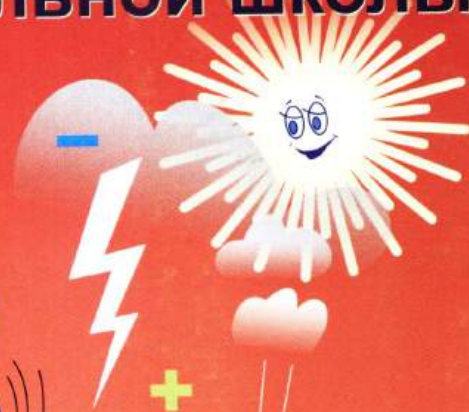


И.М.Гельфгат
Л.Э.Генденштейн
Л.А.Кирик

10-11
классы

РЕШЕНИЕ КЛЮЧЕВЫХ ЗАДАЧ по ФИЗИКЕ для профильной школы



ИЛЕКСА

И.М. Гельфгат, Л.Э. Генденштейн, Л.А. Кирик

РЕШЕНИЕ КЛЮЧЕВЫХ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

*для профильной школы
10-11 классы*

Москва
ИЛЕКСА
2021

УДК 372.8:53
ББК 22.3я721
Г32

Гельфгат И.М., Генденштейн Л.Э., Кирик Л.А.

Г32 Решение ключевых задач по физике для профильной школы.
10–11 классы. — М.: ИЛЕКСА, 2021. — 288 с.
ISBN 978-5-89237-252-7

Эта книга, предназначенная для учащихся 10–11 классов, носит обучающий характер. В ней тщательно отобраны ключевые задачи по курсу физики основной школы, к которым даны подробные решения. В частности, в книге приведены решения к олимпиадным задачам, что позволяет использовать ее для работы в кружках и при подготовке к олимпиадам.

УДК 372.8:53
ББК 22.3я721

ISBN 978-5-89237-252-7

© Гельфгат И.М.,
Генденштейн Л.Э.,
Кирик Л.А., 2008
© ООО «Илекса», 2008

ТЕМ, КТО ХОЧЕТ НАУЧИТЬСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Ньютон писал, что примеры при обучении полезнее правил. В справедливости этих слов убеждается каждый, кому приходится учить или учиться. Поэтому самый эффективный способ *научить* решать задачи — это просто показывать, как они решаются, а самый эффективный способ *научиться* решать задачи — это просто их решать!

Но что делать, если «просто решать» не получается? В таком случае советуем начать с изучения решений задач и разобраться на примерах, «как это делается». И пусть вас не смущает, что вы изучаете готовые решения, а не решаете сами: «аппетит приходит во время еды», и вам захочется попробовать свои силы. А желание решать задачи — это главное условие для их решения!

При изложении решений многих задач мы ставили целью пройти весь путь вместе с читателем: искали, с чего начать решение (часто это — самое трудное), подробно проводили расчеты, анализировали результаты, а также старались предостеречь от типичных ошибок.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
-------------------	---

МЕХАНИКА

Кинематика

1. Прямолинейное равномерное движение	6
2. Прямолинейное равноускоренное движение	16
3. Свободное падение. Движение тела, брошенного вертикально вверх.....	26
4. Равномерное движение по окружности	35

Динамика

5. Законы Ньютона	40
6. Сила упругости. Сила трения	44
7. Закон всемирного тяготения. Сила тяжести и вес тела.....	50
8. Применение законов динамики.....	57
9. Элементы статики	64

Законы сохранения в механике

10. Импульс. Закон сохранения импульса.....	73
11. Механическая работа. Энергия. Закон сохранения энергии	77

Механические колебания и волны

12. Механические колебания	88
13. Механические волны. Звук	97

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Молекулярная физика

14. Молекулярно-кинетическая теория	104
15. Уравнение состояния идеального газа	112
16. Газовые законы.....	118

Термодинамика

17. Законы термодинамики	126
18. Тепловые двигатели	134

ЖИДКОСТИ, ПАРЫ И ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

19. Свойства жидкостей	140
20. Насыщенные и ненасыщенные пары. Влажность воздуха	149

21. Свойства твердых тел	155
22. Изменения агрегатных состояний вещества	158

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Электрическое поле

23. Электрический заряд. Закон Кулона. Напряженность электрического поля	163
24. Потенциал электрического поля. Проводники и диэлектрики в электрическом поле	170
25. Электрическая емкость. Конденсатор. Энергия электрического поля	180

Постоянный электрический ток

26. Электрический ток. Закон Ома для участка цепи	188
27. Последовательное и параллельное соединение проводников	190
28. Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи	200
29. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.....	207
30. Электрический ток в металлах, жидкостях, газах и вакууме. Полупроводники	215

Магнитное поле

31. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции.....	220
32. Электромагнитная индукция	230

Электромагнитные колебания и волны

33. Свободные электромагнитные колебания. Переменный ток	241
34. Электромагнитное поле. Электромагнитные волны.....	245
35. Волновые свойства света	247
36. Цвет. Взаимодействие света с веществом	255
37. Геометрическая оптика	257
38. Элементы теории относительности	265

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

39. Световые кванты	271
40. Физика атома и атомного ядра	275
Приложения	281

КИНЕМАТИКА

1. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

- 1.1. Проплывая под мостом на моторной лодке, рыбак уронил шляпу. Через час он спохватился, повернул обратно и поймал шляпу на 4 км ниже моста по течению. Модуль скорости лодки относительно воды оставался неизменным. Какова скорость течения? В какой системе отсчета проще решать эту задачу?

☒ 4 км/ч.

Решение. Перейдем в систему отсчета, связанную с плывущей шляпой. В этой системе отсчета вода неподвижна, поэтому лодка удаляется от шляпы, а затем приближается к ней с одной и той же скоростью. Значит, с момента разворота до «поймки» шляпы лодка двигалась тоже полчаса. Таким образом, шляпа плыла по течению ровно один час. За это время она проплыла 4 км; следовательно, скорость течения реки 4 км/ч.

- 1.2. Чтобы проплыть на моторной лодке от пристани А к пристани В, требуется $t_1 = 1$ ч, а обратная дорога занимает $t_2 = 3$ ч. Скорость лодки относительно воды остается постоянной. Во сколько раз эта скорость больше скорости течения?

☒ В два раза.

Решение. Из условия задачи следует, что из А в В лодка плывет по течению (обратная дорога занимает больше времени). Обозначим s расстояние между пунктами А и В, модуль скорости лодки относительно воды v_d , а модуль

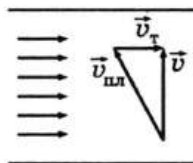
скорости течения v_{τ} . По течению лодка плывет со скоростью $v_{\lambda} + v_{\tau}$ относительно берега, а против течения — со скоростью $v_{\lambda} - v_{\tau}$. Следовательно, $t_1 = \frac{s}{v_{\lambda} + v_{\tau}}$, а $t_2 = \frac{s}{v_{\lambda} - v_{\tau}}$.

По условию, $t_2 = 3t_1$, откуда получаем $\frac{v_{\lambda} + v_{\tau}}{v_{\lambda} - v_{\tau}} = 3$. Из это-

го соотношения следует, что $v_{\lambda} = 2v_{\tau}$.

- 1.3. Мешает или помогает течение переплыть реку: а) за кратчайшее время? б) по кратчайшему пути? Считайте, что ширина реки и скорость течения всюду одинаковы.

Решение. Если держать курс под прямым углом к берегу (т. е. если скорость пловца *относительно воды* направлена перпендикулярно берегу), то пловца будет сносить вниз по течению. Поскольку течение не приближает пловца к противоположному берегу и не удаляет от него, кратчайшее время переправы не зависит от скорости течения. А вот для переправы по кратчайшему *пути* следует держать курс вверх по течению, чтобы скорость *относительно берега* $\vec{v} = \vec{v}_{\text{пл}} + \vec{v}_{\tau}$ была перпендикулярна берегу. Поскольку $v < v_{\text{пл}}$ (см. рисунок), течение *мешает* переплыть реку по кратчайшему пути. При $v_{\text{пл}} < v_{\tau}$ такая переправа невозможна.

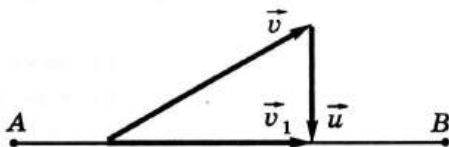


- 1.4. Пункты А и В находятся на расстоянии $s = 1080$ км друг от друга. Самолет летит из пункта А в пункт В и обратно со скоростью $v = 390$ км/ч относительно воздуха. Сколько времени понадобится на весь полет, если на трассе полета непрерывно дует сильный ветер со скоростью $u = 150$ км/ч? Рассмотрите два случая: а) ветер дует вдоль прямой АВ; б) ветер дует под прямым углом к прямой АВ.

☒ а) 6,5 ч; б) 6 ч.

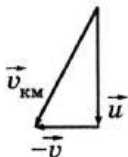
Решение. б) Скорость самолета $\vec{v}_1$ относительно Земли является векторной суммой скоростей $\vec{v}$ и $\vec{u}$ (см. рису-

нок). Согласно условию, скорость $\vec{v}_1$ должна быть направлена вдоль отрезка AB , а $\vec{u}$ — под прямым углом к этому отрезку. Скорость $\vec{v}$ должна быть направлена под углом к AB , чтобы компенсировать боковой снос. Модуль скорости $v_1 = \sqrt{v^2 - u^2}$ одинаков при движении туда и обратно, поэтому время всего полета составит $t = 2s/v_1 = 6$ (ч).



- 1.5. Капли дождя падают отвесно со скоростью u . а) Одно ведро стоит в кузове автомобиля, движущегося со скоростью v , а другое — у обочины дороги. В каком ведре окажется больше дождевой воды? Во сколько раз больше? б) По дороге катится мяч со скоростью v . Другой такой же мяч лежит неподвижно. На какой мяч попадает больше капель? Во сколько раз больше?

Решение. а) Количество капель, ежесекундно попадающих в ведро, зависит только от *вертикальной* составляющей скорости капель относительно ведра, а движение автомобиля изменяет только *горизонтальную* составляющую этой скорости. Поэтому количество дождевой воды в обоих ведрах будет одинаковым. б) Количество капель, ежесекундно попадающих на мяч, пропорционально модулю скорости $\vec{v}_{\text{км}}$ капель *относительно мяча* и не зависит от направления этой скорости (поскольку мяч круглый). Согласно правилу сложения скоростей $\vec{v}_{\text{км}} = \vec{u} - \vec{v}$, откуда (см. рисунок) $v_{\text{км}} = \sqrt{u^2 + v^2}$. Следовательно, на катящийся мяч попадет капель в $\sqrt{1 + v^2/u^2}$ раз больше.

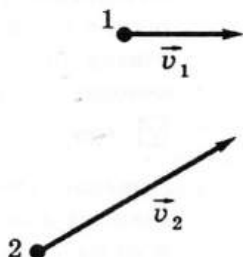


- 1.6. Пассажир поезда заметил, что две встречные электрички промчались мимо него с интервалом $t_1 = 6$ мин. С каким интервалом времени t_2 проехали эти электрички мимо станции, если поезд, на котором находится пассажир, ехал со скоростью $v_1 = 100$ км/ч, а скорость каждой из электричек $v_2 = 60$ км/ч?

☑ 16 мин.

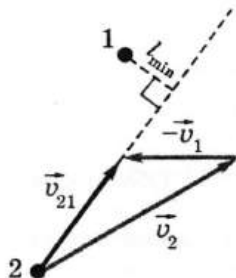
Решение. Задачу удобнее решать в системе отсчета, связанной с поездом. В этой системе отсчета скорость встречных электричек $v_{\text{отн}} = v_1 + v_2$. Так как электрички проходят мимо пассажира с интервалом времени t_1 , расстояние между ними $s = v_{\text{отн}} t_1 = (v_1 + v_2) t_1$. В системе же отсчета, связанной со станцией, $s = v_2 t_2$. Приравнивая эти выражения для s , получаем $t_2 = (v_1 + v_2) t_1 / v_2$. Подставляя числовые данные, находим $t_2 = 16$ мин.

- 1.7. На рисунке схематически изображены положения и скорости двух кораблей, плывущих по морю. Найдите с помощью графического построения, на каком минимальном расстоянии l_{min} друг от друга пройдут суда.



Решение. «Следить» одновременно за двумя движущимися кораблями трудно. Задача значительно упрощается, если перейти в систему отсчета, связанную с одним из кораблей. Тогда этот корабль «остановится», и достаточно будет определить, на каком расстоянии от этого «неподвижного» корабля пройдет другой.

Перейдем, например, в систему отсчета, связанную с кораблем 1. В этой системе отсчета корабль 1 покоится, а корабль 2 движется со скоростью $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. На рисунке показано, как с помощью графического построения найти $\vec{v}_{21}$ и l_{min} .



- 1.8. Эскалатор поднимает стоящего на нем человека за $t_1 = 1$ мин, а если человек идет вверх по остановившемуся эскалатору, на подъем уходит $t_2 = 3$ мин. Сколько времени понадобится на подъем, если человек будет идти вверх по движущемуся вверх эскалатору?

✓ 45 с.

Решение. Обозначим длину эскалатора s , его скорость v , скорость идущего человека относительно эскалатора u . Тогда $v = s/t_1$, $u = s/t_2$. Движение человека вверх по поднимающемуся эскалатору займет время $t_3 = \frac{s}{v+u} = \frac{s}{s/t_1 + s/t_2} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{3}{4}$ (мин) = 45 (с).

- 1.9. Человек идет по эскалатору. В первый раз он насчитал 50 ступенек, пробежав весь эскалатор. Во второй раз, двигаясь в ту же сторону со скоростью вдвое большей, он насчитал 75 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы на неподвижном эскалаторе?

✓ 100.

Решение. Обозначим число ступенек, приходящихся на единицу длины эскалатора, n/l . Время пребывания человека на эскалаторе в обоих случаях равно соответственно:

$$t_1 = \frac{l}{v_s + v_q} \text{ и } t_2 = \frac{l}{v_s + 3v_q}. \text{ Путь, пройденный человеком}$$

по эскалатору, $s_1 = v_q \cdot t_1$ и $s_2 = 3v_q \cdot t_2$. Человек насчитает в обоих случаях следующее число ступенек:

$$n_1 = s_1 \frac{n}{l} = \frac{v_q \cdot l}{v_s + v_q} \frac{n}{l} = \frac{v_q}{v_s + v_q} n;$$

$$n_2 = s_2 \frac{n}{l} = \frac{3v_q \cdot l}{v_s + 3v_q} \frac{n}{l} = \frac{3v_q}{v_s + 3v_q} n.$$

Обозначим $x = \frac{v_s}{v_q}$. Тогда получим систему двух уравнений для двух неизвестных (x и n):

$$n_1 = \frac{1}{x+1} n; \quad n_2 = \frac{3}{x+3} n.$$

Решая систему относительно n , получаем:

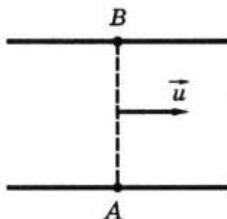
$$n = \frac{2n_1 n_2}{3n_1 - n_2} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 75}{3 \cdot 50 - 75} = 100.$$

- 1.10. У двух туристов один велосипед, на котором может ехать только один человек. Как туристам воспользоваться велосипедом, чтобы обоим прибыть на базу в кратчайший срок?

Решение. Туристы придут на базу одновременно и в кратчайший срок, если каждый из туристов полпути проедет на велосипеде и полпути пройдет пешком. Действительно, в любом другом случае одному из туристов придется идти пешком больше, чем полпути, вследствие чего он затратит на дорогу больше времени, чем если бы он шел только полпути.

Олимпиадные задачи

- О-1. На лодке переплывают реку, отправляясь из пункта А (см. рисунок). Скорость лодки в стоячей воде $v = 5$ м/с, скорость течения реки $u = 3$ м/с, ширина реки $s = 200$ м. а) В какой точке лодка пристанет к противоположному берегу, если держать курс перпендикулярно берегам? б) Какой курс следует держать, чтобы попасть в точку В? Для обоих случаев найдите время переправы.



Решение. а) Скорость лодки $\vec{v} + \vec{u}$ относительно берега будет направлена под углом к отрезку AB (см. рис. а). За время переправы лодку снесет вниз по течению на расстояние l , которое можно найти, пользуясь подобием треугольника скоростей и треугольника ABC : $l/s = u/v$, откуда $l = su/v = 120$ (м). Течение реки в этом случае вообще не влияет на время переправы: $t_1 = s/v = 40$ (с). б) Следует держать курс под углом, синус которого равен u/v (см. рис. б).

Время переправы в этом случае $t_2 = s/\sqrt{v^2 - u^2} = 50$ (с) (см. решение задачи 1.4). Заметим, что переправа при этом занимает больше времени, хотя и происходит по кратчайшему пути.

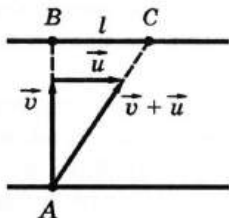


Рис. а

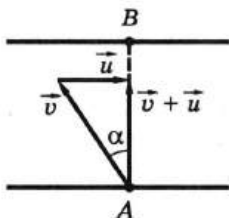
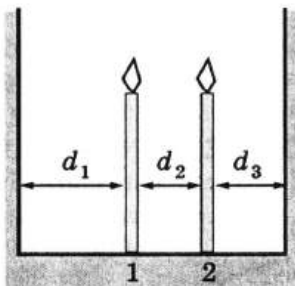
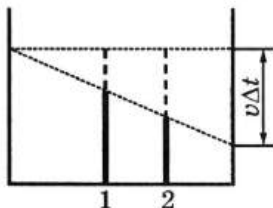


Рис. б

- 0-2. Две свечи одинаковой длины l зажгли одновременно и поставили на столе между двумя стенами, как показано на рисунке. При этом оказалось, что тень первой свечи (на левой стене) неподвижна, а тень второй свечи (на правой стене) укорачивается со скоростью v . Через какое время и какая свеча погаснет первой? Через какое время погаснет и другая свеча?



Решение. Пусть за время Δt длина первой свечи уменьшилась на Δh_1 , а второй — на Δh_2 . Тень на правой стене опустилась за это время на $v\Delta t$. Воспользуемся подобием трех треугольников (см. рисунок).



Из подобия следует: $\frac{\Delta h_1}{d_1} = \frac{\Delta h_2}{d_1 + d_2} = \frac{v \cdot \Delta t}{d_1 + d_2 + d_3}$. Отсюда

находим скорость укорачивания каждой из свечей:

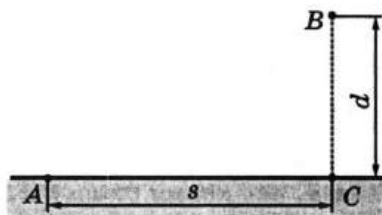
$$\frac{\Delta h_1}{\Delta t} = v \cdot \frac{d_1}{d_1 + d_2 + d_3}, \quad \frac{\Delta h_2}{\Delta t} = v \cdot \frac{d_1 + d_2}{d_1 + d_2 + d_3}. \quad \text{Время полного}$$

сгорания каждой из свечей: $t_1 = \frac{l \cdot \Delta t}{\Delta h_1} = \frac{l(d_1 + d_2 + d_3)}{v \cdot d_1},$

$$t_2 = \frac{l \cdot \Delta t}{\Delta h_2} = \frac{l(d_1 + d_2 + d_3)}{v \cdot (d_1 + d_2)}. \quad \text{Естественно, } t_2 < t_1 \text{ — первой}$$

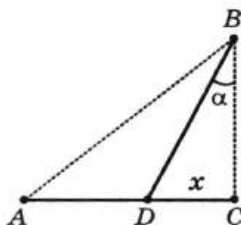
сгорит вторая свеча.

- О-3.** Человек находится на берегу озера в точке A и хочет в кратчайшее время попасть в точку B , находящуюся на озере (см. рисунок). Скорость движения человека в воде v_1 , а по берегу v_2 . По какой траектории следует двигаться человеку, если $v_2 > v_1$?



Решение. Из-за того, что скорость движения по берегу больше, чем в воде, движение по кратчайшему пути (по прямой AB) может не соответствовать кратчайшему времени: для сокращения времени надо войти в воду в точке D (см. рисунок ниже), сократив путь в воде за счет удлинения пути по берегу.

Найдем, при каком значении $DC = x$ (см. рисунок) время движения будет наименьшим.



$$\text{Это время } t = \frac{s - x}{v_2} + \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v_1} = \frac{v_1 s - v_1 x + v_2 \sqrt{d^2 + x^2}}{v_1 v_2}.$$

Наименьшее значение t соответствует наименьшему значению функции $y(x) = -v_1x + v_2\sqrt{d^2 + x^2}$ на промежутке от 0 до s . Эта функция имеет минимум при $x_0 = dv_1 / \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$

(это можно доказать, исследовав производную $y'(x)$).

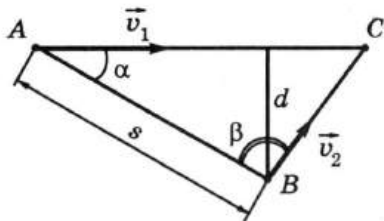
Следовательно, если $x_0 < s$, то надо двигаться по берегу до точки D , а потом плыть к B . Если же $x_0 \geq s$, то надо сразу войти в воду и плыть по прямой к B .

- О-4. По прямому шоссе движется автобус со скоростью $v_1 = 16$ м/с. Впереди по ходу автобуса в поле на расстоянии $d = 60$ м от шоссе и $s = 400$ м от автобуса находится человек, который может бежать со скоростью $v_2 = 4$ м/с. В каком направлении он должен бежать, чтобы успеть «перехватить» автобус? При какой наименьшей скорости человека $v_{2\min}$ это возможно? В каком направлении следует бежать с такой скоростью?

☑ $37^\circ < \beta < 143^\circ$ (см. рисунок); $v_{2\min} = 2,4$ м/с, $\beta = 90^\circ$.

Решение. Пусть автобус находится в точке A , а человек — в точке B . Найдем, под каким углом β к линии AB должен бежать человек, чтобы оказаться на шоссе в некоторой точке C до того, как там окажется автобус, или одновременно с ним. Время движения автобуса $t_1 = AC/v_1$, время движения человека $t_2 = BC/v_2 \leq t_1$. Отсюда $AC/BC \geq v_1/v_2$. Применяя теорему синусов к треугольнику ABC и учитывая, что $\sin \alpha = \frac{d}{s}$, получаем $\sin \beta \geq \frac{v_1 d}{v_2 s}$. Отсюда $37^\circ < \beta < 143^\circ$.

Человек может «перехватить» автобус при условии $\frac{v_1 d}{v_2 s} \leq 1$, откуда $v_{2\min} = v_1 d/s = 2,4$ (м/с). При такой скорости угол β равен 90° , т. е. человек должен бежать под прямым углом к направлению на автобус (а не к дороге!).



О-5. В часы наибольшей загруженности метрополитена на каждой из 120 ступенек одного из эскалаторов стоят по два пассажира. Навстречу им движется такая же лента эскалатора и на каждой ступеньке также стоят по два пассажира. Скорость движения обоих эскалаторов одинакова и равна 0,9 м/с. Расстояние между ребрами ступенек $l = 45$ см. Сколько пассажиров, поднимающихся вверх по эскалатору, пройдут мимо дежурного по станции? Сколько встречных пассажиров проезжают мимо человека, стоящего на эскалаторе, движущегося вниз?

☒ **240 и 480 пассажиров.**

Решение. Определим длину эскалатора: $s = 120l = 54$ (м).

Теперь вычислим, на какое расстояние переместится некоторая точка ленты эскалатора за 1 мин: $s_1 = vt = 54$ (м).

Итак, $s = s_1$, то есть мимо дежурного по станции пройдут пассажиры, стоящие на 120 ступеньках эскалатора: $n_1 = 240$ пассажиров. Во втором случае относительная скорость движения будет вдвое больше, и за 1 мин мимо пассажира, стоящего на эскалаторе, пройдет 240 ступенек встречного эскалатора, или $n_2 = 480$ пассажиров.

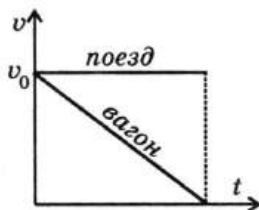
2. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ РАВНОУСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

- 2.1. От движущегося поезда отцепляют последний вагон, после чего поезд продолжает двигаться с неизменной скоростью, а скорость вагона уменьшается. Путь, пройденный вагоном от момента отцепления до остановки, равен 50 м. Какой путь прошел за это время поезд, если считать, что вагон двигался с постоянным ускорением?

☑ 100 м.

Решение. Пусть скорость поезда v_0 , время движения вагона t . Тогда поезд до остановки вагона пройдет путь $s_{\text{п}} = v_0 t$. Средняя скорость движения вагона за это время $v_{\text{ср}} = v_0/2$, поэтому пройденный вагоном путь вдвое меньше.

Этот результат становится очевидным, если построить график зависимости скорости от времени для поезда и вагона (см. рисунок) и учесть, что перемещение численно равно площади под графиком $v(t)$.



- 2.2. От толчка шарик вкатывается на наклонную плоскость. На расстоянии $l = 30$ см от начала движения шарик побывал дважды: через $t_1 = 1$ с и $t_2 = 2$ с после толчка. Считая движение равноускоренным, найдите начальную скорость v_0 и ускорение a .

☑ 45 см/с; 30 см/с².

Решение. Зависимость координаты шарика от времени выражается формулой $x = v_{0x}t - \frac{a_x t^2}{2}$. Отсюда получаем

квадратное уравнение $t^2 - \frac{2v_{0x}}{a_x}t + \frac{2x}{a_x} = 0$. Так как t_1 и

t_2 — корни этого уравнения при $x = l$, то согласно теореме Виета $t_1 + t_2 = \frac{2v_{0x}}{a_x}$ и $t_1 t_2 = \frac{2l}{a_x}$. Из полученной системы

уравнений находим:

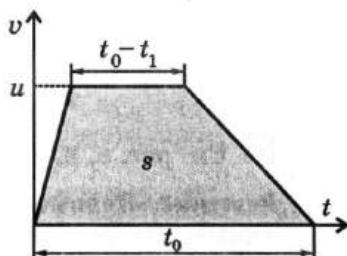
$$a_x = \frac{2l}{t_1 t_2} = 30 \text{ (см/с}^2\text{)}, \quad v_{0x} = \frac{(t_1 + t_2) \cdot a_x}{2} = 45 \text{ (см/с)}.$$

- 2.3. Поезд прошел расстояние $s = 17$ км между двумя станциями. При этом на разгон в начале движения и торможение перед остановкой ушло в общей сложности $t_1 = 4$ мин, а остальное время поезд двигался с постоянной скоростью. Чему равна эта скорость u , если средняя скорость поезда оказалась равной $v_{\text{ср}} = 60$ км/ч?

☑ 68 км/ч.

Решение. График $u(t)$ для движения поезда имеет вид, показанный на рисунке. Пройденный путь численно равен площади трапеции, т. е. $s =$

$$s = \frac{t_0 + (t_0 - t_1)}{2} \cdot u. \text{ Учитывая,}$$



что $t_0 = s/v_{\text{ср}}$, получаем $u = \frac{2sv_{\text{ср}}}{2s - v_{\text{ср}}t_1} = 68$ (км/ч).

- 2.4. По прямой из точки A начали двигаться одновременно в одном направлении два тела: первое равноускоренно с начальной скоростью 3 м/с и ускорением 2 м/с², второе — равномерно. В каких пределах должна изменяться скорость второго тела, чтобы оно сначала обогнало первое тело, но позже первое тело догнало второе на расстоянии, не большем 10 м от точки A ?

☑ 3 м/с $< v_2 < 5$ м/с.

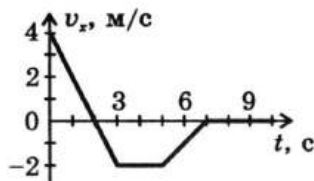
Решение. Уравнение движения для первого тела $x_1 = 3t + t^2$, для второго — $x_2 = v_2 t$. Моменту встречи тел соответствует $x_1 = x_2$, или $3t + t^2 = v_2 t$. Отсюда получаем: $t^2 + t(3 - v_2) = 0$. Решениями этого уравнения являются $t_1 = 0$ (это соответствует началу движения) и $t_2 = v_2 - 3$. Отсюда находим первый предел для скорости: $v > 3$.

Если $x_2 = 10$, то $t = \frac{10}{v_2}$ и $\frac{30}{v_2} + \frac{100}{v_2^2} = 10$, или $v_2^2 - 3v_2 - 10 = 0$.

Решая это уравнение, получаем: $v_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = 5$. Та-

ким образом, скорость второго тела должна изменяться в пределах 3 м/с $< v_2 < 5$ м/с.

- 2.5. На рисунке приведен график зависимости $v_x(t)$ для тела, движущегося вдоль оси x . Постройте графики зависимости от времени ускорения a_x , перемещения s_x и пройденного пути l .



☑ См. рис. а, б, в.

Решение. Первые 3 с движение происходило с постоянным ускорением $a_{1x} = -2 \text{ м/с}^2$, следующие 2 с — без ускорения и последние 2 с — с ускорением $a_{2x} = 1 \text{ м/с}^2$. После этого тело остается неподвижным. График $a_x(t)$ показан на рис. а. Перемещение тела в течение первых трех секунд определяется по формуле

$$s_x = v_{0x}t + a_{1x}t^2/2 = 4t - t^2$$

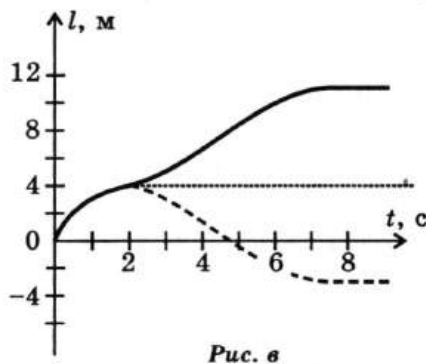
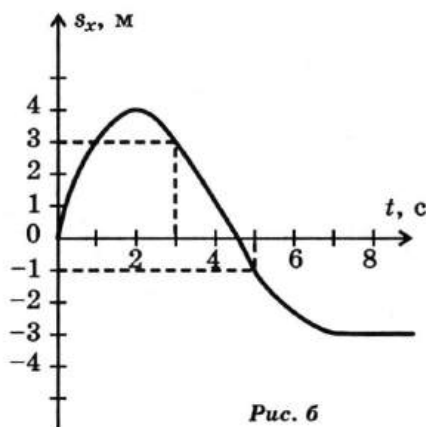
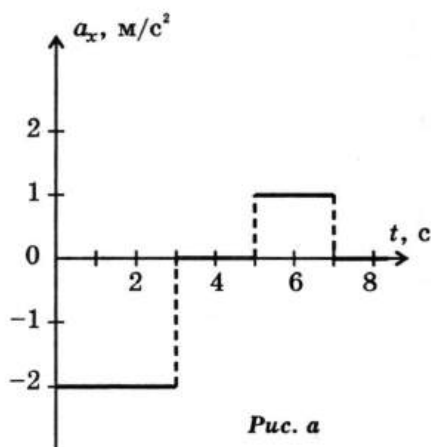
(здесь и далее числовые значения, входящие в формулы, приводятся без указания единиц измерения; все величины измеряются в единицах СИ). График $s_x(t)$ в этом интервале (см. рис. б) представляет собой параболу с вершиной при $t = 2 \text{ с}$ (в этот момент скорость тела равна нулю). Поскольку $s_x = 3 \text{ м}$ при $t = 3 \text{ с}$, в течение следующих двух секунд $s_x = 3 - 2(t - 3)$.

Величина $t - 3$ представляет собой время равномерного движения. Отсюда $s_x = 9 - 2t$; при $t = 5 \text{ с}$ (к моменту, когда равномерное движение заканчивается) находим $s_x = -1 \text{ м}$.

Аналогично для третьего этапа движения

$$s_x = -1 - 2(t - 5) + (t - 5)^2/2.$$

Отметим, что при $t = 3 \text{ с}$ и $t = 5 \text{ с}$ график $s_x(t)$ не испытывает изломов: различные его участки плавно переходят один в другой. Это обусловлено непрерывностью зависимости $v_x(t)$: мгновенных изменений скорости, т. е. изменений угла наклона касательной к графику $s_x(t)$, не происходит. Для получения графика $l(t)$ достаточно заметить, что путь увеличивается при любом изменении s_x . Поэтому убывающие участки графика $s_x(t)$ необходимо симметрично отразить вверх, сохраняя непрерывность графика (см. рис. в).



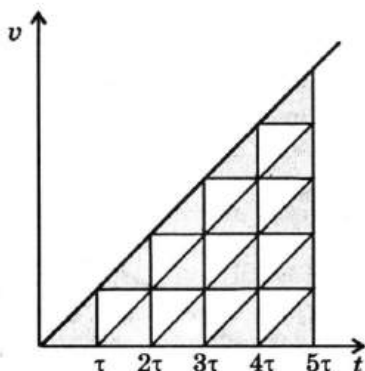
- 2.6. Докажите, что при прямолинейном равноускоренном движении без начальной скорости выполняется «закон нечетных чисел»: пути, проходимые телом за последовательные равные интервалы времени, относятся как последовательные нечетные числа: $l_1:l_2:\dots:l_n = 1:3:\dots:(2n-1)$. (Эта задача была впервые поставлена и решена Галилеем.)

Решение. Решим эту задачу сначала аналитически (с помощью формул), а затем приведем графическое решение, практически не требующее вычислений. Обозначим каждый из равных интервалов времени τ . Тогда путь l_n , пройденный телом за n -й интервал, равен разности путей, пройденных за время $n\tau$ и за время $(n-1)\tau$:

$$l_n = \frac{a(n\tau)^2}{2} - \frac{a((n-1)\tau)^2}{2} = \frac{a\tau^2}{2} (n^2 - (n-1)^2) = \frac{a\tau^2}{2} (2n-1).$$

Поскольку множитель $\frac{a\tau^2}{2}$ — постоянная величина, получаем $l_1:l_2:\dots:l_n = 1:3:\dots:(2n-1)$, что и требовалось доказать.

Теперь решим эту же задачу с помощью графика $v(t)$. Перемещение тела за интервал времени τ численно равно площади фигуры, ограниченной соответствующим участком графика и осями координат (см. рисунок).



Эти фигуры можно разбить на треугольники с площадью l_1 , причем каждая следующая фигура содержит на два треугольника больше предыдущей.

Поэтому $l_1:l_2:\dots:l_n = 1:3:\dots:(2n-1)$, что и требовалось доказать.

Олимпиадные задачи

- О-6. Тело движется равноускоренно без начальной скорости. За какой промежуток времени это тело пройдет пятый метр своего пути, если первый метр оно проходит за 2 с?

☑ 0,47 с.

Решение. Обозначим $l = 1$ м, a — ускорение тела. Тогда из формулы $s = \frac{at^2}{2}$ следует, что первый метр пути

тело проходит за время $t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a}}$, а n метров проходит

за время $t_n = \sqrt{\frac{2nl}{a}}$. Значит, n -й метр тело проходит за время

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= \sqrt{\frac{2nl}{a}} - \sqrt{\frac{2(n-1)l}{a}} = \\ &= \sqrt{\frac{2l}{a}} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = t_1 (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу $t_1 = 2$ с, $n = 5$, получаем, что $t_n - t_{n-1} = 0,47$ (с).

- О-7. При равноускоренном движении тело проходит в первые два равных последовательных промежутка времени, по $t = 4$ с каждый, пути $s_1 = 24$ м и $s_2 = 64$ м. Определите начальную скорость и ускорение движущегося тела.

☑ 1 м/с; 2,5 м/с².

Решение. Для каждого из участков пути можно соответственно записать:

$$s_1 = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \text{ и } s_1 + s_2 = v_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$v_0 = \frac{s_1}{t_1} - \frac{at_1}{2} \text{ и } v_0 = \frac{s_1 + s_2}{t_2} - \frac{at_2}{2}.$$

Решая совместно эти два уравнения, находим

$$a = \frac{2}{t_2 - t_1} \left(\frac{s_1 + s_2}{t_2} - \frac{s_1}{t_1} \right) = 2,5 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right); \quad v_0 = \frac{24}{4} - \frac{2,5}{2} \cdot 4 = 1 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

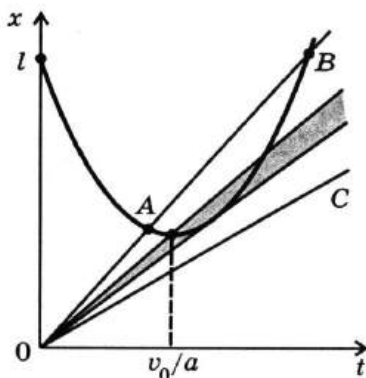
О-8. Пункты А и В расположены на расстоянии $l = 4$ км друг от друга. Из пункта А по направлению к пункту В движется материальная точка, которая двигалась все время равномерно. Одновременно навстречу ей из пункта В с начальной скоростью $v_0 = 32$ м/с движется вторая материальная точка с постоянным ускорением $a = 0,2$ м/с², направленным все время так же, как скорость первой точки. Известно, что в пути материальные точки два раза встречались друг с другом. В каких пределах лежит скорость первой материальной точки?

☑ $8 \text{ м/с} < v_1 < 9 \text{ м/с}$.

Решение. Для первой и второй материальных точек можно записать уравнения для координат: $x_1 = v_1 t$ и $x_2 = l - v_{02} t + \frac{at^2}{2}$. График движения первой точки — прямая линия, график движения второй — парабола (см. рисунок). Так как движение второй материальной точки равнопеременное (сначала замедленное, затем ускоренное), то она в некоторый момент времени на мгновение остановится. Из уравнения $v_2 = v_{02} - at$ находим момент остановки второй точки $t = \frac{v_{02}}{a}$.

Скорость первой точки не может быть слишком большой (прямая OAB на графике), иначе обгон совершится всего один раз (например, точка В на графике). Точка А соответствует встрече материальных точек, а не обгону.

Скорость не может быть и слишком малой (прямая ОС), так как эти точки вообще не смогут оказаться рядом. Материальные точки должны встречаться после момента времени $t = \frac{v_{02}}{a}$.



Таким образом, уравнение, выражающее равенство координат точек, $v_1 t = l - v_{02} t + \frac{at^2}{2}$, должно иметь два действительных

тельных решения, но оба они должны соответствовать более поздним моментам времени, чем момент остановки (мгновенной) второй точки.

При $t = \frac{v_{02}}{a}$ получаем: $v_1 \frac{v_{02}}{a} = l - \frac{v_{02}^2}{a} + \frac{a}{2} \frac{v_{02}^2}{a^2}$, откуда следует: $v_1 = \frac{al}{v_{02}} - \frac{v_{02}}{2} = 9 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$.

Второй крайний случай: $\frac{at^2}{2} - t(v_{02} + v_1) + l = 0$, откуда $t = \frac{(v_{02} + v_1) \pm \sqrt{(v_{02} + v_1)^2 - 2al}}{a}$.

$t_1 = t_2$ получается при условии $(v_{02} + v_1)^2 - 2al = 0$. Отсюда $v_1 = \sqrt{2al} - v_{02} = 8 \text{ (м/с)}$.

Оба условия дают $8 \text{ м/с} < v_1 < 9 \text{ м/с}$.

- О-9.** В момент, когда опоздавший пассажир вбежал на платформу, с ним поравнялось начало предпоследнего вагона, который прошел мимо него за время t_1 . Последний вагон прошел мимо пассажира за время t_2 . На сколько опоздал пассажир к отходу поезда? Поезд движется равноускоренно. Длина вагонов одинакова.

$$\checkmark \quad \tau = \frac{t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)}.$$

Решение. Обозначим: L_1 — длина поезда без двух последних вагонов; L_2 — длина поезда без последнего вагона; L — длина всего поезда; l — длина одного вагона; τ — время, на которое опоздал пассажир.

Тогда длину одного вагона мы можем выразить следующим образом: $l = L_2 - L_1$ и $l = L - L_2$. Из уравнения для равноускоренного движения запишем:

$$L_1 = \frac{a\tau^2}{2}, \quad L_2 = \frac{a(\tau + t_1)^2}{2} \quad \text{и} \quad L = \frac{a(\tau + t_1 + t_2)^2}{2}.$$

Исключая длину вагона l из этих уравнений, получим:

$$l = \frac{a(\tau + t_1)^2}{2} - \frac{a\tau^2}{2} = \frac{a(\tau + t_1 + t_2)^2}{2} - \frac{a(\tau + t_1)^2}{2}, \quad \text{или} \quad 2(\tau + t_1)^2 = \\ = \tau^2 + (\tau + t_1 + t_2)^2. \quad \text{Последнее равенство перепишем в виде:}$$

$$2(\tau + t_1)^2 = \tau^2 + [(\tau + t_1) + t_2]^2, \text{ откуда получаем: } 2(\tau + t_1)^2 = \tau^2 + (\tau + t_1)^2 + 2t_2(\tau + t_1) + t_2^2.$$

$$\tau^2 + 2\tau t_1 + t_1^2 = \tau^2 + 2\tau t_2 + 2t_1 t_2 + t_2^2, \text{ далее}$$

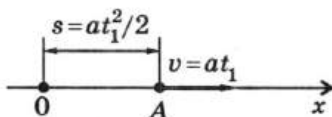
$$2\tau(t_1 - t_2) = t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2.$$

$$\text{Окончательно получаем: } \tau = \frac{t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)}.$$

- О-10.** Материальная точка начинает двигаться по прямой с постоянным ускорением a . Спустя время t_1 после начала ее движения ускорение меняет знак на противоположный, оставаясь неизменным по модулю.

$$\boxed{\checkmark} \quad t_2 = t_1(1 + \sqrt{2}).$$

Решение. Спустя время t_1 материальная точка, двигаясь с ускорением a , пройдет путь $s = \frac{at_1^2}{2}$ и будет иметь скорость $v = at_1$. Выберем координатную ось Ox , как показано на рисунке.



Здесь O — точка, из которой началось движение, A — та точка, где тело оказалось спустя время t_1 . Учитывая смену знака ускорения и применяя формулу для пути при равнопеременном движении, найдем время t_2 , за которое тело переместится из точки A снова в точку O :

$$0 = \frac{at_1^2}{2} + at_1 t_2 - \frac{at_2^2}{2}, \text{ отсюда } t_2 = t_1(1 + \sqrt{2}).$$

- О-11.** Тело совершает прямолинейное равноускоренное движение с некоторой начальной скоростью. Каково перемещение тела за 20 с, если его скорость через 10 с после начального момента равна 5 м/с? Тело двигалось в одном направлении.

$$\boxed{\checkmark} \quad 100 \text{ м.}$$

Решение. Обозначим начальную скорость тела v_0 , а ускорение a . Промежуток времени, равный 10 с, обозначим t . Тогда скорость тела через 10 с после начального момента $v = v_0 + at$, а путь, пройденный за 20 с, равен

$$s = v_0 \cdot 2t + \frac{a(2t)^2}{2} = 2t(v_0 + at) = 2vt = 100 \text{ (м)}$$

Задачу можно решить и другим способом, практически без вычислений. Заметим для этого, что при равноускоренном движении средняя скорость на промежутке от момента времени t_1 до момента t_2 равна мгновенной скорости

в момент времени $\frac{t_1 + t_2}{2}$ (см. задачу 3.45 в «Сборнике задач»).

Следовательно, средняя скорость тела за 20 с равна его мгновенной скорости через 10 с, равной по условию 5 м/с. Перемещение равно произведению средней скорости на промежуток времени, то есть в данном случае 100 м.

3. СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ.

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ВЕРТИКАЛЬНО ВВЕРХ

- 3.1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Когда оно достигло высшей точки, из той же начальной точки с той же начальной скоростью брошено вверх другое тело. На какой высоте H тела встретятся?

✓ $H = \frac{3v_0^2}{8g}$.

Решение. Используя формулу $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ и учитывая, что

в верхней точке $v = 0$, получаем $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$. Если отсчиты-

вать время от момента бросания второго тела, то уравнения движения тел следует записать в виде:

$$h_1 = h_{\max} - \frac{gt^2}{2}; \quad h_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Приравнявая $h_1 = h_2 = H$ (в момент встречи), получаем

$$t = \frac{h_{\max}}{v_0} = \frac{v_0}{2g}; \quad H = \frac{3}{8} \cdot \frac{v_0^2}{g}.$$

- 3.2. Лифт начинает подниматься с ускорением $a = 2,2 \text{ м/с}^2$. Когда его скорость достигла $v = 2,4 \text{ м/с}$, с потолка кабины лифта оторвался болт. Чему равны время t падения болта и перемещение болта относительно Земли за это время? Высота кабины лифта $H = 2,5 \text{ м}$.

✓ $t = 0,645 \text{ с}$; болт перемещается относительно Земли на $0,49 \text{ м}$ вниз.

Решение. Относительно лифта болт падает с ускорением $g + a$. Его начальная скорость относительно лифта равна нулю, а относительно Земли равна v . Поэтому время па-

дения определяется из уравнения $H = \frac{(g + a) \cdot t^2}{2}$ и со-

ставляет $t = \sqrt{\frac{2H}{g + a}} = 0,645 \text{ (с)}$.

- 3.3. Два тела одновременно брошены под углом к горизонту: одно со скоростью $\vec{v}_0$, а другое со скоростью $\vec{u}_0$. Как движется второе тело относительно первого?

Решение. Скорость первого тела в момент времени t равна $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, а скорость второго тела равна $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{g}t$. Второе тело движется относительно первого со скоростью $v_{\text{отн}} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u}_0 + \vec{g}t - (\vec{v}_0 + \vec{g}t) = \vec{u}_0 - \vec{v}_0$. Обратите внимание: относительная скорость двух тел *не зависит от времени!* Это значит, что относительно друг друга тела движутся *равномерно и прямолинейно*.

- 3.4. С отвесного берега высотой H горизонтально бросают камень со скоростью v_0 . С какой скоростью v камень войдет в воду?

Решение. Обозначим время полета камня t . Тогда в момент вхождения в воду скорость камня $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Совместим начало координат с начальным положением камня и направим ось y вертикально вниз, а ось x — горизонтально в направлении начальной скорости. Тогда $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = v_0$, $v_y = gt$. Поскольку $\frac{gt^2}{2} = H$, получаем $v_y^2 = 2gH$. Таким образом, $v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$.

- 3.5. С высоты H на горизонтальную плиту падает шарик. Постройте графики зависимости от времени проекции скорости v_y (ось y направлена вверх) и высоты шарика. Соударения считайте упругими, их продолжительностью можно пренебречь.

☒ См. рис а, б.

Решение. Ось y направлена вертикально вверх; $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.

График на рис. б состоит из участков парабол.

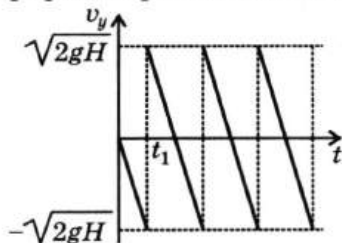


Рис. а

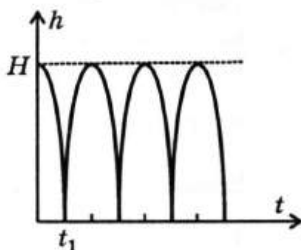


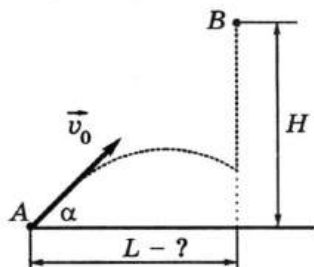
Рис. б

- 3.6. Из точки B свободно падает тело. Одновременно из точки A под углом α к горизонту бросают другое тело так,

чтобы оба тела столкнулись в воздухе (см. рисунок). Докажите, что угол α не зависит от начальной скорости v_0 тела, брошенного из точки A , и определите этот угол, если $\frac{H}{L} = \sqrt{3}$.

✓ 60° .

Решение. Систему отсчета свяжем с телом, падающим из точки B . В этом случае скорость тела, брошенного из точки A , постоянна. Очевидно, тела встретятся, если вектор скорости



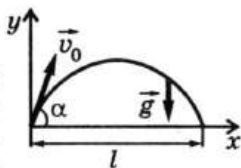
тела направлен в точку B , т. е. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{L}$. Если

$H = L \cdot \sqrt{3}$, то $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, а $\alpha = 60^\circ$.

- 3.7. Тело брошено с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Сколько времени длится полет? На каком расстоянии от места бросания упадет тело? При каком значении угла α дальность полета будет наибольшей? Найдите уравнение траектории тела.

✓ 2 с; 35,3 м; 45° .

Решение. В отсутствие сопротивления воздуха тело движется с постоянным ускорением g , хотя движение и криволинейное. Выберем систему координат, как показано на рисунке. Поскольку $g_x = 0$, проекция тела на ось x совершает равномерное движение. Тело как бы участвует одновременно в двух движениях — равномерном вдоль оси x и равноускоренном вдоль оси y .



Координаты тела изменяются по закону

$$x = v_{0x}t; \quad y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad \text{где } v_{0x} = v_0 \cos \alpha \text{ и } v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

Время полета найдем из условия $y = 0$, откуда

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 2 \text{ (с)}. \quad \text{Дальность полета } l \text{ равна координате } x \text{ в момент падения:}$$

$$l = v_{0x}t = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 35,3 \text{ (м)}.$$

Максимальная дальность достигается при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = 45^\circ$. Найти уравнение траектории тела — значит связать непосредственно x и y , исключив t . Выразив t через x с помощью соотношения $t = x/v_{0x}$ и подставив значение t в формулу для y , получим:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Это уравнение параболы.

- 3.8. Футболист бьет по футбольному мячу, лежащему на расстоянии $l = 10$ м от высокой стены; мяч приобретает скорость $v_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Когда происходит удар мяча о стену — при подъеме или спуске? Чему равны высота h и скорость v мяча при этом ударе? Где упадет мяч? При ударе мяча о стену вертикальная составляющая скорости не изменяется, а горизонтальная — изменяет знак. Траектория мяча лежит в плоскости, перпендикулярной стене.

☒ Удар происходит при подъеме мяча; 5,6 м; 10,7 м/с; мяч упадет на расстоянии 13 м от стены.

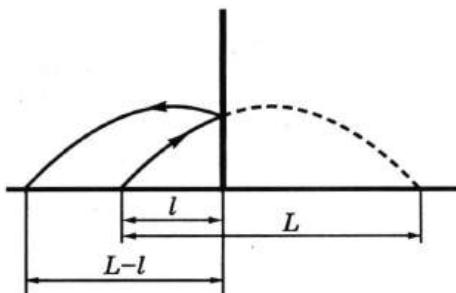
Решение. Дальность L полета мяча в отсутствие стены равна $L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 23$ (м). Поскольку $l < 0,5L$, удар происходит при подъеме мяча. Для определения высоты h воспользуемся уравнением траектории полета (см. решение задачи 3.7), заменив x на l , y на h :

$$h = l \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \approx 5,6 \text{ (м)}.$$

Скорость v в точке A можно выразить через ее горизонтальную и вертикальную проекции: $v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2}$. Если учесть, что $v_{Ax} = v_{0x}$, а $v_{Ay}^2 - v_{0y}^2 = -2gh$, получим:

$$v_A = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 - 2gh} = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \approx 10,7 \text{ (м/с)}.$$

Участок траектории после удара о стену является «зеркальным отражением» траектории, по которой продолжал бы двигаться мяч в отсутствие стены (см. рисунок).



Если стену «убрать», мяч ударится о землю на таком же расстоянии от основания стены, но по другую сторону. Очевидно, это расстояние равно $L - l = 13$ (м).

Олимпиадные задачи

- О-12.** Выпущенный вертикально вверх снаряд разорвался в верхней точке траектории на множество мелких осколков, разлетающихся с одинаковой по модулю начальной скоростью v_0 в разные стороны. Как будет меняться со временем форма «облака» из осколков?

Решение. В отсутствие тяготения осколки двигались бы равномерно и прямолинейно, заполняя расширяющуюся сферу радиусом $v_0 t$ с центром в точке взрыва. Из-за наличия тяготения осколки разлетаются по различным параболическим траекториям, но поскольку ускорения всех осколков одинаковы, мы легко можем «убрать» тяготение — для этого надо перейти в систему отсчета, связанную с телом, которое начало бы свободно падать в момент разрыва снаряда (так двигался бы сам снаряд, останься он целым). В этой системе отсчета осколки движутся без ускорения, т. е. «тяготения нет». Значит, «облако осколков» — тоже сфера радиусом $v_0 t$, только центр ее не покоится относительно Земли, а опускается с ускорением g без начальной скорости (вспомните праздничные фейерверки). Заметим, что в отсутствие сопротивления воздуха облако осколков было бы сферическим и в том случае, если бы снаряд разорвался в любой точке параболической траектории.

- О-13.** Муха заметила на столе каплю меда, пролетая точно над ней горизонтально со скоростью v_0 на высоте H . Как надо

двигаться мухе, чтобы как можно быстрее добраться до меда? Сколько времени t для этого понадобится? Считайте, что муха способна развивать в любом направлении ускорение a .

☑ Муха должна двигаться с постоянным ускорением по параболе.

$$t = \frac{v_0}{a} \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{aH}{v_0^2} \right)^2} \right)}.$$

Решение. Задачу удобнее решать в инерциальной системе отсчета, скорость которой относительно стола равна начальной скорости мухи v_0 . В этой системе отсчета муха A вначале неподвижна и может начинать движение в любом направлении, а капля меда B «убегает» от нее по столу со скоростью, по модулю равной v_0 . Для того чтобы достичь капли в кратчайшее время, мухе нужно двигаться с максимально возможным ускорением к точке C , в которой муха должна оказаться одновременно с каплей меда. Положение точки C находим из уравнений

$AC = \frac{at^2}{2}$, $BC = v_0 t$. Из прямоугольного треугольника ABC

получаем: $\left(\frac{at^2}{2} \right)^2 = (v_0 t)^2 + H^2$, откуда

$$t = \frac{v_0}{a} \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{aH}{v_0^2} \right)^2} \right)}.$$

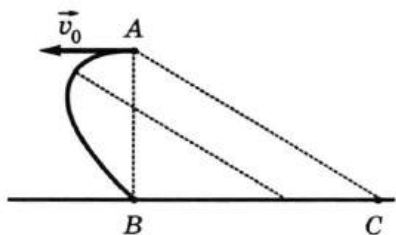


Рис. а

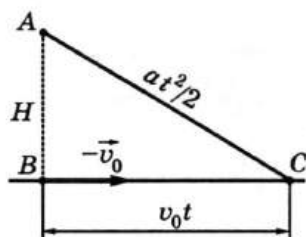


Рис. б

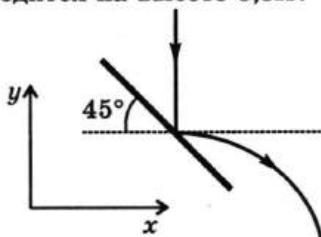
В системе отсчета, связанной со столом, ускорение мухи такое же (так как $v_0 = \text{const}$); значит, движение будет происходить с постоянным ускорением. Однако в этой

системе отсчета траектория имеет форму параболы, ось которой параллельна $\vec{a}$ (т. е. отрезку AC). Примерный вид траектории показан на рисунке а.

- О-14.** Два тела падают без начальной скорости с одной и той же высоты H . На пути второго тела находится расположенная под углом 45° к горизонту площадка. При ударе о площадку составляющая скорости тела, перпендикулярная площадке, изменяет знак, а составляющая, параллельная площадке, остается неизменной. Какое тело падало дольше? У какого тела больше конечная скорость? На какой высоте надо разместить площадку, чтобы второе тело упало как можно позже?

☒ Тело 2 упадет позже, чем тело 1; конечные скорости тел одинаковы. Время движения второго тела максимально, если площадка находится на высоте $0,5H$.

Решение. Время падения и конечная скорость первого тела $t_1 = \sqrt{2H/g}$, $v_1 = \sqrt{2gH}$. Скорость второго тела после столкновения (см. рисунок) направлена горизонтально, т. е. $v_y = 0$.



Поскольку в момент соударения вертикальная скорость тела становится равной нулю, время падения увеличивается. Пусть площадка расположена на высоте h . К моменту удара о площадку

$t'_2 = \sqrt{2(H-h)/g}$, $v'_2 = \sqrt{2g(H-h)}$. Полное время падения второго тела $t_2 = t'_2 + \sqrt{2h/g}$, так что $t_2/t_1 = \sqrt{1-h/H} + \sqrt{h/H}$. Это отношение больше единицы, поскольку

$$\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{\frac{h}{H}\left(1 - \frac{h}{H}\right)} > 1.$$

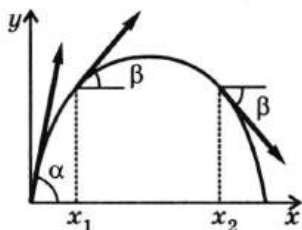
При $h \rightarrow 0$ или $h \rightarrow H$ получаем, естественно, $t_2 \rightarrow t_1$. Наибольшая «задержка» падения второго тела происходит при $h = 0,5H$; при этом $t_2 = t_1\sqrt{2}$. Вопрос о конечной скорости второго тела можно теперь сформулировать так: с какой скоростью v_2 упадет тело, брошенное гори-

горизонтально со скоростью v'_2 с высоты h ? Ответ на этот вопрос легко найти: $v_2 = \sqrt{v_2'^2 + 2gh} = \sqrt{2gH}$. Итак, $v_2 = v_1$, т. е. оба тела упадут с одинаковой по модулю скоростью.

- О-15.** Под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту брошено тело с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Через какое время t модуль β угла между скоростью тела и горизонтальной плоскостью равен 45° ?

☑ $t_1 = 0,75$ с; $t_2 = 2,8$ с.

Решение. Вид траектории тела (см. рисунок) показывает, что существуют два момента времени, удовлетворяющих поставленному условию. Из уравнения $|v_y| = v_x \operatorname{tg} \beta$ с учетом соотношений $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$, и $v_x = v_0 \cos \alpha$ получаем $t = \frac{v_0}{g} (\sin \alpha \pm \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha)$.

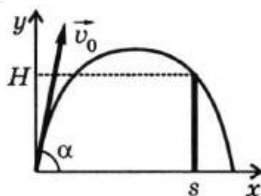


- О-16.** Какую наименьшую начальную скорость нужно сообщить при ударе футбольному мячу, чтобы он перелетел через стену высотой H , находящуюся на расстоянии s ?

☑ $\sqrt{g(H + \sqrt{H^2 + s^2})}$.

Решение. Достаточно рассматривать только траектории движения мяча, проходящие через точку с координатами s и H (см. рисунок). Воспользуемся уравнением траектории:

$$H = s \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot s^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}.$$



Перепишем последнюю формулу в виде

$$\frac{g \cdot s^2}{v_0^2} = -H + (s \cdot \sin 2\alpha - H \cdot \cos 2\alpha). \text{ Максимально возмож-}$$

ное значение стоящего в скобках выражения равно

$$\sqrt{H^2 + s^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{g \cdot s^2}{v_0^2} < \sqrt{H^2 + s^2} - H \text{ и } v_{0\min} = \sqrt{g(H + \sqrt{H^2 + s^2})}.$$

Советуем проверить справедливость этого ответа в предельных случаях $H \rightarrow 0$ и $s \rightarrow 0$. Обратите внимание на то, что траектория мяча касается стены не в вершине параболы, а на ее нисходящей ветви.

4. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ

- 4.1. С какой скоростью должен лететь самолет вдоль экватора, чтобы пассажиры наблюдали «вечный полдень» (т. е. чтобы Солнце для них стояло все время в зените)? Радиус земли R примите равным 6400 км.

☑ 1670 км/ч.

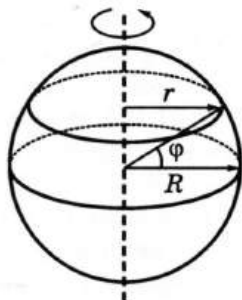
Решение. Солнце движется по небу с востока на запад. Это наблюдаемое движение Солнца обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси с *запада на восток*. Один оборот Земля совершает за 24 ч. Чтобы «скомпенсировать» это движение Земли, самолет должен лететь с *востока на запад* с такой скоростью, чтобы один облет Земли совершить как раз за сутки. Если самолет летит вдоль экватора,

его скорость $v = \frac{2\pi R}{T} = 1670$ (км/ч). Такая скорость возможна для современных самолетов. Можно сказать, что Земля в своем суточном вращении как бы «проворачивается» под самолетом, над которым «зависло» Солнце.

- 4.2. Найдите скорость v и ускорение a точки земной поверхности, находящейся на широте 50° , за счет суточного вращения Земли. Радиус Земли $R = 6400$ км.

☑ 300 м/с; 2,2 см/с².

