывод, что Дебюсси основывал свои гармонические структуры не просто на численных расчетах, но что важную роль в этом играло некое «божественное число» (предполагается, что речь идет о золотом сечении).

Кроме того, Ховат считает, что на Дебюсси влияли сочинения математика, критика и искусствоведа Шарля Анри, который очень интересовался численными соотношениями в мелодии, гармонии и ритме. Работы Анри по эстетике, в том числе «Введение в научную эстетику» (*Charles Henry*. Introduction à une esthétique scientifique, 1885), уделяли золотому сечению очень важное место.

Вероятно, мы так никогда и не узнаем, действительно ли этот столп французского модернизма сознательно применял золотое сечение при построении формальных пропорций. Среди крайне немногочисленных учеников Дебюсси была мадемуазель Ворм де Ромийи, которая как-то раз написала, что он «всегда жалел, что вместо музыки не занялся живописью». Вероятно, в некоторой, пусть и небольшой степени весьма оригинальная эстетика Дебюсси и вправду строилась на золотом сечении, однако это, несомненно, был не главный источник творчества композитора.

Не удержусь и приведу курьезный исторический случай, в котором имена Бартока и Дебюсси оказались связаны. Во время визита молодого венгерского композитора в Париж великий фортепианный педагог Исидор Филипп предложил представить Бартока композитору Камилю Сен-Сансу, в то время очень знаменитому. Барток отказался. Тогда Филипп предложил познакомить его с великим композитором и органистом Шарлем-Мари Видором. Барток снова отказался. «Ладно, — сказал Филипп, — если вы не хотите встречаться с Сен-Сансом и Видором, с кем же вам угодно познакомиться?» — «С Дебюсси». — «Но он же кошмарный человек! — воскликнул Филипп. — Страшный мизантроп и наверняка обойдется с вами грубо. Неужели вы хотите, чтобы Дебюсси вас оскорбил?» — «Да!» — ответил Барток, не раздумывая.

Появление различных технологий звукозаписи и компьютерной музыки в XX веке упростило точные математические измерения и способствовало появлению музыки, основанной на числах. Например, австрийский композитор Альбан Берг (1885–1935) выстроил свой «Камерный концерт» целиком и полностью на числе три: там есть и объединение по тридцать тактов, и три темы, и три основные «краски» — фортепиано, скрипка, духовые. Французский композитор Оливье Мессиан (1908–1992), движимый в основном страстной католической верой и любовью к природе, также сознательно применял числа в ритмических конструкциях, например, при определении количества движений. Однако когда в 1978 году его прямо спросили, применял ли он при этом золотое сечение, он ответил, что нет.

Композитор, математик и преподаватель Иосиф Шиллингер (1895–1943) был весьма незаурядным человеком, его личность и мировоззрение служили ярким примером платоновского представления о связи математики с музыкой. Шиллингер учился в Петроградской консерватории, преподавал и сочинял музыку в Харькове и в Ленинграде, а в 1928 году эмигрировал в США и стал там профессором математики и композиции в самых разных учебных заведениях, в том числе и в Колумбийском и в Нью-Йоркском университетах. В числе учеников Шиллингера были знаменитый композитор и пианист Джордж Гершвин, джазовый кларнетист Бенни Гудмен и руководитель свингового оркестра Гленн Миллер. Шиллингер был убежденным приверженцем музыки на математической основе и разработал систему музыкальной композиции, носящую его имя. В частности, в некоторых пьесах последовательность нот в мелодии соответствовала числам Фибоначчи — если считать интервалы по полутонам (рис. 90). По мнению Шиллингера, эти «скачки Фибоначчи» вызывали у слушателя то же ощущение гармонии, что и филлотактическое расположение листьев на стебле — у ботаника. В своей книге «Иосиф Шиллингер. Воспоминания» (*Frances Schillinger*. Joseph Schillinger: A Memoir) вдова Шиллингера Фрэнсис рассказывает, как однажды композитор в компании друзей ехал в машине в ливень и заметил: «И шум дождя, и дворники, смахивающие воду с лобового стекла, обладают собственным ритмическим рисунком. Это и есть бессознательное искусство». Шиллингер постоянно пытался доказать, что можно основывать музыкальную композицию исключительно на математических формулах, и одна такая попытка привела к интересному результату: Шиллингер скопировал график колебаний фондового рынка из газеты «Нью-Йорк Таймс», переложил его взлеты и падения в пропорциональные музыкальные интервалы и показал, что таким образом получается мелодия, несколько напоминающая сочинения великого Баха.

Вывод из этого краткого экскурса в мир музыки таков: мнение о том, что некоторые композиторы применяли в своих сочинениях золотое сечение, как правило, предполагает чересчур поспешный переход от чисел, получаемых простым подсчетом (количество нот, тактов и пр.) к интерпретации. Тем не менее нет никаких сомнений, что именно

в XX веке интерес к численной стороне музыки вспыхнул с новой силой. Это возрождение пифагорейского учения, в частности, привело к тому, что и золотое сечение сыграло достаточно важную роль в сочинениях некоторых композиторов.

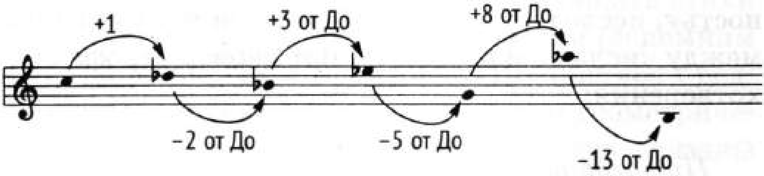


Рис. 90

Весьма красноречиво выразил отношения между музыкой и математикой в своей книге «Прекрасное в музыке» (*Eduard Hanslick*. The Beautiful in Music) венский музыкальный критик Эдуард Ганслик (1825–1904):

> «Музыка» природы и музыка как творение человека принадлежат к двум разным категориям. Переход из первой во вторую происходит средствами математической науки. Это очень важный довод, из которого многое следует. Однако мы бы заблуждались, если бы сделали вывод, будто человек строит свою музыкальную систему согласно осознанным вычислениям, ведь хотя эта система возникла благодаря бессознательному применению заложенных в человеке представлений о количестве и соразмерности посредством тонких процессов расчета и измерения, однако законы, управляющие этими процессами, наука описывает лишь задним числом.

Так задумал Пифагор

Этими словами знаменитый ирландский поэт Уильям Батлер Йейтс открывает свое стихотворение «Статуи». Йейтс, который когда-то сказал, что «самая сущность гения любого рода — это точность», исследует в этом стихотворении отношения между числами и страстью. Вот первая строфа стихотворения:

Пифагор рассчитал все.
Откуда ж людей удивленье?
Его числа изваяны в камне и в бронзе отлиты.
Им, однако, как будто живым,
недоступны любовь и томленье.
Одинокая юность, почуяв любовную силу,
Знает страсть, что способна разбить
или слить монолиты.
И к губам, для которых холодный расчет
был мерилом,
Прижимает живые горячие губы полночной порой,
Там, где взгляд площадей и людей
наблюдательных строй.

Йейтс прекрасно выразил то обстоятельство, что тщательно рассчитанные пропорции греческих скульптур могут показаться холодными, однако юные и страстные души все равно считали эти условные формы воплощением предмета своей любви.

На первый взгляд, нет предмета более далекого от математики, чем поэзия. Нам представляется, что стихи произрастают из чистого воображения поэта, и их цветению нет закона, как нет закона красоте алой розы. Только не надо забывать, что расположение лепестков этой самой розы подчиняется точнейшему порядку, основанному на золотом сечении. Так нельзя ли строить стихи на той же основе?

В принципе, есть два способа связать поэтический язык с золотым сечением и числами Фибоначчи. Во-первых, можно просто посвящать стихи золотому сечению и числам Фибоначчи (вспомним стихотворение Пола Брукмана «Постоянное Среднее», упоминавшийся в главе 4), или геометрическим фигурам и феноменам, которые тесно связаны с числом φ. Во-вторых, можно так или иначе применять золотое сечение или числа Фибоначчи в стихотворной форме и ритме.

Примеры первого типа — это, в частности, юмористические стихи Дж. А. Линдона, великий «Фауст» Иоганна Вольфганга Гёте и стихотворение «Раковина наутилуса» Оливера Уэнделла Холмса. Стихотворением Линдона Мартин Гарднер открыл главу о числах Фибоначчи в своей книге «Математический цирк». В нем говорится о рекурсивных отношениях, характерных для последовательности Фибоначчи:

Пять было жен у Фибоначчи,
Чем далее, тем формами богаче:
Вес каждой — как у двух, что были до;
Да, пятая влезала в дом с трудом!

(Пер. М. Антипина)

О Фибоначчи говорится и в двустишии Кэтрин О'Брайен:

Фибоначчи ни сна, ни покоя не знает —
Не овец, а крольчат до рассвета считает.

Немецкий поэт и драматург Гёте (1743–1832) — безусловно, один из величайших писателей в мировой литературе. Вершина его многогранного гения — «Фауст», грандиозная метафора человеческого стремления к могуществу и познанию. Ученый Фауст продает душу дьяволу, воплотившемуся в Мефистофеле, в обмен на знания, молодость и магические способности. Когда Мефистофель обнаруживает, что под порогом у Фауста начертана пентаграмма, он не может выйти. Магические свойства, приписываемые пентаграмме еще с пифагорейских времен (они и привели к определению золотого сечения), в христианскую эпоху приобрели особую значимость, поскольку пять лучей пятиконечной звезды, как считалось, символизируют имя «Иисус». Именно поэтому полагали, что дьявол боится пентаграммы. Вот как это описано в поэме:

Мефистофель:

Я в некотором затрудненье.
Мне выйти в сени не дает
Фигура под дверною рамой.

Фауст:

Ты испугался пентаграммы?
Каким же образом тогда
Вошел ты чрез порог сюда?
Как оплошал такой пройдоха?

Мефистофель:

Всмотритесь. Этот знак начертан плохо.
Наружный угол вытянут в длину
И оставляет ход, загнувшись с края.

(Пер. Б. Пастернака)

Мефистофель прибегает к жульничеству — чтобы миновать пентаграмму, пользуется тем, что линия пентаграммы не замкнута. Очевидно, Гёте не имел никакого намерения обращаться в «Фаусте» к концепции золотого сечения и упоминает о пентаграмме исключительно из-за ее символических качеств. Свое мнение о математике Гёте формулировал следующим образом: «Математики — они словно французы: когда говоришь с ними, они тут же переводят твои слова на свой язык — и получается что-то совсем другое».

Американский врач, поэт и писатель Оливер Уэнделл Холмс (1809–1894) издал множество сборников очаровательных остроумных стихов. В стихотворении «Раковина наутилуса» он выводит мораль из самоподобного роста раковины моллюска:

Пускай года сменяются, спеша, —
Все выше купол поднимай, душа,
Размахом новых зданий с прежним споря,
Все выше и вольней! —
Пока ты не расстанешься без горя
С ракушкою своей
На берегу бушующего моря!

(Пер. Г. Кружкова)

Примеров математического расчета в поэтических формах очень и очень много. Например, «Божественная комедия», гениальное классическое произведение итальянского поэта Данте Алигьери (1265–1321), разделено на три части, написано терцетами — строфами по три строки, — а в каждой его части по тридцать три песни, кроме первой, в которой их тридцать четыре, чтобы всего было ровно сто.

Пожалуй, именно в поэзии впервые нашли свое воплощение числа Фибоначчи, и это было даже до кроликов. Один из стихотворных размеров в санскритской и пракритской поэзии назывался матра-врттас (*mātrā-vṛttas*). Это семейство таких стихотворных размеров, где количество мор (обычных кратких слогов) остается неизменным, а количество букв произвольно. В 1985 году математик Парманаид Сингх из колледжа им. Раджа Нарайна в Индии подметил, что числа Фибоначчи и отношения, которые их связывают, упоминаются в сочинениях трех древнеиндийских специалистов по матра-врттас, написанных задолго до 1202 года, когда была опубликована книга Фибоначчи. Первым из этих авторов, писавших о метрике, был Акарья Вираханка, живший примерно в VI–VIII веке. Хотя приведенное у него правило сформулировано несколько расплывчато, он и в самом деле упоминает смешение вариантов двух предыдущих стихотворных стоп, чтобы получить следующую — подобно числу Фибоначчи, представляющему собой сумму двух предыдущих. Другой математик по имени Гопала также приводит это правило в рукописи, написанной между 1133 и 1135 годом. Он объясняет, что каждая стопа есть сумма двух предыдущих стоп, и приводит при этом последовательность 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 — то есть числа Фибоначчи как они есть. Наконец, великий джайнистский поэт и энциклопедист Ачарья Хемачандра, живший в XII веке и пользовавшийся покровительством двух царей, также в рукописи, написанной около 1150 года, недвусмысленно говорит, что «сумма последнего и предпоследнего чисел [вариантов стоп] и составляет следующую стопу матра-врттас». Однако первого появления чисел

Фибоначчи в теории стихосложения математики, похоже, не заметили.

В научно-популярной книге Труди Хэммел Гарланд «Чудесные числа Фибоначчи» приведен пример лимерика, где количество строк (5), количество стоп в каждой строке (2 или 3) и общее число стоп (13) представляют собой числа Фибоначчи:

> *Молодая особа, чей нос*
> *Рос, пока до земли не дорос,*
> *За пятак и полушку*
> *Нанимала старушку,*
> *Чтоб носить свой немыслимый нос.*
>
> (Пер. М. Фрейдкина)

Однако зачастую появление в стихотворении нескольких чисел Фибоначчи ни в коем случае нельзя считать свидетельством того, что поэт непременно имел в виду эти числа или золотое сечение, когда продумывал стихотворную форму своего произведения. Поэзия, как и музыка, предназначена для того, чтобы ее слушать, а не читать глазами, и особенно это справедливо для поэзии минувших веков. Следовательно, важнейший структурный элемент поэзии — это соразмерность и созвучия, приятные на слух. Однако это не означает, что золотое сечение и числа Фибоначчи — единственные инструменты в арсенале поэта.

Особенно сильное заявление о роли золотого сечения в поэзии сделал Джордж Эккел Дакворт, профессор классической филологии из Принстонского университета, в 1962 году. Он выпустил книгу «Структурные закономерности и пропорции в «Энеиде» Вергилия» (*George Eckel Duckworth.* Structural Patterns and Proportions in Vergil's Aeneid), где утверждает, что «Вергилий строил композицию "Энеиды" на основе математических пропорций, и в каждой книге, как в небольших отрывках, так и в крупных подразделах, налицо прославленное численное соотношение, известное под разными названиями — как "золотое сечение", так и "божественная пропорция"».

Римский поэт Вергилий (70–19 гг. до н. э.) вырос в семье земледельца, и многие ранние его пасторальные произведения повествуют об очаровании сельской жизни. Эпическая поэма «Энеида» рассказывает о приключениях троянского героя Энея и считается одним из величайших поэтических произведений в истории. Поэма состоит из двенадцати книг, и Вергилий прослеживает в ней путь Энея от путешествия из Трои в Карфаген и любви к Дидоне до образования римского государства. Эней для Вергилия — образец благочестия, преданности семье и верности государству.

Дакворт дотошно измерил длину отрывков в «Энеиде» и высчитал соотношение их размеров. В частности, он подсчитал количество строк в эпизодах, которые назвал «бóльшими» (их он обозначил как M) и «меньшими» (обозначены как m), и подсчитал соотношение этих чисел. Больший эпизод или меньший, определялось по содержанию. Скажем, во многих отрывках большая или меньшая часть — это монолог персонажа, а другая часть (соответственно меньшая или большая) — это повествование или описание. Из этого анализа Дакворт делает вывод, что в «Энеиде» содержатся «сотни золотых сечений». Он также отмечает, что более ранний анализ (проведенный в 1949 году) другого произведения Вергилия — первой книги «Георгик» — дает соотношение двух частей под условными названиями «Труды» и «Дни» (образцом для Вергилия при создании «Георгик» послужили «Труды и дни» Гесиода), очень близкое к φ.

К сожалению, Роджер Герц-Фишлер доказал, что анализ Дакворта, скорее всего, построен на математическом недоразумении. Поскольку подобное заблуждение типично для многих «открытий», связанных с золотым сечением, я вкратце объясню, в чем тут дело.

Рис. 91

Предположим, у нас есть два положительных числа m и M, такие, что M больше m. Ну, например, $M = 317$, и это количество страниц в последней прочитанной вами книге, а $m = 160$, и это ваш рост в сантиметрах. Отметим эти два числа на отрезке прямой (проследим, чтобы относительные пропорции при этом сохранялись), как на рис. 91. Отношение меньшей части к большей равно $m/M = 160/317 = 0{,}504$, а отношение большей к целому — $M/(M+m) = 317/477 = 0{,}665$. Вы, конечно, отметите, что значение $M/(M+m)$ ближе к $1/\varphi = 0{,}618$, чем m/M. Можно математически доказать, что это всегда так (проверьте на количестве страниц в книге, которую прочитали последней, и собственном росте в сантиметрах). По определению золотого сечения, если отрезок разделен в этом соотношении, то $m/M = M/(M+m)$ в точности. Следовательно, возникает искушение сделать вывод, что если исследовать много отношений чисел, например, длин эпизодов, в поисках возможного присутствия золотого сечения, неважно, какое отношение мы возьмем — меньшей части к большей или большей к целому. Так вот, я только что доказал, что очень даже важно. Излишне рьяный поклонник золотого сечения, желающий доказать, что рост читателей находится в отношении золотого сечения с количеством страниц в прочитанных ими книгах, вероятно, сумеет это сделать, если представит данные в формате $M/(M+m)$, то есть в таком виде, который делает их ближе к $1/\varphi$. Именно это и приключилось с Даквортом. Он принял неудачное решение прибегнуть в ходе анализа только к соотношению $M/(M+m)$, поскольку решил, что так «несколько точнее», и поэтому сжал и исказил данные и лишил свой анализ статистической достоверности. Более того, Леонард А. Керчин из Оттавского университета и Роджер Герц-Фишлер повторили в 1981 году анализ данных Дакворта, пользуясь, однако, соотношением m/M, и показали, что в «Энеиде» нет ни следа золотого сечения. Они сделали другой вывод — что «Вергилий склонен к случайному распределению длины эпизодов». Кроме того, Дакворт ошибочно «наделил» Вергилия познаниями, что отношение двух последовательных чисел Фибоначчи — это достаточно точное приближение к золотому сечению. Керчин и Герц-Фишлер, напротив, убедительно продемонстрировали, что даже Герон Александрийский, который жил позднее Вергилия и был одним из выдающихся математиков своего времени, не знал об этом соотношении между золотым сечением и числами Фибоначчи.

К сожалению, заявления о Вергилии и φ по-прежнему появляются в большинстве книг и статей о золотом сечении, что в очередной раз показывает, как велико обаяние «золотой нумерологии».

Все попытки обнаружить золотое сечение в разнообразных произведениях изобразительного искусства, в музыке и поэзии — как обоснованные, так и необоснованные — опираются на предположение, что на свете существует канон идеальной красоты и что его можно воплотить на практике. Однако история показала, что художники, создававшие произведения, которые надолго их пережили, по большей части как раз отходили от подобных академических представлений. Золотое сечение, бесспорно, играет важную роль во многих областях математики и естественных наук, однако, по моему скромному убеждению, нельзя делать из него незыблемый эстетический стандарт — ни в пропорциях человеческого тела, ни в качестве мерила в изящных искусствах.

ЗВЕЗДНОЕ НЕБО НАД НАМИ И ПЛИТОЧНЫЙ ПОЛ У НАС ПОД НОГАМИ

> *В конечном счете, именно ради понимания мы и затеяли всю науку, а наука — это все же нечто большее, нежели просто бездумное вычисление.*
>
> Роджер Пенроуз
> (р. 1931)

Запутанная история золотого сечения началась в VI веке до нашей эры и дошла до сегодняшнего дня. Эти двадцать шесть столетий пронизаны двумя основными нитями повествования. Я имею в виду, с одной стороны, пифагорейский девиз «Все есть число», который поразительным образом воплощается в действительность в самом буквальном смысле — в той роли, которую играет золотое сечение в природе, от филлотаксиса до формы галактик, — а с другой стороны, пифагорейскую одержимость символическим значением правильного пятиугольника, которая преобразилась в ложное, по моему мнению, представление, что золотое сечение — это универсальной канон идеала красоты. После всего этого читатель вправе задаться вопросом, стоит ли и дальше исследовать это простое, на первый взгляд, правило разделения отрезка.

Мощенная плитками дорога к квазикристаллам

Голландский художник Ян Вермеер (1632–1675) знаменит своими поразительными, чарующими жанровыми полотнами, на которых, как правило, изображены один-два человека за повседневными делами. На многих этих картинах слева от зрителя расположено окно, которое освещает комнату мягким светом, и отражение этого света от плиток на полу оставляет впечатление подлинного волшебства. Если пристально рассматривать эти картины, окажется, что на многих из них — в частности, я имею в виду картины «Концерт», «Дама, пишущая письмо, со своей служанкой», «Любовное письмо» (рис. 92, хранится в Государственном музее в Амстердаме) и «Аллегория живописи» (рис. 93, хранится в Музее истории искусств в Вене) — изображен пол с одним и тем же плиточным узором из черных и белых квадратов.

Если хочешь получить покрыть плитками весь пол и получить при этом повторяющийся через равные промежутки узор, то мостить полы удобнее всего именно квадратами, равносторонними треугольниками и правильными шестиугольниками, и это называется «периодическое замощение» (рис. 94). Простые, ничем не украшенные квадратные плитки и узоры, которые они образуют, обладают четырехсторонней симметрией: если повернуть их на четверть круга, то есть на 90 градусов, они останутся прежними. Подобным же образом плит-

Рис. 92

Рис. 93

ки в виде равносторонних треугольников обладают трехсторонней симметрией (они остаются прежними при повороте на треть круга, то есть на 120 градусов), а плитки в виде правильных шестиугольников — шестисторонней симметрией (то есть остаются прежними при повороте на шестую часть круга, на 60 градусов).

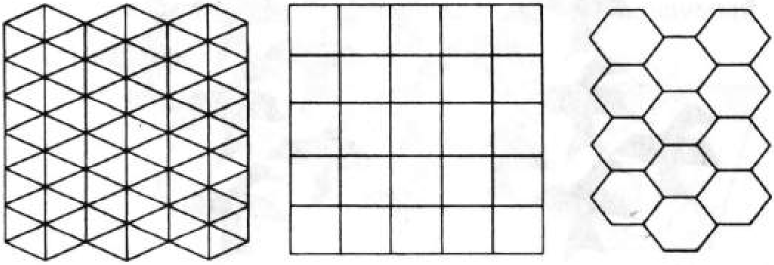


Рис. 94

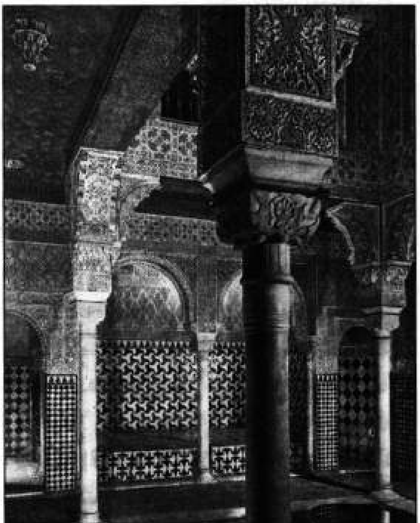


Рис. 95

Однако периодические замощения возможны и при помощи более сложных геометрических фигур. Например, крепость Альгамбра в Гренаде, один из самых потрясающих памятников мусульманской архитектуры, отделана разнообразными сложными узорами из плиток (рис. 95). Некоторые из них даже вдохновили знаменитого голландского графика М. К. Эшера (1898–1972), и он создал множество весьма изысканных узоров-замощений (например, рис. 96), которые называл «разбиением плоскости».

