ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ

В АМЕРИКАНСКИЕ УНИВЕРСИТЕТЫ

МАТЕМАТИКА

ВВЕДЕНИЕ

В брошюре содержатся типовые варианты работ по математике, используемые на приемных экзаменах в университетах США.

В отличие от нашей страны, где существует универсальная программа средней школы, на основе которой принимаются вступительные экзамены в ВУЗы, в США выпускники колледжей имеют различный уровень подготовки, соответствующий разным программам по математике.

В данной брошюре даны три вида вариантов, соответствующих одиннадцатилетнему курсу математики, двенадцатилетнему курсу математики и экспериментальному курсу в колледжах. Наиболее близок к программе нашей средней школы двенадцатилетний курс математики американского колледжа.

Варианты экзаменационных работ даны на двух языках — английском и русском. Такая структура брошюры объясняется тем, чтобы читатель имел возможность проверить не только соответствие своих математических знаний уровню требований к поступающим в американские университеты, но также и свое знание английского языка. Те читатели, которые убедятся, что их познания в английском языке недостаточны, могут воспользоваться русским переводом вариантов. В английском тексте вариантов все математические обозначения сохранены в том виде, в каком они используются в США (это относится к обозначению тригонометрических функций, логарифмов и т.д.). В русском переводе сделаны переобозначения, соответствующие принятым в нашей средней школе.

Задачи вариантов, отмеченные символом *, касаются тех разделов математики, которые входят в программу американских колледжей, но исключены в настоящее время из программы средней школы (в основном это задачи на комплексные числа и комбинаторику).

Как заметит читатель, приведенные в брошюре варианты значительно отличаются от вариантов вступительных экзаменов в ВУЗы нашей страны. Это отличие в основном заключается в значительно большем числе предлагаемых задач, хотя эти задачи существенно проще, нежели в наших вариантах. На решение задач каждого из четырех предлагаемых вариантов давалось три часа; количество баллов за каждую задачу приведено в вариантах, не полностью решенная задача или задача решенная даже с арифметической ошибкой не приносит никаких баллов — т.е. с точки зрения проверки американская система гораздо более "жесткая". Данная брошюра может оказаться полезной не только школьникам, но и студентам младших курсов ВУЗов.

ELEVENTH YEAR MATHEMATICS

Answer all questions. Each correct answer will receive 2 credits.

1. If a varies directly as b and $a = 1.2$ when $b = 1.5$, find a when $b = 20$.

2. Find the value of $\cos\varphi$ if $\sin\varphi = -2/3$ and $\tan\varphi$ is negative.

3. Write $\sin^3\varphi - \sin\varphi$ as an indicated product of three factors.

4. Solve for x in terms of a:
   $2x + 3y + a = 0$
   $3x + 3y - 4a = 0$

5. What is the negative value of $\tan x$ which satisfies the equation $2\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0$?

6. Express $\dfrac{\frac{a}{a+b}}{1 - \frac{b}{a+b}}$ in simplest form.

7. Find the number of inches in the length of an arc intercepted by a central angle of 3.2 radians in a circle of radius 5.0 inches.

8. If $\log x = 9.8239 - 10$, find x.

9. Solve for x: $5^{x-2} = 25$.

10. The first three terms of an arithmetic progression are -9, -5 and -1. Write the 20th term.

11. Find $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

12. In triangle ABC, side $b = 4$, side $c = 6$ and angle $B = 30°$. Find the value of $\sin C$.

13. Write an equation of the line whose slope is 3 and which passes through the point $(3, 4)$.

14. In triangle ABC, $a = 10$ and $b = 20$. If the area of the triangle is 100, find the number of degrees in angle C.

15. In ΔABC, $a = 3$, $b = 2$, $\cos C = -1/4$. Find c.

16. Express $\tan(-230°)$ as a function of a positive acute angle.

17. Find the positive geometric mean between $12a$ and $48a$.

18*. Express the sum of $\sqrt{-8}$ and $2\sqrt{-12}$ as a monomial in terms of the imaginary unit i.

Directions (19–30): Write the *number* preceding the expression that best completes *each* statement or answers *each* question.

19. Between $x = 0°$ and $x = 360°$, the graphs of the equations $y = \sin x$ and $y = \cos x$ have in common

(1) one point (3) no points
(2) two points (4) four points

20. Which is an example of an identity?

(1) $\tan x \cot x = 1$ (3) $\sin x \cos x = 1$
(2) $\sin x \sec x = 1$ (4) $\sec x \csc x = 1$

21. If $\cos\varphi = 1/8$, then positive value of $\cos\frac{\varphi}{2}$ is

(1) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{9}{16}$
(2) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (4) $\frac{3}{4}$

22. The expression $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ is equivalent to

(1) -1 (3) $2+\sqrt{3}$
(2) 2 (4) $5+\sqrt{3}$

23. The graph of the equation $2xy = 7$ will lie in quadrant(s)

(1) I only (3) I and III
(2) I and II (4) II and IV

24. In whicn computation is the distributive law of multiplication with respect to addition used?

(1) $5(6)(2) = 5(2)(6) = (10)(6) = 60$
(2) $83(7) + 83(93) = 83(7 + 93) = 83(100) = 8300$
(3) $\sqrt{3600} = (\sqrt{36}) \cdot (\sqrt{100}) = (6)(10) = 60$
(4) $(5 + 8) + 2 = 5 + (8 + 2) = 5 + (10) = 15$

25. If the perimeter of a rectangle is x and the length is y, the area expressed in terms of x and y is

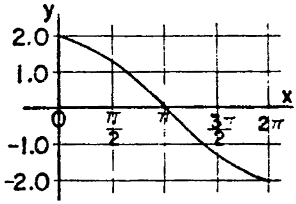
(1) $\frac{x(x-2y)}{2}$ (3) $\frac{x(x-y)}{2}$
(2) $\frac{xy}{2}$ (4) $\frac{y(x-2y)}{2}$

26. If $2^{3.6123} = x$, the mantissa of $\log_2 x$ is

(1) .6123 (3) 3
(2) 2 (4) 3.6123

27. The $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ is equal to

(1) $\frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$
(2) $\frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$
(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$
(4) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$



28. The accompanying graph is a sketch of

(1) $y = \cos\frac{1}{2}x$ (3) $y = 2\cos\frac{1}{2}x$
(2) $y = \frac{1}{2}\cos x$ (4) $y = 2\cos 2x$

29. In ΔABC, $A = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Express in radians, A equals

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{2\pi}{3}$ (3) $\frac{4\pi}{3}$ (4) $\frac{5\pi}{6}$

30*. Given the equation $ax^2 + bx + c = 0$. If $b^2 < 4ac$, then the roots of the equation must be

(1) real and irrational (3) equal
(2) real and rational (4) imaginary

Answer the next questions.

31. a. In the following equation, solve for $\sin x$ to the *nearest tenth*:

$$4\sin^2 x = 2 + \sin x$$

b. How many values of x between $0°$ and $360°$ satisfy the equation

$$4\sin^2 x = 2 + \sin x?$$

32. a. Solve the following set of equations algebraically and check in both equations:

$$2y^2 = x^2 - 1$$
$$x - 2y = 7$$

b. (After the letter *b* on your answer paper, write the *number* of the expression which correctly completes the statement.) The graph defined by the equation $2y^2 = x^2 - 1$ is (1) a parabola, (2) a circle, (3) an ellipse, (4) a hyperbola.

33. Write an equation or a system of equations which can be used to solve *each* of the following problems. In *each* case state the variable for variables represent. (*Solution of the equations is not required.*)

a. A pet shop bought a litter of puppies for \$80. All except three were sold, and the total received from the sale was also \$80. If each puppy was sold for \$6 more than was paid it, how many puppies were there in the litter?

b. A certain solution of salt and water was 15% salt. When 30 pounds of water was evaporated from this solution, it became a 20% salt solution. Find the total number of pounds in the original solution.