Указание. Точка земной поверхности на этой широте описывает относительно центра Земли окружность радиусом $r = R \cos \varphi$ (см. рисунок) за 24 часа.



- 4.3. Одинаковое ли расстояние проходят правые и левые колеса автомобиля на повороте дороги?

Решение. Правые и левые колеса проходят различные расстояния, так как их линейные скорости неодинаковы: чем дальше находятся колеса от центра закругления дороги, тем больше их линейная скорость.

- 4.4. Катушка с нитью лежит на горизонтальном столе и может катиться по нему без проскальзывания. Внутренний радиус катушки r , внешний R . С какой скоростью $\bar{u}$ будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении со скоростью $\bar{v}$? Рассмотрите два случая (см. рис. а и б).

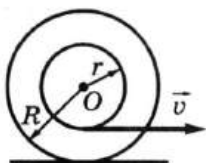


Рис. а

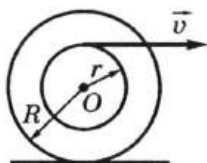


Рис. б

Решение. Перемещение конца нити обусловлено перемещением оси катушки и изменением длины нити за счет сматывания (или наматывания) нити с катушки во время движения. Нетрудно убедиться, что перемещения конца нити, вызываемые этими двумя причинами, всегда будут направлены в разные стороны. Если, например, катушка движется вправо, то вследствие перемещения оси катушки конец нити будет двигаться вправо, а за счет наматывания нити — влево. Так как $r < R$, то изменение длины нити за один полный оборот всегда меньше перемещения оси катушки за то же время. В результате сложения этих движений конец нити должен будет всегда перемещаться в ту сторону, в которую движется ось катушки. За время полного оборота T ось катушки переместится вправо на расстояние $2\pi R$, а длина нити уменьшится на $2\pi r$: $l_1 = 2\pi R$, $l_2 = 2\pi r$. Очевидно, скорость движения оси катушки $u = \frac{2\pi R}{T}$, а скорость уменьшения длины нити $v' = \frac{2\pi r}{T}$.

Скорость движения конца нити (согласно закону сложения скоростей) $v = u - v'$. Выразим скорость уменьшения длины нити через скорость движения оси катушки:

$$v' = \frac{2\pi r}{T} \cdot \frac{R}{R} = \frac{2\pi R}{T} \cdot \frac{r}{R} = \frac{r}{R} \cdot u.$$

$$\text{Тогда } v = u - \frac{r}{R} \cdot u = u \left(1 - \frac{r}{R} \right) = u \cdot \frac{R - r}{R}.$$

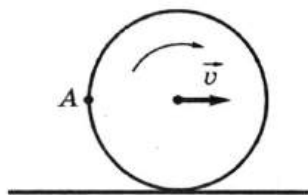
Отсюда $u = \frac{R}{R - r} \cdot v$. Ось катушки перемещается *быстрее*

конца нити. Во втором случае катушка перемещается в сторону движения конца нити со скоростью $u = \frac{R}{R + r} \cdot v$.

Ось катушки перемещается *медленнее* конца нити.

Олимпиадные задачи

- О-17.** С какой скоростью v должен ехать автомобиль, чтобы совпавший с его колеса в точке A камешек (см. рисунок) попал в ту же точку колеса, от которой оторвался? Радиус колеса $R = 20$ см.



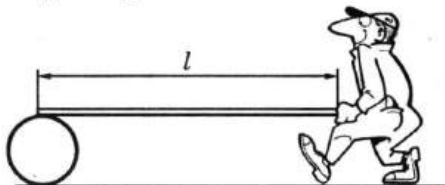
✓ $2,5 \cdot \sqrt{k}$ м/с.

Решение. Задачу естественно решать в системе отсчета, связанной с автомобилем, где точки обода колеса движутся по окружности со скоростью v . В этой системе камешек начнет двигаться *вертикально вверх* именно с такой скоростью. За полное время его полета $t = \frac{2v}{g}$ колесо

должно совершить целое число k оборотов, т. е. $t = k \cdot \frac{2\pi R}{v}$.

Отсюда $v = \sqrt{k \cdot \pi g R} \approx 2,5 \cdot \sqrt{k}$ (м/с). Подходящих значений скорости довольно много. Даже при $k = 100$ получаем вполне реальное значение скорости (около 90 км/ч).

- О-18.** Человек держит один конец горизонтальной доски длиной l , а другой ее конец лежит на катящемся по полу цилиндре (см. рисунок). Цилиндр катится без проскальзывания; отсутствует также скольжение доски по цилиндру. Какое расстояние пройдет человек, пока достигнет цилиндра, если длина доски равна l ?



✓ $2l$.

Решение. Точка цилиндра, касающаяся доски, движется вперед со скоростью, вдвое большей той, с которой дви-

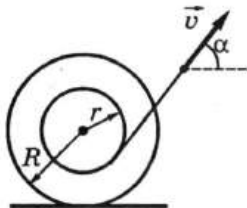
жется ось цилиндра. Поэтому, чтобы дойти до цилиндра, человек должен пройти расстояние $2l$.

- О-19.** С какой скоростью и в какое время суток должен лететь горизонтально самолет на широте Санкт-Петербурга ($\varphi = 60^\circ$), чтобы летчик видел Солнце все время на юге? Считайте радиус Земли равным 6400 км.

☑ 837 км/ч.

Решение. Самолет должен вылететь в полдень и лететь противоположно направлению вращения Земли, т. е. с востока на запад, со скоростью, равной линейной скорости Земли на широте Санкт-Петербурга. Угловая скорость вращения Земли $\omega = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \left(\frac{\text{рад}}{\text{ч}} \right)$. Линейная скорость на широте Санкт-Петербурга равна (см. задачу 4.2) $v = r \cdot \omega = R \cdot \omega \cos \varphi = R \cdot \omega / 2 \approx 837 \text{ (км/ч)}$.

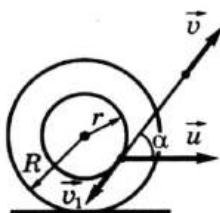
- О-20.** Нить, намотанную на ось катушки, тянут со скоростью v под углом α к горизонту (см. рисунок). Катушка катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания. В каком направлении и с какой скоростью u она катится? Нить такая длинная, что угол α при движении не изменяется.



Решение. Угловая скорость вращения катушки $\omega = \frac{u}{R}$.

Следовательно, скорость точки A можно представить как векторную сумму скорости $\vec{u}$ движения оси катушки и скорости $\vec{v}_1$ движения по окружности вокруг оси катушки (на рисунке катушка движется вправо): $\vec{v}_A = \vec{u} + \vec{v}_1$. Поскольку проекции скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}$ на направление нити одинаковы, а $v_1 = \omega r$, получаем $u \cos \alpha - \omega r = v$, от-

куда $u = \frac{v}{\cos \alpha - r/R}$. При $\cos \alpha > \frac{r}{R}$ катушка движется вправо, при $\cos \alpha < \frac{r}{R}$ она движется влево (тогда $u = \frac{v}{r/R - \cos \alpha}$).



Когда продолжение нити проходит через точку O (при $\cos \alpha = r/R$), качение без проскальзывания невозможно.

ДИНАМИКА

5. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

- 5.1. Человек, стоя на платформе весов, быстро приседает и выпрямляется. Как изменяются показания весов во время этого движения?

Решение. На этот вопрос часто дают неверный ответ: «Когда туловище движется вниз, показание весов уменьшается, когда движется вверх — увеличивается». Однако вес тела зависит не от скорости его движения, а только от *ускорения*. В *начале* приседания ускорение туловища направлено вниз, и вес тела (показание весов) уменьшается. В *конце* приседания движение вниз замедляется, т. е. ускорение направлено *вверх*. Вес при этом увеличивается. При выпрямлении же вес человека сначала увеличивается, а затем уменьшается.

- 5.2. Тело массой 400 г соскальзывает с наклонной плоскости длиной 80 см, имея начальную скорость 2 м/с. Определить, какую скорость имело тело в конце наклонной плоскости, если равнодействующая всех сил, действующих на тело, равна 1,25 Н.

☒ 6 м/с.

Решение. Согласно второму закону Ньютона $F = ma =$

$$= m \frac{v^2 - v_0^2}{2s}. \text{ Отсюда } v = \sqrt{\frac{2Fs}{m} + v_0^2} = 3 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

- 5.3. На однородный стержень длиной l действуют две растягивающие силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенные к его концам. С какой силой F растянут стержень в сечении, находящемся на расстоянии x от точки приложения силы $\vec{F}_1$?

☒ $F = F_1(l - x)/l + F_2x/l$.

Решение. Левая часть стержня имеет массу $\frac{mx}{l}$, а пра-

вая — $\frac{m(l - x)}{l}$. Обе части движутся с одинаковым ускорением a под действием приложенных к ним сил. Значит,

$$F_1 - F = \frac{mx}{l}a, \quad F - F_2 = \frac{m(l - x)}{l}a.$$

Отсюда $a = \frac{F_1 - F_2}{m}$, $F = F_1 \frac{l-x}{l} + F_2 \frac{x}{l}$.

Если $x \rightarrow 0$, то $F \rightarrow F_1$; если $x \rightarrow l$, то $F \rightarrow F_2$.

- 5.4. В вагоне поезда, движущегося со скоростью $v = 72$ км/ч, взвешивают на пружинных весах тело массой $m = 5,0$ кг. Найдите показание P пружинных весов, когда поезд движется по закруглению радиусом $R = 400$ м.

☑ $P = m\sqrt{g^2 + (v^2/R)^2} = 49,25$ Н.

Решение. Груз вместе с вагоном движется на повороте с ускорением $a = \frac{v^2}{R}$, направленным горизонтально (к центру поворота).

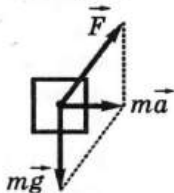
Это ускорение сообщает грузу равнодействующая силы тяжести $m\vec{g}$ и силы $\vec{F}$ упругости пружины (см. рисунок):

$$m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}. \text{ Из рисунка видно, что } F = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, $P = F$,

откуда $P = m\sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} = 49,25$ (Н), что

на 0,25 Н превышает вес груза при движении без ускорения.



- 5.5. «Я стал рядом с огромнейшей пушкой... и когда из пушки вылетело ядро, я вскочил на него верхом и лихо понесся вперед... мимо меня пролетело встречное ядро... я пересел на него и как ни в чем не бывало помчался обратно» (Э. Распе. «Приключения барона Мюнхгаузена»). Почему такое путешествие на ядре невозможно?

Решение. При пересадке с ядра на ядро Мюнхгаузен испытал бы большое изменение скорости за малый промежуток времени, т. е. получил бы огромное ускорение. Организм человека был бы не в состоянии перенести перегрузки, вызываемые такими изменениями скорости.

Олимпиадные задачи

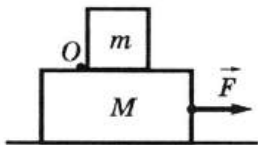
- О-21. Какие капли дождя падают быстрее — крупные или мелкие? Почему? Считать, что шарообразная форма капли при падении не изменяется.

Решение. На падающую каплю действуют две силы: постоянная сила тяжести, направленная вниз, и сила сопротивления воздуха, направленная вниз и увеличивающаяся с ростом скорости капли. Когда сила сопротивления воздуха станет равной силе тяжести, скорость капли перестанет увеличиваться, и дальнейшее ее падение будет происходить с постоянной скоростью. При увеличении размеров капли сила тяжести увеличивается пропорционально объему капли, т. е. пропорционально третьей степени ее радиуса, а сила сопротивления — пропорционально сечению капли, т. е. пропорционально квадрату радиуса. Поэтому при увеличении радиуса капли сила тяжести увеличивается быстрее, чем сила сопротивления воздуха, а значит, постоянная скорость, с которой капля падает на землю, при увеличении капли увеличивается.

- О-22.** Объясните, почему человек может бежать по тонкому льду, на котором не может спокойно стоять, не проваливаясь?

Решение. Если человек бежит по поверхности льда, время, в течение которого он находится на каком-либо участке льда, мало. Вследствие инертности лед не успевает за это время прогнуться настолько, чтобы разрушиться. Если же человек стоит на льду, то прогиб льда определяется только весом человека; при этом он может быть достаточно большим и лед разрушается.

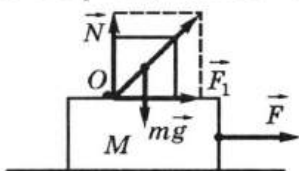
- О-23.** Брусок массой M находится на гладком горизонтальном столе, по которому он может двигаться без трения. На бруске стоит куб массой m , упирающийся в небольшой выступ O (см. рисунок). При каком минимальном значении модуля силы $\vec{F}$, приложенной к бруску, нижняя грань куба оторвется от бруска?



☑ $F = (M + m)g.$

Решение. При максимально возможном ускорении a бруска кубик опирается на него в точке O . В этой точке (см. рисунок) на кубик действует сила реакции $\vec{N}$ бруска и горизонтальная сила $\vec{F}_1$, сообщающая бруску ускорение $\vec{a}$. Очевидно, что $\vec{F}_1 = m\vec{a}$ и $\vec{N} + m\vec{g} = 0$.

Для того чтобы кубик не начал вращаться вокруг точки O , равнодействующая всех сил, действующих на него, должна проходить через центр масс кубика. Это означает, что равнодействующая сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_1$ образует с горизонталью угол 45° , т. е. $F_1 = N$, или $ma = mg$.



Отсюда $a = g$. Для того, чтобы брусок и кубик двигались с таким горизонтальным ускорением, на брусок должна действовать сила $\vec{F} = (M + m)\vec{a}$, или (по модулю): $F = (M + m)g$.

- О-24.** Известно, что искусственный спутник Земли можно запустить так, чтобы он неподвижно висел над одним и тем же географическим пунктом Земли. Можно ли запустить спутник так, чтобы он казался неподвижным относительно звезд?

Решение. В инерциальной системе отсчета, связанной со звездами, угловая скорость объекта, кажущегося неподвижным относительно звезд, равна нулю. Поэтому этот объект не может иметь центростремительное ускорение и, следовательно, не может вращаться около какой-либо точки пространства, в том числе и вокруг Земли. Следовательно, такое тело не может быть спутником Земли.

6. СИЛА УПРУГОСТИ. СИЛА ТРЕНИЯ

- 6.1. Брусек массой 4 кг лежит на столе, коэффициент трения $\mu = 0,25$. Какая сила трения действует на брусок, если его тянут в горизонтальном направлении с силой: а) 5 Н; б) 8 Н; в) 15 Н?

☒ а) 5 Н; б) 8 Н; в) 9,8 Н.

Решение. Максимальное значение силы трения покоя, действующей на брусок, $F_{\text{тр. пок}} = \mu mg = 9,8$ (Н). Пока приложенная сила F не превышает $F_{\text{тр. пок}}$, брусок покоится, а модуль силы трения покоя равен F . Когда F становится больше $F_{\text{тр. пок}}$, брусок скользит по столу. При этом на него действует сила трения скольжения, модуль которой равен $F_{\text{тр. пок}}$.

- 6.2. Жесткость резинового жгута k . Какова жесткость половины этого жгута? Ответ обоснуйте.

☒ $2k$.

Решение. Если при действии силы F удлинение жгута равно x , то удлинение каждой его половины $\frac{x}{2}$. Жесткость жгута $k = \frac{F}{x}$, жесткость его половины $k_1 = \frac{F}{\frac{x}{2}} = 2k$.

- 6.3. Почему при торможении автомобиля опасно прекращение вращения колес (такое прекращение вращения называют блокированием)?

Решение. При блокировании силу трения покоя сменяет сила трения скольжения между колесами и дорогой, направление которой не изменяется при повороте передних колес (автомобиль перестает «слушаться» руля).

- 6.4. На подставке лежит груз, прикрепленный легкой пружиной к потолку. В начальный момент пружина не растянута. Подставку начинают опускать с ускорением a . Через какое время t груз оторвется от подставки? Жесткость пружины k , масса груза m .

☒ $t = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ak}}$ при $a < g$, $t = 0$ при $a > g$.

Решение. До момента отрыва предмет движется вниз с ускорением a под действием силы тяжести mg , силы упругости пружины $F_{\text{упр}}$ и силы реакции опоры N . В момент отрыва сила N обращается в нуль. Для этого случая можно записать второй закон Ньютона: $\vec{F}_{\text{упр}} + m\vec{g} = m\vec{a}$. Проектируя это уравнение на вертикальную ось, получаем: $mg - F_{\text{упр}} = ma$. Используя закон Гука $F_{\text{упр}} = kx$ и соотношение $x = \frac{at^2}{2}$ для удлинения пружины x , получаем

$$t = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ak}}.$$

Время t уменьшается при увеличении ускорения a ; при $a = g$ оно обращается в нуль. Очевидно, при $a > g$ предмет не поспевает за подставкой и сразу отрывается от нее, т. е. $t = 0$.

- 6.5. Два груза массами M_1 и M_2 , связанные шнуром, лежат на горизонтальной поверхности. Шнур выдерживает силу натяжения T . Коэффициент трения между каждым из грузов и поверхностью равен μ . С какой постоянной силой F можно тянуть первый груз параллельно шнуру, чтобы шнур не рвался?

☒ $F < T + \mu M_1 g$ при $T < \mu M_2 g$; $F < T(1 + M_1/M_2)$ при $T > \mu M_2 g$.

Решение. Если сила F совсем мала, шнур даже не натянется: чтобы он натянулся, надо сначала сдвинуть с места первый груз, а это произойдет только при $F > \mu M_1 g$. Что будет при дальнейшем увеличении F ? Если шнур недостаточно прочный ($T < \mu M_2 g$), то он порвется еще до того, как сдвинется с места второй груз, при $F_{\text{max}} = T + \mu M_1 g$. Если же шнур достаточно прочный, то силу F можно увеличивать без опасности разрыва шнура до тех пор, пока ускорение системы не достигнет максимального значения

$$a_{\text{max}} = \frac{T - \mu M_2 g}{M_2}.$$

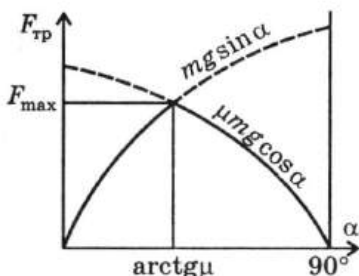
При этом

$$F_{\text{max}} = (M_1 + M_2)(a_{\text{max}} + \mu g) = T \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right).$$

- 6.6. Угол α наклона плоскости постепенно увеличивают от 0 до 90° . На плоскости находится брусок массой m . Коэффициент трения равен μ . Постройте график зависимо-

сти силы трения $F_{\text{тр}}$ от угла α . Чему равно максимальное значение силы трения F_{max} ?

Решение. При малых углах α ящик останется в покое, а при больших углах будет соскальзывать. В первом случае действует сила трения покоя, во втором — сила трения скольжения. В первом случае $F_{\text{тр}} = mgs \sin \alpha$. Этот случай реализуется при $\text{tg} \alpha < \mu$ (заметим, что при $\text{tg} \alpha = \mu$ возможно движение с постоянной скоростью). При $\text{tg} \alpha > \mu$ тело соскальзывает с ускорением; сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Таким образом, получаем $F_{\text{тр}} = mgs \sin \alpha$ при $\alpha \leq \arctg \mu$ и $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$ при $\alpha > \arctg \mu$. График зависимости $F_{\text{тр}}(\alpha)$ см. на рисунке. Из формулы $\sin \alpha = \text{tg} \alpha / \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}$ следует, что максимальное значение силы трения $F_{\text{max}} = \mu mg / \sqrt{1 + \mu^2}$.



Олимпиадные задачи

- О-25.** На горизонтальном участке дороги от равномерно движущегося поезда массой $M = 1000$ т оторвался последний вагон массой $m = 40$ т, проехал расстояние $s_{\text{в}} = 200$ м и остановился. Какое расстояние $s_{\text{п}}$ проехал поезд за время торможения вагона? Решите задачу в двух случаях: а) неизменной осталась скорость поезда; б) неизменной осталась сила тяги локомотива. В обоих случаях считайте, что сила сопротивления пропорциональна массе.

☒ а) 400 м; б) 408 м.

Решение. Случай а уже рассмотрен в задаче 2.1. Случай б существенно сложнее, потому что после отрыва вагона поезд движется с ускорением (сила тяги не изменилась, а сила сопротивления движению уменьшилась). Ускоре-

ние a_n оставшейся части поезда можно найти из второго закона Ньютона: $(M - m)a_n = F_T - \mu(M - m)g$, где F_T — сила тяги, а μ — коэффициент сопротивления. Заметим теперь, что при равномерном движении целого поезда сила тяги как раз уравнивалась силой сопротивления, т. е. $F_T = \mu Mg$. Поэтому для ускорения поезда получаем $a_n = \mu g \frac{m}{M - m}$. Отцепленный вагон движется с ускорением $a_n = -\mu g$. За время t торможения вагона поезд проедет расстояние $s_n = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Для его нахождения воспользуемся тем, что $s_n = v_0 t / 2 = |a_n| t^2 / 2$. Из этих соотношений следует, что первое слагаемое в формуле для s_n равно $2s_n$, а второе $s_n a_n / |a_n|$.

Следовательно, $s_n = s_n \left(2 + \frac{a_n}{|a_n|} \right) = s_n \left(2 + \frac{m}{M - m} \right) = 408 \text{ (м)}$.

- О-26.** Кирпич массой m лежит на горизонтальном столе. Коэффициент трения между кирпичом и столом равен μ . К кирпичу приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. а) Выразите аналитически и графически зависимость силы трения $F_{\text{тр}}$ и ускорения кирпича a от модуля силы $\vec{F}$. б) Сделайте то же самое, когда сила $\vec{F}$ направлена под углом α к плоскости стола (учитывая случаи $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$).

Решение. а) Кирпич остается неподвижным, пока сила F не превысит максимальной величины силы трения покоя, равной μmg . При этом сила трения покоя в точности уравнивает силу F , т. е. $\vec{F}_{\text{тр}} = -\vec{F}$.

При дальнейшем увеличении силы F кирпич сдвинется, и мы будем иметь дело с силой трения скольжения, равной μmg и не зависящей от F . При этом $F - \mu mg = ma$. Итак,

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} = F, & F < \mu mg; \\ F_{\text{тр}} = \mu mg, & F > \mu mg. \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0, & F < \mu mg; \\ a = \frac{F}{m} - \mu g, & F > \mu mg. \end{cases}$$

Графики приведены на рисунках а и б.

б) Поскольку в этом случае сила F направлена под углом к горизонту, величина силы нормального давления изменяется; это, в свою очередь, сказывается на силе трения.

Проецируя уравнение второго закона Ньютона $\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$ на оси координат, получаем: $F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = ma$, $F \sin \alpha + N - mg = 0$.

Отсюда $N = mg - F \sin \alpha$ (очевидно, кирпич не отрывается от стола при условии $F \sin \alpha \leq mg$). Пока кирпич неподвижен (при небольших F): $a = 0$, $F_{\text{тр}} = F \cos \alpha$. Это возможно, если $F_{\text{тр}} \leq \mu N$, т. е. $F \cos \alpha \leq \mu (mg - F \sin \alpha)$. Последнее неравенство можно записать в виде $F \leq \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$.

Обозначим $F_0 = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$.

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} = F \cos \alpha, & a = 0 & (F \leq F_0); \\ F_{\text{тр}} = \mu (mg - F \sin \alpha), & a = \mu g \frac{(F - F_0)}{F_0} & \left(F_0 < F \leq \frac{mg}{\sin \alpha} \right). \end{cases}$$

При $\alpha > 0$, т. е. когда сила направлена под углом вверх, должно выполняться условие $F \leq mg/\sin \alpha$, иначе кирпич оторвется от стола. Графики см. на рисунках *в* и *з*. При $\alpha < 0$, когда сила направлена под углом вниз, возможно «заклинивание»: кирпич не сдвинется с места при сколь угодно большой силе, если $\mu \operatorname{tg} |\alpha| > 1$. Графики см. на рисунках *д* и *е*.

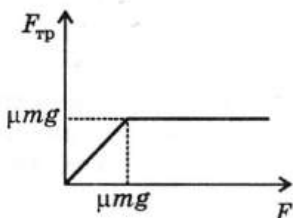


Рис. а

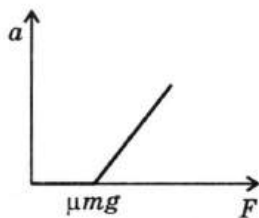


Рис. б

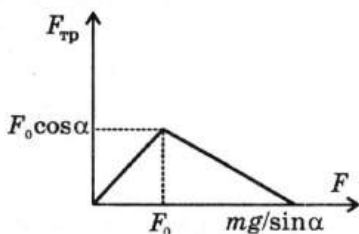


Рис. в

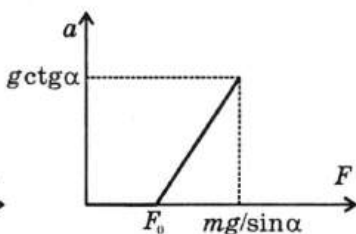


Рис. з

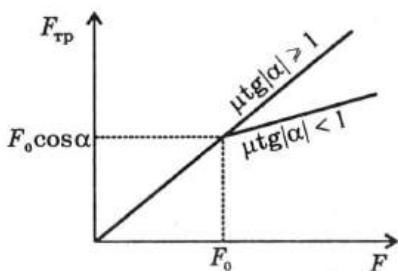


Рис. д

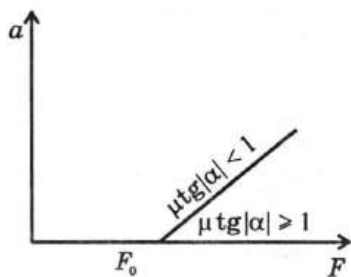


Рис. е

О-27. На диск проигрывателя на расстоянии r от оси положили монету массой m . Диск вращается с частотой n . Коэффициент трения между монетой и диском равен μ . Найдите зависимость силы трения, действующей на монету, от расстояния r .

☑ $F_{\text{тр}} = 4\pi^2 m r n^2$ при $r < \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$; $F_{\text{тр}} = \mu m g$ при $r > \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$.

Решение. Прежде всего надо выяснить, будет ли монета покоиться относительно диска или будет скользить по нему. В первом случае сила трения — это сила трения покоя, она сообщает монете центростремительное ускорение $a = 4\pi^2 r n^2$ и равна по модулю $ma = 4\pi^2 m r n^2$. Для силы трения покоя должно выполняться условие $F_{\text{тр}} \leq \mu N$. В данном случае сила нормального давления N равна mg , поэтому получается неравенство $4\pi^2 m r n^2 \leq \mu mg$, откуда $r \leq \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$. При

выполнении этого неравенства монета будет покоиться относительно диска и $F_{\text{тр}} = 4\pi^2 m r n^2$ (трение покоя). Если указанное неравенство не выполняется, т. е. $r > \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$, монета будет скользить по диску; при этом $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Таким образом, $F_{\text{тр}} = 4\pi^2 m r n^2$ при $r \leq \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$ (трение покоя),

$F_{\text{тр}} = \mu mg$ при $r > \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$ (трение скольжения).

7. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ. СИЛА ТЯЖЕСТИ И ВЕС ТЕЛА

- 7.1. Находится ли в состоянии невесомости рыба в воде?

☒ Нет.

Решение. В состоянии невесомости внутри любого тела нет внутренних напряжений, обусловленных силой тяжести (различные части тела «не давят» друг на друга). Такое состояние возникает, когда на тело действуют *только* силы тяготения (например, при свободном падении). На рыбу в воде помимо силы тяжести действует сила Архимеда (вода является для рыбы *опорой*).

- 7.2. Оцените массу Солнца, считая расстояние R от Земли до Солнца равным $1,5 \cdot 10^8$ км. Считайте орбиту Земли круговой.

☒ $2 \cdot 10^{30}$ кг.

Решение. На Землю действует сила притяжения Солнца, которую можно рассчитать по закону всемирного тяготения: $F = G \frac{M_{\text{в}} \cdot m}{R^2}$. Эту же силу можно найти из второго закона Ньютона $F = m_3 a$, где центростремительное ускорение Земли при движении вокруг Солнца $a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$, где

$T = 1$ год. Из этих двух формул получаем: $G \frac{M_{\text{с}} \cdot m_3}{R^2} = m_3 \frac{4\pi^2 R}{T^2}$. Отсюда масса Солнца равна

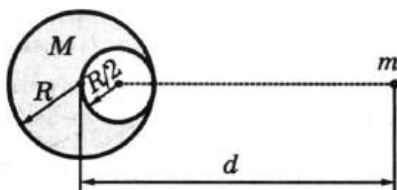
$$M_{\text{с}} = \frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot T^2} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ (кг)}.$$

- 7.3. Справедливы ли законы Паскаля и Архимеда в состоянии невесомости?

Решение. Сила Архимеда обусловлена увеличением давления с увеличением глубины за счет веса жидкости или газа, и поэтому в невесомости сила Архимеда отсутствует. Формально это не является нарушением закона Архимеда, поскольку вес вытесненной жидкости или газа при этом также равен нулю. Закон Паскаля утверждает, что *внешнее* давление передается в любую точку жидкости или газа.

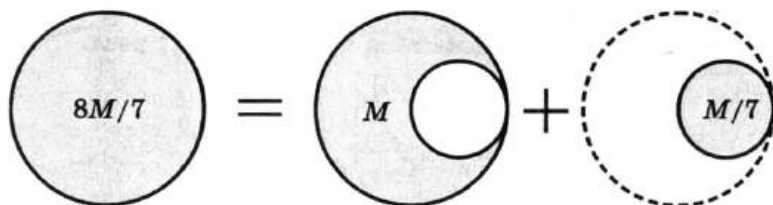
Эта способность к передаче давления не имеет отношения к весу; она обусловлена характером движения молекул в жидкостях и газах. Следовательно, закон Паскаля остается справедливым и в невесомости.

- 7.4. Найдите силу F притяжения маленького шарика массой m и большого однородного шара массой M , в котором имеется сферическая полость (см. рисунок).



$$\checkmark \quad F = \frac{GMm}{7} \left(\frac{8}{d^2} - \frac{1}{(d - R/2)^2} \right).$$

Указание. См. рисунок.



Решение. Закон всемирного тяготения в виде $F = \frac{Mm}{r^2}$

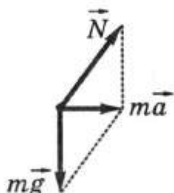
можно применять для вычисления силы притяжения между материальной точкой и сферически симметричным телом (при этом r — расстояние от центра тела до материальной точки). Сведем нашу задачу к этому случаю. Найдём сначала, на сколько увеличится сила притяжения, если заполнить полость, т. е. сделать шар сплошным и однородным. Поскольку объем шара пропорционален кубу его радиуса, объем полости составляет $1/8$ всего объема шара. Поскольку масса M шара с полостью равна $7/8$ массы сплошного шара, для заполнения полости потребуется шар массой $M/7$, центр которого расположен на расстоянии $d - R/2$ от шарика массой m . В результате заполнения полости сила притяжения увеличится на

$F_1 = G \frac{Mm}{7(d - R/2)^2}$. Для сплошного шара применим закон всемирного тяготения в «обычном» виде; учитывая, что масса большого шара равна $8M/7$, получаем $F + F_1 = G \frac{8Mm}{7d^2}$. Отсюда $F = \frac{GMm}{7} \left(\frac{8}{d^2} - \frac{1}{(d - R/2)^2} \right)$.

- 7.5. Какую перегрузку испытывает водитель, если автомобиль с места набирает скорость 180 км/ч за 10 с?

☒ Вес водителя увеличивается в 1,1 раза.

Решение. Автомобиль разгоняется с ускорением $a = 5 \text{ м/с}^2$. Такое горизонтальное ускорение сообщает водителю равнодействующая силы тяжести и силы реакции опоры: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Отсюда (см. рисунок) $N = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2} \approx 1,12mg$. Согласно третьему закону Ньютона сила реакции опоры равна по модулю весу тела. Таким образом, вес водителя увеличивается примерно в 1,1 раза.

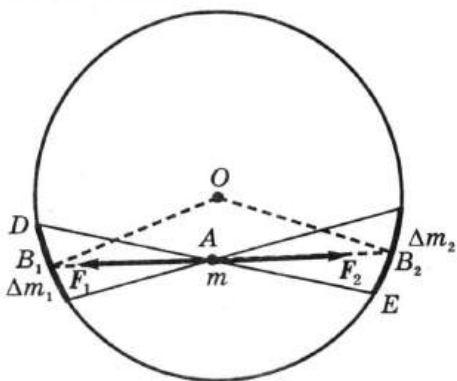


Олимпиадные задачи

- О-28. Однажды межпланетная космическая станция попала на удивительную планету: внутри она была пуста, т. е. имела форму сферической оболочки постоянной толщины. Обитатели планеты жили на ее внутренней поверхности и перелетали из одного места в другое, просто чуть-чуть подпрыгнув: внутри планеты совершенно не ощущалась сила тяжести! Как это объяснить?

Решение. Разобьем мысленно поверхность тонкой сферической оболочки на множество малых элементов. Каждый из них притягивает материальную точку к себе. Если барон прав, все эти силы притяжения должны компенсироваться.

ровать друг друга. Для точки в центре сферы это очевидно. Для произвольного положения A материальной точки массой m внутри сферы нужно выбрать удобный способ разбиения сферы на участки. Проведем через точку A произвольную прямую B_1B_2 . Узкими конусами с вершинами в точке A , полученными вращением образующей DE вокруг оси B_1B_2 , вырежем малые элементы сферы в окрестностях B_1 и B_2 (см. рисунок). Полученные малые элементы сферы можно считать плоскими. Они образуют одинаковые углы с осью B_1B_2 , и потому их линейные размеры пропорциональны расстояниям до точки A , а площади — квадратам этих расстояний.



Так же относятся и их массы: $\Delta m_1/\Delta m_2 = (AB_1/AB_2)^2$.

Силы притяжения точки к этим участкам сферы $F_1 = Gm \cdot \Delta m_1/(AB_1)^2$ и $F_2 = Gm \cdot \Delta m_2/(AB_2)^2$. Учитывая полученную выше пропорцию, находим $F_1 = F_2$, т. е. эти силы действительно компенсируют друг друга. На такие пары элементов можно разбить всю поверхность сферы, поэтому на тело внутри тонкой сферической оболочки сила тяготения не действует. Тогда этот вывод справедлив и для сферической оболочки любой толщины: ведь ее можно мысленно разбить на тонкие сферические слои. Полученный результат непосредственно связан с тем, что сила всемирного тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния.

- О-29.** Известно, что при подъеме тела с поверхности Земли сила F его притяжения к Земле уменьшается. А как изменяется эта сила при погружении тела в шахту, доходящую до центра Земли? Постройте график зависимости $F(r)$ для

тела массой m , где r — расстояние тела от центра Земли. Считайте Землю однородным шаром.

☑ См. рисунок а.

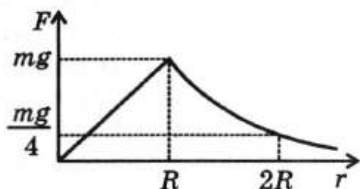


Рис. а

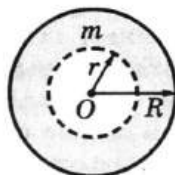


Рис. б

Решение. Обозначим радиус и массу Земли соответственно R и M . Тогда при $r \geq R$ согласно закону всемирного тяготения $F = GMm/r^2$. Чтобы найти вид зависимости $F(r)$ при $r < R$, проведем мысленно сферу радиусом r с центром в центре Земли и рассмотрим отдельно силу притяжения тела к той части Земли, которая находится внутри этой сферы (обозначим массу этой части M'), и к сферическому слою, выделенному на рисунке б. Сила притяжения к слою равна нулю (см. задачу О-28). Таким образом, тело в шахте испытывает притяжение только части Земли радиусом r и массой M' . Поскольку объем сферы пропорционален кубу ее радиуса, $M'/M = r^3/R^3$, откуда

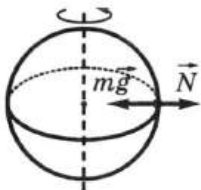
$$F = G \frac{M' m}{r^2} = G \frac{M m}{R^3} r. \text{ Учитывая, что } G \frac{M}{R^2} = g, \text{ запишем}$$

полученные результаты в виде: $F = mgr/R$ при $r < R$;

$F = mgR^2/r^2$ при $r \geq R$. График зависимости $F(r)$ показан на рисунке а. Как видим, наибольшая сила тяготения — на поверхности Земли. Следует, правда, сделать оговорку: в действительности плотность Земли не всюду одинакова, и поэтому приведенный результат для $r < R$ не вполне точен.

- О-30.** К какому уменьшению веса тел на экваторе по сравнению с полюсом приводит вращение Земли? В каком направлении вдоль экватора и с какой скоростью v должен лететь самолет, чтобы на нем этот эффект не наблюдался? Считайте Землю однородным шаром.

- ☑ Вес уменьшается на 0,35 %; самолет должен лететь на запад со скоростью 460 м/с.



Решение. Легче всего ответить на второй вопрос: самолет не должен участвовать в суточном вращении Земли. Для этого он должен лететь с востока на запад со скоростью суточного вращения точек земного экватора $v = 2\pi R/T$, где R — радиус Земли, T — продолжительность суток. Найдем теперь относительное уменьшение веса тел на экваторе, считая Землю однородным шаром. Тело, находящееся на полюсе, не участвует в суточном вращении Земли, поэтому его вес равен силе тяжести $m\vec{g}^*$. На тело, покоящееся на экваторе, действует *такая же* по модулю сила тяготения $m\vec{g}$ и сила $\vec{N}$ реакции опоры (см. рисунок). Их равно-

действующая, равная по модулю $mg - N$, придает телу центростремительное ускорение $a = v^2/R = 4\pi^2 R/T^2$.

Следовательно, $N = m(g - a) = mg \left(1 - \frac{4\pi^2 R}{gT^2} \right)$. Вес P равен по

модулю силе N (согласно третьему закону Ньютона). Относительное уменьшение веса на экваторе: $\varepsilon = (mg - P)/(mg) = 4\pi^2 R/(gT^2) = 3,5 \cdot 10^{-3}$. На самом деле уменьшение веса на экваторе по сравнению с полюсом составляет не 0,35 %, а около 0,5 %. Это объясняется отклонением формы земной поверхности от сферической: Земля сплюснута у полюсов. Однако такая форма Земли тоже обусловлена ее суточным вращением.

- О-31.** Как изменилась бы продолжительность земного года, если бы масса Земли стала равной массе Солнца, а расстояние между ними осталось тем же?

Решение. В первом приближении пренебрегаем массами всех других планет Солнечной системы. Земля вращается

* Здесь через g обозначено ускорение свободного падения на полюсе Земли.

вокруг центра масс системы Солнце–Земля. Так как масса Солнца во много раз превышает массу Земли, то можно считать, что центр масс системы совпадает с центром Солнца. Если бы масса Земли увеличилась и сделалась равной массе Солнца, то в этом случае центр масс системы Солнце–Земля находился бы на середине расстояния R между Солнцем и Землей, то есть радиус земной орбиты уменьшился бы вдвое. Поскольку ускорение Земле по-прежнему будет сообщать притяжение Солнца, находящегося от нее на прежнем расстоянии, ускорение Земли должно остаться

прежним: $\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{R}{2} = \frac{4\pi_1^2}{T_0^2} \cdot R$, где T_0 — продолжительность

земного года. Отсюда $T = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$. Итак, продолжительность

года уменьшилась бы в $\sqrt{2}$ раз. Заметим, что пользоваться при решении этой задачи третьим законом Кеплера нельзя (подумайте, почему).

8. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ ДИНАМИКИ

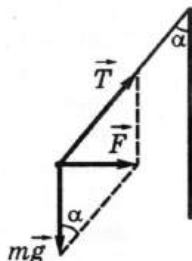
- 8.1. На тележке, движущейся горизонтально с ускорением a , установлен штатив, на котором подвешен шарик на нити. Найдите угол α отклонения нити от вертикали и силу T натяжения нити.

☑ $\alpha = \arctg(a/g); T = m\sqrt{g^2 + a^2}.$

Решение. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{T}$ натяжения нити (см. рисунок). Их равнодействующая $\vec{F}$ сообщает шарiku ускорение $\vec{a}$, т. е. $\vec{F} = m\vec{a}$.

Следовательно, $\tg \alpha = a/g$.

Воспользовавшись теоремой Пифагора, находим, что $T = m\sqrt{g^2 + a^2}$.



- 8.2. К концам шнура, перекинутого через блок, подвешены грузы с массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 150$ г. Найдите ускорения грузов, силу натяжения шнура T и показание F динамометра, на котором висит блок.

☑ $2 \text{ м/с}^2; 1,2 \text{ Н}; 2,4 \text{ Н}.$

Решение. Благодаря нерастяжимости шнура перемещения обоих грузов одинаковы по величине; значит, одинаковы по величине и их ускорения: $a_1 = a_2 = a$. Пренебрегая массами шнура и блока, а также трением в блоке, можно считать силу T натяжения шнура всюду одинаковой. На рисунке a показаны действующие на грузы силы. Запишем уравнения второго закона Ньютона для каждого из грузов в проекции на ось y :

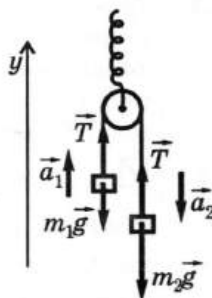


Рис. а

$$\begin{cases} m_1 a = -m_1 g + T, \\ -m_2 a = -m_2 g + T. \end{cases}$$

Отсюда $a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = 2,0 \text{ (м/с}^2\text{)}, T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 1,2 \text{ (Н)}.$

Для нахождения силы F упругости пружины динамометра надо рассмотреть силы, действующие на блок (см. рис. 6).

Из условия равновесия блока получаем, что $F = 2T = 2,4$ (Н). На примере данной задачи покажем два эффективных метода проверки полученного результата. Первый из них — проверка на симметрию. Очевидно, если поменять грузы местами, натяжение шнура и величина ускорения грузов не должны измениться. Полученные для a и T выражения этому требованию удовлетворяют (при замене $m_1 \leftrightarrow m_2$ значение T не изменяется, а ускорение меняет только знак).

Второй метод — проверка на частные и предельные случаи. Например, при $m_1 = m_2 = m$ ускорение должно быть равно нулю, а $T = mg$. При $m_1 \rightarrow 0$ должно быть $a \rightarrow g$, $T \rightarrow 0$ (груз 2 свободно падает и поэтому находится в состоянии невесомости). Полученные формулы удовлетворяют и этим требованиям. Обратим внимание на то, что *вес обоих грузов одинаков*, как бы сильно ни отличались их массы: ведь оба груза действуют на шнур с одинаковыми силами. Дело в том, что вес меньшего груза увеличивается (ускорение этого груза направлено вверх), а вес большего груза уменьшается (ускорение этого груза направлено вниз).

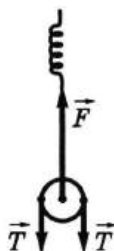


Рис. 6

- 8.3. Тело соскальзывает с наклонной плоскости без начальной скорости. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^\circ$, длина наклонной плоскости $l = 2$ м, коэффициент трения тела о плоскость $\mu = 0,3$. С каким ускорением движется тело? Сколько времени длится соскальзывание?

☑ $a = 2,4$ м/с²; $t = 1,3$ с.

Решение. На рисунке показаны действующие на тело силы. Согласно второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$. В проекциях на оси координат

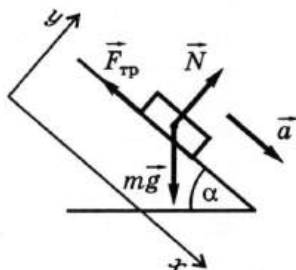
$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N. \quad (2)$$

Сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$. Из уравнения (2) следует $N = mg \cos \alpha$, так что $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$. Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$. Из соотношения $l = at^2/2$ получаем

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} = 1,3 \text{ (с)}.$$

Из формулы для ускорения следует, что соскальзывание может происходить при $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ (в данном случае это условие выполнено). При $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ получаем $a < 0$. Это означает, что если бы тело в начальный момент двигалось вниз по наклонной плоскости с некоторой начальной скоростью, то его движение замедлялось бы.



- 8.4. Шарик, подвешенный на нити длиной l , равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. При этом нить все время образует с вертикалью угол φ (такую систему называют коническим маятником). Найдите период T вращения шарика.

$$\checkmark \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \varphi}{g}}.$$

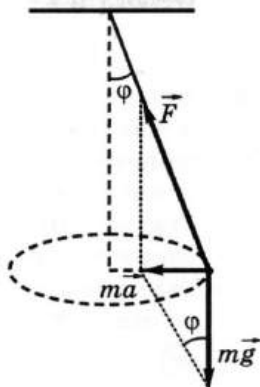
Решение. Согласно второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$. Отсюда (см. рисунок) $a = g \operatorname{tg} \varphi$. С другой стороны,

$$a = \frac{v^2}{l \sin \varphi}. \text{ Отсюда } v = \sin \varphi \sqrt{\frac{gl}{\cos \varphi}} \text{ и}$$

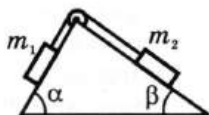
$$T = \frac{2\pi l \sin \varphi}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \varphi}{g}}. \text{ При } \varphi \ll 1$$

получаем $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, что совпадает с

периодом малых колебаний математического маятника.

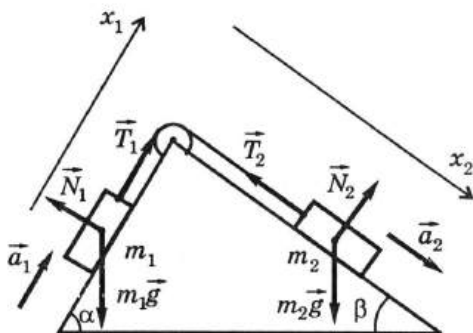


- 8.5. Через блок, укрепленный на ребре призмы (см. рисунок), перекинута нить с грузами на концах. Найдите ускорение грузов a и силу натяжения нити T . Трением можно пренебречь.



$$\checkmark \quad a = \frac{m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g, \quad T = \frac{m_1 m_2 g (\sin \alpha + \sin \beta)}{m_1 + m_2}.$$

Решение. На рисунке показаны действующие на грузы силы ($T_1 = T_2 = T$). Поскольку нить нерастяжима, $a_1 = a_2 = a$ (направления ускорений на рисунке выбраны предположительно, если решение покажет, что



$a < 0$, их следует изменить на противоположные):

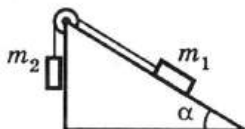
Уравнения второго закона Ньютона для каждого из грузов удобно спроецировать на «свою» ось, параллельную соответствующей наклонной плоскости:

$$(x_1) \quad m_1 a = -m_1 g \sin \alpha + T,$$

$$(x_2) \quad m_2 a = m_2 g \sin \beta - T.$$

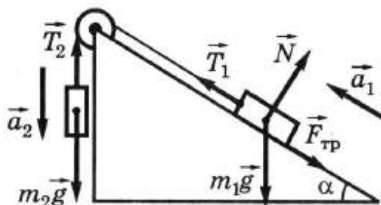
$$\text{Отсюда } a = \frac{m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g, \quad T = \frac{m_1 m_2 g (\sin \alpha + \sin \beta)}{m_1 + m_2}.$$

- 8.6.** В показанной на рисунке системе $\alpha = 20^\circ$, $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1$ кг. Коэффициент трения между первым грузом и наклонной плоскостью $\mu = 0,1$. Грузы отпускают без начальной скорости. а) Найдите ускорение a системы грузов и силу натяжения нити T . б) Как изменится ответ, если коэффициент трения станет равным 0,3?



☑ а) $a = 0,42$ м/с²; $T = 9,4$ Н; б) $a = 0$, $T = 9,8$ Н.

Указание. Чтобы определить возможное направление движения, необходим предварительный анализ условия (в этом состоит типичная сложность задач с учетом трения).

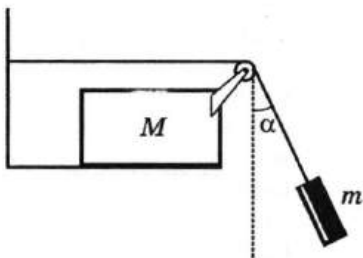


Непосредственный подсчет показывает, что если бы трение исчезло, то при заданных в условии значениях α , m_1 и m_2 груз 1 поднимался бы, а груз 2 опускался. Значит,

если грузы движутся, то именно в этих направлениях. Теперь можно расставить действующие на систему силы (см. рисунок).

Олимпиадные задачи

- О-32. В механической системе, изображенной на рисунке, брусок массой M может скользить по рельсам без трения. В начальный момент подвешенный на нити груз отводят на угол α от вертикали и отпускают. Какова масса m этого груза, если угол, образуемый нитью с вертикалью, не меняется при движении системы?



✓ $m = M \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha - \sin 2\alpha}.$

Указание. Ускорение груза относительно бруска направлено вдоль нити и по модулю равно ускорению бруска.

- О-33. На вертикальной оси электродвигателя укреплен отвес — маленький шарик на нити длиной $l = 12,5$ см. При медленном вращении двигателя нить остается вертикальной, а при быстром вращении шарик движется как конический маятник. При какой частоте n_1 вращения двигателя нить начинает отклоняться от вертикали? Чему равен угол ее отклонения φ_2 при частоте вращения $n_2 = 3$ с⁻¹?

✓ $n_1 = 1,4$ с⁻¹; $\varphi_2 = 77^\circ.$

Решение. Рассмотрим движение конического маятника.

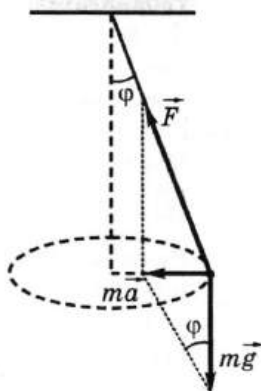
Центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{r}$

ему придает равнодействующая сил натяжения нити T и тяжести mg :

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$ Отсюда получаем, что

$ma = mgtg\varphi.$ Учитывая, что $r = l\sin\varphi$

и $v = 2\pi n r$, приходим к уравнению относительно φ : $\sin\varphi(4\pi^2 n^2 l - g/\cos\varphi) = 0.$ Это уравнение имеет при всех n



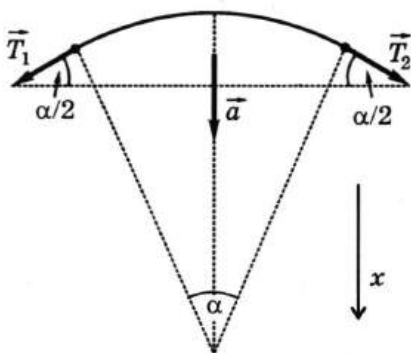
по крайней мере одно решение $\varphi_1 = 0$. Второе решение $\varphi_2 = \arccos\left(\frac{g}{4\pi^2 n^2 l}\right)$ появляется при $\frac{g}{4\pi^2 n^2 l} < 1$, т. е. при $n > n_1 = 1/(2\pi)\sqrt{g/l} = 1,4$ (с⁻¹). Какой смысл следует приписать наличию двух решений при достаточно быстром вращении? Оба они соответствуют состояниям равновесия в том смысле, что значения φ могут оставаться неизменными со временем. Но что произойдет, если вначале $\varphi = 0$, а затем нить случайно отклонится от вертикали на малый угол α ? Для ответа на этот вопрос удобно перейти во вращающуюся (неинерциальную) систему отсчета. В ней при отклонении нити от вертикали возникает сила инерции $F_{ин} = ma \approx m\omega^2 l\alpha$, направленная *от оси вращения*, и «возвращающая» сила (равнодействующая $\vec{F}$ и $m\vec{g}$), равная при малых углах $mg\alpha$. Отношение этих сил равно $\omega^2 l/g = 4\pi^2 n^2 l/g$. При $n > n_1$ это отношение больше единицы, т. е. сила инерции больше возвращающей силы. Значит, случайно возникшее малое отклонение будет нарастать, и угол α увеличится до φ_2 . Таким образом, при быстром вращении вертикальное положение нити является неустойчивым и реальная система не будет сколько-нибудь долго находиться в этом положении. Итак, при $n < n_1$ угол $\varphi_1 = 0$; при $n_2 > n_1$ угол $\varphi_2 = \arccos\left(\frac{g}{4\pi^2 n^2 l}\right)$.

- О-34.** Металлическая замкнутая цепочка длиной $l = 62,8$ см насажена на диск. Диск раскручивают с помощью электродвигателя. Когда частота вращения диска достигает $n = 60$ с⁻¹, цепочка соскакивает с диска. Она ведет себя как жесткий обруч: может, например, катиться по столу, пока вращение не замедлится. Какова сила T натяжения цепочки в тот момент, когда она соскакивает с диска? Масса цепочки $m = 40$ г.

☒ $T = 90$ Н.

Решение. Цепочку удерживает на ободе диска сила трения. Эта сила уменьшается вместе с силой давления цепочки на диск. Можно считать, что непосредственно перед соскакиванием цепочки обе эти силы равны нулю.

На рисунке показаны силы, действующие при этом на малый элемент цепочки, масса которого $\Delta m = \frac{\alpha}{2\pi} m$.



Уравнение второго закона Ньютона в проекции на ось x имеет вид $\Delta m \cdot a = 2T \sin \frac{\alpha}{2}$, где $T = T_1 = T_2$. Учитывая, что $a = 4\pi^2 n^2 R$, $R = l/(2\pi)$, $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$, получаем $\frac{\alpha m}{2\pi} \cdot \frac{4\pi^2 n^2 l}{2\pi} = 2T \cdot \frac{\alpha}{2}$. Отсюда $T = mn^2 l = 90$ (Н). Тонкая цепочка при таком натяжении может порваться.

9. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИКИ

- 9.1. К горизонтальному стержню подвешен груз массой 50 кг (см. рисунок). Каковы силы давления стержня на опоры, если $AC = 40$ см, $BC = 60$ см? Массой стержня можно пренебречь.

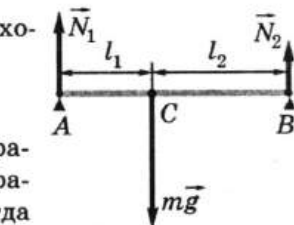
☒ $N_1 = 300$ Н; $N_2 = 200$ Н.

Решение. Поскольку стержень находится в равновесии, то

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0.$$

Отсюда $N_1 + N_2 = mg$. Применим правило моментов, считая, что ось вращения проходит через точку C . Тогда $N_1 l_1 = N_2 l_2$.

Из уравнений $N_1 + N_2 = mg$ и $N_1 l_1 = N_2 l_2$ получаем $N_1 = mg l_2 / (l_1 + l_2)$, $N_2 = mg l_1 / (l_1 + l_2)$. Подставляя числовые данные, находим $N_1 = 300$ Н, $N_2 = 200$ Н.

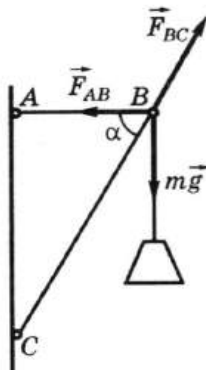
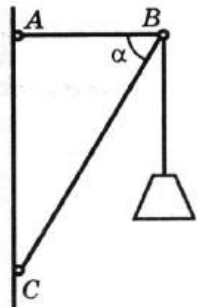


- 9.2. Невесомые стержни AB и BC шарнирно закреплены в точках A , B , C (см. рисунок). С какими силами растянуты или сжаты стержни, если $\alpha = 60^\circ$, а масса подвешенного в точке B фонаря $m = 3$ кг?

☒ Стержень AB растянут силой 17 Н, а стержень BC сжат силой 34 Н.

Решение. Шарнирно закрепленные стержни могут быть только растянуты или сжаты силами, приложенными к их концам, т. е. действующие на точку B со стороны этих стержней силы $\vec{F}_{AB}$ и $\vec{F}_{BC}$ направлены вдоль стержней.

Выбор направления сил упругости сделан также с учетом того, что при подвешивании груза стержень AB растягивается, а стержень BC сжимается. Поскольку равнодействующая



трех показанных на рисунке сил равна нулю, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси получаем $F_{BC} \cos \alpha - F_{AB} = 0$, $F_{BC} \sin \alpha - mg = 0$. Отсюда

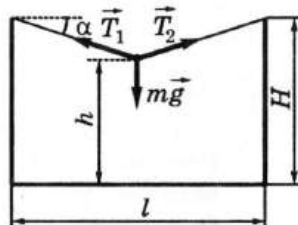
$$F_{BC} = \frac{mg}{\sin \alpha} = 34 \text{ (Н)}, F_{AB} = mg \operatorname{ctg} \alpha = 17 \text{ (Н)}.$$

- 9.3. Фонарь массой $m = 10$ кг висит посредине улицы шириной $l = 10$ м. Допустимая сила натяжения каната $T = 500$ Н. На какой высоте H надо закрепить концы каната, чтобы точка подвеса фонаря находилась на высоте $h = 5$ м?

✓ $H > 5,5$ м.

Решение. Равнодействующая трех сил, приложенных в точке подвеса фонаря (см. рисунок) равна нулю.

Следовательно, $2T_1 \sin \alpha - mg = 0$, где $T_1 = T_2 < T$. Учитывая, что $2(H - h) = l \operatorname{tg} \alpha$, и выражая $\operatorname{tg} \alpha$



через $\sin \alpha$, получаем $H > h + \frac{mgl}{2\sqrt{4T^2 - (mg)^2}} = 5,5 \text{ (м)}.$

- 9.4. К однородной балке массой $m_1 = 400$ кг и длиной $l = 7$ м подвешен груз массой $m_2 = 700$ кг на расстоянии $a = 2$ м от одного из концов. Балка концами лежит на опорах. Какова сила давления на каждую из опор?

✓ 6,9 кН и 3,9 кН.

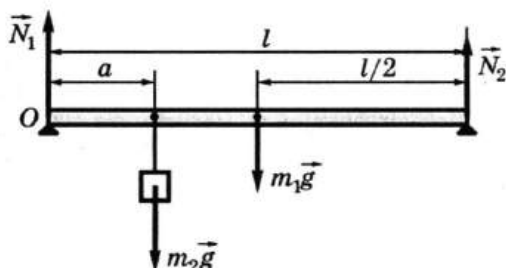
Решение. На рисунке показаны действующие на систему силы ($\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ — силы реакции опор). Два условия равновесия* системы имеют вид $N_1 + N_2 - m_1 g - m_2 g = 0$ и $N_2 l - m_1 gl/2 - m_2 ga = 0$. Моменты сил вычислены здесь относительно оси, проходящей через точку O (левый конец балки). Из условий равновесия находим:

$$N_1 = \frac{1}{2} m_1 g + \frac{l-a}{l} m_2 g = 6,9 \text{ (кН)}, N_2 = \frac{1}{2} m_1 g + \frac{a}{l} m_2 g = 3,9 \text{ (кН)}.$$

Согласно третьему закону Ньютона силы F_1 и F_2 давления балки на опоры равны по модулю соответствующим си-

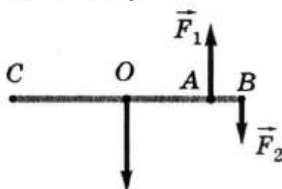
* Первым условием равновесия называется равенство нулю равнодействующей всех приложенных к телу сил ($\sum \vec{N} = 0$), а вторым — равенство нулю алгебраической суммы моментов всех сил ($\sum M = 0$).

лам реакции N_1 и N_2 . Как и следовало ожидать, вес балки распределится между опорами поровну, а вес груза — обратно пропорционально расстояниям до опор.



- 9.5. Длинный стержень легче удерживать в горизонтальном положении за середину, чем за конец. Почему?

Решение. Если стержень BC (см. рисунок) удерживать за середину O , то необходимо прилагать силу, равную силе тяжести стержня mg . Если же стержень удерживать за конец в горизонтальном положении силами F_1 и F_2 , то необходимо уравновесить момент, создаваемый силой тяжести стержня.



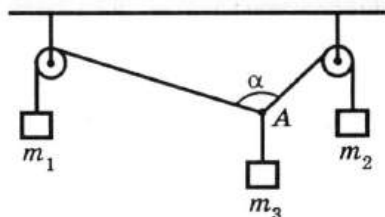
Так как плечо AB удерживающей силы F_1 меньше половины длины стержня, то удерживающая сила должна быть существенно больше силы тяжести стержня mg .

- 9.6. Почему конькобежцы, разгоняясь, размахивают руками?

Решение. Резкие движения ног конькобежца вызывают появление моментов сил, стремящихся повернуть его корпус вокруг вертикальной оси. Поэтому конькобежец в такт движению ног размахивает руками так, чтобы движением рук создать моменты сил, противодействующие моментам сил, обусловленным движением ног, и компенсирующие их.