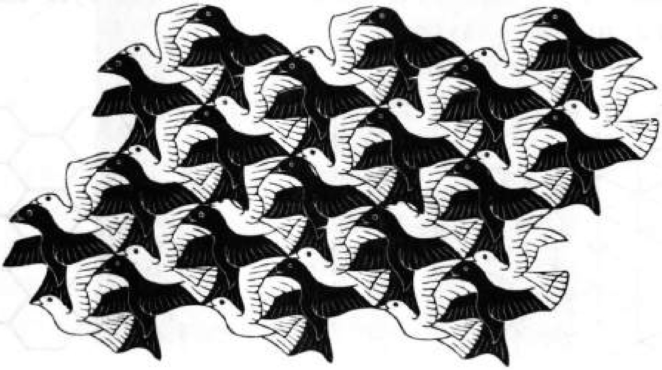
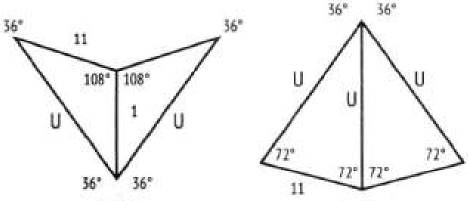


Рис. 96

Теснее всего из всех геометрических фигур с золотым сечением связан, конечно, правильный пятиугольник, обладающий пятисторонней симметрией. Однако одними правильными пятиугольниками плоскость не замостишь, периодического узора не получится. Сколько ни старайся, останутся незаполненные промежутки. Поэтому долгое время считалось, что невозможно создать замощение с крупномасштабной упорядоченностью (так называемым «дальним порядком»), обладающее пятисторонней симметрией. Однако Роджер Пенроуз в 1974 году обнаружил два основных набора плиток, при помощи сочетания которых можно замостить плоскость целиком, соблюдая при этом «запретную» пятистороннюю симметрию. Получившиеся узоры не строго периодичны, хотя и обладают дальним порядком.

Мозаики Пенроуза, можно сказать, сплошь построены на золотом сечении. Одна из пар плиток, которые рассматривал Пенроуз, состоит из двух фигур под названием «дротик» и «змей» (рис. 97, a и b соответственно). Обратите внимание, что обе фигуры состоят из двух равнобедренных треугольников, входящих в состав правильного пятиугольника (рис. 25). Треугольник, у которого отношение стороны к основанию равно φ, — это так называемый золотой треугольник (рис. 97, b), а треугольник, у которого отношение стороны к основанию равно 1/φ, — это золотой гномон (рис. 97, a). Эти фигуры можно получить, если разделить в золотом сечении длинную диагональ ромба с углами 72 и 108 градусов (рис. 98).



(a) (b)

Рис. 97

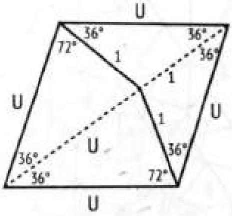


Рис. 98

Пенроуз и принстонский математик Джон Хортон Конвей показали, что для того, чтобы замостить плоскость змеями и дротиками непериодическим образом, как на рис. 99, нужно соблюдать определенные правила сочетаемости. Для этого удобно наносить на стороны фигур «метки» в виде выступов и пазов, как на кусочки паззла (рис. 100). Далее Пенроуз и Конвей доказали, что змеи и дротики могут непериодически заполнять плоскость бесконечным множеством способов, поскольку каждый узор можно окружить любым другим узором и таким образом создать третий, отличающийся от первых двух. Одно из самых поразительных свойств любой мозаики Пенроуза из дротиков и змеев состоит в том, что количество змеев примерно в 1,618 раз больше количества дротиков. То есть, если мы обозначим количество змеев как $N_{змеев}$, а количество дротиков как $N_{дротиков}$, то чем больше площадь, тем ближе отношение $N_{змеев} / N_{дротиков}$ к числу φ.

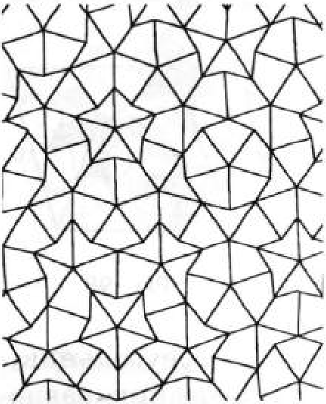


Рис. 99

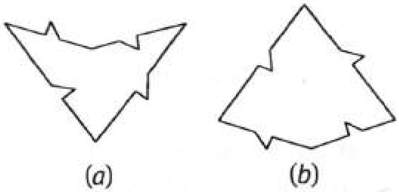
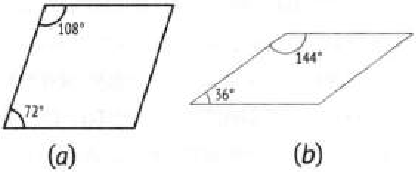


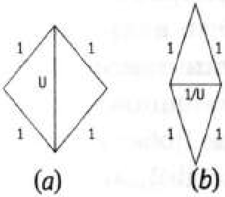
Рис. 100

Другая пара Пенроуза, непериодически заполняющая плоскость целиком, состоит из двух ромбов, «толстого» и «тонкого» (рис. 101). Как и пара «змей-дротик», каждый из ромбов состоит из двух золотых треугольников или двух золотых гномонов (рис. 102), и при замощении плоскости нужно соблюдать определенные правила сочетаемости, для удобства чего на нашем рисунке стороны и углы ромбов помечены и разрисованы (рис. 103), и тогда получается узор, заполняющий всю плоскость, как на рис. 4. Опять же «толстых» ромбов на замощение большой площади идет в 1,618 раз больше, чем «тонких», и $N_{толстых} / N_{тонких} = \varphi$. «Толстые» и «тонкие» ромбы теснейшим образом связаны со змеями и дротиками, а обе эти пары — посредством золотого сечения — с системой пятиугольника-пентаграммы.



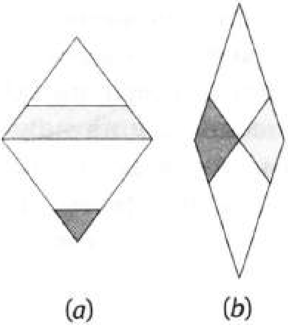
(*a*) (*b*)

Рис. 101



(*a*) (*b*)

Рис. 102



(*a*) (*b*)

Рис. 103

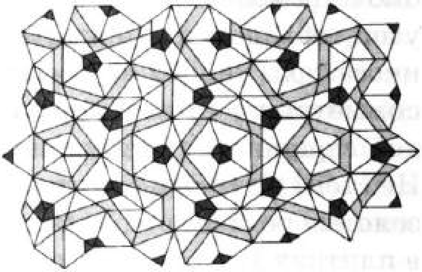


Рис. 104

Вспомним, что интерес пифагорейцев к золотому сечению начался с бесконечной череды вписанных друг в друга правильных пятиугольников и пентаграмм — как на рис. 105. На этом чертеже спрятаны все четыре плитки Пенроуза. Точки *B* и *D* отмечают противоположные дальние углы змея *DCBA*, а точки

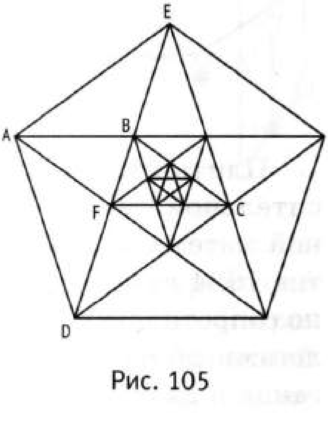


Рис. 105

A и *C* — «крылышки» дротика *EABC*. Аналогичным образом можно найти на рисунке и «толстый» ромб *AECD*, и «тонкий» (в меньшем масштабе) *ABCF*.

Пенроуз продолжил изыскания в области мозаик и в трехмерном пространстве. Двумерные плитки замощают плоскость, а трехмерные «кирпичи» заполняют пространство. В 1976 году математик Роберт Амманн обнаружил пару «кирпичей» (рис. 106), «сплюснутый» и «растянутый», так называемые ромбоэдры, которыми можно заполнить пространство без промежутков. Более того, Амманн сумел доказать, что при наличии набора правил о сочетаемости граней получается непериодический узор, обладающий симметрическими свойствами икосаэдра (Рис. 20, *е*; это эквивалент пятисторонней симметрии в трех измерениях, поскольку на каждой вершине сходятся пять симметричных ребер). Не стоит удивляться, что эти два ромбоэдра — это золотые ромбоэдры, и их грани идентичны ромбам в плитках Пенроуза (рис. 101).

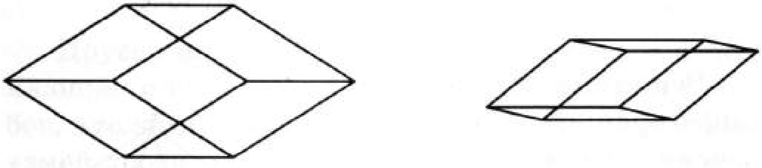


Рис. 106

Плитки Пенроуза так и держались бы в относительной тени, оставшись уделом занимательной математики, если бы не сенсационное открытие 1984 года. Израильский инженер, специалист по сопротивлению материалов Дан Шехтман с коллегами обнаружили, что кристаллы сплава марганца и алюминия обладают и дальним порядком, и пятисторонней симметрией. Это был настоящий переворот в кристаллографии: примерно такой же сенсацией для зоологов стало бы обнаружение стада пятиногих коров. Физики-твердотельщики и кристаллографы много десятков лет пребывали в убеждении, что твердые тела могут принимать лишь две основные формы — или полностью периодические кристаллы, структура которых строго упорядочена, или совершенно аморфные тела. В упорядоченных кристаллах, например, в привычной нам поваренной соли, атомы или группы атомов составляют узор, который в точности повторяется, и эти повторяющиеся узоры называются *элементарными ячейками* и формируют периодические структуры. Например, в случае соли элементарная ячейка — куб, каждый атом хлора окружен соседними атомами натрия и наоборот, каждый атом натрия оказывается окружен атомами хлора (рис. 107). Это очень похоже на идеально замощенный плитками пол: положение и ориентация каждой элементарной ячейки однозначным образом определяет общий узор. А в аморфных материалах, например, в стекле, атомы совершенно дезорганизованы. Считалось, что раз периодически замостить плоскость без промежутков могут только фигуры вроде квадратов — с четырехсторонней симметрией, — равносторонних треугольников — с трехсторонней симметрией, — и правильных шестиугольников — с шестисторонней симметрией, значит, в природе существуют исклю-

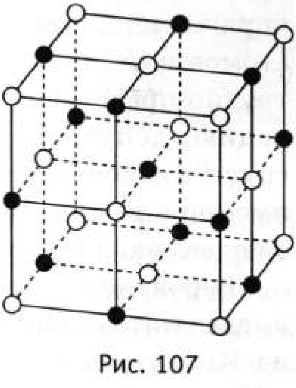


Рис. 107

чительно кристаллы с двух-, трех-, четырех- и шестисторонней симметрией. Кристаллы Шехтмана вызвали совершеннейшую оторопь, поскольку обладали не просто строго упорядоченной структурой, как периодические кристаллы, но и пятисторонней (икосаэдральной) симметрией. До этого открытия мало кто подозревал, что возможно состояние материи, обладающее важными свойствами как кристаллических, так и аморфных субстанций. Новую разновидность кристаллов (после открытия Дана Шехтмана были найдены и другие сплавы алюминия) называют теперь квазикристаллами: они не аморфны, как стекло, но и не совсем периодичны, как соль. Иначе говоря, эти необычные материалы обладают теми же свойствами, что и мозаики Пенроуза! Однако от этого понимания как такового физикам нет особого толка: они хотят разобраться, как и почему формируются квазикристаллы. Правила сочетаемости Пенроуза и Амманна в данном случае не более чем хитроумное математическое упражнение, которое вовсе не объясняет поведения атомов или групп атомов в природе. В частности, трудно представить себе энергетическую конфигурацию, допускающую существование двух типов групп атомов (подобно двум ромбоэдрам Аммана) именно в той пропорции, которая обеспечивает наблюдаемую плотность.

Вероятное объяснение было найдено в 1991 году, когда математик Сергей Емельянович Бурков из Института теоретической физики им. Ландау в Москве обнаружил, что для квазипериодического замощения плоскости не обязательно нужны плитки двух видов. Бурков доказал, что квазипериодичности можно добиться даже при помощи одной плитки десятиугольной формы, если допустить, чтобы плитки перекрывались: такое свойство ранее не допускалось при замощениях плоскости. Пять лет спустя немецкий математик Петра Гуммельт из Университета имени Эрнста Морица Арндта в городе Грайфсвальд убедительно доказала, что мозаику Пенроуза можно получить при помощи одного «раскрашенного» десятиугольника в сочетании с конкретным правилом, допускающим перекрывание: два десятиугольника могут накладываться друг на друга, только если при этом перекрываются темные участки рисунка (рис. 108). Этот десятиугольник также имеет прямое отношение к золотому сечению: радиус круга, в который вписан правильный десятиугольник со стороной 1, равен φ.

Работа Гуммельт позволила, наконец, преобразовать математику в физику. Физики Пол Стейнхардт из Принстонского университета и Хён-Цай Джун из Университета Седжун в Сеуле показали, что чисто математические законы перекрывания плиток вполне можно перевести в физическую картину, где «квазиединичные ячейки» представляют собой группы атомов, просто обладают общими атомами. Стейнхардт и Джун предположили, что квазикристаллы — это структуры, где идентичные группы атомов, то есть квазиединичные ячейки, делят некоторые атомы с соседками, а узор, который при этом образуется, обеспечивает максимальную плотность. Иначе говоря, квазипериодическая

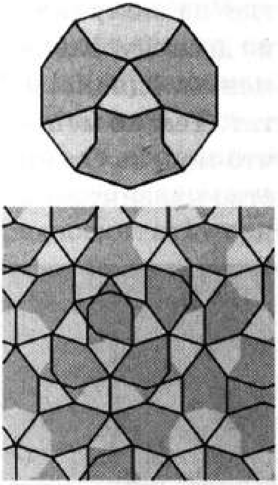


Рис. 108

упаковка порождает систему более стабильную (больше плотность, меньше энергия), чем любая другая. В 1998 году Стейнхардт, Джун и их коллеги попытались экспериментально подтвердить свою модель. Они бомбардировали квазикристаллический сплав алюминия, никеля и кобальта рентгеновскими и электронными лучами. Полученные в результате рассеяния лучей изображения поразительно соответствовали картине перекрывающихся десятиугольников. Это видно на рис. 109, где на получившийся результат наложили узор из десятиугольных плиток. Последующие эксперименты, однако, дали не такой однозначный результат. Тем не менее, сохраняется общее впечатление, что модель Стейнхардта-Джонга объясняет устройство квазикристаллов.

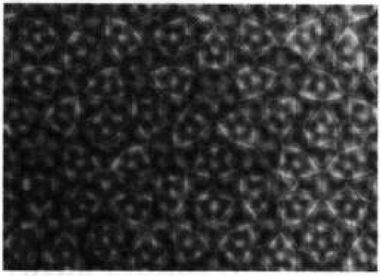


Рис. 109

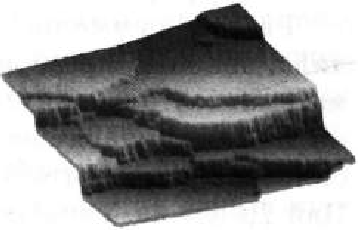


Рис. 110

Изображения поверхности квазикристаллов, сделанные в 1994 и 2001 году, продемонстрировали еще одно чудесное свойство, которое связывает их структуру с золотым сечением. При помощи сканирующего туннельного микроскопа ученые из Базельского университета в Швейцарии и лаборатории Университета штата Айова в городе Эймс сумели получить высококачественные изображения поверхности квазикристаллов из сплава алюминия, меди и железа и алюминия, палладия и марганца. На изображениях видны плоские «террасы» (рис. 110), которые спускаются либо высокими, либо низкими ступеньками (конечно, и те, и те измеряются стомиллионными долями дюйма). Так вот, оказалось, что отношение этих высот равно золотому сечению!

Квазикристаллы — великолепный пример того, как какая-то концепция начиналась в сфере чистой математики (была основана на золотом сечении), а потом оказалось, что она объясняет самый что ни на есть реальный природный феномен. Но самое поразительное даже не это, а то, что — в данном конкретном случае — начало концепции было положено в сфере *занимательной* математики. Как математикам удалось «предвосхитить» грядущие открытия физиков? Этот вопрос становится еще более интересным, если вспомнить, что пятисторонней симметрией интересовались еще Дюрер и Кеплер в XVI и XVII веке. Так, может быть, даже самые отвлеченные математические темы когда-нибудь найдут воплощение в объяснении природных явлений или в творениях рук человеческих? К этому вопросу мы вернемся в главе 9.

Еще одна удивительная деталь в истории с квазикристаллами — это личности двух теоретиков, которые их исследовали. И Пенроуз, и Стейнхард по большей части занимались космологией, изучали Вселенную в целом. Пенроуз — это тот самый ученый, который обнаружил, что общая теория относительности Эйнштейна предсказывает свои собственные особые точки, где сила тяжести становится бесконечной. Эти математические сингулярности соответствуют космическим объектам, которые мы называем черными дырами — объектам столь огромной массы, что она сжимается до неимоверной плотности и ее гравитации становится достаточно, чтобы не выпускать из черной дыры ни свет, ни массу, ни энергию. В последние четверть века наблюдения показали, что черные дыры — отнюдь не воображаемая теоретическая концепция, а самые что ни на есть реальные космические объекты. Недавние наблюдения двух крупных космических обсерваторий — космического телескопа им. Хаббла и рентгеновской обсерватории «Чандра» — показали, что черные дыры даже не так уж редки. Более того, в центре большинства галактик таятся исполинские черные дыры с массой от нескольких миллионов до нескольких миллиардов масс нашего Солнца. Наличие черных дыр определяется по гравитационному воздействию, которое они оказывают на звезды и газ, расположенные по соседству. Согласно общепринятой теории Большого Взрыва, которая описывает происхождение всей нашей Вселенной, мироздание в целом начало расширяться именно с такой сингулярности — с состояния необычайно высокой плотности и температуры. Пол Стейнхардт был одним из главных действующих лиц при разработке так называемой инфляционной модели Вселенной. Согласно этой модели, которую первым предложил физик Алан Харви Гут из Массачусетского технологического института, когда возраст Вселенной составлял всего крошечную долю секунды (если точно, то 0,000...1 с, где 1 стоит на 35 месте после запятой), она претерпела фантастически стремительное расширение, увеличившись в размере более чем в 10^{30} раз (это единица с 30 нулями) за долю секунды. Эта модель объясняет несколько свойств нашей Вселенной, которые иначе объяснить было бы затруднительно, например, тот факт, что она практически одинаково выглядит, куда ни посмотри, то есть исключительно изотропна.

В 2001 году Стейнхардт и его коллеги предложили новую версию зарождения Вселенной; эта модель получила название «экпиротический сценарий», от греческого слова, которое означает «внезапная вспышка пламени». Согласно этой модели, которая на сегодняшний день остается во многом спекулятивной, Большой Взрыв произошел, когда столкнулись две трехмерные Вселенные, двигавшиеся по какому-то другому, скрытому измерению.

Так вот, интересный вопрос: почему эти два выдающихся космолога решили побаловаться занимательной математикой — и перешли к квазикристаллам?

Я знаком с Пенроузом и Стейнхардтом уже много лет, поскольку занимаюсь тем же делом — космологией и теоретической астрофизикой. Более того, в 1984 году Пенроуз получил приглашение выступить на первой крупной конференции по релятивистской астрофизике, которую я организовывал, а Стейнхардт — на последней, в 2001 году. И тем не менее, я не знал, что подтолкнуло их к тому, чтобы углубиться в дебри занимательной математики: казалось бы, эта область довольно далека от их профессиональных интересов в астрофизике. Поэтому я спросил у них об этом.

Роджер Пенроуз ответил:

— Не уверен, что дам на этот вопрос сколько-нибудь глубокий ответ. Как вам известно, математика — занятие, которому большинство математиков предается ради удовольствия. — И, немного поразмыслив, добавил: — Я с детства любил подгонять геометрические фигуры друг к другу, так что исследования мозаик опередили исследования по космологии. Однако в какой-то момент изыскания в области занимательной математики были, по крайней мере, отчасти, связаны с космологическими исследованиями. Я размышлял о крупномасштабной структуре Вселенной и искал игрушечные модели, построенные по простым правилам, которые, тем не менее в крупном масштабе были бы способны породить сложные структуры.

— Но что же заставило вас так долго работать над этой задачей? — спросил я тогда.

— Как вы знаете, меня всегда интересовала геометрия, — со смехом ответил Пенроуз, — так что мне было просто интересно разобраться в этой задаче. Более того, хотя у меня было подозрение, что подобные структуры могут встречаться в природе, я не понимал, как природа могла бы создать их посредством нормального процесса кристаллического роста, локального процесса. В некотором смысле я до сих пор этого не понимаю.

А Пол Стейнхардт на мой вопрос по телефону тут же воскликнул:

— Хороший вопрос!

А затем, подумав несколько минут, рассказал:

— Когда я был студентом-старшекурсником, то не вполне представлял себе, чем хочу заниматься. Затем, уже в аспирантуре, я день и ночь ломал себе голову над физикой частиц, и мне нужно было найти какую-то отдушину — вот и я стал для развлечения исследовать тему порядка и симметрии твердых тел. А стоило мне натолкнуться на проблему квазипериодических кристаллов, как я понял, что это непреодолимое искушение, и с тех пор то и дело возвращался к ней.

Фракталы

Модель квазикристаллов Стейнхардта-Джуна обладает одним интересным свойством: она создает дальний порядок из взаимодействий соседних элементов, однако полностью периодический кристалл при этом не получается. Невероятно, но факт: в общем и целом это же свойство мы обнаруживаем у чисел Фибоначчи. Рассмотрим простой алгоритм, позволяющий создать последовательность, получившую название золотой последовательности. Начнем с числа 1, затем заменим 1 на 10. Теперь будем заменять все 1 на 10, а все 0 на 1. Тогда у нас получатся следующие этапы:

1
10
101
10110
10110101
1011010110110
101101011011010110101

И так далее. Очевидно, что мы начали с «ближнего» правила (простое превращение 0 в 1 и 1 в 10), а получили непериодический «дальний порядок». Обратите внимание, что количество цифр 1 в каждой строчке составляет 1, 1, 2, 3, 5, 8. . ., то есть числа Фибоначчи, как и количество цифр 0, начиная со второй строчки. Более того, отношение числа единиц к числу 0 по мере удлинения последовательности становится все ближе к ϕ. Далее, изучение рис. 27 показывает, что если обозначить новорожденную пару крольчат 0, а взрослую пару 1, то количество пар кроликов будет в точности повторять только что приведенную последовательность.

Однако неожиданные свойства золотой последовательности этим не исчерпываются. Если начать с 1 (в первой строчке), за которым следует 10 (вторая строчка) и попросту приписывать к каждой строчке непосредственно предшествующую, тоже получится цельная последовательность. То есть четвертая строчка 10110 получается, если приписать вторую — 10 — к третьей — 101, и т. д.

Вспомним, что самоподобие означает симметрию при любом масштабе. Логарифмическая спираль обладает самоподобием, поскольку, как ее ни увеличивай, выглядит всегда одинаково, как и череда вписанных друг в друга правильных пятиугольников и пентаграмм на рис. 10. Каждый раз, когда вы приходите в парикмахерскую, вы видите бесконечную череду собственных самоподобных отражений в двух параллельных зеркалах.