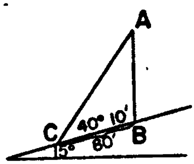
34. Answer *both a* and *b*:

a. Starting with the formula for $cos(x+y)$, derive the formula for $\cos 2x$ in terms of $\sin x$.

b. Show that the following equality is a an identity:

$$\frac{\sin 2\varphi}{\tan\varphi} = \frac{2}{1+\tan^2\varphi}$$

35. A vertical transmitting tower AB, as shown, is located on a slope that is inclined 15° to the horizontal. At a point C, 80 feet down the slope from the foot of the tower, the tower subtends an angle of 40° 10′. Find to the *nearest* foot the height of the tower.



TWELFTH YEAR MATHEMATICS

ADVANCED ALGEBRA

Part I.

Answer all questions in this part. Each correct answer will receive $2\frac{1}{2}$ credits.

1. Find the rational root of $x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$.

2. Between what two consecutive integers does the real root of $x^3 + 2x + 7 = 0$ lie?

3. A particle moves according to the formula $s = 6t^2 - 3t + 11$ (where s represents distance and t - time). Find the instantaneous velocity when $t = 3$.

4. If the point whose coordinates are $(a, -3)$ lies on the line joining the points whose coordinates are $(-5, -8)$ and $(7, 2)$, find the numerical value of a.

5. Solve for all values of x:

$$\sqrt{3x + 10} = x + 4$$

6. Find the remainder when $x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 2x + 4$ is divided by $x - 10$.

7. Solve for x: $\frac{x}{2} < \frac{3x}{4} + 1$

8. If a varies directly as b and inversely as positive square root of c, and if $a = 6$ when $b = 5$ and $c = 4$, find a when $b = 4$ and $c = 9$.

9. Write an equation of the line which has a slope of $-\frac{2}{3}$ and passes through the point whose coordinates are $(-6, 8)$.

10. Find the tenth term of the geometric progression $1, 2^{1/3}, 4^{1/3}, \ldots$

11. Express in radical form the radius of the circle whose equation is $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 8 = 0$.

12*. Solve the equation for the positive value of n: ${}_nC_2 = 78$

13*. Express the product of $\frac{2}{1+i}$ and $\frac{3-i}{1-i}$ in the form $a + bi$.

14*. Express in the rectangular form $a+bi$, the product of $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ and $4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$.

15*. Write the coordinates of the point of inflection of the graph of $y = 2x^3 + 6x^2 - 7$.

16*. A class of 10 students meets in a room which has 5 seats in the front row. Because of a hearing difficulty, one of the students must sit in the middle seat in the front row. If all of the front row seats are always used, how many different seating arrangements are possible for the front row?

17*. Ed and Fred were asked independently to write down one of the three numbers 1, 2 or 3. What is the probability that the sum of the two numbers selected is exactly 4?

18*. Express the complex number $\frac{1+i}{1-i}$ in the polar form.

Indicate the correct completion for *each* of the following by writing the number 1, 2, 3, 4.

19. How many are common solutions of the equation $x^2 + 2y^2 = 36$ and $5x - y = 4$.

(1) one only (3) exactly three
(2) exactly two (4) none

20. The equation $y = e^x$ is equivalent to

(1) $x = e^y$ (3) $x = \log_e y$
(2) $y = \log_e x$ (4) $x = \log_y e$

21. If p and q are integers, which can *not* be a root of $6x^3 + px^2 + qx + 4 = 0$?

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

22. If $f(x) = x^2 - 2x$, then $f(x+2) - f(2)$ is equivalent to

(1) $f(x+2)$ (3) $x^2 + 2x + 8$
(2) $f(x)$ (4) $x^2 + 2x - 8$

23. The graph of $\left(\frac{1}{2}\right)^x = y$ lies only in

(1) quadrant I (3) quadrant I and II
(2) quadrant II (4) quadrant I and IV

24*. If $a \neq 0$ the graph of the sum of the complex number $a + bi$ and its conjugate lies

(1) in the first quadrant

(2) in the second quadrant

(3) on the axis of reals

(4) on the axis of imaginaries

Part II

Answer sixteen questions from this part, 25–48. Each correct answer will receive $2\frac{1}{2}$ credits.

25. Express as a single fraction in simpliest form:

$$1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1} - 1}$$

26. Find to the *nearest tenth* the value of $\log_2 10$.

27. Find the slope of the straight line which is tangent to the curve $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ at the point whose abscissa is -1.

28. Solve for x: $2^{4x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}$

29. Find the roots of the equation $(x-1)(x+3) = 5(x-1)$.

30. Write an equation of the straight line whose x-intercept is 3 and whose y-intercept is -2.

31. Solve for the positive value of x:

$$\log 15 - \log x = \log(2x - 7)$$

32. A boy riding a bicycle at the rate of 10 miles per hour and a car traveling 40 miles per hour are traveling in the same direction on a road. If the car passes a signpost 30 minutes after the boy does, in how many minutes will the car overtake the bicycle?

33. The first three terms of an arithmetic progression are 1, $2\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{3}$. The last term is 53. Find the number of terms.

34. If x men are each paid p dollars a week and y men are each paid q dollars a week, express the average weekly salary of these men.

35. Find the average rate of change with respect to x of the function defined by $y = x^3 - 2x + 3$ as x varies from $x = 1$ to $x = 3$.

36. The product of the roots of the equation $(k-1)x^3 + kx^2 + (k+2)x - 12 = 0$ is 3. Find the value of k.

37. Find the maximum value of k for which the roots of $x^2 - 8x + k = 0$ are real.

38. The parabola defined by $y = x^2 + bx + c$ crosses the x-axis at $(1, 0)$. The equation of the axis of symmetry is $x = -2$. Find the value of c.

39*. If one of the roots of the equation $x^3 - 3x + 52 = 0$ is $2 + 3i$, find the real root.

40*. Write in *simplest* form the fourth term only of the expansion of $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^6$.

41*. Express the complex number $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ in polar form.

42*. Solve the equation $\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & x \end{vmatrix} = 1.$

Directions (43-48): *For each of those chosen*, write the *number* preceding the expression that best completes the statement.

43. If the coordinates of two points are $A(2, 5)$ and $B(-4, 3)$, an equation of the perpendicular bisector of AB is

(1) $3x - y + 7 = 0$

(2) $3x + y - 1 = 0$

(3) $x - 3y + 13 = 0$

(4) $x - 3y - 11 = 0$

44. The values of x which satisfy the inequality $3x^2 + 5y - 2 > 0$ are those that satisfy

(1) $-2 < x < \frac{1}{3}$ (3) $x > \frac{1}{3}$ or $x < -2$
(2) $-\frac{1}{3} < x < 2$ (4) $x > 2$ or $x < -\frac{1}{3}$

45. If $x \neq 1$, the ratio $\frac{\log_3 x^3}{\log_3 x^2}$ is

(1) x (2) $\log_3 x$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

46. The distance between the points whose coordinates are $A(\sqrt{5}, \sqrt{3})$ and $B(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$ is

(1) $\sqrt{15}$ (3) $\sqrt{68}$
(2) 16 (4) 4

47*. The *smallest* positive value of n for which $[5(\cos 30° + i \sin 30°)]^n$ is a real negative number is

(1) 12 (3) 3
(2) 2 (4) 6

48*. The graph of $r = 2\sin\theta$ in polar coordinates is a

(1) straight line whose y-intercept in rectangular coordinates is 2

(2) spiral passing through the origin

(3) circle passing through the origin

(4) circle having its center at the origin.

TWELFTH YEAR MATHEMATICS

SOLID GEOMETRY

Part I

Answer all questions in this part. Each correct answer will receive 2 credits.

1. The perimeter of the base of a regular pyramid is 9 and its slant height is 4. Find the lateral area of the pyramid.

2. Find the volume of a regular square pyramid with a base edge of 6 and slant height of 5.

3. Find the length of a diagonal of a rectangular solid whose dimensions are 15, 10 and 6.

4. A point lies within a dihedral angle of 54° and is equally distant from each fase of the angle. If the point is 20 inches from the edge of the angle, find to the nearest tenth of an inch the distance from the point to a fase of the angle.