- 9.7. К концам нити, переброшенной через два блока, подвесили грузы m_1 и m_2 (см. рисунок). Какой груз m_3 надо подвесить к нити между блоками, чтобы при равновесии угол α был равен 120° ?

Рассмотрите случаи: а) $m_1 = m_2 = 4$ кг; б) $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 5$ кг.



✓ а) $m_3 = 4$ кг; б) $m_3 = 4,4$ кг.

Решение. Сила натяжения каждой нити равна весу неподвижно висающего на ней груза (см. рис. а); следовательно, $T_1 = m_1 g$, $T_2 = m_2 g$. Согласно условию равновесия $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m_3 \vec{g} = 0$. Вместо того чтобы проецировать силы на различные оси, в данном случае удобно изобразить треугольник сил (см. рис. б), выражающий условие равновесия. Применяя теорему косинусов, получаем $(m_3 g)^2 = T_1^2 + T_2^2 - 2T_1 T_2 \cos(\pi - \alpha)$, откуда получаем:

$$m_3 = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \alpha}.$$

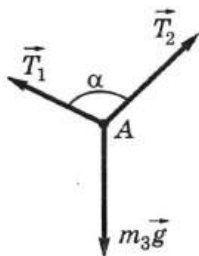


Рис. а

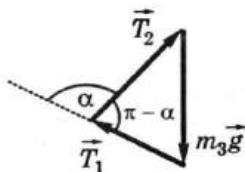


Рис. б

- 9.8. Если груз лежит на левой чашке неравноплечих весов, его уравнивают гири массой $m_1 = 40$ г на правой чашке. Если же груз положить на правую чашку, его уравновесят гири массой $m_2 = 10$ г на левой чашке. Какова масса m груза? Во сколько раз одно плечо весов длиннее другого? Массой самих весов можно пренебречь.

✓ $m = 20$ г. Левое плечо весов вдвое длиннее правого.

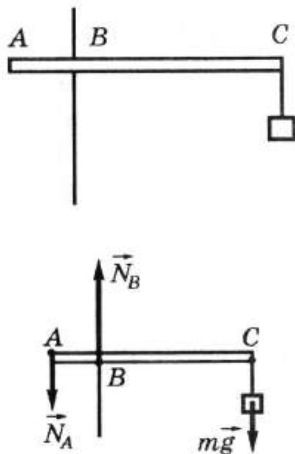
Решение. Обозначим l_1 и l_2 длины соответственно левого и правого плеч рычага. Из условия равновесия рычага $mgl_1 = m_1 gl_2$, $mgl_2 = m_2 gl_1$. Мы получили два урав-

нения для трех неизвестных, но нам не нужно находить все неизвестные величины, достаточно найти массу груза и отношение величин l_1 и l_2 . Перемножив уравнения, получим $m = \sqrt{m_1 m_2} = 20$ (г), а разделив их друг на друга, получим $l_1/l_2 = \sqrt{m_1/m_2} = 2$.

- 9.9. Гладкий невесомый стержень AC длиной 1 м вставлен горизонтально с малым зазором по толщине на глубину $AB = 0,2$ м в вертикальную стену (см. рисунок). К концу C стержня подвешен груз весом $P = 100$ Н. Найдите силы реакции стенки в точках A и B.

☑ $N_A = 400$ Н; $N_B = 500$ Н.

Решение. Стержень давит на стену в точке A с силой, направленной вверх, а в точке B — вниз. Силы реакции опор $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$



(см. рисунок) направлены соответственно вниз и вверх. Первое и второе условия равновесия имеют вид $N_B = N_A + mg$ и $N_B \cdot AB = mg \cdot AC$ (моменты сил вычислены относительно точки A). Отсюда: $N_B = mg \cdot AC/AB = P \cdot AC/AB = 500$ (Н), $N_A = mg \frac{AC - AB}{AB} = P \frac{BC}{AB} = 400$ (Н). Заметим, что обе силы реакции намного превышают вес груза, поскольку AB значительно меньше AC .

- 9.10. Лестница опирается на гладкую вертикальную стену. Коэффициент трения между ножками лестницы и полом равен μ . Какой наибольший угол $\alpha_{\max}$ может образовывать лестница со стеной? Центр тяжести лестницы совпадает с ее серединой.

☑ $\alpha_{\max} = \arctg(2\mu)$.

Решение. Обозначим массу лестницы m , а длину l (см. рисунок). Запишем условия равновесия, вычисляя моменты сил относительно точки O (при этом моменты двух сил обращаются в нуль):

$$F_{\text{тр}} = N_2, N_1 = mg,$$

$$mg \frac{l}{2} \sin \alpha - N_2 l \cos \alpha = 0.$$

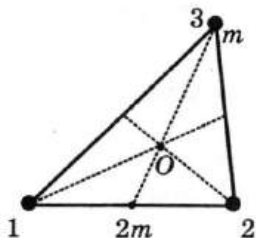
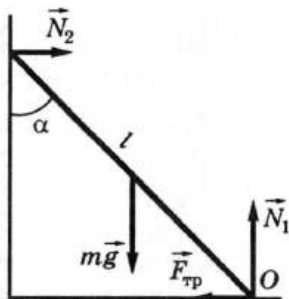
Поскольку $F_{\text{тр}} < \mu N_1$, получаем $\operatorname{tg} \alpha < 2\mu$.

- 9.11. В вершинах треугольника помещены шарики равной массы. Найдите положение центра тяжести системы.

☒ Центр тяжести находится в точке пересечения медиан треугольника.

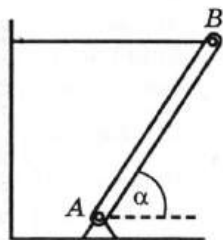
Решение. Центр тяжести шариков 1 и 2 находится в середине соединяющей их стороны треугольника (см. рисунок). Остается найти центр тяжести O системы, состоящей из шарика массой m и точки массой $2m$, лежащих на концах медианы треугольника.

Точка O находится на той же медиане и делит ее в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника. Точно так же убеждаемся, что точка O должна принадлежать и двум другим медианам и делить их в таком же отношении (кстати, мы «физически» доказали хорошо известную геометрическую теорему).



Олимпиадные задачи

- О-35. Тонкий однородный стержень укреплен на шарнире в точке A и удерживается в равновесии горизонтальной нитью (см. рисунок). Масса стержня $m = 1$ кг, угол его наклона к горизонту $\alpha = 45^\circ$. Найдите величину и направление силы $\vec{N}$ реакции шарнира.



- ✓ $N = 11 \text{ Н}$; сила N образует с вертикалью угол $\beta = 27^\circ$.

Решение. На рисунке показаны действующие на стержень силы (направление искомой силы $\vec{N}$ указано ориентировочно).

Приравняв нулю алгебраическую сумму моментов сил относительно точки A , получим

$$T \cdot AB \sin \alpha - mg \frac{AB}{2} \cos \alpha = 0.$$

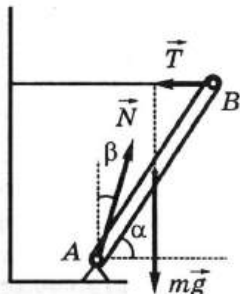
Отсюда $T = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \alpha$. Из равенства нулю равнодействующей всех трех сил следует: $N_x = T$, $N_y = mg$. Тогда

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \frac{mg}{2} \sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 11 \text{ (Н)}.$$

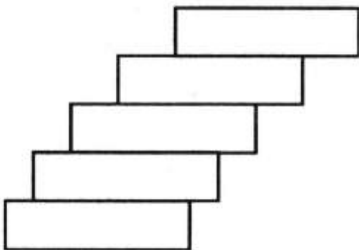
Угол β , образованный силой $\vec{N}$ с вертикалью, находим из соотношения

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{N_x}{N_y} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2}; \text{ отсюда } \beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2} \right) = 27^\circ.$$

Обратите внимание, что линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке: как следует из правила моментов, это необходимое условие равновесия твердого тела.



- О-36. Пять кирпичей одинаковой длины l кладут без раствора один на другой так, что очередной кирпич выступает над нижележащим (см. рисунок). На какое наибольшее расстояние может выступать правый край самого верхнего кирпича над правым краем самого нижнего кирпича?



- ✓ $25l/24$.

Решение. Будем нумеровать кирпичи, начиная с верхнего. Центр тяжести кирпича отстоит от его края на $l/2$. Поэтому первый кирпич может выступать над краем второго не более чем на $l/2$. Тогда общий центр тяжести C_2 двух верхних кирпичей расположен на расстоянии $l/4$ по

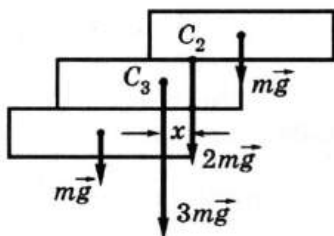
горизонталь от края второго кирпича (см. рисунок). Именно на такое расстояние и может выступать второй кирпич над третьим.

Центр тяжести трех верхних кирпичей C_3 определяется из условия $mg\left(\frac{l}{2} - x\right) = 2mg \cdot x$,

откуда $x = l/6$, т. е. третий кирпич может выступать над четвертым на $1/6$ своей длины. Аналогично доказы-

вается, что четвертый кирпич

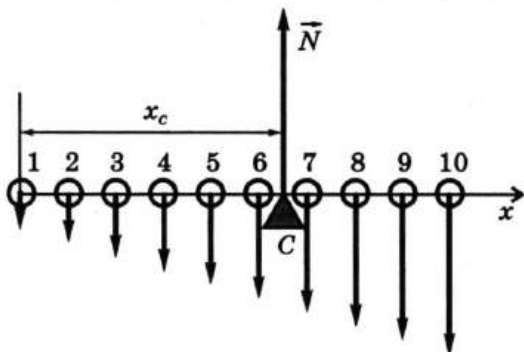
может выступать над пятым на $1/8$ своей длины. Таким образом, смещение верхнего кирпича относительно нижнего не должно превышать $l/2 + l/4 + l/6 + l/8 = 25l/24$. Как видим, верхний кирпич может *целиком* выйти за пределы площади опоры! Однако равновесие уложенных таким образом кирпичей неустойчиво.



- О-37. Десять шариков с массами 100 г, 200 г, 300 г, ..., 1000 г укреплены в указанном порядке на невесомом стержне длиной 90 см так, что расстояние между центрами соседних шариков равно 10 см. Найдите положение центра масс системы.

☒ Центр масс системы совпадает с центром шарика массой 700 г.

Решение. В однородном поле тяготения центр масс системы совпадает с центром тяжести. Поэтому найдем точку, в которой нужно разместить под стержнем опору, чтобы стержень находился в равновесии (см. рисунок).

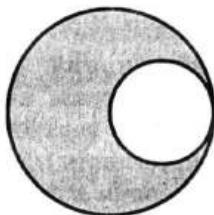


Поместим начало координат в центре шарика 1 и будем вычислять моменты сил относительно этой точки. Тогда два условия равновесия принимают вид:

$$N - \sum_{i=1}^{10} m_i g = 0, \quad Nx_c - \sum_{i=1}^{10} m_i g x_i = 0. \quad \text{Отсюда } x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}.$$

Подставляя числовые значения, получаем $x_c = 60$ см.

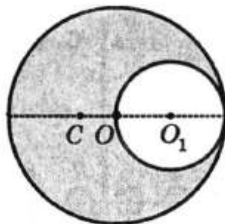
- О-38.** Однородная тонкая пластина имеет форму круга радиусом R , в котором вырезано круглое отверстие радиусом $R/2$ (см. рисунок). Где находится центр тяжести пластины?



- ☒ На расстоянии $R/6$ от центра большого круга (точка C на рисунке).

Решение. Из соображений симметрии следует, что центр тяжести C лежит на прямой OO_1 (см. рисунок). Если заполнить отверстие, то центр тяжести окажется в точке O . Значит, эта точка делит отрезок CO_1 в отношении, обратном отношению масс пластины с вырезом и «добавленного» круга. Поскольку пластина однородна, масса фигуры пропорциональна ее площади, следовательно,

$$\frac{OC}{0,5R} = \frac{\pi(R/2)^2}{\pi R^2 - \pi(R/2)^2} = \frac{1}{3}. \quad \text{Отсюда } OC = R/6.$$



* Эта формула справедлива при любом расположении материальных точек (не обязательно вдоль прямой); аналогичные формулы справедливы и для двух других координат (y_c, z_c) центра масс.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

10. ИМПУЛЬС.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

- 10.1. Опытный вратарь, ловя мяч, расслабляет руки и слегка подается назад вместе с мячом. Зачем?

Решение. Расслабляя руки и подаваясь назад, вратарь увеличивает время взаимодействия с мячом и тем самым ослабляет силу удара. Неопытный игрок, наоборот, напрягает руки и тело и тем самым увеличивает силу удара, рискуя при этом упустить мяч.

- 10.2. На сколько сместится неподвижная лодка массой $M = 280$ кг, если человек массой $m = 70$ кг перейдет с ее носа на корму? Расстояние от носа до кормы $l = 5$ м, сопротивление воды пренебрежимо мало.

☒ 1 м.

Решение. Человек и лодка движутся в противоположные стороны. Согласно закону сохранения импульса $mv_{\text{ч}} = Mv_{\text{л}}$, где $v_{\text{ч}}$ и $v_{\text{л}}$ — модули скоростей человека и лодки относительно берега. Отсюда следует, что в любой момент времени $v_{\text{ч}}/v_{\text{л}} = M/m$. Поэтому $l_{\text{ч}}/l_{\text{л}} = v_{\text{ч}}/v_{\text{л}} = M/m$, где $l_{\text{ч}}$ и $l_{\text{л}}$ — модули перемещений человека и лодки относительно берега. Поскольку $l_{\text{ч}} + l_{\text{л}} = l$, находим $l_{\text{л}} = ml/(M + m) = 1$ (м).

- 10.3. Мяч массой $m = 300$ г упал с высоты $H = 1,23$ м на асфальт и подскочил на ту же высоту. Продолжительность удара об асфальт $t = 0,01$ с. Найдите среднюю силу удара $F_{\text{ср}}$. Как изменится эта сила, если мяч ударится о твердую поверхность, наклоненную под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту? Какой будет $F_{\text{ср}}$, если в обоих случаях заменить мяч пластилиновым шаром такой же массы? Продолжительность удара считайте во всех случаях одинаковой.

☒ Для мяча $F_{\text{ср}} = 32$ Н, в случае наклонной поверхности $F_{\text{ср}} = 28$ Н. Для пластилинового шара $F_{\text{ср}} = 180$ Н в обоих случаях.

Решение. Судя по высоте подскока мяча, удар об асфальт можно считать упругим: $\vec{v} = -\vec{v}_0$ ($\vec{v}_0$ — скорость мяча непосредственно перед ударом, $\vec{v}$ — после удара).

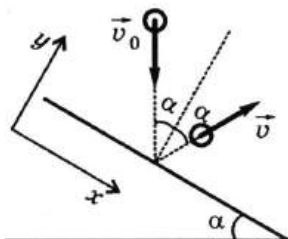
Из второго закона Ньютона следует $(\vec{F}_{\text{сп}} + m\vec{g}) \cdot t = m\vec{v} - m\vec{v}_0$.

Учитывая, что $v = v_0 = \sqrt{2gH}$, получаем $F_{\text{сп}} = \frac{2m\sqrt{2gH}}{t} + mg =$
 $= 32 \text{ (Н)}.$

Удар пластилинового шара неупругий ($v = 0$), поэтому

$$F_{\text{сп}} = \frac{m\sqrt{2gH}}{t} + mg = 18 \text{ (Н)}.$$

Для пластилинового шара этот ответ остается в силе и при ударе о наклонную поверхность. В случае же отскока мяча от наклонной поверхности (см. рисунок) сила упругости направлена нормально к поверхности, а $v_y = -v_{0y}$. Проецируя векторное равенство на ось y , находим



$$F_{\text{сп}} = m \cos \alpha \left(\frac{2\sqrt{2gH}}{t} + g \right) = 28 \text{ (Н)}.$$

Заметим, что при $H \gg gt^2$ слагаемым mg в выражениях для $F_{\text{сп}}$ можно было бы пренебречь.

Олимпиадные задачи

- О-39.** Ракета влетает в пылевое облако со скоростью v относительно облака. Пылинки оказались липкими: они соударялись с ракетой неупруго. Чтобы скорость движения не изменялась, пришлось включить двигатель, развивающий силу тяги F . Какая была бы нужна сила тяги для сохранения скорости, если бы ракета: а) влетела в то же облако со скоростью $2v$; б) влетела со скоростью v в другое облако, где концентрация частиц (т. е. число частиц в единице объема) в три раза больше?

- ☒ Чтобы двигаться вдвое быстрее, силу тяги надо увеличить в 4 раза; в более плотной части облака силу тяги надо увеличить в 3 раза.

Решение. При неупругом столкновении пылинки с ракетой ракета сообщает пылинке скорость, равную скорости ракеты, передавая тем самым пылинке и часть своего им-

пульса. Импульс силы тяги двигателя должен компенсировать передачу импульса пылинкам за любой промежуток времени Δt : $F\Delta t = Nmv$ (здесь m — масса пылинки; N — число частиц, столкнувшихся с ракетой за время Δt). Очевидно, N зависит от скорости v и «густоты» облака частиц. Обозначим через n концентрацию частиц в облаке. Если площадь поперечного сечения ракеты S , то за время Δt она столкнется со всеми частицами в объеме $Sv\Delta t$. Значит, $N = nSv\Delta t$ и $F = nmv^2S$. Мы видим, что F пропорциональна концентрации частиц n и квадрату скорости v . Итак, можно сделать следующий вывод: чтобы двигаться вдвое быстрее, силу тяги надо увеличить в 4 раза; в более плотной части облака силу тяги надо увеличить в 3 раза.

- О-40.** На конце соломинки массой M и небольшой длины l , лежащей на гладком столе, сидит кузнечик, масса которого m . С какой наименьшей скоростью v он должен прыгнуть, чтобы попасть на другой конец соломинки? Трением между столом и соломинкой пренебречь, соломинка не должна вращаться.

$$\checkmark \quad v = \sqrt{\frac{M}{m+M}} gl.$$

Решение. Если скорость кузнечика направлена под углом 45° к горизонту, то $v_r = v_s$. Оттолкнувшись от соломинки, кузнечик сообщит ей импульс, проекция которого на горизонтальное направление Mv_c равна mv_r . В результате соломинка переместится на расстояние $s_1 = v_c t$ в направлении, противоположном v_c . Кузнечик за это же время пролетит в горизонтальном направлении расстояние $s_2 = v_r t$ ($s_2 < l$). Чтобы кузнечик попал на конец соломинки, необходимо выполнение следующего условия: $s_1 + s_2 = l$.

Учитывая, что полет кузнечика продолжается $t = \frac{2v_s}{g}$, а скорость соломинки $v_c = \frac{m}{M} v_r$, получим $\frac{m}{M} v_r \frac{2v_s}{g} + v_r \frac{2v_s}{g} = l$. Поскольку $v_r = v_s = \frac{v}{\sqrt{2}}$, то $\frac{v^2}{g} \frac{m+M}{M} = l$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{M}{m+M}} gl.$$

О-41. Деревянный брусок падает вертикально со скоростью $v = 3$ м/с на горизонтальную ленту транспортера, движущегося со скоростью $u = 1$ м/с. Брусок после удара не подскакивает. При каком коэффициенте трения брусок не будет проскальзывать по транспортеру? Считайте, что удар длится очень короткое время.

☒ $\mu > 0,33$.

Решение. При ударе на брусок действует сила упругости $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (так как согласно условию удар длится очень короткое время, средняя сила удара достаточно велика, вследствие чего по сравнению с указанными силами силой тяжести можно пренебречь). Если брусок массой m при этом не проскальзывает, то $m\vec{u} - m\vec{v} = (\vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}) \cdot \Delta t$. Проецируя это уравнение на горизонтальное и вертикальное направления, получаем $mu = F_{\text{тр}} \Delta t$, $mv = N \Delta t$. Таким образом, $F_{\text{тр}}/N = u/v$; следовательно, $\mu \geq u/v$.

11. МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА. ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

- 11.1. Автомобиль массой $M = 2$ т разгоняется с места, въезжая на гору с уклоном $0,02$. Коэффициент сопротивления движению $\mu = 0,05$. Автомобиль набирает скорость $v = 97,2$ км/ч на участке длиной $s = 100$ м. Какую среднюю мощность $P_{\text{ср}}$ развивает двигатель?

✓ 120 кВт.

Решение. Из условия следует, что

$$\text{ускорение автомобиля } a = \frac{v^2}{2s}.$$

Поскольку $N = Fv$ и $N_{\text{ср}} = Fv_{\text{ср}} = Fv/2$, необходимо найти силу тяги F . Уравнение второго зако-

на Ньютона в проекциях на координатные оси (см. рисунок): $Ma = F - Mgs \sin \alpha - F_{\text{тр}}$, и $N - Mg \cos \alpha = 0$. Учитыва-

вая, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, находим $F = M \left(\frac{v^2}{2s} + g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha \right)$

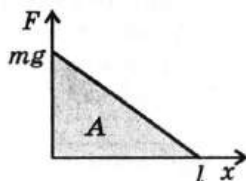
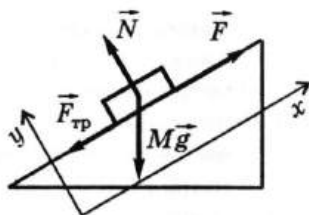
и подставляем это выражение в приведенную выше формулу для $N_{\text{ср}}$. При подстановке числовых значений можно воспользоваться тем, что для малых углов косинус примерно равен единице.

- 11.2. Какая минимальная работа A совершается при подъеме на крышу веревки длиной $l = 40$ м и массой $m = 6$ кг? В начальный момент вся веревка свешивалась вертикально с края крыши.

✓ $A = 1,2$ кДж.

Решение. При подъеме приходится преодолевать силу тяжести только той части веревки, которая все еще свешивается вниз. В тот момент, когда длина вытянутой части веревки равна x , для равномерного подъема требуется прикладывать силу $F(x) = mg(l - x)/l$. Работа, совершаемая этой силой при изменении x от 0 до l , численно равна площади под графиком $F(x)$ (см. рисунок): $A = mgl/2 = 1,2$ (кДж).

Можно также вычислить работу по подъему тела следующим образом:



$A = mg\Delta h$, где Δh — изменение высоты центра тяжести тела (в данном случае $\Delta h = l/2$).

- 11.3. Деревянный брусок висит на шнуре длиной l . В брусок выстрелили, пуля застряла в нем, и шнур отклонился от вертикали на угол α . Какова скорость пули v_0 ? Масса бруска M , масса пули m . Пуля летела горизонтально.

☒ $v_0 = 2 \frac{M+m}{m} \sqrt{gl} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$

Решение. Это известная задача о баллистическом маятнике. Распространенная ошибка при ее решении: «Кинетическая энергия E_k пули переходит целиком в потенциальную энергию E_p отклонившегося груза». На самом деле *механическая* энергия при неупругом ударе не сохраняется: большая ее часть переходит во внутреннюю энергию (тела нагреваются). Рассматриваемый процесс следует разбить на два этапа. Первый, очень короткий — соударение пули с бруском. При этом брусок приобретает скорость u , но практически не успевает сдвинуться с места. Механическая энергия не сохраняется, но сохраняется импульс: $mv_0 = (M+m)u$. На втором этапе процесса брусок с застрявшей в нем пулей отклоняется на угол α , поднимаясь при этом на высоту $h = l(1 - \cos \alpha)$. На этом этапе не происходит перехода механической энергии во внутреннюю, поэтому

$(M+m)u^2/2 = (M+m)gh$. Отсюда

$$v_0 = \frac{M+m}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 2 \frac{M+m}{m} \sqrt{gl} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

- 11.4. Человек прыгает в воду с высоты $h = 10$ м. На какую глубину H он бы при этом погрузился, если бы силы сопротивления воздуха и воды исчезли? Масса человека $m = 60$ кг, объем его тела $V = 66$ л.

☒ $H = 100$ м.

Решение. Суммарная работа всех приложенных к телу сил равна изменению его кинетической энергии. В данном случае и в верхней, и в нижней точках траектории кинетическая энергия человека равна нулю, поэтому $mgh - (F_A - mg)H = 0$, где $F_A = \rho gV$.

* Мы считаем шнур настолько длинным, что небольшое перемещение бруска за время соударения практически не отклоняет шнур от вертикали.

Отсюда $H = \frac{m}{\rho V - m} h = 100$ (м). Неправдоподобность по-

лученного ответа свидетельствует о том, что силы сопротивления (особенно при движении в воде) велики и пренебрегать ими нельзя.

- 11.5. Легкий теннисный мячик ударили ногой, и он полетел в направлении движения ноги. Какую скорость v приобрел мячик, если скорость движения ноги при ударе $u = 10$ м/с?

☒ 20 м/с.

Решение. Соударение ноги с мячиком можно считать упругим и центральным. Масса ноги во много раз превышает массу мячика, поэтому скорость ноги при ударе практически не изменяется. Удобно рассмотреть столкновение в системе отсчета, связанной с массивным телом (ногой). В этой системе отсчета начальная скорость мячика по модулю равна u , и при упругом ударе эта скорость изменяет направление на противоположное, не изменяясь по величине. Следовательно, скорость мячика относительно Земли $v = u + u = 2u$.

- 11.6. У какого из грузовиков, груженого или порожнего, больше тормозной путь при одной и той же скорости движения? Коэффициент трения одинаков, сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Из закона сохранения следует, что масса, скорость автомобиля и его тормозной путь связаны соотношением $\frac{mv^2}{2} = \mu mgl$. Отсюда следует, что тормозной путь не зависит от массы автомобиля.

- 11.7. С ледяной горки скатываются два мальчика разной массы на одинаковых санках. Одинаковый ли путь пройдет каждый из них по горизонтальному участку до остановки? Ответ объясните. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Одинаковый, так как с горы они движутся с одинаковым ускорением $a = g \sin \alpha$. На горизонтальном участке движутся с одинаковой начальной скоростью v_0 и кинетической энергией, равной $\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgl$. Отсюда следует,

что путь $l = \frac{v_0^2}{2\mu g}$ от массы не зависит.

- 11.8. На завод механических часов затрачивается примерно 1 мин времени. После этого часы работают почти сутки. Не нарушается ли в этом случае закон сохранения механической энергии?

☒ Нет.

Решение. Здесь выигрыш в работе не получается, так как мы проигрываем в мощности: $A_1 = A_2$; $N_1 t_1 = N_2 t_2$. Отсюда $\frac{N_1}{N_2} = \frac{t_2}{t_1}$.

- 11.9. Баржа плывет по реке со скоростью v . Когда она проплывает под мостом, на нее плавно опускают ящик массой m . Ящик скользит по барже и останавливается, оставив след длиной L . Найдите полную работу A сил трения: а) в системе отсчета, связанной с баржей; б) в системе отсчета, связанной с Землей. Коэффициент трения между ящиком и баржей равен μ .

☒ В обоих случаях $A = -\mu mgL$.

Решение. В случае *а* ответ очевиден, поскольку работу совершает только сила трения, действующая на ящик. Рассмотрим случай *б*: перемещение ящика относительно Земли равно $s - L$, где s — перемещение баржи за время скольжения ящика. Сила трения совершает над ящиком работу $A_1 = F_{\text{тр}}(s - L)$. Однако в этом случае и сила трения, действующая на баржу, тоже совершает работу. Эта работа $A_2 = -F_{\text{тр}}s$. Суммарная работа обеих сил трения $A = A_1 + A_2 = -F_{\text{тр}}L = -\mu mgL$. Таким образом, в любой системе отсчета суммарная работа сил трения одна и та же — она определяется относительным перемещением трущихся тел.

- 11.10. Автомобиль движется вверх по пологому склону со скоростью $v_1 = 6$ м/с и спускается по той же дороге со скоростью $v_2 = 9$ м/с. С какой скоростью v будет ехать этот автомобиль по горизонтальному участку этой же дороги, если мощность двигателя все время остается неизменной? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

☒ $v = 7,2$ м/с.

Решение. При малом угле α наклона дороги сила трения $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha \approx \mu mg$, т. е. практически та же, что и на горизонтальной дороге. Сила тяги на подъеме равна

$F_{\text{тр}} + mgs\sin\alpha$, на спуске $F_{\text{тр}} - mgs\sin\alpha$, а на горизонтальном участке $F_{\text{тр}}$. Мощность двигателя $N = mgv_1(\mu + \sin\alpha) = mgv_2(\mu - \sin\alpha) = \mu mgv$. Отсюда $N/v_1 + N/v_2 = 2N/v$ и, следовательно, $v = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 7,2 \text{ (м/с)}$.

- 11.11. Санки съезжают с горы, длина основания которой $a = 5 \text{ м}$, а высота $H = 2 \text{ м}$, и проезжают до остановки еще $s = 35 \text{ м}$ по горизонтальной площадке. Найдите коэффициент трения, считая его одинаковым на всем пути. Переход склона горы в горизонтальную поверхность считайте плавным.

☒ $\mu = 0,05$.

Решение. Кинетическая энергия санок равна нулю как в начале, так и в конце пути. Значит, начальная потенциальная энергия санок mgH целиком расходуется на работу против силы трения (потенциальная энергия переходит во внутреннюю энергию). Поскольку сила трения на склоне с углом наклона α равна $\mu mg\cos\alpha$, а на горизонтальном участке она равна μmg , получаем: $mgH = \mu mg\cos\alpha \cdot L + \mu mg \cdot s$.

Здесь L — длина склона горы. Учитывая, что $L\cos\alpha = a$, находим $\mu = H/(a + s) = 0,05$.

- 11.12. Два железнодорожных вагона массами m_1 и m_2 медленно движутся в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 . Вагоны сталкиваются, и пружины буферов расталкивают их так, что удар можно считать упругим. Какова максимальная энергия E упругой деформации пружин?

☒ $E = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$.

Решение. В момент наибольшего сжатия пружины оба вагона имеют одинаковую скорость v , которую можно найти из закона сохранения импульса: $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$. Согласно

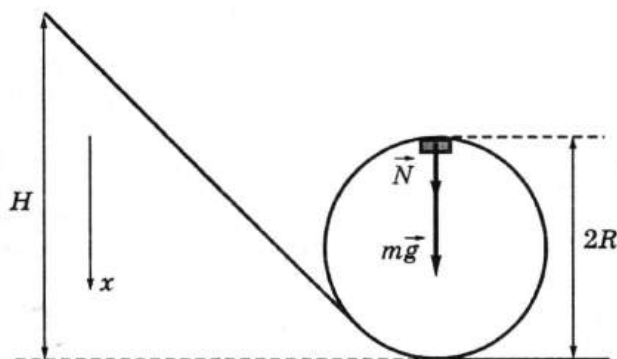
закону сохранения энергии $E + \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$,

откуда $E = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$.

11.13. Небольшое тело массой m соскальзывает без трения по наклонному желобу, переходящему в окружность радиуса R , и проходит «мертвую петлю», не отрываясь от желоба. С какой силой N давит тело на желоб в верхней точке окружности, если тело соскальзывает с высоты H ? С какой минимальной начальной высоты $H_{\min}$ должно соскальзывать тело, чтобы оно при движении не отрывалось от желоба?

☑ $H_{\min} = 5R/2$.

Решение. Если тело в верхней точке не отрывается от желоба, на тело в этой точке действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции желоба $\vec{N}$, направленные обе вниз.



Поскольку тело движется по окружности радиуса R , равнодействующая этих сил сообщает телу центростремительное ускорение v^2/R , где v — скорость тела в верхней точке окружности. В проекциях на направленную вниз ось x уравнение второго закона Ньютона $F_x = ma_x$ имеет вид: $N + mg = \frac{mv^2}{R}$. Чтобы найти правую часть этого уравнения, можно воспользоваться законом сохранения механической энергии, поскольку на тело при его движении действуют только сила тяжести и сила упругости. Сопоставим нулевой уровень потенциальной энергии с состоянием, при котором тело находится в нижней точке окружности. Тогда $mgH = 2mgR + \frac{mv^2}{2}$, откуда $\frac{mv^2}{R} = \frac{2mgH}{R} - 4mg$.

Подставляя полученное выражение для mv^2/R в уравнение $N + mg = \frac{mv^2}{R}$, находим $N + mg = \frac{2mgH}{R} - 4mg$, откуда $N = \frac{2mgH}{R} - 5mg$. Поскольку $N > 0$, получаем $H > 5R/2$, т. е. $H_{\min} = 5R/2$.

Олимпиадные задачи

- О-42. Ракета массой M с работающим двигателем неподвижно «зависла» над землей. Скорость вытекающих из ракеты газов равна u . Какова мощность N двигателя?

✓ $N = Mgu/2$.

Решение. За время t двигатель совершает работу $A = \Delta m \cdot u^2/2$, где Δm — масса выброшенных газов. Отсюда мощность двигателя $N = \frac{A}{t} = \frac{\Delta m \cdot u^2}{2t}$. Расход топлива $\Delta m/t$ можно найти из условия, что импульс газовой струи $\Delta m \cdot u$ равен импульсу силы тяжести Mgt . Отсюда получаем $\Delta m/t = Mg/u$ и подставляем в формулу для N .

- О-43. На гладком горизонтальном столе лежит клин массой M и высотой h . Угол наклона поверхности клина к горизонту равен α . С клина соскальзывает без трения небольшое тело массой m . Какую скорость $\vec{v}$ приобретет тело в конце спуска? Найдите модуль и направление скорости.

✓ $v = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{m/M}{(1 + m/M) + (1 + m/M)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)}$, скорость на-

правлена под углом $\beta = \operatorname{arctg}((1 + m/M) \operatorname{tg} \alpha)$ к горизонту.

Решение. В конце спуска тело приобретет скорость $v < \sqrt{2gh}$, поскольку часть его энергии перейдет в кинетическую энергию клина. Обозначим $\vec{V}$ скорость, приобретенную клином (см. рис. а). Запишем закон

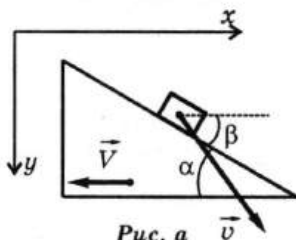


Рис. а

сохранения энергии $mgh = MV^2/2 + mv^2/2$ и закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось: $-MV + mv_x = 0$. Учтем также, что скорость тела *относительно клина* $\vec{v} - \vec{V}$ направлена под углом α к горизонту (см. рис. б), что приводит к соотношению $(v_x + V)\operatorname{tg}\alpha = v_y$.

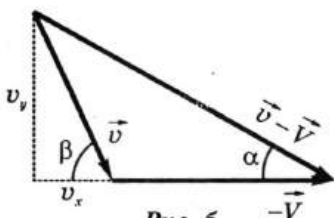


Рис. б

Решая систему, состоящую из этих трех уравнений и уравнения $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, получаем приведенное в ответе выражение для v , а также отношение $v_y/v_x = (1 + m/M)\operatorname{tg}\alpha$. Угол β наклона скорости $\vec{v}$ к горизонту определяется из условия $\operatorname{tg}\beta = v_y/v_x$. Заметим, что если $m \ll M$, то $v \approx \sqrt{2gh}$, $\beta \approx \alpha$. Если $m \gg M$, то $v \approx \sqrt{2gh}$, $\beta \approx \pi/2$ (тяжелое тело «не чувствует» легкого клина и падает почти отвесно).

- О-44.** Шар массой m_1 налетает на неподвижный шар массой m_2 . Происходит лобовое упругое соударение. Как зависит доля α переданной при соударении энергии от отношения масс шаров $k = m_1/m_2$? Постройте график зависимости $\alpha(k)$.

☒ См. рисунок.

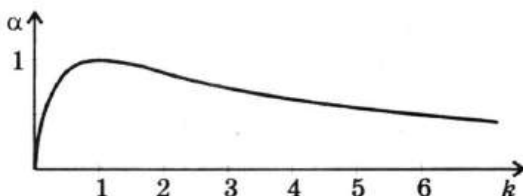
Решение. Пусть начальная скорость первого шара v_0 , а проекция его конечной скорости на направление начального движения равна v_1 .

Обозначив v_2 скорость второго шара после удара и записав законы сохранения энергии и импульса, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} m_1(v_0 - v_1) = m_2v_2, \\ m_1(v_0^2 - v_1^2) = m_2v_2^2. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим $v_0 + v_1 = v_2$. Решая это уравнение совместно с первым уравнением, находим $v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0$, $v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_0$. Доля энергии, пере-

данной первым шаром второму, $\alpha = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 v_0^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4k}{(1+k)^2}$. График зависимости $\alpha(k)$ приведен на рисунке.



Наиболее эффективная передача энергии происходит при значениях k , близких к единице: при $k = 1$ вся энергия налетающего шара передается другому шару.

- О-45. На гладкой горизонтальной поверхности покоится гладкая горка (см. рисунок). На горку налетает скользящее по поверхности небольшое тело. Каким может быть результат столкновения? При движении по горке тело не отрывается от нее.



- ✓ При $v < v_0 = \sqrt{2gH(1+m/M)}$ тело соскальзывает с горки, не дойдя до ее вершины и передав горке часть своего импульса и своей энергии; при $v > v_0$ тело преодолеет горку и продолжит движение со скоростью v , а горка сместится вправо от начального положения и остановится; при $v = v_0$ тело может некоторое время двигаться вместе с горкой, находясь на ее вершине.

Решение. Результат столкновения зависит от того, преодолеет ли тело вершину горки. Определим минимальную начальную скорость v_0 тела, при которой это возможно. Она, очевидно, позволяет телу подняться на вершину горки и там остановиться относительно горки, т. е. двигаться вместе с ней с некоторой скоростью u . Применяв к этому движению законы сохранения энергии и импульса, получаем

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+M) \cdot u^2}{2} + mgH; \quad mv_0 = (m+M) \cdot u.$$

Отсюда $v_0 = \sqrt{2gH \left(1 + \frac{m}{M}\right)}$. Заметим, что чем легче горка, тем бóльшая скорость требуется для ее преодоления. Когда $v = v_0$, тело может некоторое время находиться в неустойчивом равновесии на вершине горки. Если бы вершина горки была плоской, тело могло бы там остаться и столкновение можно было бы считать «неупругим» (кинетическая энергия не сохраняется, однако в данном случае она переходит не во внутреннюю, а в потенциальную энергию).

- О-46.** Потенциальная энергия взаимодействия двух материальных точек имеет вид $E_{\Pi} = C/r$, где r — расстояние между точками. Докажите, что эти материальные точки взаимодействуют с силой F , обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. При каких значениях C взаимодействие является притяжением?

Решение. При изменении расстояния между материальными точками на $\Delta r \ll r$ потенциальная энергия изменится на величину $\Delta E_{\Pi} = \frac{C}{r + \Delta r} - \frac{C}{r} = -\frac{C \cdot \Delta r}{r(r + \Delta r)} \approx -\frac{C \cdot \Delta r}{r^2}$.

Поскольку эта величина связана с работой силы соотношением $\Delta E_{\Pi} = -A = -F \cdot \Delta r$, получаем $F = \frac{C}{r^2}$. Если $C > 0$,

при сближении тел E_{Π} увеличивается. Это означает, что для сближения тел необходимо совершать работу, т. е. случай $C > 0$ соответствует отталкиванию. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что случай $C < 0$ соответствует притяжению. Заметим, что сила всемирного тяготения $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ принадлежит как раз к рассматри-

ваемому виду сил; потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек (или сферически симметричных тел) $E_{\Pi} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$. При подъеме

тела массой m на небольшую высоту h над поверхностью Земли потенциальная энергия увеличивается на величину

$$\Delta E_{\Pi} = -G \frac{mM}{R+h} + G \frac{mM}{R} = G \frac{mMh}{R(R+h)} \approx G \frac{mM}{R^2} h.$$

Здесь R и M — радиус и масса Земли. Учитывая, что $G \frac{mM}{R^2} = mg$, получаем $\Delta E_{\Pi} = mgh$ (чего и следовало ожидать).

О-47. Докажите, что кинетическую энергию системы движущихся материальных точек можно представить в виде

$$W = \frac{Mv_c^2}{2} + W_{\text{цм}}, \text{ где } M \text{ — суммарная масса всех матери-}$$

альных точек, v_c — скорость центра масс системы точек, $W_{\text{цм}}$ — кинетическая энергия материальных точек в системе отсчета их центра масс.

Решение. Обозначим $\bar{v}_i$ скорость i -той материальной точки, а $\bar{u}_i$ — скорость той же точки в системе отсчета центра масс. Эти скорости связаны соотношением $\bar{v}_i = \bar{v}_c + \bar{u}_i$. Кинетическая энергия N точек:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (\bar{v}_c + \bar{u}_i)^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i + \bar{v}_c \sum_{i=1}^N m_i \bar{u}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i u_i^2.$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^N m_i = M$, $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i u_i^2 = W_{\text{цм}}$, а $\sum_{i=1}^N m_i \bar{u}_i = 0$,

получаем формулу для W , приведенную в условии задачи*.

О-48. Какова кинетическая энергия W_k обруча массой m , катящегося без проскальзывания со скоростью v по плоской поверхности?

☒ $W_k = mv^2.$

Указание. См. задачу О-47.

* Для твердого тела доказанное утверждение принимает следующий вид: кинетическая энергия тела равна сумме кинетической энергии его поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс, и кинетической энергии вращения тела относительно центра масс.

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

12. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- 12.1. Математический маятник длиной 1 м колеблется с амплитудой 1 см. За какое время он пройдет путь, равный 1 см, если в начальный момент маятник проходит положение равновесия? За какое время маятник пройдет: а) первую половину этого пути; б) вторую половину этого пути?

☒ 0,5 с; 0,17 с; 0,33 с.

Решение. Поскольку амплитуда колебаний намного меньше длины маятника, колебания можно считать гармоническими. Их период $T = 2\pi\sqrt{l/g} = 2,0$ с. Путь, равный амплитуде колебаний, маятник проходит из положения равновесия за четверть периода, т. е. за 0,5 с. Для ответа на два последних вопроса необходимо использовать уравнение гармонических колебаний. Поскольку $x = 0$ при $t = 0$, это уравнение принимает вид $x = A\sin\omega t = A\sin(2\pi t/T)$. При $x = A/2$ получаем $t = T/12 = 0,17$ (с). На вторую половину пути маятнику понадобится время $T/4 - T/12 = T/6 = 0,33$ (с), т. е. вдвое больше, чем на первую половину. Это связано с тем, что при удалении от положения равновесия движение замедляется.

- 12.2. Зависит ли скорость, с которой маятник проходит положение равновесия, от амплитуды колебаний? Почему?

☒ Да.

Решение. Чем больше амплитуда, тем большей потенциальной энергией обладает маятник в крайних положениях и тем большей кинетической энергией — при прохождении положения равновесия.

- 12.3. Как будет меняться период колебаний ведерка с водой, подвешенного на длинном шнуре, если из отверстия в его дне постепенно будет вытекать вода?

Решение. Для системы, описанной в задаче, хорошим приближением является модель математического маятника. Если ведро было заполнено целиком, то сначала период будет увеличиваться, так как центр тяжести системы (ведро — вода) при вытекании воды сначала будет понижаться, и вследствие этого будет расти длина маятника. Затем будет происходить уменьшение периода вследст-

вие повышения центра тяжести системы (ведро — вода). Когда вода выльется целиком, период колебаний станет равен первоначальному, так как восстановится первоначальная длина.

- 12.4. В кабине лифта, находящегося на верхнем этаже небоскреба, совершает малые колебания подвешенный на нити шарик. Нить привязана к гвоздю, вбитому в стену кабины. Трос лифта обрывается, и лифт начинает падать. Опишите движение шарика относительно лифта на протяжении всего падения. Учтите при этом, что на лифт действует сила сопротивления воздуха, зависящая от скорости падения.

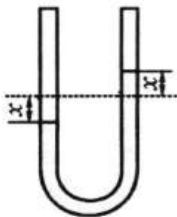
Решение. В начале падения сопротивлением воздуха можно пренебречь (лифт падает свободно), поэтому в лифте возникает невесомость. Это равносильно «выключению» силы тяжести, а вместе с ней — и силы, возвращающей маятник к положению равновесия. Значит, скорость маятника будет оставаться постоянной по величине. В частности, если в начальный момент маятник находился в крайнем положении, он так и застынет в этом положении; если же в начальный момент маятник двигался, он будет равномерно двигаться по окружности (мы предполагаем, что маятник не ударяется о потолок и стены). При дальнейшем падении начнет сказываться сопротивление воздуха: ускорение лифта будет уменьшаться. Это приведет к постепенному «включению» силы тяжести: маятник снова начнет совершать колебания, частота которых будет увеличиваться. Через некоторое время (если высота небоскреба достаточно велика) движение лифта станет равномерным. Если колебания маятника *останутся малыми*, он будет колебаться с той же частотой, что и в покоящемся лифте.

- 12.5. Найдите период колебаний жидкости в U-образном сосуде постоянного сечения. Длина всего столба жидкости равна $2H$.

$$\boxed{\checkmark} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Решение. Пусть уровни жидкости в обоих коленях отклонились от равновесного уровня на x (см. рисунок). Тогда потенциальная энергия жидкости $W_p = \rho S g x^2 = \frac{mg}{2H} x^2$

(за нулевой уровень принята энергия жидкости в состоянии равновесия). Полная энергия колеблющейся жидкости $W = \frac{mg}{2H}x^2 + \frac{m}{2}(x')^2$. Следовательно, жидкость совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega = \sqrt{g/H}$.



- 12.6. К пружине, имеющей жесткость k , подвешена чашка. На чашку с высоты h падает без начальной скорости липкий шарик массой m . Найдите амплитуду A возникающих колебаний. Массами пружины и чашки можно пренебречь.

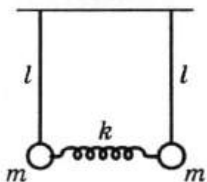
✓ $A = \sqrt{(mg/k)^2 + 2mgh/k}$.

Решение. Поскольку чашка очень легкая, можно пренебречь потерей механической энергии при ударе шарика о чашку. Пусть максимальное отклонение чашки от начального положения равно x . Скорость чашки с шариком в этот момент равна нулю, значит, потерянная шариком потенциальная энергия $mg(h+x)$ полностью перешла в энергию деформированной пружины $kx^2/2$. Отсюда получаем два решения:

$$x_{1,2} = mg/k \pm \sqrt{(mg/k)^2 + 2mgh/k}.$$

Оба решения имеют смысл и соответствуют *верхнему и нижнему* крайним положениям чашки при колебаниях. Среднее арифметическое двух решений, равное mg/k , соответствует положению равновесия чашки с шариком. Амплитуда A колебаний определяется из условия $x_{1,2} = mg/k \pm A$.

- 12.7. Два одинаковых математических маятника длиной l связаны невесомой пружиной жесткостью k . На рисунке показано положение равновесия системы. Маятники отклоняют (в плоскости рисунка) на одинаковые по величине углы и отпускают.



Найдите период T малых колебаний связанных маятников, если: а) маятники отклонены в одну сторону (колебания в одной фазе); б) маятники отклонены в противоположные стороны (колебания в противофазе).

$$\boxed{\checkmark} \text{ а) } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \text{ б) } T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + 2kl}}.$$

Решение. а) Пружина не деформируется при колебаниях, так что сила упругости не возникает (связь между маятниками «не работает»). Поэтому оба маятника колеблются независимо друг от друга с одним и тем же периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

б) Если каждый из маятников отклонился от положения равновесия на величину x , то деформация пружины равна $2x$, а энергия системы

$$E = \frac{k(2x)^2}{2} + 2\frac{mgx^2}{2l} + 2\frac{mv^2}{2} = \left(2k + \frac{mg}{l}\right)x^2 + m(v')^2.$$

$$\text{Отсюда } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k + \frac{mg}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + 2kl}}.$$

- 12.8. На нити висит шарик массой m , к которому с помощью пружины жесткостью k подвешен шарик массой $2m$. Нить пережигают. Каков период колебаний, происходящих при падении?

$$\boxed{\checkmark} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

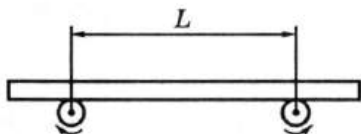
Решение. Центр масс системы делит длину l пружины в отношении 2 : 1. При падении в системе отсчета, связанной с центром масс, наблюдается невесомость. Поэтому можно считать, что груз массы m колеблется на пружине длиной $2l/3$, груз массы $2m$ — на пружине длиной $l/3$. Жесткости частей пружины равны соответственно $1,5k$ и

$3k$. Поэтому для обоих грузов $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$.

Олимпиадные задачи

- О-49. На два быстро вращающихся одинаковых валика положили горизонтально доску массой m (см. рисунок). Расстояние между осями валиков L , коэффициент трения между доской и валиками μ . Как будет двигаться доска?

Как изменится ответ, если оба валика изменяют направление вращения?



- ✓ **Доска будет совершать гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{L/(2\mu g)}$. Если валики изменят направление вращения, доска будет сброшена с них.**

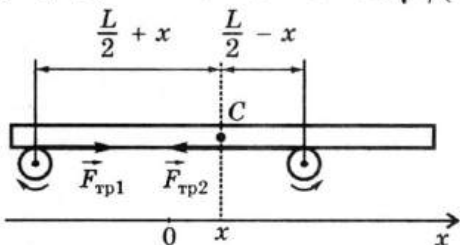
Решение. В условии говорится о *быстром* вращении валиков; значит, между ними и доской действуют силы трения *скольжения* (см. рисунок).

Следовательно, $ma_x = F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} = \mu(N_1 - N_2)$, где N_1 и N_2 — силы давления доски на первый и второй валики. В положении равновесия центр доски C расположен на равных расстояниях от обоих валиков. Если доска сместилась от положения равновесия на расстояние x , то $\frac{N_1}{N_2} = \frac{0,5L - x}{0,5L + x}$.

Учитывая, что $N_1 + N_2 = mg$, получаем:

$$N_1 = mg(1/2 - x/l) \text{ и } N_2 = mg(1/2 + x/l).$$

Уравнение движения принимает вид $a_x = -(2\mu g/L)x$. Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{2\mu g/L}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{L/(2\mu g)}$.

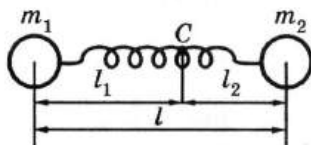


Если валики изменяют направление вращения, то обе силы трения будут направлены «наружу». Смещение доски от положения равновесия увеличит на этот раз ту силу трения, которая стремится увеличить смещение. Следовательно, равновесие в этом случае неустойчиво: доска будет сброшена с валиков.

- О-50.** Два грузика массами m_1 и m_2 , находящиеся на гладкой горизонтальной поверхности, соединены легкой пружи-

ной. Жесткость пружины k . Каков период T свободных колебаний системы, если при колебаниях грузики движутся вдоль одной прямой?

$$\boxed{\checkmark} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$



Решение. Будем рассматривать движение в системе отсчета центра масс. Поскольку при колебаниях все витки пружины деформируются одинаково, неподвижный в этой системе отсчета центр масс «привязан» все время к одной и той же точке пружины (точка C на рисунке).

Следовательно, эту точку можно рассматривать как закрепленную. Она делит пружину на две части, причем к колебаниям каждой части применима обычная формула периода колебаний пружинного маятника.

Если полная длина пружины l , то длины этих частей соот-

ветственно $l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l$ и $l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l$. Коэффициент же-

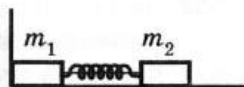
сткости пружины обратно пропорционален ее длине, поэтому

$k_1 = k \frac{l}{l_1} = k \frac{m_1 + m_2}{m_2}$, $k_2 = k \frac{m_1 + m_2}{m_1}$. Период колебаний каж-

дой части пружины $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$. Ес-

тественно, периоды колебаний обеих частей одинаковы: иначе центр масс не мог бы покоиться. Грузики колеблются в противофазе — их скорости в любой момент направлены противоположно друг другу.

- О-51.** На гладком столе лежат два грузика массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г, соединенные легкой пружиной жесткостью $k = 50$ Н/м. Один из грузиков касается стенки (см. рисунок).



Грузики связаны нитью длиной $l_0 = 6$ см, при этом пружина сжата на $\Delta l = 2$ см. Опишите движение грузиков после того, как нить пережигают.

Решение. Сразу после пережигания нити правый грузик начнет под действием пружины двигаться вправо, а левый будет прижат к стене до тех пор, пока пружина будет

сжата. Когда пружина начнет растягиваться, она оторвет левый грузик от стены и оба грузика будут двигаться по столу, совершая колебания, причем центр масс системы будет двигаться прямолинейно и равномерно.

Период колебаний $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} = 0,24$ (с) (см. решение задачи О-50).

Найдем скорость $v_{\text{цм}}$ движения центра масс. Поскольку в момент отрыва левого грузика от стены пружина не деформирована, из закона сохранения энергии следует, что $k(\Delta l)^2/2 = m_2 v_2^2/2$, где v_2 — скорость правого грузика в этот момент. Следовательно, скорость

центра масс $v_{\text{цм}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{\Delta l \sqrt{k m_2}}{m_1 + m_2} = 0,19$ (м/с). Найдем

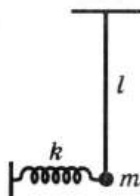
теперь, в каких пределах изменяется длина пружины при колебаниях.

В моменты наибольшего растяжения или сжатия пружины грузики неподвижны относительно центра масс, и кинетическая энергия системы равна $(m_1 + m_2) v_{\text{цм}}^2/2$. Из закона сохранения энергии можно найти величину мак-

симального удлинения пружины: $x = \Delta l \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} = 1$ (см).

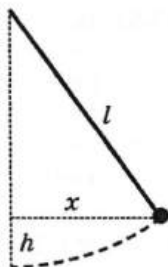
Поскольку длина недеформированной пружины равна $l_0 + \Delta l$, при колебаниях длина пружины изменяется от $l_{\text{min}} = l_0 + \Delta l - x = 7$ (см) до $l_{\text{max}} = l_0 + \Delta l + x = 9$ (см). Заметим, что деформация пружины не достигает начального значения Δl : ведь часть начальной энергии деформированной пружины перешла в кинетическую энергию поступательного движения системы как целого.

- О-52.** На рисунке показано положение равновесия колебательной системы — математического маятника с пружинной связью. Найдите период T малых колебаний системы. Каким станет период T' , если пружину заменить тонкой полоской резины той же длины и жесткости?



✓ $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{kl + mg}}; T' = \pi \left(\sqrt{\frac{ml}{kl + mg}} + \sqrt{\frac{l}{g}} \right).$

Решение. Для определения периода колебаний можно воспользоваться формулой полной механической энергии E системы. Пусть отклонение системы от положения равновесия описывается величиной x (она не обязательно должна быть декартовой координатой: это может быть, например, угол отклонения маятника), а выражение для E имеет вид $E = Ax^2 + B(x')^2$.



Здесь A, B — некоторые положительные константы; $x' = dx/dt$ — скорость изменения величины x . В отсутствие трения полная механическая энергия системы остается неизменной, т. е. $E' = 0$.

Отсюда получаем $Ax + Bx' = 0$, или $x'' = -\frac{A}{B}x$, что совпа-

дает с уравнением гармонических колебаний $a_x = -\omega_0^2 x$.

Следовательно, система совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{A/B}$. В рассматриваемой системе при малом отклонении x от равновесия пружина приобретает потенциальную энергию $kx^2/2$, а груз — потенциальную энергию mgh , где $h = l - \sqrt{l^2 - x^2} \approx \frac{x^2}{2l}$ (см.

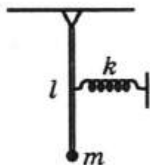
рисунок, а также математическое приложение). Для полной механической энергии W получаем выражение описанного выше типа, где $A = \frac{1}{2}\left(k + \frac{mg}{l}\right)$, $B = \frac{m}{2}$. Следова-

тельно, система будет совершать гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{B}{A}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{kl + mg}}$. Полоска рези-

ны, в отличие от пружины, при смещении груза влево от положения равновесия свободно провиснет и не будет действовать на груз (если вес резины пренебрежимо мал). Поэтому период T' колебаний такой системы складывается из половины периода T и половины периода колебаний обычного математического маятника:

$$T' = \pi \left(\sqrt{\frac{ml}{kl + mg}} + \sqrt{\frac{l}{g}} \right).$$

О-53. Во сколько раз изменится частота малых колебаний небольшого груза на легком стержне (см. рисунок), если к середине стержня прикрепить легкую горизонтальную пружину жесткостью k ? В равновесии стержень занимает вертикальное положение.



☒ Увеличится в $\sqrt{1 + \frac{kl}{4mg}}$ раз.

Решение. В отсутствие пружины мы имеем дело с обычным математическим маятником, частота которого

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Прикрепление пружины увеличивает возвращающую силу при отклонении маятника от положения равновесия, так что частота колебаний должна вырасти. Проще всего определить частоту ν_2 колебаний системы из выражения для полной механической энергии E системы. При отклонении груза от положения равновесия на $x \ll l$

он приобретает потенциальную энергию $mgh = \frac{mgx^2}{2l}$ (см.

решение задачи О-51). Кроме того, растяжение пружины

на $x/2$ сообщает ей потенциальную энергию $\frac{k \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$.

С учетом кинетической энергии $\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(x')^2$ получаем

$$E = \left(\frac{mg}{l} + \frac{k}{4} \right) \frac{x^2}{2} + \frac{m(x')^2}{2}.$$

Отсюда (см. решение задачи О-46) находим циклическую

частоту и частоту колебаний: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}}$; $\nu_2 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Следовательно, в результате прикрепления пружины час-

тота колебаний увеличивается в $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{1 + \frac{kl}{4mg}}$ раз.

13. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ. ЗВУК

- 13.1. Герой одного из рассказов О'Генри дал пинок поросенку с такой силой, что тот полетел, «опережая звук собственного визга». С какой силой должен был ударить поросенка герой рассказа, чтобы описанный случай произошел в действительности? Массу поросенка примите равной 5 кг, а продолжительность удара 0,01 с.

☒ $F > 165 \text{ кН}.$

Решение. Импульс силы, приложенной к телу, равен изменению количества движения этого тела. Обозначив силу, действующую на поросенка, через F , а скорость поросенка через v , получим $Ft = mv$. Чтобы поросенок обогнал свой собственный визг, он должен двигаться со скоростью, большей скорости звука, т. е. скорость должна быть больше 330 м/с. Следовательно,

$$F > \frac{mv}{t} = 165 \text{ (кН)}.$$

- 13.2. Наливая воду в термос, мы слышим звук. Как меняется его тон по мере заполнения термоса?

Решение. Полость термоса можно рассматривать как некий резонатор, который усиливает звуковые частоты, близкие к собственным частотам (резонансные). При заполнении термоса водой шум, издаваемый струей воды, содержит широкий спектр частот, но усилены будут (и услышаны нами) лишь частоты, близкие к собственным частотам резонатора термоса. По мере наполнения термоса длина этого резонатора уменьшается, а значит, уменьшаются и длины резонансных звуковых волн.

- 13.3. Всегда ли справедливо выражение: «как аукнется, так и откликнется», т. е. всегда ли отраженный звук имеет ту же высоту тона, что и падающий?

Решение. Высота тона (частота колебаний) отраженного звука не равна высоте тона падающего звука в случаях, когда источник звука или препятствие, от которого звук отражается, движутся (эффект Доплера).

- 13.4. Найдите собственные частоты колебаний воздушного столба в закрытой с обоих концов трубе длиной $l = 3,4 \text{ м}$.

☒ $\nu_k = k \cdot 50 \text{ Гц, где } k = 1, 2, 3, \dots$

Решение. Собственные колебания воздушного столба представляют собой стоячие волны, причем у закрытых концов

трубы находятся узлы стоячей волны. Поскольку расстояние между ближайшими узлами равно $\lambda/2$, на длине трубы должно укладываться целое число полуволен: $l = k(\lambda_k/2)$, где $k = 1, 2, 3, \dots$. Отсюда $\lambda_k = 2l/k$, и собственные частоты $\nu_k = v/\lambda_k = kv/(2l)$, где v — скорость звука в воздухе. Подставляя числовые данные, получаем $\nu_k = k \cdot 50$ Гц.

- 13.5. Над цилиндрическим сосудом высотой $H = 1$ м звучит камертон с частотой колебаний $\nu = 340$ Гц. В сосуд медленно наливают воду. При каких положениях уровня воды в сосуде звучание камертона значительно усиливается?

☒ При уровне воды 25 см или 75 см.