Так вот, золотая последовательность тоже самоподобна при любом масштабе. Возьмем последовательность

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1...

И посмотрим на нее в лупу — конечно, не в буквальном смысле слова. Начнем слева и каждый раз, когда нам встретится 1, будем помечать группу из трех символов, а когда нам встретится 0 — группу из двух символов, только так, чтобы группы не перекрывались. Например, первая цифра у нас 1, поэтому мы отметим группу из первых трех символов — 101 (см. ниже). Вторая цифра в ряду у нас 0, поэтому мы отметим группу из двух символов 10, *следующую* за первой группой 101. Третья цифра — 1, значит, отмечаем три цифры 101, которые следуют за 10, и т. д. Теперь размеченная последовательность выглядит так:

$$\overbrace{101}\ \overbrace{10}\ \overbrace{101}\ \overbrace{101}\ \overbrace{10}\ \overbrace{101}\ldots$$

А теперь оставим первые две цифры из каждой группы по три и первую — из каждой группы по две (то, что мы оставляем, подчеркнуто):

$$\underline{1\ 0}\ 1\ \underline{1}\ 0\ \underline{1\ 0}\ 1\ \underline{1\ 0}\ 1\ \underline{1}\ 0\ \underline{1\ 0}\ 1\ 1\ldots$$

И взглянем на получившуюся последовательность из оставшихся цифр:

$$1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ldots$$

Как видите, она идентична золотой последовательности.

Можно проделать и другое упражнение по увеличению золотой последовательности путем подчеркивания той или иной закономерной подпоследовательности. Скажем, в качестве подпоследовательности выберем 10 и будем подчеркивать это сочетание цифр в золотой последовательности везде, где оно встретится:

$$\underline{1\ 0}\ 1\ \underline{1\ 0}\ \underline{1\ 0}\ 1\ \underline{1\ 0}\ 1\ \underline{1\ 0}\ \underline{1\ 0}\ 1\ \underline{1\ 0}\ldots$$

Если теперь мы будем обращаться с каждым сочетанием 10 как с единым символом и обозначим количество мест, на которые надо сдвинуть каждое сочетание 10, чтобы перекрыть его со следующим 10, то получим последовательность 2122121... (первое 10 надо сдвинуть на два места, чтобы оно наложилось на следующее, третье — на одно место и так далее). Если теперь в получившейся последовательности заменить каждую цифру 2 цифрой 1 и каждую 1 — нулем, мы снова получим золотую последовательность. В общем, если взять любую закономерность в пределах золотой последовательности, мы обнаружим, что та же закономерность присутствует в последовательности и при ином масштабе.

Предметы, обладающие таким же свойством, например, русские куклы матрешки, которые вставляются друг в дружку, называются *фракталы*. Слово «фрактал» (от латинского *fractus*, что значит «разбитый, фрагментированный») пустил в обращение Бенуа Мандельброт — знаменитый французский и американский математик, родившийся в Польше, и это центральное понятие геометрии природы и теории крайне нерегулярных систем, известных как хаотизированные.

Геометрия фракталов — блестящая попытка описать формы и предметы реального мира. Если оглядеться вокруг, станет понятно, что лишь немногие формы описываются простыми евклидовыми фигурами вроде прямых, окружностей, сфер и кубов. Есть бородатый математический анекдот о физике, который хотел разбогатеть, делая ставки на скачках, а для этого — вывести уравнение движения коня. После долгих трудов он и впрямь составил уравнение движения сферического коня в вакууме. К сожалению, настоящие скакуны отнюдь не сферические, и облака, цветная капуста и человеческие легкие — тоже. Подобным же образом реки, молнии и дренажные системы проходят не по прямой, однако напоминают ветви деревьев и кровеносную систему человека. Рассмотрим, к примеру, фантастически сложные разветвления на картине «Могила великана в снегу» немецкого художника-романтика Каспара Давида Фридриха (1774–1840) (рис. 111, хранится в Галерее новых мастеров в Дрездене).

Колоссальный мыслительный скачок, который проделал Мандельброт, когда сформулировал геометрию фракталов, состоял в основном в том, что ученый обнаружил, что все эти затейливые зигзаги — не помеха математическому описанию морфологии, а главная ее характеристика.

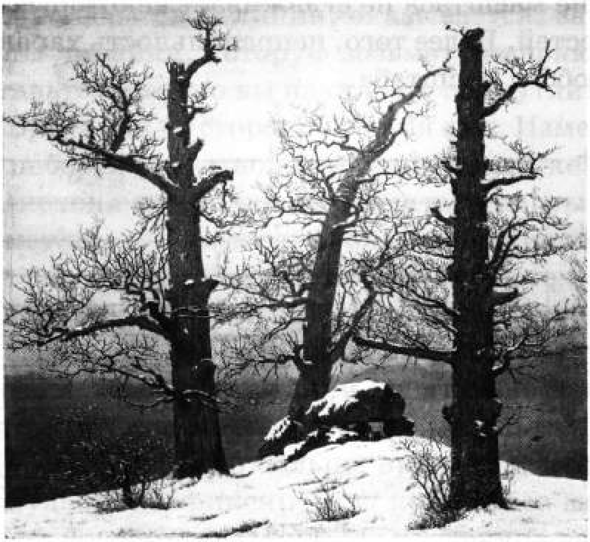


Рис. 111

Первым открытием Мандельброта была важность *самоподобия* — того факта, что многие природные формы представляют собой бесконечную последовательность мотивов, повторяющих сами себя внутри других таких же мотивов на разных масштабах. Великолепный пример проявления этого качества — раковина наутилуса (рис. 4), как, впрочем, и самая обычная цветная капуста: если отламывать от кочана соцветия, а от них — кусочки все меньше и меньше, они до какого-то предела все равно будут точным подобием целого кочана. Сфотографируйте камешек, отколовшийся от скалы, и вам, возможно, не удастся отличить снимок от фотографии целого утеса. Этим свойством обладает и непрерывная дробь, если ее напечатать (рис. 112): увеличьте еле видные циферки, и вы обнаружите всю ту же непрерывную дробь. Однако во всех этих случаях увеличение масштаба не сглаживает некоторых шероховатостей. Более того, неправильность характерна для любого масштаба.

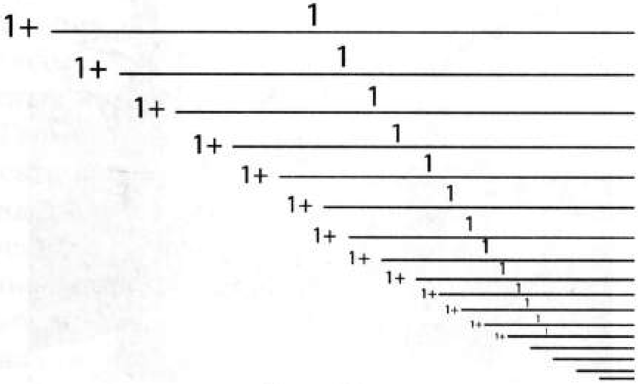


Рис. 112

Тогда Мандельброт задался вопросом: как определить измерения предмета, обладающего подобной фрактальной структурой? В мире евклидовой геометрии у любого предмета есть измерения, которые можно выразить целыми числами. У точки число измерений — нуль, у прямой — одно, у плоских фигур вроде треугольников и пятиугольников — два, у объемных тел вроде сфер и платоновых многогранников — три. А фрактальные кривые вроде молнии, с другой стороны, так агрессивно изгибаются туда-сюда, что попадают куда-то между одним и двумя измерениями. Если след молнии относительно гладкий, можно представить себе, что число фрактальных измерений близко к единице, если же он очень извилистый, следует ожидать числа измерений, близкого к двум. Все эти размышления вылились в вопрос, сделавшийся в наши дни знаменитым: «Какова длина побережья Британии?» Мандельброт дал на это неожиданный ответ: длина береговой линии, оказывается, зависит от длины линейки, которую возьмет измеряющий. Представьте себе, что вы начинаете со спутниковой карты Британии со стороной в один фут. Измеряете длину побережья, умножаете на нужный коэффициент, исходя из заданного масштаба карты. При таком методе, разумеется, пропадут всякие мелкие извивы береговой линии, которых на карте не видно. Теперь представьте себе, что вы вооружаетесь палкой метровой длины и начинаете долгое путешествие вдоль берегов Британии, тщательно измеряя береговую линию метр за метром. Результат, несомненно, будет гораздо больше прежнего, поскольку вам удастся зафиксировать куда более мелкие извивы и повороты. Однако вы наверняка заметите, что на более мелких участках вы все равно упустите какие-то подробности. Дело в том, что чем меньше будет наша линейка, тем больше окажется результат измерений, потому что всегда оказывается, что при уменьшении масштаба выявляется подструктура. Из этого следует, что, если имеешь дело с фракталами, нуждается в пересмотре даже концепция длины как средства передачи расстояния. Контуры береговой линии при увеличении не становятся прямыми, изгибы присутствуют при любом масштабе, и общая ее длина возрастает бесконечно — по крайней мере, пока мы не дойдем до атомов.

Прекрасный пример такой ситуации — линия, которую можно считать очертаниями берегов некоей воображаемой страны. Снежинка Коха —

кривая, которую первым описал в 1904 году шведский математик Нильс Хельге фон Кох (1870–1924) (рис. 113). Начертим равносторонний треугольник со стороной в один дюйм. Теперь в середине каждой стороны достроим треугольники поменьше — со стороной в одну треть дюйма. В результате на этом этапе у нас получится звезда Давида. Обратите внимание, что периметр первоначального треугольника составлял три дюйма, а теперь он состоит из двенадцати сегментов по трети дюйма каждый, так что общая его длина равняется уже четырем дюймам. Теперь будем последовательно повторять эту процедуру — на каждой стороне треугольника будем достраивать новый с длиной стороны в одну треть предыдущей. Каждый раз длина периметра будет возрастать с коэффициентом 4/3, и так до бесконечности, несмотря на то что линия ограничивает замкнутое пространство конечной площади (можно доказать, что площадь стремится к 8/5 площади первоначального треугольника).

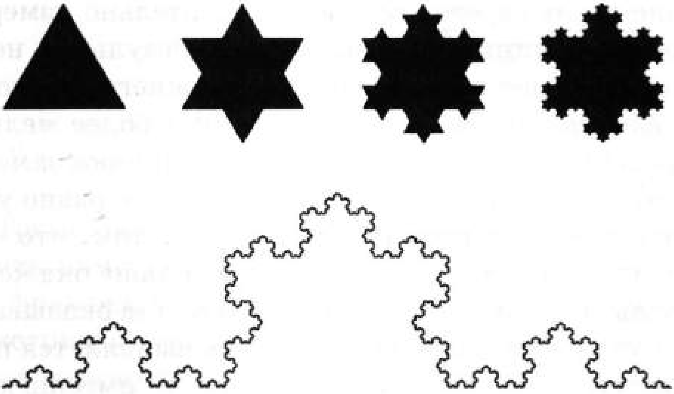


Рис. 113

Открытие фракталов заставило задуматься, сколько же у них измерений. Фрактальное измерение — это мера «сморщенности» фрактала, то есть того, насколько быстро увеличиваются длина, площадь или объем, если измерять их на непрерывно уменьшающемся масштабе. Например, интуитивно мы чувствуем, что кривая Коха (рис. 113, внизу) занимает больше пространства, чем одномерная линия, но меньше, чем двухмерный квадрат. Но разве так бывает, чтобы у чего-то было дробное измерение? Ведь между 1 и 2 нет никаких целых чисел. Поэтому Мандельброт принял концепцию, выдвинутую в 1919 году немецким математиком Феликсом Хаусдорфом (1868–1942) — концепцию дробных измерений, которая на первый взгляд не укладывается в голове. Хотя поначалу подобная идея вызывает некоторую оторопь, оказалось, что именно дробные измерения — прекрасный инструмент, позволяющий охарактеризовать степень неправильности, или фрактальной размерности, предметов. Чтобы получить умопостижимое определение фрактального измерения или измерения самоподобия, удобно воспользоваться в качестве точек отсчета знакомыми целочисленными измерениями — 0, 1, 2 и 3. Идея в том, чтобы разобраться, сколько мелких объектов составляют крупный при любом количестве измерений. Например, если разделить одномерный отрезок пополам, то получим два сегмента (коэффициент сокращения $f=1/2$). Если разделить двумерный квадрат на «подквадраты» с половинной длиной стороны (коэффициент сокращения опять же $f=1/2$), то получим $4=2^2$ квадрата. Если же мы возьмем длину стороны в 1/3 первоначальной ($f=1/3$), квадратов станет $9=3^2$. Если же мы поступим также с трехмерным кубом, то деление ребра пополам ($f=1/2$) даст нам $8=2^3$ кубиков, а ребро в 1/3 первоначального — $27=3^3$ кубиков (рис. 114). Если изучить все эти примеры, обнаружим, что между количеством «субобъектов» n, коэффициентом сокращения длины f и измерением D есть определенная взаимосвязь. И вот какая: $n=(1/f)\ D$. (Другую форму записи этого соотношения я привожу в Приложении 7.) Если применить эту формулу к снежинке Коха, получится фрактальное измерение, равное примерно 1,2619.

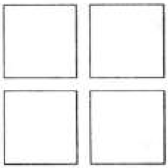
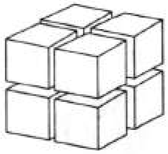
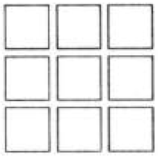
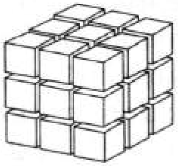
	Отрезок	Квадрат	Куб
Деление на 2			
Количество «субобъектов»	2	4	8
	2^1	2^2	2^3
Деление на 3			
Количество «субобъектов»	3	9	27
	3^1	3^2	3^3

Рис. 114

Кстати, и побережье Британии обладает фрактальным измерением, равным примерно 1,26. Поэтому фракталы служат моделями реальных береговых линий. Первопроходец теории хаоса Митчелл Фейгенбаум из Рокфеллеровского университета в Нью-

Йорке опирался на этот факт, когда участвовал в издании атласа издательства «Хаммонд» в 1992 году («*Hammond Atlas of the World*), построенного по революционно новому принципу. Предоставив основную часть работы компьютерам и по возможности не вмешиваясь в нее, Фейгенбаум изучил спутниковые данные о фрактальной струкутре побережий, чтобы определить, какие точки на береговых линиях играют самую важную роль. Результатом стала, в частности, новая карта Южной Америки, точная на 98 % по сравнению с привычными 95 % из старых атласов.

Главное свойство многих естественных фракталов, от деревьев до кристаллов, — ветвистость. Изучим сильно упрощенную модель этого вездесущего явления. Начнем с ветки единичной длины, которая разделяется на две ветки длиной 1/2, расходящиеся под углом в 120 градусов (рис. 115). Затем каждая ветка разделяется подобным же образом, и процесс продолжается бесконечно.

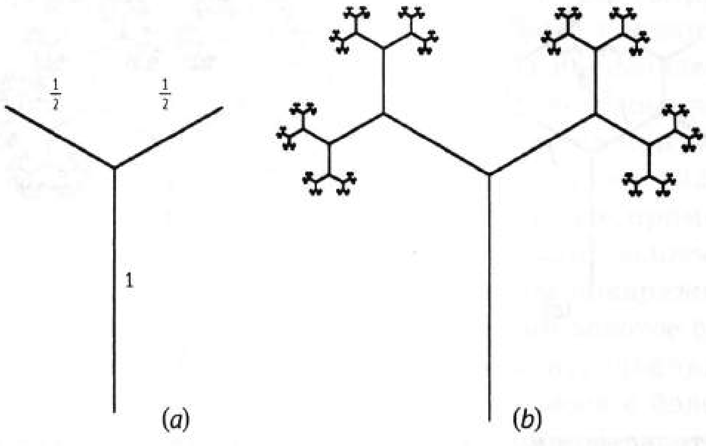
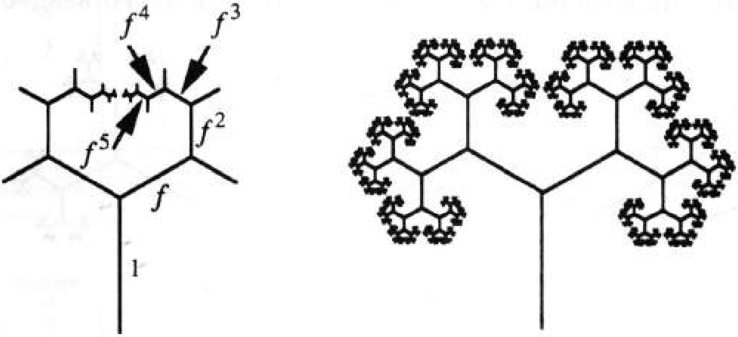


Рис. 115

Если бы вместо коэффициента сокращения длины 1/2 мы выбрали число чуть больше, ну, скажем, 0,6, расстояние между ветками несколько сократилось бы и рано или поздно ветки начали бы накладываться друг на друга. Очевидно, имело бы смысл поискать, какой коэффициент сокращения обеспечит во многих системах (скажем, в дренажной системе или в кровеносной системе человека) такую конфигурацию, чтобы ветки только касались друг друга и начинали перекрываться, как на рис. 116. Как ни странно, а может быть, теперь уже и не странно, оказалось, что такой коэффициент в точности равен $1/\varphi = 0{,}618...$! (Краткое доказательство см. в Приложении 8). Это называется *золотое дерево*, и его фрактальное измерение, как выяснилось, примерно равно 1,4404. У золотого дерева и подобных фракталов, составленных из простых линий, структура после нескольких разветвлений становится такой мелкой, что невооруженным глазом ее не разглядеть. Отчасти эту проблему можно решить, если вместо линий использовать дву-



(*a*) (*b*)

Рис. 116

мерные геометрические фигуры вроде «лодочек» (рис. 117). Можно на каждом этапе прибегать к помощи копировальной машины с функцией уменьшения изображения, чтобы получать «лодочки», сокращенные с коэффициентом $1/\varphi$. Результат — золотое дерево из «лодочек» — показан на рис. 118.

Можно строить фракталы не только из линий, но и из простых плоских фигур вроде треугольников и квадратов. Например, начнем с равностороннего треугольника со стороной единичной длины и к каждому его углу достроим новый треугольник с длиной стороны 1/2. На каждом свободном угле треугольников второго поколения достроим треугольник со стороной 1/4 и так далее (рис. 119). Опять же можно задаться вопросом, при каком коэффициенте уменьшения три ветви начнут соприкасаться, как на рис. 120, и ответ снова получится равным $1/\varphi$. В точности то же самое произойдет, если построить похожий фрактал на основе квадрата (рис. 121) — перекрывание начинается при коэффициенте сокращения $1/\varphi = 0{,}618...$ (рис. 122).

Более того, все незакрашенные белые прямоугольники на последнем рисунке — это золотые прямоугольники. Таким образом, мы обнаруживаем, что хотя в евклидовой геометрии золотое сечение выводится из правильного пятиугольника, в геометрии фракталов оно связано даже с более простыми фигурами вроде квадратов и равносторонних треугольников. Свыкнувшись с этой концепцией, вы поймете, что мир вокруг битком набит фракталами. В терминах фрактальной геометрии можно описать самые разные предметы — от контуров леса на фоне неба до системы кровеносных сосудов в почке. Если окажется верной одна из моделей Вселенной, которая называется хаотической теори-

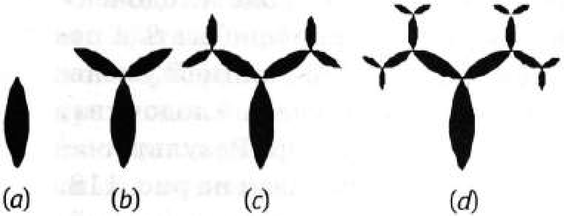


Рис. 117

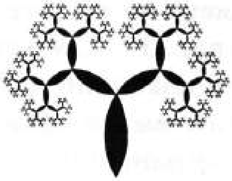


Рис. 118

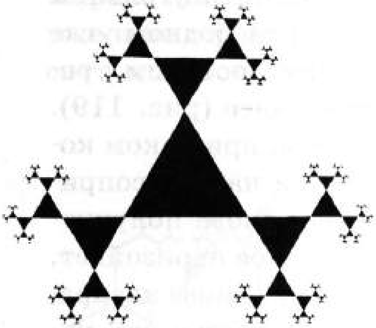


Рис. 119

Рис. 120

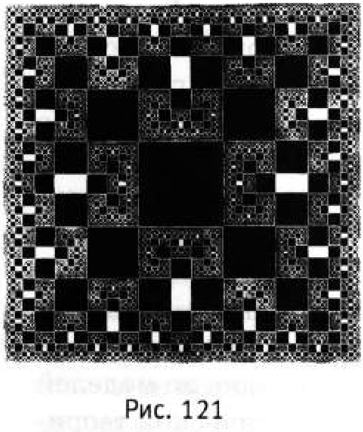


Рис. 121

Рис. 122

ей инфляции, значит, фрактальные закономерности характерны для Вселенной в целом. Объясню суть этой концепции в самых общих чертах. Теория космической инфляции, которую выдвинул Алан Гут, предполагает, что когда нашей Вселенной была всего доля секунды от роду, наше пространство практически мгновенно раздулось до пределов, далеко превосходящих возможности наших телескопов. Движущая сила, стоявшая за этим колоссальным расширением, — весьма необычное состояние материи под названием «ложный вакуум». Эту ситуацию можно уподобить мячу, лежащему на вершине пологого холма, как на рис. 123. Дело в том, что пока Вселенная оставалась в состоянии ложного вакуума, то есть мяч лежал на вершине холма, она расширялась очень быстро, вдвое увеличиваясь в размерах за крошечную долю секунды. Стремительное расширение прекратилось, лишь когда мяч скатился с холма в низкоэнергетическую «канаву» у подножия (которая символически отражает тот факт, что ложный вакуум распался).

Рис. 123

Согласно инфляционной модели, так называемая «наша» Вселенная пребывала в состоянии ложного вакуума очень недолго и все это время расширялась в фантастическом темпе. Затем ложный вакуум распался, и наша Вселенная стала расширяться куда более лениво, что мы и наблюдаем сегодня. Вся энергия и субатомные частицы нашей Вселенной были созданы во время осцилляции, последовавшей за распадом (схематически это отражено в третьей части рис. 123). Однако модель космической инфляции предсказывает также, что темп расширения в состоянии ложного вакуума гораздо стремительнее темпа распада. Следовательно, судьбу области ложного вакуума можно схематически проиллюстрировать рис. 124. Вселенная начинается с участка ложного вакуума. С течением времени какая-то часть этого участка (на рисунке — треть) распадается и порождает «карманную вселенную» вроде нашей. Одновременно участки, остающиеся в состоянии ложного вакуума, продолжают расширяться, и ко времени, которое схематически отражено второй строкой на рис. 124, каждый из них приобретает те же размеры, что и вся система из первой строки (масштаб на рисунке не соблюден из соображений экономии места). Время течет дальше, мы переходим от второй строки к третьей, центральная карманная вселенная продолжает медленно развиваться согласно общепринятой теории Большого Взрыва. Однако каждый из двух оставшихся участков ложного вакуума развивается в точности так же, как и первоначальный участок ложного вакуума: часть его распадается, и возникает карманная вселенная. Каждый участок ложного вакуума расширяется до размеров системы из верхней строчки (рисунок опять же не в масштабе). Таким образом создается бесконечное количество карманных Вселенных — и фрактальный узор: одна и та же последовательность участков ложного вакуума и карманных вселенных повторяется в постоянно уменьшающемся масштабе. Если выяснится, что эта модель и в самом деле отражает эволюцию Вселенной в целом, значит, наша карманная Вселенная — всего лишь одна из бесчисленного множества существующих карманных вселенных.