5. The lateral area of a cone of revolution is $16\pi\sqrt{10}$ and the slant height is $4\sqrt{10}$. Find the radius of the base.

6. Find in terms of π the volume of a sphere inscribed in a cube whose diagonal is $4\sqrt{3}$.

7. An equilatreal triangle whose side is 6 is rotated through 180° about its altitude as an axis. In terms of π and a radical, find the volume of the resulting solid.

8. The area of the base of a pyramid is 48 square inches and the altitude is 12 inches. Find the number of square inches in the area of a section parallel to the base and 3 inches from it.

9. In ΔABC, with a right angle at C, $AC = 6$ and $CB = 8$. ED is drawn perpendicular to the plane of triangle ABC at the midpoint D of AB. If ED is 12, what is the length of AE?

10. The base edges and the lateral edges of a regular hexagonal prism are each 4. Find in radical form the volume of the prism.

11. A line segment AB which is $6\sqrt{2}$ inches long makes an angle of 45° with plane . Find the number of inches in the projection of AB on plane P.

12. What fractional part of the area of a sphere is covered by a trirectangular sherical triangle?

13. Corresponding edges of two singular solids are 3 and 5. If the volume of the smaller solid is 81, find the volume of the larger.

14. The base diameter of a cylindrical tank is 8 feet and its height is 20 feet. Express in terms of π the number of cubic feet of water the tank will contain when filled to one-fourth of its depth.

15. The lateral area of frustrum of a cone of revolution is 78π square inches. Its slant height is 6 inches and the radius of one base is 8 inches. Find the number of inches in the radius of the other base.

Directions (16-23): Write the *number* preceding the expression that best complets *each* statement or answers *each* question.

16. A property of any two great circles of a sphere is that they
    (1) are parallel
    (2) bisect each other
    (3) have the same pole
    (4) are perpendicular to each other

17. The locus of points that are a given distance d from plane M and also $\frac{3}{2}d$ from point P on M is
    (1) one point (3) two points
    (2) one circle (4) two circles

18. The lateral surface area of a regular hexagonal pyramid is twice the area of the base. The slant height expressed in terms of a base edge, e, is
    (1) $\frac{\sqrt{3}}{e}$ (3) $e\sqrt{3}$
    (2) $\frac{e}{2}\sqrt{3}$ (4) $2e\sqrt{3}$

19. At least one of the lateral faces of a truncated prism must be a
    (1) trapesoid (3) pentagon
    (3) triangle (4) hexagon

20. If a regular polyhedron has 8 vertices and 12 edges, it is
    (1) an octahedron (3) a tetrahedron
    (4) a dodecahedron (4) a hexahedron

21. If an edge of a regular tetrahedron is 6, the length of its altitude is

(1) $4\sqrt{3}$ (3) $2\sqrt{6}$
(2) $\sqrt{33}$ (4) $4\sqrt{2}$

22. If lines m and n are both perpendicular to line l, then

(1) m and n always determine a plane perpendicular to l

(2) m is always parallel to n

(3) m is never parallel to n

(4) m and n may be skew lines

23. The locus of points equidistant from the faces of a trihedral angle is

(1) one point (3) one line
(2) two points (4) one plane

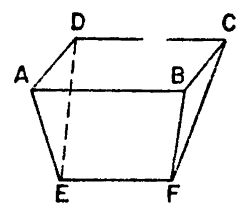
Part II

Answer five questions from this part.

24. Prove: If a line is perpendicular to each of two intersecting lines at their point of intersection, it is perpendicular to the plane of the two lines.

25. In a square pyramid, $VABCD$, Q and R are the midpoints of VC and VD, respectively. A plane through Q and R intersects VB in S and VA in T. Prove that ST is parallel to AB.

26. The accompanying figure represents a wedge. $ABCD$ is a rectangle and EF is a line segment parallel to AB. Find, to the *nearest cubic foot*, the volume of the wedge if $AB = 3$ feet, $AD = 1\frac{1}{2}$ feet, $EF = 2\frac{1}{2}$ feet and the distance from EF to the plane of $ABCD$ is $1\frac{1}{4}$ feet.



27. Line l is perpendicular to plane m at point P.

a. Describe fully the locus of points which are
(1) a given distance d from m
(2) a given distance r from l
(3) a given distance s from P

b. (1) Name the locus of points satisfying both conditions in part **a**(1) and part **a**(2).

(2) Name the locus of points satisfying both conditions in part **a**(1) and part **a**(3) if s is greater than d.

(3) Name the locus of points satisfying both conditions in part **a**(1) and part **a**(3) if $s = d$.

28. **The slant height of a regular triangle pyramid is m and the angle it makes with the base is θ.**

a. **Show that the volume of the pyramid is equal to**

$$m^3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta.$$

b. **Find the volume, to the *nearest integer*, when m is 4 and θ is 60°.**

29. **Answer:**

(1) Find the distance from the origin to the point (2, 2, 1).

(2) Write an equation of the sphere whose center is the origin and which passes through the point (2, 2, 1).

(3) Is the point (0, 3, 0) on the sphere described in (2)? Answer yes or no.

(4) Write an equation of the plane through point (2, 2, 1) parallel to the XZ plane.

(5) Write the coordinates of the midpoint of the line segment joining (2, 2, 1) and (0, 3, 0).

(6) Write an equation of the plane through (0, 3, 0), (1, 0, 0) and (0, 0, −2).

EXAMINATION IN EXPERIMENTAL TWELFTH YEAR MATHEMATICS

Part I

Answer twenty-five of the twenty-nine questions in this part. Each correct answer will receive 2 credits.

Directions **(1-10): For *each question chosen*, write the *numeral* preceding the expression that best completes the statement or answers the question.**

1. Which is the negation of the statement "All persons are selfish"?

   (1) All persons are unselfish
   (2) Some persons are unselfish
   (3) Some persons are selfish
   (4) No persons is selfish
   (5) No person is unselfish

2. Whicr is the negation of the statement "Vitamin A is essential or experiment 15 is not conclusive"?

   (1) Vitamin A is not essential.
   (2) Experiment 15 is conclusive
   (3) Vitamin A is not essential and experiment 15 is conclusive
   (4) Vitamin A is not essential or experiment 15 is conclusive
   (5) Vitamin A is not essential or experiment 15 is not conclusive

3. In a multiple-choice test, five statements are given and labelled a, b, c, d, e. If at least two statements are tautilogies, which answer to the following question *must* be true?

   "Which of the statements a, b, c, d, e are tautologies?"

   (1) a, b, c, d, and e (3) b, c, and e, only
   (2) a, c, and e, only (4) c, d, and e, only
   (5) c and e, only

4. If A is a set containing n elements, how many subsets does the cartesian product $A \times A$ have?

(1) 2^{2n} (2) $2^{(n^2)}$ (3) n^2 (4) $2n$ (5) n

5. Let f be the function defined for real x as follows:

$f(x) = 1$ for x irrational

$f(x) = 0$ for x rational

Then the composite function $f(f(x))$ is the function whose value at x is

(1) 1 for all x

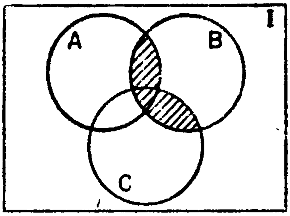
(2) 1 if x is irrational
0 if x is rational

(3) 0 if x is irrational
1 if x is rational

(4) 0 if x is rational
2 if x is irrational

(5) 0 for all x

6. In the Venn diagram, A, B, and C are subsets of I. The shaded area is represented by



(1) $A \bigcap (B \bigcup C)$

(2) $A \bigcup (B \bigcap C)$

(3) $B \bigcap (A \bigcup C)$

(4) $B \bigcup (A \bigcap C)$

(5) $C \bigcap (A \bigcup B)$

7. For the function $y = f(x)$, which is defined and continuous over the closed interval $[a, b]$, the average rate of change of y with respect to x over the interval $[a, b]$ is given by

(1) $f(x)$ evaluated at a

(2) $f'(x)$ evaluated at $\frac{a+b}{2}$

(3) $\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$ evaluated at $x = a$

(4) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(5) $f''(x)$ evaluated at a

8. Let A represent the set of all zeros of polynomials with integer coefficients and let B represent the set of all zeros of polynomial with rationa coefficients. Which statement is true?