Решение. Усиление звука происходит в случае резонанса — когда частота звука совпадает с собственной частотой колебаний воздушного столба в сосуде. У поверхности воды при этом находится узел, а у верхнего открытого края сосуда — пучность стоячей волны. Расстояние между ближайшими узлами равно $\lambda/2$, а между узлом и ближайшей пучностью $\lambda/4$. Поэтому длина воздушного столба должна равняться $\lambda/4 + k \cdot \lambda/2$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, а $\lambda = v/\nu = 1$ м (v — скорость звука в воздухе). При заданных в условии числовых данных это соотношение может выполняться лишь при $k = 0$ и $k = 1$, т. е. высота столба воды равна 25 см или 75 см.

Олимпиадные задачи

- О-54. Почему изменяется голос человека в барокамере, заполненной дыхательной смесью из кислорода и гелия? Как изменится в этой атмосфере тон духовых инструментов? Камертона? Камертона на резонаторном ящике?

Решение. Гортань представляет собой резонатор, усиливающий звуки с определенными длинами волн. Эти длины волн λ зависят от формы и размеров гортани и поэтому не изменяются при замене воздуха другим газом. Однако при замене азота гелием значительно уменьшается средняя молярная масса газовой смеси, а потому заметно увеличивается скорость звука v . Значит, резонансные частоты гортани $\nu = v/\lambda$ станут выше. Напомним теперь, что колебания голосовых связок порождают смесь звуков различных частот. Звучание голоса определяется

тем, какие именно из этих звуков усиливаются гортанью. Следовательно, при замене азота гелием голос станет более высоким. По той же причине станет выше и звук духовых инструментов. Камертон же совершает гармонические колебания с частотой, характерной для данного камертона. Поэтому высота звука камертона не изменяется при изменении состава газовой среды. Однако если камертон установлен на резонаторе, то при замене воздуха на другой газ исчезнет резонанс с колебаниями столба газа в резонаторе. В результате резонаторный ящик перестанет усиливать звучание камертона.

О-55. Пуля летит со скоростью u , превышающей скорость звука v . Какую форму имеет фронт ударной волны, возникающей в воздухе при полете пули?

☒ Форму конической поверхности с углом при вершине

$$2 \arcsin \frac{v}{u}.$$

Решение. Фронт ударной волны представляет собой огибающую сферических волн, испущенных пулей в каждый из предшествующих моментов времени. Докажем, что этот фронт представляет собой коническую поверхность. Пусть пуля находится в точке A (см. рис. *a*). Рассмотрим звуковую волну, испущенную пулей в точке B и, следовательно, имеющую «возраст» $\Delta t = AB/v$. Волновая поверхность этой волны — сфера радиусом $R = v \cdot \Delta t$. Построим конус с вершиной в точке A , касающийся этой сферы. Угол α между образующей конуса и его осью находим из соотношения $\sin \alpha = R/AB = v/u$. Этот угол не зависит от длины отрезка AB , поэтому построенный конус касается *всех* волновых поверхностей звуковых волн, испущенных пулей до ее «прихода» в точку A . Таким образом, этот конус (его называют звуковым) является огибающей поверхностью *всех* сферических волн, т. е. фронтом ударной волны (см. рис. *б*).

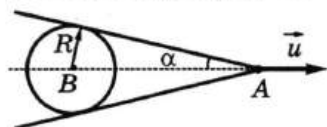


Рис. а

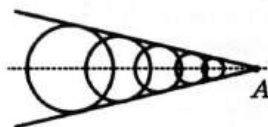
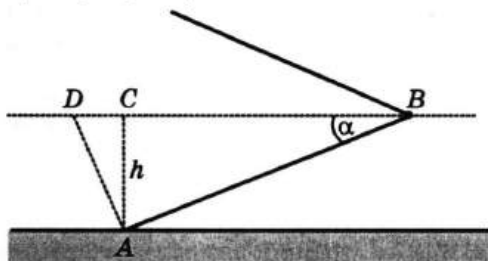


Рис. б

О-56. Реактивный самолет пролетел со скоростью, в два раза превышающей скорость звука, на высоте $h = 5$ км над наблюдателем. На каком расстоянии от наблюдателя был самолет, когда человек услышал звук?

☒ На расстоянии $2h = 10$ км.

Решение. Наблюдатель в точке A услышит звук (громкий хлопок), когда точки A достигнет поверхность звукового конуса (см. решение задачи О-55), который самолет «тащит» за собой. К этому моменту самолет окажется в точке B (см. рисунок).



Очевидно, $AB = \frac{h}{\sin \alpha} = 2h = 10$ (км), где $\sin \alpha = \frac{v}{u} = 0,5$.

Обратите внимание: дошедший до наблюдателя звук «родился» не в точке C , а в точке D (отрезок AD перпендикулярен образующей AB).

О-57. Гоночный автомобиль с включенной сиреной мчится со скоростью $u = 306$ км/ч. Частота колебаний сирены $\nu_0 = 400$ Гц. Впереди на обочине стоит другой автомобиль с точно такой же включенной сиреной. Каждый из водителей различает звук сирены другого автомобиля, потому что он выше, чем звук его собственной сирены. Кто из них слышит более высокий звук? Какова частота ν этого звука?

☒ Более высокий звук ($\nu = 533$ Гц) слышит водитель стоящего автомобиля.

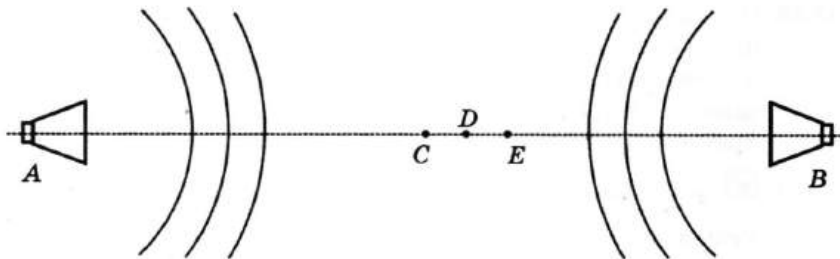
Решение. В системе отсчета лежащего автомобиля изменяется длина волны звука от приближающегося источника: за один период T колебаний источник приближается на расстояние uT , поэтому расстояние между ближайшими «гребнями» волн (уплотнениями воздуха) равно не vT , а $vT - uT$ (здесь v — скорость звука в воздухе). Это

расстояние и есть длина звуковой волны λ , воспринимаемой неподвижным относительно земли (а, значит, и относительно *воздуха*) наблюдателем; частота воспринимаемого им звука $\nu_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{(v-u)T} = \frac{\nu_0}{1-u/v} = 533 \text{ (Гц)}$. Для

движущегося же автомобилиста повышение звука «покоящейся» сирены происходит по другой причине.

В его системе отсчета длина волны звука не изменяется ($\lambda_0 = vT$), однако изменяется скорость «встречного» звука: она равна $v + u$. Следовательно, едущий водитель слышит звук частотой $\nu_2 = (v + u)/\lambda_0 = \nu_0(1 + u/v) = 500 \text{ (Гц)}$. Эффект изменения частоты звука при движении источника или приемника называется эффектом Доплера.

- О-58.** Два одинаковых динамика *A* и *B* подключены к выходу одного генератора электрических колебаний частотой $\nu = 680 \text{ Гц}$. Расстояние между динамиками 25 м. Амплитуда звуковых колебаний в точке *C*, находящейся посередине отрезка *AB* (см. схематический рисунок), максимальна и равна *a*. Какова амплитуда звуковых колебаний в точках *D* и *E*, если *CD* = 6,25 см, *CE* = 12,5 см? Каким будет ответ, если изменить полярность подключения одного из динамиков?



☒ $a_D = \frac{a}{\sqrt{2}}, a_E = 0$; после изменения полярности $a_D = \frac{a}{\sqrt{2}}, a_E = a$.

Решение. Из условия следует, что оба динамика излучают когерентные звуковые волны с длиной волны, равной $\lambda = v/\nu = 0,5 \text{ м}$ (здесь v — скорость звука в воздухе). В точке *C*, равноудаленной от источников, обе звуковые волны усиливают друг друга, значит, мембраны динамиков колеблются в одной фазе.

Можно считать, что в точку C и в близкие к ней точки D, E обе волны приходят с одинаковой амплитудой $a/2$. Разность хода волн в точке D составляет $\Delta_D = AD - BD = 2CD = \lambda/4$; в точке E разность хода волн $\Delta_E = AE - BE = 2CE = \lambda/2$. Значит, в точку D волны приходят с разностью фаз $\pi/2$, а в точку E — с разностью фаз π , т. е. в противофазе. Поэтому в точке E амплитуда колебаний равна нулю; в точке D складываются два колебания одинаковой частоты с амплитудами $a/2$ и сдвигом фаз $\pi/2$. Следовательно,

$$x_D = \frac{a}{2} \cos \omega t + \frac{a}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \\ = \frac{a}{2} (\cos \omega t - \sin \omega t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right).$$

Итак, амплитуда колебаний в точке D равна $a/\sqrt{2}$. Если изменить полярность подключения одного из динамиков, мембраны будут колебаться в противофазе. Теперь обе волны «гасят» друг друга в точке C , зато усиливают в точке E — амплитуда колебаний в этой точке станет равной a . В точке D изменение фазы одной из волн на противоположную не влияет на амплитуду результирующего колебания — эта амплитуда по-прежнему равна $a/\sqrt{2}$.

- О-59.** По шнуру слева направо бежит со скоростью v незатухающая гармоническая волна. При этом поперечное смещение точки O шнура изменяется по закону $y = A \cos \omega t$. Как зависит от времени смещение точки шнура, находящейся правее точки O на расстоянии x от нее?

☒ $y = A \cos(\omega t - kx)$, где $k = \omega/v$.

Решение. Амплитуды колебаний всех точек одинаковы (волна незатухающая) и равны A , поэтому колебания в разных точках отличаются только по фазе. Это отличие обусловлено тем, что волна приходит в точку с координатой x с запаздыванием $\Delta t = x/v$ (мы считаем $x = 0$ в точке O). Уравнение колебаний в этой точке имеет вид:

$$y = A \cos \omega(t - \Delta t) = A \cos(\omega t - \omega x/v).$$

Поскольку $\omega = 2\pi/T$ и $vT = \lambda$ (здесь T — период, λ — длина волны), то получаем $y = A \cos(\omega t - 2\pi x/\lambda)$ — так называемое уравнение бегущей волны. Величину $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ называют волновым числом. Уравнение бегущей волны можно записать в виде $y = A \cos(\omega t - kx)$, откуда видно,

что волновое число играет такую же роль по отношению к координате, как циклическая частота по отношению ко времени.

- О-60.** Мотоциклист, движущийся по прямолинейному участку дороги, увидел, как человек, стоящий у дороги, ударил молотком по висящему рельсу, а через 2 с услышал звук. С какой скоростью двигался мотоциклист, если он проехал мимо человека через 36 с после начала наблюдения?

☒ 20 м/с.

Решение. В системе отсчета, связанной с мотоциклистом, звук от удара распространяется со скоростью $v + v_{\text{зв}}$, где v — скорость мотоцикла, $v_{\text{зв}}$ — скорость звука. Поэтому расстояние до человека равно $s = (v + v_{\text{зв}})\Delta t_1$. Расстояние s мотоцикл преодолел за время Δt_2 , поэтому $s = v\Delta t_2$. Тогда

$$v = v_{\text{зв}} \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2 - \Delta t_1}.$$

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

14. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

- 14.1. Из открытого стакана за время $t = 20$ сут испарилась вода массой $m = 200$ г. Сколько молекул испарилось за $\tau = 1$ с?

☒ $3,9 \cdot 10^{18}$ молекул.

Решение. Количество молекул воды в стакане $N = mN_A/M$, где M — молярная масса воды, N_A — постоянная Авогадро. Из пропорции $N_\tau/N = \tau/t$ следует, что за время τ испарилось $N_\tau = N \cdot \tau/t = 3,9 \cdot 10^{18}$ молекул.

- 14.2. В озеро со средней глубиной $h = 5,0$ м и площадью $S = 4,0$ км² бросили кристаллик поваренной соли NaCl массой $m = 10$ мг. Спустя очень длительное время из озера зачерпнули стакан воды объемом $V = 200$ см³. Сколько ионов натрия из брошенного кристаллика оказалось в этом стакане?

☒ 10^9 .

Решение. Общее количество ионов натрия в данном кристалле $N_0 = mN_A/M$, где M — молярная масса NaCl. За длительное время ионы натрия равномерно распределились по всему объему озера. Значит, концентрация этих ионов в стакане и в озере стала одинаковой: $\frac{N}{V} = \frac{N_0}{hS}$.

Здесь N — искомое количество ионов натрия в стакане.

Отсюда $N = \frac{mVN_A}{MhS} = 1,0 \cdot 10^9$.

- 14.3. Каковы средние кинетические энергии $\bar{E}$ поступательного движения и средние квадратичные скорости молекул кислорода и водорода при температуре $t = 27^\circ \text{C}$?

☒ $\bar{E} = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; средняя квадратичная скорость молекул кислорода 490 м/с, водорода 1900 м/с.

Решение. Из соотношений $\bar{E} = \frac{3}{2}kT = \frac{m_0 v^2}{2}$ и $m_0 = \frac{M}{N_A}$

следует, что средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул не зависит от массы молекул, а зависит только от температуры. Средняя же квадратичная скорость при одной и той же температуре больше у более легких молекул.

- 14.4. В закрытом сосуде происходит полное сгорание кусочка угля с образованием углекислого газа. После этого сосуд охлаждают до начальной температуры. Сравните конечное давление в сосуде с начальным. Объем угля мал по сравнению с объемом сосуда.

☒ Давление не изменилось.

Решение. Уравнение реакции горения имеет вид $\text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$, т. е. на одну вступившую в реакцию молекулу кислорода приходится одна образовавшаяся молекула углекислого газа. Следовательно, при сгорании угля общее число молекул газа в сосуде не изменится. А согласно уравнению $p = nkT$ давление газа при данных температуре и объеме зависит именно от количества молекул газа. Таким образом, давление в сосуде не изменится.

- 14.5. Один из двух одинаковых сосудов заполнен сухим воздухом, а другой — влажным, содержащим водяной пар. Температуры и давления в обоих сосудах одинаковы. Какой из сосудов легче?

☒ Легче сосуд с влажным воздухом.

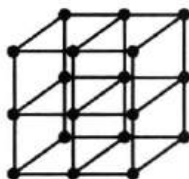
Решение. В равных объемах газов при одинаковых температурах и давлениях содержится одинаковое число молекул. Значит, во влажном воздухе более легкие молекулы воды просто заменяют такое же количество молекул азота и кислорода.

- 14.6. Как изменилось бы давление в сосуде с газом, если бы внезапно исчезли силы притяжения между его молекулами?

☒ Давление увеличилось бы.

Решение. Если бы давление газа поддерживалось постоянным (сосуд, например, прикрыт легкоподвижным поршнем), то после исчезновения сил притяжения между молекулами объем газа увеличился бы. Поэтому в сосуде с постоянным объемом возрастает давление газа на стенки.

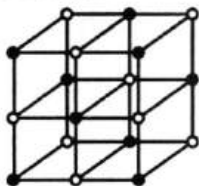
- 14.7. Какова плотность ρ кристалла с так называемой простой кубической решеткой (см. рисунок), если масса каждого атома m_0 , а длина ребра кубической ячейки a ?



☒ $\rho = m_0/a^3$.

Решение. Плотность кристалла $\rho = m_1/a^3$, где m_1 — масса, приходящаяся на одну кубическую ячейку. Каждой из восьми «сходящихся» в центре атома кубических ячеек принадлежит $1/8$ этого атома массой $m_0/8$. У кубической ячейки восемь вершин, поэтому $m_1 = 8 \cdot m_0/8 = m_0$. Итак, $\rho = m_0/a^3$. Интересно, что такая простая кристаллическая решетка в природе не встречается.

- 14.8. Кристаллы поваренной соли NaCl имеют кубическую решетку, которая состоит из чередующихся ионов натрия и хлора (см. рисунок). Найдите расстояние a между центрами ближайших ионов. Плотность соли $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$.



☒ $a = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Решение. См. задачу 14.7. В случае NaCl на одну кубическую ячейку объемом a^3 приходится по «пол-иона» натрия и хлора, т. е. масса, равная полусумме масс ионов Na^+ и Cl^- .

- 14.9. В герметично закрытом баллоне находится смесь из $m_1 = 0,50 \text{ г}$ водорода и $m_2 = 8,0 \text{ г}$ кислорода при давлении $p_1 = 2,35 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Между газами протекает реакция с образованием водяного пара. Какое давление p установится в баллоне после охлаждения до первоначальной температуры? Конденсации пара не происходит.

☒ $p = 176 \text{ кПа}$.

Решение. В смеси находилось $v_1 = m_1/M_1 = 0,25$ моля водорода и $v_2 = m_2/M_2 = 0,25$ моля кислорода. В реакцию $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$ вступит весь водород и только половина кислорода. В результате реакции образуется $v_3 = 0,25$ моля водяного пара и остается $v_4 = 0,125$ моля кислорода. При заданных температуре и объеме давление газа прямо пропорционально количеству его молекул, следовательно,

$$p = \frac{v_3 + v_4}{v_1 + v_2} p_1 = 1,76 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

- 14.10. При повышении абсолютной температуры азота в 2 раза каждая вторая молекула диссоциировала на атомы. Во сколько раз изменилось давление газа?

☒ Давление увеличилось в 3 раза.

Решение. Воспользуемся формулой $p = nkT$. Согласно условию T возрастает в 2 раза; при диссоциации каждой второй молекулы концентрация n частиц в газе возрастает в 1,5 раза. Следовательно, давление возрастает в 3 раза.

- 14.11. Оцените суммарную кинетическую энергию поступательного движения молекул, находящихся в воздухе классной комнаты. Увеличится ли эта энергия при включении отопления?

☒ $3 \cdot 10^7$ Дж. Не увеличится.

Решение. Суммарная кинетическая энергия поступательного движения молекул $E_k = N\bar{E}$, где N — количество молекул в комнате, $\bar{E}$ средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул. Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории, записанного в виде

$$p = \frac{2}{3} n\bar{E}, \text{ следует, что } \bar{E} = \frac{3}{2} \frac{p}{n} = \frac{3}{2} \frac{pV}{N}. \text{ Отсюда } E_k = N\bar{E} = \frac{3}{2} pV. \text{ Атмосферное давление } p \text{ равно примерно } 10^5 \text{ Па,}$$

объем классной комнаты V примем для оценки равным 200 м^3 . Подставляя эти числовые данные в формулу для E_k , получим $E_k = 3 \cdot 10^7$ (Дж).

При включении отопления объем V воздуха в комнате остается неизменным, а давление p остается равным давлению на улице. Следовательно, остается неизменным и произведение pV . Но тогда согласно формуле $E_k = \frac{3}{2} pV$

остается неизменным и суммарная энергия всех молекул, находящихся в воздухе классной комнаты!

Олимпиадные задачи

- О-61.** Сосуд С сообщается с окружающим пространством через малое отверстие. Температура газа в окружающем пространстве T , давление p . Газ настолько разрежен, что молекулы при пролете в сосуд и из сосуда не сталкиваются друг с другом. В сосуде поддерживается температура $4T$. Каким будет давление в сосуде?

☒ $p_1 = 2p.$

Решение. Давление газа в сосуде $p_1 = n_1 k T_1 = 4n_1 k T$, где n_1 — концентрация молекул в сосуде. Вне сосуда давление $p = n_2 k T$, где n_2 — концентрация молекул в окружающем пространстве. Следовательно, $p_1 = 4p \frac{n_1}{n_2}$. При равновесии число вылетающих каждую секунду из сосуда молекул газа равно числу молекул газа, влетающих в сосуд извне.

Отсюда следует, что $n_1 \bar{v}_{1x} = n_2 \bar{v}_{2x}$. Так как $\bar{v}_x \sim v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, получаем $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\bar{v}_{2x}}{\bar{v}_{1x}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $p_1 = 2p$.

- О-62.** Основываясь на представлениях молекулярно-кинетической теории, оцените давление и температуру внутри Солнца. Масса Солнца $2 \cdot 10^{30}$ кг, радиус $7 \cdot 10^8$ м. Для оценки можно принять, что Солнце состоит в основном из атомарного водорода.

☒ $2 \cdot 10^{15}$ Па; $2 \cdot 10^7$ К.

Решение. Согласно молекулярно-кинетической теории давление газа p связано с его температурой T и концентрацией молекул n соотношением $p = nkT$, откуда $T = \frac{p}{nk}$. Поскольку Солнце не расширяется и не сжимается, давление его внутренних слоев на любой глубине равно давлению вышележащих слоев, создаваемому действием силы тяжести F : $p = \frac{F}{S}$.

Отсюда следует, что для определения температуры на какой-то глубине внутри Солнца необходимо определить концентрацию атомов на этой глубине и давление выше лежащих слоев p .

Для упрощения зададимся целью определить температуру на расстоянии $R/2$ от центра Солнца, где концентрацию атомов водорода можно считать приближенно равной среднему значению для Солнца:

$$n \approx n_{\text{ср}} = \frac{N}{V} = \frac{M_{\text{с}} N_{\text{А}}}{MV} = \frac{\rho N_{\text{А}}}{M}.$$

Выделив вертикальный столб газа с площадью основания S , давление верхних слоев на лежащие ниже можно оценить, пренебрегая зависимостью плотности ρ газа от глубины. Примем расстояние до центра масс верхней половины столба газа равным $\frac{3}{4}R$ и произведем расчет силы тяготения, пренебрегая отличием формы тяготеющих тел от точечных и шарообразных тел:

$$F = G \frac{mM_{\text{с}}}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2} = G \frac{\rho \frac{R}{2} SM_{\text{с}}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 R^2} = G \frac{\rho SM_{\text{с}}}{\frac{9}{8}R}.$$

Тогда давление будет равно:

$$p = \frac{F}{S} = G \frac{\rho M_{\text{с}}}{\frac{9}{8}R} = G \frac{M_{\text{с}}^2}{\frac{9}{8}R \frac{4}{3}\pi R^3} = G \frac{M_{\text{с}}^2}{\frac{3}{2}\pi R^4},$$

$$\text{а температура: } T = \frac{p}{nk} = \frac{G\rho M_{\text{с}}M}{\frac{9}{8}R\rho N_{\text{А}}k} = \frac{GM_{\text{с}}M}{\frac{9}{8}RN_{\text{А}}k}.$$

Подставив числовые значения, получим оценку давления и температуры:

$$p = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (2 \cdot 10^{30})^2}{\frac{3}{2} \cdot 3,14 \cdot (7 \cdot 10^8)^4} \approx 2 \cdot 10^{15} \text{ (Па)}.$$

$$T = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 10^{-3}}{\frac{9}{8} \cdot 7 \cdot 10^8 \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ (К)}.$$

О-63. Для улучшения теплоизоляции в колбе термоса между двойными стеклянными стенками газ находится при таком низком давлении, что длина свободного пробега молекул значительно больше расстояния между стенками колбы. Оцените давление газа в колбе термоса, если известно, что 1 кг горячей воды в нем остывает от 100 °С до 94 °С за 1 час. Между стенками колбы находится гелий.

☑ 2,2 Па.

Решение. Давление газа p можно определить, зная концентрацию n и температуру T , по формуле $p = nkT$. Температуру можно принять равной $T_{\text{ср}} = 97^\circ\text{C} = 370\text{ К}$. Концентрацию молекул можно найти по известной скорости теплопередачи. Выберем ось Ox перпендикулярной стенке баллона термоса. На одну степень свободы молекулы

приходится энергия: $\frac{m_0 \overline{v_x^2}}{2} = \frac{1}{2} kT$, $\overline{v_x} = \sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{kT}{m_0}}$. Так

как к одной стенке колбы летит половина молекул, то число ν ударов молекул о стенку колбы площадью S в

единицу времени равно: $\nu = \frac{1}{2} n S \overline{v_x} = \frac{1}{2} n S \sqrt{\frac{kT}{m_0}}$. При каж-

дом столкновении со стенкой кинетическая энергия молекулы становится равной среднему значению энергии теплового движения молекул стенки. При перелете от горячей стенки к холодной молекула переносит энергию:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3}{2} kT_1 - \frac{3}{2} kT_2 = \frac{3}{2} k(T_1 - T_2) = \frac{3}{2} k\Delta T_1,$$

где ΔT_1 — разность температур двух стенок колбы.

За время t переносится количество теплоты Q :

$$Q = \Delta E \nu t = \frac{3}{2} k(T_1 - T_2) \frac{1}{2} n S t \sqrt{\frac{kT}{m_0}},$$

где $T \approx \frac{T_1 + T_2}{2}$. По известным значениям Q , S , T , m_0 и t

можно найти концентрацию n : $n = \frac{4Q\sqrt{m_0}}{3\Delta T_1 S t \sqrt{k^3 T}}$, а затем

найти давление p : $p = nkT = \frac{4Q\sqrt{m_0 T}}{3S\Delta T_1 t \sqrt{k}}$, где $Q = cm\Delta T_2$ и

ΔT_2 — изменение температуры воды в термосе.

$$Q = 4,2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 6 = 4,2 \cdot 10^4 \text{ (Дж)}.$$

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{23}} \approx 6,66 \cdot 10^{-27} \text{ (кг)}.$$

Представим термос объемом 1 л в виде цилиндра радиусом r и длиной l . $S = 2\pi r l$, $V = \pi r^2 l = 10^{-3} \text{ (м}^3\text{)}$, $S = \frac{2V}{r}$,

$$S = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0,05} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ (м}^2\text{)}.$$

Если комнатная температура 22°C , то $\Delta T_1 = 75 \text{ К}$.

$$p = \frac{4 \cdot 4,2 \cdot 10^4 \sqrt{6,66 \cdot 10^{-27} \cdot 370}}{3 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \sqrt{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 75 \cdot 3600}} \approx 2,2 \text{ (Па)}.$$

О-64. Стенки сосуда, в котором находится газ с температурой T , имеют температуру T_c . В каком случае давление газа на стенки сосуда больше: когда стенки сосуда холоднее газа ($T_c < T$) или когда теплее ($T_c > T$)?

Решение. Если температура стенок сосуда T_c совпадает с температурой газа T , то молекула, ударяясь о стенку, изменяет проекцию импульса p_x на $-p_x$. Значит, суммарное изменение импульса равно $2p_x$. Когда температура стенок $T_c > T$, газ нагревается. Это означает, что молекулы газа отскакивают от стенки с большей скоростью, чем налетают, а следовательно, и с большим импульсом. В результате изменение импульса будет больше, чем $2p_x$.

Если же $T_c < T$, то газ охлаждается, т. е. молекулы газа отскакивают от стенки с меньшим импульсом, чем налетают на нее. Ясно, что изменение импульса в этом случае будет меньше, чем $2p_x$. Так как в соответствии со вторым законом Ньютона изменение импульса пропорционально средней силе, то давление газа на стенки сосуда больше, когда стенки теплее газа ($T_c > T$).

15. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

- 15.1. Герметично закрытый сосуд полностью заполнен водой. Каким стало бы давление p внутри сосуда, если бы силы взаимодействия между молекулами воды исчезли? Температура в сосуде постоянна: $t = 27^\circ\text{C}$.

☒ $p = 140 \text{ МПа}.$

Решение. После исчезновения сил взаимодействия между молекулами вода превратилась бы в идеальный газ с той же плотностью $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. Из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что $p = \rho RT/M$. Отсюда получаем, что $p = 1,4 \cdot 10^8 \text{ Па} = 1400 \text{ атм}$. Здесь $T = 300 \text{ К}$, M — молярная масса воды, R — универсальная газовая постоянная. Огромная величина полученного ответа показывает, сколь велики силы молекулярного «сцепления» в жидкостях и твердых телах.

- 15.2. Два баллона, имеющие объемы V_1 и V_2 , содержат газы при одинаковой температуре T и давлениях p_1 и p_2 соответственно. Баллоны соединены трубкой с краном. Какое давление p установится в баллонах, если открыть кран? Температура не изменяется, газы в химическую реакцию не вступают.

☒ $p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}.$

Решение. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона $p_1 V_1 = \nu_1 RT$, $p_2 V_2 = \nu_2 RT$, $p(V_1 + V_2) = \nu RT$. Здесь ν_1 и ν_2 — количество вещества соответственно в первом и втором баллонах, ν — общее количество вещества. Поскольку $\nu = \nu_1 + \nu_2$, получаем $p_1 V_1 + p_2 V_2 = p(V_1 + V_2)$.

- 15.3. Оболочка аэростата, находящегося на Земле, наполнена водородом на $\alpha = 7/8$ своего объема при температуре $t_1 = 17^\circ\text{C}$. Аэростат поднялся на высоту, где давление $p_2 = 80 \text{ кПа}$ и температура $t_2 = -3^\circ\text{C}$. Какова масса водорода, который в результате расширения вышел через клапан при подъеме? Объем оболочки $V = 800 \text{ м}^3$. На поверхности Земли атмосферное давление $p_1 = 100 \text{ кПа}$.

☒ $1 \text{ кг}.$

Решение. Давление газа в аэростате практически не отличается от наружного давления (тонкая оболочка не может выдержать сколько-нибудь значительного перепада дав-

лений). При подъеме газ внутри аэростата расширяется, заполняет всю оболочку и только после этого начинает выходить через клапан.

Массы m_1 и m_2 водорода внутри оболочки в начале и в конце подъема можно найти, воспользовавшись уравнением Менделеева-Клапейрона: $p_1 \cdot \alpha V = m_1 RT_1 / M$, $p_2 V = m_2 RT_2 / M$. Здесь M — молярная масса водорода.

Масса вышедшего водорода:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{MV}{R} \left(\frac{\alpha p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) = 1 \text{ (кг)}.$$

- 15.4. Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, если наполняющий его гелий заменить водородом? Весом оболочки шара можно пренебречь.

☒ Увеличится на 8 %.

Решение. Хотя водород вдвое легче гелия, подъемная сила F увеличится ненамного. Она определяется разностью между архимедовой силой F_A , действующей на шар со стороны воздуха, и силой тяжести mg наполняющего шар газа: $F = F_A - mg = (m_a - m)g$. Здесь и далее индекс «в» относится к вытесненному шаром воздуху, 1 и 2 — соответственно к гелию и водороду. Отношение подъемных сил при заполнении шара водородом и гелием

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{m_a - m_2}{m_a - m_1}.$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона позволяет выразить это отношение через молярные массы га-

зов:
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{M_a - M_2}{M_a - M_1} = 1,08$$
 (мы считаем температуру и дав-

ление внутри шара такими же, как у окружающего воздуха). Существенного увеличения подъемной силы при замене гелия на водород не происходит потому, что оба газа намного легче воздуха.

- 15.5. В цилиндре под поршнем площадью $S = 100 \text{ см}^2$ и массой $m_1 = 50 \text{ кг}$ находится воздух при температуре $t_1 = 7^\circ \text{C}$. Поршень находится на высоте $h_1 = 60 \text{ см}$ от дна цилиндра. Воздух в цилиндре нагревают до $t_2 = 47^\circ \text{C}$, а на поршень ставят гирю массой $m_2 = 100 \text{ кг}$. На сколько опустится или поднимется поршень по сравнению со своим начальным положением? Атмосферное давление $p_a = 100 \text{ кПа}$, трением поршня о стенки цилиндра можно пренебречь.

☒ Опустится на 19 см.

Решение. Запишем условия равновесия поршня в начальном и конечном положениях: $m_1 g + p_a S = p_1 S$, $m_1 g + m_2 g + p_a S = p_2 S$. Начальное давление p_1 воздуха в цилиндре связано с конечным давлением p_2 уравнением Клапейрона $p_1 V_1 / T_1 = p_2 V_2 / T_2$. Здесь $V_1 = S h_1$ и $V_2 = S(h_1 + x)$ — соответственно начальный и конечный объемы воздуха в цилиндре, x — перемещение поршня ($x > 0$ соответствует поднятию поршня). Отсюда $x = h_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{m_1 g + p_a S}{m_1 g + m_2 g + p_a S} - 1 \right) = -19$ (см).

Таким образом, поршень *опустится* на 19 см.

- 15.6. Какой радиус r должен иметь наполненный гелием воздушный шар, чтобы он мог подняться в воздух, если масса 1 м^2 оболочки шара $m_0 = 50 \text{ г}$? Температура воздуха $t = 27^\circ \text{С}$, давление $p_a = 100 \text{ кПа}$, разностью давлений внутри шара и снаружи можно пренебречь.

☒ $r > 0,15 \text{ м}$.

Указание. Массу вытесненного шаром воздуха, а также массу гелия внутри шара можно выразить через r , воспользовавшись уравнением Менделеева–Клапейрона; массу m оболочки — найти из соотношения $m/m_0 = S/S_0$, где S — площадь поверхности оболочки, а $S_0 = 1 \text{ м}^2$.

- 15.7. Баллон с газом разделен на две части теплоизолирующей перегородкой с очень малым отверстием*. По разные стороны перегородки все время поддерживаются температуры T_1 и T_2 . Каково отношение давлений p_1 и p_2 в различных частях баллона?

☒ $\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$.

Решение. В рассматриваемой ситуации нет теплового равновесия: в разных частях баллона поддерживаются различные температуры. Чтобы число молекул в каждой части баллона оставалось неизменным, должны быть равны количества Z_1 и Z_2 молекул, пролетающих через отверстие в одну и другую сторону за одно и то же время Δt .

* Это означает, что молекулы проходят в отверстие только «поодиночке», т. е. макроскопическое движение газа вблизи отверстия не может возникнуть.

Каждую из величин Z можно записать в виде $Z = \frac{1}{2} n \overline{v_x} S \Delta t$,

где $n = \frac{p}{kT}$ — концентрация молекул, S — площадь

отверстия; ось x перпендикулярна перегородке. По-

скольку $\overline{v_x} \sim \sqrt{\frac{RT}{M}}$, величина Z прямо пропорциональна

$\frac{p}{\sqrt{T}}$. Отсюда $\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}$ и $\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$. Интересно, что при

этом $\frac{n_1}{n_2} = \frac{p_2}{p_1}$, т. е. концентрация молекул больше в той

части баллона, где давление меньше.

Олимпиадные задачи

- О-65. Пробирка массой m содержит один моль идеального газа массой M при температуре T . Пробирка находится в вакууме и закрыта очень легкой пробкой. Оцените скорость пробирки после того, как пробка вылетит из бутылки и весь газ выйдет из пробирки наружу.

$$\boxed{\checkmark} \quad u = \frac{1}{m} \sqrt{m_T RT}.$$

Решение. Направим ось OX вдоль оси пробирки. Половина общего числа молекул газа имеют проекцию скорости $v_x > 0$. Эти молекулы вылетят из пробирки, не столкнувшись с ее дном, и поэтому не передадут пробирке импульс. Другая половина молекул столкнется с дном пробирки. При этом составляющая скорости молекулы вдоль пробирки изменится на противоположную, в результате чего каждая молекула в среднем передаст пробирке импульс $2m_0 \overline{v_x}$, где m_0 — масса молекулы газа, $\overline{v_x}$ — среднее значение модуля проекции скорости. Вследствие столкновений с молекулами газа пробирка получит импульс $mu = 2m_0 \overline{v_x} N_A / 2$,

где u — проекция скорости пробирки. Поскольку $\overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}$,

а $\overline{v^2} = \frac{3kT}{m_0}$, получим, считая $\overline{v_x} \approx \sqrt{\overline{v_x^2}}$, что $mu = m_0 N_A \sqrt{\frac{kT}{m_0}}$.

Отсюда получаем $u = \frac{1}{m} \sqrt{(m_0 N_A) \cdot (k N_A) \cdot T} = \frac{1}{m} \sqrt{m_r RT}$, где m_r — масса газа в пробирке.

- О-66.** В сосуде объемом 1 м^3 находится смесь газов — гелия и кислорода. При температуре $t = -2^\circ \text{C}$ и давлении $p = 9 \cdot 10^4 \text{ Па}$ плотность этой смеси $\rho = 0,44 \text{ кг/м}^3$. Каким станет давление в сосуде, если из него удалить половину молекул кислорода?

☒ $0,79 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Решение. Пусть в сосуде находится v_1 молей гелия и v_2 молей кислорода. Тогда полное число молей в сосуде равно

$$v = v_1 + v_2 = \frac{pV}{RT} \approx 40 \text{ (моль)}. \text{ Масса смеси газов } M_1 v_1 +$$

$$+ M_2 v_2 = \rho V = 0,44 \text{ (кг)}. \text{ Решая систему уравнений } v = v_1 +$$

$+ v_2 = 40$, $M_1 v_1 + M_2 \cdot v_2 = 0,44$, находим: $v_1 = 30$ моль, $v_2 = 10$ моль. После удаления половины молекул кислорода полное число молей в смеси станет равным $v' =$

$$= 35 \text{ моль. Давление } p' \text{ в сосуде найдем из соотношения}$$

$$\frac{p}{p'} = \frac{v}{v'} : p' = p \frac{v'}{v} = 0,9 \cdot 10^5 \frac{35}{40} \approx 0,79 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

- О-67.** Изготовлена модель парового реактивного двигателя. Водяной пар нагревается спиртовкой, мощность теплопередачи которой котлу 100 Вт . Пар из котла выходит через отверстие площадью $0,2 \text{ мм}^2$. Определите силу тяги реактивного двигателя.

☒ $2 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$.

Решение. Поскольку изменение импульса тела равно импульсу действующей на него силы, $F \Delta t = \Delta(mv)$,

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t} v, \text{ где } F \text{ — реактивная сила, } \frac{\Delta m}{\Delta t} \text{ — секундный}$$

расход пара, v — скорость истечения пара. $N \Delta t = \Delta m r$,

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{N}{r}, \text{ где } N \text{ — мощность теплопередачи, } r \text{ — удель-$$

ная теплота испарения. При этом $v = \frac{\Delta V}{\Delta t \cdot S}$, где ΔV — объ-

ем пара, выходящий за время t , S — площадь сечения

отверстия. Из уравнения состояния следует, что $p\Delta V = \frac{\Delta m}{M}RT$, то есть $\Delta V = \frac{\Delta m}{M} \frac{RT}{p}$, откуда получаем $F = \frac{N\Delta m RT}{rM\Delta t Sp} = \frac{N^2 RT}{r^2 M Sp}$. Вычисления дают $F \approx 2 \cdot 10^{-2}$ Н.

- О-68.** Герметически закрытый бак высотой $h = 5,0$ м заполнен водой доверху. На дне его находится пузырек воздуха. Давление у дна бака $p_0 = 0,15$ МПа. Каким станет давление p у дна, если пузырек всплывет? Стенки бака считайте абсолютно жесткими, воду — несжимаемой.

☒ $p = 0,20$ МПа.

Решение. При всплытии объем пузырька не может измениться — ведь это привело бы к изменению объема воды или общего объема бака. Температура в системе, очевидно, тоже не меняется. Но тогда и давление в пузырьке не может измениться! Значит, у верхней крышки бака давление станет равным p_0 . А давление p на дно бака станет равным $p_0 + \rho gh = 0,20$ МПа. Напомним, однако, что на самом деле всякая реальная жидкость сжимаема. Если объем бака достаточно велик, изменение объема воды окажется сравнимым с объемом пузырька.

- О-69.** Герметически закрытый бак высотой $h = 5,0$ м заполнен водой доверху. На дне его находятся два одинаковых пузырька воздуха. Давление на дно бака $p_0 = 0,15$ МПа. Каким станет это давление, если всплывет один пузырек? оба пузырька? Стенки бака считайте абсолютно жесткими, воду — несжимаемой.

☒ $p = \frac{1}{2}(\rho gh + p_0 + \sqrt{p_0^2 + (\rho gh)^2}) = 0,18$ МПа; $p = 0,20$ МПа.

Указание. Ситуация, когда всплывают оба пузырька, фактически не отличается от рассмотренной в задаче О-68. Если же всплывает только один пузырек, должен оставаться неизменным суммарный объем пузырьков.

16. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

- 16.1. Под водой на глубине $h = 5,0$ м отломили нижний конец запаянной стеклянной трубки, и в нее вошло $m = 1,95$ г воды. Каким было давление p_0 в запаянной трубке? Объем трубки $V = 2,0$ см³, атмосферное давление $p_a = 10^5$ Па.

☑ $p_0 = 3,7$ кПа.

Решение. Воздух в трубке испытывает изотермическое сжатие от начального объема V до объема $V - \frac{m}{\rho}$, где ρ —

плотность воды. Конечное давление в трубке $p_a + \rho gh$.

Согласно закону Бойля-Мариотта:

$$p_0 V = (p_a + \rho gh) (V - m/\rho).$$

$$\text{Отсюда } p_0 = (p_a + \rho gh) \left(1 - \frac{m}{\rho V} \right) = 3700 \text{ (Па)}.$$

- 16.2. Открытую с двух концов вертикальную стеклянную трубку длиной $l = 0,5$ м наполовину погружают в ртуть. Затем трубку закрывают сверху и вынимают. Какова длина x оставшегося в трубке столбика ртути? Атмосферное давление $H = 750$ мм рт. ст.

☑ $x = 17$ см.

Решение. При решении подобных задач удобно измерять давление высотой столба той же жидкости, которая рассматривается в задаче (в данном случае — ртути). Когда трубку вынимают из ртути, воздух в ней изотермически расширяется от объема $lS/2$ до объема $(l - x)S$, где S — площадь сечения трубки. Начальное давление в трубке равно атмосферному, т. е. ρgH , где ρ — плотность ртути, а конечное — меньше атмосферного на величину ρgx . Из закона Бойля-Мариотта следует:

$$\rho gH \cdot lS/2 = (\rho gH - \rho gx)(l - x)S,$$

$$\text{откуда } x = \frac{H + l}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{H^2 + l^2} = 0,17 \text{ м (отрицательный корень квадратного уравнения не имеет физического смысла).}$$

- 16.3. В шинах автомобиля температура воздуха $t_1 = 14$ °С, а его давление $p_1 = 500$ кПа. Во сколько раз уменьшится площадь соприкосновения колес с дорогой, если после поездки температура в шинах повысится до $t_2 = 57$ °С?

Атмосферное давление $p_a = 100$ кПа. Изменением объема шины можно пренебречь.

☑ В 1,2 раза.

Решение. Обозначим давление в нагретых шинах p_2 . Согласно закону Шарля $p_2/p_1 = T_2/T_1$. Здесь T_1 и T_2 — абсолютные температуры, соответствующие t_1 и t_2 . Сила давления шин на дорогу в обоих случаях одна и та же — она равна весу автомобиля. Учитывая, что в формулу для силы давления входит *избыточное* давление, т. е. разность между давлением в шинах и атмосферным давлением, получаем $(p_1 - p_a)S_1 = (p_2 - p_a)S_2$. Из написанных уравнений следует: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{p_1 T_2 - p_a T_1}{T_1 (p_1 - p_a)} = 1,2$.

- 16.4. Рабочий объем цилиндра поршневого насоса 0,5 л. Насос соединен с баллоном вместимостью 3 л, содержащим воздух при давлении $1,01 \cdot 10^5$ Па. Найдите давление воздуха в баллоне после пяти рабочих ходов поршня в случае работы насоса в разрежающем режиме.

☑ $p_p = 48$ кПа.

Решение. Если в начале первого рабочего хода поршня воздух в баллоне занимал объем $V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м³ при давлении p_0 , то в разрежающем режиме к концу первого хода поршня та же масса воздуха займет объем $V_2 + V_1$ при давлении p_1 . Так как изменение температуры не учитывается, то по закону Бойля — Мариотта: $p_1(V_2 + V_1) = p_0 V_2$,

откуда $p_1 = \frac{V_2}{V_2 + V_1} p_0$. В начале второго хода поршня объем и давление газа в баллоне равны соответственно V_2 и p_1 , в конце хода они равны $V_2 + V_1$ и p_2 , откуда $p_2 = \frac{V_2}{V_2 + V_1} p_1$,

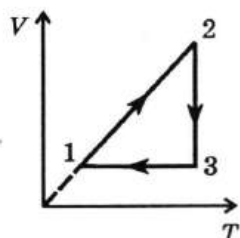
или $p_2 = \left(\frac{V_2}{V_2 + V_1} \right)^2 p_0$. Продолжая те же рассуждения, находим, что к концу n -го рабочего хода $p_n = \left(\frac{V_2}{V_2 + V_1} \right)^n p_0$.

Подставляя числовые значения, получаем

$$p_n = \left(\frac{3 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 0,5 \cdot 10^{-3}} \right)^5 \cdot 1,01 \cdot 10^5 = 48 \text{ (кПа)}.$$

- 16.5. Постройте графики процесса, происходящего с идеальным газом (см. рисунок), в координатах p , T и p , V . Масса газа постоянна.

☑ См. рисунки *a* и *б*.



Решение. Характер изменений T и V на каждом этапе процесса виден непосредственно из графика в условии; характер же изменения p можно определить из уравнения Клапейрона (или воспользоваться тем, что каждый этап процесса представляет собой хорошо известный изопроцесс).

Этап 1-2: T — растет, V — растет (пропорционально T), $p = \text{const}$.

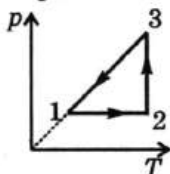


Рис. а

Этап 2-3: $T = \text{const}$, V — убывает, p — растет (пропорционально $1/V$).

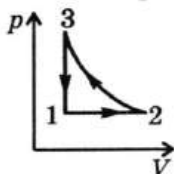


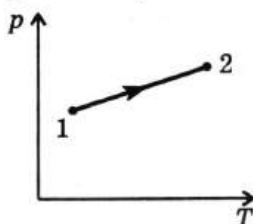
Рис. б

Этап 3-1: T — убывает, $V = \text{const}$, p — убывает (пропорционально T).

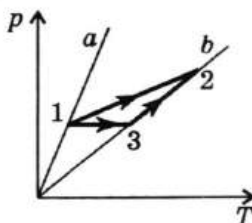
Теперь можно построить графики (см. рис. *a* и *б*).

- 16.6. Сравните объем данной массы идеального газа в состояниях 1 и 2 (см. рисунок).

☑ $V_2 > V_1$.

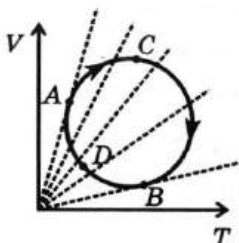
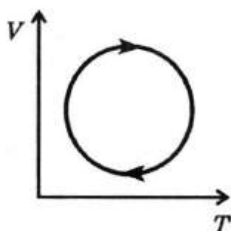


Решение. Перевести газ из состояния 1 в состояние 2 можно также с помощью изопроцессов (см. рисунок). На участке 1-3 объем газа увеличивается (происходит изобарное нагревание), а на участке 3-2 объем не изменяется. Следовательно, $V_2 > V_1$. Можно прийти к этому результату и иначе — провести через точки 1 и 2 соответствующие им изохоры a и b . Большему объему соответствует нижняя изохора.

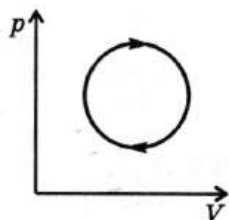


- 16.7. Как менялось давление идеального газа в ходе процесса, график которого изображен на рисунке? Укажите точки на графике, соответствующие наибольшему и наименьшему давлению.

Решение. Проведем через различные точки графика изобары (см. рисунок). Наибольшему давлению соответствует самая нижняя изобара, поэтому такое давление соответствует нижней точке касания B . Наименьшее давление соответствует верхней точке касания A . Таким образом, на участке ACB давление газа возрастает, а на участке BDA — убывает.



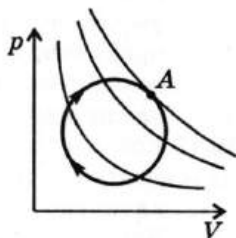
- 16.8. Укажите точку, в которой достигалась наибольшая температура идеального газа в ходе процесса, график которого изображен на рисунке (дайте графическое решение).



☒ Наибольшая температура достигается в точке A (см. рисунок)

Указание. Изотерма, проходящая через эту точку, касается графика данного процесса.

- 16.9. Поршень в цилиндре с газом неплотно прилегает к стенке и пропускает газ наружу. На рисунке показана зависимость объема газа от температуры при изобарном процессе. Укажите направление процесса.

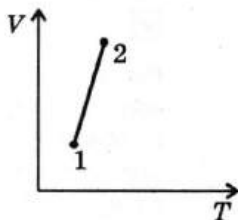


☒ От точки 2 к точке 1.

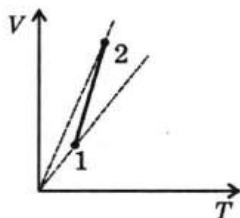
Указание. Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует, что угловой коэффициент изобары прямо пропорционален массе газа, поскольку

$$\frac{V}{T} = \frac{mR}{Mp}.$$

Поэтому для сравнения



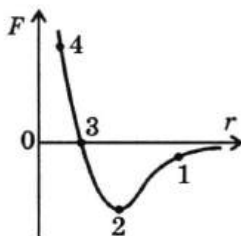
масс газа в состояниях 1 и 2 достаточно провести через точки 1 и 2 изобары (см. рисунок).



- 16.10. Какие отступления от закона Бойля-Мариотта можно предсказать, если учитывать силы притяжения и отталкивания между молекулами газа?

☒ См. рисунок.

Решение. Рассмотрим график зависимости силы взаимодействия молекул от расстояния между ними. На приведенном графике положительным значениям силы соответствует отталкивание, а отрицательным — притяжение.



Для участка графика от 1 до 3 объем, найденный экспериментально, меньше расчетного по закону Бойля-Мариотта. В точке 3 эти объемы равны. На участке 3-4 экспериментальный объем больше расчетного.

- 16.11. Время пробега реактивного самолета по взлетной полосе аэродрома с повышением температуры наружного воздуха увеличивается. Как это можно объяснить?

Решение. С повышением температуры плотность воздуха уменьшается. В связи с этим уменьшается масса воздуха, проходящего через двигатель ежесекундно, и, следовательно, мощность двигателя. В результате время пробега увеличивается.

- 16.12. Компрессор нагнетает воздух в резервуар емкостью V , захватывая при каждом качании объем воздуха ΔV . Первоначально давление в резервуаре равно атмосферному p_a . Какое давление p_N установится в резервуаре после N качаний компрессора? Считайте, что температура воздуха при сжатии не изменяется.

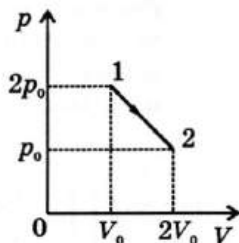
☒ $p_N = p_a(1 + N \cdot \Delta V/V)$.

Решение. Фактически речь идет об изотермическом сжатии порции воздуха, которая при атмосферном давлении занимала объем $V + N \cdot \Delta V$, до объема V .

Согласно закону Бойля-Мариотта $p_N V = p_a (V + N \cdot \Delta V)$, откуда $p_N = p_a(1 + N \cdot \Delta V/V)$. Таким образом, с каждым качанием компрессора давление возрастает на одну и ту же величину $p_a \cdot \Delta V/V$.

- 16.13. Один моль идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 2 (см. рисунок). Найдите максимальную температуру $T_{\max}$ газа в ходе процесса.

✓ $T_{\max} = \frac{9p_0V_0}{4\nu R}$, где $\nu = 1$ моль.

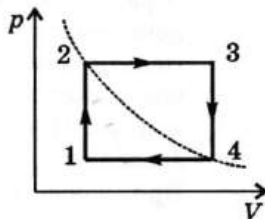


Решение. Поскольку $T = pV/\nu R$, следует отыскать наибольшее значение произведения pV в ходе процесса. Уравнение прямой, на которой лежит отрезок 1-2, имеет вид $p/p_0 + V/V_0 = 3$; следовательно (см. математическое приложение), наибольшее значение произведения $\frac{p}{p_0} \cdot \frac{V}{V_0}$

равно $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$. Отсюда $T_{\max} = \frac{9p_0V_0}{4\nu R}$.

- 16.14. Какова температура идеального газа в состоянии 2 (см. рисунок), если состояния 2 и 4 лежат на одной изотерме? Температуры T_1 и T_3 в состояниях 1 и 3 считайте заданными.

✓ $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$.



Решение. Согласно уравнению Клапейрона $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{T_3} = \frac{p_4 V_4}{T_4}$. Из графика процесса следует, что $p_2 = p_3$,

$p_4 = p_1$, $V_2 = V_1$, $V_4 = V_3$. Учитывая, что $T_4 = T_2$, приходим к системе двух уравнений $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_3 V_1}{T_2}$, $\frac{p_3 V_3}{T_3} = \frac{p_1 V_3}{T_2}$. Пе-

ремножая почленно эти уравнения, получаем $T_1 T_3 = T_2^2$.

Олимпиадные задачи

- О-70. Какое наибольшее давление можно измерить с помощью U-образных ртутных манометров, соединенных последовательно короткой трубкой, если каждый из них позволяет измерить давление до 10^5 Па?

✓ $1,41 \cdot 10^5$ Па.

Решение. Ртутный U-образный манометр (рис. а) измеряет избыточное давление Δp , т. е. показывает, на сколько давление p в левом колене манометра больше атмосферного давления p_0 .



Рис. а

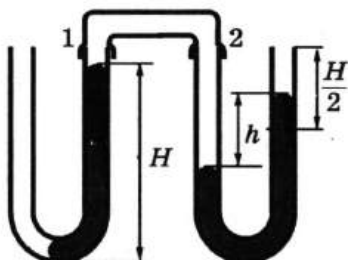


Рис. б

Ограничение на диапазон значений измеряемого избыточного давления накладывается длиной трубок манометра. Нельзя измерить избыточное давление больше такого, при котором ртуть доходит до края правого (по рисунку) колена. Предельное значение измеряемого избыточного давления для используемого манометра равно 10^5 Па.

При последовательном соединении двух манометров (рис. б) избыточное давление Δp_1 в левом колене манометра 1 будет больше $\rho g H$, так как давление p_2 в левом колене манометра 2 больше атмосферного на величину $\rho g h$: $p_2 = p_0 + \rho g h$. Поэтому $\Delta p_1 = \rho g (H + h)$.

Сжатый воздух в левом колене манометра 2 занимает объем $V = S \frac{H + h}{2}$, где S — площадь сечения трубок.

Первоначально этот воздух занимал объем $V = S \frac{H}{2}$ в правом колене манометра 1 и такой же объем в левом колене манометра 2 и давление этого воздуха было равно атмосферному (p_0). Полагая сжатие воздуха изотермическим, можно применить закон Бойля-Мариотта:

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{SH}{\frac{1}{2}S(H + h)}, \text{ откуда } p_2 = 2p_0 \frac{H}{H + h}.$$

Умножив числитель и знаменатель в правой части этого равенства на ρg , получаем:

$$p_2 = 2p_0 \frac{\rho gh}{\rho gH + \rho gh} = 2 \frac{p_0^2}{p_0 + \rho gh} = \frac{2p_0^2}{p_2}, \text{ откуда } p_2 = p_0 \sqrt{2}.$$

Так как $p_1 = p_0 + p_2$, то $\Delta p_1 = p_2 \approx 10^5 \cdot \sqrt{2}$ (Па).

- О-71.** Докажите, что подъемная сила аэростата с герметичной эластичной оболочкой, наполненной более легким газом, чем воздух, не зависит от высоты подъема аэростата при любом законе изменения давления с высотой. Считайте, что температура газа в аэростате равна температуре окружающего воздуха.

Решение. Подъемная сила аэростата $F = (\rho_1 - \rho_2)gV$, где V — объем оболочки, ρ_1 — плотность атмосферного воздуха на той высоте, где находится аэростат, и ρ_2 — плотность наполняющего аэростат газа.

Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует, что

$$p = \frac{\rho}{M} RT. \text{ Так как оболочка аэростата эластичная, мож-}$$

но пренебречь разностью давлений внутри и вне аэроста-

та. Поэтому $\frac{\rho_1}{M_1} RT = \frac{\rho_2}{M_2} RT$, или $\frac{\rho_1}{M_1} = \frac{\rho_2}{M_2}$. Но $\rho_2 = \frac{m_2}{V}$,

где m_2 — масса наполняющего аэростат газа. Поэтому

$$\rho_1 V = \frac{M_1}{M_2} m_2. \text{ Подставив это выражение в формулу для}$$

подъемной силы, получаем: $F = m_2 g \left(\frac{M_1}{M_2} - 1 \right)$. Отсюда

видно, что подъемная сила аэростата не зависит от высоты.

- О-72.** Произведение давления газа на его объем (pV) не меняется с изменением объема при постоянной температуре, только если предположить, что газы, с которыми мы имеем дело, являются идеальными.

Определите, будет уменьшаться или увеличиваться произведение pV при очень сильном сжатии газа, если не делать предположения об идеальности последнего.

Решение. При очень сильном сжатии газа начинает сказываться отталкивание между его молекулами. Поэтому давление реального газа больше рассчитанного в предположении, что газ — идеальный. Отличие реального газа от идеального при увеличении давления увеличивается. Следовательно, при постоянной температуре произведение pV для реального газа при уменьшении объема газа растет.

ТЕРМОДИНАМИКА

17. ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

- 17.1. После включения отопления воздух в комнате нагрелся от температуры T_0 до температуры T . Во сколько раз изменилась внутренняя энергия воздуха, содержащегося в комнате?

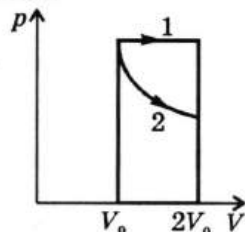
☒ Не изменилась.

Решение. Из-за утечки воздуха давление в комнате не изменяется при нагревании: оно остается равным атмосферному (если представить себе герметично закрытую «комнату», то даже при небольшом нагревании давление повысится настолько, что обычные оконные стекла не выдержат). Следовательно, масса m воздуха в комнате уменьшается. Внутренняя энергия воздуха пропорциональна mRT/M (согласно уравнению Менделеева–Клапейрона). Но ни давление, ни объем воздуха в комнате не изменились; значит, внутренняя энергия воздуха в комнате при нагревании тоже не изменяется! Всю поступающую от источника тепла энергию уносит выходящий наружу воздух.

- 17.2. Объем некоторой массы газа увеличивается вдвое. В каком случае газ совершает большую работу — при изобарном расширении или при изотермическом?

☒ При изобарном расширении.

Решение. Работа газа при небольшом изменении объема $\Delta A' = p\Delta V$. Поскольку при изотермическом расширении давление падает, в этом случае совершается меньшая работа. Особенно нагляден этот вывод при рассмотрении графиков обоих процессов в координатах p, V (см. рисунок). Площадь фигуры под графиком 1 численно равна работе при изобарном расширении; площадь фигуры под графиком 2 соответствует работе при изотермическом расширении.

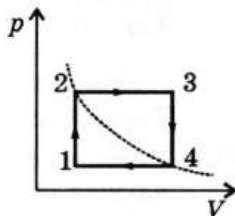


- 17.3. Газ находится в вертикальном цилиндре, герметично закрытом сверху поршнем. Одинаковое ли количество теплоты получит газ при нагревании на 10 К, если: 1) поршень закреплен; 2) поршень легко перемещается?

☒ Большее количество теплоты газ получит во втором случае.

Решение. В первом случае происходит изохорное нагревание, а во втором — изобарное. Поскольку изменение температуры в обоих случаях одинаково, одинаково и изменение внутренней энергии ΔU . Согласно первому закону термодинамики, при изохорном процессе $Q_1 = \Delta U$, а при изобарном $Q_2 = \Delta U + A'$, где A' — совершаемая газом при изобарном расширении работа. Поскольку $A' > 0$, получаем $Q_2 > Q_1$.

- 17.4. На рисунке показан график циклического процесса. На каких этапах процесса газ получал тепло, на каких отдавал? Какое количество теплоты больше: полученное от нагревателя или отданное холодильнику? Газ считайте идеальным, его массу неизменной.



- ☒ Газ получал тепло на этапах 1-2, 2-3; отдавал — на этапах 3-4, 4-1. Получено большее количество теплоты, чем отдано.

Решение. Согласно первому закону термодинамики $Q = \Delta U + A'$, где Q — полученное газом количество теплоты ($Q < 0$ означает, что газ отдает тепло). Совершенная газом работа A' положительна при расширении газа и отрицательна при сжатии. Изменение внутренней энергии газа ΔU положительно при нагревании газа и отрицательно при охлаждении. Таким образом, на различных этапах процесса получаем:

$$1-2: \Delta U > 0, A' = 0 \Rightarrow Q > 0.$$

$$2-3: \Delta U > 0, A' > 0 \Rightarrow Q > 0.$$

$$3-4: \Delta U < 0, A' = 0 \Rightarrow Q < 0.$$

$$4-1: \Delta U < 0, A' < 0 \Rightarrow Q < 0.$$

Чтобы ответить на последний вопрос задачи, используем первый закон термодинамики в применении ко всему циклическому процессу. Поскольку $\Delta U = 0$, получаем $Q = A'$. Работа газа $A' = A'_{2-3} + A'_{4-1} = (p_2 - p_1)(V_3 - V_2) > 0$. Итак, $Q = A' > 0$.