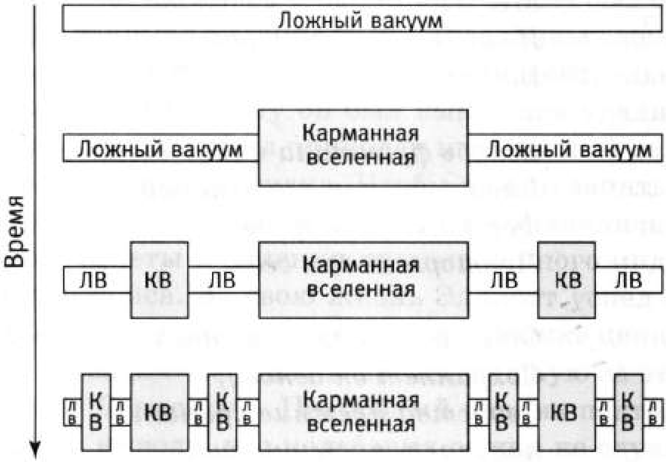


Рис. 124

В 1990 году профессор Джаспер Мемори из Университета Северной Каролины опубликовал в «*Mathematics Magazine*» стихотворение под названием «Блейк и фракталы». Вспомнив уже цитировавшиеся строки Блейка «В одном мгновенье видеть вечность, / Огромный мир — в зерне песка, / В единой горсти — бесконечность / И небо — в чашечке цветка», Мемори написал:

Вильям Блейк сказал однажды:
Видит он в песчинке каждой
Перспективы бесконечность
И в мгновенье видит вечность.

Прав был мистик и поэт.
Он предчувствовал предмет,
Обоснованный в работах
И расчетах Мандельброта.

То, что Блейк обрисовал,
Мы сейчас зовем «фрактал».
Изменения масштаба
Вид его меняют слабо.

Вглубь фрактала кинув взгляд,
Видим мы ритмичный ряд:
Формы, линии дробя,
Повторяет сам себя.

Отдаляем взгляд, и снова
Сохраняет он основу,
Свойства прежние хранит,
получает прежний вид.

Истончаясь в паутину,
Всю сложнейшую картину
И структуры безупречность
Не теряет бесконечность.

(Пер. М. Федоровой)

Некоторые современные методы применения золотого сечения, чисел Фибоначчи и фракталов распространяются на области куда более приземленные, чем модель космической инфляции. Более того, многие считают, что эти методы буквально бьют нас по карману.

Золотое путешествие по Уолл-стрит

Числа Фибоначчи и золотое сечение, оказывается, сплошь и рядом применяют при анализе рынка ценных бумаг, и самый известный метод их применения связан с именем Ральфа Нельсона Эллиотта(1871–1948). По профессии Эллиотт был бухгалтер и занимал высокие посты в различных железнодорожных компаниях, в основном в Центральной Америке. В 1929 году он был вынужден удалиться от дел, так как был прикован к постели из-за серьезной болезни желудка. Чтобы чем-то заняться, Эллиотт начал подробнейшим образом анализировать все взлеты и падения промышленного индекса Доу-Джонса. За свою жизнь Эллиотт успел повидать и стремительный рост цен на рынке ценных бумаг в двадцатые годы, и последовавшую за этим Великую Депрессию. Подробный анализ подтолкнул его к выводу, что колебания рынка не случайны. В частности, он отметил: «Рынок ценных бумаг — творение человека, поэтому он отражает все человеческие особенности». Главное наблюдение Эллиотта заключалось в том, что в конечном итоге закономерности колебаний рынка отражают циклы оптимизма и пессимизма у человека.

Девятнадцатого февраля 1935 года Эллиотт отправил в один детройтский журнал, публиковавший статьи о фондовом рынке, трактат под названием «Теория волн» (*Ralph Nelson Elliott*. The Wave Principle). Эллиотт полагал, что вывел характерные черты, которые «составляют принцип, определяющий рыночный тренд, и позволяющий заметить ясные признаки надвигающихся перемен». Впоследствии трактат составил книгу под тем же названием, увидевшую свет в 1938 году.

Основная идея Эллиотта была относительно проста. Он утверждал, что за колебаниями рынка стоит фундаментальная закономерность, состоящая из пяти волн за период тренда роста (оптимистического тренда) — на рис. 125 они отмечены номерами — и трех волн за период тренда падения (пессимистического тренда) — на том же рис. 125 они отмечены буквами. Обратите внимание, что 5, 3 и 8 — общее число волн — это числа Фибоначчи.

Рис. 125

Далее Эллиот утверждал, что изучение флуктуаций на более коротком интервале времени выявляет повторение той же закономерности (рис. 126), и количество мелких волн, составляющих крупные, соответствуют последующим числам Фибоначчи. Эллиот считал, что «самое большое число, имеющее практический смысл», — это 144, при котором рыночный цикл завершается, и это выглядит следующим образом. За общим трендом роста, который состоит из пяти крупных волн, двадцати одной средней волны и восьмидесяти девяти мелких волн, следует общий тренд падения, состоящий из трех крупных, тринадцати средних и пятидесяти пяти мелких волн (рис. 126).

В дальнейшем появились книги, где общие идеи Эллиотта применялись к конкретным рыночным стратегиям, и их авторы заходили даже дальше. Они применяли золотое сечение, чтобы вычислить ожидаемые (однако не всегда достигаемые) значения максимума и минимума в конце периодов роста или падения (рис. 127). Еще более хитроумные алгоритмы выражают отношения между ценой и временем при помощи логарифмической спирали, наложенной на ежедневные колебания

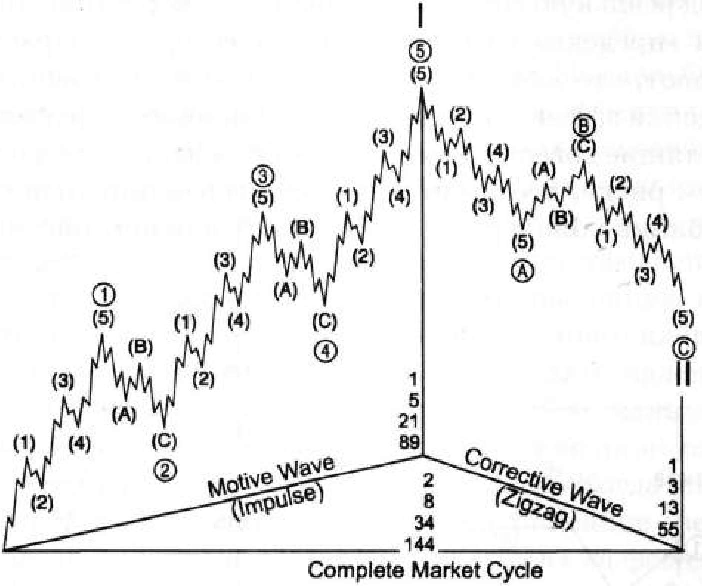
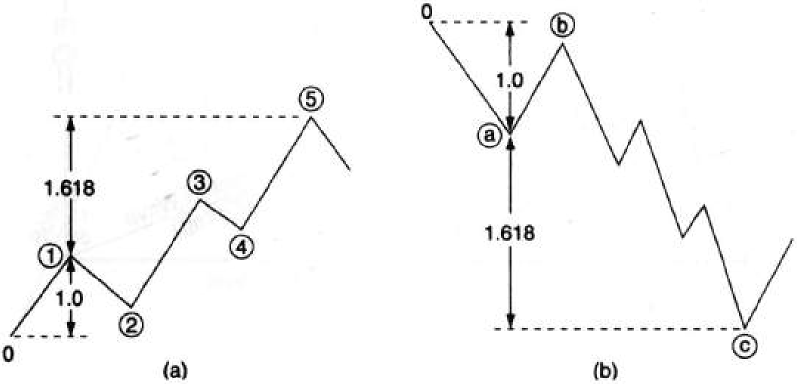


Рис. 126

рынка. Все эти попытки строить надежные прогнозы опираются на то, что числа Фибоначчи и золотое сечение каким-то образом связаны с массовой психологией. Однако подобный «волновой» подход не лишен недостатков. «Волна» Эллиотта часто бывает подвержена тем или иным растяжениям, сжатиям и прочим искажениям, иногда произвольным, рукотворным: ее сплошь и рядом подгоняют под реальную ситуацию на рынке, которую она якобы «предсказывает». Однако инвесторы прекрасно знают, что любые, самые затейливые современные оценки эффективности инвестиционного портфеля, сулящие довести до максимума прибыль при разумном риске, все равно ничего не гарантируют и состояние можно создать и потерять в мгновение ока.



(a) (b)

Рис. 127

Вероятно, вы заметили, что волновая интерпретация Эллиота, в частности, опирается на представление о том, что каждая часть кривой — это уменьшенная копия кривой в целом, то есть на главную идею фрактальной геометрии. И в самом деле, Бенуа Мандельброт в 1997 году выпустил книгу под названием «Фракталы, случай и финансы», где описывал рыночную экономику вполне определенными фрактальными моделями. Он опирался на известный факт, что флуктуации рынка ценных бумаг выглядят одинаково, даже когда диаграммы колебаний увеличивают или уменьшают в соответствии с тем или иным масштабом цен и времени. Если посмотреть на эти диаграммы с расстояния, на котором метки на осях уже не видно, непонятно, какие колебания на них отражены — за день, за неделю или за час. Основное новаторство теории Мандельброта по сравнению с привычной теорией эффективности инвестиционного портфеля состоит в способности моделировать не только ситуацию на спокойном рынке, но и всевозможные бурные времена. А теория эффективности инвестиционного портфеля описывает лишь относительно мирную рыночную активность. Впрочем, Мандельброт не претендовал на то, что его теория может предсказать падение или стремительный взлет цен в какой-то конкретный день: при помощи его модели можно лишь оценивать вероятность возможного исхода. Когда Мандельброт опубликовал упрощенное описание своей модели в журнале «*Scientific American*» за февраль 1999 года, последовал шквал писем от читателей. Пожалуй, лучше всех выразил всеобщее недоумение Роберт Инот из Чикаго: «Если мы знаем, что какая-то акция за заданное время подорожает с 10 до 15 долларов, нам неважно, как мы наложим фракталы и выглядит ли схема аутентично. Нам важно другое — что мы можем купить ее за 10 долларов, а продать за 15. Теперь каждый может разбогатеть — но почему мало кому это удается?»

Первоначальный волновой принцип Эллиота — это отважная, пусть и наивная попытка выявить закономерность в процессе, который на первый взгляд представляется случайным. Однако не так давно числа Фибоначчи и случайность повстречались при более интересных обстоятельствах.

Кролики, орлы и решки

Определяющее свойство последовательности Фибоначчи — что каждое число в ней есть сумма двух предыдущих — было получено из чисто теоретического описания размножения кроликов. В этом определении ничто не намекало на то, что воображаемая закономерность кроличьей плодовитости найдет воплощение во множестве природных и культурных явлений. Однако еще маловероятнее было бы предположение о том, что эксперименты с основными свойствами самой этой последовательности проложат путь к пониманию математики неупорядоченных систем. Однако именно это произошло в 1999 году. Специалист по информатике Дивакар Вишванат, занимавший временную должность младшего научного сотрудника в Институте математических исследований в Беркли, отважился задать вопрос «А что, если», который неожиданно привел к открытию очередного «особенного» числа: 1,13198824...

Красота открытия Вишваната во многом объясняется простотой его главной идеи. Вишванат всего-навсего задался вопросом: что, если начать с двух чисел 1 и 1, как в изначальной последовательности Фибоначчи, но потом не просто складывать два числа и получать третье, а бросать монетку, чтобы решать, складывать их или вычитать последнее число из предпоследнего. Например, можно решить, что орел — это сложение, и тогда третье число будет 2, а решка — вычитание, и тогда третье число будет 0. Продолжим в том же духе — каждый раз будем бросать монетку, чтобы решить, прибавлять последнее число или отнимать, чтобы получить следующее. Например, при последовательности результатов бросков ОРРООРОРРО получится последовательность 1, 1, 2, −1, 3, 2, 5, −3, 2, −5, 7, 2. А если результаты бросков, что крайне маловероятно, будут ОООООООООООООООООО, у нас получится первоначальная последовательность Фибоначчи.

Члены последовательности Фибоначчи увеличиваются очень быстро, как степень золотого сечения. Вспомним, что семнадцатое число в последовательности, например, получается, если возвести золотое сечение в семнадцатую степень, поделить на квадратный корень из 5 и округлить результат до ближайшего целого числа (1597). А поскольку последовательности Вишваната генерируются при помощи совершенно случайной череды бросков монетки, вовсе не очевидно, что в результате получится плавная закономерность роста, даже если брать только модули чисел, игнорируя минусы. Однако, представьте себе, Вишванат обнаружил, что если брать только модули чисел, не обращая внимания на минусы, то значения чисел в его случайной последовательности все равно возрастали по строго предсказуемой, определенной закономерности. Оказалось, что с вероятностью почти 100 % сотый член любой такой последовательности всегда оказывается близок к сотой степени особого числа 1,13198824..., и чем дальше, тем ближе оказываются члены последовательности к соответствующей степени этого числа. Чтобы вычислить его, Вишванату пришлось применять фракталы и опереться на фундаментальную теорему, которую еще в начале 1960 годов сформулировали Гиллель Фюрстенберг из Еврейского университета в Иерусалиме и Гарри Кестен из Корнельского университета США. Эти математики доказали, что модуль достаточно далекого члена последовательности в целом классе случайно генерируемых последователей приближается к соответствующей степени некоего определенного числа. Однако Фюрстенберг и Кестен не знали, как вычислить это определенное число, а Вишванат придумал, как это сделать.

Значение трудов Вишваната заключается не только в открытии новой математической константы, что само по себе очень важно, но и в том факте, что она прекрасно показывает, как совершенно случайный процесс может привести к полностью детерминированному результату. Такого рода научные проблемы встречаются и во множестве природных явлений, и в электронных устройствах. Например, звезды вроде нашего Солнца вырабатывают энергию в ядерных «топках», находящихся в центре звезды. Однако чтобы мы увидели сияние звезд, нужно, чтобы огромное количество излучения — так называемых фотонов — пробилось из недр звезды к поверхности. Фотоны не просто пролетают звезду насквозь со скоростью света. Они мечутся туда-сюда, их рассеивают, поглощают и снова излучают атомы и электроны, составляющие газ на их пути, и все это вроде бы происходит случайно. Однако итог неизменен: проделав довольно-таки случайный путь, занимающий в случае Солнца примерно 10 миллионов лет, излучение все же покидает звезду. Мощность излучения с поверхности Солнца определяла и продолжает определять температуру на Земле и дала возможность зародиться жизни. Труды Вишваната и последующее изучение случайных последовательностей Фибоначчи прибавило к нашему математическому инвентарю дополнительные инструменты, объясняющие поведение неупорядоченных систем. Однако открытие Вишваната преподало нам и другой важный урок: даже тривиальная на первый взгляд математическая задачка, которой от роду восемьсот лет, все равно способна на новые сюрпризы.

МОЖЕТ БЫТЬ, БОГ — МАТЕМАТИК?

> *...Я собираюсь исследовать человеческие пороки и глупости геометрическим путем... Таким образом, аффекты ненависти, гнева, зависти и т.д., рассматриваемые сами в себе, вытекают из той же необходимости и могущества природы... Итак, я буду трактовать о природе и силах аффектов и могуществе над ними души по тому же методу, следуя которому я трактовал в предыдущих частях о боге и душе, и буду рассматривать человеческие действия и влечения точно так же, как если бы вопрос шел о линиях, поверхностях и телах.*
>
> Барух Спиноза (1632–1677),
> «Этика» (пер. Н. Иванцова)

> *Складывая два и два, математик упорно получает четыре, как бы ни ныл любитель, что ему хочется три, и как бы ни вопил критик, что ему требуется пять.*
>
> Джеймс Макнил Уистлер
> (1834–1903)

Евклид дал определение золотому сечению, поскольку был заинтересован в применении этой несложной пропорции для построения правильного пятиугольника и пентаграммы. Если бы практическое применение золотого сечения этим и ограничивалось, я не стал бы писать эту книгу. Золотое сечение приносит нам столько радости и сегодня во многом потому, что не скупится на сюрпризы. Оказалось, что золотое сечение, с одной стороны, самая простая из непрерывных дробей (и при этом «самое иррациональное» из всех иррациональных чисел), а с другой — сущность бесконечного множества сложнейших природных явлений. Золотое сечение выскакивает, как чертик из табакерки, всякий раз, когда пересекается простое и сложное, Евклидова геометрия и геометрия фракталов.

Пожалуй, удовольствие от нежданных появлений золотого сечения на удивление близко к чувственному визуальному удовольствию от произведения искусства. А это заставляет задаться вопросом, какого рода эстетические критерии применимы в математике, а конкретнее — что, собственно, имел в виду знаменитый английский математик Годфри Гарольд Харди (1877–1947), когда сказал: «У математика, как и у поэта и у живописца, должны получаться красивые узоры».

Вопрос этот не из простых. Когда я рассказывал о психологических экспериментах, изучавших визуальную привлекательность золотого сечения, то умышленно избегал слова «красивый». Ту же линию поведения я изберу и здесь, поскольку определение красоты связано с неопределенностью. В какой степени глаз взирающего на математические выкладки воспринимает их красоту, прекрасно видно на примере истории, которую рассказали Филипп Дж. Дэвис и Реубен Херш в своей прекрасной книге «Опыт общения с математикой» (*Philip J. Davis*, *Reuben Hersh*. The Mathematical Experience, 1981).

В 1976 году делегация выдающихся математиков из США была приглашена в КНР, чтобы выступить с циклом лекций и провести ряд неофициальных встреч с китайскими математиками. Впоследствии делегация опубликовала доклад под названием «Чистая и прикладная математика в КНР». Под «чистой» математикой сами математики обычно подразумевают те области этой науки, которые, по крайней мере на сторонний взгляд, не имеют прямого отношения к миру вне разума ученого. В то же время нам следует понимать, что мозаики Пенроуза и случайные последовательности Фибоначчи, в частности, представляют собой два из великого множества примеров, когда «чистая» математика превращается в «прикладную». В докладе был приведен диалог между принстонским математиком Джозефом Дж. Коном и одним из китайских математиков, которые принимали делегацию. Диалог был о «красоте математики» и произошел в шанхайском университете Хуа Тун.

Кон: Неужели вы не должны демонстрировать красоту математики? Разве она не вдохновляет студентов? Остается ли место для красоты в науке?

Ответ: Главное требование — производительность.

Кон: Это не ответ.

Ответ: Геометрия была разработана в практических целях. Эволюция геометрии не могла удовлетворить нужды науки и технического прогресса, и в XVII веке Декарт открыл аналитическую геометрию. Он анализировал поршни и токарные станки и одновременно — принципы аналитиче-

> ской геометрии. Труды Ньютона обусловлены развитием промышленности. Ньютон сказал: «Основа любой теории — общественная практика». Общепринятой теории красоты не существует. Одним кажется красивым одно, другим — другое. Социалистическое строительство — это очень красиво, это вдохновляет наш народ. До Культурной революции некоторые из нас верили в красоту математики, однако не могли решить практических задач, а теперь мы имеем дело с газовыми и водопроводными трубами, с кабелями и прокатными станами. Мы делаем это на благо страны, и рабочие это ценят. Это чувство и есть настоящая красота.

Поскольку, как недвусмысленно заявлено в этом диалоге, едва ли существуют официальные, общепризнанные критерии красоты в математике и правила, согласно которым их следует применять, я и предпочту говорить лишь об одной конкретной составляющей математики, которая неизменно доставляет удовольствие как специалистам, так и неспециалистам: о способности изумлять.

Математика должна изумлять

В письме, написанном 27 февраля 1818 года, английский поэт-романтик Джон Китс (1795–1821) писал: «Поэзия должна изумлять отточенным превосходством, а не оригинальностью, она должна изумлять читателя, будто воплощение в словах его собственных высочайших помыслов, и казаться чуть ли не воспоминанием». Математика, в отличие от поэзии, вызывает восторг скорее тогда, когда приводит к неожиданным результатам, чем когда подтверждает ожидания читателя. Кроме того, удовольствие, которое доставляет математика, во многих случаях как раз связано с неожиданностью, когда получаешь совершенно непредвиденные результаты и выявляешь поразительные соотношения. Прелестный пример математического соотношения, в истории которого сочетаются все эти элементы, что и приносит огромное удовольствие — это так называемый «закон Бенфорда».

Заглянем, к примеру, в ежегодник «*World Almanac*», где собраны примечательные факты и всевозможная статистика, и найдем там таблицу «Рынок фермерских товаров в США по штатам» за 1999 год. Там есть колонки «Зерновые культуры» и «Продукты животноводства». Данные приведены в долларах. Наверное, вы считаете, что числа, начинающиеся с цифр от 1 до 9, встречаются среди этих данных примерно с одинаковой частотой. То есть числа, запись которых начинается с 1, составят приблизительно одну девятую всех приведенных чисел, как и числа, запись которых начинается с 9. Однако если их подсчитать, то окажется, что цифра 1 на первой позиции появляется в 32 % случаев, а не в 11, как было бы, если бы цифры появлялись с равной частотой. Цифра 2 также появляется чаще, чем ей полагалось бы — в 19 % случаев. А вот цифра 9 встречается лишь в 5 % случаев, реже, чем ожидается. Вы скажете, что подобная картина в одной случайно выбранной таблице — это странно и даже курьезно, но не то чтобы изумляет; однако стоит вам изучить еще несколько страниц ежегодника (вышеуказанные данные взяты из издания за 2001 год), и впечатление изменится. Заглянем, например, в таблицу, где сведены данные о жертвах «Самых крупных землетрясений» — и обнаружим, что числа, начинающиеся с 1, составляют примерно 38 % всех чисел, а начинающиеся с 2–18 %. Если взять совсем другую таблицу — например, с данными о жителях штата Массачусетс, обитающих в городах с населением свыше 5000 человек, — числа, начинающиеся с 1, составят 36 %, а числа, начинающиеся с 2, примерно 16,5 %. С другой стороны, цифра 9 на первой позиции появляется в этих таблицах лишь примерно в 5 % случаев, гораздо меньше, чем ожидаемые 11 %. Как же получается, что таблицы, в которых приведены столь разнообразные и, очевидно, несвязанные данные, обладают общим свойством, что цифра 1 на первом месте появляется в 30 с чем-то процентах случаев, а цифра девять — приблизительно в 18 % случаев? Ситуация еще сильнее запутывается, если изучить более объемные базы данных. Например, преподаватель бухгалтерского дела Марк Нигрини из школы бизнеса имени Кокса при Южном методистском университете в Далласе изучил население 3141 округов по данным переписи населения США за 1990 год. Он обнаружил, что цифра 1 появляется на первом месте приблизительно в 32 % случаев, 2 — примерно в 17 %, 3 — в 14 %, а 9 — менее чем в 5 %. Аналитик Эдуардо Лей из организации «*Resources for the Future*» («Ресурсы для будущего») в Вашингтоне обнаружил очень похожую статистику в промышленном индексе Доу-Джонса за 1990 и 1993 годы. Но этого мало, есть и еще один поразительный факт. Если исследовать список, скажем, первых двух тысяч чисел Фибоначчи, то обнаружится, что цифра 1 на первом месте появляется в 30 % случаев, цифра 2 — в 17,65%, 3 — в 12,5% — и это количество продолжает падать: число 9 на первом месте появляется всего в 4,6% случаев. То есть числа Фибоначчи чаще всего начинаются с 1, а другие цифры на первом месте теряют популярность *в точности по той же закономерности, что и только что описанные случайные выборки чисел*!