   (1) $A \bigcup B$ equals the set of all real numbers.

   (2) $A \bigcup B$ equals the set of all complex numbers.

   (3) A is proper subset of B.

   (4) B is proper subset of A.

   (5) $A = B$.

9. If the numbers a and b are defined by $a = 1.23451313$ and $b = 1.234513\overline{13}\ldots$, then

   (1) a is rational, b is irrational

   (2) a is irrational, b is rational

   (3) a and b are rational, and $\frac{a}{b}$ is irrational

   (4) there exists a polynomial equation with integer coefficients having a for a root, but no such equation exists having b for a root

   (5) a, b, $a+b$, $a-b$, ab, and $\frac{a}{b}$ are all rational

10. The area of the right triangle of largest area which can be inscribed in a circle of radius 1 is

    (1) 1 (2) 2 (3) $\sqrt{2}$ (4) π (5) $\pi\sqrt{2}$

11. Solve for n: $3n^2 - 7n < 3 + 3(n-1)^2$

12. Evaluate exactly: $\log_{125}(.04)$

13. The function $g(x)$ is defined as follows:

$$g(x) = \frac{2x^3+2}{x+1} \quad \text{for real} \quad x, \qquad x \neq -1, \quad \text{and} \quad g(-1) = c.$$

    If $g(x)$ is known to be continuous function for all real x, then what is the value of c?

14. Find: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{10^6x^6 + 10^5x^5 + 10^4x^4}{10^7x^7 + 10^6x^6 + 10^5x^5}$

15. The linear motion of a particle is given by its positon s, in feet, at time t, in seconds, and obeys the exact functional relation expressed by the equation $\dot{s} = t^4 - 3t^2 + 2$. Find in feet per second the acceleration of the particle at time $t = 2$.

16. Find an equation of the curve each of whose points satisfies the condition that its distance from $(3,4)$ is equal to its distance from the line $x = -2$.

17. Find the positive abscissa of a point on the graph of $y = \frac{4}{3}x^3$ where the tangent line to the graph has an inclination of $45°$.

18. What is the remainder free of x when $x^{24} - 5x^{21} + 3x^5 + 6$ is divided by $x + 1$?

19. The height of a right circular cone is h and the radius of its base is r. The cone is to be cut into two solids of equal volume by a plane parallel to the base. Find the altitude of the cutoff piece, which is a cone.

20. A right prism of altitude 6 has regular hexagonal bases, each of whose sides is 4. Find the length of the longest diagonal connecting a lower base vertex with an upper base vertex.

21. Find: $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$ $(x \neq 1)$.

22*. The lowest possible degree of a polynomial equation with real coefficients whose solution set has, as a subset, the set $\{1, i, 2+i, 2-i\}$ is

(1) 7 (2) 8 (3) 3 (4) 4 (5) 5

23*. Let the ordered pair (a, b), a and b rational, represent the complex number $a + bi$. This set of numbers, together with the usual complex number operations $+$ and $\times$, constitutes a field. Find the value of h if (g, h) is the multiplicative inverse of $(1, 2)$.

24*. Find in degrees the smallest positive amplitude m for which $[2(\cos m + i \sin m)]^{10}$ is a real number.

25*. The digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, and 7 are to be used to form 4-digit numbers, so that each number contains one digit 1. How many different numbers can be formed?

26*. When a coin was tossed 10 times, five heads and five tails were attained. What is a probability that all heads have turned up during the first five tosses?

27*. Two different tests are distributed among 12 students. How many ways are there of seating of the students in two rows so that the students sitting side by side don't have indentical tests and those sitting in the same column the same tests?

28*. The third term in the expansion of $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^m$ does not contain x. For which x's is that term equal to the second term in the expansion of $\left(1 + x^3\right)^{30}$?

29*. Find $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3}$

Part II

Answer five questions from this part

30. Find all the roots of the equation

$$5x^4 + 13x^3 + 9x^2 + 4x - 4 = 0.$$

31. Graph the six roots of the equation $x^6 - 64 = 0$, and write one of the nonreal roots in polar form and in rectangular form.

32. Find the number of cubic units in the volume of the pyramid formed by coordinate planes and the plane $60x + 36y + 45z = 180$.

33. Prove by matematical induction that, for all positive integers n, the expression $5^{2n} - 1$ is divisible by 12.

34. Directly from the definition of a derivative, find the derivative of the function $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

35. Consider the function $y = x + \frac{1}{x}$, defined on x real and $x \neq 0$.

   a. Find any maximum or minimum points of the function. State which are maximum and which are minimum.

   b. In what regions is the function increasing? In what regions is it decreasing?

   c. Sketch the function on a set of coordinate axes, using the information obtained in parts a and b.

ОДИННАДЦАТИЛЕТНИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Ответьте на все вопросы. Каждый правильный ответ оценивается в 2 балла.

1. Найдите значение a при $b = 20$, если a меняется прямо пропорционально b и $a = 1.2$ при $b = 1.5$,
2. Найдите значение $\cos\varphi$ если $\sin\varphi = -2/3$ а $\operatorname{tg}\varphi$ отрицателен.
3. Запишите $\sin^3\varphi - \sin\varphi$ как произведение трех сомножителей.
4. Найдите значение x через a из системы:

   $2x + 3y + a = 0$
   $3x + 3y - 4a = 0$
5. Чему равно отрицательное значение $\operatorname{tg} x$, удовлетворяющее уравнению $2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$?
6. Выразите дробь $\dfrac{\frac{a}{a+b}}{1 - \frac{b}{a+b}}$ в простейшей форме.
7. Найдите в дюймах длину дуги, стягивающую центральный угол в 3.2 радиана в круге радиуса 5 дюймов.
8. Найдите x, если $\log x = 9.8239 - 10$.
9. Решите уравнение: $5^{x-2} = 25$.
10. Даны первые три члена геометрической прогрессии: $a_1 = -9$, $a_2 = -5$ и $a_3 = -1$. Найдите двадцатый член.
11. Найдите сумму $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$
12. В треугольнике ABC сторона $b = 4$, сторона $c = 6$ и угол $B = 30°$. Найдите значение $\sin C$.
13. Напишите уравнение линии с угловым коэффициентом, равным 3 и проходящую через точку с координатами $(3; 4)$.
14. В треугольнике ABC $a = 10$, $b = 20$. Площадь треугольника равна 100. Найдите угол C в градусах.

15. В ΔABC, $a = 3$, $b = 2$, $\cos C = -1/4$. Найдите сторону c.

16. Выразите $\operatorname{tg}(-230^\circ)$ как функцию положительного острого угла.

17. Найдите положительное среднее геометрическое между числами $12a$ и $48a$.

18*. Выразите сумму $\sqrt{-8}$ и $2\sqrt{-12}$ в виде одночлена с использованием мнимой единицы i.

В задачах 19–30 в качестве ответа напишите номера, предшествующие выражению наиболее отвечающему утверждению или ответу на каждый вопрос.

19. Между значениями $x = 0^\circ$ и $x = 360^\circ$, графики уравнений $y = \sin x$ и $y = \cos x$ имеют:

(1) одну общую точку (3) не имеют общих точек
(2) две общие точки (4) четыре общие точки

20. Какой из примеров является тождеством?