- 17.5. Докажите, что молярные теплоемкости* идеального газа при постоянном давлении C_p и при постоянном объеме C_v связаны соотношением $C_p - C_v = R$, где R — универсальная газовая постоянная.

* Молярная теплоемкость численно равна количеству теплоты, необходимому для нагревания одного моля вещества на 1 К.

Решение. Согласно определению, молярная теплоемкость $C = Q/(\nu \Delta T)$, где ν — количество вещества. При изохорном нагревании газ не совершает работы, поэтому согласно первому закону термодинамики $Q_V = \Delta U$. Следовательно,

но, $C_V = \frac{\Delta U}{\nu \Delta T}$. При изобарном нагревании $Q_p = Q_V + A'$, причем работа газа $A' = p\Delta V$.

Как следует из уравнения Менделеева-Клапейрона, $p\Delta V =$

$= \nu R \Delta T$, поэтому $Q_p = \Delta U + \nu R \Delta T$ и $C_p = \frac{\Delta U}{\nu \Delta T} + R$.

Следовательно, $C_p - C_V = R$.

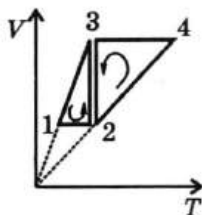
- 17.6. Чему равны молярные теплоемкости одноатомного идеального газа при постоянном объеме C_V и при постоянном давлении C_p ? Найдите их отношение $\gamma = C_p/C_V$. Каково примерное значение этого отношения для жидкости?

☒ $C_V = 3R/2$, $C_p = 5R/2$; $\gamma = 5/3$. Для жидкости γ практически равно единице.

Решение. При постоянном объеме $Q = \Delta U$, поэтому $C_V = \Delta U/(\nu \Delta T)$ (см. задачу 17.5). Для одноатомного идеального газа $U = 3\nu RT/2$, поэтому $C_V = 3R/2$. Тогда $C_p = C_V + R = 5R/2$ и $\gamma = 5/3$. Разность между C_p и C_V обусловлена работой, совершаемой газом при изобарном расширении. Жидкость при нагревании расширяется настолько незначительно, что можно считать $\gamma = 1$.

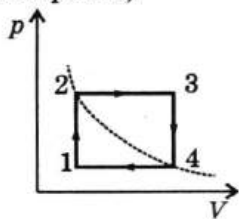
- 17.7. На рисунке изображены два замкнутых процесса, происходящих с идеальным газом: 1-2-3-1 и 3-2-4-3. В каком из них газ совершает большую работу?

☒ В процессе 3-2-4-3.



Указание. Полная работа газа за цикл численно равна площади внутри графика циклического процесса в координатах p, V (в данном случае работа положительна, поскольку оба цикла «проходятся» в координатах p, V по часовой стрелке).

- 17.8. Найдите работу A' , совершенную одним молем идеального газа за цикл (см. рисунок). Температуры газа в состояниях 1 и 3 равны соответственно T_1 и T_3 , а точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.



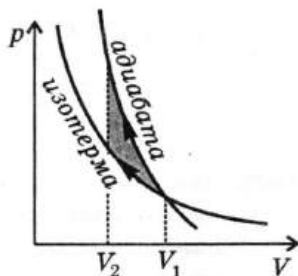
☑ $A' = \nu R (\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2$, где $\nu = 1$ моль.

Решение. Согласно уравнению Клапейрона $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{T_3} = \frac{p_4 V_4}{T_4}$. Из графика процесса следует, что $p_2 = p_3$, $p_4 = p_1$, $V_2 = V_1$, $V_4 = V_3$. Учитывая, что $T_4 = T_2$, приходим к системе двух уравнений $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_3 V_1}{T_2}$, $\frac{p_3 V_3}{T_3} = \frac{p_1 V_3}{T_2}$. Перемножая почленно эти уравнения, получаем $T_1 T_3 = T_2^2$. Отсюда следует, что $T_2 = T_4 = \sqrt{T_1 T_3}$. Работа A' равна площади прямоугольника (см. рисунок в условии): $A' = (p_2 - p_1) \times (V_3 - V_1)$. Раскрывая скобки в этом выражении и учитывая равенство давлений и объемов в некоторых из состояний 1-4, находим, что $A' = p_3 V_3 - p_4 V_4 - p_2 V_2 + p_1 V_1$. Используя уравнение Менделеева-Клапейрона, получаем $A' = \nu R (T_3 - T_4 - T_2 + T_1) = \nu R (\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2$, где $\nu = 1$ моль.

- 17.9. Газ, находящийся в цилиндре под поршнем, сжимают. В каком случае над газом совершается бóльшая работа: при медленном сжатии или при быстром? В каком случае конечная температура выше? Сосуд с газом не теплоизолирован. Конечный объем газа в обоих случаях одинаков.

☑ При быстром сжатии конечная температура, а также совершаемая работа больше.

Решение. При сжатии газ получает энергию за счет работы внешних сил. При медленном сжатии процесс можно считать изотермическим: теплообмен обеспечивает равенство температур газа и окружающей среды. Если сжатие происходит быстро, газ не успевает передать окружающей среде



количество теплоты, сравнимое с совершенной над газом работой. Поэтому процесс можно считать адиабатным. Газ при таком сжатии нагревается и, следовательно, его давление растет быстрее, чем при медленном сжатии. В координатах p, V график изотермы имеет меньшую крутизну, чем график адиабаты (см. рисунок). При быстром сжатии

совершаемая работа больше, чем при медленном сжатии, на величину, численно равную выделенной на рисунке площади.

- 17.10. Газ находится в вертикальном цилиндре с площадью дна $S = 10 \text{ см}^2$. Цилиндр закрыт перемещающимся без трения поршнем массой $m = 9,8 \text{ кг}$. Начальный объем газа $V_0 = 5,0 \text{ л}$, температура $t_0 = 0^\circ \text{С}$. Давление наружного воздуха $p_a = 100 \text{ кПа}$. Какое количество теплоты Q необходимо передать газу при этих условиях для нагревания на $\Delta T = 10 \text{ К}$? Известно, что повышение температуры газа на ту же величину при закрепленном поршне потребовало бы количества теплоты, равного $Q_1 = 90 \text{ Дж}$.

$$\boxed{\checkmark} \quad Q = Q_1 + \frac{(mg + p_a S) V_0 \Delta T}{ST_0} = 126 \text{ Дж}.$$

Решение. Очевидно, при закрепленном поршне газ не совершает работы и потому $Q_1 = \Delta U$. В случае, когда поршень не закреплен, газ расширяется изобарно. При этом изменение его внутренней энергии такое же: ведь внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры. Работа газа при расширении $A' = p\Delta V$, так что $Q = \Delta U + A' = Q_1 + p\Delta V$.

Учтем также, что $p = \frac{mg}{S} + p_a$ и $\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta T}{T_0}$ (так как при

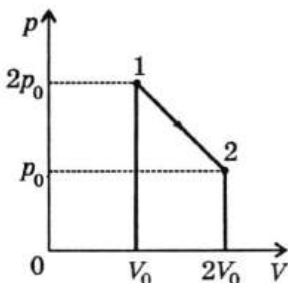
изобарном процессе объем прямо пропорционален абсолютной температуре газа). Тогда

$$Q = Q_1 + \frac{(mg + p_a S) \cdot V_0 \Delta T}{ST_0} = 126 \text{ (Дж)}.$$

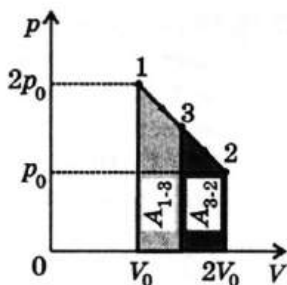
Олимпиадные задачи

- О-73. Какое количество теплоты получает одноатомный газ при нагревании в ходе процесса, изображенного на рисунке? Получает или отдает тепло газ при охлаждении? Чему равно это количество теплоты?

- $\boxed{\checkmark}$ $1,25p_0V_0$; при охлаждении газ получает количество теплоты, равное $0,25p_0V_0$.



Решение. Согласно полученному в задаче 16.13 результату газ нагревается на участке 1-3 и охлаждается на участке 3-2 (см. рисунок; точка 3 — середина отрезка 1-2). На обоих этапах газ совершает работу, численно равную площади соответствующей трапеции: $A'_{1-3} = 0,875p_0V_0$, $A'_{3-2} = 0,625p_0V_0$. Поскольку внутренняя энергия одноатомного газа $U = 3\nu RT/2 =$



$= 3pV/2$, находим $\Delta U_{1-3} = 3(p_3V_3 - p_1V_1)/2 = 3p_0V_0/8$.

Аналогично находим $\Delta U_{3-2} = -3p_0V_0/8$. Применяя к процессам нагревания и охлаждения первый закон термодинамики, получаем $Q_{1-3} = 1,25p_0V_0$ и $Q_{3-2} = 0,25p_0V_0$. Как видим, в данном случае газ *получает* тепло при понижении его температуры.

- О-74.** В длинной, расположенной горизонтально теплоизолированной трубе между двумя одинаковыми поршнями (массой m каждый) находится $\nu = 1$ моль одноатомного газа при температуре T_0 . В начальный момент поршни сближаются, причем скорости поршней направлены в одну сторону и равны 3ν и ν . До какой наибольшей температуры T нагреется газ? Массой газа по сравнению с массой поршней можно пренебречь. Поршни тепло не проводят. Трение пренебрежимо мало. Атмосферное давление можно не учитывать.

☒ $T = T_0 + \frac{2m\nu^2}{3\nu R}.$

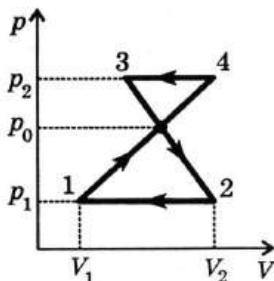
Решение. При сближении поршней происходит адиабатное сжатие газа. Оно, как известно, сопровождается нагреванием. Максимальная температура достигается при максимальном сжатии, т. е. в момент, когда поршни перестают сближаться. В этот момент их скорости u одинаковы и могут быть определены из закона сохранения импульса: $3m\nu + m\nu = 2mu$, откуда $u = 2\nu$. При адиабатном сжатии сумма кинетической энергии поршней и внутренней энергии газа $\left(U = \frac{3}{2}\nu RT \right)$ остается постоянной:

$$\frac{m(3\nu)^2}{2} + \frac{m\nu^2}{2} + \frac{3}{2}\nu RT_0 = 2 \cdot \frac{m(2\nu)^2}{2} + \frac{3}{2}\nu RT.$$

Отсюда $T = T_0 + \frac{2m\nu^2}{3\nu R}.$

- О-75. Определите работу, которую совершает идеальный газ в замкнутом цикле 1-4-3-2-1, изображенном на рисунке, если $p_1 = 10^5$ Па, $p_0 = 3 \cdot 10^5$ Па, $p_2 = 4 \cdot 10^5$ Па, $V_2 - V_1 = 10$ л и участки цикла 4-3 и 2-1 параллельны оси V .

☑ 750 Дж.



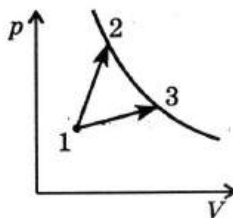
Решение. Выполнение цикла 1-4-3-2-1 фактически эквивалентно выполнению двух простых циклов $1 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ и $0 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ (см. рисунок). Работа газа определяется площадью соответствующего цикла на pV -диаграмме. Однако если в первом цикле она положительна, то во втором отрицательна (работа совершается над газом). Нетрудно найти работу A_1 , совершенную в первом цикле: $A_1 = (p_0 - p_1)(V_2 - V_1)/2$.

Что касается цикла $0 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 0$, то соответствующий ему на pV -диаграмме треугольник подобен треугольнику, отвечающему первому циклу. В результате работа A_2 во втором цикле будет $A_2 = -A_1(p_2 - p_0)^2 / (p_0 - p_1)^2$.

(Площади подобных треугольников относятся как квадраты длин соответствующих элементов, в данном случае — высот). Полная работа A за цикл 1-4-3-2-1 будет, таким образом, равна

$$A = A_1 \left[1 - (p_2 - p_0)^2 / (p_0 - p_1)^2 \right] \approx 750 \text{ (Дж)}.$$

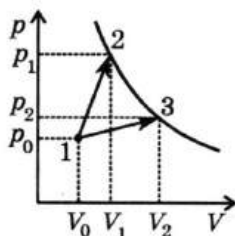
- О-76. Над газом совершают два тепловых процесса, нагревая его из одного и того же начального состояния до одинаковой конечной температуры. На pV -диаграмме процессы изображены прямыми линиями 1-3 и 1-2. Определите, при каком из процессов газу сообщается большее количество теплоты.



☑ В процессе 1-3 газу сообщается большее количество теплоты.

Решение. Согласно первому закону термодинамики, при переходе газа из состояния 1 (p_0, V_0) в состояние 2 (p_1, V_1)

(см. рисунок) количество теплоты ΔQ_1 , полученное газом, равно $\Delta Q_1 = \Delta U_1 + A_1$, где ΔU_1 — изменение его внутренней энергии, A_1 — работа, совершаемая газом, причем $A_1 = (p_0 + p_1)(V_1 - V_0)/2$.



При переходе газа из состояния 1 в состояние 3 (p_2, V_2) (точки 2 и 3 лежат на одной изотерме) выполняются соотношения $\Delta Q_2 = \Delta U_2 + A_2$, $A_2 = (p_0 + p_2)(V_2 - V_0)/2$.

Поскольку конечная температура газа в состоянии 2 и в состоянии 3 одна и та же, то $\Delta U_1 = \Delta U_2$. Чтобы выяснить, в каком из процессов газу сообщается большее количество теплоты, надо сравнить работы A_1 и A_2 . Сделаем это:

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 &= (p_0 + p_1)(V_1 - V_0)/2 - (p_0 + p_2)(V_2 - V_0)/2 = \\ &= [(p_0 V_1 - p_0 V_2) + (p_2 V_0 - p_1 V_0)]/2 < 0, \end{aligned}$$

так как $p_0 V_1 < p_0 V_2$, $p_2 V_0 < p_1 V_0$. Следовательно, $A_2 > A_1$ и $\Delta Q_2 > \Delta Q_1$, т. е. в процессе 1-3 газу сообщается большее количество теплоты.

18. ТЕПЛОВЫЕ ДВИГАТЕЛИ

- 18.1.** Как изменится температура в комнате, если открыть дверцу работающего холодильника?

Решение. Тепло, отбираемое у вещества внутри холодильного шкафа, передается воздуху в той же комнате. Энергия, потребляемая холодильником из сети, также превращается во внутреннюю. При открытой дверце холодильник будет работать, не выключаясь, поэтому количество потребляемой электроэнергии увеличится. В результате *средняя* температура в комнате повысится. Правда, температура в разных местах комнаты будет неодинаковой: у раскрытой дверцы холодильника будет прохладнее, чем у задней его стенки, где расположен теплообменник и происходит выделение тепла.

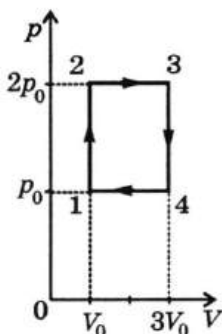
- 18.2.** Во сколько раз количество теплоты, переданное воздуху в комнате при работе теплового насоса, больше энергии, полученной из электросети?

Решение. Пусть тепловой насос получил из сети энергию W и передал воздуху в комнате количество теплоты $Q > W$. Согласно закону сохранения энергии $Q' = Q - W$, где Q' — количество теплоты, переданное от наружного воздуха воздуху в комнате. Если тепловой насос работает по обратимому циклу Карно, $Q/W = 1/\eta_k = T/(T - T') > 1$. Из этой формулы следует: чем меньше разность температур $T - T'$ между воздухом в комнате и наружным воздухом, тем меньше электроэнергии потребуются для отопления.

- 18.3.** На рисунке показан цикл из двух изохор и двух изобар. Найдите КПД цикла, если рабочее тело — одноатомный идеальный газ.

☒ 17 %.

Решение. КПД цикла $\eta = A'/Q$. Совершенная за цикл работа A' численно равна площади прямоугольника: $A' = 2p_0V_0$. Полученное за цикл от нагревателя количество теплоты $Q = Q_{1,2} + Q_{2,3}$. Из уравнения Клапейрона получаем $T_2 = 2T_1$, $T_3 = 6T_1$. Используя результаты решения задачи 17.6, находим:



$Q_{1-2} = \nu C_V(T_2 - T_1) = 3\nu RT_1/2$, $Q_{2-3} = \nu C_p(T_3 - T_2) = 10\nu RT_1$.
Здесь ν — количество вещества. Подставляя полученные значения в формулу для КПД и используя соотношение $p_0 V_0 = \nu RT_1$, получаем $\eta = 4/23 \approx 0,17$.

- 18.4. Найдите КПД тепловой машины, график цикла которой показан на рисунке. Рабочим телом является одноатомный идеальный газ.

☒ 15 %.

Решение. КПД цикла $\eta = \frac{A'}{Q_n}$, где

A' — работа газа за цикл; Q_n — количество теплоты, полученное от нагревателя за цикл. Работа газа численно равна площади треугольника 1-2-3, поэтому

$$A' = \frac{3V_0 \cdot 3p_0}{2} = \frac{9p_0 V_0}{2}.$$

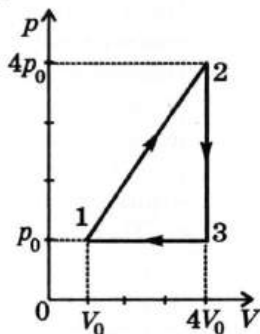
Газ получает тепло только на этапе 1-2: здесь происходит расширение газа (т. е. $A'_{1-2} > 0$) и его нагревание (т. е. $\Delta U_{1-2} > 0$), так что $Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A'_{1-2} > 0$. На двух других этапах газ тепло отдает. Работа A'_{1-2} вычисляется как площадь соответствующей трапеции:

$$A'_{1-2} = \frac{p_0 + 4p_0}{2} \cdot 3V_0 = \frac{15p_0 V_0}{2}.$$

Изменение внутренней энергии на этапе 1-2 составит:

$$\Delta U_{1-2} = \frac{3}{2} \nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} (4p_0 \cdot 4V_0 - p_0 V_0) = \frac{45p_0 V_0}{2}.$$

Следовательно, $Q_n = Q_{1-2} = 30p_0 V_0$ и $\eta = 15\%$.



Олимпиадные задачи

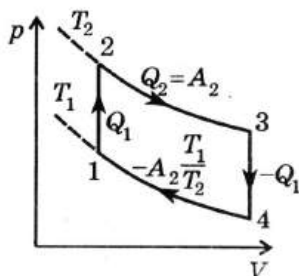
- О-77. Может ли КПД тепловой машины, использующей цикл, состоящий из двух изотерм и двух изохор, быть равен КПД идеальной тепловой машины Карно, работающей с теми же нагревателем и холодильником?

☒ Нет, КПД идеальной тепловой машины Карно больше.

Решение. Пусть цикл состоит из двух изотерм и двух изохор (см. рисунок).

Обозначим температуру холодильника T_1 , а нагревателя T_2 . На участке 1-2 к газу подводится некоторое количество теплоты Q_1 . На участке 2-3 все подводимое количество теплоты Q_2 идет на совершение работы: $Q_2 = A_2$.

На участке 3-4 от газа отбирается количество теплоты Q_1 . На участке 4-1 совершаемая газом работа отрицательна и, следовательно, от него отбирается теплота. Полное количество теплоты, подведенное за один цикл к газу, составляет $Q_1 + A_2$. Работа газа за цикл, как видно из рисунка, складывается из положительной работы A_2 на участке 2-3 и отрицательной A_4 на участке 4-1. Из закона Шарля следует, что площадь под кривой 2-3 больше, чем площадь под кривой 4-1, в T_1/T_2 раз. Следовательно, $A_4 = -(T_1/T_2) \cdot A_2$. Полная работа за цикл



$$A = A_2 + A_4 = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \cdot A_2,$$

а КПД $\eta = \frac{A}{Q_1 + A_2} = \frac{1 - \frac{T_1}{T_2}}{1 + \frac{Q_1}{A_2}} < 1 - \frac{T_1}{T_2}$, т. е. КПД тепловой

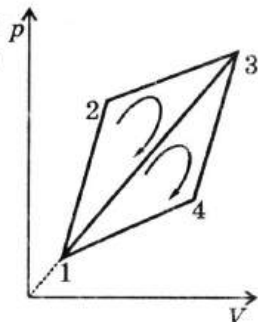
машины, использующей цикл, состоящий из двух изотерм и двух изохор, меньше КПД идеальной тепловой машины Карно, который равен $1 - T_1/T_2$.

О-78. КПД цикла 1-2-3-1 (см. рисунок) равен η_1 , а КПД цикла 1-3-4-1 равен η_2 . Найдите КПД η цикла 1-2-3-4-1.

☒ $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

Решение. В цикле 1-2-3-4-1 рабочее тело получает тепло на этапах 1-2 и 2-3, а отдает на этапах 3-4 и 4-1 ($|Q_{341}| = Q_{143}$). Формулы для КПД циклов имеют вид

$$\eta_1 = (Q_{123} - Q_{13})/Q_{123},$$



$$\eta_2 = (Q_{13} - Q_{143})/Q_{13}, \text{ и } \eta = (Q_{123} - Q_{143})/Q_{123}.$$

Из первых двух формул находим $Q_{123} = Q_{13}/(1 - \eta_1)$,

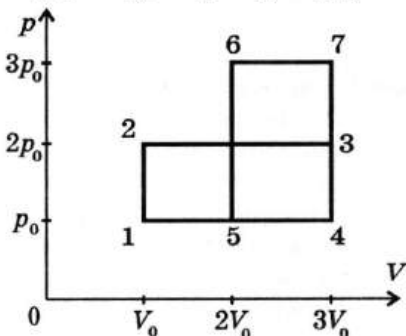
$$\text{и } Q_{143} = (1 - \eta_2) \cdot Q_{13}.$$

Следовательно, $\eta = 1 - (1 - \eta_1)(1 - \eta_2) = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

О-79. Определите отношение

$\frac{\eta_1}{\eta_2}$ коэффициентов полез-

ного действия двух циклических процессов, проведенных с идеальным газом (см. рисунок): первый процесс 1-2-3-4-1, второй процесс 5-6-7-4-5.



☑ 27/23.

Решение. КПД цикла $\eta = \frac{A'}{Q_n}$, где A' — работа газа за цикл; Q_n — количество теплоты, полученное от нагревателя за цикл. Работе газа за цикл на pV -диаграмме соответствует площадь, заключенная «внутри» цикла. Из условия задачи следует, что работа газа в первом и во втором процессах одна и та же. Следовательно, $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_2}{Q_1}$, где Q_1 и

Q_2 — количества теплоты, полученные системой соответственно в первом и во втором циклах. Найдем Q_1 и Q_2 .

Пусть температура газа в точке 1 (см. рисунок) была T_1 . Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа, нетрудно показать, что $T_2 = T_5 = 2T_1$, $T_3 = T_6 = 6T_1$, $T_4 = 3T_1$, $T_7 = 9T_1$. Очевидно, что в процессе 1-2-3-4-1 газ получил тепло Q_1 на участках 1-2 и 2-3, причем $Q_1 =$

$= A_1 + \Delta U_1$, где $A_1 = 4p_0V_0 = 4\nu RT_1$ — работа, совершенная на этих участках газом, $\Delta U_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) = \frac{15}{2}\nu RT_1$ — изменение его внутренней энергии, так что

$$Q_1 = 4\nu RT_1 + \frac{15}{2}\nu RT_1 = \frac{23}{2}\nu RT_1.$$

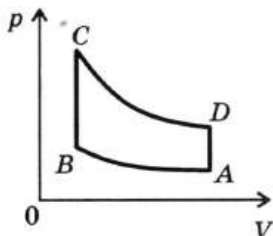
В процессе 5-6-7-4-5 газ получил тепло Q_2 на участках 5-6 и 6-7, причем

$$Q_2 = A_2 + \Delta U_2 = 3p_0V_0 + \frac{3}{2}\nu R(T_7 - T_5) = \frac{27}{2}\nu RT_1.$$

Таким образом, $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{27}{23}.$

О-80. Карбюраторный двигатель внутреннего сгорания работает по циклу, состоящему из четырех последовательно происходящих процессов: адиабатного сжатия из состояния A в состояние B , изохорного перехода из состояния B в состояние C в результате нагревания воздуха при сжигании горючей смеси, адиабатного расширения из состояния C в состояние D и изохорного перехода из состояния D в исходное состояние A (см. рисунок).

Вычислите КПД двигателя для случая, если бы воздух был идеальным одноатомным газом при значениях температуры в состояниях A , B , C и D соответственно: $T_A = 300$ К, $T_B = 524$ К, $T_C = 786$ К и $T_D = 450$ К.



☒ 43 %.

Решение. КПД теплового двигателя определяется соотношением $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, где Q_1 — количество теплоты, пере-

данное за цикл рабочему телу от нагревателя, Q_2 — количество теплоты, полученное за цикл холодильником от рабочего тела. Во время осуществления адиабатных процессов расширения и сжатия нет теплообмена рабочего тела ни с холодильником, ни с нагревателем. Следовательно, весь процесс теплопередачи количества теплоты Q_1 от нагревателя осуществляется при переходе газа из состояния B в состояние C , а процесс передачи количества теплоты Q_2 холодильнику — при переходе газа из состояния D в состояние A . При изохорном переходе газа из состояния B в состояние C работа внешних сил равна нулю: $A = 0$, так как поршень неподвижен. Из первого закона термодинамики для этого процесса следует:

$$\Delta U_{BC} = Q_1 + A, A = 0, \Delta U_{BC} = Q_1.$$

Таким образом, количество теплоты, полученное газом от нагревателя за весь цикл, равно изменению внутренней энергии газа при переходе из состояния B в состояние C :

$$Q_1 = \Delta U_{BC} = U_C - U_B = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R T_C - \frac{3}{2} \frac{m}{M} R T_B = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R (T_C - T_B).$$

Аналогично количество теплоты Q_2 , переданное холодильнику при изохорном переходе газа из состояния D в состояние A , равно:

$$Q_2 = \Delta U_{DA} = U_D - U_A = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R (T_D - T_A).$$

Подставляя полученные выражения для Q_1 и Q_2 в уравнение для определения КПД, получаем:

$$\begin{aligned} \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} &= \frac{\frac{3}{2} \frac{m}{M} R (T_C - T_B) - \frac{3}{2} \frac{m}{M} R (T_D - T_A)}{\frac{3}{2} \frac{m}{M} R (T_C - T_B)} = \\ &= \frac{T_C - T_B - T_D + T_A}{T_C - T_B}. \end{aligned}$$

Находим числовое значение КПД:

$$\eta = \frac{786 - 524 - 450 + 300}{786 - 524} \approx 0,43.$$

Таким образом, $\eta = 43 \%$.

ЖИДКОСТИ, ПАРЫ И ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

19. СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

- 19.1. Действительно ли нельзя носить воду в решете? Пусть тонкие нити решета протянуты на расстоянии $d = 1,0$ мм друг от друга. Сколько воды можно унести в таком круглом решете радиусом $r = 10$ см? Считайте, что нити водой не смачиваются.

☒ Около 1 л.

Решение. Вода не будет выливаться из решета, если равнодействующая сил поверхностного натяжения компенсирует силу тяжести. Рассмотрим столб воды, в основании которого — квадратик, образованный нитями решета. При максимально возможной высоте h слоя воды силы поверхностного натяжения направлены вверх, и их равнодействующая равна $4\sigma d$. Она уравнивает силу тяжести столба воды $\rho d^2 gh$. Отсюда $h = \frac{4\sigma}{\rho g d} = 3$ см, тогда масса

воды $m = \pi r^2 h \rho \approx 1$ (кг).

- 19.2. Стеклянная капиллярная трубка с очень тонкими стенками подвешена вертикально к чашке рычажных весов. Весы уравновешены. К трубке подносят снизу сосуд с водой так, что поверхность воды касается капилляра. Чтобы восстановить равновесие, пришлось увеличить груз на другой чашке весов на $m = 0,14$ г. Найдите радиус r капилляра.

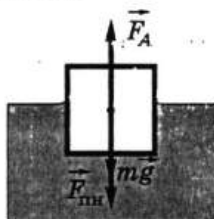
☒ 1,5 мм.

Решение. Силы поверхностного натяжения тянут капиллярную трубку вниз. Они приложены к внутренней и внешней поверхностям по окружностям радиуса r , поэтому полная длина линии, вдоль которой действует сила поверхностного натяжения F , равная $4\pi r$. Следовательно, $F = 4\pi r \sigma$. С другой стороны, согласно условию $F = mg$, отсюда $r = \frac{mg}{4\pi \sigma} = 1,5$ (мм).

- 19.3. Смачиваемый водой кубик массой $m = 4$ г плавает на поверхности воды. Длина ребра кубика $a = 3$ см. На какой глубине h находится нижняя грань кубика?

☒ 5,4 мм.

Решение. Свободная поверхность жидкости граничит со стенками кубика по периметру квадрата со стороной a . Кубик тянет вниз сила поверхностного натяжения $F_{\text{пн}} = 4\sigma a$ (см. рисунок).



Условие равновесия: $F_A = mg + F_{\text{пн}}$. Учитывая, что $F_A = \rho_w g V_{\text{в}} = \rho_w g a^2 h$, где ρ_w — плотность воды, а $V_{\text{в}}$ — объем погруженной части кубика (т. е. объем вытесненной воды), получаем:

$$h = \frac{mg + 4\sigma a}{\rho_w g a^2} = 0,0054 \text{ (м)}.$$

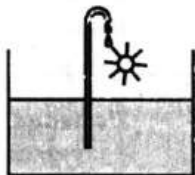
Итак, нижняя часть кубика погружена на 5,4 мм. В «отсутствие» поверхностного натяжения (при $\sigma = 0$) эта глубина была бы на 1 мм меньше.

- 19.4. Оцените максимальный размер капель воды, которые могут висеть на потолке.

☒ $r \approx 5 \text{ мм}.$

Решение. Для грубой оценки можно принять, что висящая на потолке капля имеет форму полушара радиусом r . Тогда удерживающая каплю сила поверхностного натяжения равна $\sigma \cdot 2\pi r$, а сила тяжести капли $mg = \rho(2\pi/3)r^3g$, откуда $r = \sqrt{3\sigma/(\rho g)} = 4,7 \text{ (мм)}.$

- 12.5. Предлагается проект вечного двигателя: тонкая смачиваемая водой изогнутая трубка погружена одним концом в широкий сосуд с водой (см. рисунок). Вода поднимается по трубке и стекает обратно в сосуд. Вытекающая из трубки вода может совершать полезную работу. В чем несостоятельность этого проекта?



Решение. Вода действительно может подняться и заполнить достаточно тонкую трубку полностью. Однако *выте-*

касть из трубки она не будет: воду удержат те же самые силы поверхностного натяжения, которые втянули ее в капилляр.

- 19.6. Почему падающая струя воды всегда разрывается на капли? Нельзя ли, устранив возможные сотрясения, неограниченно увеличивать длину струи?

Решение. Из-за увеличения скорости воды при падении струя воды будет становиться все тоньше. Но когда она станет слишком тонкой, силы поверхностного натяжения в стремлении уменьшить площадь поверхности разорвут струю на отдельные капли.

- 19.7. Для удаления жирных пятен материю проглаживают утюгом, подложив под нее лист бумаги. Почему расплавленный жир впитывается в бумагу, а не расходится по материи?

Решение. Жир смачивает материю и бумагу. Поэтому расплавленный горячим утюгом жир втягивается в капилляры — тем сильнее, чем тоньше эти капилляры. В бумаге же капилляры тоньше, чем в материи. Кроме того, играет роль и то, что бумага нагрета меньше, чем ткань.

- 19.8. Изменится ли высота подъема воды в капилляре, если его внести в безвоздушное пространство?

Решение. В этом случае над водой не будет водяных паров и усиленное испарение понизит температуру воды. Поверхностное натяжение увеличится, и уровень воды в капилляре повысится.

Олимпиадные задачи

- О-81. Оцените силу, необходимую для разъединения двух «слипшихся» отполированных стекол размером $1\text{ м} \times 1\text{ м}$, между которыми находится вода. Среднее расстояние между стеклами $d = 0,2\text{ мм}$. Как можно облегчить разъединение стекол?

☒ $F = 700\text{ Н}$.

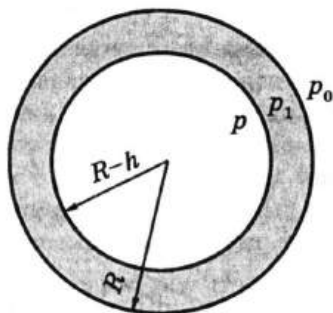
Решение. Стекла слипаются потому, что у их краев образуется вогнутый внутрь цилиндрический мениск с радиусом кривизны $d/2$ (величина d определяется высотой неровностей и некоторым изгибом стекол). Давление внутри воды (между стеклами) меньше атмосферного на $\Delta p = 2\sigma/d$ (см. задачу О-78). Именно за счет этой разности давлений и создается сила $F = \Delta p \cdot S = 2\sigma S/d$, прижи-

мающая стекла друг к другу. До тех пор, пока стекла не пытаются разъединить, эта сила уравнивается силой нормального давления (неровности стекол «упираются» друг в друга). Чем лучше отполированы стекла и чем они более плоские, тем труднее их разъединить. Можно, правда, *сдвигать* стекла друг относительно друга: для этого потребуется преодолеть лишь силу трения, намного меньшую F . Если погрузить стекла в воду, мениск исчезнет, и стекла разъединятся без труда.

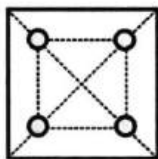
- О-82. Найдите давление воздуха p внутри мыльного пузыря радиусом R . Давление воздуха вне пузыря p_0 , поверхностное натяжение мыльной пленки σ .

☑ $p = p_0 + 4\sigma/R$.

Решение. Давление внутри мыльной пленки (см. рисунок, на котором толщина пленки намеренно преувеличена) $p_1 = p_0 + 2\sigma/R$; давление же внутри пузыря $p = p_1 + 2\sigma/(R - h)$. Толщина h стенки мыльного пузыря ничтожно мала, поэтому $p = p_0 + 4\sigma/R$. Избыточное давление в мыльном пузыре вдвое больше, чем внутри воздушного пузырька того же радиуса в мыльной воде, потому что в мыльном пузыре избыточное давление создается *двумя* поверхностями: внешней и внутренней.

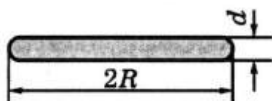


- О-83. На четыре ртутных шарика радиусом $r_0 = 1$ мм, лежащих на горизонтальном стекле, осторожно положили квадратную стеклянную пластинку массой $m = 80$ г (на рисунке показан вид сверху). Каким будет зазор d между стеклом и пластинкой?



☑ 0,15 мм.

Решение. Пластинка давит на каждый из ртутных шариков с силой $mg/4$. В результате каждый из шариков сплющивается в «блин» толщиной d и радиусом R (см. рисунок).



Будем предполагать, что $d \ll R$. Объем «блина» $\pi R^2 d$ должен совпадать с начальным объемом шарика $4\pi r_0^3/3$. Давление внутри «блина» (избыточное над атмосферным) обусловлено кривизной боковой поверхности «блина». Поскольку $d \ll R$, это давление совпадает с давлением цилиндрического мениска радиусом $d/2$, т. е. $p = 2\sigma/d$. С другой стороны, $p = mg/(4\pi R^2)$, поэтому $mg/(4\pi R^2) = 2\sigma/d$. Используя условие постоянства объема, находим

$$d = 4r_0 \sqrt{2\pi\sigma r_0 / (3mg)} = 0,15 \text{ (мм)}.$$

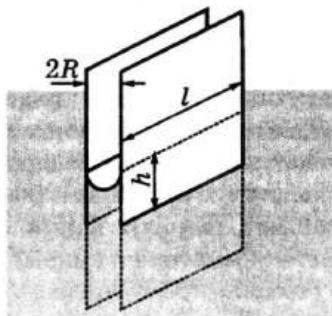
Чтобы проверить справедливость сделанного выше предположения $d \ll R$, вычислим

$$R = \sqrt[4]{m g r_0^3 / (6\pi\sigma)} = 3,0 \text{ (мм)}.$$

Таким образом, сделанное предположение подтвердилось.

О-84. Докажите, что избыточное давление в жидкости под ее цилиндрической поверхностью радиусом R равно σ/R , а под сферической поверхностью $2\sigma/R$.

Решение. Рассмотрим ситуацию, в которой образуется цилиндрический мениск жидкости: в жидкость на небольшом расстоянии $2R$ друг от друга опущены две параллельные вертикальные смачиваемые пластины (см. рисунок).



На столбик жидкости, поднявшейся между ними на высоту h , действует вверх сила поверхностного натяжения $2\sigma l$, уравнивающая силу тяжести

$$mg = \rho \cdot 2Rlh \cdot g.$$

Приравнявая эти силы, находим $h = \frac{\sigma}{\rho Rg}$. Следовательно

но, давление в жидкости под поверхностью мениска меньше атмосферного на $\Delta p = \rho gh = \sigma/R$. Полусферический же мениск возникает в круглом капилляре, опущенном в жидкость. В этом случае условие равновесия столбика жидкости имеет вид $\sigma \cdot 2\pi R = \rho \cdot \pi R^2 hg$, откуда $\Delta p = \rho gh = 2\sigma/R$. В случае несмачивания давление под выпуклой поверхностью мениска *увеличивается* на Δp . Вообще давление всегда меньше с той стороны мениска, куда обращена выпуклость (поверхность жидкости ведет себя в этом отношении как упругая пленка). Избыточное давление под искривленной поверхностью жидкости называют лапласовским давлением.

О-85. Куда будет двигаться в горизонтальном коническом капилляре капля смачивающей жидкости? Капля несмачивающей жидкости?

☒ В сторону сужения капилляра; в сторону расширения капилляра.

Решение. Форма капли смачивающей жидкости показана на рис. а. Радиусы кривизны двух сферических менисков связаны соотношением $r_1 < r_2$. Давление в жидкости у каждого из менисков соответственно

$$p_1 = p_a - 2\sigma/r_1 \text{ и } p_2 = p_a - 2\sigma/r_2$$

(см. задачу О-83; здесь p_a — атмосферное давление). Жидкость будет перетекать в сторону более низкого давления p_1 , т. е. втягиваться в более узкую часть капилляра. В случае несмачивания (см. рис. б) $p_1 = p_a + 2\sigma/r_1$ и $p_2 = p_a + 2\sigma/r_2$. Капля будет перемещаться в более широкую часть капилляра, поскольку $p_1 > p_2$.

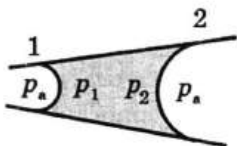


Рис. а

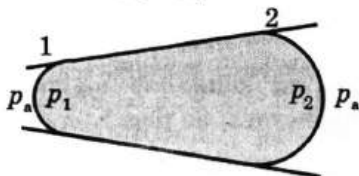
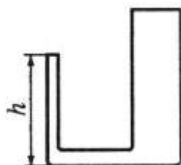


Рис. б

О-86. Капиллярная стеклянная трубка радиусом r и высотой h соединена с широким и высоким сосудом (см. рисунок). Сосуд постепенно заполняется каплями воды, падающими через равные промежутки времени. Постройте графики зависимостей от времени уровней воды в трубке и сосуде, а также разности этих уровней.



☑ См. рис. а, б, в (при $h < \frac{2\sigma}{\rho g r}$) и рис г, д, е (при $h > \frac{2\sigma}{\rho g r}$).

Здесь H_k и H — высоты уровня воды соответственно в капилляре и в сосуде; $\Delta H = H_k - H$.

Решение. Обозначим через H_k и H высоту уровня воды соответственно в капилляре и в широком сосуде. $\Delta H = H_k - H$. Будем считать широкую трубку настолько высокой, что вода не достигает ее края. Рассмотрим два случая.

1. $h < \frac{2\sigma}{\rho g r}$. В этом случае капилляр заполнится, когда

широкий сосуд будет еще практически пуст. Только после этого начнет заполняться (естественно, намного медленнее) широкий сосуд. При этом форма мениска в капилляре будет меняться от вогнутой до плоской (при $\Delta H = 0$) и затем выпуклой (при $\Delta H < 0$). Когда H достигнет значения $h + \frac{2\sigma}{\rho g r}$, вода начнет выливаться из капилляра и повышение уровня воды прекратится.

Графики $H_k(t)$, $H(t)$, $\Delta H(t)$ приведены на рис а, б, в.

2. $h > \frac{2\sigma}{\rho g r}$. В отличие от предыдущего случая теперь, на-

чина с некоторого момента, уровень воды растет с одинаковой скоростью в капилляре и в широком сосуде, так что $\Delta H = \frac{2\sigma}{\rho g r} = \text{const}$. Так продолжается, пока вода не за-

полнит капилляр полностью. Соответствующие графики приведены на рис. г, д, е. Обратим внимание, что $|\Delta H|$ во всех случаях не превышает $\frac{2\sigma}{\rho g r}$.

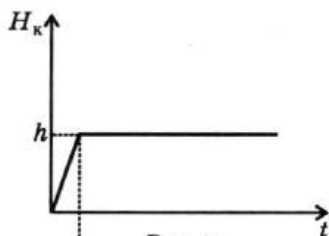


Рис. а

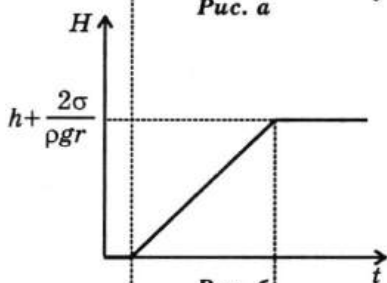


Рис. б

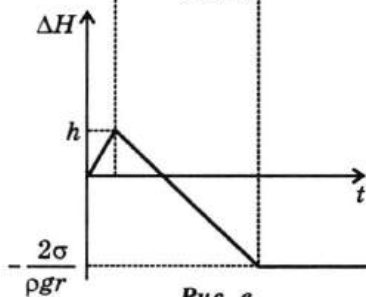


Рис. в

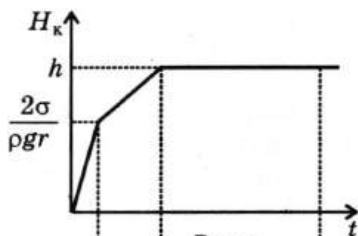


Рис. з

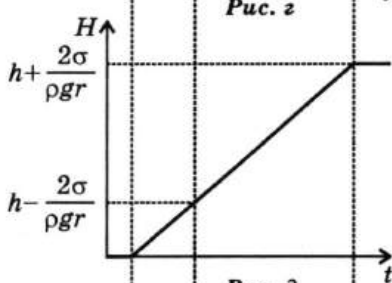


Рис. д

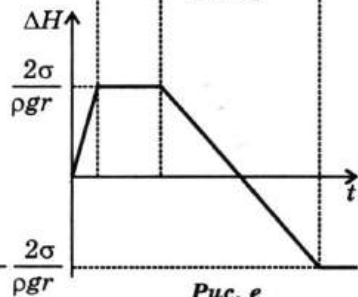


Рис. е

- О-87. В длинном открытом с обеих сторон вертикальном капилляре находится столбик воды высотой 2,0 см. Каков радиус r кривизны нижнего мениска, если внутренний радиус капилляра $R = 0,50$ мм? Как изменится ответ, если высота столбика воды удвоится?

☒ В обоих случаях $r = 1,5$ мм, но в первом случае выпуклость мениска обращена внутрь, а во втором — наружу.

Решение. В обоих случаях радиус кривизны верхнего мениска равен R . Поэтому давление в воде непосредственно под верхним мениском $p_v = p_a - 2\sigma/R$. Давление в жидкости у нижнего мениска $p_n = p_v + \rho gh$, где h — длина столбика воды. Это давление отличается от атмосферного на величину $\Delta p = p_n - p_a = \rho gh - 2\sigma/R$. Посколь-

ку $|\Delta p| = 2\sigma/r$, получаем $r = \frac{2\sigma}{|\rho gh - 2\sigma/R|}$. При $\Delta p < 0$

выпуклость нижнего мениска обращена вверх, при $\Delta p > 0$ вниз (при $\Delta p = 0$ нижний мениск плоский). На рис. а и б показана форма нижнего мениска соответственно при $h = 2,0$ см и $h = 4,0$ см. В обоих случаях $r = 1,5$ мм.



Рис. а



Рис. б

20. НАСЫЩЕННЫЕ И НЕНАСЫЩЕННЫЕ ПАРЫ. ВЛАЖНОСТЬ ВОЗДУХА

- 20.1. Температура некоторой массы воздуха $t_1 = 20^\circ\text{C}$, точка росы $t_2 = 10^\circ\text{C}$. Какова относительная влажность воздуха φ ?

☒ 54 %.

Решение. При охлаждении плотность ρ водяного пара остается постоянной вплоть до начала конденсации, т. е. до точки росы. Следовательно,

$$\rho = \rho_{n2} \text{ и } \varphi = \frac{\rho_{n2}}{\rho_{n1}} \cdot 100\% = 54\%.$$

- 20.2. В теплой кухне развешено выстиранное белье. На улице моросит холодный осенний дождь. Имеет ли смысл открыть форточку, чтобы белье высохло быстрее?

Решение. Скорость высыхания белья зависит от относительной влажности φ воздуха в кухне. На первый взгляд, величина φ увеличится после открывания форточки — ведь снаружи водяной пар близок к насыщению. Однако следует учесть, что в кухне температура существенно выше, а относительная влажность тоже довольно высока. Поэтому здесь парциальное давление пара намного выше, чем снаружи (давление насыщенного пара очень быстро растет с повышением температуры). Значит, при открытой форточке пар будет *выходить* из кухни и белье будет сохнуть быстрее.

- 20.3. При $t_1 = 30^\circ\text{C}$ относительная влажность воздуха $\varphi_1 = 80\%$. Какой станет относительная влажность φ_2 этого же воздуха, если его нагреть при постоянном объеме до $t_2 = 50^\circ\text{C}$?

☒ 29 %.

Решение. Относительная влажность $\varphi = \frac{p}{p_n} \cdot 100\%$, где

p — парциальное давление водяного пара при температуре t , а p_n — давление насыщенного пара при той же температуре. Ненасыщенный водяной пар с хорошей точностью описывается уравнением Клапейрона, поэтому при $V = \text{const}$

получаем $p_2 = p_1 T_2 / T_1$. Отсюда $\varphi_2 = \frac{p_{n1}}{p_{n2}} \frac{T_2}{T_1} \varphi_1 = 29(\%)$ (мы

воспользовались данными из таблицы). Задачу можно

решить также, воспользовавшись формулой $\varphi = \frac{\rho}{\rho_n} \cdot 100\%$, где ρ — плотность пара, а ρ_n — плотность

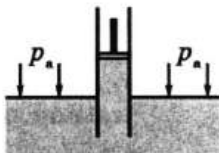
насыщенного пара при той же температуре*. Поскольку плотность пара при изохорном нагревании не изменяется,

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\rho_{n1}}{\rho_{n2}}, \text{ откуда } \varphi_2 = \frac{\rho_{n1}}{\rho_{n2}} \varphi_1 = 29\%.$$

- 20.4. На какую высоту h можно поднять кипящую воду поршневым насосом? Считайте, что вода при подъеме не остывает.

☒ $h = 0.$

Решение. Когда поршень поднимают, между ним и поверхностью жидкости образуется разрежение, и вода поднимается вслед за поршнем под действием атмосферного давления (см. рисунок).



Давлением насыщенного водяного пара под поршнем обычно можно пренебречь (например, при комнатной температуре это давление составляет около 2 % атмосферного). Если же вода горячая, давлением насыщенного пара пренебрегать нельзя, потому что при повышении температуры его давление быстро возрастает и при кипении становится равным атмосферному. Поэтому кипящую воду насос не поднимет вообще — под поршнем не возникает разрежение.

- 20.5. В помещение нужно подать $V = 10\,000\text{ м}^3$ воздуха с температурой $t_1 = 18^\circ\text{C}$ и относительной влажностью $\varphi_1 = 50\%$. Воздух снаружи имеет температуру $t_2 = 10^\circ\text{C}$ и относительную влажность $\varphi_2 = 60\%$. Осушать или увлажнять придется наружный воздух? Сколько воды придется при этом сконденсировать или испарить?

☒ Воздух надо увлажнить, испарив 22 кг воды.

Решение. Масса водяного пара в помещении $m_1 = \rho_1 V$, в забираемом снаружи воздухе $m_2 = \rho_2 V_2$ (здесь ρ_1 и ρ_2 —

* Эту формулу можно вывести из определения относительной влажности, если воспользоваться уравнением состояния идеального газа.

плотности водяного пара при соответствующих условиях, $V_2 = VT_2/T_1$ — объем забираемого снаружи воздуха). Массу пара в забираемом воздухе следует изменить на $\Delta m = m_1 - m_2$ (если окажется, что $\Delta m < 0$, воздух надо не увлажнять, а осушать). Используя соотношение $\rho = \phi \rho_{\text{н}}/100 \%$, находим

$$\Delta m = \frac{V}{100 \%} \left(\rho_{\text{н}1} \phi_1 - \rho_{\text{н}2} \phi_2 \frac{T_2}{T_1} \right) = 22 \text{ (кг)}.$$

- 20.6. В открытом неглубоком сосуде находятся две несмешивающиеся жидкости, одна над другой. При атмосферном давлении температура кипения нижней жидкости 77°C , верхней 100°C . Что можно сказать о температуре t , при которой начнется кипение в сосуде?

Решение. Кипение начинается, когда давление паров в пузырьках становится равным внешнему давлению (если в жидкостях достаточно много центров парообразования). Пузырьки, образующиеся на границе двух жидкостей, содержат насыщенные пары *обеих* жидкостей, поэтому давление в этих пузырьках больше, чем в остальных. Следовательно, при нагревании жидкостей кипение начнется именно на границе между ними, причем при температуре $t < 77^\circ\text{C}$. Нижняя жидкость, как более летучая, будет выкипать быстрее.

- 20.7. В цилиндре под поршнем находится воздух, имеющий температуру $t_1 = 10^\circ\text{C}$ и относительную влажность $\phi_1 = 60 \%$. Какой станет относительная влажность этого воздуха после нагревания его до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$ и уменьшения объема втрое? Как изменится ответ, если $t_1 = 90^\circ\text{C}$?

☒ 2,9 %; 100 %.

Решение. Поскольку t_2 совпадает с температурой кипения воды при нормальном атмосферном давлении $p_{\text{а}}$, давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p_{\text{н}2} = p_{\text{а}} = 101 \text{ кПа}$. Из уравнения состояния идеального газа следует: $p_2 = 3p_1 T_2/T_1$, где p_1 и p_2 — начальное и конечное значения парциального давления водяного пара.

Используя (дважды) соотношение $\phi = \frac{p}{p_{\text{н}}} \cdot 100 \%$, находим

$\varphi = \frac{3p_{\text{н}2}T_2}{p_{\text{н}2}T_1}\varphi_1 = 2,9\%$. При более сильном сжатии и/или более высокой начальной температуре полученный по этой формуле ответ может превысить 100 %, что как раз имеет место при $t_1 = 90^\circ\text{C}$. Это означает, что на самом деле $\varphi = 100\%$ и произошла частичная конденсация пара.

Олимпиадные задачи

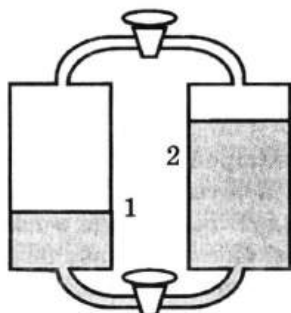
- О-88.** В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится вода массой $m = 30$ г при температуре $t_1 = 0^\circ\text{C}$. Площадь поршня $S = 500$ см², внешнее давление $p = 10^5$ Па. На какую высоту h поднимется поршень, если находящийся в цилиндре электронагреватель выделит количество теплоты $Q = 25$ кДж?

☒ 19 см.

Решение. Для нагревания воды до $t_2 = 100^\circ\text{C}$ потребуется количество теплоты $Q_1 = mc(t_2 - t_1) = 12,6$ (кДж). Оставшееся количество теплоты $Q_2 = Q - Q_1 = 12,4$ (кДж) будет затрачено на парообразование. В пар перейдет $m_1 = Q_2/L = 5,4$ (г) воды, где L — удельная теплота парообразования воды при 100°C . Поскольку $m_1 < m$, пар будет насыщенным, и его температура не поднимется выше 100°C . Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона объем пара $V = \frac{m_1 RT}{Mp} = 9,3$ л, откуда высота подъема поршня $h = V/S = 19$ (см).

Может возникнуть вопрос: почему при расчете не была учтена работа по подъему поршня $A' = p\Delta V$? Дело в том, что эта работа уже учтена в табличном значении L : ведь если бы даже невесомого поршня не было, пар при расширении должен был бы преодолеть то же самое атмосферное давление.

- О-89.** Два сосуда наполнены водой до разных уровней и соединены трубками с кранами (см. рисунок). Что произойдет, если открыть только нижний кран? Если открыть только верхний? Воздух из сосудов откачан.



Решение. После открывания нижнего крана вода начнет перетекать в первый сосуд. Поскольку давление паров в обоих сосудах будет оставаться одинаковым и неизменным (за счет конденсации части пара в первом сосуде и испарения воды во втором), уровни воды в обоих сосудах сравняются. Заметим, что если бы в сосудах оставался воздух, уровни воды не сравнялись бы. Что произойдет, если открыть только верхний кран? Давление пара у поверхности воды в обоих сосудах одинаково, но с высотой оно падает. Поэтому у верхнего крана давление со стороны сосуда 1 меньше, и в этот сосуд начинает перетекать пар. В сосуде 1 преобладающим процессом окажется конденсация, а в сосуде 2 — испарение. Таким образом, и в этом случае уровни воды в сосудах 1 и 2 сравняются (правда, этот процесс может занять много месяцев).

- О-90.** В закрытом баллоне объемом $V = 5,0$ л находится смесь из $m_1 = 0,50$ г водорода и $m_2 = 8,0$ г кислорода при давлении $p_1 = 2,35 \cdot 10^5$ Па. Между газами происходит реакция с образованием воды. Какое давление p установится в баллоне после охлаждения до первоначальной температуры?

☒ $p = 60$ кПа.

Решение. В смеси находилось $\nu_1 = m_1/M_1 = 0,25$ моля водорода и $\nu_2 = m_2/M_2 = 0,25$ моля кислорода. Из уравнения Менделеева-Клапейрона находим первоначальную температу-

ру в баллоне: $T = \frac{p_1 V}{(\nu_1 + \nu_2) R} = 283$ (К). В результате реакции

образуется $\nu_3 = 0,25$ моля воды и остается $\nu_4 = 0,125$ моля кислорода. Масса воды $m = \nu_3 M = 4,5$ (г) намного превышает массу насыщенного водяного пара $\rho_n V$ в объеме баллона при данной температуре.

Значит, водяной пар в баллоне насыщен и его парциальное давление $p_n = 1,23$ кПа. Парциальное давление кислорода $p_k = \nu_4 RT/V = p_1/4$ (объемом воды можно пренебречь). Итак, $p = p_n + p_k = 60$ (кПа).

- О-91.** При сжатии некоторой порции влажного воздуха его объем уменьшился в четыре раза, а давление возросло в три раза. Когда воздух сжали еще в два раза, давление стало в пять раз больше первоначального. Температура при сжатии оставалась постоянной. Какова была относительная влажность воздуха φ в самом начале?

☒ 50 %.

Решение. Уже при первом сжатии давление выросло *меньше*, чем в четыре раза, — значит, пар стал насыщенным и произошла частичная его конденсация. Поэтому давление пара p_n после первого и второго сжатия одинаково. Обозначим начальное парциальное давление пара p_n , а воздуха p_a . Парциальное давление воздуха изменялось при изотермическом сжатии обратно пропорционально объему: после первого сжатия оно стало равным $4p_a$, а после второго $8p_a$. Полное давление влажного воздуха сначала равнялось $p_n + p_a$, после первого сжатия стало $p_n + 4p_a$, а после второго $p_n + 8p_a$.

Согласно условию $p_n + 4p_a = 3(p_n + p_a)$, $p_n + 8p_a = 5(p_n + p_a)$. Исключая из этих уравнений p_a , находим $p_n = 2p_a$.

Отсюда $\varphi = \frac{p_n}{p_n + p_a} \cdot 100\% = 50\%$.

21. СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

- 21.1. Почему трос из 100 проволок выдерживает большой груз, чем просто «пучок» из таких же проволок?

Решение. В «пучке» нагрузка никогда не распределяется между всеми проволоками поровну (те проволоки, длина которых чуть больше, чем у других, совсем не растянуты). Поэтому сначала может порваться проволока, на которую приходится наибольшая нагрузка, затем придет очередь следующей проволоки и т. д. В тросе между проволоками действует большая сила трения, все проволоки растягиваются практически одинаково и нагрузка распределяется между ними поровну.

- 21.2. Из скольких стальных проволок диаметром $d = 2,0$ мм должен состоять трос, рассчитанный на подъем груза массой $m = 16$ т?

☒ Не менее чем из 100.

Решение. Обозначим количество проволок N . Механическое напряжение $\sigma = \frac{mg}{NS} = \frac{4mg}{\pi Nd^2}$ не должно превышать

предела прочности стали $\sigma_{\text{пч}}$, поэтому минимальное количество проволок $N_{\text{min}} = 4mg/(\pi d^2 \sigma_{\text{пч}}) = 100$ (округление до ближайшего целого числа следует в данном случае проводить в сторону увеличения). В реальной ситуации всегда выбирается $N > N_{\text{min}}$.

Отношение N/N_{min} характеризует так называемый запас прочности.

- 21.3. Железобетонная колонна сжата силой F . Какая часть нагрузки приходится на железо, если площадь поперечного сечения железа $S_{\text{ж}}$ в 20 раз меньше площади поперечного сечения бетона $S_{\text{б}}$, а модуль упругости железа $E_{\text{ж}}$ в 10 раз больше модуля упругости бетона $E_{\text{б}}$?

☒ 1/3.

Решение. На бетон и железо согласно закону Гука приходятся соответственно нагрузки $F_{\text{б}} = E_{\text{б}} S_{\text{б}} |\varepsilon|$ и $F_{\text{ж}} = E_{\text{ж}} S_{\text{ж}} |\varepsilon|$ (относительное удлинение ε у бетона и железа одинаково; в данном случае оно отрицательно, потому что ко-

лонна сжата). Отсюда $\frac{F_6}{F_{\text{ж}}} = \frac{E_6 S_6}{E_{\text{ж}} S_{\text{ж}}}$. Учитывая также, что

$F_6 + F_{\text{ж}} = F$, получаем:

$$\frac{F_{\text{ж}}}{F} = \left(1 + \frac{E_6 S_6}{E_{\text{ж}} S_{\text{ж}}} \right)^{-1} = \frac{1}{3}.$$

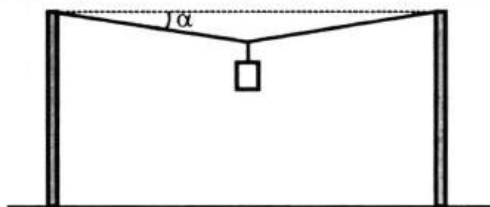
- 21.4.** Проволока растягивается под действием подвешенного груза. Какая часть потерянной грузом потенциальной энергии переходит при этом в потенциальную энергию растянутой проволоки?

☒ Половина.

Решение. Если масса груза равна m , а жесткость проволоки k , то удлинение проволоки под действием подвешенного груза $x = mg/k$. Потенциальная энергия груза уменьшается на величину $mgx = m^2 g^2 / k$, а потенциальная энергия растянутой проволоки $kx^2 / 2 = m^2 g^2 / (2k)$. Таким образом, половина потерянной грузом потенциальной энергии переходит в потенциальную энергию растянутой проволоки. Другая же половина потерянной грузом потенциальной энергии переходит во внутреннюю (например, при затухании возникающих колебаний груза).

Олимпиадные задачи

- О-92.** Между двумя столбами натянута с небольшим усилием легкая проволока. К проволоке посередине подвешивают фонарь массой m . Площадь поперечного сечения проволоки равна S , модуль упругости материала E . Найдите угол провисания проволоки α (см. рисунок), считая его малым.