«Феномен первой цифры» первым отметил астроном и математик Саймон Ньюкомб (1835–1909) в 1881 году. Он обратил внимание, что в логарифмических таблицах в библиотеке, которыми тогда пользовались при вычислениях, страницы, где были напечатаны числа, начинающиеся с 1 и 2, значительно грязнее последующих, а к концу таблицы становятся все чище и чище. Если бы это были скверные романы, которые читатели бросали на середине, это еще можно было бы понять, однако в случае математических таблиц это очевидно показывало, что числа, начинающиеся с 1 и 2, встречаются чаще других. Однако Ньюкомб не просто установил этот факт, а пошел гораздо дальше — он вывел *формулу*, которая должна была показывать, с какой вероятностью случайное число начинается с конкретной цифры. Эта формула — она дана в Приложении 9 — дает для 1 вероятность в 30%, для 2 — примерно 17,6%, для 3 — около 12,5%, для 4 — около 9,7%, для 5 — примерно 8%, для 6 — приблизительно 6,7%, для 7 — где-то 5,8%, для 8 — приблизительно 5% и для 9 — примерно 4,6%. Статья Ньюкомба, опубликованная в 1881 году в «*American Journal of Mathematics*», и открытый им «закон» остались совершенно незамеченными, однако миновало целых 57 лет, и физик Фрэнк Бенфорд из «*General Electric*» заново открыл этот закон — надо полагать, независимо — и проверил его на огромных массивах данных о речных бассейнах, бейсбольной статистике и даже числах, которые мелькают в статьях в «*Reader's Digest*». Все эти данные поразительно точно соответствовали выведенной формуле, и теперь она известна как закон Бенфорда.

Однако закону Бенфорда подчиняются не все списки чисел. Например, телефонные номера обычно начинаются с определенного кода, соответствующего региону. Даже таблицы квадратных корней не подчиняются этому закону. С другой стороны, не исключено, что если собрать все числа, появившиеся в передовицах нескольких местных газет в вашем городе за неделю, они будут распределяться по этой формуле. Но почему же так получается? Что общего у городского населения в штате Массачусетс со смертностью от землетрясений во всем мире и с числами из статей в «*Reader's Digest*»? И почему этому же правилу подчиняются числа Фибоначчи?

Строго доказать закон Бенфорда математическими методами оказалось совсем не просто. Одним из главных препятствий стал именно тот факт, что подчиняются этому закону не все перечни чисел — и даже приведенные примеры из ежегодника «*World Almanac*» не вполне ему соответствуют. В статье об этом законе в журнале «*Scientific American*», опубликованной в 1969 году, математик Ральф А. Райми из Рочестерского университета сделал вывод, что «ответ остается неясным».

Объяснить этот закон удалось лишь в 1995–1996 годах, и сделал это математик из Технологического института в Джорджии Тед Хилл. Хилл заинтересовался законом Бенфорда в начале девяностых, когда готовил доклад о сюрпризах вероятности. Вот как он вспоминал об этом в беседе со мной: «Я начал работать над этой задачей для развлечения, однако многие коллеги предупреждали меня, что надо быть осторожным, поскольку закон Бенфорда вызывает наркотическое привыкание». После нескольких лет работы Теда наконец осенило, что не нужно рассматривать числа из одного конкретного источника: главное — это *смесь данных*. Хилл переформулировал закон Бенфорда статистически в новой форме: «Если распределения подбираются случайно (любым непредвзятым способом) и из каждого распределения выбираются случайные образцы, то частота встречаемости цифр на значимом месте в смеси образцов сходится к распределению Бенфорда, даже если некоторые отдельные выбранные распределения не подчиняются этому закону». Иными словами, предположим, что вы собрали случайный набор чисел из мешанины распределений — например, из таблицы квадратных корней, таблицы смертности в сенсационных авиакатастрофах, населения округов и расстояний между теми или иными городами на планете по воздуху. Некоторые эти распределения сами по себе не будут подчиняться закону Бенфорда, но Хилл доказал, что чем больше вы соберете подобных чисел, тем ближе встречаемость цифр в этих числах будет к предсказанной законом Бенфорда. Так почему же этому закону подчиняются и числа Фибоначчи? Ведь они-то строго определены рекурсивным соотношением, это не случайные образцы из случайных распределений.

Так вот, в этом случае выясняется, что соответствие закону Бенфорда свойственно не только числам Фибоначчи, но и другим подобным последовательностям. Если исследовать большой массив различных степеней двойки ($2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$

и т. д.), станет видно, что они тоже подчиняются закону Бенфорда. Удивляться этому не следует, если учесть, что сами по себе числа Фибоначчи — это степени золотого сечения (вспомним, что n-ное число Фибоначчи близко к $\varphi^n/\sqrt{5}$). В сущности, можно доказать, что закону Бенфорда подчиняются последовательности, заданные большим классом рекурсивных соотношений.

Закон Бенфорда — очередной поразительный пример того, как чистая математика превращается в прикладную. В числе прочих занятных способов применения этого закона — выявление подделки и фабрикации данных в бухгалтерии и при уклонении от налогов. Данные из самых разных финансовых документов всегда очень хорошо соответствуют закону Бенфорда. А сфабрикованные данные — очень редко. Хилл доказал, как работает этот метод выявления мошенничества, на одном простом примере при помощи теории вероятности. На первом занятии своего курса по теории вероятностей Хилл просит студентов провести эксперимент. Если девичья фамилия их матери начинается с букв от *A* до *L*, они должны подбросить монетку 200 раз и записать результат — сколько было орлов и сколько решек. Остальным студентам предлагается подделать результат 200 бросков монетки, то есть создать случайную последовательность орлов и решек. На следующем занятии Хилл собирает результаты и очень быстро определяет, где результат подлинный, а где поддельный, и в 95 % случаев не ошибается. Как ему это удается? В любой последовательности из 200 бросков монетки, если ее действительно бросали, с большой вероятностью попадается по шесть орлов или шесть решек подряд. А когда кто-то пытается подделать последовательность из 200 бросков монетки, им кажется, что такого уж точно не может быть.

Недавно закон Бенфорда применили для выявления финансовых махинаций в одном американском туристическом бюро. Директор по аудиту обнаружил что-то странное в отчете начальника отдела медицинского страхования компании. Первые две цифры в суммах выплат на медицинскую страховку, когда эти данные проверили на соответствие закону Бенфорда, почему-то тяготели к 65 (более подробно о том, как закон предсказывает и вторую и далее цифры, см. в Приложении 9). Тщательный аудит выявил тринадцать поддельных чеков на суммы от 6500 до 6599 долларов. В управлении окружного прокурора в нью-йоркском районе Бруклин при помощи проверок на основе закона Бенфорда также выявили бухгалтерские подделки в семи нью-йоркских фирмах.

Закон Бенфорда состоит именно из тех ингредиентов, которые так по вкусу большинству математиков. Он отражает простой, но поразительный факт: распределение цифр на первом месте в числе подчиняется вполне конкретной закономерности. Более того, этот факт еще и трудно объяснить. Но иногда числа приносят радость, которой не приходится долго ждать. Например, многие математики, как любители, так и профессионалы, очень увлекаются простыми числами. Почему же простые числа так важны? Потому что «Фундаментальная теорема арифметики» гласит, что любое целое число больше единицы можно выразить произведением простых чисел (обратите внимание, что 1 считается простым числом). Например, $28 = 2 \times 2 \times 7$, а $66 = 2 \times 3 \times 11$ и т. д. Простые числа так глубоко укоренились в человеческом понимании математики, что Карл Саган (1934–1996) в своей книге «Космос», когда ему надо было описать, какого типа сигнал разумная цивилизация передала бы в космос, избрал для этого, в частности, последовательность простых чисел: «Крайне маловероятно, чтобы какой-нибудь естественный физический процесс генерировал радиосообщение, содержащее только простые числа. Получив подобное сообщение, мы можем заключить, что где-то есть цивилизация, которая любит простые числа» (*пер. А. Сергеева*). Великий Евклид более двух тысяч лет назад доказал, что простых чисел существует бесконечно много (это изящное доказательство приведено в Приложении 10). Однако большинство любителей простых чисел согласны, что среди них попадаются особенно интересные. Некоторые математики, например, француз Франсуа Ле Лионне и американец Крис Колдуэлл, вели списки «примечательных» или «титанических» чисел. Приведу несколько занятных примеров из великой сокровищницы простых чисел.

— Число 1 234 567 891, представляющее собой «цикл» всех цифр, — тоже простое число.

— 230-е простое число, в котором 6400 цифр, состоит из 6399 девяток и всего одной восьмерки.

— Число, состоящее из 317 повторений цифры 1, простое.

— 713-е простое число можно записать как $10^{1951}\times(10^{1975}+1991991991991991991991991)+1$, и открыли его — вы угадали — в 1991 году.

В контексте этой книги особенно интересно проследить связь между простыми числами и числами Фибоначчи. Все простые числа в последовательности Фибоначчи, кроме 3, стоят в ряду на местах, чей номер — тоже простое число. Например, число Фибоначчи 213 — простое число и в последовательности занимает тринадцатое место — тоже простое число. А вот обратное неверно: если номер числа в последовательности Фибоначчи — простое число, само оно не обязательно простое. Например, 19 член последовательности (19 — простое число) — это число 4181, а 4181 не простое число, оно равно 113×37.

Количество простых чисел Фибоначчи, которые нам удалось узнать, с годами неуклонно растет. В 1979 самое большое простое число Фибоначчи занимало 531 место в последовательности. К середине девяностых самое большое известное простое число Фибоначчи было уже на 2971 месте, а в 2001 году было доказано, что член последовательности номер 81839, состоящий из 17103 цифр, тоже простое число. Так что же, выходит, простых чисел Фибоначчи бесконечно много, как бесконечно много простых чисел как таковых? Это неизвестно — и, пожалуй, это величайшая математическая загадка без ответа, связанная с числами Фибоначчи.

Непостижимое могущество математики

Философско-эстетические взгляды великого поэта и драматурга Оскара Уайлда (1854–1900) отражены в сборнике диалогов «Замыслы». Особенно провокационное изложение идей Уайлда о «новой эстетике» мы находим в диалоге «Упадок искусства лжи». В заключение диалога Вивиан, героиня диалога, подводит его итог следующим образом:

> Жизнь имитирует Искусство куда больше, чем Искусство – Жизнь. Это происходит не только из-за природной тяги Жизни к подражанию, но также из-за осознанного стремления Жизни к самовыражению при том, что Искусство дает ей определенный набор красивых форм для реализации этой энергии. Эта теория еще никем не выдвигалась, но она необычайно продуктивна и позволяет увидеть историю Искусства в совершенно новом свете.
>
> Очевидным следствием этого утверждения является то, что внешняя Природа также подражает Искусству. Она может показать нам только те эффекты, которые мы сначала увидели в картинах или стихах. В этом заключается секрет очарования Природы и объяснение ее слабости.
>
> *(Пер. А. Махлиной)*

Мы вполне могли бы заменить в этом отрывке слово «Искусство» словом «Математика» — и получить утверждение, отражающее реальность, которой отчаянно сопротивляются многие выдающиеся умы. Дело в том, что слишком уж эффективна математика на первый взгляд. По словам Эйнштейна, «Как так получается, что математика, продукт человеческой мысли, независимой от опыта, так прекрасно соответствует объектам физической реальности?» Другой выдающийся физик Юджин Вигнер (1902–1995), известный своим огромным вкладом в ядерную физику, в 1960 году прочитал знаменитую лекцию под названием «Непостижимое могущество математики в естественных науках». Например, нам стоит задаться вопросом, как же так вышло, что планеты, как выяснилось, вращаются вокруг Солнца по кривой (эллипсу), которую изучили греческие геометры задолго до открытия законов Кеплера, и почему объяснение существования квазикристаллов опирается на золотое сечение, то есть на концепцию, которую Евклид придумал для чисто математических целей. И разве не поразительно, что структуры многих галактик, состоящих из миллиардов звезд, достаточно точно повторяют любимую кривую Бернулли — величественную логарифмическую спираль? И самое поразительное: как так получается, что законы физики вообще можно выразить математическими уравнениями?

Но это далеко не все. Например, математик Джон Форбс Нэш, прославившийся на весь мир как герой книги и биографического фильма «Игры разума», в 1994 году получил Нобелевскую премию по экономике за диссертацию по математике, которую написал в 21 (!) год. В этой диссертации Нэш рассказал о «Равновесии Нэша», которое описывает стратегические некооперативные игры, которые вызвали революцию в самых разных сферах — от экономики и эволюционной биологии до политологии. Почему же математика так замечательно оправдывает себя на практике?

Признание необычайной «эффективности» математики проникло даже в гомерически смешной отрывок из романа Сэмюэля Беккета «Моллой», с которым лично у меня связана забавная история. Дело было в 1980 году, и мы с двумя коллегами из Флоридского университета писали статью о нейтронных звездах — это необычайно компактные и плотные космические объекты, возникающие в результате гравитационного коллапса ядер массивных звезд. Статья была в большей степени математическая, чем принято в высшем обществе астрономических статей, и поэтому мы решили снабдить первую страницу соответствующим эпиграфом. Эпиграф гласил:

> Удивительно, насколько математика способствует...
>
> Сэмюэль Беккет. «Моллой»
>
> (*Здесь и далее пер. М. Кореневой*)

Мы снабдили эту строчку ссылкой на первый роман из трилогии «Моллой», «Мэлоун умирает» и «Неназываемый» прославленного писателя и драматурга Сэмюэля Беккета (1906–1989). Кстати, во всех трех романах речь идет о поисках себя — о том, как писатели пишут в погоне за собственной самостью. Нас подталкивают к наблюдению за характерами в разной степени разложения, которые заняты поисками смысла существования.

Эпиграфы у статей по астрофизике бывают очень редко. Так что мы получили письмо от редактора «*The Astrophysical Journal*», где он сообщал, что хотя и сам любит и ценит Беккета, однако не видит особой необходимости включать в статью эпиграф. Мы ответили, что предоставляем ему решать, печатать эпиграф или нет, и в результате статья вышла с эпиграфом — это было в выпуске от 15 декабря 1980 года. А вот как выглядит отрывок из «Моллоя» в неурезанном виде:

> Зимой я ходил укутанный под пальто газетами, сбрасывая их вместе с пробуждением земли, окончательным, в апреле. Лучше всего подходило для этого литературное приложение к «Таймс»,

> благодаря своей неслабеющей прочности и герметичности. Даже газы мои не причиняли ему вреда. С газами я бороться не могу, они вырываются из моего зада по малейшему поводу и без повода, придется, время от времени, об этом говорить, несмотря на все мое отвращение к ним. Однажды я взялся их считать. Триста пятнадцать раз за девятнадцать часов, в среднем по шестнадцать в час. В конце концов, не так много. Четыре раза каждые четверть часа. Совсем ничего. Не выходит и по разу за четыре минуты. Просто невероятно. Черт побери, я почти не воняю, незачем было и вспоминать. Удивительно, насколько математика способствует самопознанию.

История математики знает по крайней мере две попытки — совсем разные с философской точки зрения — ответить на вопрос о поразительной мощи этой науки. Ответы эти также связаны с фундаментальным вопросом о подлинной *природе* математики. Всестороннее обсуждение этих тем потребовало бы нескольких томов и, конечно, далеко выходит за рамки этой книги. Поэтому я лишь кратко опишу несколько основных направлений мышления и изложу собственное мнение на этот счет.

Один взгляд на природу математики, традиционно именуемый платоническим, состоит в том, что математика вечна и всеобъемлюща и ее существование есть объективный факт, не зависящий от нас, людей. Согласно этому платоническому представлению математика была всегда, существовала в некоем абстрактном мире, а люди просто открыли ее, примерно как Микеланджело считал, что его скульптуры заключены внутри мраморных глыб и ему остается лишь убрать все лишнее. Золотое сечение, числа Фибоначчи, Евклидова геометрия и уравнения Эйнштейна — все это составные части платонической реальности, которая превосходит пределы человеческого разума. Сторонники платоновской точки зрения считают, что известный австрийский логик Курт Гёдель также был всей душой предан платонизму. Они подчеркивают, что он не просто говорил о математических понятиях, что и «они тоже могут отражать тот или иной аспект объективной реальности», но и его «теоремы о неполноте» сами по себе могут служить доводами в пользу платонического мировоззрения. Эти теоремы — вероятно, самые знаменитые результаты во всей истории логики — показывают, что для любой формальной системы аксиом (например, теории чисел) существуют утверждения, формулируемые на ее собственном языке, которые *она не в состоянии ни доказать, ни опровергнуть*. Иначе говоря, теория чисел, например, «неполна» в том смысле, что существуют *истинные* постулаты теории чисел, которые нельзя доказать методами, основанными на теории чисел. Чтобы доказать их, мы вынуждены перескочить в другую систему, богаче и выше уровнем, где опять же можно сформулировать истинные постулаты, которые нельзя доказать, не выходя из ее рамок, и так до бесконечности. Специалист по информатике и писатель Дуглас Р. Хофштадтер сухо сформулировал это в своей блистательной книге «Гёдель, Эшер, Бах. Эта бесконечная гирлянда»: «Понятие доказуемости ўже понятия истины». В этом отношении никогда не будет формального способа определить, взяв конкретное математическое утверждение, абсолютно ли оно истинно — точно так же как невозможно определить, верна ли та или иная физическая теория. Роджер Пенроуз, математик из Оксфорда, принадлежит к тем, кто уверен, что теоремы Гёделя — мощный довод в пользу существования платонического математического мира. В своей чудесной книге «Тени разума», которая подталкивает к интереснейшим размышлениям, Пенроуз говорит: «Гёдель доказал не то, что математика... — это произвольные поиски, направление которых определяется прихотью Человека; он доказал, что математика — это нечто абсолютное, и в ней мы должны не изобретать, но открывать... ни одна система "искусственных" правил не способна сделать это за нас». И добавляет: «Такая платоническая точка зрения была существенна для Гёделя» (*Пер. А.Р. Логунова и Н.А. Зубченко*). Английский математик XX века Г. Г. Харди также был убежден, что функция человека — «открывать или наблюдать» математику, а не изобретать ее. Иначе говоря, абстрактный пейзаж математики существовал всегда и только и ждал, когда исследователи-математики его обнаружат.

Одна из предлагаемых разгадок этой тайны — почему математика так хорошо объясняет явления природы — опирается на интереснейшую модификацию идей Платона. Этот «модифицированный платонизм» отстаивает ту точку зрения, что законы физики выражаются математическими уравнениями, структура вселенной фрактальна, галактики самоорганизуются в логарифмические спирали и т. д. потому, что математика есть *язык вселенной*. А конкретнее, по-прежнему предполагается, что математические объекты существуют объективно и зависят отнюдь не от наших знаний о них, однако вместо того, чтобы выводить математику целиком и полностью в какой-то мифический абстрактный план, сторонники этой точки зрения считают, что она хотя бы отчасти находится в реальном мироздании. Если мы хотим наладить общение с разумными цивилизациями, от которых до нас 10000 световых лет, нам нужно всего-навсего передать им число 1,6180339887... — и можно не сомневаться, что они поймут, что мы имеем в виду, поскольку Вселенная, несомненно, навязала и им точно такую же математику. Да, Бог — математик.

Такой модифицированный платонизм был, очевидно, присущ и Кеплеру (хотя у него он был подкрашен религиозностью), и именно его он выражал, когда писал, что геометрия «снабдила Бога образцами для сотворения мира и передала их Человеку наравне с образом и подобием Божиим, и воспринята она была, по сути дела, не глазами». Подобные же мысли были и у Галилео Галилея:

> Философия записана в этой великой книге — я имею в виду Вселенную — которая постоянно раскрыта у нас перед глазами, однако понять ее невозможно, если не научиться прежде понимать язык и толковать буквы, которыми она написана. А написана она на языке математики, и буквы ее — треугольники, круги и прочие геометрические фигуры, без которых человек никогда не сможет понять ни единого слова, без них будто блуждаешь в темном лабиринте.

Несколько другое представление о боге-математике было у мистика, поэта и художника Уильяма Блейка. Блейк питал глубочайшее презрение к научному объяснению природы. Для него Ньютон и его ученые последователи создали заговор с целью расплести радугу, подчинить правилам все тайны человеческого бытия. Вот и на мощной гравюре Блейка «Ветхий днями» (рис. 128, хранится в Библиотеке Пьерпонта Моргана, Нью-Йорк) изображен злой Бог, который при помощи циркуля не учреждает вселенский порядок, а скорее подрезает крылья воображению.

Рис. 128

Однако Кеплер и Галилей были вовсе не последними из математиков, принявших «модифицированное» платоновское мировоззрение, и подобные взгляды отнюдь не ограничивались кругом тех, кто, подобно Ньютону, воспринимал существование Божественного Разума как данность. Великий французский математик, астроном и физик Пьер-Симон Лаплас (1749–1827) писал в 1812 году в своей «Аналитической теории вероятностей» (*Pierre-Simon de Laplace.* Théorie Analitique des Probabilités):

> Если бы нам был хотя бы на мгновение дарован разум, который понимает, какие силы движут природой и каково взаимное расположение сущностей, ее составляющих, и если бы этот разум обладал к тому же достаточной широтою, чтобы подвергнуть эти данные анализу, он охватил бы одной единой формулой движение и крупнейших тел во вселенной, и легчайшего атома.

И это тот самый Лаплас, который на замечание Наполеона Бонапарта, что в большой книге Лапласа о небесной механике ни словом не упомянут творец, ответил: «Сир, мне нет нужды в подобной гипотезе»!

Совсем недавно математик компании *IBM* и автор книг Клиффорд А. Пиковер в своей увлекательной книге «Божий ткацкий станок» (*Clifford A. Pickover.* The Loom of God) писал: «Не знаю, математик ли Бог, однако именно математика — тот ткацкий станок, на котором Господь ткет ткань вселенной... Тот факт, что эту реальность можно описать и достаточно точно вычислить при помощи *простых* математических выражений, по-моему, означает, что в основе природы заложена математика».

Сторонники «модифицированного платонического представления» о математике любят подчеркивать, что на протяжении столетий математики создавали (либо «открывали») многочисленные чисто математические объекты, не имея в виду никакого практического применения. Проходили десятилетия, и оказывалось, что эти математические конструкции и модели помогают решить физические задачи. Прекрасные свидетельства подобных процессов, когда математика неожиданно для всех вносила свой вклад в физику, — это плитки Пенроуза и неевклидовы геометрии, однако таких историй на самом деле гораздо больше.

Кроме того, есть много случаев и обратной связи между физикой и математикой, когда физическое явление вдохновляло на создание какой-то математической модели, а потом оказывалось, что эта модель объясняет совершенно иное физическое явление. Превосходный пример — феномен под названием «броуновское движение». В 1827 году английский ботаник Роберт Броун (1773–1858) заметил, что если развести пыльцу в воде, отдельные пылинки начинают оживленно двигаться. Этот эффект объяснил Эйнштейн в 1905 году: броуновское движение — результат столкновений коллоидных частиц с молекулами окружающей жидкости. Каждое столкновение в отдельности настолько слабенькое, что им можно пренебречь, поскольку частички пыльцы в миллионы раз массивнее молекул воды, однако постоянная бомбардировка оказывает кумулятивное воздействие. Так вот, представьте себе, что ту же модель мы обнаруживаем в движении звезд в звездных скоплениях! Там броуновское движение вызвано кумулятивным воздействием множества звезд, проходящих мимо данной конкретной звезды — и каждый проход чуть-чуть влияет на ее движение (посредством гравитации).

Однако существует и совершенно иное — не такое, как «модифицированное платоническое» — представление о природе математики и о причине ее могущества. Согласно этому представлению (оно сложным образом связано с догмами, которые в философии математики клеймят «формализмом» и «конструктивизмом»), математика существует исключительно в человеческом сознании. Математика, какой мы ее знаем, не более чем человеческое изобретение, а разумные цивилизации в других уголках Вселенной вполне могли разработать совершенно иные концепции. Математические объекты в объективной реальности не существуют, это плоды воображения. По словам великого немецкого философа Иммануила Канта, конечная истина математики лежит в вероятности, что ее концепции способен сконструировать человеческий разум. Иначе говоря, в математике Кант подчеркивает *свободу*— свободу постулировать и изобретать структуры и закономерности.