(1) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$ (3) $\sin x \cos x = 1$
(2) $\sin x \sec x = 1$ (4) $\sec x \operatorname{cosec} x = 1$

21. Если $\cos\varphi = 1/8$, то положительным значением $\cos\frac{\varphi}{2}$ является

(1) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{9}{16}$
(2) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (4) $\frac{3}{4}$

22. Выражение $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ равно

(1) -1 (3) $2+\sqrt{3}$
(2) 2 (4) $5+\sqrt{3}$

23. График функции, задаваемый уравнением $2xy = 7$ будет лежать в:

(1) I четверти (3) I и III четвертях
(2) I и II четвертях (4) II и IV четвертях

24. В каком из следующих вычислений используется дистрибутивный закон умножения относительно сложения?

(1) $5 \cdot 6 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 6 = 10 \cdot 6 = 60$
(2) $83 \cdot 7 + 83 \cdot 93 = 83(7 + 93) = 83 \cdot 100 = 8300$
(3) $\sqrt{3600} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60$
(4) $(5 + 8) + 2 = 5 + (8 + 2) = 5 + 10 = 15$

25. Если периметр прямоугольника равен x, а длина стороны равна y, то его площадь выражается через x и y по формуле

(1) $\frac{x(x-2y)}{2}$ (3) $\frac{x(x-y)}{2}$

(2) $\frac{xy}{2}$ (3) $\frac{y(x-2y)}{2}$

26. Если $2^{3.6123} = x$, то мантисса $\log_2 x$ равна

(1) 0.6123 (3) 3

(2) 2 (4) 3.6123

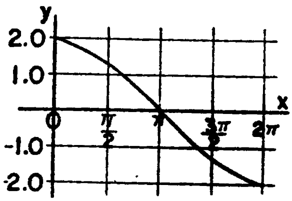
27. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ равен

(1) $\frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$

(2) $\frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

(4) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$



28. Приведенный график изображает

(1) $y = \cos\frac{1}{2}x$ (3) $y = 2\cos\frac{1}{2}x$

(2) $y = \frac{1}{2}\cos x$ (4) $y = 2\cos 2x$

29. В ΔABC, $A = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Выраженный в радианах, угол A равен

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{2\pi}{3}$ (3) $\frac{4\pi}{3}$ (4) $\frac{5\pi}{6}$

30*. Дано уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Если $b^2 < 4ac$, то корни уравнения

(1) действительные и иррациональные

(2) действительные и рациональные

(3) равны

(4) комплексные

Ответьте на следующие вопросы.

31. a. Найдите значение $\sin x$, удовлетворяющее уравнению

$$4\sin^2 x = 2 + \sin x$$

с точностью до 1/10.

b. Сколько значений x между 0° и 360° удовлетворяет уравнению

$$4\sin^2 x = 2 + \sin x?$$

32. a. Решите алгебраически систему уравнений

$$2y^2 = x^2 - 1$$
$$x - 2y = 7$$

и сделайте проверку.

b. (После буквы *b* в Вашем письменном ответе, напишите номер выражения, которое представляет собой полностью корректное утверждение). График, определенный уравнением $2y^2 = x^2 - 1$ является (1) — параболой, (2) — кругом, (3) — эллипсом, (4) — гиперболой.

33. Напишите уравнение или систему уравнений, которые могут быть использованы для решения каждой их следующих задач. В каждом случае укажите, что представляют собой введенные переменные.

a. Магазин купил выводок щенков за 80 долларов. Все щенки, за исключением трех, были проданы и общий доход от продажи составил также 80 долларов. Каждого щенка продавали на 6 долларов дороже, чем покупали. Сколько щенков было продано в выводке?

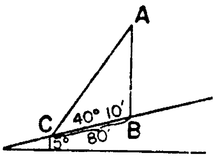
b. Имелся 15% раствор соли в воде. После того, как 30 фунтов воды испарилось, концентрация раствора стала равна 20%. Сколько фунтов воды было первоначально в растворе?

34. a. Начиная с формулы для $cos(x + y)$, выведите формулу для $\cos 2x$ через $\sin x$.

b. Докажите тождество

$$\frac{\sin 2\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$$

35. Вертикальная башня AB, как показано на рисунке, находится на плоскости, наклоненной под углом 15° к горизонтали. Из точки C, находящейся в 80 футах ниже на наклонной плоскости, башня видна под углом 40° 10′. Найдите с точностью до фута высоту башни.



ДВЕНАДЦАТИЛЕТНИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Алгебра

Часть I

Ответьте на все вопросы этой части. Каждый правильный ответ дает $2\frac{1}{2}$ балла.

1. Найти рациональный корень уравнения

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 6 = 0.$$

2. Между какими двумя последовательными целыми числами лежит действительный корень уравнения

$$x^3 + 2x + 7 = 0?$$

3. Частица движется согласно формуле $s = 6t^2 - 3t + 11$, (где s — расстояние, t — время). Найдите мгновенное значение скорости при $t = 3$.

4. Точка с координатами $(a; -3)$ лежит на прямой, проходящей через точки с координатами $(-5; -8)$ и $(7; 2)$. Найдите численное значение a.

5. Решите уравнение: $\sqrt{3x + 10} = x + 4$

6. Найдите остаток от деления многочлена

$$x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 2x + 4$$

на $x - 10$.

7. Решите неравенство: $\frac{x}{2} < \frac{3x}{4} + 1$

8. Величина a меняется порпорционально b и обратно пропорционально квадратному корню из c. Найдите значение a при $b = 4$ и $c = 9$, если $a = 6$ при $b = 5$ и $c = 4$.

9. Напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом $-\frac{2}{3}$ и проходящую через точку с координатами $(-6; 8)$.

10. Найдите десятый член геометрической прогрессии: 1, $2^{1/3}$, $4^{1/3}$, ...

11. Выразите в канонической форме радиус круга, задаваемого уравнением $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 8 = 0$.

12*. Решите уравнение $C_n^2 = 78$ относительно положительных значений n.

13*. Выразите произведение $\frac{2}{1+i}$ и $\frac{3-i}{1-i}$ в виде $a + bi$.

14*. Выразите произведение $2(\cos 30° + i \sin 30°)$ и $4(\cos 60° + i \sin 60°)$ в виде $a + bi$.

15*. Найдите координаты точки перегиба графика функции

$$y = 2x^3 + 6x^2 - 7.$$

16*. Группа из 10 студентов встретилась в аудитории, имеющей 5 мест в первом ряду. Так как один из студентов плохо слышит, он должен сесть на среднее место первого ряда. Если все места из первого ряда всегда занимаются, сколько различных способов расположения студентов в первом ряду?

17*. Эда и Фреда попросили написать независимо друг от друга одно из трех чисел: 1, 2 или 3. Какова вероятность того, что сумма выбранных чисел равна 4.

18*. Выразите комплексное число $\frac{1+i}{1-i}$ в тригонометрической форме.

В задачах 19–24 выберите правильный ответ, следующий за одним из номеров 1, 2, 3, 4.

19. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 36 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$$

(1) только одно (3) ровно три
(2) ровно два (4) не имеет решений

20. Уравнение $y = e^x$ эквивалентно

(1) $x = e^y$ (3) $x = \ln y$
(2) $y = \ln x$ (4) $x = \log_y e$

21. Если p и q — целые, каким не может быть корень уравнения $6x^3 + px^2 + qx + 4 = 0$?

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

22. Пусть $f(x) = x^2 - 2x$, тогда $f(x+2) - f(2)$ эквивалентно

(1) $f(x+2)$ (3) $x^2 + 2x + 8$
(2) $f(x)$ (4) $x^2 + 2x - 8$

23. График функции $\left(\frac{1}{2}\right)^x = y$ лежит в

(1) первой четверти

(2) второй четверти

(3) первой и второй четверти

(4) первой и четвертой четверти

24*. Если $a \neq 0$, сумма комплексного числа $a+bi$ и его сопряженного лежит

(1) в первой четверти

(2) во второй четверти

(3) на действительной оси

(4) на мнимой оси.