☒ $\alpha = \left(\frac{mg}{ES} \right)^{1/3}.$

Решение. Из условия равновесия фонаря следует, что $2T \sin \alpha = mg$, где T — сила натяжения проволоки. Согласно закону Гука $T = ES \frac{\Delta l}{l}$, где $\Delta l = l \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$ — удлинение проволоки, а l — расстояние между столбами. Отсюда $2 \sin \alpha \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{mg}{ES}$. При малых α можно считать $\sin \alpha = \alpha$, $1 - \cos \alpha = \alpha^2/2$. Тогда $\alpha = \left(\frac{mg}{ES} \right)^{1/3}$. Разумеется, это решение справедливо только при условии $mg \ll ES$.

22. ИЗМЕНЕНИЯ АГРЕГАТНЫХ СОСТОЯНИЙ ВЕЩЕСТВА

- 22.1.** Чтобы лед таял, ему необходимо сообщать энергию, однако до тех пор, пока весь лед не растает, его температура не увеличивается. Это означает, что кинетическая энергия беспорядочного движения молекул тоже не увеличивается. Куда же «исчезает» получаемая льдом энергия?
Решение. При плавлении разрушается кристаллическая решетка, что приводит к увеличению потенциальной энергии взаимодействия молекул. При кристаллизации энергия выделяется за счет уменьшения потенциальной энергии взаимодействия молекул.
- 22.2.** В калориметр, содержащий $m_v = 1,5$ кг воды при температуре $t_v = 20^\circ\text{C}$, положили $m_d = 1,0$ кг льда, имеющего температуру $t_d = -10^\circ\text{C}$. Какая температура Θ установится в калориметре?

☒ $\Theta = 0^\circ\text{C}$.

Решение. Уравнение теплового баланса имеет вид $Q_v + Q_d = 0$, где $Q_v < 0$ — количество теплоты, отданное водой; $Q_d > 0$ — количество теплоты, полученное льдом. Заметим, что эту задачу нецелесообразно решать в общем виде, потому что выражения для величин Q_v и Q_d зависят от того, что будет находиться в калориметре после установления теплового равновесия: вода, смесь воды со льдом или лед. А это определяется числовыми значениями величин, заданных в условии. Предположим сначала, что весь лед растает. Тогда

$Q_v = m_v c_v (\Theta - t_v)$, $Q_d = m_d c_d (0^\circ\text{C} - t_d) + \lambda m_d + m_d c_v (\Theta - 0^\circ\text{C})$ (лед нагревается до 0°C , тает, а затем уже нагревается вода), из уравнения теплового баланса получаем

$$\Theta = \frac{m_v c_v t_v + m_d c_d t_d - \lambda m_d}{c_v (m_d + m_v)} = -21^\circ\text{C}.$$

Полученное значение ($\Theta < 0^\circ\text{C}$) противоречит предположению, что весь лед растает. Если предположить теперь, что вся вода замерзнет, мы снова придем к противоречию (нетрудно убедиться, что при этом получится $\Theta > 0^\circ\text{C}$). Остается последняя возможность: в калориметре будет находиться вода со льдом, т. е. $\Theta = 0^\circ\text{C}$. К этому результату можно прийти быстрее, если заметить, что вода даже при

остывании до 0°C отдаст количество теплоты, которого хватит лишь на плавление льда массой $m_\lambda c_\lambda t_\lambda / \lambda = 0,38 \text{ кг}$, что меньше m_λ (при этом мы даже не учли необходимости нагревания льда до 0°C , что при других числовых данных может оказаться существенным). Значит, $\Theta < 0^\circ\text{C}$. Аналогично доказывается, что $\Theta \geq 0^\circ\text{C}$.

Отсюда следует, что $\Theta = 0^\circ\text{C}$.

- 22.3. В калориметр, содержащий воду массой $m_1 = 400 \text{ г}$ при температуре $t_1 = 5^\circ\text{C}$, долили еще $m_2 = 200 \text{ г}$ воды при температуре $t_2 = 10^\circ\text{C}$ и положили $m_3 = 400 \text{ г}$ льда при температуре $t_3 = -60^\circ\text{C}$. Какая температура Θ установится в калориметре? Как изменится масса льда?

☒ 0°C . Масса льда увеличится до 500 г .

Решение. Проанализируем условие задачи (сравните с задачей 22.2). При охлаждении всей воды до 0°C выделится количество теплоты $c_\lambda(m_1 t_1 + m_2 t_2) = 16,8 \text{ кДж}$, что меньше количества теплоты $\lambda m_3 = 132 \text{ кДж}$, необходимого для плавления *всего* льда. Значит, $\Theta < 0^\circ\text{C}$. С другой стороны, для нагревания льда до 0°C понадобится количество теплоты $-c_\lambda m_3 t_3 = 50,4 \text{ кДж}$. Это меньше, чем количество теплоты, которое выделилось бы при замерзании *всей* воды. Значит, $\Theta \geq 0^\circ\text{C}$. Итак, $\Theta = 0^\circ\text{C}$. Для охлаждения воды и нагревания льда до 0°C требуется количество теплоты $Q = 50,4 \text{ кДж} - 16,8 \text{ кДж} = 33,6 \text{ кДж}$. Оно выделяется за счет замерзания $\Delta m = Q/\lambda = 0,10 \text{ кг}$ воды. Таким образом, конечная масса льда $m = m_3 + \Delta m = 500 \text{ г}$. Эту задачу можно решить также методом, использованным при решении задачи 22.2.

- 22.4. Нагретый алюминиевый куб положили на лед, и куб полностью погрузился в лед. До какой температуры t был нагрет куб? Температура льда 0°C , потерями тепла можно пренебречь.

☒ $t > 125^\circ\text{C}$.

Решение. Если верхняя грань куба окажется на уровне льда, объем выплавленной во льду ямки будет равен объему куба V . Тогда уравнение теплового баланса примет вид $\lambda \rho_\lambda V - \rho_\alpha V c_\alpha t = 0$, где ρ_λ , ρ_α — плотности льда и алюминия. Отсюда $t = \lambda \rho_\lambda / (c_\alpha \rho_\alpha) = 125^\circ\text{C}$. При более высокой температуре t верхняя грань куба окажется ниже поверхности льда.

- 22.5. При соблюдении некоторых мер предосторожности воду можно переохладить, т. е. охладить ниже 0°C . Пробирку, содержащую $m = 12$ г переохлажденной воды с температурой $t = -5^\circ\text{C}$, встряхивают. При этом часть воды замерзает. Какова масса $m_{\text{л}}$ образовавшегося льда? Теплообменом с окружающей средой и теплоемкостью самой пробирки можно пренебречь.

☒ $m_{\text{л}} = 0,76$ г.

Решение. При замерзании некоторой части воды выделяется тепло, благодаря чему образующийся лед и оставшаяся вода нагреваются до 0°C . Поставленный в задаче вопрос не требует детального анализа этого достаточно сложного процесса. Чтобы воспользоваться законом сохранения энергии (в форме уравнения теплового баланса), можно заменить реальный процесс воображаемым: *сначала* вся вода нагревается до 0°C , «занимая» при этом некоторую энергию, а затем вода массой $m_{\text{л}}$ замерзает, выделяя такую же энергию.

Тогда $mc_{\text{в}}(0^\circ\text{C} - t) = \lambda m_{\text{л}}$, откуда $m_{\text{л}} = mc_{\text{в}} |t| / \lambda = 0,76$ (г).

- 22.6. Известно, что при медленном охлаждении очень чистой воды можно получить переохлажденную воду (например, при -5°C). Почему же вода не замерзает при 0°C ?

Решение. При кристаллизации жидкости кристаллическая решетка «строится» вокруг некоторых центров. Обычно такими центрами являются какие-либо твердые частицы, пузырьки газа и другие неоднородности жидкости. Если в воде таких центров кристаллизации нет, процесс кристаллизации не начинается, несмотря на переохлаждение. Такое состояние вещества очень неустойчиво: стоит подуть на переохлажденную воду, встряхнуть сосуд или бросить в него немного песка — и начнется быстрое образование льда. Замерзнет как раз такая часть воды, чтобы за счет выделяющегося при замерзании тепла температура поднялась до 0°C .

- 22.7. Почему незадолго до закипания чайника мы слышим характерный шум? Почему перед самым закипанием он стихает?

Решение. Вода в чайнике получает тепло от нагретого пламенем дна чайника или от электронагревателя, расположенного у дна. Слои воды у дна нагреваются до температуры кипения раньше остальных, поэтому у дна воз-

никают пузырьки, наполненные водяным паром. Пузырьки всплывают и попадают в более холодные слои воды. В результате охлаждения пар конденсируется и пузырьки «захлопываются». Происходит это так быстро, что стенки пузырьков ударяются друг о друга с резким щелканьем. Множество таких крошечных «схлопываний» и создает характерный шум. Перед самым закипанием верхние слои воды уже имеют температуру, близкую к температуре кипения, и поэтому «захлопывания» пузырьков не происходит. А после закипания мы слышим бульканье пузырьков, лопающихся на поверхности воды.

- 22.8. Свинцовая пуля ударяется о стальную плиту и отскакивает от нее. Температура пули перед ударом $t_1 = 50^\circ\text{C}$, скорость $v_0 = 400$ м/с, скорость после удара $v = 100$ м/с. Какая часть пули расплавилась, если 60 % потерянной кинетической энергии перешло во внутреннюю энергию пули?

☒ 36 %.

Решение. Внутренняя энергия пули увеличивается на $Q = \eta(mv_0^2/2 - mv^2/2)$, где $\eta = 0,6$. Эта энергия идет на нагревание всей пули до температуры t_2 плавления свинца и плавление некоторой массы m_x свинца: $Q = mc(t_2 - t_1) + m_x\lambda$. Отсюда

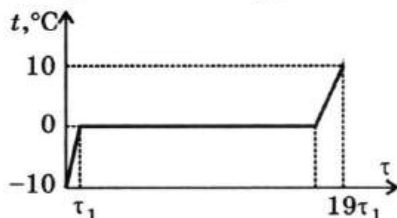
$$\frac{m_x}{m} = \frac{\eta}{2\lambda}(v_0^2 - v^2) - \frac{c(t_2 - t_1)}{\lambda} = 0,36.$$

- 22.9. Лед, взятый при температуре $t_1 = -10^\circ\text{C}$, превратили в воду, температура которой $t_2 = +10^\circ\text{C}$. Сравните продолжительность различных этапов процесса и постройте график зависимости температуры t от времени τ , считая, что вещество каждую секунду получало одно и то же количество теплоты.

☒ См. рисунок.

Решение. Пока лед нагревается, $t(\tau)$ линейно возрастает от t_1 до 0°C , затем некоторое время лед тает при постоянной температуре $t = 0^\circ\text{C}$, после чего $t(\tau)$ опять линейно возрастает (нагревается вода). Чтобы сравнить длительности τ_1, τ_2, τ_3 каждого из этапов, воспользуемся соотношениями $P\tau_1 = c_d m(0^\circ - t_1)$, $P\tau_2 = \lambda m$, $P\tau_3 = c_w m(t_2 - 0^\circ\text{C})$. Здесь P — мощность нагревателя; c_d и c_w — удельные теплоем-

кости соответственно льда и воды ($c_{\text{л}} = c_{\text{в}}/2$); λ — удельная теплота плавления льда. Из написанных соотношений получаем $\tau_2 = 16\tau_1$, $\tau_3 = 2\tau_1$ (вода нагревается вдвое медленнее льда из-за вдвое большей удельной теплоемкости).



- 22.10.** Всегда ли температура плавления совпадает с температурой кристаллизации того же вещества?

Решение. Процесс кристаллизации, подобно конденсации, должен происходить тогда, когда уже имеются центры кристаллизации в виде мельчайших кристалликов. Если таких кристалликов нет, то можно, особенно при быстром охлаждении, осуществить переохлаждение жидкости. При достаточно сильном переохлаждении начинается самопроизвольное образование центров кристаллизации, и жидкость кристаллизуется. При кристаллизации переохлажденной жидкости температура ее повышается за счет выделения скрытой теплоты плавления и при не очень сильном переохлаждении достигает температуры кристаллизации.

- 22.11.** Вода в стакане замерзает при 0°C . Если же эту воду расчленить на маленькие капельки, то вода в них может быть переохлаждена до -40°C . Так, например, капельки воды, из которых состоят облака, обычно начинают замерзать при температуре ниже -17°C . Как объяснить эти факты?

Решение. Замерзание при 0°C произойдет только при наличии достаточного количества центров кристаллизации. В мелких каплях воды отсутствуют центры кристаллизации.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

23. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД. ЗАКОН КУЛОНА. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

- 23.1. После того как два маленьких заряженных металлических шарика привели в соприкосновение и раздвинули на прежнее расстояние, сила их кулоновского взаимодействия увеличилась в $n = 4/3$ раза. Одноименными или разноименными были первоначально заряды q_1 и q_2 на шариках? Во сколько раз они отличались по модулю? Радиусы шариков равны.

☒ Заряды могли быть одноименными и отличаться в 3 раза или разноименными и отличаться по модулю в 7,2 раза.

Решение. Поскольку шарики одинаковы, после соприкосновения каждый из них имеет один и тот же заряд

$q = \frac{q_1 + q_2}{2}$. Определим согласно закону Кулона силы их

взаимодействия до и после соприкосновения соответственно: $F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$ и $nF = k \frac{(q_1 + q_2)^2}{4r^2}$, где r — расстояние

между шариками. Отсюда $(q_1 + q_2)^2 = 4n|q_1||q_2|$. Обозначим

$\frac{q_1}{q_2} = x$ и разделим последнее равенство на $q_2^2 = |q_2|^2$.

Получим: $(x + 1)^2 = 4n|x|$ или $x^2 + 2(x - 2n|x|) + 1 = 0$.

Предполагая, что $x > 0$ (т. е. $|x| = x$), получим

$$x_{1,2} = 2n - 1 \pm \sqrt{(2n - 1)^2 - 1},$$

т. е. $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Оба решения, естественно, означают одно и то же: одноименные заряды на шариках отличаются в 3 раза.

Предполагая, что $x < 0$ (т. е. $|x| = -x$), придем к решени-

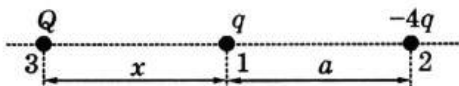
ям $x_1 = -\frac{11 + 4\sqrt{7}}{3} \approx -7,2$; $x_2 = \frac{1}{x_1}$.

Оба эти решения означают, что заряды q_1 и q_2 могли быть разноименными, отличающимися по модулю в 7,2 раза.

- 23.2.** Два разноименных точечных заряда q и $-4q$ находятся на расстоянии a друг от друга (см. рисунок). Каким должен быть третий заряд Q и где следует его расположить, чтобы вся система находилась в равновесии?

☒ Заряд $Q = -4q$ нужно расположить на расстоянии a от заряда q и на расстоянии $2a$ от заряда $-4q$.

Решение. Определим сначала, где следует расположить заряд Q , чтобы этот заряд находился в равновесии. Очевидно, его следует поместить в точку, в которой напряженность поля двух первых зарядов равна нулю: $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$. Эта точка лежит на проходящей через заряды 1 и 2 прямой, причем вне отрезка 1-2 (в точках на этом отрезке $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ направлены в одну сторону). Чтобы выполнялось условие $E_1 = E_2$, искомая точка должна лежать ближе к меньшему по модулю заряду (см. рисунок).

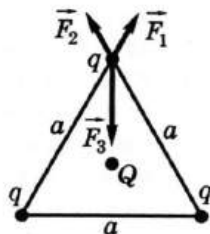


Из соотношения $k \frac{4q}{(a+x)^2} = k \frac{q}{x^2}$ получаем $x = a$. Найдем теперь модуль и знак заряда Q . Для этого можно использовать условие равновесия любого из зарядов q или $-4q$. Удобнее выбрать первый из этих зарядов, поскольку он находится посередине между зарядами Q и $-4q$. Условие равновесия заряда q имеет вид $Q = -4q$.

- 23.3. Три одинаковых одноименных заряда q расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд Q нужно поместить в центр треугольника, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

✓ $Q = -q/\sqrt{3}$.

Решение. Очевидно, заряды q и Q должны быть разноименными. Условие равновесия всей системы сводится к условию равновесия любого из зарядов q и имеет вид $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ (см. рисунок).



Согласно закону Кулона $F_1 = F_2 = kq^2/a^2$, $F_3 = 3k|q||Q|/a^2$. Проецируя условие равновесия на вертикальную ось, находим $|Q| = |q|/\sqrt{3}$, т. е. $Q = -q/\sqrt{3}$.

- 23.4. Могут ли тела электризоваться при соприкосновении без трения?

✓ Да, могут.

Решение. Именно так электризуются тщательно отполированные тела (если они изготовлены из *разных* материалов). Одно из тел «перетягивает» электроны с поверхности другого и заряжается отрицательно, другое тело при этом заряжается положительно.

- 23.5. В каких случаях два одноименно заряженных тела могут притягиваться?

Решение. Хорошо известно, что заряженная расческа притягивает *незаряженные* кусочки бумаги благодаря происходящему внутри них перераспределению зарядов (см. рис. а). Этот же эффект перераспределения зарядов может привести и к притяжению одноименно заряженных тел: «ближняя» сторона одного из них может изменить знак заряда (см. рис. б). Такое возможно, если тела находятся достаточно близко друг к другу и заряд одного из них во много раз превышает заряд другого.

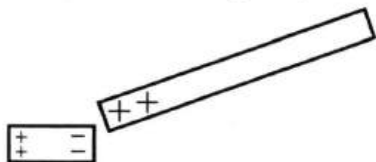


Рис. а

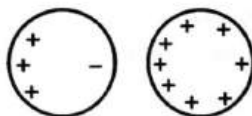


Рис. б

- 23.6. Два металлических шара имеют равные по модулю заряды. Зависит ли *модуль* силы взаимодействия шаров от того, будут эти заряды одноименными или разноименными? Расстояние между центрами шаров в обоих случаях одно и то же.

Решение. Согласно закону Кулона модуль силы не зависит от знаков зарядов. Но закон Кулона справедлив только для взаимодействия *точечных* зарядов. Если расстояние между заряженными шарами сравнимо с их размерами, надо учесть, что свободные заряды перераспределятся по поверхности каждого из шаров под действием внешнего электрического поля (см. рис. а, б). В результате взаимного притяжения разноименные заряды будут расположены ближе друг к другу, чем одноименные, и поэтому сила взаимодействия разноименно заряженных шаров будет больше.



Рис. а

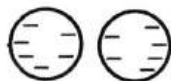


Рис. б

- 23.7. Начальная скорость точечного электрического заряда, помещенного в электростатическое поле, равна нулю. Совпадает ли траектория движения заряда с силовой линией поля?

Решение. Направление силовых линий совпадает с направлением действующей на заряд силы, а значит, с направлением *ускорения* заряженной частицы. Направление же скорости при *криволинейном* движении не совпадает с направлением ускорения. Поэтому если силовые линии являются кривыми (например, в поле двух точечных зарядов), траектория движения заряда не совпадает с силовой линией даже когда начальная скорость заряда равна нулю.

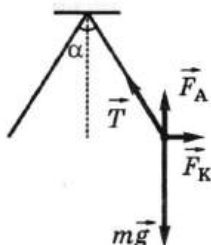
- 23.8. Два одинаковых одноименно заряженных шарика, подвешенных в одной точке на нитях равной длины, опускают в керосин. При этом угол расхождения нитей не изменяется. Какова плотность ρ материала шариков?

☒ 1500 кг/м^3 .

Решение. На рисунке показаны силы, действующие в керосине на один из шариков.

Из условия равновесия следует, что $F_k = (mg - F_A) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, где F_k — кулоновская сила, F_A — сила Архимеда. Заме-

тим, что хотя заряды шариков могут быть различны, на каждый из шариков согласно третьему закону Ньютона действуют одинаковые по модулю кулоновские силы, вследствие чего шарики отклонены на одинаковые углы. В воздухе сила Архимеда практически отсутствует, так что $F_0 = mg \operatorname{tg}(\alpha/2)$, где $F_{0к}$ — кулоновская сила в воздухе. Поскольку $F_k = F_{0к}/\varepsilon$, где ε — диэлектрическая проницаемость керосина, получаем $mg - F_A = mg/\varepsilon$. Подставив в эту формулу $m = \rho V$, $F_A = \rho_k g V$, находим $\rho = \frac{\varepsilon \rho_k}{\varepsilon - 1} = 1500 \text{ (кг/м}^3\text{)}$ (здесь ρ_k — плотность керосина).



- 23.9. На нитях равной длины, закрепленных в одной точке, висят два одинаковых маленьких металлических шарика. Шарикам сообщили равные заряды, в результате чего они разошлись на расстояние $a = 9,5 \text{ см}$, которое намного меньше длины нитей. Затем один из шариков разрядили. Что произойдет с шариками после этого? При каком расстоянии b между шариками снова установится равновесие?

☒ $b = 6 \text{ см}$.

Решение. После разрядки одного из шариков отталкивание сменится притяжением, шарики соприкоснутся, при этом заряд q одного из них разделится между шариками поровну. В результате опять возникнет отталкивание, но слабее первоначального. Найдем характер зависимости расстояния между шариками от заряда шариков. Из соотношения $F_{ж} = k \frac{q^2}{a^2} = mg \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ (см. задачу 23.8) с учетом со-

отношения $a = 2l \sin \frac{\alpha}{2}$ и того, что $\alpha \ll 1$, получаем

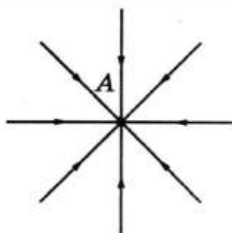
$$a = \left(\frac{2klq^2}{mg} \right)^{1/3}. \text{ Заменяя } q \text{ на } q/2, \text{ находим } b = \frac{a}{4^{1/3}} = 6 \text{ (см).}$$

Олимпиадные задачи

- О-93.** Может ли точечный заряд находиться в состоянии *устойчивого* равновесия под действием только кулоновских сил?

☒ Не может.

Решение. В положении устойчивого равновесия действующая на тело сила равна нулю, а при небольшом отклонении в *любом* направлении от этого положения возникает сила, возвращающая тело в положение равновесия. Предположим, что точечный положительный заряд в точке *A* находится в положении устойчивого равновесия. Тогда силовые линии поля вблизи этой точки должны иметь вид, показанный на рисунке. Однако такое поле мог бы создавать только расположенный в той же самой точке *A* отрицательный заряд, а такого заряда там нет. Таким образом, устойчивое равновесие заряда в электростатическом поле невозможно (это утверждение называется теоремой Ирншоу).



- О-94.** Подсчитать модуль средней плотности ρ электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля на поверхности Земли равна 100 В/м, а на высоте $h = 1,5$ км эта напряженность падает до 25 В/м.

Решение. Как известно, напряженность электрического поля внутри заряженного тонкого сферического слоя равна нулю, а вне этого слоя напряженность такая, какой она была бы, если бы весь заряд слоя был сосредоточен в его центре. Разобьем Землю и атмосферу Земли на тонкие сферические слои. Тогда ясно, что на поверхности Земли напряженность электрического поля равна $E_0 = k \frac{Q}{R^2}$, где

Q — суммарный заряд Земли, R — радиус Земли.

На высоте h напряженность электрического поля складывается из напряженности поля, созданного зарядом Q Земли, и из напряженности поля, созданного зарядом q слоев атмосферы с радиусами, меньшими $R + h$, то есть

$$E = k \frac{Q + q}{(R + h)^2}. \quad \text{Так как } q = \rho V = \frac{4}{3} \pi [(R + h)^3 - R^3] \cdot \rho =$$

$$= 4\pi R^2 h \rho, \text{ то } |E_0 - E| = k \cdot 4\pi |\rho| h = \frac{|\rho| h}{\epsilon_0}.$$

Мы учли, что радиус Земли R много больше высоты h . Отсюда

$$|\rho| = \frac{\varepsilon_0 |E - E_0|}{h} = 4,4 \cdot 10^{-13} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}.$$

О-95. Заряженная пылинка массой m и зарядом $+Q$ движется вертикально вниз в вакууме вдоль линии, проходящей через точку O (центр квадрата $ABCD$). В вершины квадрата, расположенного вертикально, помещены точечные заряды $+q, +q, -q, -q$ соответственно (заряды $+q$ находятся в двух верхних вершинах). Каково ускорение пылинки в точке O , если сторона квадрата d ?

$$\boxed{\checkmark} \quad a = g + \frac{4\sqrt{2}kQq}{md^2}.$$

Решение. На пылинку действуют силы со стороны зарядов, расположенных в вершинах квадрата, и сила тяжести (см. рисунок).

Найдем расстояние между пылинкой

$$\text{и каждым из зарядов: } r = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + d^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}d. \text{ Тогда модуль силы, с кото-}$$

рой действует каждый заряд на пылинку, согласно закону Кулона ра-

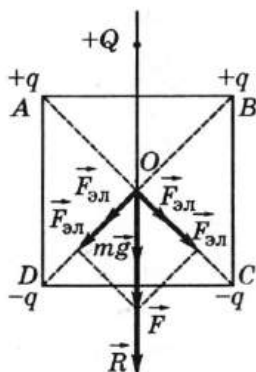
вен $F_{\text{эл}} = k \frac{2Qq}{d^2}$. Вектор равнодействующей электростати-

ческих сил направлен к середине стороны CD и равен $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D$. В проекции на вертикаль получаем:

$$F = 4F_{\text{эл}} \sin \alpha = 4F_{\text{эл}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}F_{\text{эл}} = k \frac{4\sqrt{2}Qq}{d^2}.$$

Модуль равнодействующей R всех сил, действующих на пылинку, равен: $R = F + mg$. Согласно второму закону Ньютона ускорение пылинки равно:

$$a = \frac{R}{m} = g + k \frac{4\sqrt{2}Qq}{md^2}.$$



24. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

- 24.1.** Пылинка массой $m = 3,0 \cdot 10^{-11}$ г покоится между горизонтальными пластинами плоского конденсатора. Под действием ультрафиолетового излучения пылинка потеряла часть заряда и начала опускаться. Чтобы восстановить равновесие, потребовалось увеличить напряжение на $\Delta U = 25$ В. Какой заряд Δq потеряла пылинка? Сколько элементарных электрических зарядов он составляет? Расстояние между пластинами конденсатора $d = 5,2$ мм, начальное напряжение $U_0 = 480$ В.

$$\boxed{\checkmark} \quad \Delta q = \frac{mgd\Delta U}{U_0(U_0 + \Delta U)} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, \Delta q = e.$$

Решение. Условие равновесия пылинки: $mg = F_k$, где $F = q_0 E = \frac{q_0 U_0}{d}$. Отсюда находим начальный заряд пы-

линки $q_0 = \frac{mgd}{U_0}$. Аналогично находим ее конечный за-

ряд: $q = \frac{mgd}{U_0 + \Delta U}$. Следовательно,

$$\Delta q = \frac{mgd\Delta U}{U_0(U_0 + \Delta U)} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ (Кл)}.$$

Другими словами, при облучении пылинка потеряла один электрон. В задаче описан классический опыт Иоффе-Милликена, доказывающий дискретность электрического заряда.

- 24.2.** Два электрона, находящиеся в начальный момент далеко друг от друга, движутся навстречу вдоль одной прямой с одинаковыми по модулю скоростями $v_0 = 1000$ км/с. На какое наименьшее расстояние они сблизятся?

$$\boxed{\checkmark} \quad \text{На } 0,25 \text{ нм.}$$

Решение. Минимальное расстояние $r_{\min}$ достигается в момент остановки электронов, когда вся их начальная кинетическая энергия переходит в потенциальную: $2 \cdot \frac{mv_0^2}{2} = k \frac{e^2}{r_{\min}}$. От-

$$\text{сюда } r_{\min} = \frac{ke^2}{mv_0^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

- 24.3. Два электрона находятся на большом расстоянии друг от друга. Вначале один электрон неподвижен, а другой приближается к нему с начальной скоростью $v_0 = 1000$ км/с, направленной вдоль соединяющей электроны прямой. На какое наименьшее расстояние они сблизятся? С какими скоростями разлетятся?

☒ На 1 мм; в результате взаимодействия электроны обмениваются скоростями.

Решение. Удобно перейти в систему отсчета центра масс, скорость которой $v = \frac{mv_0}{m+m} = \frac{v_0}{2}$. В этой системе отсчета

электроны сближаются со скоростями $\frac{v_0}{2}$. Тогда можно

воспользоваться результатом решения задачи 24.2, заме-

нив v_0 на $\frac{v_0}{2}$: $r_{\min} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2}$. Очевидно, в системе отсчета

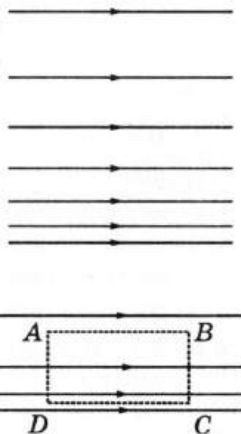
центра масс после упругого взаимодействия (не сопровождающегося потерями механической энергии) электроны

разлетаются с такими же по модулю скоростями $\frac{v_0}{2}$, т. е. обмениваются скоростями.

- 24.4. Можно ли создать электростатическое поле, линии напряженности которого имеют вид, показанный на рисунке?

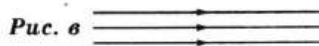
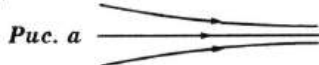
☒ Нельзя.

Решение. Электростатическое поле является потенциальным, т. е. работа сил поля по перемещению заряда вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Поле же, силовые линии которого приведены в условии, потенциальным не является. Например, при перемещении заряда по замкнутой траектории $ABCD$ (см. рисунок) такое поле совершило бы отличную от нуля работу: на участках BC и DA работа равна нулю, а на участках AB и CD работа поля имеет разные знаки и модули, поскольку напряженность поля на участке CD больше.



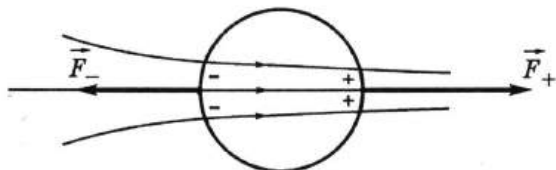
- 24.5. На рис. а, б, в показаны картины силовых линий трех электрических полей. Как будет вести себя незаряженный шарик, помещенный в каждое из этих полей?

☒ В случаях а и б шарик будет втягиваться в область более сильного поля, в случае в останется неподвижным.



Решение. Электрическое поле вызывает в шарике разделение зарядов (в диэлектрике — вследствие поляризации, в проводнике — вследствие электростатической индукции). Справа на поверхности появляется положительный заряд q , слева — равный ему по модулю отрицательный заряд. Следовательно, в поле на шарик действует сила $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q(\vec{E}_+ + \vec{E}_-)$.

Здесь $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ — напряженности поля в области концентрации соответственно положительного и отрицательного зарядов. На рисунке в качестве примера показан случай а.

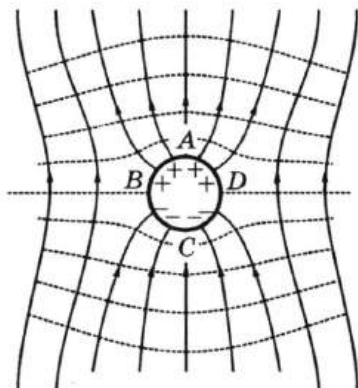


В этом случае $E_+ > E_-$ (справа линии напряженности сгущаются), поэтому сила $\vec{F}$ направлена вправо. Рассуждая аналогично, получаем, что в случае б она направлена влево. Таким образом, в обоих случаях шарик втягивается в область более сильного поля (например, притягивается к создающему поле заряду). В однородном поле (случай в) $F = 0$.

- 24.6. В однородное электрическое поле вносят металлический незаряженный шар. Где и какие индуцированные заряды появятся на шаре? Нарисуйте линии напряженности поля и эквипотенциальные поверхности.

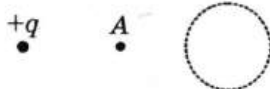
Решение. Поверхностная плотность заряда максимальна (по модулю) в точках А и С (см. рисунок). Она плавно уменьшается при удалении от этих «полюсов» шара и обращается в нуль на «экваторе», проходящем через точки В и D. Вдали от шара поле остается однородным. У по-

верхности шара линии напряженности перпендикулярны ей. Штриховыми линиями на рисунке показаны эквипотенциальные поверхности. Заметим, что поверхность шара также является эквипотенциальной поверхностью.



- 24.7. Электрическое поле создается положительным точечным зарядом. Как изменятся напряженность E и потенциал ϕ поля в точке A (см. рисунок), если справа от нее поместить незаряженный шар?

☒ Напряженность поля увеличится, потенциал уменьшится.

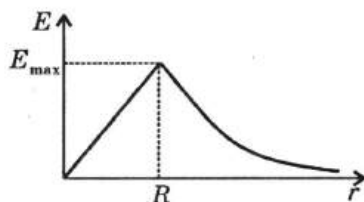


Решение. Электрическое поле приведет к разделению зарядов в шаре, причем на ближней к точке A стороне шара появится отрицательный заряд, влияние которого и будет определяющим. Поэтому вопрос сводится к следующему: как изменятся E и ϕ в точке A , если справа от нее поместить небольшой отрицательный заряд? Этот заряд создаст в точке A поле, направленное слева направо, и отрицательный потенциал. Согласно принципу суперпозиции это приведет к увеличению напряженности поля и уменьшению потенциала.

- 24.8. Заряд Q равномерно распределен по объему непроводящего шара радиусом R . Чему равна напряженность поля E на расстоянии r от центра шара? Постройте график зависимости $E(r)$.

☒ $E = \frac{|Q|r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ при $r < R$; $E = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ при $r > R$. График

$E(r)$ см. на рисунке.



Воспользуемся аналогией между законом Кулона и законом всемирного тяготения. При сферически симметричном распределении заряда поле на расстоянии r от центра создается только зарядом $q(r)$ внутри сферы радиуса r . Поскольку заряд распределен по шару равномерно, при

$r < R$ можно записать $\frac{q(r)}{Q} = \frac{r^3}{R^3}$. Тогда

$$E(r) = k \frac{|q(r)|}{r^2} = k \frac{|Q|r}{R^3} = \frac{|Q|r}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

При $r < R$ поле, создаваемое заряженным шаром, такое же, как поле точечного заряда Q , расположенного в центре шара, т. е. $E(r) = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. График зависимости $E(r)$

приведен на рисунке $\left(E_{\max} = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)$.

- 24.9.** Вернитесь к условию задачи 24.8 и определите потенциал поля φ на расстоянии r от центра шара. Постройте график зависимости $\varphi(r)$.

✓ $\varphi = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$ при $r < R$; $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ при $r > R$. График $\varphi(r)$ см. на рис. б.

Решение. При $r > R$ поле заряженного шара совпадает с полем точечного заряда, поэтому $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. При $r = R$ потенциал $\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$.

Чтобы найти потенциал при $r < R$, вычислим работу поля по перемещению заряда q из точки, находящейся на расстоянии r от центра шара, к поверхности шара. При малом перемещении $\Delta A = qE \cdot \Delta r$. Значит,

полная работа составит $A = qS_E$ (см. рис. а). Площадь под графиком

$$S_E = \frac{E(r) + E(R)}{2} \cdot (R - r) = \frac{Q(R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}.$$

С другой стороны, $A = q(\varphi(r) - \varphi_0)$.

Отсюда $\varphi = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$. График $\varphi(r)$ приведен на рисунке б. При $r < R$ это парабола, при $r > R$ — гипербола.

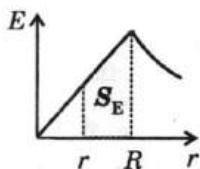


Рис. а

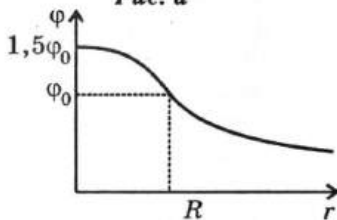


Рис. б

- 24.10. Металлический шар радиусом R_1 , заряженный до потенциала φ_1 , окружают концентрической с ним тонкой проводящей сферической оболочкой радиусом R_2 . Каким станет потенциал шара, если его соединить проводником с оболочкой? Если соединить оболочку с Землей, не соединяя ее с шаром?

☑ $\varphi_1 R_1 / R_2; \varphi_1 (1 - R_1 / R_2).$

Решение. Заряд Q шара можно найти из соотношения $\varphi_1 = kQ/R_1$. После соединения с оболочкой весь заряд перейдет на ее внешнюю поверхность, в результате чего проводники приобретут потенциал $\varphi_2 = kQ/R_2 = \varphi_1 R_1 / R_2$. Если оболочку заземлить (не соединяя ее с шаром), то она получит от Земли такой отрицательный заряд q , что ее потенциал обратится в нуль. Значит, $q = -Q$ (при этом система электрически нейтральна и не создает поля снаружи). Появившийся на оболочке заряд q изменяет потенциал оболочки (и шара) на $kq/R_2 = -\varphi_1 R_1 / R_2$. Тогда согласно принципу суперпозиции потенциал шара равен $\varphi_1 (1 - R_1 / R_2)$.

Олимпиадные задачи

- О-96. Вне изолированной металлической незаряженной сферы радиусом R на расстоянии r от ее центра находится точечный заряд q . Каков потенциал сферы φ ?

$$\boxed{\checkmark} \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Решение. Электрическое поле внутри сферы отсутствует. Следовательно, все точки в этой области имеют одинаковый потенциал, равный φ . Проще всего найти потенциал в центре сферы. Согласно принципу суперпозиции он складывается из потенциала $\varphi_1 = kq/r$ поля точечного заряда и суммы потенциалов, создаваемых всеми зарядами Δq , образовавшимися на сфере вследствие перераспределения зарядов:

$$\varphi = \varphi_1 + \sum k \cdot \Delta q / R = \varphi_1 + (\sum \Delta q) \cdot k / R.$$

Поскольку $\sum \Delta q = 0$ (сфера в целом не заряжена), $\varphi = \varphi_1 = q / (4\pi\epsilon_0 r)$.

- О-97.** Проводящий шар радиусом R соединен тонкой длинной проволокой с землей. На расстоянии r от его центра размещают положительный точечный заряд q . Какой заряд Q приобретает шар? Влиянием проволоки на поле можно пренебречь.

$$\boxed{\checkmark} \quad Q = -qR/r.$$

Решение. Потенциал заземленного шара должен остаться равным нулю. Это обеспечивается перетеканием на него отрицательного заряда Q . Из условия $kq/r + kQ/R = 0$ (см. задачу О-96) получаем $Q = -qR/r$.

- О-98.** Внутри полой проводящей незаряженной сферы радиусом R помещен (не обязательно в центре) маленький шарик с положительным зарядом Q . 1) Какие заряды индуцируются на сфере? Как они распределяются по ней? 2) Какой вид имеет картина силовых линий электрического поля? Чему равен потенциал φ сферы? 3) Будет ли поле действовать на положительный точечный заряд q вне сферы, на расстоянии r от ее центра? Если будет, то с какой силой? Считайте, что $q \ll Q$. 4) Как изменятся распределение зарядов и поле, если сферу заземлить?

Решение. 1) Все силовые линии, выходящие из заряженного шарика, заканчиваются на внутренней поверхности сферы (внутри проводника поля нет). Значит, на внутренней поверхности сферы индуцируется заряд $-Q$, а на внешней — заряд $+Q$. На внутренней поверхности заряд распределяется неравномерно (см. рисунок), а на внешней — равномерно, поскольку в толще металла поле заря-

женного шарика компенсируется полем заряда $-Q$ на внутренней поверхности.

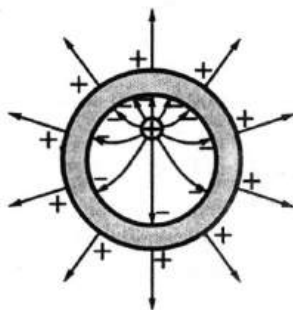
2) Вид силовых линий показан на рисунке. Потенциал сферы

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

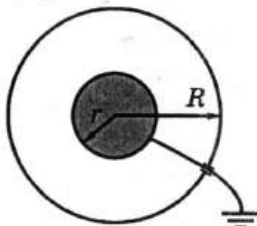
3) Поле вне сферы совпадает с полем точечного заряда Q , расположенного в центре сферы, поэтому на точечный заряд будет действовать

$$\text{сила отталкивания } F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Эта сила не изменяется при перемещении шарика внутри сферы: заряд q взаимодействует не с заряженным шариком, а с зарядами, индуцированными на внешней поверхности сферы. 4) Если сферу заземлить, ее потенциал обратится в нуль вследствие стекания на землю заряда с внешней поверхности. Поле вне сферы при этом исчезнет. Распределение зарядов и поле внутри сферы не изменятся.



- О-99.** Внутри тонкой металлической сферы радиусом $R = 20$ см (см. рисунок) находится металлический шар радиусом $r = R/2$; центры шара и сферы совпадают. Через маленькое отверстие в сфере проходит длинный провод, с помощью которого шар заземлен. На сферу помещают заряд $Q = 20$ нКл. Найдите ее потенциал φ .



☑ $\varphi = 450$ В.

Решение. Если бы шар не был заземлен, потенциалы сферы и шара были бы равны kQ/R . При заземлении шар получает от Земли такой заряд q , что его потенциал обращается в нуль: $kq/r + kQ/R = 0$, откуда $q = -Qr/R$.

Согласно принципу суперпозиции

$$\varphi = k \frac{Q+q}{R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{r}{R} \right) = 450 \text{ (В)}.$$

- О-100.** Два одинаковых металлических шара радиусом R , находящихся далеко друг от друга, соединены тонким изолированным проводом. Каждый из шаров имеет заряд Q

и окружен концентрической с ним тонкой незаряженной проводящей сферической оболочкой. Радиус одной оболочки равен $R + a$, радиус другой оболочки $R + b$, причем $a \ll R, b \ll R$. Какой заряд q пройдет по проводу, если обе оболочки заземлить?

$$\checkmark \quad |q| = Q \frac{|b - a|}{b + a}.$$

Решение. Шары имеют одинаковые потенциалы. До заземления тонкие незаряженные оболочки не влияли на вид поля. После заземления потенциалы сферических оболочек становятся равными нулю. Поле в тонких зазорах между шарами и оболочками можно считать однородным, его напряженность у одного шара $E_1 = k(Q + q)/R^2$, а у другого $E_2 = k(Q - q)/R^2$.

Потенциалы шаров найдем из соотношений $\varphi_1 - 0 = E_1 a$, $\varphi_2 - 0 = E_2 b$. Приравняв φ_1 и φ_2 , найдем $q = Q \frac{b - a}{b + a}$. При

$b > a$ заряд перетекает к первому шару, при $b < a$ — ко второму.

- 0-101. Точечный заряд $+q$ находится на расстоянии h от большой плоской проводящей пластины. С какой силой F действует пластина на заряд?

$$\checkmark \quad F = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2}.$$

Решение. Под действием электрического поля заряда $+q$ в пластине произойдет разделение зарядов. На ближней к заряду поверхности пластины образуется отрицательный поверхностный заряд $-q$ (на этой поверхности заканчиваются все силовые линии, выходящие из заряда $+q$). Поэтому пластина притянет заряд. Чтобы найти силу этого притяжения, воспользуемся следующим соображением. Электростатическое поле, как известно, не проникает внутрь проводника (область 1 на рис. а).

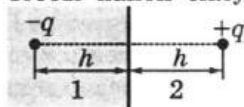


Рис. а

Это значит, что поля заряда $+q$ и поверхностного заряда пластины компенсируют друг друга во всей области 1. Следовательно, поле поверхностного заряда в области 1 совпадает с полем заряда $-q$, расположенного в той же

точке, что и заряд $+q$. Заметим теперь, что поле поверхностного заряда симметрично относительно плоскости поверхности, и поэтому в области 2 оно совпадает с полем точечного заряда $-q$, расположенного симметрично заряду $+q$ относительно этой поверхности (см. рис. 6). Это поле действует на заряд $+q$ с силой

$$F = k \frac{q^2}{(2h)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2}.$$

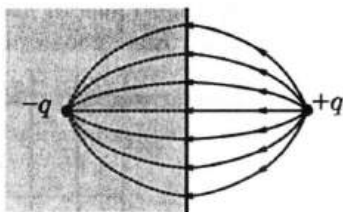


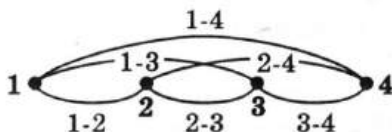
Рис. 6

званный здесь метод называется методом изображений:

воображаемый заряд $-q$ является как бы изображением реального заряда $+q$ в «зеркальной» поверхности пластины.

- О-102. Четыре шарика, имеющие одинаковые заряды q , расположены вдоль одной прямой так, что расстояние между соседними шариками равно a . Какую работу A нужно совершить, чтобы разместить эти шарики: а) в вершинах квадрата со стороной a ; б) в вершинах тетраэдра с ребром a ?

$$\boxed{\checkmark} \quad \frac{q^2(3\sqrt{2}-1)}{12\pi\epsilon_0 a}; \quad \frac{5q^2}{12\pi\epsilon_0 a}.$$



Решение. Работа A внешних сил равна изменению

потенциальной энергии системы. Потенциальная энергия системы точечных зарядов равна сумме энергий взаимодействия всех пар зарядов. Для четырех зарядов таких пар шесть (см. рисунок). При линейном расположении зарядов расстояния между ними в трех парах равны a , в двух равны $2a$ и в одной равны $3a$. Поэтому начальная энергия системы

$$W_{p0} = 3 \cdot kq^2/a + 2 \cdot kq^2/(2a) + kq^2/(3a) = 13kq^2/(3a).$$

При размещении зарядов в вершинах квадрата четыре расстояния в парах равны a и два равны $a\sqrt{2}$. Поэтому

$$W_p = k \frac{q^2}{a} (4 + \sqrt{2}) \text{ и } A = W_p - W_{p0} = \frac{q^2(3\sqrt{2}-1)}{12\pi\epsilon_0 a}.$$

При размещении зарядов в вершинах тетраэдра все расстояния между зарядами равны a ; следовательно, $W_p = 6kq^2/a$ и

$$A = \frac{5q^2}{12\pi\epsilon_0 a}.$$

25. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОР. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

- 25.1. Во сколько раз изменится емкость плоского конденсатора, если в него ввести две тонкие металлические пластины (см. рис. а)? Если соединить эти пластины проводом (см. рис. б)?

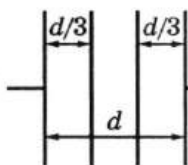


Рис. а



Рис. б

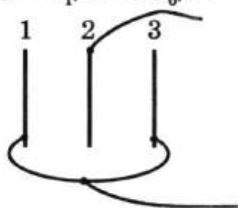
✓ Не изменится. Увеличится в 1,5 раза.

Решение. Введение тонких незаряженных пластин не изменяет электрического поля внутри конденсатора, а следовательно, и емкости конденсатора. После соединения пластин проводом получается батарея из двух последовательно соединенных конденсаторов, емкость каждого из

которых $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d/3} = 3C_0$, где C_0 — первоначальная ем-

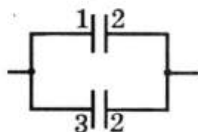
кость конденсатора. Емкость батареи $C = C_1/2 = 3C_0/2$.

- 25.2. Конденсатор состоит из трех полосок фольги площадью $S = 4 \text{ см}^2$ каждая, разделенных слоями слюды толщиной $d = 0,2 \text{ мм}$. Крайние полоски фольги соединены между собой (см. рисунок). Какова емкость C такого конденсатора?



✓ $C = 250 \text{ пФ}$.

Решение. Пластины 1-2 и 2-3 образуют два одинаковых конденсатора, которые соединены параллельно (см. рисунок) емкостью $C_0 = \epsilon_0 \epsilon S/d$ каждый (здесь ϵ — диэлектрическая проницаемость слюды).



Эти конденсаторы соединены между собой параллельно (на них одинаковые напряжения, поскольку $\phi_1 = \phi_3$). По-

этому $C = 2C_0 = \frac{2\epsilon_0 \epsilon S}{d} = 250 \text{ (пФ)}$.

- 25.3. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения U . Во сколько раз изменится напряженность электрического поля в каждом из конденсаторов, если один из них заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε ?

☒ В конденсаторе, заполненном диэлектриком, уменьшится в $(\varepsilon + 1)/2$ раз, в незаполненном — увеличится в $2\varepsilon/(\varepsilon + 1)$ раз.

Решение. Обозначим первоначальную емкость каждого конденсатора через C_1 . Начальное напряжение на каждом конденсаторе было равно $U/2$. Заполнение диэлектриком увеличило емкость первого конденсатора в ε раз. Емкость

же батареи конденсаторов стала $C = \frac{\varepsilon C_1 \cdot C_1}{\varepsilon C_1 + C_1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} C_1$.

Заряд батареи (и каждого из конденсаторов) $q = UC =$

$= \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} UC_1$. Напряжение на конденсаторе, заполненном

диэлектриком, составляет $U_1 = \frac{q}{\varepsilon C_1} = \frac{U}{\varepsilon + 1}$, т. е. уменьши-

лось в $\frac{\varepsilon + 1}{2}$ раз. Во столько же раз уменьшилась и напря-

женность электрического поля в этом конденсаторе. На-

пряжение на конденсаторе, не заполненном диэлектри-

ком, составляет $U_2 = \frac{q}{C_1} = \frac{\varepsilon U}{\varepsilon + 1}$. Оно увеличилось в $\frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1}$ раз по сравнению с первоначальным. Во столько же раз увеличилась и напряженность электрического поля в этом конденсаторе.

- 25.4. Сравните электроемкости трех одинаковых шариков, изготовленных из стали, меди и стекла.

Решение. Электроемкость шариков из стали и меди одинакова; стеклянный шарик нельзя характеризовать емко-

стью, так как основное соотношение для введения емкости $\left(C = \frac{q}{\varphi} \right)$ не выполняется вследствие непропорциональности

заряда стеклянного шарика и потенциала всех точек его поверхности. Именно из этого вытекает, что только проводники можно характеризовать электроемкостью, хотя диэлектрики также способны удерживать на себе заряд.

- 25.5.** Конденсатор подключен к аккумулятору. Как будет изменяться энергия конденсатора при раздвигании его пластин? Как согласуется это изменение с законом сохранения энергии? Каким будет ответ в случае, если заряженный конденсатор отключили от аккумулятора перед раздвиганием пластин?

Решение. Пока конденсатор соединен с источником постоянной ЭДС, $U = \text{const}$. Поэтому удобно использовать формулу для энергии заряженного конденсатора в виде $W_p = CU^2/2$, где $C = \epsilon_0 S/d$. Емкость C при раздвигании пластин уменьшается. Значит, уменьшается и W_p . Куда же «исчезает» энергия конденсатора и вдобавок к ней энергия, потраченная на раздвигание притягивающихся друг к другу пластин? Дело в том, что заряд конденсатора при раздвигании пластин уменьшается, и уходящий заряд проходит через аккумулятор, совершая работу *против* сторонних сил. «Исчезающая» энергия при этом частично переходит во внутреннюю, а частично — запасается в аккумуляторе. Так что закон сохранения энергии, разумеется, выполняется. Если же цепь разомкнуть, то напряжение на конденсаторе при раздвигании пластин уже не будет оставаться постоянным. Постоянным будет теперь заряд q конденсатора, поэтому формулу для энергии заряженного конденсатора удобнее записать в виде $W_p = q^2/(2C)$. При раздвигании пластин (уменьшении C) энергия конденсатора увеличивается: внешние силы совершают положительную работу, а «уйти» энергии на этот раз некуда.

- 25.6.** Заряженный плоский конденсатор, отключенный от источника ЭДС, помещен в сосуд с жидким диэлектриком. Если открыть кран у дна сосуда, диэлектрик вытечет, и энергия конденсатора увеличится. За счет какой энергии увеличится энергия конденсатора?

Решение. Если бы конденсатор не был заряжен, то при вытекании из него жидкий диэлектрик приобрел бы некоторую кинетическую энергию W_k . При заряженном конденсаторе вытекание замедляется: на диэлектрик действует сила, втягивающая его в поле конденсатора. Значит, в этом случае диэлектрик приобретает кинетическую энергию W'_k , меньшую W_k . Разность $W_k - W'_k$ как раз и будет равна увеличению энергии конденсатора, о котором

идет речь в условии (если можно пренебречь потерями энергии, обусловленными внутренним трением при вытекании жидкости).

- 25.7. В каком случае придется совершить большую работу при раздвигании пластин плоского конденсатора: а) конденсатор после зарядки отключен от источника; б) конденсатор остается подключенным к источнику напряжения?

Решение. Вначале в обоих случаях необходимо преодолевать одинаковую силу F притяжения пластин. В случае *а* заряд пластин остается неизменным, поэтому не меняется и напряженность поля E , так что $F = \text{const}$. В случае *б* постоянным остается напряжение U на конденсаторе, а E уменьшается, поскольку $E = U/d$. Соответственно уменьшается и заряд на обкладках, а значит, и сила притяжения между пластинами. Таким образом, при одинаковом перемещении пластин в случае *б* потребуется совершить меньшую работу.

- 25.8. Пространство между прямоугольными обкладками плоского конденсатора частично заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Площадь пластин конденсатора равна S . Найдите емкость конденсатора C в каждом из случаев, показанных на рисунках *а*, *б*, *в*.

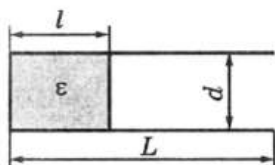


Рис. а

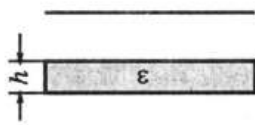


Рис. б

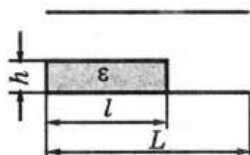


Рис. в

$$\boxed{\checkmark} \text{ а) } C = \frac{\epsilon_0 S [L + (\epsilon - 1)l]}{Ld}; \quad \text{б) } C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{\epsilon d - (\epsilon - 1)h};$$

$$\boxed{\checkmark} \text{ в) } C = \frac{\epsilon_0 S (L - l)}{Ld} + \frac{\epsilon_0 \epsilon S l}{L [\epsilon d - (\epsilon - 1)h]}.$$

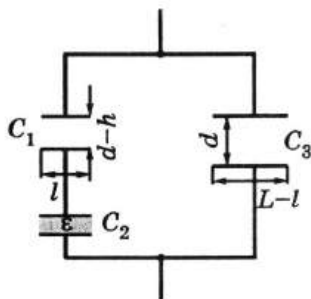
Решение. В случае *в* конденсатор можно представить как батарею из трех различных конденсаторов — двух воздушных и одного полностью заполненного диэлектриком (см. рисунок).

Очевидно, $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S l}{L(d-h)}$,

$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S l}{L h}$, $C_3 = \frac{\varepsilon_0 S (L-l)}{L d}$.

Тогда емкость батареи составляет:

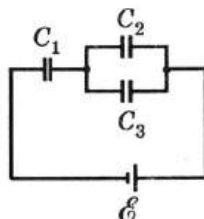
$$C = C_3 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 S (L-l)}{L d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S l}{L [\varepsilon d - (\varepsilon - 1) h]}.$$



Отсюда при $h = d$ получаем случай а, а при $l = L$ — случай б.

- 25.9. Найдите заряды на каждом из конденсаторов в цепи, изображенной на рисунке, если $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 4$ мкФ, $C_3 = 6$ мкФ, $\mathcal{E} = 18$ В.

✓ $q_1 = 30$ мкКл, $q_2 = 12$ мкКл,
 $q_3 = 18$ мкКл.



Решение. Найдем полную электрическую емкость C системы конденсаторов. Емкость соединенных параллельно конденсаторов 2 и 3 составляет $C_{23} = C_2 + C_3$. Этот участок соединен последовательно с конденсатором 1, поэтому:

$$C = \frac{C_1 C_{23}}{C_1 + C_{23}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Полный заряд этой батареи конденсаторов равен $q = \mathcal{E} C = 30$ мкКл. Именно таков заряд конденсатора 1 и батареи конденсаторов 2-3. Чтобы найти распределение этого заряда между конденсаторами 2 и 3, проще всего определить напряжение на них:

$$U_2 = U_3 = q / C_{23} = \mathcal{E} C_1 / (C_1 + C_2 + C_3) = 3 \text{ (В)}.$$

Отсюда $q_2 = U_2 C_2 = 12$ (мкКл), $q_3 = U_3 C_3 = 18$ (мкКл).

Олимпиадные задачи

- О-103. Найдите заряд каждого из конденсаторов и разность потенциалов между точками D и E (см. рисунок), если $C_1 = C_2 = C_3 = C$, а $C_4 = 4C$. К точкам A и B подведено постоянное напряжение U .

✓ $q_1 = q_2 = CU/2$, $q_3 = q_4 = 4CU/5$; $\varphi_D - \varphi_E = -0,3U$.

Решение. Емкость верхней ветви цепи $C/2$, заряды на конденсаторах этой ветви $q_1 = q_2 = CU/2$. Емкость нижней ветви $C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{4C}{5}$, за-

ряды конденсаторов 3 и 4 $q_3 = q_4 = 4CU/5$. Напряжения на конденсаторах 1 и 3: $U_1 = q_1/C_1 = U/2$, $U_3 = q_3/C_3 = 4U/5$. Поскольку $U_1 = \varphi_D - \varphi_A$ и $U_3 = \varphi_E - \varphi_A$, получаем $\varphi_D - \varphi_E = U_1 - U_3 = -0,3U$.

О-104. Найдите емкость C_0 показанной на рисунке батареи конденсаторов.

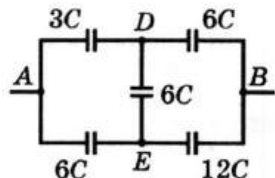
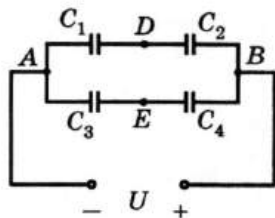
☒ $C_0 = 6C$.

Решение. Данная цепь не содержит ни последовательных, ни параллельных соединений. На первый взгляд, в ней отсутствует и симметрия между верхней и нижней ветвями цепи. Заметим, однако, что емкости конденсаторов нижней ветви вдвое больше соответствующих емкостей верхней ветви. Докажем, что если изъять конденсатор-«перемычку», то из соотношения $C_1/C_2 = C_3/C_4$ (см. рисунок к условию задачи О-103) следует равенство потенциалов точек D и E . В самом деле, распределение напряжений в ветвях цепи описывается уравнениями $U_1/U_2 = C_2/C_1$ и $U_3/U_4 = C_4/C_3$, откуда $U_1/U_2 = U_3/U_4$. Поскольку $U_1 + U_2 = U_3 + U_4$, получаем $U_1 = U_3$ (это можно доказать и иначе, см. задачу 12.52). Согласно соотношениям $U_1 = \varphi_D - \varphi_A$ и $U_3 = \varphi_E - \varphi_A$ отсюда следует, что $\varphi_D = \varphi_E$. Следовательно, возвращение в цепь конденсатора-«перемычки» ничего не изменит: заряжаться он не будет. Теперь подсчет C_0 несложен:

$$C_{12} = \frac{3C \cdot 6C}{3C + 6C} = 2C, C_{34} = \frac{6C \cdot 12C}{6C + 12C} = 4C, C_0 = C_{12} + C_{34} = 6C.$$

О-105. Два конденсатора, имеющие емкости $C_1 = 10$ мкФ и $C_2 = 50$ мкФ, соединены последовательно. Конденсаторы могут выдержать напряжение соответственно U_1 и U_2 . Какое наибольшее напряжение $U_{\max}$ выдержит батарея из этих конденсаторов? Решите задачу при а) $U_1 = U_2 = 120$ В; б) $U_1 = 120$ В, $U_2 = 6$ В.

☒ а) $U_{\max} = 144$ В; б) $U_{\max} = 36$ В.



Решение. Если к батарее приложено напряжение U , заряд батареи (а значит, и каждого из конденсаторов)

$$q = \frac{C_1 C_2 U}{C_1 + C_2}, \text{ а напряжения на конденсаторах соответ-$$

венно равны $U_1' = \frac{q}{C_1} = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2}$ и $U_2' = \frac{q}{C_2} = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2}$. При

этом должны одновременно выполняться следующие неравенства $U_1' \leq U_1$, $U_2' \leq U_2$. Из них следует, что $U_{\max}$ совпадает с меньшей из двух величин $(C_1 + C_2)U_1/C_2$ и $(C_1 + C_2)U_2/C_1$. Этот результат совпадает с «очевидным» ответом $U_{\max} = U_1 + U_2$ только при $C_1 U_1 = C_2 U_2$. Подставляя числовые значения заданных величин, находим: а) $U_{\max} = 144 \text{ В}$; б) $U_{\max} = 36 \text{ В}$.

- О-106.** Пять точек соединены попарно конденсаторами емкости C . Какова емкость C_0 между любыми двумя из этих точек? Каким будет ответ для произвольного числа точек n ?