Подобное представление о математике как об изобретении человека особенно распространено у современных психологов. Например, французский писатель и исследователь Станислас Дехене в своей интересной книге «Чувство числа» (*Stanislas Dehaene*. The Number Sense, 1997) пишет, что «интуиционизм [для автора — синоним человеческого изобретения], как мне кажется, лучше всего описывает отношения между арифметикой и мозгом человека». О чем-то подобном говорит и последнее предложение книги лингвиста

Джорджа Лакоффа и психолога Рафаэля Э. Нуньеса «Откуда взялась математика», которую издал Калифорнийский университет в Беркли в 2000 году (*George Lakoff*, *Rafael E. Núñez.* Where Mathematics Comes From): «У портрета математики человеческое лицо». В основном эти выводы основываются на результатах психологических экспериментов и на неврологических исследованиях функционирования мозга. Эксперименты показывают, что у младенцев есть врожденные механизмы распознавания небольших наборов чисел и что дети спонтанно овладевают простыми арифметическими навыками даже без специального обучения. Кроме того, выявлено, что кора теменной доли головного мозга отвечает за способность обрабатывать числа и символы и обладает соответствующей нейронной структурой. Эта область в обоих полушариях анатомически расположена в месте, где пересекаются нервные связи осязания, зрения и слуха. Существует редкая форма эпилепсии, при которой припадки у больных случаются при попытке совершать арифметические действия, она так и называется *epilepsia arithmetices*, и электроэнцефалограмма у таких больных показывает аномалии именно в коре теменной доли. А повреждение этого участка влияет на способности к математике, письму и ориентации в пространстве.

Даже если согласиться с представлением о математике как об изобретении человеческого разума, не имеющем отношения к реальности, которое основано исключительно на физиологии и психологии, все равно придется отвечать на два интересных вопроса: почему математика так замечательно описывает Вселенную и как так вышло, что даже продукты чистейшей математики зачастую соответствуют физическим явлениям — более того, идеально к ним подходят?

Ответ, который дают на оба эти вопроса сторонники теории «человеческого изобретения», также основан на биологической модели: дело в эволюции и естественном отборе. Идея в том, что прогресс в понимании Вселенной и формулировании математических законов, описывающих происходящие в ней явления, достигается посредством масштабного и мучительного эволюционного процесса. Нынешняя модель Вселенной — результат долгой эволюции, в которой было множество фальстартов и тупиков. Естественный отбор уничтожил математические модели, не соответствовавшие наблюдениям и экспериментам, и оставил только удачные. Согласно этой точке зрения все «теории» Вселенной на самом деле не более чем «модели», качества которых определяются исключительно тем, насколько им удается соответствовать данным наблюдений и экспериментов. Безумная модель солнечной системы Кеплера, о которой он написал в своей «*Mysterium Costographicum*», была вполне приемлемой, пока объясняла и предсказывала поведение планет.

То, как часто и с каким успехом результаты чистой математики переходят в область математики прикладной, согласно этой картине, отражает всего лишь перепроизводство концепций, из которых физика отбирает самые подходящие для своих нужд: вот оно, выживание сильнейших! Вот и Годфри Г. Харди, как подчеркивают сторонники теории человеческого изобретения, гордился, что за всю жизнь «не сделал ничего «полезного». Такое представление о математике разделяет, очевидно, и Мэрилин вос Савант, обладательница самого высокого в мире *IQ* — целых 228! Часто цитируют ее слова: «Я склонна думать, что можно изобрести математическое объяснение чего угодно, и материя — не исключение».

По моему скромному мнению, исчерпывающего ответа на загадку эффективности математики не дает ни модифицированная платоническая точка зрения, ни теория естественного отбора (по крайней мере, в традиционной формулировке).

Утверждать, будто математика — изобретение чисто человеческое и так замечательно объясняет явления природы *исключительно* благодаря эволюции и естественному отбору, значит упускать некоторые важные факты, относящиеся как к природе математики, так и к истории теоретических моделей вселенной. Во-первых, хотя математические законы — например, аксиомы геометрии или теории множеств — и в самом деле творения человеческого разума, однако, сформулировав эти законы, мы сразу же теряем свободу. Определение золотого сечения берется из аксиом Евклидовой геометрии, определение чисел Фибоначчи — из аксиом теории чисел. Однако тот факт, что отношение двух последовательных чисел Фибоначчи сходится к золотому сечению, нам некоторым образом навязан, мы, люди, здесь ничего не решаем и не обладаем свободой выбора. А следовательно, математические объекты, пусть и воображаемые, все же обладают *реальными* свойствами. Во-вторых, объяснение непостижимого могущества математики нельзя основывать исключительно на эволюции в узком смысле слова. Например, когда Ньютон выдвинул теорию гравитации, данные, которые он пытался истолковать, были точны в лучшем случае до третьего знака после запятой. Однако его математическая модель силы, возникающей между двумя массами во Вселенной, обладает необычайной точностью — больше одной миллионной. Получается, что эта модель не была *навязана* Ньютону имеющимися на тот момент измерениями движения планет, с одной стороны, а с другой — Ньютон не втискивал природное явление в уже имеющийся математический паттерн. Более того, естественный отбор в общепринятой интерпретации этой концепции здесь вообще ни при чем: дело не в том, что соревновались пять теорий и Ньютонова победила. Нет — теория Ньютона была единственной!

Однако и модифицированное платоническое представление тоже не без изъянов.

Во-первых, важный принципиальный момент: модифицированное платоническое представление о математике на самом деле никак не объясняет, почему математика так замечательно описывает Вселенную. Она лишь подменяет этот вопрос аксиомой, убеждением, что математика лежит в основе физического мира. Просто *предполагается*, что математика — это символическая копия Вселенной. Роджер Пенроуз — как я уже отмечал, горячий сторонник платонического мира математических форм, — соглашается, что то, «какую именно поразительную роль играет платонический мир математики в физическом мире», остается загадкой. Физик из Оксфордского университета Дэвид Дойч некоторым образом выворачивает этот вопрос наизнанку. В своей книге «Структура реальности» (1997) он спрашивает: «Откуда же берется математическая точность в реальности, состоящей из физики и толкуемой естественнонаучными методами?» Пенроуз добавляет к загадочной эффективности математики еще две тайны. В своей книге «Тени разума» он зада-ется вопросами: «Каким образом столь выдающийся феномен, как разум, может быть объяснен в понятиях материального физического мира?» и «Как вышло, что разум способен «создавать» математические концепции из своего рода умственной модели?» Эти интересные вопросы, совершенно выходящие за рамки нашей книги, имеют отношение к происхождению сознания и к поразительной способности наших довольно-таки примитивных ментальных орудий пробивать дорогу в платонический мир, который для Пенроуза и составляет объективную реальность.

Вторая проблема, связанная с модифицированным платоническим представлением, — это вопрос *универсальности*. До какой степени мы уверены, что законы, которым обязана подчиняться Вселенная, обязательно следует представлять в виде математических уравнений именно того типа, в каком мы их формулируем? Пожалуй, большинство физиков на Земле до последнего времени твердо заявили бы, что история показала, что математические уравнения — *единственный* способ, которым можно формулировать законы физики. Однако все может измениться благодаря книге «Новый вид науки» Стивена Вольфрама (*Stephen Wolfram*. A New Kind of Science). Вольфрам — один из самых оригинальных мыслителей в области теории комплексных систем и научных компьютерных расчетов, и главное его детище — «*Mathematica*», пакет компьютерных программ, позволяющих производить некоторые вычисления, которые до него было невозможно делать с помощью компьютера. После создания этого пакета Вольфрам десять лет молчал, а затем представил публике провокационную книгу, где смело претендует на то, чтобы сменить самую инфраструктуру науки. В мире, где все уже более трехсот лет привыкли, что базовый строительный материал для моделей природы в естественных науках — это математические уравнения, Вольфрам предлагает перейти на простые компьютерные программы. Он предполагает, что главная тайна природы — это применение простых программ для генерирования сложности.

Сейчас, когда я пишу эти строки, книга Вольфрама еще в печати (она вышла в 2002 году. — *Прим. перев.*), однако мы с ним долго беседовали, и из этого разговора и интервью, которое он дал популяризатору науки Маркусу Чоуну, можно уверенно заключить, что выводы из трудов Вольфрама будут весьма и весьма далеко идущие. Однако если ограничиться лишь тем, как идеи Вольфрама соотносятся с платоническими, можно сказать, что тот математический мир, который, по мнению многих, существует независимо от нас и, как полагают, лежит в основе физической реальности, весьма вероятно, не единственный, и это еще мягко сказано. Иначе говоря, определенно возможны описания природы, радикально отличающиеся от того, которым мы располагаем. Математика в своем нынешнем виде охватывает лишь крошечный уголок в обширном пространстве всех возможных наборов правил и законов, которые могли бы описывать устройство мироздания.

Если же ни платоническое мировоззрение, ни теория естественного отбора не могут объяснить, почему математика так замечательно объясняет устройство Вселенной, существует ли точка зрения, дающая исчерпывающий ответ на этот вопрос?

Лично я убежден, что ответ должен опираться на концепции, позаимствованные из обеих систем представлений, а не из какой-то одной. Это очень напоминает историю попыток объяснить физическую природу света. И этот исторический урок настолько важен, что я позволю себе вкратце изложить, как было дело.

Первая научная работа Ньютона была по оптике, и эту тему он разрабатывал почти всю жизнь. В 1704 году он опубликовал первое издание своей книги «Оптика», которую затем трижды пересматривал и дорабатывал. Ньютон предложил корпускулярную теорию света: согласно его гипотезе, свет состоит из крошечных твердых частиц, а их движение подчиняется тем же законам, что и движение бильярдных шаров. Вот как он об этом писал: «Даже лучи света — это, по-видимому, твердые тела». В начале XX века были проведены два знаменитых эксперимента, в которых были обнаружены фотоэффект и эффект Комптона, и которые стали веским доводом в пользу корпускулярной теории света. Фотоэффект — это процесс, при котором электроны в металле поглощают из падающего на него света столько энергии, что это позволяет им вырваться на свободу. В 1905 году Эйнштейн предложил объяснение этого эффекта, за что в 1922 году получил Нобелевскую премию по физике: свет передает электронам энергию словно бы по зернышку, неделимыми единицами. Так был открыт *фотон* — частица света. Физик Артур Холли Комптон (1892–1962) с 1918 по 1925 год и экспериментально, и теоретически анализировал рассеяние рентгеновских лучей. Этот труд, за который Комптон в 1927 году получил Нобелевскую премию по физике, подтвердил существование фотона. Однако существовала и другая теория света, волновая теория, согласно которой свет вел себя словно волны воды в пруду. Особенно горячим сторонником этой теории был голландский физик Христиан Гюйгенс (1629–1695). Волновая теория света была не особенно популярна, пока физик и врач Томас Юнг (1773–1829) в 1801 году не открыл *интерференцию*. Само по себе это явление совсем несложное. Представьте себе, что вы периодически макаете в воду в пруду кончики указательных пальцев. От каждого пальца будут расходиться концентрические волны, то есть гребни волны и впадины будут образовывать все расширяющиеся круги. Там, где гребень волны, отходящей от одного пальца, пересечется с гребнем волны, отходящей от второго, волны усилят друг дружку («конструктивная интерференция»). А там, где гребень волны перекроется со впадиной, они друг друга погасят («деструктивная интерференция»). Тщательный анализ неподвижного узора на воде, который образуется вдоль центральной линии между двумя пальцами, показывает, что там возникает конструктивная интерференция, а по обе стороны от нее линии деструктивной интерференции перемежаются с линиями конструктивной интерференции.

В случае света деструктивная интерференция означает попросту темную полосу. Юнг — вундеркинд, к шестнадцати годам говоривший на одиннадцати языках — проделал эксперимент, при котором свет проходил через две щели, и показал, что свет на экране «перемежался темными полосами».

Результаты Юнга, за которыми в 1815–1820 годах последовали солидные теоретические труды французского инженера Огюстена Френеля, склонили многих физиков на сторону волновой теории света. Дальнейшие эксперименты, которые провели в 1850 году французский физик Леон Фуко и в 1883 году американский физик Альберт Майкельсон, недвусмысленно показали, что рефракция света, проходящего сначала через воздух, а затем через воду, происходит в точном соответствии с волновой теорией. А главное — шотландский физик Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879) в 1864 году опубликовал всеобъемлющую теорию электромагнетизма, которая предсказала существование электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Далее Максвелл предположил, что и свет сам по себе тоже электромагнитная волна. Наконец в 1886–1888 годах немецкий физик Генрих Герц экспериментально доказал, что свет и в самом деле электромагнитная волна, как и предсказывал Максвелл.

Так что же такое свет? Только бомбардировка частицами (фотонами) или только волна? На самом деле, ни то, ни другое. Свет — более сложное физическое явление, чем в состоянии описать каждая из этих концепций в отдельности, поскольку обе они основаны на классических физических моделях. Чтобы описать распространение света и понять явления вроде интерференции, мы можем опереться на теорию электромагнитных волн — и без нее нам не обойтись. Однако если нам надо обсудить взаимодействие света с элементарными частицами, придется описывать фотоны. Такая картина, где описания света как волны и как частицы дополняют друг друга, получила название *корпускулярно-волнового дуализма*. Современная квантовая теория света свела классические представления о волнах и частицах в единую вероятностную концепцию. Электромагнитное поле описывается волновой функцией, которая отражает вероятность застать поле в том или ином состоянии. А фотон — это энергия, связанная с этими состояниями.

Теперь вернемся к вопросу о природе математики и причинах ее эффективности; по моему мнению, здесь следует применить комплементарность такого же типа. Да, математика была изобретена в том смысле, в каком «правила игры» — наборы аксиом — заданы человеком. Однако стоило нам ее изобрести, и она зажила собственной жизнью, и людям пришлось, и до сих пор приходится, исследовать все ее свойства — сообразно духу платонизма. Бесконечный перечень внезапных появлений золотого сечения, бесчисленные математические связи чисел Фибоначчи и тот факт, что мы до сих пор не знаем, бесконечно ли количество простых чисел Фибоначчи, — свидетельства этого поиска открытий.

Вольфрам придерживается очень похожих взглядов. Я спрашивал его, как он считает, «изобрели» математику или «открыли». Он ответил: «Если бы не было особого выбора и нам пришлось принять именно эту систему законов и правил, имело бы смысл говорить, что ее открыли, но поскольку выбор был, и еще какой, а наша математика основана исключительно на исторической договоренности, я бы сказал, что ее изобрели». Ключевые слова — «историческая договоренность»: они заставляют предположить, что система аксиом, на которых основана наша математика, возникла случайно на основе арифметики и геометрии древних вавилонян. Это тут же наталкивает на два вопроса: (1) Почему вавилоняне развивали именно эти дисциплины, а не стали разрабатывать другие наборы правил? И, перефразируя вопрос о том, как математика описывает мироздание: (2) Почему эти дисциплины и их следствия вообще пригодились в физике?

Интересно, что ответы на оба вопроса, вероятно, взаимосвязаны. Возможно, математику как таковую породило наше субъективное восприятие устройства природы. Не исключено, что геометрия попросту отражает человеческую способность легко распознавать линии, грани и кривые. А арифметика — человеческую способность группировать дискретные объекты. При такой картине мира математика, которой мы располагаем, — следствие *биологического устройства человека и того, как люди воспринимают мироздание*. Таким образом, математика и вправду в некотором смысле представляет собой язык вселенной — но вселенной в человеческом восприятии. Если во Вселенной есть другие разумные цивилизации, они, вероятно, разработали совсем другие системы законов, ведь у них, наверное, совсем другие механизмы восприятия. Скажем, если капля воды сливается с другой каплей или молекулярное облако в галактике сливается с другим облаком, они составляют одну каплю и одно облако, а не два. Так что если существует цивилизация, где тела в основном жидкие, а не твердые, один плюс один для нее не обязательно равняется двум. Такая цивилизация, возможно, не знает, что такое простые числа и золотое сечение. Другой пример: едва ли можно сомневаться, что если бы гравитация на Земле была гораздо сильнее, вавилоняне и Евклид сформулировали бы не Евклидову геометрию, а какую-нибудь другую. Общая теория относительности Эйнштейна научила нас, что в очень сильном гравитационном поле пространство вокруг нас искривилось бы, перестало быть плоским: лучи света шли бы по кривой, а не по прямой линии. Геометрия Евклида — всего-навсего плод наблюдений за слабым гравитационным полем Земли (другие геометрии — на искривленных поверхностях — были открыты и разработаны только в XIX веке).

Эволюция и естественный отбор, несомненно, сыграли важнейшую роль в наших теориях мироустройства. Именно поэтому мы в наши дни больше не придерживаемся физических взглядов Аристотеля. Однако я не имею в виду, что эволюция всегда идет плавно и непрерывно. Биологической эволюции на Земле это отнюдь не было свойственно. Извилистый путь жизни на Земле то и дело формировался под воздействием внешних причин, например, массовой гибели того или иного вида. Влияние астрономических тел — комет или астероидов по нескольку миль в диаметре — истребило динозавров и проложило млекопитающим путь к доминированию. Эволюция теорий об устройстве Вселенной то и дело двигалась рывками благодаря квантовым скачкам в научной мысли. Прекрасные примеры подобных блистательных рывков — Ньютонова теория всемирного тяготения и теория общей относительности Эйнштейна («До сих пор не понимаю, как он до нее додумался», — говорил покойный физик Ричард Фейнман). Как же объяснить подобные чудесные открытия? Никак. В том же смысле, как невозможно объяснить, каким образом в мире шахмат, привыкшем к победам с перевесом в пол-очка, Бобби Фишер на пути к мировому первенству в 1971 году ни с того ни с сего разгромил гроссмейстеров Марка Тайманова и Бента Ларсена со счетом шесть — ноль. И так же трудно разобраться, как натуралисты Чарльз Дарвин (1809–1882) и Альфред Рассел Уоллес (1823–1913) независимо друг от друга вывели концепцию эволюции как таковой — что вдохновило их, что подтолкнуло к мысли, что вся жизнь на земле произошла из общего источника, развивавшись разными путями? Нужно просто признать, что кое-кто на голову выделяется из толпы и ему приходят в голову фантастические мысли. Но вписываются ли исполины-новаторы вроде Ньютона и Эйнштейна в теорию эволюции и естественного отбора? Да, вписываются, однако для этого приходится толковать естественный отбор несколько иным, не общепринятым способом. У теории всемирного тяготения во времена Ньютона не было конкуренток, однако она не дожила бы до наших дней, не будь она «самой приспособленной». Напротив, Кеплер предложил модель взаимодействия Солнца и планет, которая протянула совсем недолго: согласно этой модели Солнце, вращаясь вокруг своей оси, испускает лучи магнетической силы. Предполагалось, что эти лучи цепляются за планеты и подталкивают их по круговым орбитам.

Если принять общие определения эволюции, допускающей квантовые скачки, и естественного отбора, действующего в течение длительного времени, то, пожалуй, можно найти объяснение «непостижимой» эффективности математики. Наша математика — символическая репрезентация вселенной *в том виде, в каком мы ее воспринимаем*, и могущество математики постоянно растет благодаря изысканиям человека.

Джеф Раскин, создатель компьютера «Макинтош» в корпорации «Эппл», подчеркивает иной аспект — эволюцию человеческой логики. В эссе об эффективности математики, опубликованном в 1998 году, Раскин приходит к выводу, что «человеческая *логика* [курсив мой. — *М.Л.*] навязана нам физическим миром и поэтому соответствует ему. Математика выведена из логики. Вот почему математика точно описывает физический мир».

В пьесе «Тамерлан великий», где идет речь о герое-злодее маккиавеллиевского толка, который одновременно может быть и нежной душой, и жестоким убийцей, великий английский драматург Кристофер Марло (1564–1593) признает страсть человека к познанию Вселенной:

Из четырех враждующих стихий
Создав людей, природа в них вложила
Тревожный и неукротимый дух:
Он постигает стройный ход созвездий
И дивную гармонию вселенной,
Пылает ненасытной жаждой знанья,
Мятется, как далекий рой планет;
Он нам велит идти, искать, стремиться...

(Пер. Э. Линецкой)

Золотое сечение есть продукт геометрии, которую изобрели люди. Однако люди не представляли себе, в какую волшебную страну заведет их это изобретение. Если бы мы не изобрели геометрию, то, вероятно, вообще не знали бы ничего о золотом сечении. Однако — кто знает? — возможно, мы получили бы его в результате работы короткой компьютерной программы.

Приложение 1

Мы хотим доказать, что для любых целых чисел *p* и *q*, таких, что $p > q$, три числа: $p^2 - q^2$; $2pq$; $p^2 + q^2$ формируют пифагорову тройку. Иначе говоря, нам надо доказать, что сумма квадратов первых двух чисел равна квадрату третьего.

Для этого мы обратимся к общим формулам сокращенного умножения, справедливым для любых *a* и *b:*

$$(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b) \times (a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab - b^2.$$

На основании этих формул квадрат первого числа равен

$$(p^2 - q^2)^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4.$$

Сумма первых двух квадратов равна

$$p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4.$$

Квадрат третьего числа равен

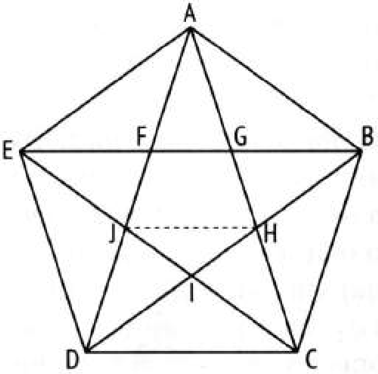
$$(p^2 + q^2)^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4.$$

Итак, мы видим, что квадрат третьего числа равен сумме квадратов первых двух чисел независимо от значений *p* и *q*.

Приложение 2

Мы хотим доказать, что диагональ и сторона правильного пятиугольника несоизмеримы, то есть у них нет общей меры.

Общий принцип доказательства по методу *reductio ad absurdum* приведен в конце главы 2.



Обозначим сторону правильного пятиугольника $ABCDE$ как s_1, а диагональ — как d_1. Из свойств равнобедренных треугольников легко вывести, что $AB=AH$ и $HC=HJ$. Теперь обозначим сторону меньшего правильного пятиугольника $FGHIJ$ как s_2 и его диагональ как d_2. Очевидно, что

$$AC=AH+HC=AB+HJ.$$

Следовательно,

$$d_1=s_1+d_2 \text{ или } d_1-s_1=d_2.$$

Если у d_1 и s_1есть какая-либо общая мера, значит, и d_1, и s_1представляют собой целое произведение этой общей меры. Следовательно, существует также общая мера $d_1 - s_1$, то есть d_2. Подобным же образом равенства

$$AG = HC = HJ$$
$$AH = AB$$

и

$$AH = AG + GH$$
$$AB = HJ + GH$$

дают нам

$$s_1 = d_2 + s_2$$

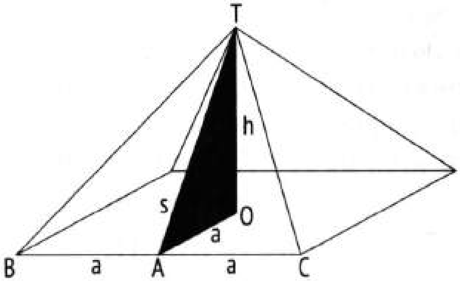
или

$$s_1 - d_2 = s_2.$$

Поскольку на основании нашего предположения общая мера для s_1 и d_1 представляет собой также общую меру для d_2, последнее равенство доказывает, что она же еще и общая мера для s_2. Поэтому мы обнаруживаем, что та единица, которая измеряет s_1 и d_1, измеряет также s_2 *and* d_2. Продолжать этот процесс можно до бесконечности, рассматривая правильные пятиугольники все меньшего и меньшего размера. Тогда мы получим, что та же единица, которая служит общей мерой стороны и диагонали *первого* правильного пятиугольника, служит общей мерой и для всех других пятиугольников, сколь бы крошечными они ни становились. Поскольку очевидно, что так быть не может, следовательно, наше первоначальное предположение, что у стороны и диагонали правильного пятиугольника есть общая мера, ложно, что и доказывает, что s_1 и d_1 несоизмеримы.