Часть II

Ответьте на шестнадцать вопросов этой части (номера 25–48). Каждый правильный ответ оценивается в $2\frac{1}{2}$ балла.

25. Выразите $1 + \dfrac{1}{\frac{1}{x-1} - 1}$ в виде одной простейшей дроби.

26. Найдите с точностью до 0.1 значение $\log_2 10$.

27. Найдите коэффициент наклона прямой линии касательной к кривой $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ в точке с абсциссой (-1).

28. Решите относительно x уравнение: $2^{4x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}$

29. Найдите корни уравнения $(x-1)(x+3) = 5(x-1)$.

30. Напишите уравнение прямой линии, которая пересекает ось Ox в точке 3 и ось Oy в точке (-2).

31. Решить для положительных значений x:

$$\lg 15 - \lg x = \lg(2x - 7)$$

32. Мальчик едет на велосипеде со скоростью 10 миль в час, а машина едет со скоростью 40 миль в час в том же направлении. Если машина проезжает дорожный знак через 30 минут после мальчика, то сколько нужно времени автомобилю, чтобы догнать велосипедиста?

33. Числа 1, $2\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{3}$ являются первыми тремя членами арифметической прогрессии. Последний член равен 53. Найти число членов прогрессии.

34. Какова средняя зарплата, если x человек получают p долларов в неделю, а y человек получают q долларов в неделю.

35. Найдите среднюю скорость изменения функции

$$y = x^3 - 2x + 3,$$

если x меняется от 1 до 3.

36. Произведение корней уравнения

$$(k-1)x^3 + kx^2 + (k+2)x - 12 = 0$$

равно 3. Найдите значение k.

37. Найдите максимальное значение k, для которого корни уравнения $x^2 - 8x + k = 0$ действительны.

38. Парабола $y = x^2 + bx + c$ пересекает ось Ox в точке $(1;0)$. Осью симметрии является прямая $x = -2$. Найдите значение c.

39*. Найти действительный корень уравнения

$$x^3 - 3x + 52 = 0,$$

если известно, что $2 + 3i$ является его корнем.

40*. Запишите в простейшей форме только четвертый член разложения $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^6$.

41*. Выразите комплексное число $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ в тригонометрической форме.

42*. Решите уравнение $\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & x \end{vmatrix} = 1.$

Указания к (43–48): Для каждого номера напишите число, предшествующее выражению, которое наилучшим образом отвечает сделанному утверждению.

43. Уравнение прямой, перпендикулярной прямой, проходящей через точки $A(2;5)$ и $B(-4;3)$:

(1) $3x - y + 7 = 0$

(2) $3x + y - 1 = 0$

(3) $x - 3y + 13 = 0$

(4) $x - 3y - 11 = 0$

44. Значениями x, удовлетворяющими неравенству $3x^2 + 5y - 2 > 0$ являются

(1) $-2 < x < \frac{1}{3}$ (3) $x > \frac{1}{3}$ и $x < -2$
(2) $-\frac{1}{3} < x < 2$ (4) $x > 2$ и $x < -\frac{1}{3}$

45. При $x \neq 1$, отношение $\frac{\log_3 x^3}{\log_3 x^2}$ равно

(1) x (2) $\log_3 x$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

46. Расстояние между точками A и B с координатами $A(\sqrt{5};\sqrt{3})$ и $B(\sqrt{3};-\sqrt{5})$ равно

(1) $\sqrt{15}$ (3) $\sqrt{68}$
(2) 16 (4) 4

47*. Наименьшее положительное значение n, для которого $[5(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)]^n$ является действительным отрицательным числом, равно

(1) 12 (3) 3
(2) 2 (4) 6

48*. График функции $r = 2\sin\theta$ в полярной системе координат представляет собой:

(1) прямую, пересекающую ось Oy декартовой системы координат в точке 2.

(2) спираль, проходящую через начало координат

(3) окружность, проходящую через начало координат

(4) окружность с центром в начале координат.

ДВЕНАДЦАТИЛЕТНИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

ГЕОМЕТРИЯ

Часть I

Ответьте на все вопросы этой части. Каждый правильный ответ оценивается в $2\frac{1}{2}$ балла.

1. Периметр основания правильной пирамиды равен 9, а апофема равна 4. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 6 и апофемой равной 5.

3. Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда с измерениями 15, 10 и 6.

4. Точка находится внутри двугранного угла в $54°$ на равном расстоянии от его граней. Если расстояние от точки до ребра угла равно 20 дюймам, найдите расстояние от точки до грани с точностью до 0.1 дюйма.

5. Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса равна $16\pi\sqrt{10}$, а образующая равна $4\sqrt{10}$. Найти радиус основания.

6. Найдите объем шара, вписанного в куб с диагональю $4\sqrt{3}$.

7. Равносторонний треугольник со стороной, равной 6 поворачивается на $180°$ вокруг оси, проходящей через высоту. Найдите объем получившегося тела.

8. Площадь основания пирамиды — 48 квадратных дюймов, а высота — 12 дюймов. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию и находящейся от него на расстоянии 3 дюймов.

9. В треугольнике ABC с прямым углом C, $AC = 6$ и $BC = 8$. ED — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC в точке D — середине AB. Если $ED = 12$,то чему равно AE?.

10. Ребра основания и боковые ребра правильной шестиугольной призмы равны 4. Найдите через радикалы объем призмы.

11. Отрезок AB длиной $6\sqrt{2}$ дюйма составляет угол в $45°$ с плоскостью P. Найдите длину проекции отрезка на плоскость P.

12. Какая часть площади сферы может быть покрыта сферическим треугольником с тремя прямыми углами?

13. Соответствующие ребра двух подобных тел равны 3 и 5. Найдите объем большого тела, если объем меньшего равен 81.

14. Диаметр основания цилиндрического бака равен 8 футам, а его высота 20 футам. Выразите через π число кубических футов воды в баке, если он заполнен на одну четвертую своей высоты.

15. Площадь боковой поверхности усеченного прямого кругового конуса равна 78π квадратным дюймам. Длина его образующей равна 6 дюймам, а радиус одного из оснований равен 8 дюймам. Найти радиус второго основания.

Указания к (16–23): напишите номер,предшествующий выражению, отвечающему наиболее полно каждому утверждению или ответу на каждый вопрос.

16. Свойство двух любых окружностей большого круга сферы состоит в том, что они

    (1) параллельны

    (2) делят пополам друг друга

    (3) имеют один и тот же полюс

    (4) перпендикулярны друг другу.

17. Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии d от плоскости M и на расстоянии $\frac{3}{2}d$ от точки P, принадлежащей плоскости M будет:

    (1) одна точка (3) две точки
    (2) одна окружность (4) две окружности

18. Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды равна удвоенной площади основания. Апофема, выраженная через длину ребра основания e, равна

    (1) $\frac{\sqrt{3}}{e}$ (3) $e\sqrt{3}$
    (2) $\frac{e}{2}\sqrt{3}$ (4) $2e\sqrt{3}$

19. По крайней мере одна боковая грань усеченной. призмы должна быть

(1) трапецией (3) пятиугольником
(3) треугольником (4) шестиугольником

20. Если правильный многогранник имеет 8 вершин и 12 ребер, то это

(1) октаэдр (3) тетраэдр
(4) додекаэдр (4) гексаэдр

21. Если ребро правильного тетраэдра равно 6, то его высота равна

(1) $4\sqrt{3}$ (3) $2\sqrt{6}$
(2) $\sqrt{33}$ (4) $4\sqrt{2}$

22. Если линии m и n обе перпендикулярны к линии l, то

(1) m и n всегда определяют плоскость, перпендикулярную к l

(2) m всегда параллельна n

(3) m никогда не параллельна n

(4) m и n могут быть скрещивающимися линиями.