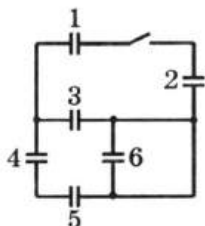
☒ $C_0 = 2,5 C$, $C_0 = nC/2$.

Решение. Попробуем упростить схему до того, как станем ее изображать. Учтем, что те три точки, к которым не подключена внешняя цепь, «взаимозаменяемы»; следовательно, их потенциалы одинаковы. Включенные между этими точками конденсаторы не заряжены и могут быть изъяты из цепи.



Заряжены, таким образом, лишь семь конденсаторов (см. рисунок). Емкость каждой из трех одинаковых ветвей цепи равна $C/2$, а полная емкость системы $C_0 = 3 \cdot C/2 + C = 2,5C$. Аналогичный расчет показывает, что при произвольном числе точек $C_0 = nC/2$.

- О-107.** В цепи (см. рисунок) емкость каждого конденсатора равна C . Вначале ключ разомкнут, конденсатор 1 заряжен до напряжения U_0 , остальные конденсаторы не заряжены. Найдите напряжение на каждом из конденсаторов после замыкания ключа.



☒ $U_1 = 5U_0/8$, $U_2 = 3U_0/8$, $U_3 = U_0/4$, $U_4 = U_5 = U_0/8$, $U_6 = 0$.

Решение. Обкладки конденсатора 6 соединены накоротко, поэтому у них равные потенциалы. Этот конденсатор

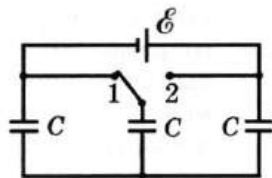
не заряжен ($U_6 = 0$) и потому может быть изъят из цепи.

Тогда $C_{45} = C/2$, $C_{345} = 3C/2$ и $C_{2345} = \frac{C \cdot 1,5C}{C + 1,5C} = \frac{3}{5}C$. После

замыкания ключа имевшийся на первом конденсаторе заряд CU_0 распределится между этим конденсатором и батареей конденсаторов 2-3-4-5, так что $CU_0 = (C + C_{2345})U_1$, откуда $U_1 = 5U_0/8$. Заряд батареи 2-3-4-5 (и конденсатора 2) равен $C_{2345}U_1 = 3CU_0/8$.

Следовательно, $U_2 = q_2/C = 3U_0/8$, $U_3 = U_1 - U_2 = U_0/4$ и $U_4 = U_5 = U_0/8$.

- О-108. Какое количество теплоты Q выделится во всей цепи при переводе ключа из положения 1 в положение 2 (см. рисунок)? Энергией электромагнитного излучения можно пренебречь.



✓ $Q = C\varepsilon^2/3$.

Решение. Полная емкость батареи конденсаторов (и, следовательно, запасенная в ней энергия) после переключения не изменяется: она равна $2C/3$. Значит, выделившаяся энергия могла поступить только от источника ЭДС, т. е. $Q = A_{\text{ст}} = \Delta q \cdot \varepsilon$ (здесь $A_{\text{ст}}$ — работа сторонних сил в источнике, Δq — заряд, прошедший внутри источника от его отрицательного полюса к положительному). Из рисунков а и б, показывающих распределение зарядов на обкладках конденсаторов соответственно до и после переключения, видно: заряд $\Delta q = C\varepsilon/3$ ушел с верхней обкладки левого конденсатора и, следовательно, прошел через источник. Таким образом, $Q = C\varepsilon^2/3$. Интересно, что при обратном переключении снова выделится такое же количество теплоты.

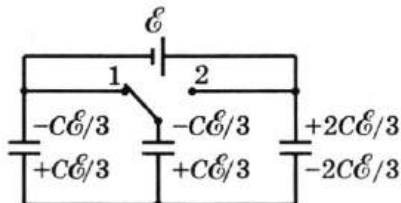


Рис. а

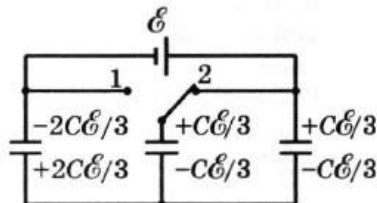


Рис. б

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

26. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. ЗАКОН ОМА ДЛЯ УЧАСТКА ЦЕПИ

26.1. Для измерения сопротивления проводника R используют одну из двух схем (рис. а, б). Сопротивление проводника вычисляют по *приближенной* формуле $R = U/I$, где U — показание вольтметра, I — показание амперметра. Какая из схем дает меньшую погрешность при измерении больших сопротивлений? Малых сопротивлений? Выведите формулы, позволяющие с помощью этих схем измерить R как можно более точно, зная сопротивления амперметра R_A и вольтметра R_V .

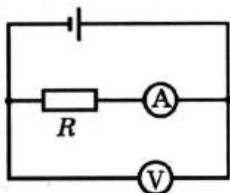


Рис. а

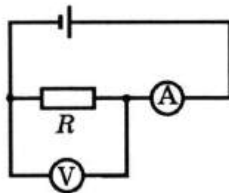


Рис. б

Решение. В схеме а амперметр дает правильные показания — он измеряет силу тока через резистор. А вот вольтметр «лжет»: он измеряет *сумму* напряжений на резисторе (U_R) и амперметре (U_A). Поэтому на самом деле $R = \frac{U_R}{I} = \frac{U}{I} - \frac{U_A}{I} = \frac{U}{I} - R_A$. Измерение по схеме а с использованием указанной в условии приближенной формулы дает малую погрешность для больших сопротивлений $R \gg R_A$ (сопротивление вольтметра при этом несущественно).

Рассматривая аналогично схему б, получаем $\frac{1}{R} = \frac{I}{U} - \frac{1}{R_V}$.

Погрешность в таком случае мала для малых сопротивлений $R \ll R_V$ (сопротивление амперметра при этом несущественно).

26.2. Как с помощью вольтметра, микроамперметра и источника тока с неизвестным внутренним сопротивлением измерить величину неизвестного сопротивления R , сравнимого с сопротивлением вольтметра?

Решение. По схеме, показанной на рис. а, измеряем сопротивление вольтметра: $R_v = U_1/I_1$. После этого с помощью схемы, показанной на рисунке б, находим:

$$R = \frac{U_2}{I_2 - U_2/R_v} = \frac{U_1 U_2}{U_1 I_2 - U_2 I_1}.$$

Такой метод можно использовать, если чувствительность микроамперметра достаточна для измерения малых токов I_1 и I_2 .

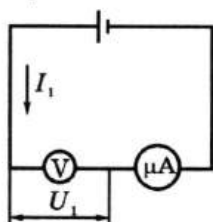


Рис. а

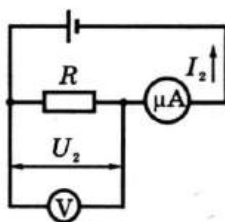


Рис. б

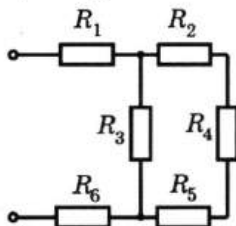
27. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ПРОВОДНИКОВ

- 27.1. Из проволоки сопротивлением $R_0 = 32$ Ом сделано кольцо. В каких точках кольца следует подключить провода, чтобы получить сопротивление $R = 6$ Ом?

☒ Точки подключения должны делить кольцо в отношении 1:3.

Решение. Участки кольца соединены между собой параллельно. Обозначим длину кольца l , а длину одного из участков x . Тогда сопротивления участков $R_0 x/l$ и $R_0(l-x)/l$, а сопротивление всей цепи $R = R_0 x(l-x)/l^2$. Отсюда находим отношение x/l : оно равно 0,25 или 0,75. Оба значения соответствуют одному решению — делению кольца на две части в отношении 1:3.

- 27.2. Найдите полное сопротивление R показанной на рисунке цепи, если $R_1 = R_2 = R_5 = R_6 = 3,0$ Ом; $R_3 = 20$ Ом, $R_4 = 24$ Ом. Найдите силу тока, идущего через каждый резистор, если к цепи приложено напряжение $U = 36$ В.



☒ $R = 18$ Ом; $I_1 = I_6 = 2$ А, $I_3 = 1,2$ А, $I_2 = I_4 = I_5 = 0,8$ А.

Решение. Резисторы 2, 4 и 5 соединены последовательно, $R_{245} = R_2 + R_4 + R_5 = 30$ Ом. Резистор 3 подключен параллельно к этому участку цепи, поэтому

$$R_{2345} = \frac{R_3 R_{245}}{R_3 + R_{245}} = 12 \text{ (Ом)}.$$

Резисторы 1 и 6 соединены с участком 2-3-4-5 последовательно, $R = R_1 + R_6 + R_{2345} = 18$ (Ом). Через резисторы 1 и 6, включенные в неразветвленную часть цепи, идет весь ток, следовательно: $I_1 = I_6 = I = U/R = 2$ (А). На участке же 2-3-4-5 электрический ток разветвляется. Напряжение на

этом участке цепи равно $U_3 = IR_{2345} = 24$ (В). Согласно закону Ома

$$I_3 = U_3/R_3 = 1,2 \text{ (А)}, I_2 = I_4 = I_5 = U_3/R_{245} = 0,8 \text{ (А)}.$$

Как и следовало ожидать, $I_2 + I_3 = I$.

- 27.3. Найдите сопротивление R каждой из цепей, показанных на рисунках а, б, в. Сопротивление каждого резистора R_0 , сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

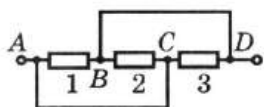


Рис. а

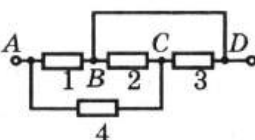


Рис. б

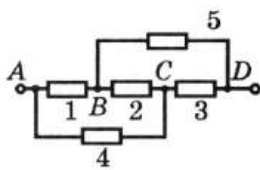


Рис. в

- ☑ а) $R = R_0/3$; б) $R = 3R_0/5$; в) $R = R_0$.

Решение. а) Поскольку точки А и С, В и D закорочены, их потенциалы одинаковы. Объединив эти точки (см. рис. а), получаем $R = R_0/3$. б) Эквивалентная схема показана на рис. б. в) Наиболее удобная эквивалентная схема (см. рис. в) получится, если вытянуть в одну линию резисторы 1 и 5, а также 4 и 3. Из симметрии схемы следует, что $\varphi_B = \varphi_C$, поэтому резистор 2 можно изъять. Тогда $R = R_0$.

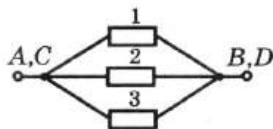


Рис. а

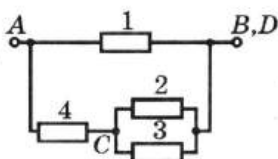


Рис. б

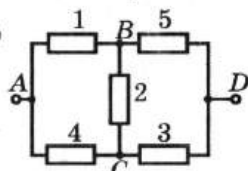
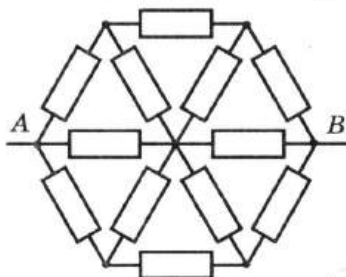


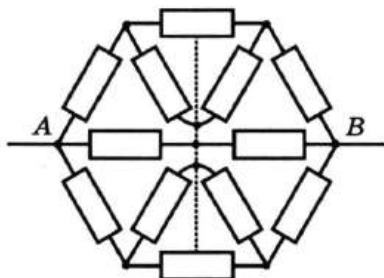
Рис. в

- 27.4. Найдите сопротивление R между точками А и В показанной на рисунке цепи. Сопротивление каждого из резисторов R_0 .



✓ $R = 0,8R_0$.

Решение. Воспользуемся тем, что цепь обладает симметрией, и «разрубим» узел в центре, как показано на рисунке. Покажем, что сопротивление этой цепи такое же, как и исходной. Действительно, точки (лежащие на вертикальной оси симметрии) имеют равные потенциалы.



Поэтому их можно объединить, и мы получим исходную цепь. Расчет «разрубленной» цепи не представляет сложности, так как здесь мы имеем дело с комбинацией последовательных и параллельных соединений. Полное сопротивление цепи определяется из соотношения $\frac{1}{R} = \frac{3}{8R_0} +$

$+\frac{1}{2R_0} + \frac{3}{8R_0}$, откуда

$$R = \frac{4R_0}{5} = 0,8R_0.$$

- 27.5. Найдите сопротивление R цепи (см. рисунок) между точками A и B , если сопротивление каждого звена R_0 .



✓ $R = 3R_0/2$.

Решение. Для получения эквивалентной схемы можно воспользоваться симметрией цепи: либо «разорвать» цепь

(см. рис. а), либо объединить точки с равными потенциалами (на рис. б они обозначены одинаковыми буквами; в соответствующей эквивалентной схеме на рис. в сопротивление каждого резистора R_0).

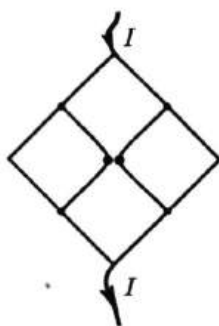


Рис. а

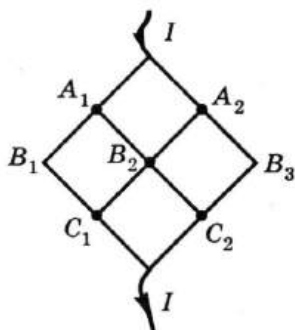


Рис. б

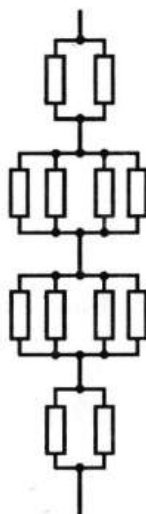


Рис. в

- 27.6. Для каждой из трех схем включения реостата (рис. а, б, в) постройте график зависимости сопротивления цепи R от сопротивления r правой части реостата. Обмотка реостата имеет сопротивление R_0 .



Рис. а

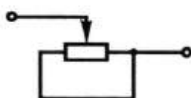


Рис. б

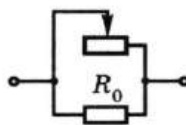


Рис. в

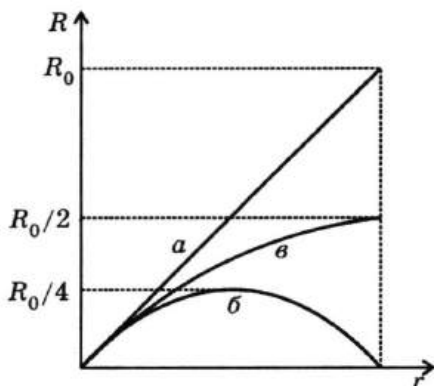
Решение. Для случая а, очевидно, $R = r$. В случае б обе части обмотки реостата соединены параллельно, поэтому

$$R = \frac{r(R_0 - r)}{r + (R_0 - r)} = \frac{r(R_0 - r)}{R_0}.$$

В случае в часть обмотки соединена параллельно с резистором, поэтому получаем

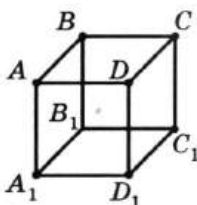
$$R = \frac{rR_0}{r + R_0}.$$

На рисунке приведены графики этих зависимостей (прямая, парабола и гипербола).

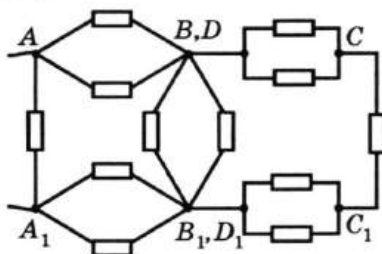


- 27.7. Найдите сопротивление R проволочного куба (см. рисунок) между точками A и A_1 . Сопротивление каждого ребра R_0 .

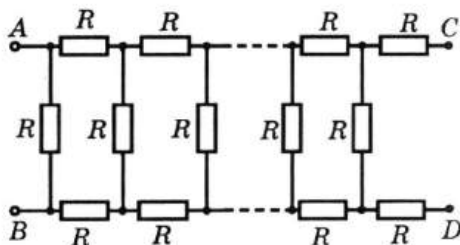
☑ $R = 7R_0/12$.



Указание. Система симметрична относительно плоскости AA_1CC_1 . Значит, потенциалы точек B и D , B_1 и D_1 попарно совпадают. Объединяя эти точки, получаем показанную на рисунке эквивалентную схему.



- 27.8. Сопротивление цепи измеряется между точками A и B (см. рисунок). Какое сопротивление R_x необходимо включить между точками C и D , чтобы сопротивление всей цепи не зависело от числа ячеек в ней?

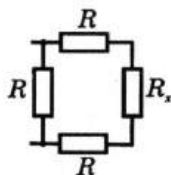


✓ $R_x = (\sqrt{3} - 1)R \approx 0,73R$.

Решение. Предположим, к цепи добавили одну ячейку (можно считать, что это последняя ячейка перед точками C и D). При этом сопротивление цепи не изменится в том случае, если сопротивление последней ячейки вместе с R_x (см.

рисунок) равно R_x , т. е. $\frac{R(2R + R_x)}{3R + R_x} = R_x$.

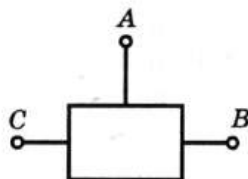
Отсюда $R_x = (\sqrt{3} - 1)R \approx 0,73R$. Очевидно, при таком R_x добавление любого числа ячеек не изменит полного сопротивления цепи (также равного R_x).



Олимпиадные задачи

О-109. «Черный ящик» имеет три клеммы A, B, C (см. рисунок).

Известно, что он содержит только резисторы. Сопротивления «черного ящика» при подключении к различным парам клемм таковы: $R_{AB} = 5 \text{ Ом}$, $R_{BC} = 8 \text{ Ом}$, $R_{AC} = 9 \text{ Ом}$. Предложите схему «черного ящика», содержащую минимально возможное число резисторов.



Решение. Простой перебор показывает, что условию задачи могут удовлетворять только схемы, показанные на рис. a и b . Найдем сопротивления резисторов.

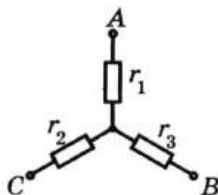


Рис. а

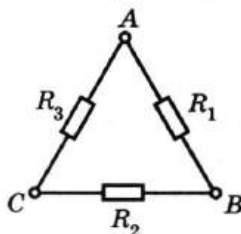


Рис. б

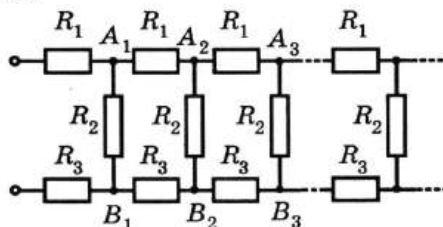
Схема a при подключении к любой паре клемм представляет собой последовательное соединение двух резисторов. Из соотношений

$R_{AB} = r_1 + r_2$, $R_{BC} = r_2 + r_3$, $R_{AC} = r_1 + r_3$ находим, что $r_1 = 3 \text{ Ом}$, $r_2 = 2 \text{ Ом}$, $r_3 = 6 \text{ Ом}$. Для схемы б получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} R_{AB} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}, \\ R_{BC} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}, \\ R_{AC} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}. \end{cases}$$

Складывая первые два уравнения и вычитая третье, получаем $2R_1R_2 = (R_{AB} + R_{BC} - R_{AC})(R_1 + R_2 + R_3)$. Аналогично получаем выражения для R_2R_3 и R_1R_3 . Почленно разделив их друг на друга и подставив числовые значения R_{AB} , R_{BC} , R_{AC} , находим: $R_2/R_1 = 2$, $R_3/R_1 = 3$. Выражая в любом из исходных уравнений R_2 и R_3 через R_1 , находим $R_1 = 6 \text{ Ом}$, $R_2 = 12 \text{ Ом}$, $R_3 = 18 \text{ Ом}$.

О-110. Найдите сопротивление R бесконечной цепи, показанной на рисунке.



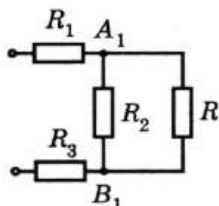
$$\checkmark \quad R = \frac{R_1 + R_3}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1 + R_3}} \right).$$

Решение. Удаление одной ячейки не приводит к изменению сопротивления бесконечной цепи. Значит, вся цепь, находящаяся правее звена A_1B_1 , тоже имеет сопротивление R (см. эквивалентную схему на рисунке). Это позволяет написать уравнение $R = R_1 + R_3 + \frac{R_2 R}{R_2 + R}$, из которого

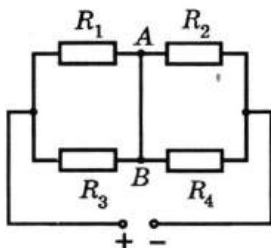
$$\text{находим } R = \frac{R_1 + R_3}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1 + R_3}} \right). \text{ Если } R_2 \ll R_1 + R_3,$$

получаем $R = R_1 + R_3$ (резистор с малым сопротивлением R_2

практически закоротит всю последующую бесконечную цепь).



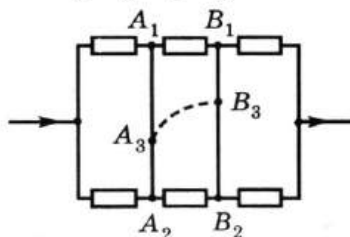
- O-111. Какой ток идет через проводник AB (см. рисунок), если $R_1 = R_4 = R$, а $R_2 = R_3 = 3R$? К цепи приложено напряжение U . Сопротивлением проводника AB можно пренебречь.



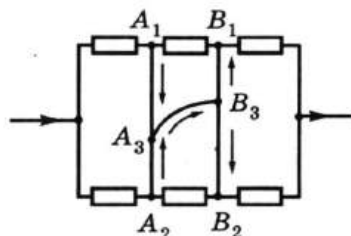
✓ От точки A к точке B течет ток $I = U/(3R)$.

Решение. Поскольку сопротивление проводника AB пренебрежимо мало, потенциалы точек A и B можно считать одинаковыми. Объединив эти точки, получим участки цепи 1-3 и 2-4 с равными сопротивлениями. Напряжение на каждом из этих участков $U/2$, токи через резисторы 1 и 2 соответственно $I_1 = U/(2R)$ и $I_2 = U/(6R)$. Возвращаясь к исходной схеме, находим ток I через проводник AB : из закона сохранения заряда следует, что ток $I = I_1 - I_2 = U/(3R)$ течет от A к B .

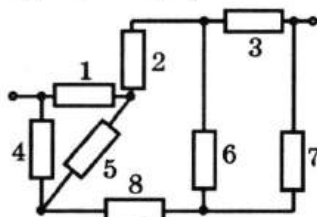
- O-112. В цепи (см. рисунок) сопротивления резисторов подобраны так, что токи через проводники A_1A_2 и B_1B_2 не идут. Возникнут ли токи в этих участках цепи, если соединить проводником точки A_3 и B_3 ? Как изменятся при этом потенциалы точек A_1, A_2, B_1, B_2 ?



Решение. Токи возникнут, направления токов показаны на рисунке. Потенциалы точек изменятся (если сопротивления проводов пренебрежимо малы, то потенциалы всех шести точек $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ сравняются).

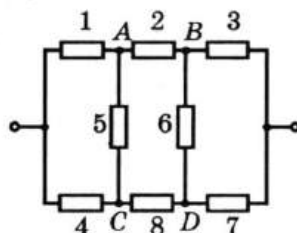


- 0-113. Какой ток течет через каждый из резисторов (см. рисунок), если к цепи приложено напряжение $U = 84$ В? Сопротивления резисторов $R_1 = R_5 = R_8 = 12$ Ом; $R_2 = R_6 = R_7 = 6,0$ Ом; $R_3 = 3,0$ Ом; $R_4 = 24$ Ом.



✓ $I_1 = I_2 = I_3 = 4$ А, $I_4 = I_7 = I_8 = 2$ А, $I_5 = I_6 = 0$.

Решение. Простейшая эквивалентная схема получается, если «вытянуть» в одну линию резисторы 1, 2, 3 и 4, 8, 7 (см. рисунок). Поскольку $R_1:R_2:R_3 = R_4:R_8:R_7$, нетрудно показать, что потенциалы точек A и C , B и D совпадают: $\varphi_A = \varphi_C$, $\varphi_B = \varphi_D$. Поэтому ток через резисторы R_5 и R_6 не течет: $I_5 = I_6 = 0$.

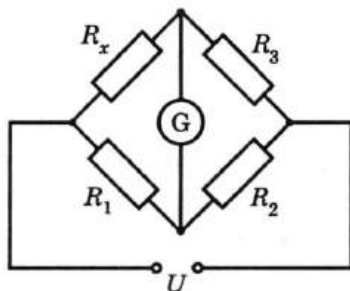


После изъятия из цепи этих резисторов расчет токов не вызывает затруднений:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = 4 \text{ (A)},$$

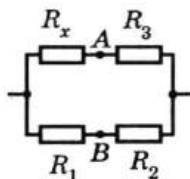
$$I_4 = I_7 = I_8 = \frac{U}{R_4 + R_7 + R_8} = 2 \text{ (A)}.$$

О-114. В цепи, представленной на рисунке, гальванометр показывает отсутствие тока. Выразите сопротивление R_x через R_1 , R_2 , R_3 .



✓ $R_x = R_1 R_3 / R_2$.

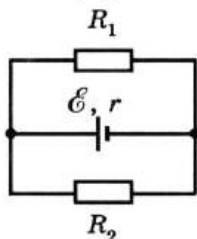
Решение. Ток не идет через гальванометр, когда прибор включен между точками с равными потенциалами. Следовательно, гальванометр можно изъять из цепи (см. рисунок).



Тогда из условия $\varphi_A = \varphi_B$ находим $U_x = U_1$, $U_3 = U_2$. Поскольку $U_x/U_3 = R_x/R_3$ и $U_1/U_2 = R_1/R_2$, получаем $R_x/R_3 = R_1/R_2$.

28. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ПОЛНОЙ ЦЕПИ

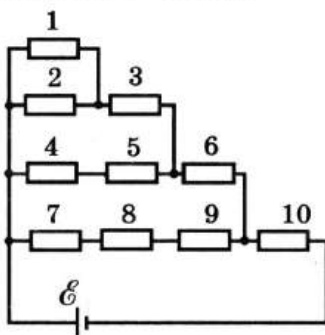
- 28.1.** Найдите напряжение U на полюсах источника тока (см. рисунок). Каковы силы тока I_1 и I_2 в резисторах? Сопротивления резисторов $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_2 = 24 \text{ Ом}$; ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 40 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление $r = 2 \text{ Ом}$.



✓ $U = 30 \text{ В}$; $I_1 = 3,75 \text{ А}$; $I_2 = 1,25 \text{ А}$.

Решение. Сопротивление внешней цепи равно $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$, сила тока в цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$. Напряжение в цепи $U = IR$, $I_1 = U/R_1$, $I_2 = U/R_2$.

- 28.2.** Найдите силу тока I через источник и напряжение U на источнике (см. рисунок), если его ЭДС $\mathcal{E} = 15 \text{ В}$, а внутреннее сопротивление $r = 4,0 \text{ Ом}$. Сопротивления всех резисторов одинаковы: $R = 68 \text{ Ом}$.



✓ $I = 0,1 \text{ А}$; $U = 14,6 \text{ В}$.

Решение. Сопротивления участков цепи равны соответ-

$$\text{венно: } R_{12} = \frac{R}{2}; R_{123} = \frac{3}{2}R; R_{1-5} = \frac{2R \cdot \frac{3}{2}R}{2R + \frac{3}{2}R} = \frac{6}{7}R;$$

$$R_{1-6} = \frac{13}{7}R; R_{1-9} = \frac{\frac{13}{7}R \cdot 3R}{\frac{13}{7}R + 3R} = \frac{39}{34}R.$$

Полное сопротивление внешней цепи

$$R_0 = R_{1-9} + R = \frac{73}{34}R = 146 \text{ (Ом)}.$$

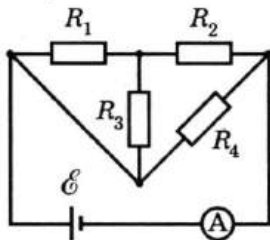
Найдем силу тока через источник $I = \mathcal{E}/(R_0 + r) = 0,1 \text{ (А)}$ и напряжение на источнике $U = \mathcal{E} - Ir = 14,6 \text{ (В)}$.

- 28.3. Цепь состоит из аккумулятора и лампы. При этом напряжение на зажимах аккумулятора $U_1 = 20 \text{ В}$. При параллельном подключении еще одной такой же лампы напряжение падает до $U_2 = 15 \text{ В}$. Найдите сопротивление R каждой лампы. Считайте, что сопротивление лампы не зависит от ее накала. Внутреннее сопротивление аккумулятора $r = 1 \text{ Ом}$.

☒ $R = 2 \text{ Ом}$.

Решение. В случае одной лампы согласно закону Ома для полной цепи $U_1 = \frac{\mathcal{E}R}{R+r}$. При параллельном подключении второй лампы сопротивление внешней цепи равно $R/2$, так что $U_2 = \frac{\mathcal{E}R}{R+2r}$. Отсюда $R = \frac{2U_2 - U_1}{U_1 - U_2}r = 2 \text{ (Ом)}$.

- 28.4. Какую силу тока I покажет амперметр в изображенной на рисунке цепи? Сопротивления резисторов: $R_1 = 6 \text{ Ом}$, $R_2 = 8 \text{ Ом}$, $R_3 = 12 \text{ Ом}$, $R_4 = 24 \text{ Ом}$. ЭДС источника $\mathcal{E} = 36 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление $r = 1 \text{ Ом}$.



☒ $I = 4 \text{ А}$.

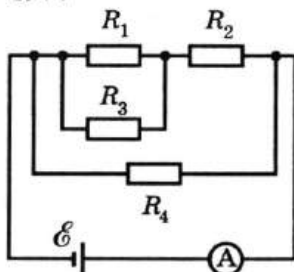
Решение. Эквивалентная схема цепи представлена на рисунке. Вычислим сопротивление всей цепи:

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 4 \text{ (Ом)}; R_{123} = R_{13} + R_2 = 12 \text{ (Ом)};$$

$$R = \frac{R_{123} R_4}{R_{123} + R_4} = 8 \text{ (Ом)}.$$

Согласно закону Ома для замкнутой цепи сила тока через

амперметр $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = 4 \text{ (А)}.$



- 28.5.** Является ли работа, совершаемая источником тока во внутренней части цепи, величиной постоянной для данного источника?

Решение. Постоянной является лишь сумма работ, совершаемых источником во внутренней и внешней частях цепи. С изменением внешнего сопротивления изменяется лишь соотношение между ними. При росте этого сопротивления увеличивается часть работы на внешнем участке и соответственно уменьшается на внутреннем.

- 28.6.** Два соединенных последовательно вольтметра подключены к клеммам источника тока. Показания вольтметров таковы: $U_1 = 5,0 \text{ В}$ и $U_2 = 15 \text{ В}$. Если подключить к источнику только первый вольтметр, он покажет $U'_1 = 19 \text{ В}$. Найдите ЭДС источника.

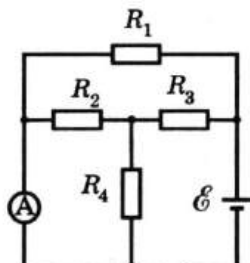
☒ $\mathcal{E} = 20,4 \text{ В}.$

Решение. Обозначим сопротивления вольтметров R_1 и R_2 , внутреннее сопротивление источника r . Из закона Ома следует, что $\frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} = \frac{U'_1}{R_1}$. При последовательном соедине-

нии $\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r}.$

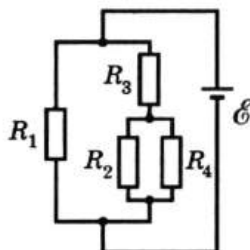
Отсюда $\mathcal{E} = \frac{U'_1 U_2}{U'_1 - U_1} = 20,4 \text{ (В)}.$

- 28.7. Найдите силу тока I_A через амперметр (см. рисунок), если сопротивления резисторов $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = R_4 = 8 \text{ Ом}$, $R_3 = 1 \text{ Ом}$. ЭДС источника $\mathcal{E} = 50 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление $r = 1 \text{ Ом}$. Сопротивлением амперметра можно пренебречь.



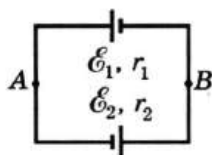
✓ $I_A = 6 \text{ А}$.

Указание. Эквивалентная схема с изъятим амперметром (см. рисунок) позволяет найти силу тока через каждый из резисторов. Возвращаясь к исходной схеме, находим I_A с помощью закона сохранения заряда: $I_A = I - I_4$ или $I_A = I_1 + I_2$ (ср. с задачей О-111).



Олимпиадные задачи

- О-115. Два источника ЭДС соединены, как показано на рисунке. Найдите разность потенциалов между точками А и В. Какой станет разность потенциалов, если изменить полярность включения второго источника?



$$\checkmark \quad \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}; \quad \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}.$$

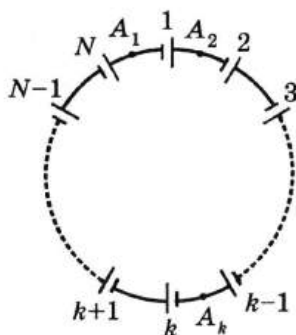
Решение. Ток в цепи идет против часовой стрелки. Сила тока $I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2}$. Искомая разность потенциалов между точ-

ками А и В: $\mathcal{E}_1 - Ir_1 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}$; обратим внимание, что она

равна нулю при $\mathcal{E}_1/r_1 = \mathcal{E}_2/r_2$, т. е. когда у обоих источников одинаковы токи короткого замыкания. Если изменить полярность второго источника, в выражении для разности потенциалов знак перед $\mathcal{E}_2$ тоже изменится, и в результате получим $\frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}$. Если $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, искомая раз-

ность потенциалов равна ЭДС любого из источников.

- О-116. В цепи, показанной на рисунке, ЭДС каждого элемента $\mathcal{E}$, внутреннее сопротивление r . Какова разность потенциалов между точками A_1 и A_2 ? Между точками A_1 и A_k ? Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.



$\checkmark$ Потенциалы всех указанных точек совпадают.

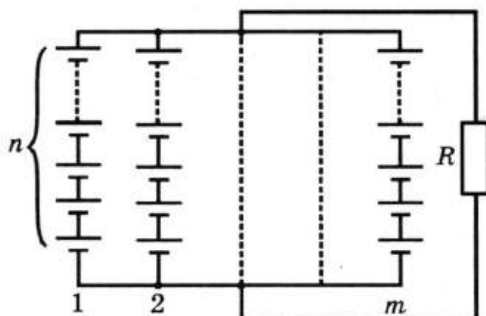
Решение 1. Цепь обладает симметрией по отношению к поворотам: после поворота, например, на одно звено по часовой стрелке цепь в целом не изменяется, однако точка A_1 занимает место точки A_2 . Поскольку при повороте *всей* цепи потенциалы точек не изменяются, $\varphi_{A_1} = \varphi_{A_2}$. Этот вывод легко обобщить: $\varphi_{A_1} = \varphi_{A_k}$ при всех k .

Решение 2. Согласно закону Ома для замкнутой цепи

сила тока $I = \frac{N\mathcal{E}}{Nr} = \frac{\mathcal{E}}{r}$, т. е. каждый элемент «работает» в

режиме короткого замыкания. Поэтому разность потенциалов на любом элементе (или группе элементов) равна нулю. Используя аналогичные соображения, можно доказать, что такой же результат получится и для различных элементов, если у них одинаковы токи короткого замыкания.

- 0-117. N одинаковых элементов надо соединить в батарею согласно схеме, показанной на рисунке. Внутреннее сопротивление каждого элемента r . При каких значениях m и n сила тока через резистор с сопротивлением R , подключенный к батарее, будет наибольшей? Решите задачу при $N = 100$, $r = 1$ Ом, $R = 2$ Ом.



Решение. Обозначим ЭДС каждого из элементов $\mathcal{E}$, тогда полная ЭДС батареи $n\mathcal{E}$; ее внутреннее сопротивление nr/m . Поскольку $m = N/n$, сила тока через резистор будет равна

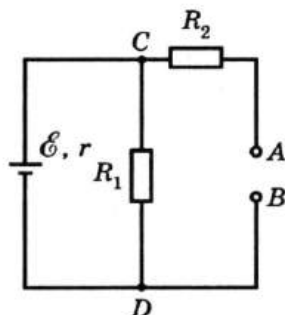
$$I = \frac{n\mathcal{E}}{\frac{nr}{m} + R} = \frac{N\mathcal{E}}{nr + \frac{N}{n}R}. \text{ Минимальное значение знаменате-}$$

ля этого выражения достигается при $nr = NR/n$, то есть

при $n = \sqrt{\frac{NR}{r}}$ и $m = \sqrt{\frac{Nr}{R}}$. При этом внутреннее сопро-

тивление батареи совпадает с сопротивлением нагрузки. При заданных числовых значениях получаем $n_0 = 14,1 \approx 14$, $m_0 = 7,07 \approx 7$. Таким образом, наибольшее значение силы тока достигается, если использовать только 98 из 100 элементов.

0-118. Резистор с сопротивлением R подключают к клеммам A и B (см. рисунок). Найдите силу тока I через этот резистор.



Решение. Напряжение между точками C и D после подключения резистора составляет $U_{CD} = \frac{\mathcal{E}R_{CD}}{r + R_{CD}}$, где $R_{CD} = \frac{R_1(R_2 + R)}{R_1 + R_2 + R}$. Следовательно,

$$I = \frac{U_{CD}}{R_2 + R} = \frac{\mathcal{E}R_1}{(r + R_1)(R_2 + R) + rR_1}.$$

Замечание. Этот результат можно записать в виде $I = \frac{\mathcal{E}'}{r' + R}$, где $\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}R_1}{r + R_1}$ — напряжение между разомкну-

тыми клеммами A и B , а $r' = R_2 + \frac{rR_1}{r + R_1}$ — сопротивле-

ние показанного на рисунке в условии задачи двухполюсника между точками A и B . Таким образом, данный двухполюсник можно рассматривать как источник тока с электродвижущей силой $\mathcal{E}'$ и внутренним сопротивлением r' . Этот подход применим к любому двухполюснику, состоящему из линейных (т. е. подчиняющихся закону Ома) элементов.

29. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА. ЗАКОН ДЖОУЛЯ—ЛЕНЦА

- 29.1. Две электрические лампы, рассчитанные на одинаковое напряжение, имеют разную номинальную мощность. В какой из ламп выделится большее количество теплоты при последовательном их включении в сеть с напряжением, на которое рассчитана каждая лампа?

Решение. Количество теплоты, выделившееся в лампе при прохождении тока, пропорционально потребляемой мощности. Потребляемая мощность при последовательном соединении ламп пропорциональна их сопротивлениям. Так как лампы рассчитаны на одинаковое напряжение, то сопротивление меньше у той, которая рассчитана на большую мощность. Следовательно, эта лампа при последовательном соединении с другой будет потреблять меньше энергии и в ней выделится меньшее количество теплоты.

- 29.2. К источнику подключаются поочередно резисторы с сопротивлениями R_1 и R_2 . В обоих случаях на резисторах выделяется одинаковая мощность. Найдите внутреннее сопротивление r источника.

✓ $r = \sqrt{R_1 R_2}.$

Решение. Резистор с сопротивлением R потребляет от источника мощность $P = I^2 R = \frac{R \mathcal{E}^2}{(R + r)^2}$. Согласно условию

$P_1 = P_2$, откуда $r = \sqrt{R_1 R_2}.$

- 29.3. На одной лампочке написано «220 В, 60 Вт»; на другой «220 В, 40 Вт». Лампочки соединяют последовательно и включают в сеть с напряжением 220 В. Найдите полную потребляемую мощность, а также мощность каждой из лампочек при таком включении. Зависимость сопротивления ламп от температуры не учитывайте.

✓ Полная мощность 24 Вт; первая лампочка потребляет 9,6 Вт, а вторая 14,4 Вт.

Решение. Из соотношения $P = U^2/R$ следует, что даже полная потребляемая мощность будет меньше 40 Вт (увеличение сопротивления нагрузки при $U = \text{const}$ приводит

к уменьшению мощности). Лампочка, рассчитанная на большую мощность (60 Вт), имеет меньшее сопротивление и, поскольку $P = I^2 R$, будет гореть *менее ярко*, чем «40-ваттная» (ведь сила тока при последовательном соединении одинакова для обеих лампочек). Считая, что сопротивление каждой лампочки не зависит от накала*, получаем: $R_1 = U^2/P_1$, $R_2 = U^2/P_2$. При последовательном включении $I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{P_1 P_2}{U(P_1 + P_2)}$, мощности лампочек $P'_1 = \frac{P_1 P_2^2}{(P_1 + P_2)^2} = 9,6$ Вт, $P'_2 = \frac{P_1^2 P_2}{(P_1 + P_2)^2} = 14,4$ (Вт). При этом полная потребляемая мощность $P = P'_1 + P'_2 = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} = 24$ (Вт).

- 29.4. Электровоз, работающий при напряжении $U = 3$ кВ и потребляющий силу тока $I = 1,6$ кА, развивает при скорости $v = 43$ км/ч силу тяги $F = 340$ кН. Каков КПД двигателей электровоза?

☒ 85 %.

Решение. За время t электрический ток в двигателях электровоза совершает работу $A_{\text{э}} = UIt$; за то же время совершается полезная работа $A_{\text{н}} = Fs = Fvt$. Согласно определению КПД получаем

$$\eta = \frac{A_{\text{н}}}{A_{\text{э}}} \cdot 100\% = \frac{Fvt}{UIt} \cdot 100\% = \frac{Fv}{UI} \cdot 100\%. \text{ Откуда:}$$

$$\eta = \frac{340 \cdot 10^3 \cdot 43}{3 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^3} \cdot 100\% \approx 85\%.$$

- 29.5. Как зависят потери мощности, связанные с внутренним сопротивлением источника питания, от сопротивления внешней цепи? Могут ли эти потери быть равными нулю?

Решение. Чем меньше сопротивление внешней цепи, тем больше сила тока в ней, а значит, тем больше тратится энергии на преодоление внутреннего сопротивления источника питания.

* На самом деле при увеличении напряжения на лампочке от 0 до 220 В ее сопротивление может возрасти примерно в десять раз.

Потери мощности на сопротивление источника можно свести к нулю только при разомкнутой внешней цепи, когда ток отсутствует.

- 29.6. В квартире включен единственный электрический прибор — лампа номинальной мощностью $P_1 = 100$ Вт, рассчитанная на напряжение 220 В. На сколько изменится напряжение на лампе, если включить электрокамин номинальной мощностью $P_2 = 500$ Вт? Сопротивление проводов, подводящих к квартире электроэнергию, составляет $R_0 = 4$ Ом. Напряжение в сети $U = 220$ В. Зависимость сопротивления электроприборов от температуры не учитывайте.

☒ Напряжение понизится на 8 В.

Решение. По номинальной мощности приборов (соответствующей напряжению U в сети) найдем их электрические сопротивления:

$R_1 = U^2/P_1 = 480$ Ом, $R_2 = U^2/P_2 = 97$ Ом. До включения электрокамина напряжение на лампе было $U_1 = \frac{UR_1}{R_0 + R_1} =$

$= 218$ (В).

После включения электрокамина общее сопротивление потребителей электроэнергии $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 81$ (Ом), а

напряжение на них $U_2 = \frac{UR_{12}}{R_0 + R_{12}} = 210$ (В). Таким обра-

зом, напряжение понизилось на 8 В. На практике, однако, пренебрегать зависимостью сопротивления нагревательных приборов от температуры нельзя.

- 29.7. Найдите ток короткого замыкания $I_{\text{кз}}$ аккумуляторной батареи, если при токе $I_1 = 5$ А нагрузка потребляет мощность $P_1 = 30$ Вт, а при токе $I_2 = 10$ А она потребляет мощность $P_2 = 40$ Вт.

☒ 20 А.

Решение. Из уравнения $P = I^2 R$ определяем сопротивление нагрузки в обоих случаях:

$$R_1 = \frac{P_1}{I_1^2}, \quad R_2 = \frac{P_2}{I_2^2}.$$

Из закона Ома для замкнутой цепи следует:

$$\mathcal{E} = I_1(r + R_1) = I_2(r + R_2).$$

$$\text{Отсюда } r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}, \quad \mathcal{E} = \frac{I_1 I_2 (R_1 - R_2)}{I_2 - I_1}.$$

С учетом, что $I_{\text{ка}} = \mathcal{E}/r$, получаем:

$$I_{\text{ка}} = \frac{I_1 I_2 (R_1 - R_2)}{I_1 R_1 - I_2 R_2} = \frac{P_1 I_2^2 - P_2 I_1^2}{P_1 I_2 - P_2 I_1} = 20 \text{ (А)}.$$

- 29.8.** Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода закипает через $t_1 = 12$ мин, при включении другой — через $t_2 = 24$ мин. Через сколько времени закипит вода в чайнике, если включить обе обмотки параллельно? Последовательно? Теплообмен с воздухом не учитывайте.

☒ Через 8 минут; через 36 минут.

Решение. Обозначим сопротивления обмоток чайника R_1 и R_2 , напряжение в сети U . Количество теплоты, необходимое для доведения воды до кипения,

$$Q = \frac{U^2}{R_1} t_1 = \frac{U^2}{R_2} t_2 = \frac{U^2}{R_1 + R_2} t_{\text{посл}} = \left(\frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2} \right) t_{\text{пар}}.$$

Отсюда $R_1/R_2 = t_1/t_2$; время закипания воды при последовательном соединении обмоток $t_{\text{посл}} = t_1 + t_2 = 36$ (мин),

при параллельном $t_{\text{пар}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 8$ (мин). В действительно-

сти теплопередача от чайника к окружающему воздуху достаточно велика. Потери тепла тем больше, чем медленнее происходит нагревание.

Следовательно, $t_{\text{посл}} > 36$ мин, а $t_{\text{пар}} < 8$ мин.

- 29.9.** Источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на реостат. Как зависят от сопротивления реостата R следующие величины: сила тока I , напряжение U , мощность P во внешней цепи, полная мощность P_0 и КПД цепи η ? Постройте соответствующие графики. При каком R достигается максимальная мощность во внешней цепи? Каков при этом КПД цепи?

Решение. Согласно закону Ома для замкнутой цепи $I = \mathcal{E}/(R + r)$. График этой зависимости (гипербола) приведен на рис. а. Напряжение $U = IR = \mathcal{E}R/(R + r)$. График (тоже гипербола) приведен на рис. б.

Мощность во внешней цепи $P = I^2 R = \mathcal{E}^2 R / (R + r)^2$; полная мощность $P_0 = I^2 (R + r) = \mathcal{E}^2 / (R + r)$ (см. рис. в). КПД цепи $\eta = P/P_0 = R/(R + r)$ (см. рис. з).

Чтобы исследовать на максимум функцию $P(R)$, воспользуемся неравенством $R + r \geq 2\sqrt{Rr}$, в котором равенство достигается только при $R = r$. Следовательно, $P(R)$ достигает максимального значения при $R = r$ (такую нагрузку называют согласованной). При этом КПД цепи составляет всего 50 %.

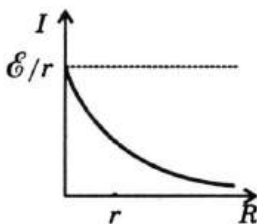


Рис. а

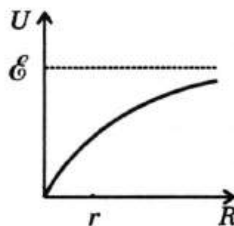


Рис. б

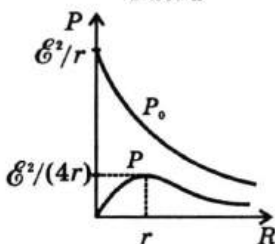


Рис. в

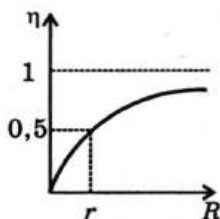


Рис. з

Олимпиадные задачи

- 0-119. Электропоезд идет по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью, а затем с другой постоянной скоростью преодолевает подъем с уклоном $k = 0,04$. Потребляемая сила тока на горизонтальном участке $I_1 = 240$ А, а на подъеме $I_2 = 450$ А. Коэффициент сопротивления движению $\mu = 0,02$. Найдите отношение скоростей v_1 и v_2 на этих двух участках, считая КПД двигателя неизменным.

☒ $v_1/v_2 = 1,6$.

Решение. При равномерном движении по горизонтальному участку пути сила тяги $F_1 = \mu mg$; при равномерном

движении на подъеме $F_2 = mg(\mu + k)$ (мы учли, что $k \ll 1$). Развиваемая механическая мощность $N = Fv$, а потребляемая электрическая мощность $P = UI$. Считая КПД двигателя неизменным, получаем $N_1/P_1 = N_2/P_2$, откуда $\frac{v_1}{v_2} = \frac{I_1}{I_2} \left(1 + \frac{k}{\mu}\right) = 1,6$.

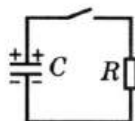
- О-120.** Три тонкие проволоки одинакового диаметра — железная, медная и алюминиевая — соединены последовательно. Их подключают к источнику высокого напряжения, и одна из проволок перегорает. Какая? Начальная температура $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Зависимость сопротивления от температуры не учитывайте.

☒ **Алюминиевая проволока.**

Решение. Вопрос сводится к тому, какая из проволок при быстром нагревании (без потерь тепла) раньше нагреется до «своей» температуры плавления. Необходимое для

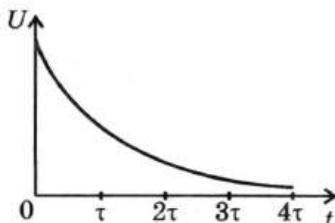
этого время $\tau = \left(\frac{\pi D^2}{4I}\right)^2 \cdot \frac{dc(t_{\text{пл}} - t_0)}{\rho}$. Перегорит алюминиевая проволока, у которой значение величины $\frac{dc(t_{\text{пл}} - t_0)}{\rho}$ наименьшее. Заметим, что при перегорании плавится очень короткий отрезок проволоки, поэтому учитывать расход тепла на плавление не следует.

- О-121.** Оцените время τ разрядки конденсатора (см. рисунок) после замыкания ключа. Как выглядит график зависимости от времени напряжения U на конденсаторе?



☒ $\tau \sim RC$; см. рисунок.

Решение. По мере уменьшения напряжения на конденсаторе уменьшается и сила тока i , т. е. разрядка идет все медленнее. Под временем разрядки понимают время заметного изменения напряжения (скажем, вдвое). Оценить это время можно, например, методом размерностей: τ может зависеть лишь от R , C и, возможно, от начального напряжения U_0 на конденсаторе.

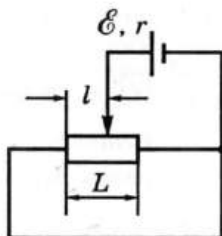


Единицы измерения этих величин соответственно: 1 Ом, 1 Ф = 1 Кл/В = 1 с/Ом и 1 В.

Из этих величин можно построить величину с размерностью времени единственным способом — умножить R на C . Следовательно, $\tau \sim RC$. Как видим, время разрядки не зависит от начального напряжения. Можно получить тот же результат и иначе: выделившееся за время τ количество теплоты $i^2 R \tau$ должно быть сравнимо с начальной энергией заряженного конденсатора $CU_0^2/2$. Считая $i \sim U_0/R$, получаем тот же результат: $\tau \sim RC$.

Точный закон убывания напряжения на конденсаторе имеет вид $U = U_0 e^{-t/(RC)}$. За время $\tau = RC$ напряжение убывает в $e \approx 2,7$ раз; за время 5τ — в 150 раз; за 10τ — в 22 000 раз.

- 0-122. Сопротивление реостата (см. рис.) $R = 16$ Ом. ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 12$ В, его внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом. Выразите через отношение $x = l/L$ следующие величины: силу тока I через источник; напряжение U на полюсах источника тока; мощность P , выделяющуюся в реостате. Постройте соответствующие графики.



$$\boxed{\checkmark} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{r + Rx(1-x)}; \quad U = \frac{\mathcal{E}Rx(1-x)}{r + Rx(1-x)}; \quad P = \frac{\mathcal{E}^2 Rx(1-x)}{(r + Rx(1-x))^2}.$$

См. рис. а, б, в. Указание.

Обе части реостата соединены параллельно, сопротивление внешней цепи $R_0 = Rx(1-x)$; все графики симметричны относительно прямой $x = 1/2$. Поясним характерный «двугорбый» вид графика $P(x)$: максимум достигается для согласованной нагрузки (см. задачу 29.9) — при $R_0 = 2$ Ом. При перемещении же движка реостата от любого края к середине величина R_0 изменяется от нуля до $R/4 = 4$ Ом, проходя при этом через значение 2 Ом.

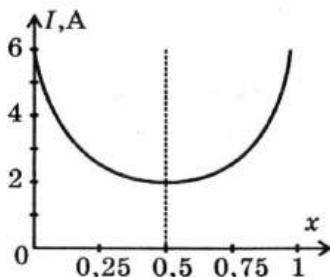


Рис. а

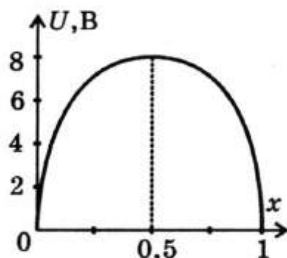


Рис. б

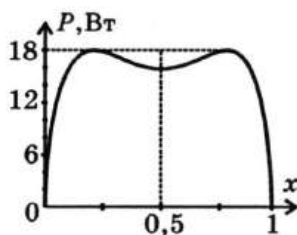


Рис. в

0-123. Элемент замыкается проволокой один раз с сопротивлением $R_1 = 4$ Ом, а другой — $R_2 = 9$ Ом. В этом и другом случаях количество теплоты Q , выделяющееся в проволоках за одно и то же время, оказывается одинаковым. Каково внутреннее сопротивление элемента?

☒ $r = 6$ Ом.

Решение. Условие задачи можно записать следующим образом: $Q_1 = Q_2$; $I_1^2 R_1 t = I_2^2 R_2 t$, откуда

$$I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2.$$

С другой стороны, на основании закона Ома для всей цепи

$$\mathcal{E} = I(r + R_1) = I_2(r + R_2).$$

Из последних двух равенств следует:

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \quad \text{и} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{r + R_2}{r + R_1}.$$

Решая совместно эти уравнения, находим

$$r = \frac{R_1 - R_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}}{\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} - 1} = \frac{R_1 - \sqrt{R_1 R_2}}{\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} - \sqrt{\frac{R_1}{R_1}}} = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Откуда получаем $r = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ (Ом).

30. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ, ЖИДКОСТЯХ, ГАЗАХ И ВАКУУМЕ. ПОЛУПРОВОДНИКИ

- 30.1. Никелирование с помощью электролиза металлической пластинки, имеющей площадь поверхности $S = 48 \text{ см}^2$, продолжалось $t = 4 \text{ ч}$ при силе тока $I = 0,15 \text{ А}$. Найдите толщину h слоя никеля. Валентность никеля $n = 2$.

☒ 15 мкм.

Решение. Из закона электролиза $m = \frac{M}{eN_A n} \cdot I \cdot \Delta t$ и соот-

ношения $m = \rho V = \rho h S$ получаем $h = \frac{MI\Delta t}{eN_A n \rho S}$.

- 30.2. Ионизирующее излучение каждую секунду создает в 1 см^3 газа в трубке $n = 5 \cdot 10^9$ пар однозарядных ионов. Какова сила тока насыщения при несамостоятельном разряде, если объем трубки $V = 600 \text{ см}^3$?

☒ 480 нА.

Решение. Сила тока $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{enV}{\Delta t}$. Следует обратить внимание на то, что пара однозарядных ионов переносит с катода на анод один электрон.

- 30.3. При какой напряженности поля начнется самостоятельный разряд в водороде, если энергия ионизации молекул равна $2,5 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$, а средняя длина свободного пробега 5 мкм? Какую скорость имеют электроны при ударе о молекулу?

☒ 3,1 МВ/м; 2300 км/с.

Решение. Самостоятельный разряд в водороде начнется, если энергия, приобретенная электроном в поле на длине свободного пробега l , равна энергии ионизации W .

$$eEl = W, \text{ тогда } E = \frac{W}{el}.$$

Скорость v электрона при ионизации атомов определяет-ся из условия равенства W и кинетической энергии:

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}}.$$

Проделив вычисления, получаем:

$$E = \frac{2,5 \cdot 10^{-18}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 3,1 (\text{МВ/м});$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-18}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 2300 (\text{км/с}).$$

- 30.4.** Доказать рассуждением, что соединение InAs (арсенид индия), в котором количества (в молях) индия и мышьяка одинаковы, обладает проводимостью типа собственной проводимости элементов четвертой группы (Ge, Si). Какого типа будет проводимость при увеличении концентрации индия? мышьяка?

Решение. Соединение InAs, в котором количество атомов In и As одинаково, имеет кристаллическую структуру. Валентные электроны атомов образуют химические связи, поэтому примесных электронных уровней не возникает и InAs обладает проводимостью типа собственной проводимости элементов четвертой группы. Валентность индия меньше, чем валентность мышьяка (соответственно 3 и 5), следовательно, добавление индия приводит к появлению дырочной проводимости, а мышьяка — к электронной.

- 30.5.** При нанесении металлических покрытий с помощью электролиза иногда в конце процесса на некоторое время изменяют направление тока на противоположное. В результате поверхность становится более гладкой. Почему?

Решение. На поверхности металла всегда есть мелкие неровности. После изменения направления тока образовавшийся слой металла становится анодом и начинает растворяться. Выступы растворяются быстрее других участков, потому что поверхностная плотность заряда и напряженность электрического поля у выступов больше, чем у гладких участков или впадин. В результате поверхность металла становится более гладкой.

- 30.6.** По медному проводнику течет электрический ток. Плотность тока $j = 6 \text{ А/мм}^2$. Найдите среднюю скорость v упорядоченного движения электронов, считая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

☒ 0,45 мм/с.

Решение. Используем соотношение $I = enSv$, где e — элементарный заряд, n — концентрация свободных электронов, S — площадь сечения проводника. Согласно условию,

n совпадает с концентрацией атомов меди, т. е. $n = N/V = \rho N_A/M$ (здесь ρ — плотность, а M — молярная масса меди; N_A — постоянная Авогадро; $N = \rho V N_A/M$ — количество атомов меди в объеме V). Поскольку, с другой стороны, $I = jS$, получаем $v = \frac{jM}{eN_A \rho} = 0,45$ (мм/с). Эта скорость

(ее называют дрейфовой) ничтожно мала по сравнению со средней скоростью беспорядочного движения электронов.

- 30.7. Какой наименьшей кинетической энергией W_k и скоростью v должен обладать ион неона, чтобы при столкновении его с неподвижным нейтральным атомом неона могла произойти ионизация атома? Потенциал ионизации атомов неона $\varphi = 21,5$ В.

☒ $W_k = 43$ эВ = $6,9 \cdot 10^{-18}$ Дж; 20 км/с.

Решение. Поскольку массы сталкивающихся частиц практически одинаковы, следует учесть кинетическую энергию, которую имеют частицы после столкновения. Наиболее эффективным для ионизации является неупругий удар, после которого обе частицы имеют одинаковую скорость, равную половине начальной скорости иона v_0 . Суммарная кинетическая энергия частиц после неупругого удара

$$2 \cdot \frac{m_0 (v_0/2)^2}{2} = \frac{W_k}{2}. \text{ Здесь } m_0 = M/N_A \text{ (} M \text{ — молярная масса неона). Согласно закону сохранения энергии:}$$

$$W_k = e\varphi + W_k/2.$$

$$\text{Отсюда } W_k = 2e\varphi = 43 \text{ (эВ)} = 6,9 \cdot 10^{-18} \text{ (Дж)}$$

$$\text{и } v = 2\sqrt{\frac{eN_A \varphi}{M}} = 2,0 \cdot 10^4 \text{ (м/с). Таким образом, для ионизации одного и того же атома ион должен иметь вдвое}$$

большую энергию, чем электрон.

- 30.8. Легирование германия акцепторной примесью (например, индием) намного увеличивает концентрацию дырок. Как при этом изменяется концентрация свободных электронов?

Решение. Количество образующихся каждую секунду свободных электронов после легирования практически не изменяется (оно определяется температурой полупроводника). А вот вероятность «гибели» свободного электрона в результате рекомбинации при встрече с дыркой резко

возрастает — ведь дырок стало намного больше. Следовательно, *динамическое равновесие* между процессами рождения и гибели свободных электронов достигается теперь при значительно меньшей концентрации свободных электронов.