Приложение 3

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту, проведенную к основанию. У треугольника TBC основание BC равно $2a$, а высота TA равна c. Следовательно, площадь треугольника равна $c \times a$. Мы хотим показать, что если квадрат высоты *пирамиды* h^2 равен площади ее треугольной стороны $s \times a$, то s/a равно золотому сечению.



Дано, что

$$h^2 = s \times a.$$

Применив теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику TOA, получаем

$$s^2 = h^2 + a^2.$$

Теперь подставим значение h^2 из первого равенства и получим

$$s^2 = s \times a + a^2.$$

Разделим обе части на a^2 и получим

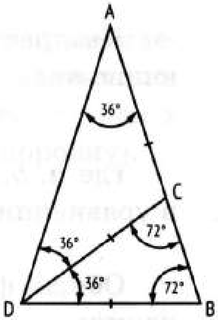
$$(s/a)^2 = (s/a) + 1.$$

Иными словами, если мы обозначим s/a как x, у нас получится квадратное уравнение

$$x^2 = x + 1.$$

В главе 4 показано, что именно это уравнение и описывает золотое сечение.

Приложение 4



Одна из теорем в «Началах» доказывает, что если у двух треугольников одинаковые углы, эти треугольники *подобны*. А это значит, что форма у этих треугольников совершенно одинаковая и длины сторон соответственно пропорциональны. Если одна сторона одного треугольника вдвое длиннее соответствующей стороны второго треугольника, то это справедливо и по отношению к остальным сторонам.

Треугольники ADB и DBC подобны, поскольку у них одинаковые углы. Следовательно, отношение AB/DB, то есть отношение *сторон* треугольников ADB и DBC, равно DB/BC, то есть отношению *оснований* этих треугольников.

$$AB/DB = DB/BC.$$

Однако эти треугольники также равнобедренные, поэтому

$$DB = DC = AC.$$

Из вышеприведенных равенств следует, что

$$AC/BC = AB/AC,$$

Что означает (согласно определению Евклида), что точка C делит отрезок AB в золотом сечении. Поскольку $AD = AB$ и $DB = AC$, получаем также, что $AD/DB = \varphi$.

Приложение 5

Квадратные уравнения — это уравнения, имеющие вид

$$ax^2+bx+c=0,$$

где a, b, c — произвольные числа. Например, в уравнении $2x^2+3x+1=0$ имеем $a=2$, $b=3$, $c=1$.

Общая формула для поиска двух корней уравнения:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

В вышеприведенном примере

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{9-8}}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$x_1=\frac{-3-\sqrt{9-8}}{4}=\frac{-4}{4}=-1.$$

В уравнении, описывающем золотое сечение,

$$x^2-x-1=0,$$

$a=1$, $b=-1$, $c=-1$, следовательно, корни:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1=\frac{1-\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Приложение 6

Задачу о дележе наследства можно решить следующим образом. Обозначим все наследство как E, а долю каждого из сыновей в безантах — как x (по условию, все они делят наследство поровну).

Первый сын получил

$$x=1+\frac{1}{7}(E-1).$$

Второй сын получил

$$x=2+\frac{1}{7}(E-2-x).$$

Приравниваем их доли:

$$1+\frac{1}{7}(E-1)=2+\frac{1}{7}(E-2-x)$$

$$1+\frac{E}{7}-\frac{1}{7}=2+\frac{E}{7}-\frac{2}{7}-\frac{x}{7}.$$

Упрощаем:

$$\frac{x}{7}=\frac{6}{7}$$

$$x=6.$$

Следовательно, каждому из сыновей досталось по 6 безантов.

Подставив эту величину в первое равенство, получаем:

$$6=1+\frac{1}{7}(E-1)$$

$$6=1+\frac{E}{7}+\frac{1}{7}$$

$$\frac{E}{7}=\frac{36}{7}$$

$$E=36.$$

Сумма наследства составила 36 безантов. Следовательно, количество сыновей $36/6=6$.

А вот как выглядит решение Фибоначчи.

Сумма наследства должна представлять собой такое число, чтобы если прибавить к нему 1 раз по 6, одно делилось бы на 1 плюс 6, то есть на 7, а если прибавить к нему 2 раза по 6, оно делилось бы на 2 плюс 6, то есть на 8, если же прибавить к нему 3 раза по 6, оно делилось бы на 3 плюс 6, то есть на 9, и т. д. Такое число — 36. 1/7 от $(36-1/7)$ — это 35/7, плюс 1 — это 42/7, или 6, и это и есть сумма, которую получил каждый из сыновей; общая сумма наследства, поделенная на долю каждого из сыновей, дает нам число сыновей, то есть 36/6 равно 6.

Приложение 7

Отношение между количеством субобъектов n, коэффициентом сокращения длины f и числом измерений D равно

$$n=\left(\frac{1}{f}\right)^{D}.$$

Если положительное число A записывается в виде $A = 10^{L}$, то L мы называем логарифмом (по основанию 10) числа A и записываем это так: $L=\log A$. Иначе говоря, равенства $A=10^{L}$ и $L=\log A$ тождественны. Правила логарифмов таковы:

1. Логарифм *произведения* есть *сумма* логарифмов:

   $$\log (A\times B)=\log A+\log B.$$

2. Логарифм *отношения* есть *разность* логарифмов

   $$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B.$$

3. Логарифм *степени числа* — это степень, *умноженная* на логарифм числа:

   $$\log A^{m}=m\times\log A.$$

Поскольку $10^{0}=1$, по определению логарифма $\log 1=0$. Поскольку $10^{l}=10$, $10^{2}=100$ и так далее, получаем, что $\log 10=1$, $\log 100=2$ и т. д. Следовательно, логарифм любого числа от 1 до 10 — число от 0 до 1, логарифм любого числа от 10 до 100 — это число от 1 до 2 и т. д.

Если мы возьмем логарифм (по основанию 10) обеих частей вышеприведенного равенства (описывающего отношения между n, f и D), то получим

$$\log n = D \times \log\left(\frac{1}{f}\right) = -D \times \log f.$$

Если теперь поделить обе части на $\log f$, мы получим

$$D = -\frac{\log n}{\log f}.$$

Скажем, в случае снежинки Коха каждая кривая содержит четыре «подкривые» в одну треть длины, поэтому $n = 4$, $f = 1/3$, и получаем

$$D = -\frac{\log 4}{\log(1/3)} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}2618595...$$

Приложение 8

Рассмотрим рис. 116, *а*, и увидим, что условие соприкосновения двух веток состоит в простом требовании, чтобы сумма всех *горизонтальных* длин постоянно уменьшающихся веток с длинами начиная от f^3 была равна горизонтальной составляющей большой ветки длиной f. Все горизонтальные составляющие — это общая длина, умноженная на косинус угла, величиной 30 градусов. Поэтому получаем

$$f \times \cos 30^\circ = f^3 \times \cos 30^\circ + f^4 \times \cos 30^\circ + f^5 \times \cos 30^\circ + \ldots$$

Поделим это выражение на $\cos 30^\circ$ — и получим

$$f = f^3 + f^4 + f^5 + f^6 + \ldots$$

Сумма правой части — это сумма бесконечной геометрической прогрессии, то есть каждый ее член равен предыдущему, умноженному на константу, в которой первый член — это f^3, а отношение двух последовательных членов равно f. В целом сумма S бесконечной геометрической прогрессии с первым членом a и отношением последовательных членов q равна

$$S = \frac{a}{1-q},$$

Например, сумма прогрессии

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

где $a = 1$ и $q = 1/2$, равна

$$S = \frac{1}{1-1/2}$$

В нашем случае из вышеприведенного уравнения следует

$$f=\frac{f^3}{1-f}.$$

Делим обе части на f и получаем

$$1=\frac{f^2}{1-f}.$$

Умножаем на $(1-f)$, сокращаем и получаем квадратное уравнение

$$f^2+f-1=0,$$

положительный корень которого равен

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

То есть $1/\varphi$.

Приложение 9

Согласно закону Бенфорда, вероятность P, что цифра D появится на *первом* месте, составляет (логарифм по основанию 10)

$$P = \log(1 + 1/D).$$

Следовательно, для $D = 1$

$$P = \log(1 + 1) = \log 2 = 0{,}30.$$

Для $D = 2$

$$P = \log(1 + 1/2) = \log 1{,}5 = 0{,}176,$$

И так далее. Для $D = 9$,

$$P = \log(1 + 1/9) = \log(10/9) = 0{,}046.$$

Согласно обобщенной формулировке закона вероятность того, что первые три цифры будут, к примеру, 1, 5 и 8, равна

$$P = \log(1 + 1/158) = 0{,}0027.$$

Приложение 10

Доказательство Евклида, что существует бесконечное множество простых чисел, основано на методе *reductio ad absurdum*. Сначала Евклид предполагает, что верно противоположное: простых чисел существует лишь ограниченное множество. Однако, если это правда, одно из них должно быть самым большим простым числом. Обозначим самое большое простое число как P. Затем Евклид выводит новое простое число по следующему алгоритму: он перемножает все простые числа, начиная с 2 и до (включая) P, и прибавляет к произведению единицу. Получается новое число

$$2\times3\times5\times7\times11\times\ldots\times P+1.$$

Согласно первоначальному предположению, это должно быть не простое, а составное число, поскольку оно, очевидно, больше P, а мы решили, что P — самое большое простое число. Следовательно, это число должно делиться по крайней мере на одно из существующих простых чисел. Однако из его конструкции следует, что если мы разделим его на любое простое число вплоть до (и включая) P, получится остаток 1. А следовательно, если бы это число и в самом деле составное, оно должно делиться на какое-то простое число больше P. Однако это предположение противоречит первоначальному утверждению, что P — самое большое простое число, и мы, таким образом, доказали, что простых чисел бесконечно много.

Рекомендуемая литература

Только пустые, ограниченные люди не судят по внешности. Подлинная тайна жизни заключена в зримом, а не в сокровенном...

О. Уайлд (1854–1900)
(*Пер. М. Абкина*)

Большинство книг и статей из этого списка — популярные, а не специальные. Те немногие, которые можно отнести к специальной литературе, отобраны за какие-то особые качества. Кроме того, я отобрал несколько веб-сайтов, где можно найти интересный материал.

1. Прелюдия к числу

Ackermann, F. “The Golden Section”, *Mathematical Monthly*, 2 (1895): 260–264.

Dunlap, R. A. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. Singapore: World Scientific, 1997.

Fowler, D. H. “A Generalization of the Golden Section”, *Fibonacci Quarterly*, 20 (1982): 146–158.

Gardner, M. *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions.* Chicago: University of Chicago Press, 1987.

Ghyka, M. *The Geometry of Art and Life.* New York: Dover Publications, 1977.

Grattan-Guinness, I. *The Norton History of the Mathematical Sciences.* New York: W.W. Norton & Company, 1997.

Herz-Fischler, R. *A Mathematical History of the Golden Number.* Mineola, NY: Dover Publications, 1998.

Hoffer, W. "A Magic Ratio Occurs Throughout Art and Nature", *Smithsonian* (December 1975): 110–120.

Hoggatt, V. E., Jr. "Number Theory: The Fibonacci Sequence", in *Yearbook of Science and the Future.* Chicago: *Encyclopaedia Britannica,* 1977, 178–191.

Huntley, H.E. *The Divine Proportion.* New York: Dover Publications, 1970.

Knott, R. *http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html.*

Knott, R. *http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnet2.html.*

Markowski, G. "Misconceptions about the Golden Ratio", *College Mathematics Journal,* 23 (1992): 2–19.

Ohm, M. *Die reine Elementar-Mathematik.* Berlin: Jonas Veilags-Buchhandlung, 1835.

Runion, G.E. *The Golden Section.* Palo Alto: Dale Seymour Publications, 1990.

2. Гаммы и пентаграммы

http://search.britannica.com/search?query=fibonacci.

Barrow, J. D. *Pi in the Sky.* Boston: Little, Brown and Company, 1992.

Beckmann, P. *A History of* π. Boulder, CO: Golem Press, 1977.

Boulger, W. “Pythagoras Meets Fibonacci”, *Mathematics Teacher,* 82 (1989): 277–282.

Boyer, C. B. *A History of Mathematics.* New York: John Wiley & Sons, 1991.

Burkert, W. *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1972.

Conway, J. H., and Guy, R. K. *The Book of Numbers.* New York: Copernicus, 1996.

Dantzig, T. *Number: The Language of Science.* New York: The Free Press, 1954.

de la Füye, A. *Le Pentagramme Pythagoricien, Sa Diffusion, Son Emploi dans le Syllaboire Cuneiform.* Paris: Geuthner, 1934.

Guthrie, K. S. *The Pythagorean Sourcebook and Library.* Grand Rapids, MI: Phanes Press, 1988.

Ifrah, G. *The Universal History of Numbers.* New York: John Wiley & Sons, 2000.

Maor, E. *e: The Story of a Number.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

Paulos, J. A. *Innumeracy.* New York: Vintage Books, 1988.

Pickover, C. A. *Wonders of Numbers*. Oxford: Oxford University Press, 2001.

Schimmel, A. *The Mystery of Numbers*. Oxford: Oxford University Press, 1994.

Schmandt-Besserat, D. “The Earliest Precursor of Writing”, *Scientific American* (June 1978): 38–47.

Schmandt-Besserat, D. “Reckoning Before Writing”, *Archaeology*, 32–33 (1979): 22–31.

Singh, S. *Fermat's Enigma*. New York: Anchor Books, 1997.

Stanley, T. *Pythagoras*. Los Angeles: The Philosophical Research Society, 1970.

Strohmeier, J., and Westbrook, P. *Divine Harmony*. Berkeley, CA: Berkeley Hills Books, 1999.

Turnbull, H. W. *The Great Mathematicians*. New York: Barnes & Noble, 1993.

von Fritz, K. “The Discovery of Incommensurability of Hipposus of Metapontum”.

Annals of Mathematics, 46 (1945): 242–264.

Wells, D. *Curious and Interesting Numbers*. London: Penguin Books, 1986.

Wells, D. *Curious and Interesting Mathematics*. London: Penguin Books, 1997.

3. В пирамиде, к звездам обращенной

Beard, R. S. “The Fibonacci Drawing Board Design of the Great Pyramid of Gizeh”, *Fibonacci Quarterly*, 6 (1968): 85–87.

Burton, D. M. *The History of Mathematics: An Introduction.* Boston: Allyn and Bacon, 1985.

Doczi, O. *The Power of Limits.* Boston: Shambhala, 1981.

Fischler, R. "Théories Mathématiques de la Grande Pyramide", *Crux Mathematicorum*, 4 (1978): 122–129.

Fischler, R. "What Did Herodotus Really Say? or How to Build (a Theory of) the Great Pyramid", *Environment and Planning B*, 6 (1979): 89–93.

Gardner, M. *Fads and Fallacies in the Name of Science.* New York: Dover Publications, 1957.

Gazalé, M. J. *Gnomon.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1999.

Gillings, R. J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs.* New York: Dover Publications, 1972.

Goff, B. *Symbols of Prehistoric Mesopotamia.* New Haven, CT: Yale University Press, 1963.

Hedian, H. "The Golden Section and the Artist", *Fibonacci Quarterly*, 14 (1976): 406–418.

Lawlor, R. *Sacred Geometry.* London: Thames and Hudson, 1982.

Mendelssohn, K. *The Riddle of the Pyramids.* New York: Praeger Publishers, 1974.

Petrie, W. *The Pyramids and Temples of Gizeh.* London: Field and Tuer, 1883.

Piazzi Smyth, C. *The Great Pyramid.* New York: Gramercy Books, 1978.

Schneider, M. S. *A Beginner's Guide to Constructing the Universe.* New York: Harper Perennial, 1995.

Spence, K. “Ancient Egyptian Chronology and the Astronomical Orientation of the Pyramids”, *Nature*, 408 (2000): 320–324.

Stewart, I. “Counting the Pyramid Builders”, *Scientific American* (September 1998): 98–100.

Verheyen, H. F. “The Icosahedral Design of the Great Pyramid”, in *Fivefold Symmetry.*

Singapore: World Scientific, 1992, 333–360.

Wier, S. K. “Insights from Geometry and Physics into the Construction of Egyptian

Old Kingdom Pyramids”, *Cambridge Archaeological Journal*, 6 (1996): 150–163.

4. Второе сокровище

Borissavlievitch, M. *The Golden Number and the Scientific Aesthetics of Architecture*. London: Alec Tiranti, 1958.

Bruckman, P. S. “Constantly Mean”, *«Fibonacci Quarterly»*, 15 (1977): 236.

Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry*. New York: John Wiley & Sons, 1963.

Cromwell, P. R. *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Dixon, K. *Mathographics*. New York: Dover Publications, 1987.

Ghyka, M. *L’Esthetique des proportions dans la nature et dans les arts*. Paris: Gallimard, 1927.

Heath, T. *A History of Greek Mathematics.* New York: Dover Publications, 1981.

Heath, T. *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* New York: Dover Publications, 1956.

Jowett, B. *The Dialogues of Plato.* Oxford: Oxford University Press, 1953.

Kraut, R. *The Cambridge Companion to Plato.* Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

Lasserre, F. *The Birth of Mathematics in the Age of Plato.* London: Hutchinson, 1964.

Pappas, T. *The Joy of Mathematics.* San Carlos, CA: Wide World Publishing, 1989.

Trachtenberg, M., and Hyman, I. *Architecture: From Prehistory to Post Modernism/The*

Western Tradition. New York: Harry N. Abrams, 1986.

Zeising, A. *Der goldener Schnitt.* Halle: Druck von E. Blochmann & Son in Dresden, 1884.

5. Сын доброй матери-природы

http://cedar.evansville.edu/~ck6/index.html.

Adler, I., Barabe, D., and Jean, R. V. “A History of the Study of Phyllotaxis”, *Annals of Botany,* 80 (1997): 231–244.

Basin, S. L. “The Fibonacci Sequence as It Appears in Nature”, *Fibonacci Quarterly,* 1 (1963): 53–64.

Brousseau, Brother A. *An Introduction to Fibonacci Discovery.* Aurora, SD: The Fibonacci Association, 1965.

Bruckman, P.S. "Constantly Mean", *Fibonacci Quarterly,* 15 (1977): 236.

Coxeter, H.S.M. "The Golden Section, Phyllotaxis, and Wythoff's Game", *Scripta Mathematica,* 19 (1953): 135–143.

Coxeter, H.S.M. *Introduction to Geometry.* New York: John Wiley & Sons, 1963.

Cook, T.A. *The Curves of Life.* New York: Dover Publications, 1979.

Devlin, K. *Mathematics.* New York: Columbia University Press, 1999.

Douady, S., and Couder, Y. "Phyllotaxis as a Physical Self-Organized Process", *Physical*

Review Letters, 68 (1992): 2098–2101.

Dunlap, R.A. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers.* Singapore: World Scientific, 1997.

Fibonacci, L.P. *The Book of Squares.* Orlando, FL: Academic Press, 1987.

"The Fibonacci Numbers", *Time,* April 4, 1969, 49–50.

Gardner, M. *Mathematical Circus.* New York: Alfred A. Knopf, 1979.

Gardner, M. "The Multiple Fascination of the Fibonacci Sequence", *Scientific American* (March 1969): 116–120.

Garland, T.H. *Fascinating Fibonaccis.* White Plains, NY: Dale Seymour Publications, 1987.

Gies, J., and Gies, F. *Leonard of Pisa and the New Mathematics of the Middle Ages.* New

York: Thomas Y. Crowell Company, 1969.

Hoggatt, V.E. Jr. "Number Theory: The Fibonacci Sequence", Chicago: *Encyclopaedia*

Britannica, Yearbook of Science and the Future, 1977, 178–191.

Hoggatt, V.E. Jr., and Bicknell-Johnson, M. "Reflections Across Two and Three Glass Plates", *Fibonacci Quarterly,* 17 (1979): 118–142.

Horadam, A. F. "Eight Hundred Years Young", *The Australian Mathematics Teacher,* 31 (1975): 123–134.

Jean, R.V. *Mathematical Approach to Pattern and Form in Plant Growth.* New York: John Wiley & Sons, 1984.

O'Connor, J.J. and Robertson, E.F. *www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Fibonacci.html.*

Pickover, C.A. *Keys to Infinity.* New York: John Wiley & Sons, 1995.

Rivier, N., Occelli, R., Pantaloni, J., and Lissowdki, A. "Structure of Binard Convection".

Cells, Phyllotaxis and Crystallography in Cylindrical Symmetry", *Journal Physique,* 45 (1984): 49–63.

Singh, P. "The So-Called Fibonacci Numbers in Ancient and Medieval India", *Historia Mathematica,* 12 (1985): 229–244.

Smith, D.E. *History of Mathematics.* New York: Dover Publications, 1958.

Stewart, I. "Fibonacci Forgeries", *Scientific American* (May 1995): 102–105.

Stewart, I. *Life's Other Secret.* New York: John Wiley & Sons, 1998.

Thompson, D.W. *On Growth and Form.* New York: Dover Publications, 1992.

Vajda, S. *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section.* Chichester: Ellis Horwood Limited, 1989.

Vorob'ev, N.N. *Fibonacci Numbers.* New York: Blaisdell, 1961.

6. Божественная пропорция

Arasse, D. *Leonardo Da Vinci.* New York: Konecky & Konecky, 1998.

Beer, A. and Beer, P., eds., *Kepler: Four Hundred Years.* Vistas in Astronomy, vol. 18, New York: Pergamon Press, 1975.

Calvesi, M. *Piero Della Francesca.* New York: Rizzoli, 1998.

Caspar, M. *Kepler.* New York: Dover Publications, 1993.

Cromwell, P.R. *Polyhedra.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Gingerich, O. "Kepler, Galilei, and the Harmony of the World", in *Music and Science in the Age of Galileo,* ed. V. Coeltho, 45–63. Dordrecht: Kluwer, 1992.

Gingerich, O. "Kepler, Johannes", in *Dictionary of Scientific Biography,* ed. Charles Coulston Gillespie, vol. 7, 289–312. New York: Scribners, 1973.

Ginzburg, C. *The Enigma of Piero.* London: Verso, 2000.

James, J. *The Music of the Spheres.* New York: Copernicus, 1993.

Jardine, N. *The Birth of History and Philosophy of Science: Kepler's "A Defense of Tycho against Ursus" with Essays on Its Provenance and Significance.* Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

Kepler, J. *The Harmony of the World.* Philadelphia: American Philosophical Society, 1997.

Kepler, J. *Mysterium Cosmographicum.* New York: Abaris Books, 1981.

Leonardo Da Vinci. NY: Artabras/Reynal and Company, 1938.

MacKinnon, N. "The Portrait of Fra Luca Pacioli", *Mathematical Gazette,* 77 (1993): 130–219.

Martens, R. *Kepler's Philosophy and the New Astronomy.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 2000.

O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. *www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Pacioli.html/Durer.html.*

Pacioli, L. *Divine Proportion.* Paris: Librairie du Compagnonnage, 1988.

Pauli, W. "The Influence of Archetypal Ideas on the Scientific Theories of Kepler", in *The Interpretation of Nature and the Psyche,* 147–240. New York: Parthenon, 1955.