23. Геометрическое место точек, равноудаленных от граней трехгранного угла, будет

(1) одна точка (3) одна прямая
(2) две точки (4) одна плоскость

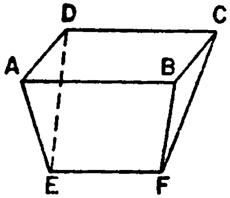
Часть II

Ответьте на пять вопросов из этой части.

24. Докажите утверждение: Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых в точке их пересечения, то она перпендикулярна к плоскости, содержащей эти прямые.

25. В четырехугольной пирамиде, $VABCD$, в основании лежит квадрат $ABCD$. Q и R — середины ребер VC и VD соответственно. Плоскость, проходящая через точки Q и R пересекает ребра VB и VA в точках S и T соответственно. Докажите, что ST параллельна AB.

26. Изображенная на рисунке фигура представляет собой клин. $ABCD$ — прямоугольник, а EF — отрезок прямой, параллельный AB. Используя формулу призматоида, найдите, с точностью до кубического фута, объем клина, если $AB = 3$ футам, $AD = \frac{3}{2}$ фута, $EF = \frac{5}{2}$ фута и расстояние от EF до плоскости $ABCD$ равно $\frac{5}{4}$ фута. (В курсе математики средней школы формула призматоида не дается. Однако эта задача может быть решена и без знания этой формулы.)



27. Прямая l перпендикулярна плоскости m в точке P.

   a. Опишите полностью геометрическое место точек, которые находятся:

   (1) на данном расстоянии d от m

   (2) на данном расстоянии r от l

   (3) на данном расстоянии s от P

   b. (1) Определите геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям **a**(1) и **a**(2).

   (2) Определите геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям **a**(1) и **a**(3), если s больше чем d.

   (3) Определите геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям **a**(1) и **a**(3), если $s = d$.

28. Апофема правильной треугольной пирамиды равна m и наклонена под углом θ к плоскости основания.

   a. Покажите, что объем пирамиды равен

$$m^3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta.$$

   b. Найдите объем с точностью до 1, в случае когда $m = 4$ и $\theta = 60°$.

29. (1) Найдите расстояние от начала координат до точки $(2, 2, 1)$.

   (2) Напишите уравнение сферы с центром в начале координат и проходящую через точку $(2; 2; 1)$

   (3) Находится ли точка $(0; 3; 0)$ на сфере, описанной в (2)? Ответ *да* или *нет*

   (4) Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $(2; 2; 1)$ и параллельной плоскости Oxz.

(5) Напишите координаты средней точки отрезка с концами $(2; 2; 1)$ и $(0; 3; 0)$

(6) Напишите уравнение плоскости, проходяшей через точки с координатами $(0; 3; 0)$, $(1; 0; 0)$ и $(0; 0; -2)$

ЭКЗАМЕН ПО ДВЕНАДЦАТИЛЕТНЕМУ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Часть I

Ответьте на двадцать пять из двадцати девяти вопросов этой части. Каждый правильный ответ оценивается в 2 балла.

1. Что является отрицанием утверждения "Все люди эгоисты"?

   (1) Все люди не эгоисты

   (2) некоторые люди не эгоисты

   (3) некоторые люди эгоисты

   (4) нет эгоистичного человека

   (5) нет неэгоистичного человека

2. Что является отрицанием утверждения:

   "Витамин А является существенным или экперимент 15 является незавершенным".

   (1) Витамин А не является существенным

   (2) Эксперимент 15 является завершенным

   (3) Витамин А не является существенным и эксперимент 15 является завершенным

   (4) Витамин А не является существенным или эксперимент 15 является завершенным

   (5) Витамин А не является существенным или эксперимент 15 является незавершенным

3. В многовариантном тесте даны пять утверждений, обозначенных буквами a, b, c, d, e. Если по крайней мере два утверждения являются тавтологией, какой ответ на следующий вопрос заведомо является истинным? "Какие из утверждений a, b, c, d, e являются тавтологией?"

   (1) a, b, c, d и e (3) b, c, и e, только
   (2) a, c, и e, только (4) c, d, и e, только
   (5) c и e, только

4. Множество A содержит n элементов. Сколько подмножеств имеет декартово произведение множества A на себя?

(1) 2^{2n} (2) $2^{(n^2)}$ (3) n^2 (4) $2n$ (5) n

5. Пусть функция f для действительных x определена правилом

$f(x) = 1$ при иррациональных x

$f(x) = 0$ при рациональных x

Тогда сложная функция $f(f(x))$ является функцией со следующим множеством значений

(1) 1 для всех x

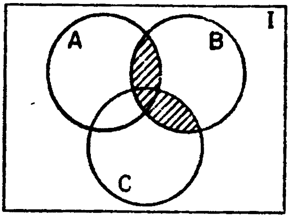
(2) 1 для x иррациональных
0 для x рациональных

(3) 0 для x иррациональных
1 для x рациональных

(4) 0 для x рациональных
2 для x иррациональных

(5) 0 для всех x

6. В диаграмме Венна A, B и C являются подмножествами I. Заштрихованная площадь представляет собой:



(1) $A \bigcap (B \bigcup C)$

(2) $A \bigcup (B \bigcap C)$

(3) $B \bigcap (A \bigcup C)$

(4) $B \bigcup (A \bigcap C)$

(5) $C \bigcap (A \bigcup B)$

7. Пусть функции $y = f(x)$ определена и непрерывна на закрытом промежутке $[a, b]$. Средняя скорость изменения y относительно x на промежутке $[a,b]$ задается:

(1) $f'(x)$ вычисленной в точке a

(2) $f'(x)$ вычисленной в точке $\frac{a+b}{2}$

(3) $\left[\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$ вычисленным в точке $x = a$

(4) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(5) $f''(x)$ вычисленной в точке a

8. Пусть A представляет множество всех нулей полиномов с целыми коэффициентами, B — множество всех нулей полиномов с рациональными коэффициентами. Какое из следующих утверждений справедливо?

(1) $A \bigcup B$ эквивалентно множеству всех действительных чисел

(2) $A \bigcup B$ эквивалентно множеству всех комплексных чисел

(3) A является собственным подмножеством B.

(4) B является собственным подмножеством A.

(5) $A = B$.

9. Числа a и b определены равенством $a = 1.23451313$ and $b = 1.234513(13)\ldots$, тогда

(1) a рационально, b иррационально

(2) a иррационально, b рационально

(3) a и b рациональны, и $\frac{a}{b}$ иррационально

(4) существует многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корнем число a, но нет такого уравнения, имеющего корнем число b

(5) a, b, $a+b$, $a-b$, ab, и $\frac{a}{b}$ — все рациональны

10. Площадь прямоугольного треугольника наибольшей площади, который можно вписать в круг радиуса 1, равна

(1) 1 (2) 2 (3) $\sqrt{2}$ (4) π (5) $\pi\sqrt{2}$

11. Решите относительно n: $3n^2 - 7n < 3 + 3(n-1)^2$

12. Вычислите $\log_{125}(0.04)$

13. Функция $g(x)$ определена следующим образом: $g(x) = \frac{2x^2+2}{x+1}$ для действительных x, $x \neq -1$, и $g(-1) = c$. Чему должно быть равно c, если известно, что $g(x)$ — непрерывная функция для всех действительных x.

14. Найдите предел: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10^6x^6 + 10^5x^5 + 10^4x^4}{10^7x^7 + 10^6x^6 + 10^5x^5}$

15. Линейное движение частицы задается ее положением s (в футах), временем t (в секундах) и подчиняется функциональной связи, задаваемой уравнением:

$$s = t^4 - 3t^2 + 2.$$

Найдите в фут./с^2 ускорение частицы в момент времени $t = 2$.

16. Найдите уравнение кривой, удовлетворяющей условию: расстояние от каждой точки кривой до точки $(3;4)$ равно расстоянию до линии $x = -2$.

17. Найдите точку с положительной абсциссой, принадлежашую графику функции $y = \frac{4}{3}x^3$, в которой касательная к графику функции наклонена под углом 45°.