Stephenson, B. *The Music of the Spheres: Kepler's Harmonic Astronomy.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

Strieder, P. *Albrecht Dürer.* New York: Abaris Books, 1982.

Taylor, R. E. *No Royal Road.* Chapel Hill: University of North Carolina Press, 1942.

Voelkel, J. R. *Johannes Kepler.* Oxford: Oxford University Press, 1999.

Westman, R. A. "The Astronomer's Role in the Sixteenth Century: A Preliminary Survey", *History of Science,* 18 (1980): 105–147.

7. Равноправие поэтов и живописцев

Altschuler, E. L. *Bachanalia.* Boston: Little, Brown and Company, 1994.

d'Arcais, F. F. *Giotto.* New York: Abbeville Press Publishers, 1995.

Bellosi, L. *Cimabue.* New York: Abbeville Press Publishers, 1998.

Bergamini, D. *Mathematics.* New York: Time Incorporated, 1963.

Bois, Y.-A., Joosten, J., Rudenstine, A. Z., and Janssen, H. *Piet Mondrian.* Boston: Little, Brown and Company, 1995.

Boring, E. G. *A History of Experimental Psychology.* New York: Appleton-Century-Crofts, 1957.

Bouleau, C. *The Painter's Secret Geometry.* New York: Harcourt, Brace & World, 1963.

Curchin, L., and Fischler, R. "Hero of Alexandria's Numerical Treatment of Division in Extreme and

Mean Ratio and Its Implications", *Phoenix,* 35 (1981): 129–133.

Curtis, W.J.R. *Le Corbusier: Ideas and Forms.* Oxford: Phaidon, 1986.

Duckworth, G.E. *Structural Patterns and Proportions in Vergil's Aeneid.* Ann Arbor: University of Michigan Press, 1962.

Emmer, M. *The Visual Mind.* Cambridge, MA: MIT Press, 1993.

Fancher, R.E. *Pioneers of Psychology.* New York: W.W. Norton & Company, 1990.

Fechner, G.T. *Vorschule der Aesthetik.* Leipzig: Breitkopf & Härtel, 1876.

Fischler, R. "How to Find the 'Golden Number' Without Really Trying", *Fibonacci Quarterly,* 19 (1981): 406–410.

Fischler, R. "On the Application of the Golden Ratio in the Visual Arts", *Leonardo,* 14 (1981): 31–32.

Fischler, R. "The Early Relationship of Le Corbusier to the Golden Number", *Environment and Planning B,* 6 (1979): 95–103.

Godkewitsch, M. "The Golden Section: An Artifact of Stimulus Range and Measure of Preference", *American Journal of Psychology,* 87 (1974): 269–277.

Hambidge, J. *The Elements of Dynamic Symmetry.* New York: Dover Publications, 1967.

Herz-Fischler, R. "An Examination of Claims Concerning Seurat and the Golden Number", *Gazette des Beaux-Arts,* 125 (1983): 109–112.

Herz-Fischler, R. "Le Corbusier's 'regulating lines' for the villa at Garches (1927) and other early works", *Journal of the Society of Architectural Historians,* 43 (1984): 53–59.

Herz-Fischler, R. "Le Nombre d'or en France de 1896 à 1927", *Revue de l'Art,* 118 (1997): 9–16.

Hockney, D. *Secret Knowledge.* New York: Viking Studio, 2001.

Howat, R. *Debussy in Proportion.* Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

Kepes, G. *Module, Proportion, Symmetry, Rhythm.* New York: George Braziller, 1966.

Larson, P. "The Golden Section in the Earliest Notated Western Music", *Fibonacci Quarterly,* 16 (1978): 513–515.

Le Courbusier. *Modulor I and II.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1980.

Lendvai, E. *Béla Bartók: An Analysis of His Music.* London: Kahn & Averill, 1971.

Lowman, E. A. "Some Striking Proportions in the Music of Bela Bartók", *Fibonacci Quarterly,* 9 (1971): 527–537.

Marevna. *Life with the Painters of La Ruche.* New York: Macmillan Publishing Co., 1974.

McManus, I. C. "The Aesthetics of Simple Figures", *British Journal of Psychology,* 71 (1980): 505–524.

Nims, J. F. *Western Wind.* New York: McGraw-Hill, 1992.

Nuland, S. B. *Leonardo da Vinci*. New York: Viking, 2000.

Osborne, H. ed. *The Oxford Companion to Art*. Oxford: Oxford University Press, 1970.

Putz, J. F. "The Golden Section and the Piano Sonatas of Mozart", *Mathematics Magazine*, 68 (1995): 275–282.

Sadie, S. *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. New York: Grove, 2001.

Schiffman, H. R., and Bobka, D. J. "Preference in Linear Partitioning: The Golden Section Reexamined", *Perception & Psychophysics*, 24 (1978): 102–103.

Schillinger, F. *Joseph Schillinger*. New York: Da Capo Press, 1976.

Schillinger, J. *The Mathematical Basis of the Arts*. New York: Philosophical Library, 1948.

Schwarz, L. "The Art Historian's Computer", *Scientific American* (April 1995): 106–111.

Somfai, L. *Béla Bartók: Compositions, Concepts, and Autograph Sources*. Berkeley: University of California Press, 1996.

Svensson, L. T. "Note on the Golden Section", *Scandinavian Journal of Psychology*, 18 (1977): 79–80.

Tatlow, R., and Griffiths, P. "Numbers and Music", in *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*, 18 (2001): 231–236.

Watson, R. I. *The Great Psychologists*. Philadelphia: J. B. Lippincott Company, 1978.

White, M. *Leonardo the First Scientist.* London: Little, Brown and Company, 2000.

Woodworth, R.S., and Schlosberg, H. *Experimental Psychology.* New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.

Zusne, L. *Visual Perception of Form.* New York: Academic Press, 1970.

8. Звездное небо над нами и плиточный пол у нас под ногами

Cohen, J., and Stewart, I. *The Collapse of Chaos. Discovering Simplicity in a Complex World.* New York: Penguin Books, 1995.

Fischer, R. *Financial Applications and Strategies for Traders.* New York: John Wiley & Sons, 1993.

Gardner, M. *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers.* New York: W.H. Freeman and Company, 1989.

Gleick, J. *Chaos.* New York: Penguin Books, 1987.

Lesmoir-Gordon, N., Rood, W., and Edney, R. *Introducing Fractal Geometry.* Cambridge: Icon Books, 2000.

Mandelbrot, B.B. *Fractal Geometry of Nature.* New York: W.H. Freeman and Company, 1988.

Mandelbrot, B.B. “A Multifractal Walk Down Wall Street”, *Scientific American* (February 1999): 70–73.

Matthews, R. “The Power of One”, *New Scientist,* July 10, 1999, 27–30.

Peitgen, H.-O., Jürgens, H., and Saupe, D. *Chaos and Fractals.* New York: Springer-Verlag, 1992.

Peterson, I. "Fibonacci at Random", *Science News,* 155 (1999): 376–377.

Peterson, I. *The Mathematical Tourist.* New York: W.H. Freeman and Company, 1988.

Peterson, I. "A Quasicrystal Construction Kit", *Science News,* 155 (1999): 60–61.

Prechter, R.R. Jr., and Frost, A.J. *Elliot Wave Principle.* Gainesville, GA: New Classics Library, 1978.

Schroeder, M. *Fractals, Chaos, Power Laws.* New York: W.H. Freeman and Company, 1991.

Steinhardt, P.J., Jeong, H.C., Saitoh, K., Tanaka, M., Abe, E., and Tsai, A.P. "Experimental Verification of the Quasi-Unit-Cell Model of Quasicrystal Structure", *Nature,* 396 (1998): 55–57.

Stewart, I. *Does God Play Dice?* London: Penguin Books, 1997.

Walser, H. *The Golden Section.* Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2001.

Может быть, Бог — математик?

Baierlein, R. *Newton to Einstein: The Trail of Light.* Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

Barrow, J.D. *Impossibility.* Oxford: Oxford University Press, 1998.

Chandrasekhar, S. *Truth and Beauty.* Chicago: University of Chicago Press, 1987.

Chown, M. "Principia Mathematica III", *New Scientist,* August 25, 2001, 44–47.

Davis, P.J., and Hersh, R. *The Mathematical Experience.* Boston: Houghton Mifflin Company, 1998.

Dehaene, S. *The Number Sense.* Oxford: Oxford University Press, 1997.

Deutsch, D. *The Fabric of Reality.* New York: Penguin Books, 1997.

Hersh, R. *What Is Mathematics, Really?* New York: Oxford University Press, 1997.

Hill, T.P. "The First Digit Phenomenon", *American Scientist,* 86 (1998): 358–363.

Kleene, S.C. "Foundations of Mathematics", Chicago: *Encyclopaedia Britannica* (1971), 1097–1103.

Lakatos, I. *Mathematics, Science and Epistemology.* Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

Lakoff, G., and Núñez, R. *Where Mathematics Comes From.* New York: Basic Books, 2000.

Livio, M. *The Accelerating Universe.* New York: John Wiley & Sons, 2000.

Maor, E. *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1987.

Matthews, R. "The Power of One", *New Scientist,* July 10, 1999, 26–30.

Penrose, R. *The Emperor's New Mind.* Oxford: Oxford University Press, 1989.

Penrose, R. *Shadows of the Mind.* Oxford: Oxford University Press, 1994.

Pickover, C.A. *The Loom of God.* Cambridge, MA: Perseus Books, 1997.

Popper, K.R., and Eccles, J.C. *The Self and Its Brain.* New York: Springer International, 1977.

Raimi, R. "The Peculiar Distribution of the First Digit", *Scientific American* (December 1969): 109–119.

Raskin, J. http://www.jefraskin.com/forjef2/jefweb-compiled/unpublished/effectiveness_mathematics/

Robinson, A. "From a Formalist's Point of View", *Dialectica,* 23 (1969): 45–49.

Russell, B. *A History of Western Philosophy.* New York: Simon and Schuster, 1945.

Russell, B. *Human Knowledge, Its Scope and Its Limits.* New York: Simon and Schuster, 1948.

Weisstein, E. http://matworld.wolfram.com/BenfordsLaw.html.

Wolfram, S. *A New Kind of Science.* Champaign, IL: Wolfram Media, 2002.

Ссылки на источники

Автор и издатель приносят искреннюю благодарность за разрешение перепечатать следующий материал, защищенный законами об авторском праве.

Рисунки, чертежи, репродукции

Рисунки 1, 2, 3, 7, 9, 10, 11, 12, 14*a*, 14*b*, 18, 20*a*, 20*b*, 20*c*, 20*d*, 20*e*, 21, 24, 25*a*, 25*b*, 26, 27, 29, 30, 33*a*, 33*b*, 35, 37, 40, 41, 42, 44*a*, 44*b*, 49, 57*a*, 57*b*, 58, 61, 62, 63, 64, 86, 89, 91, 97*a*, 97*b*, 97*c*, 101*a*, 101*b*, 102*a*, 102*b*, 103*a*, 103*b*, 105, 106*a*, 106*b*, 107, 112, 114, 123, 124 и в Приложении 1, Приложении 2, Приложении 3 и Приложении 4 выполнил Джеффри Л. Уорд.

Рис. 4: Музей морских раковин Бейли-Мэтьюз.

Рис. 5: Коллекция Честера Дейла. Фото © 2002 Совет попечителей Национальной галереи искусств в Вашингтоне. © 2002 Сальвадор Дали, Фонд «Гала-Сальвадор Дали»/Общество защиты прав художников (*ARS*), Нью-Йорк.

Рис. 6: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *John D. Barrow*, *Pi In the Sky* (*Oxford*: *Oxford University Press*, 1992).

Рис. 13: © Британский музей, Лондон.

Рис. 17: Фотоархив «Хирмер».

Рис. 19: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Robert Dixon*, *Mathographics* (*Mineola*: *Dover Publications*, 1987).

Рис. 22 и 23, внизу: перепечатано с разрешения правообладателя из книги *H.E. Huntley*, *The Divine Proportion* (*Mineola*: *Dover Publications*, 1970).

Рис. 23, вверху: Коллекция фотографий Элисон Франц, Американская школа классических исследований в Афинах.

Рис. 28: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Trudi Hammel Garland*, *Fascinating Fibonaccis. Mystery and Magic in Numbers* © 1987 *by Dale Seymour Publications*, репринт *Pearson Learning*, подразделение *Pearson Education*, *Inc*.

Рис. 31–32: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Trudi Hammel Garland*, *Fascinating Fibonaccis. Mystery and Magic in Numbers* © 1987 *by Dale Seymour Publications*, репринт *Pearson Learning*, подразделение *Pearson Education*, *Inc*.

Рис. 34: Перепечатано с разрешения правообладателя из статьи *Brandmüller*, "*Five fold symmetry in mathematics*, *physics*, *chemistry*, *biology and beyond*", *in I. Hargitta*, *ed. Five Fold Symmetry* (*Singapore*: *World Scientific*, 1992).

Рис. 36: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *N. Rivier et al.*, *J. Physique*, 45, 49 (1984).

Рис. 38: Королевское собрание © 2002, Ее Величество Королева Елизавета II.

Рис. 39: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Edward B. Edwards, Pattern and Design with Dynamic Symmetry* (*Mineola: Dover Publications*, 1967).

Рис. 43: С разрешения *NASA* и научной группы «*Hubble Heritage*».

Рис. 46, 45, 47, 50: Алинари/ «Арт-Ресурс», Нью-Йорк.

Рис. 47: Линии перспективы. Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Laura Geatti, Michelle Emmer* (*ed.*), *The Visual Mind: Art and Mathematics* (*Cambridge: the MIT Press*,1993).

Рис. 52: Собственность Амброзианской библиотеки. Все права защищены. Перепечатывать запрещается.

Рис. 53: Скала / «Арт-Ресурс», Нью-Йорк.

Рис. 55, 56: Музей Метрополитен, Фонд Дика, 1943

Рис. 57: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *David Wells, The Penguin Book of Curious and Interesting Mathematics* (*London: The Penguin Group*, 1997), © Дэвид Уэллс, 1997.

Рис. 68–69: С любезного разрешения Астрономического института при Венском университете.

Рис. 70, 71, 72: Алинари/ «Арт-Ресурс», Нью-Йорк.

Рис. 72: Национальная галерея, Лондон.

Рис. 73: Алинари/ «Арт-Ресурс», Нью-Йорк.

Рис. 75: Скала/ «Арт-Ресурс», Нью-Йорк.

Рис. 76: Музей Метрополитен, наследство Стивена С. Кларка, 1960. (61.101.17).

Рис. 77: Художественный музей Филадельфии, коллекция А. Э. Галлатина, 1952. © 2002, Общество защиты прав художников ((*ARS*), Нью-Йорк/ Общество художников, работающих в области графических и пластических искусств (*ADAGP*), Париж.

Рис. 78: Частная коллекция, Рим. © 2002 Общество защиты прав художников ((*ARS*), Нью-Йорк/ Общество художников, работающих в области графических и пластических искусств (*ADAGP*), Париж.

Рис. 79: © 2002 Общество защиты прав художников (*ARS*), Нью-Йорк/ Общество художников, работающих в области графических и пластических искусств (*ADAGP*), Париж/*FLC*.

Рис. 80, 81: © 2002 Общество защиты прав художников (*ARS*), Нью-Йорк/ Общество художников, работающих в области графических и пластических искусств (*ADAGP*), Париж/*FLC*.

Рис. 82: Частная коллекция. Из "*Module Proportion, Symmetry, Rhythm*" *by Gyorgy Kepes*, *George Braziller*. © 2002 Общество защиты прав художников (*ARS*), Нью-Йорк/ /Общество защиты авторских прав в области искусства и дизайна (*DACS*), Лондон.

Рис. 83: Музей современного искусства/по лицензии Скала/ «Арт-Ресурс», Нью-Йорк © 2002 Трест Мондриана-Гольцмана через организацию «Беельдрехт» /Общество защиты прав художников (*ARS*), Нью-Йорк.

Рис. 84: Перепечатано с разрешения правообладателя из статьи *G. Markowsky*, *The College Mathematics Journal*, 23, 2 (1992).

Рис. 85: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Denis Arnold, ed., The New Oxford Companion to Music, Vol.* 2 (*Oxford: Oxford University Press*, 1984).

Рис. 87, 88: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Ernö Lendvai, Béla Bartók, An Analysis of His Music* (*London: Kahn & Averill*, 1971).

Рис. 89: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Roy Howat, Debussy in Proportion* (*Cambridge: Cambridge University Press*, 1983).

Рис. 90: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Joseph Schillinger, The Schillinger System of Musical Composition* (*New York: Carl Fischer, LLC*, 1946).

Рис. 92: Государственный музей, Амстердам.

Рис. 93: Музей истории искусств, Вена.

Рис. 94: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Ivars Peterson, The Mathematical Tourist* (*New York: W.H. Freeman*, 1988).

Рис. 95: С разрешения Рикардо Вилья-Реал. Из "*The Alhambra and the Generalife*" *by RicardoVilla-Real.*

Рис. 96: © 2002 *Cordon Art-Baard*, Нидерланды. Все права защищены.

Рис. 99: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Richard A. Dunlap, The Golden Ratio and Fibonacci Numbers* (*Singapore: World Scientific*, 1997).

Рис. 100: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Richard A. Dunlap, The Golden*

Ratio and Fibonacci Numbers (*Singapore*: *World Scientific*, 1997).

Рис. 104: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Martin Gardner*, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers* (*New York*: *W.H. Freeman*, 1988).

Рис. 108–109: Перепечатано с разрешения правообладателя Пола Стейнхардта.

Рис. 110: Перепечатано с разрешения Пат Тиль.

Рис. 111: Эрих Лессинг/«Арт-Ресурс», Нью-Йорк.

Рис. 115–122: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Hans Walser*, *The Golden Section* (*Washington*: *The Mathematical Association of America*, 2001).

Рис. 123–124: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Alan H. Guth*, *The Inflationary Universe* (*Reading*: *Addison-Wesley*, 1997).

Рис. 125–126: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *R.R. Prechter and A.J. Frost*, *The Elliott Wave Principle* (*Gainesville*: *New Classic Library*, 1998).

Рис. 127: Перепечатано с разрешения правообладателя из книги *Robert Fischer*, *Fibonacci Applications and Strategies for Traders* (*New York*: *John Wiley & Sons*, 1993).

Рис. 128: Библиотека Пирпонта Моргана/«Арт-Ресурс», Нью-Йорк.

Текст:

С. 39: Стихотворение о Пифагоре: напечатано с разрешения Стивена Кашинга.

С. 223: Стихотворение об Уильяме Блейке: напечатано с разрешения Джаспера Мемори.

С. 81, Стихотворение “*Constantly Mean*”: Перепечатано с разрешения правообладателя из «*Fibonacci Quarterly*», 15.3 (1977) с. 236.

С. 194: Первая строфа из стихотворения “*The Statues*”: Перепечатано с разрешения «*Scribner*», *Simon & Schuster Adult Publishing Group*, из книги *The Collected Works of W.B. Yeats: Volume I, The Poems, Revised, edited by Richard J. Finneran.* © 1940 *by* Джорджи Йейтс; © Берта Джорджи Йейтс, Майкл Батлер Йейтс, Анна Йейтс.

Дополнительно:

Рис. 8: Перепечатано из *Robert Lawlor*, *Sacred Geometry* (*London*: *Thames and Hudson*, 1982).

Рис. 15–16: Перепечатано из *Robert Lawlor*, *Sacred Geometry* (*London*: *Thames and Hudson*, 1982).

С. 195: Стихотворение Кэтрин О’Брайен: перепечатано из *Robert L. Weber*, *Science with a Smile* (*Bristol*: *Institute of Physics Publishing*, 1992). Поиски правообладателя к успеху не привели.

С. 195: Стихотворение Дж. А. Линдона: перепечатано из книги *Martin Gardner*, *Mathematical Circus*, (*New York*: *Alfred A. Knopf*, 1979). Поиски правообладателя к успеху не привели.

Автор предпринял самые добросовестные меры по розыску правообладателей всех иллюстраций в этой книге, однако в нескольких случаях это не удалось. Эти правообладатели должны связаться с издательством «*Broadway Books*», подразделением *Random House*, *Inc*», по адресу 1540 *Broadway*, *New York*, *NY* 10036.

12+

Научно-популярное издание
Серия «Удивительная Вселенная»

Марио Ливио

**φ — ЧИСЛО БОГА.
ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ — ФОРМУЛА МИРОЗДАНИЯ**

Подписано в печать 06.03.2018. Формат 60×90/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 27,00. Тираж 2500 экз. Заказ №2621.

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93,
том 2—953000, книги, брошюры.

ООО «Издательство АСТ»
129085, г. Москва, Звездный бульвар, д. 21, стр. 1, комн. 39

Макет подготовлен редакцией

ПРАЙМ

Отпечатано с готовых файлов заказчика
в АО «Первая Образцовая типография»,
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

Нил Деграсс ТАЙСОН

**АСТРОФИЗИКА
С КОСМИЧЕСКОЙ
СКОРОСТЬЮ,
или Великие тайны
Вселенной для тех,
кому некогда**

*Формат 60x90/16,
тв. переплет,
240 стр.*

Изучение тайн Вселенной подобно чтению захватывающего романа. Но только если вы хорошо понимаете физику, знаете, что скрывается за всеми сложными терминами и определениями. В самых головоломных вопросах науки вам поможет разобраться Нил Деграсс Тайсон — один из самых авторитетных и в то же время остроумных астрофизиков нашего времени. Он обладает особым даром рассказывать о сложнейших научных теориях понятно, интересно и с юмором.

Новая книга Тайсона — это очередное захватывающее путешествие в мир современной науки. Вы узнаете о самых последних открытиях, сможете проследить секунда за секундой рождение Вселенной, узнаете новейшие данные о темной материи и происхождении Земли. И чтобы понять все это, вам не понадобится никакого специального образования: достаточно даже слегка подзабытого курса средней школы и любопытства. А закрыв эту книгу, вы поймете, что астрофизика не так сложна, как казалось! Это полезное и увлекательное чтение для всей семьи. Читайте, чтобы не отстать от научно-технического прогресса.


Нил Деграсс ТАЙСОН
СМЕРТЬ
В ЧЕРНОЙ ДЫРЕ
И ДРУГИЕ МЕЛКИЕ
КОСМИЧЕСКИЕ НЕПРИЯТНОСТИ
От автора мирового бестселлера
«Астрофизика с космической скоростью»
Бестселлер №1
Amazon и New York Times

Для заметок

Международная премия **Пифагора**
Бестселлер №1 **Amazon**

Марио Ливио (1945) — астрофизик, автор многочисленных научно-популярных книг, многие из которых стали признанными бестселлерами. Книга «ф — число Бога» получила Международную премию Пифагора за популяризацию науки.

Известный американский астрофизик и популяризатор науки Марио Ливио ведет увлекательное расследование истории числа ф или 1,6180339887... Как только не называли это загадочное число: и золотым сечением, и числом Бога, и божественной пропорцией. Оно играет важнейшую роль и в геометрии живой природы, и в творениях человека, его закладывают в основу произведений живописи, скульптуры и архитектуры, ему посвящают приключенческие романы! Но заслуженна ли подобная слава? Что здесь правда, а что вымысел, какова история Золотого сечения в науке и культуре, и чем вызван такой интерес к простому геометрическому соотношению? Захватывающий сюжет, малоизвестные факты из истории науки и неожиданные сопоставления — вот что делает эту научно-популярную книгу настоящим детективом и несомненным бестселлером.

«Являются ли некоторые числа более значимыми, чем другие? Конечно же, да! Есть числа, которые влияют на нашу жизнь, даже если мы о них не знаем. Таково число ф — число Бога, в котором кроется секрет гармонии. Марио Ливио написал эту книгу, чтобы мы не были так слепы и не думали, что нумерология — это предрассудки».

Тимоти Хью, Коннектикут