18. Каков остаток от деления многочлена

$$x^{24} - 5x^{21} + 3x^5 + 6$$

на $x + 1$?

19. Высота прямого кругового конуса равна h, а радиус основания r. Конус рассечен плоскостью, параллельной основанию, на две равновеликие части. Найти высоту той отсеченной части, которая является конусом.

20. Прямая призма с высотой равной 6 имеет в основании правильный шестиугольник, сторона которого равна 4. Найти длину наибольшей диагонали, соединяющей вершину нижнего основания с вершиной верхнего основания.

21. Найти $x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n \quad (x \neq 1)$.

22*. Наименьшая положительная степень полиномиального уравнения с действительными коэффициентами,множество решений которого в качестве подмножества имеет числа $\{1, i, 2+i, 2-i\}$ будет равна

(1) 7 (2) 8 (3) 3 (4) 4 (5) 5

23*. Пусть упорядоченная пара $a; b$, где a и b рациональны, представляет комплексное число $a + ib$. Это множество чисел, вместе с обычными для множества комплексных чисел операциями сложения и умножения, образуют поле. Найдите значение h, если $(g; h)$ является мультипликативным обратным элементом к $(1; 2)$.

24*. Найдите наименьшее положительное m, для которого $[2(\cos m + i \sin m)]^{10}$ является действительным числом.

25*. Сколько всевозможных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7 ,чтобы в каждом числе содержалась одна цифра 1?

26*. Известно,что при десятикратном бросании монеты пять раз выпали орлы и пять раз — решки. Какова вероятность того,что все орлы выпали при первых пяти бросаниях?

27*. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда так, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов,а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант ?

28*. Третье слагаемое разложения $(2x + 1/x^2)^m$ не содержит x. При каких x это слагаемое равно второму слагаемому разложения $(1 + x^3)^{30}$?

29*. Найти $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^{1/2} - 2}{(x+5)^{1/2} - 3}$

Часть II

Ответьте на пять вопросов этой части.

30. Найдите все корни уравнения

$$5x^4 + 13x^3 + 9x^2 + 4x - 4 = 0.$$

31. Изобразите шесть корней уравнения $x^6 - 64 = 0$, и запишите один из мнимых корней в тригонометрической и алгебраической форме.

32. Найдите число кубических единиц в объеме пирамиды, образованной координатными плоскостями и плоскостью

$$60x + 36y + 45z = 180.$$

33*. Докажите методом индукции, что для всех положительных целых n выражение $5^{2n} - 1$ делится на 12.

34. Непосредственно из определения производной найдите производную функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

35. Рассмотрим функцию $y = x + \frac{1}{x}$, определенную при всех действительных $x \neq 0$.

a. Найдите точки максимума и минимума функции

b. В каких областях функция убывает? В каких областях функция возрастает?

c. Нарисуйте график функции на координатной плоскости, используя информацию, полученную в пунктах **a** и **b**.

ОТВЕТЫ

ОДИННАДЦАТИЛЕТНИЙ КУРС

1. 16; **2.** $\sqrt{5}/3$; **3.** $(-1)\cos^2\theta\sin\theta$; **4.** $x = 5a$; **5.** $-1/2$; **6.** 1; **7.** 16; **8.** $(0.1)^{0.1761}$; **9.** $x = 4$; **10.** 67; **11.** 4; **12.** 3/4; **13.** $z = 3x - 5$; **14.** 90°; **15.** $c = 4$; **16.** $-\operatorname{ctg} 40°$; **17.** $24|a|$; **18*.** $2(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})i$; **19.** (2); **20.** (1); **21.** (4); **22.** (3); **23.** (3); **24.** (2); **25.** (4); **26.** (1); **27.** (3); **28.** (3); **29.** (4); **30*.** (4); **31. a.** 0.8 и -0.6 **b.** 4; **32.** $\{3,-2\}$, $\{-17,-12\}$; **33. a.** $nx = 80$, $(n-3)(x+6) = 80$, где n — число щенков, x — стоимость одного щенка. $m/M = 0.15$, $m/(M-30) = 0.2$, где m — масса соли в растворе, M — начальная масса раствора. **35.** 73.0.

ДВЕНАДЦАТИЛЕТНИЙ КУРС

Алгебра

1. 2; **2.** -1 и -2; **3.** 33; **4.** 1; **5.** -3 и -2; **6.** 147924; **7.** $x > -4$; **8.** 16/5; **9.** $y = -\frac{2}{3}x + 4$; **10.** 8; **11.** $3\sqrt{2}$; **12*.** 13; **13*.** $3 - i$; **14*.** $8i$; **15*.** $(-1,-3)$; **16*.** 3024; **17*.** 1/3; **18*.** $\cos 90° + i\sin 90°$; **19.** (2); **20.** (3); **21.** (4); **22.** (1); **23.** (3); **24*.** (3); **25.** $1/(2-x)$; **26.** 3.3; **27.** 10; **28.** -1; **29.** 1 и 2; **30.** $y = (2/3)x - 2$; **31.** 5; **32.** 10; **33.** 40; **34.** $(px+qy)/(x+y)$; **35.** 11; **36.** 5; **37.** 16; **38.** -5; **39*.** -4; **40*.** $-5x^3/2$; **41*.** $\cos 120° + i\sin 120°$; **42*.** 1; **43.** (2); **44.** (3); **45.** (4); **46.** (4); **47*.** (4); **48*.** (3);

Геометрия

1. 18; **2.** 48; **3.** 19; **4.** 9.1; **5.** 4; **6.** $32\pi/3$; **7.** $9\pi\sqrt{3}$; **8.** 27; **9.** 13; **10.** $96\sqrt{3}$; **11.** 3; **12.** 1/8; **13.** 375; **14.** 80π ; **15.** 5; **16.** (2); **17.** (4); **18.** (3); **19.** (1); **20.** (4); **21.** (3); **22.** (4); **23.** (3); **26.** 3; **27. a.** (1) - две плоскости, параллельные плоскости m, находящиеся на расстоянии d от нее. (2) — цилиндрическая поверхность с осью l и радиусом r, (3) — сфера радиуса s с центром в точке P; **b.** (1) — две окружности, полученные в результате пересечения цилиндрической поверхности радиуса r и осью l и плоскостей, параллельных плоскости m, (2) — две окружности, полученные в результате пересечения сферы радиуса s и плоскостей, параллельных плоскости m, находящихся на расстоянии d от плоскости m. (3) — две точки, находящиеся на линии l на расстоянии s от плоскости m.

28. 24; **29.** (1) 3, (2) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, (3) да, (4) $y = 2$, (5) $(1; \frac{5}{2}; \frac{1}{2})$, (6) $6x + 2y - 3z - 6 = 0$.

ДВЕНАДЦАТИЛЕТНИЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ КУРС

1. (2); **2.** (3); **3.** (1); **4.** (2); **5.** (5); **6.** (3); **7.** (4); **8.** (5); **9.** (5); **10.** (1); **11.** $n > -6$; **12.** $-2/3$; **13.** $c = 6$; **14.** 0; **15.** 42; **16.** $(y-4)^2 - 10x + 5 = 0$; **17.** $x = 1/2$; **18.** 9; **19.** $h/\sqrt[3]{2}$; **20.** 10; **21.** $x(1-x^n)/(1-x)^2 - nx^{n+1}/(1-x)$; **22*.** (5); **23*.** $h = -2/5$; **24*.** 18°; **25*.** 1225; **26*.** $(5!\,5!)/10!$; **27*.** $2(6!)^2$; **28*.** 2; **29*.** 3/2; **30.** $\{-2; \frac{2}{5}; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$; **31.** $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}), 1 + i\sqrt{3}$; **32.** 10; **35.** $f_{\max} = -2$ при $x = -1$, $f_{\min} = 2$ при $x = 1$, функция возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и убывает при $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Пробный тираж — 4000.
Отпечатано в типографии
общества «Тровант».
142092, г.Троицк Московской
области, В-39.