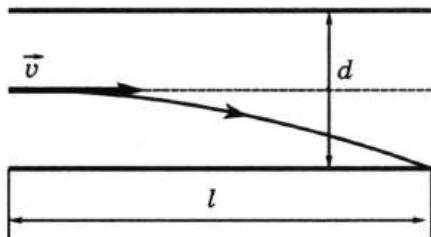
- 30.9.** При нагревании одного из концов полупроводникового стержня (германий с примесью индия) возникает разность потенциалов между нагретым и холодным концами. Почему? Потенциал какого конца стержня выше?

Решение. При нагревании увеличивается скорость беспорядочного движения свободных носителей заряда. В результате происходит их диффузия в сторону холодной области полупроводника. Диффузия ведет к разделению зарядов: у *холодного* конца полупроводника повышается концентрация свободных носителей заряда. Индий в германии представляет собой акцепторную примесь, т. е. основными носителями заряда являются дырки. Следовательно, потенциал холодного конца стержня выше (дырки имеют положительный заряд).

Олимпиадные задачи

- О-124.** Пучок электронов, разогнанных напряжением $U_1 = 5$ кВ, влетает в плоский конденсатор посередине между пластинами и параллельно им. Длина конденсатора $l = 10$ см, расстояние между пластинами $d = 10$ мм. При каком наименьшем напряжении U_2 на конденсаторе электроны не будут вылетать из него?

☒ 100 В.



Решение. Движение электрона, влетевшего в конденсатор параллельно его пластинам, напоминает движение тела, брошенного горизонтально (см. рисунок). Электроны не

будут вылетать из конденсатора, если $at^2/2 \geq d/2$. Ускорение $a = \frac{eE}{m_e} = \frac{eU_2}{dm_e}$, а время движения электрона в конденсаторе $t = \frac{l}{v} = l \sqrt{\frac{m_e}{2eU_1}}$. Отсюда $U_2 = 2d^2U_1/l^2$.

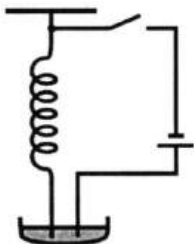
- О-125. Электрическое поле действует на свободные электроны в газе и на однозарядные ионы с одинаковой по модулю силой. Казалось бы, вследствие этого электроны и ионы должны одинаково часто приобретать кинетические энергии, достаточные для ударной ионизации молекул газа. Однако в действительности главную роль в этом процессе играют электроны. Почему?

Решение. Во-первых, электрону «легче» ионизировать при ударе молекулу газа (см. задачу 30.7). Кроме того, что еще важнее, ионы из-за больших размеров испытывают столкновения гораздо чаще, чем электроны. Значит, у ионов меньше длина свободного пробега. Поэтому лишь ничтожному количеству ионов «удается» разогнаться и приобрести в электрическом поле кинетическую энергию, достаточную для ионизации атома.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

31. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ВЕКТОР МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

- 31.1. Мягкая металлическая пружина висит, погрузившись нижним концом в ртуть на небольшую глубину (см. рисунок). Что произойдет после замыкания ключа?



Решение. Как только через пружину пойдет ток, соседние витки притянутся, в результате чего пружина сожмется. Если ток достаточно велик, нижний конец пружины выйдет из ртути и цепь разомкнется. Притяжение витков исчезнет, пружина расправится, замыкая цепь, и весь процесс повторится, т. е. в системе возникнут автоколебания. Если же нижний конец пружины при пропускании тока не выходит из ртути, то колебания не возникнут.

- 31.2. Горизонтальный проводник массой $m = 20$ г подвешен за концы на двух проводах. Средняя часть проводника длиной $l = 50$ см находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,10$ Тл; провода находятся вне области магнитного поля. По проводнику протекает ток $I = 2$ А. На какой угол α от вертикали отклоняются провода?

☒ На 27° .

Решение. На проводник действует в горизонтальном направлении сила Ампера $F_A = BIl \cdot \sin 90^\circ = BIl$. Равнодействующая этой силы и силы тяжести должна быть направлена параллельно проводам подвеса, откуда находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BIl}{mg}.$$

- 31.3. Электрон влетает со скоростью $\vec{v}$ в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Скорость электрона направлена перпендикулярно вектору $\vec{B}$. По какой траектории будет двигаться электрон?

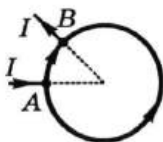
☒ По окружности радиусом $R = mv/(eB)$.

Решение. На электрон действует сила Лоренца $F_L = eBv$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$. Поскольку начальная скорость электрона также перпендикулярна $\vec{B}$, его траектория лежит в одной плоскости (перпендикулярной вектору $\vec{B}$). Работа силы Лоренца равна нулю, поэтому $v = \text{const}$; электрон движется с постоянным по модулю ускорением ($a = F_L/m = eBv/m$), которое перпендикулярно скорости. Перечисленным условиям удовлетворяет только одна траектория — окружность, радиус которой можно найти из соотношения $a = v^2/R$.

- 31.4. Как зависит период T обращения электрона по окружности (см. задачу 31.3) от скорости электрона?

Решение. Период обращения электрона по окружности не зависит от скорости: $T = 2\pi R/v = 2\pi m/(eB)$ (см. задачу 31.3).

- 31.5. К двум точкам проволочного кольца подведен ток (см. рисунок). Протекающие по кольцу токи создают магнитное поле. Куда направлен вектор магнитной индукции $\vec{B}$ этого поля в центре кольца?



☒ В центре кольца $B = 0$.

Решение. Отношение токов, текущих от A к B по двум соединенным параллельно дугам кольца, обратно отношению сопротивлений дуг, а значит, и их длин: $I_1/I_2 = l_2/l_1$, откуда $I_1 l_1 = I_2 l_2$. Согласно правилу буравчика токи I_1 и I_2 создают в центре кольца *противоположно* направленные магнитные поля. Чтобы сравнить эти поля по модулю, мысленно разобьем каждую из дуг кольца на одинаковые

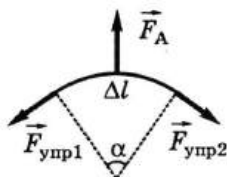
малые участки. Вклад каждого участка в магнитное поле пропорционален силе тока в этом участке; количество же участков в дуге пропорционально ее длине. Следовательно, поле каждого из токов пропорционально произведению Il , так что магнитные поля обоих токов равны по модулю и поэтому компенсируют друг друга.

- 31.6. По жесткому кольцу из медной проволоки течет ток силой $I = 5,0$ А. Кольцо находится в перпендикулярном к его плоскости магнитном поле с индукцией $B = 0,50$ Тл. Найдите растягивающее механическое напряжение σ в проволоке, если радиус кольца $R = 5,0$ см, а площадь сечения проволоки $S = 3,0$ мм². Магнитным взаимодействием между различными участками кольца можно пренебречь.

✓ $\sigma = 42$ кПа.

Решение. На малый элемент кольца (см. рисунок) действует сила Ампера $F_A = IB\Delta l = IBR\alpha$ и две равные по модулю силы упругости. Из условия равновесия следует, что $F_{\text{уп}} = \frac{F_A}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = IBR$ (мы воспользовались малостью угла α).

Тогда $\sigma = F_{\text{уп}}/S = IBR/S = 42$ (кПа).



- 31.7. Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью v под углом α к направлению поля. Магнитная индукция поля $\vec{B}$. По какой траектории будет двигаться электрон?

✓ По винтовой линии радиусом $R = \frac{mv \sin \alpha}{eB}$ с шагом

$$h = \frac{2\pi mv \cos \alpha}{eB}.$$

Решение. Поскольку сила Лоренца перпендикулярна векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$, при движении заряженной частицы остаются

неизменными модуль скорости и ее проекция на направление $\vec{B}$. Следовательно, угол α между $\vec{v}$ и $\vec{B}$ также остается неизменным. Составляющая скорости $\vec{v}_\perp$ (см. рис. а) поворачивается в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$, не изменяясь по модулю ($v_\perp = v \sin \alpha$). Таким образом, электрон одновременно участвует в двух движениях: равномерном перемещении вдоль $\vec{B}$ со скоростью $\vec{v}_\parallel$, равной по модулю $v \cos \alpha$, и движении по окружности в перпендикулярной $\vec{B}$ плоскости со скоростью $v_\perp$. На рис. б показана траектория движения (винтовая линия). Из соотношения $F_\perp = evB \sin \alpha = m v_\perp^2 / R$ находим радиус винтовой линии

$$R = \frac{m v \sin \alpha}{e B}. \text{ Один виток электрон совершает за время}$$

$$T = 2\pi R / v_\perp.$$

Следовательно, шаг винтовой линии (расстояние между соседними витками) $h = v_\parallel T = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{e B}$.

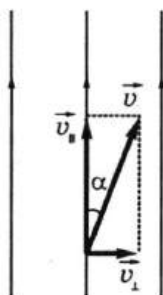


Рис. а

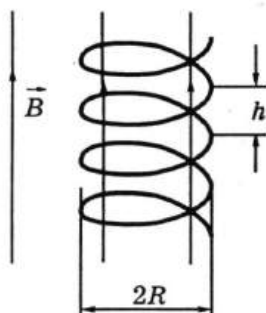


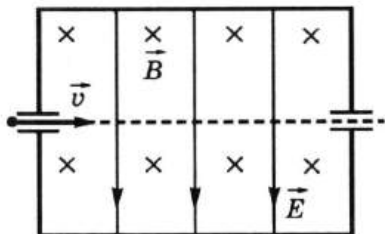
Рис. б

- 31.8. Опишите движение электрона в однородных параллельных электрическом и магнитном полях. Начальная скорость электрона v направлена под углом α к векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Решение. Разложим скорость электрона на составляющие $v_\parallel$ и $v_\perp$ (см. задачу 31.7). Электрическое поле изменяет только первую из них, а сила Лоренца зависит только от второй. Поэтому «поперечное» движение электрона не отличается от описанного в задаче 31.7. «Продольное» же движение будет происходить с постоянным ускорением

$a = eE/m$. Следовательно, расстояния между соседними витками «винтовой линии» не будут одинаковыми: они составят арифметическую прогрессию, разность которой $d = aT^2$, где $T = 2\pi m/(eB)$ (см. задачу 31.4). Если расстояния между соседними витками траектории при этом уменьшаются, $v_{\parallel}$ в некоторый момент обратится в нуль и затем изменит знак: электрон как бы отразится от некоторой плоскости, перпендикулярной $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

- 31.9. Объясните действие «фильтра скоростей», показанного на рисунке. Внутри прибора созданы однородные поля: магнитное с индукцией $\vec{B}$ и электрическое с напряженностью $\vec{E}$. Поля направлены перпендикулярно друг к другу и к начальной скорости частиц.

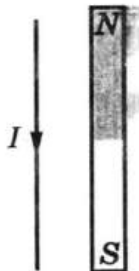


Решение. Сила Лоренца $\vec{F}_L$ и кулоновская сила $\vec{F}_K$ направлены в противоположные стороны. Если эти силы не уравновешивают друг друга, частица отклонится вверх или вниз и не попадет в выходное отверстие. Таким образом, условие прохождения частицы через прибор имеет вид $\vec{F}_K = -\vec{F}_L$, откуда $qBv = qE$. Следовательно, $v = E/B$.

Заметим, что это условие одинаково для всех заряженных частиц, независимо от их зарядов и масс.

- 31.10. Около сильного длинного полосового магнита расположен гибкий свободный провод (см. рисунок). Как расположится провод, если по нему пропустить ток?

Решение. На рис. а показаны направления вектора магнитной индукции $\vec{B}$ поля магнита вблизи разных участков провода. Согласно правилу левой руки сила Ампера на участке 1 направлена от нас (перпендикулярно



плоскости рисунка); на участке 2 — к нам; на участке 3 сила Ампера отсутствует. Поэтому провод обвивается вокруг магнита (см. рис. б) и притягивается к нему (см. рис. в).

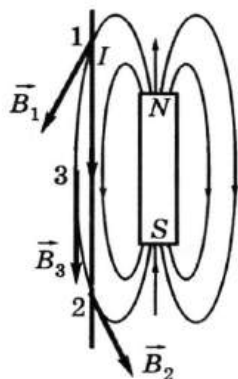


Рис. а



Рис. б

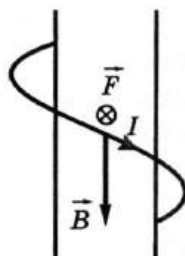
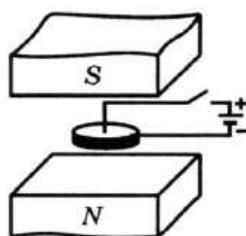


Рис. в

- 31.11. Кювета (широкий круглый стеклянный сосуд) с раствором медного купороса находится между полюсами сильного электромагнита (см. рисунок). В центре кюветы в раствор погружен медный электрод, соединенный с положительным полюсом источника тока, а по периметру погружено медное кольцо, соединенное с отрицательным полюсом. Что произойдет при замыкании цепи?



☒ Жидкость начнет вращаться по часовой стрелке.

Решение. В растворе потечет ток от центрального электрода к медному кольцу. На положительные и отрицательные ионы, движущиеся *навстречу друг другу*, со стороны магнитного поля будут действовать силы, направленные в *одну* сторону.

Олимпиадные задачи

- О-126.** Опишите движение свободно подвешенной прямоугольной проволочной рамки с током в магнитном поле. Рассмотрите два случая: движение в магнитном поле Земли и движение в поле стального магнита.

Решение. В однородном магнитном поле (см. рис. а) на параллельные стороны рамки действуют равные по модулю и противоположно направленные силы Ампера (на рис. б показан вид сверху). Пара сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ поворачивает рамку так, чтобы ее плоскость стала перпендикулярной вектору $\vec{B}$. В положении устойчивого равновесия направление тока в рамке связано с направлением вектора $\vec{B}$ правилом буравчика, а силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ стремятся растянуть рамку. Таким образом, однородное магнитное поле (например, поле Земли) оказывает на жесткую рамку только *ориентирующее* действие. В неоднородном же поле, например в поле магнита, силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ имеют отличную от нуля равнодействующую. В результате рамка будет не только поворачиваться, но и втягиваться в область более сильного поля (см. рис. в), т. е. притянется к полюсу магнита. Подобно рамке с током ведет себя и магнитная стрелка.

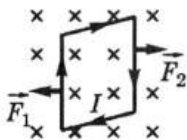


Рис. а

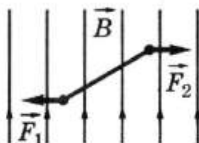


Рис. б

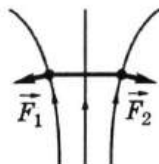
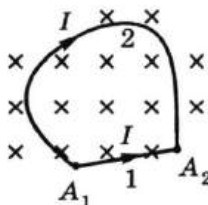


Рис. в

- О-127.** Проводники 1 и 2 лежат в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю (см. рисунок). По проводникам текут одинаковые токи. Докажите, что на проводники действуют одинаковые (по модулю и направлению) силы Ампера.



Решение. Направим ось x вдоль прямолинейного проводника 1 (см. рис. а). Действующая на этот проводник сила Ампера $\vec{F}_1$ направлена вдоль оси y и равна по модулю

$IB|A_1A_2|$, где B — модуль индукции магнитного поля. Для вычисления силы Ампера $\vec{F}_2$, действующей на второй проводник, мысленно разобьем его на малые участки и рассмотрим силу $\Delta\vec{F}$, действующую на один из этих участков длиной Δl (на рис. б направление вектора $\Delta\vec{l}$ совпадает с направлением тока). Модуль этой силы $\Delta F = IB\Delta l$, а ее проекции на оси координат

$$\Delta F_x = -\Delta F \Delta l_y / \Delta l = -IB\Delta l_y,$$

$$\Delta F_y = \Delta F \Delta l_x / \Delta l = IB\Delta l_x.$$

Тогда $F_x = \sum \Delta F_x = -IB \sum \Delta l_y = -IB(y_{A2} - y_{A1}) = 0$,

$F_y = \sum \Delta F_y = IB \sum \Delta l_x = IB(x_{A2} - x_{A1}) = IB|A_1A_2|$. Таким образом, $\vec{F}_2 = \vec{F}_1$, что и требовалось доказать.

Отсюда, в частности, следует, что для замкнутого проводника $F = 0$.

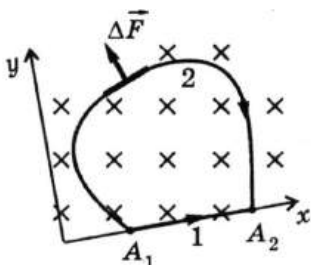


Рис. а

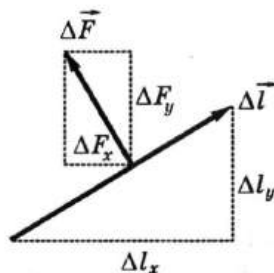
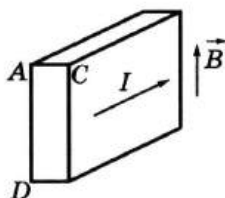


Рис. б

О-128. Металлическую полоску, по которой течет ток I , помещают в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ (см. рису-

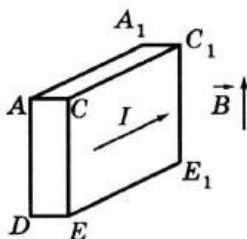
нок). При этом между точками A и C возникает разность потенциалов (эффект Холла). Объясните это явление. Найдите разность потенциалов U_{AC} , если $AC = a$, $AD = b$. Концентрация свободных электронов равна n .



✓ $U_{AC} = IB/(enb)$.

Решение. При упорядоченном движении электронов на них действует сила Лоренца, отклоняющая электроны в сторону поверхности CC_1E_1E (см. рисунок). В результате на этой поверхности накапливается отрицательный заряд, а на противоположной — положительный. Это приводит к появлению электрического поля, направленного от A к C . Процесс разделения зарядов продолжается до тех пор, пока сила, действующая на электрон со стороны возникшего электрического поля, не скомпенсирует действие силы Лоренца: $eE = evB$ (здесь v — скорость упорядоченного движения электронов).

Поскольку $U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C = Ea$ и $I = envS = envab$, получаем $U_{AC} = IB/(enb)$.



- О-129.** Сплошной металлический цилиндр, радиус которого равен $R = 20$ см, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10^3$ рад/с. Чему равна напряженность E электрического поля внутри цилиндра на расстоянии r от оси? Какова разность потенциалов U между поверхностью цилиндра и осью вращения? Какова должна быть индукция B магнит-

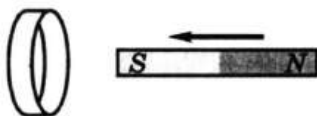
ного поля, направленного вдоль оси цилиндра, чтобы электрическое поле не возникло?

✓ $E = m\omega^2 r / e$; $U = 0,11$ мкВ; $B = 5,7 \cdot 10^{-9}$ Тл.

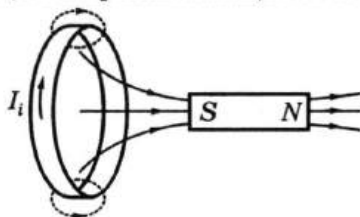
Решение. При вращении цилиндра свободные электроны отбрасываются к его поверхности. За счет этого внутри цилиндра возникает объемный положительный заряд, создающий в металле электрическое поле. Со стороны этого поля на электроны действует сила, направленная к оси цилиндра. Разделение зарядов прекращается, когда эта сила сообщает свободным электронам ускорение $a = \omega^2 r$, т. е. при $E = m\omega^2 r / e$. Значение E линейно возрастает от нуля до $E_{\max}$, поэтому $U = E_{\max} R / 2 = m\omega^2 R^2 / (2e) = 1,1 \cdot 10^{-7}$ (В). Необходимое значение индукции магнитного поля можно найти из уравнения $eBv = mv^2 / r$. Используя соотношение $v = \omega r$, получаем $B = m\omega / e = 5,7 \cdot 10^{-9}$ (Тл). Направление $\vec{B}$ должно быть согласовано с направлением вращения так, чтобы сила Лоренца, действующая на электроны, была направлена к оси вращения.

32. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

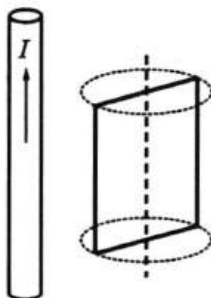
- 32.1. Найдите направление индукционного тока в металлическом кольце, к которому приближают магнит (см. рисунок).



Решение. Линии магнитной индукции поля магнита входят в его южный полюс (см. сплошные линии на рисунке). Согласно правилу Ленца магнитное поле индукционного тока I_i в кольце препятствует увеличению магнитного потока через кольцо, т. е. направлено противоположно магнитному полю магнита (на рисунке линии индукции этого магнитного поля показаны пунктирными стрелками). С помощью правила буравчика находим теперь направление индукционного тока: он идет по часовой стрелке, если смотреть на кольцо со стороны магнита. Взаимодействие индукционного тока и магнита приводит к отталкиванию между кольцом и приближающимся к нему магнитом.



- 32.2. Прямоугольная проволоочная рамка равномерно вращается вокруг неподвижной оси. Параллельно этой оси расположен провод, по которому течет ток I (см. рисунок). При каких положениях рамки в ней возникает наименьшая ЭДС индукции? Наибольшая?



- ☒ **Наименьшая (равная нулю)** — когда рамка находится в плоскости, проходящей через ось вращения и провод; **наибольшая** — когда плоскость рамки перпендикулярна указанной плоскости.

Решение. ЭДС индукции пропорциональна скорости изменения магнитного потока через рамку. Эта скорость равна нулю, когда рамка и провод лежат в одной плоскости: при этом боковые стороны рамки не пересекают линий магнитной индукции, а «скользят» вдоль них.

- 32.3. Свинцовое кольцо радиусом r расположено горизонтально между полюсами электромагнита, создающего вертикальное однородное магнитное поле с магнитной индукцией B . Охлаждая кольцо, его переводят в сверхпроводящее состояние. Какой магнитный поток Φ будет пронизывать плоскость кольца после выключения электромагнита?

☒ $\Phi = \pi r^2 B$.

Решение. Докажем, что магнитный поток, пронизывающий сверхпроводящий контур, не может измениться. Действительно, согласно закону Ома ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = IR$, откуда при $R = 0$ получаем $\mathcal{E}_i = 0$. С другой стороны, $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, и из условия $\mathcal{E}_i = 0$ следует $\Delta\Phi = 0$, т. е.

$\Phi = \text{const}$. До выключения внешнего магнитного поля плоскость кольца пронизывал магнитный поток $\Phi_0 = \pi r^2 B$. Следовательно, такой же поток будет пронизывать плоскость кольца и после выключения электромагнита. Однако теперь этот поток создается не внешним полем, а полем индуцированного в кольце незатухающего тока.

- 32.4. В замкнутую накоротко катушку вводят магнит: один раз быстро, а другой — медленно. Одинаковый ли заряд проходит по цепи в обоих случаях? Одинаковое ли количество теплоты выделяется?

☒ Заряд одинаковый; количество теплоты больше при быстром вдвигании магнита.

Решение. Обозначим сопротивление катушки R . Тогда индукционный ток $I = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. За время Δt по цепи прохо-

дит заряд $\Delta q = I\Delta t = -\Delta\Phi/R$. Весь прошедший по цепи заряд $q = -\Phi/R$, где Φ — конечное значение магнитного потока (начальное равно нулю). Итак, величина q не зависит от скорости процесса. Выделившееся в цепи количество теплоты Q равно работе сторонних сил: $Q = q\mathcal{E}_i$. Поскольку $\mathcal{E}_i$ пропорциональна скорости изменения магнитного потока, при быстром вдвигании магнита Q больше.

- 32.5. На замкнутый ферромагнитный сердечник намотана катушка. Как зависит ее индуктивность L от числа витков N ? Магнитную проницаемость сердечника можно считать неизменной.

☑ L пропорциональна N^2 .

Решение. Согласно определению индуктивности,

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{BS}{I}. \text{ Здесь } S \text{ — суммарная площадь всех витков,}$$

пропорциональная их числу N . Из принципа суперпозиции следует, что модуль магнитной индукции B тоже прямо пропорционален N (в замкнутом сердечнике магнитный поток практически не рассеивается). Следовательно, индуктивность L пропорциональна *квадрату* числа витков.

- 32.6. В каком случае обмотка электромотора сильнее нагревается проходящим по ней током — когда мотор вращается вхолостую или совершает работу? Напряжение в сети считайте постоянным.

Решение. Нагревание обмотки двигателя зависит только от силы тока. При вращении двигателя в его обмотке наводится ЭДС индукции, вызывающая согласно правилу Ленца *уменьшение* силы тока. Поскольку двигатель под нагрузкой вращается медленнее, ЭДС индукции в нем меньше, и поэтому сила тока больше. Значит, двигатель нагревается сильнее, когда он совершает работу.

- 32.7. Магнит падает в длинной вертикальной медной трубе, воздух из которой откачан. Магнит с трубой не соприкасается. Опишите характер падения.

Решение. В трубе при движении магнита возникают вихревые токи. Согласно правилу Ленца магнитное поле этих токов препятствует падению магнита. Тормозящая сила возрастает с увеличением скорости падения (в этом смысле движение магнита напоминает падение тела в жидкости или газе). Ускорение магнита постепенно уменьшается, и в конце концов (если труба достаточно длинная) движение магнита станет практически равномерным.

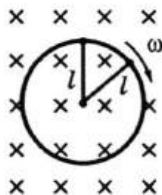
- 32.8. Плоская проволочная рамка может свободно вращаться вокруг оси, перпендикулярной магнитной индукции однородного магнитного поля. Каково положение устойчивого равновесия рамки, если магнитное поле возрастает? Если магнитное поле убывает?

Решение. Необходимым условием равновесия является обращение в нуль момента действующих на рамку сил. Это возможно при одном из двух положений рамки: когда плоскость рамки параллельна магнитному полю (положение 1) или перпендикулярна ему (положение 2). Рассмотрение индукционного тока в промежуточном положении рамки показывает, что при возрастании магнитного поля рамка поворачивается к положению 1, а при убывании — к положению 2. Следовательно, устойчивое равновесие при возрастании поля достигается в положении 1, а при убывании — в положении 2.

- 32.9. На цилиндрический железный сердечник радиусом r надето изолированное металлическое кольцо такого же радиуса, имеющее электрическое сопротивление R . В сердечнике создается однородное магнитное поле, индукция которого изменяется по закону $B = aB_0 t$. Как изменяется со временем сила тока i в кольце и разность потенциалов между диаметрально противоположными точками кольца?

Решение. В кольце индуцируется *постоянная* ЭДС, равная $\pi r^2 a B_0$ и вызывающая *постоянный* ток $i = \pi r^2 a B_0 / R$. Плотность заряда всюду в кольце равна нулю (это следует из соображений симметрии), поэтому кулоновское поле отсутствует и разность потенциалов между любыми точками кольца равна нулю (вихревое электрическое поле, поддерживающее ток в кольце, непотенциально).

- 32.10. Металлическое кольцо радиусом l находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости кольца. Две металлические стрелки сопротивлением R каждая имеют контакт между собой и с кольцом (см. рисунок). Одна стрелка неподвижна, а другая равномерно вращается с угловой скоростью ω . Найдите силу тока I , текущего через стрелки. Сопротивлением кольца можно пренебречь.



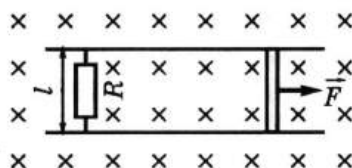
✓ $I = \frac{\omega B l^2}{4R}.$

Решение. ЭДС индукции можно найти, применив закон электромагнитной индукции к *любому* из двух секторов, на которые стрелки делят круг:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B \frac{\Delta(\alpha l^2/2)}{\Delta t} = -\frac{B\omega l^2}{2}.$$

Здесь α — угол между стрелками, $\omega = \Delta\alpha/\Delta t$. Согласно закону Ома $I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{2R} = \frac{\omega Bl^2}{4R}$.

- 32.11.** Металлический стержень может скользить без трения по параллельным горизонтальным рельсам, находящимся на расстоянии l друг от друга. Рельсы соединены перемычкой, имеющей сопротивление R (см. рисунок). Система находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Как будет двигаться стержень, если к нему приложить постоянную силу $\vec{F}$? Электрическим сопротивлением стержня и рельсов можно пренебречь. Явление самоиндукции не учитывайте.



Решение. При движении стержня в нем индуцируется ЭДС $\mathcal{E}_i = Bvl$ и возникает индукционный ток $I = \mathcal{E}_i/R$. На стержень действует сила Ампера $F_A = Bil = B^2 l^2 v/R$, направленная противоположно скорости (эта сила напоминает силу сопротивления среды). Поэтому характер движения стержня не отличается от рассмотренного в задаче 32.7. Установившуюся скорость движения $v = \frac{FR}{B^2 l^2}$

можно найти из условия $F_A = F$.

- 32.12.** Два одинаковых сверхпроводящих кольца могут свободно перемещаться вдоль одной прямой, причем плоскости колец остаются перпендикулярными этой прямой (см. рисунок). В начальный момент расстояние между кольцами намного превышает их размеры; по кольцам текут в одном направлении одинаковые токи I_0 . Какие токи I уста-

новятся в кольцах после того, как они сблизятся вплотную? Как при этом изменится энергия магнитного поля?



✓ $I = I_0/2$; энергия поля уменьшится вдвое.

Решение. После сближения колец их поля дают одинаковый вклад в общий магнитный поток. Поскольку магнитный поток через каждое из колец остается неизменным (см. задачу 32.3), $LI_0 = 2LI$, где L — индуктивность кольца. Отсюда $I = I_0/2$. Сблизившиеся кольца, по которым текут токи $I_0/2$, создают такое же магнитное поле, как одно кольцо с током I_0 . Следовательно, энергия магнитного поля составляет теперь половину начальной энергии поля. Другая половина начальной энергии перешла в кинетическую энергию колец и в энергию электромагнитного излучения, возникающего при ускоренном движении притягивающихся колец.

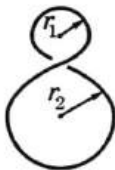
- 32.13. Электродвигатель включен в сеть постоянного тока с напряжением $U = 120$ В. Сопротивление обмотки двигателя $R = 12$ Ом. Какую максимальную мощность $N_{\max}$ может развить этот двигатель? При какой силе тока I_0 достигается эта мощность? Напряжение в сети считайте постоянным.

✓ $N_{\max} = 300$ Вт; $I_0 = 5$ А.

Решение. Потребляемая от сети постоянного тока мощность равна UI , а выделяющаяся в обмотке тепловая мощность равна I^2R (эти величины не равны друг другу, поскольку $U \neq IR$ из-за возникновения ЭДС индукции в обмотке двигателя). Согласно закону сохранения энергии мощность $N = UI - I^2R = IR(U/R - I)$. Она зависит от скорости вращения двигателя: при замедлении вращения сила тока увеличивается, потому что ЭДС индукции уменьшается (см. задачу 32.6). Анализ формулы для мощности N как функции силы тока I показывает (см. математическое приложение): максимальную мощность $N_{\max} = U^2/(4R) = 300$ (Вт) двигатель развивает при $I = I_0 = U/(2R) = 5$ (А).

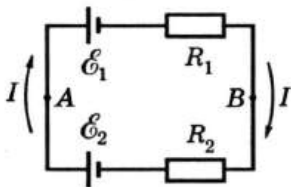
Олимпиадные задачи

- О-130.** Виток изолированного провода изогнут в виде восьмерки (см. рисунок), так что $r_1 = 20$ мм и $r_2 = 60$ мм. В течение промежутка времени $\Delta t = 0,50$ мс однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости витка, равномерно возрастает от нуля до $B = 5$ Тл. На какое напряжение U должна быть рассчитана изоляция между проводами, чтобы не произошел ее пробой?



☑ $U > 38$ В.

Решение. Обозначим сопротивления верхнего и нижнего колец «восьмерки» соответственно R_1 и R_2 , а индуцируемые в них ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Эти ЭДС действуют в цепи навстречу друг другу. Пробой возможен между точками А и В на перемычке «восьмерки» (см. эквивалентную схему цепи на рисунке).



Согласно закону Ома

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2}, \quad U_{AB} = \mathcal{E}_2 - IR_2 = \frac{\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

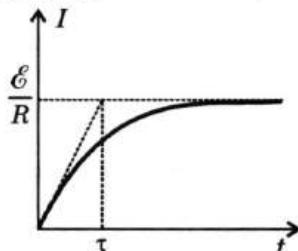
Используя закон электромагнитной индукции и учитывая, что $R_2/R_1 = r_2/r_1$, получаем $U_{AB} = \pi B r_1 r_2 / \Delta t = 38$ (В).

- О-131.** Катушка имеет индуктивность L и электрическое сопротивление R . В момент $t = 0$ катушку подключают к аккумулятору. Как выглядит график зависимости силы тока I в катушке от времени? Оцените характерное время τ возрастания тока в катушке. ЭДС аккумулятора равна $\mathcal{E}$, его внутренним сопротивлением можно пренебречь.

Решение. Согласно закону Ома для всей цепи $IR = \mathcal{E} - L \frac{\Delta I}{\Delta t}$.

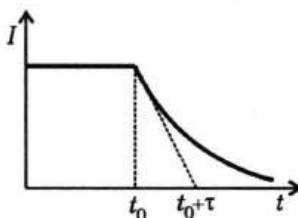
Отсюда для скорости изменения силы тока получаем $\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\mathcal{E}}{L} - I \frac{R}{L}$. Сразу после подключения $I = 0$, поэтому

ток начнет возрастать со скоростью $\frac{\Delta I}{\Delta t} \approx \frac{\mathcal{E}}{L}$. При увеличении тока скорость его возрастания уменьшается и стремится к нулю при $I \rightarrow \mathcal{E}/R$ (см. рисунок). Время τ можно оценить, разделив конечное значение тока $\mathcal{E}/R$ на начальную скорость его роста $\mathcal{E}/L$, что дает $\tau \sim L/R$. Отметим, что τ не зависит от $\mathcal{E}$.



- О-132.** Через катушку (см. задачу О-131) течет постоянный ток. В момент t_0 источник тока отключают и катушку замыкают накоротко (см. рисунок). Как выглядит график зависимости силы тока от времени? Каково характерное время τ убывания тока в цепи?

☒ См. рисунок; $\tau \sim L/R$.



Решение. График зависимости $I(t)$ показан на рисунке (ср. с задачей О-131). Оценить время τ можно, например, методом размерностей: τ может зависеть от L , R и, возможно, от силы тока I_0 в момент t_0 . Единицы измерения этих величин: $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Ом} \cdot \text{с}$, 1 Ом и 1 А . Величину, имеющую размерность времени, можно получить только одним способом — разделив L на R . Значит, $\tau \sim L/R$. Как видим, τ не зависит от I_0 . Можно получить этот результат и иначе: за время τ должно выделяться количество теплоты $Q \sim I_0^2 R \tau$, сравнимое с начальной энергией магнитного поля тока $W = LI_0^2 / 2$. Отсюда также получаем $\tau \sim L/R$.

О-133. Магнитное поле имеет вертикальную ось симметрии (ось z).

Проекция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ на эту ось $B_z = B_0(1 + z/h_0)$. С большой высоты падает медное кольцо диаметром d , имеющее электрическое сопротивление R ; плоскость кольца все время горизонтальна, а его центр движется вдоль оси z . Найдите установившуюся скорость падения v , если масса кольца равна m . Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

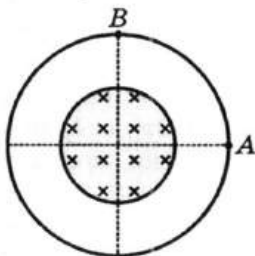
$$\boxed{\checkmark} \quad v = mgR \left(\frac{4h_0}{\pi d^2 B_0} \right)^2.$$

Решение. При установившейся скорости падения потенциальная энергия кольца переходит только во внутреннюю (кольцо нагревается индукционным током). Следовательно, $mgv\Delta t = I^2 R \Delta t$, где I — сила тока, индуцированного в кольце:

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\pi d^2}{4R} \cdot \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = \frac{\pi d^2}{4R} \cdot \frac{\Delta B_z}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\pi d^2 v B_0}{4R h_0}.$$

$$\text{Отсюда } v = mgR \left(\frac{4h_0}{\pi d^2 B_0} \right)^2.$$

О-134. Индукция однородного магнитного поля в цилиндрическом сердечнике радиусом r (см. рисунок) возрастает со временем по закону $B = kt$. Проволочное кольцо радиусом $2r$ имеет общую с сердечником ось. Какова разность потенциалов между точками A и B ? Какое напряжение покажет вольтметр, подключенный к точкам A и B ? Сопротивление вольтметра велико по сравнению с сопротивлением кольца.



Решение. Разность потенциалов между любыми двумя точками кольца равна нулю (см. задачу 32.9). Однако это

не значит, что вольтметр покажет нуль: хотя бы ничтожная часть текущего по кольцу тока ответвится и пойдет через вольтметр, вызывая отклонение его стрелки от нулевого деления (направления токов показаны на рис. а).

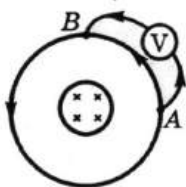


Рис. а

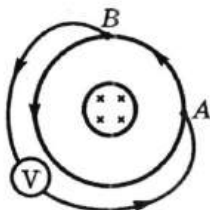


Рис. б

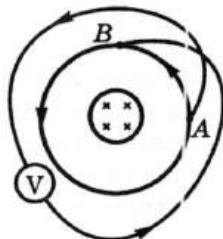


Рис. в

Из-за большого сопротивления вольтметра его подключение практически не изменяет силы тока в кольце и не приводит к возникновению кулоновского поля. Так как ЭДС индукции равномерно распределена вдоль кольца, на участке AB , представляющем собой четверть кольца, $\mathcal{E}_{AB} = \frac{\pi r^2}{4} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\pi k r^2}{4}$. Поскольку магнитный поток через выделенный на рис. а контур равен нулю*, полная ЭДС в этом контуре также равна нулю, т. е. $|\mathcal{E}_{AVB}| = |\mathcal{E}_{AB}|$. Вольтметр показывает $U_V = I_V R_V = \mathcal{E}_{AB} = \pi k r^2 / 4$. Однако этот ответ не является исчерпывающим: в рассматриваемой ситуации показание вольтметра зависит не только от точек его подключения, но и от расположения подключенных к нему проводов. Так, в показанной на рис. б ситуации вольтметр покажет $U_V = 3\pi k r^2 / 4$. А поскольку провода, подключенные к вольтметру, могут образовывать один или несколько витков вокруг сердечника (см. рис. в), окончательный ответ имеет вид:

$$U_V = \frac{2N+1}{4} \pi k r^2, \text{ где } N = 0, 1, 2, \dots$$

О-135. При решении задачи О-135 было показано, что разность потенциалов между точками А и В равна нулю. Возникнет ли разность потенциалов между этими точками, если соединить их проводником?

* Имеется в виду внешнее магнитное поле. Магнитное поле индукционного тока в данном случае постоянно, так что явления самоиндукции не наблюдаются.

Решение. Ответ на поставленный вопрос зависит от расположения проводника, подключенного к точкам A и B . Рассмотрим два примера. 1. Если проводник *всюду* перпендикулярен линиям вихревого электрического поля (см. рис. *а*), ток в нем не возникает и по-прежнему $\varphi_A = \varphi_B$. 2. Если проводник практически совпадает с четвертью кольца AB (см. рис. *б*), через него тоже пойдет ток, и в результате между точками A и B возникнет разность потенциалов (дополнительный проводник уменьшает сопротивление четверти кольца). Потенциал точки B станет выше, чем потенциал точки A .

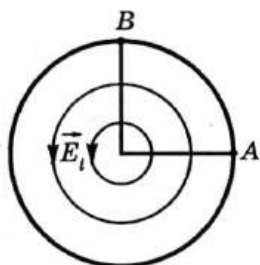


Рис. а

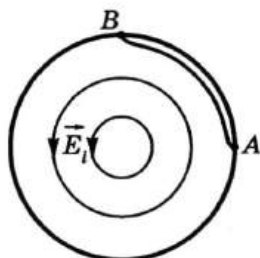


Рис. б

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

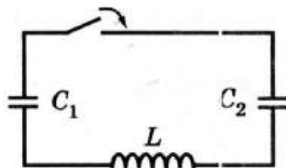
33. СВОБОДНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

- 33.1. Можно ли измерять чувствительным электрометром напряжение в цепи переменного тока?

☒ Можно.

Решение. В случае переменного тока в течение обоих полупериодов силы взаимодействия между листочками электроскопа и корпусом будут направлены в одну сторону, а потому среднее за период значение силы будет отлично от нуля и листочки разойдутся.

- 33.2. Конденсатор емкостью C_1 заряжен до напряжения U_1 , а конденсатор емкостью C_2 не заряжен (см. рисунок). Каким будет максимальное значение I_m силы тока в катушке индуктивностью L после замыкания ключа? Конденсаторы и катушку считайте идеальными.

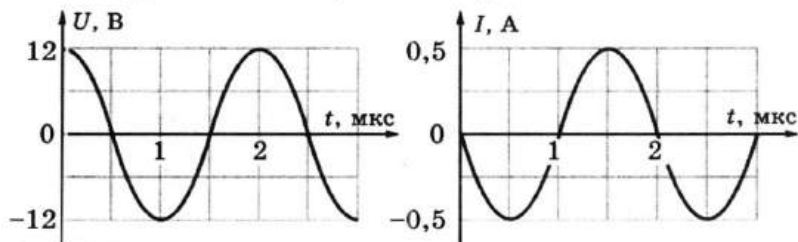


☒
$$I_m = U_1 \sqrt{\frac{C_1 C_2}{L(C_1 + C_2)}}$$

Решение. После замыкания ключа в цепи возникают свободные электромагнитные колебания. Сила тока максимальна при прохождении системой «положения равновесия», т. е. когда на конденсаторах одинаковое напряжение U . Согласно закону сохранения заряда $(C_1 + C_2)U = C_1 U_1$, а согласно закону сохранения энергии $\frac{(C_1 + C_2)U^2}{2} + \frac{LI_m^2}{2} = \frac{C_1 U_1^2}{2}$. Отсюда $I_m = U_1 \sqrt{\frac{C_1 C_2}{L(C_1 + C_2)}}$

- 33.3. На рисунках приведены графики изменений напряжения на конденсаторе колебательного контура и силы тока

в катушке этого контура. Найдите емкость конденсатора и индуктивность катушки контура.



✓ 13000 пФ; 7,6 мкГн.

Решение. Из приведенных в условии графиков видно, что период колебаний $T = 2$ мкс, амплитудные значения напряжения и силы тока $U_m = 12$ В, $I_m = 0,5$ А. Согласно закону сохранения энергии $CU_m^2/2 = LI_m^2/2$. Используя

также формулу Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, получим окончательно:

$$\text{но: } C = \frac{T \cdot I_m}{2\pi U_m}, L = \frac{T \cdot U_m}{2\pi I_m}.$$

33.4. Найдите действующее значение I переменного тока (см. рис. а, б, в).

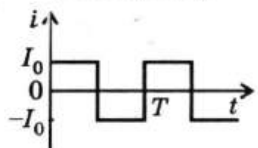


Рис. а

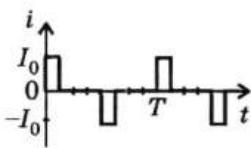


Рис. б

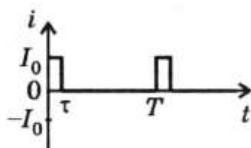


Рис. в

Решение. Величина I представляет собой значение силы постоянного тока, при прохождении которого в проводнике выделяется такое же количество теплоты, как и при прохождении данного переменного тока за это же время (т. е. $I^2 = \overline{i^2}$).

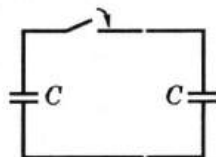
а) Квадрат силы тока в любой момент равен I_0^2 . Поэтому $I = I_0$.

б) $I^2 T = I_0^2 \cdot \frac{T}{8} + (-I_0)^2 \cdot \frac{T}{8}$, откуда $I = I_0/2$.

в) $I^2 T = I_0^2 \tau$, откуда $I = I_0 \sqrt{\frac{\tau}{T}}$.

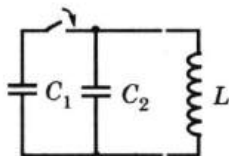
Олимпиадные задачи

- О-136.** Один из двух одинаковых конденсаторов (см. рисунок) заряжен до напряжения U_0 , а другой — не заряжен. Какое напряжение U установится на конденсаторах после замыкания ключа? Как согласуется этот результат с законом сохранения энергии? Рассмотрите, в частности, случай, когда соединительные провода являются сверхпроводящими.



Решение. Из закона сохранения заряда следует, что $CU_0 = 2CU$, откуда $U = U_0/2$. Энергия каждого из конденсаторов будет вчетверо меньше начальной энергии $W_0 = CU_0^2/2$, а энергия всей системы — вдвое меньше W_0 . Рассмотрим, как согласуется это с законом сохранения энергии. Обозначим сопротивление проводов R . Тогда увеличение их внутренней энергии $Q \sim I_0^2 R \tau$, где $I_0 = U_0/R$ — начальная сила тока в цепи, $\tau \sim RC$ — время перераспределения зарядов (см. задачу О-122). Отсюда $Q \sim CU_0^2$, т. е. заметная часть W_0 превращается во внутреннюю энергию. Поскольку полученный вывод не зависит от R , формально он применим и при $R \rightarrow 0$. Однако сверхпроводящие провода вообще не нагреваются при прохождении тока! В этом случае на первый план выступает другой путь «исчезновения» энергии. Всякая замкнутая цепь обладает индуктивностью, поэтому данная цепь представляет собой колебательный контур. После замыкания ключа возникают электромагнитные колебания, затухающие вследствие излучения электромагнитных волн. Эти-то волны и унесут «исчезнувшую» энергию.

- О-137.** В цепи (см. рисунок) $C_1 = C_2 = C$. До замыкания ключа напряжение на первом конденсаторе равно U_1 , а второй конденсатор не заряжен. Найдите максимальное значение I_m силы тока через катушку с индуктивностью L после замыкания ключа. Сопротивлением катушки можно пренебречь.



☑ $I_m = U_1 \sqrt{\frac{C}{2L}}.$

Решение. Сразу же после замыкания ключа (еще до возникновения тока в катушке) происходит перераспределение заряда между конденсаторами. В результате энергия системы уменьшается вдвое (см. задачу О-137). В дальнейшем потерь энергии нет, поэтому $\frac{LI_{\text{м}}^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CU_1^2}{2}$, отку-

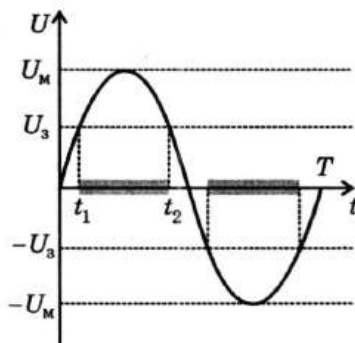
$$\text{да } I_{\text{м}} = U_1 \sqrt{\frac{C}{2L}}.$$

О-138. Неоновая лампа с напряжением зажигания $U_{\text{з}} = 156$ В включена в сеть 220 В, 50 Гц. Найдите частоту n вспышек лампы. В течение какой части периода лампа горит? Напряжение гашения лампы считайте равным напряжению зажигания.

✓ $n = 100 \text{ с}^{-1}$; лампа горит $2/3$ периода.

Решение. Выберем начало отсчета времени так, чтобы напряжение в сети изменялось по закону $u = U_{\text{м}} \sin \omega t$, где $U_{\text{м}} = \sqrt{2} \cdot 220 \text{ (В)} = 311 \text{ (В)}$. Неоновая лампа горит, когда $|u| > U_{\text{з}}$ (на рисунке соответствующие промежутки времени выделены). За период происходят две вспышки, поэтому $n = 100 \text{ с}^{-1}$. Продолжительность каждой вспышки равна $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{2} - \frac{T}{\pi} \arcsin \frac{U_{\text{з}}}{U_{\text{м}}}$, т. е. лампа горит в те-

чение доли периода $\frac{2\Delta t}{T} = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{U_{\text{з}}}{U_{\text{м}}} = 0,67$.



34. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

- 34.1. Емкость конденсатора колебательного контура радиоприемника можно изменять от C_1 до $C_2 > C_1$. Какой комплект сменных катушек следует взять, чтобы диапазон длин волн, на которые можно настраивать приемник, был как можно более широким и не содержал «просветов»? Какова верхняя граница $\lambda_{\max}$ этого диапазона, если его нижняя граница $\lambda_{\min}$, а комплект состоит из N катушек?

☒ Индуктивность катушек $L_k = \frac{1}{C_1} \left(\frac{\lambda_{\min}}{2\pi c} \right)^2 \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^{k-1}$, где

$$k = 1, 2, \dots, N; \lambda_{\max} = \lambda_{\min} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^{\frac{N}{2}}.$$

Решение. Из соотношения $\lambda_{\min} = 2\pi c \sqrt{L_1 C_1}$ находим индуктивность первой катушки: $L_1 = \frac{\lambda_{\min}^2}{4\pi^2 c^2 C_1}$. Чтобы в диапазоне не было «просветов», индуктивности катушек должны удовлетворять условию $2\pi c \sqrt{L_k C_2} = 2\pi c \sqrt{L_{k+1} C_1}$, откуда $L_{k+1} = L_k C_2 / C_1$, т. е. последовательность L_k составляет геометрическую прогрессию. Следовательно, наибольшая из индуктивностей катушек $L_N = L_1 (C_2 / C_1)^{N-1}$, так что $\lambda_{\max} = 2\pi c \sqrt{L_N C_2} = \lambda_{\min} (C_2 / C_1)^{N/2}$.

- 34.2. Антенна корабельного радиолокатора находится на высоте $h = 25$ м над уровнем моря. На каком максимальном расстоянии $s_{\max}$ радиолокатор может обнаружить спасательный плот? С какой частотой n могут при этом испускаться импульсы?

☒ $s_{\max} = 18$ км, $n < 8300$ с⁻¹.

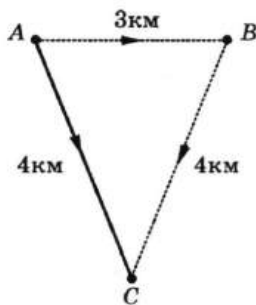
Решение. Радиолокаторы работают в УКВ-диапазоне, поэтому их излучение распространяется практически прямолинейно, в пределах прямой видимости. На рисунке точка A — радиолокатор, $AB = s_{\max}$, $OB = R$ — радиус Земли. Применяя к прямоугольному треугольнику ABO теорему Пифагора, находим $s_{\max} = \sqrt{h(2R + h)} \approx \sqrt{2Rh} = 18$ км. Отраженный радиоимпульс должен вернуться до того, как начнется излучение следующего импульса, т. е.

$$\frac{2s_{\max}}{c} \leq \frac{1}{n}. \text{ Отсюда } n \leq \frac{c}{2s_{\max}} = 8300 \text{ с}^{-1}.$$

- 34.3. Почему увеличение дальности радиосвязи с космическими кораблями в три раза требует увеличения мощности передатчика в 9 раз? Во сколько раз следует увеличить мощность передатчика для увеличения дальности радиолокации в три раза? Поглощение энергии при распространении радиоволн не учитывайте.

Решение. Плотность потока энергии I пропорциональна P/R^2 , где P — излучаемая мощность, а R — расстояние от передатчика. Поскольку величина I , обеспечивающая прием, зависит только от чувствительности приемника, необходимая для данного приемника мощность передатчика пропорциональна R^2 . При радиолокации цель, отражая пришедший к ней радиосигнал, сама становится вторичным источником радиоволн, мощность которого P' пропорциональна интенсивности дошедшего до цели сигнала, т. е. величине P/R^2 . Интенсивность же вернувшегося к радиолокатору отраженного сигнала пропорциональна P'/R^2 , т. е. P/R^4 . Следовательно, необходимая для радиолокации мощность P пропорциональна R^4 . Таким образом, для увеличения дальности радиолокации в три раза потребуется увеличить мощность передатчика в $3^4 = 81$ раз.

- 34.4. Антенна телевизора (точка C на рисунке) принимает, наряду с волной от телецентра (точка A), волну, отраженную от железной крыши (точка B). В результате изображение на экране двоится. На сколько сдвинуты получаемые изображения друг относительно друга? Ширина экрана телевизора $l = 50$ см; кадры на экране сменяются с частотой $n = 25$ с⁻¹, изображение состоит из $N = 625$ строк.



☑ На 7,8 см.

Решение. Сигнал, отразившийся от железной крыши, проходит «лишних» 3 км, поэтому запаздывает на $\Delta t = 10^{-5}$ с. В результате порожденный этим сигналом второй контур изображения смещен относительно первого на $\Delta l = v\Delta t$, где v — скорость перемещения электронного луча по строке. Поскольку за одну n -ную долю секунды луч пробегает N строк длиной l , его скорость $v = nNl$. Таким образом, $\Delta l = nNl\Delta t = 7,8$ см.

35. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

- 35.1. Известно, что световые волны, как и всякие другие, несут энергию. Что же происходит с энергией на тех участках, где при наложении когерентные волны взаимно гасятся? Нет ли при этом перехода энергии видимого излучения в другие формы энергии?

Решение. Если в некоторой области волны гасят друг друга, то в «соседней» области они усиливают друг друга, в результате чего *амплитуда* результирующей волны в этой области удваивается. Плотность энергии волны, пропорциональная *квадрату* амплитуды, возрастает при этом в *четыре* раза (а не в два, как это кажется на первый взгляд). «Лишняя» энергия как раз и поступает из области взаимного погашения волн. Таким образом, энергия волн при интерференции *перераспределяется* в пространстве. Заметим, что интерференция не приводит к переходу энергии волн во внутреннюю энергию (интерференция происходит и в вакууме).

- 35.2. Цвета тонких пленок (например, пленки бензина на воде) часто называют «радужными». Но действительно ли эти цвета являются такими же чистыми спектральными цветами, как цвета радуги?

Решение. Как известно, белый свет представляет собой «смесь» монохроматических световых волн с *определенным* соотношением интенсивностей. Вследствие интерференции световых волн, отраженных от двух поверхностей тонкой пленки, одни монохроматические волны усиливаются, а другие ослабляются. Именно по этой причине отраженный свет и приобретает окраску. Однако отраженный свет остается все же «смесью» различных монохроматических волн, т. е. видимые цвета тонких пленок не являются спектрально чистыми.

- 35.3. Почему интерференционная окраска наблюдается только у достаточно тонких пленок?

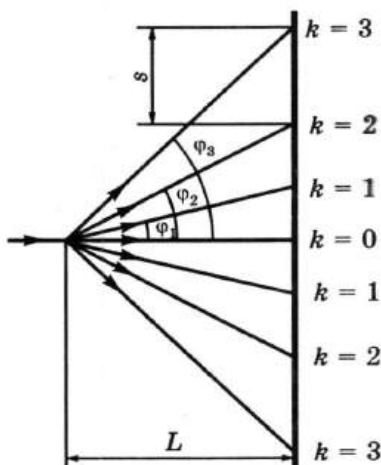
Решение. Можно указать две главные причины. Во-первых, если толщина пленки существенно превышает длину гармонического цуга падающего света (для солнечного света это величина порядка 1 мкм), отраженные от двух поверхностей пленки световые волны не являются

когерентными и поэтому интерференционная картина не наблюдается. Во-вторых, при большой толщине пленки густота интерференционных максимумов и минимумов так велика, что мы перестаем их различать. При этом происходит также наложение интерференционных максимумов световых волн различной длины.

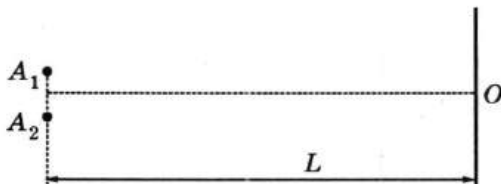
- 35.4. На дифракционную решетку с периодом $d = 14$ мкм падает нормально монохроматическая световая волна. При этом расстояние s на экране между максимумами второго и третьего порядка равно 8,7 см. Какова длина волны λ падающего света, если расстояние от решетки до экрана $L = 2,0$ м?

✓ 0,61 мкм.

Решение. Расстояние между максимумами $s = L \operatorname{tg} \varphi_3 - L \operatorname{tg} \varphi_2$ (см. рисунок); поскольку $s \ll L$, можно заменить тангенсы малых углов φ_2, φ_3 их синусами. Используя формулу дифракционной решетки $d \sin \varphi = k \lambda$, получаем $\lambda = s d / L = 6,1 \cdot 10^{-7}$ (м).

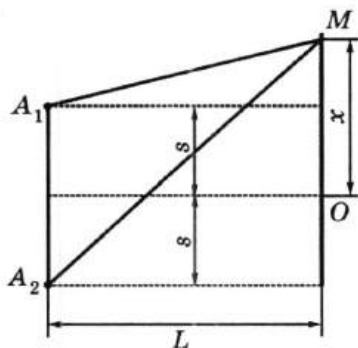


- 35.5. Два когерентных источника монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм находятся на расстоянии $A_1 A_2 = 1$ мм друг от друга и на одинаковом расстоянии $L = 3$ м от экрана (см. схематический рисунок). Каково расстояние x между ближайшими максимумами освещенности (середины светлых полос) на экране? Будет ли наблюдаться максимум освещенности в точке O , равноудаленной от обоих источников?



✓ $x = 1,8$ мм; не обязательно.

Решение. Когерентность источников не исключает возможности *постоянного* сдвига фаз между испускаемыми ими волнами. Поэтому в равноудаленной от источников точке O не обязательно будет максимум освещенности: например, в случае противофазных источников в точке O будет *минимум* освещенности. Для нахождения x предположим, что сдвиг фаз между источниками отсутствует (в противном случае произойдет *одинаковое* смещение темных и светлых полос без изменения их ширины). Тогда в точке O будет максимум освещенности, поскольку разность хода волн равна нулю, а в точке M следующего максимума (см. рисунок) разность хода волн равна длине волны λ . Это условие приводит к уравнению $\sqrt{L^2 + (x+s)^2} - \sqrt{L^2 + (x-s)^2} = \lambda$, где $s = A_1 A_2 / 2$.

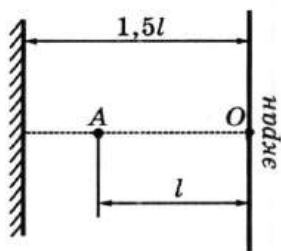


Воспользовавшись малостью x и s по сравнению с L , можно упростить последнее уравнение. Домножив и разделив его левую часть на «сопряженное» выражение $\sqrt{L^2 + (x+s)^2} + \sqrt{L^2 + (x-s)^2}$, приближенно равное $2L$, находим $x = \frac{\lambda L}{2s} = \frac{\lambda L}{A_1 A_2} = 1,8$ (мм). Для упрощения уравне-

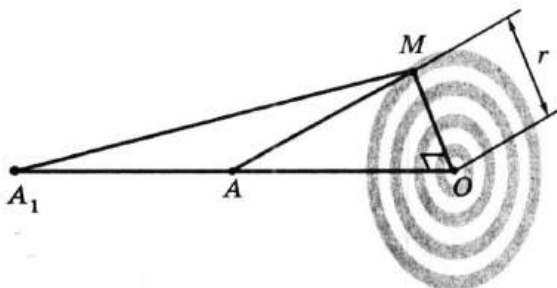
ния можно также использовать применимую при $x \ll 1$ формулу $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$.

- 35.6. Точечный источник A монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм расположен на расстоянии $l = 50$ см от экрана, а на расстоянии $1,5 l$ от экрана находится параллельное экрану плоское зеркало (см. рисунок после текста задачи). Какой вид имеет интерференционная картина

на экране? Темная или светлая интерференционная полоса проходит на расстоянии $R = 2$ мм от точки O (см. рисунок)?



Решение. Интерференционную картину на экране можно рассматривать как результат сложения световых волн от источника A и его изображения A_1 в зеркале (см. рисунок; $A_1O = 2l$).



Следует учесть, что из-за «потери» полуволны при отражении света от зеркала источники A и A_1 — противофазные. Интерференционная картина должна быть симметричной относительно прямой AA_1 , поэтому на экране будут чередующиеся темные и светлые кольца с центром в точке O . Для произвольной точки M экрана оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2} + A_1M - AM = \frac{\lambda}{2} + \sqrt{4l^2 + r^2} - \sqrt{l^2 + r^2} = l + \frac{\lambda}{2} - \frac{r^2}{4l}$$

(мы воспользовались малостью r по сравнению с l). Расчет показывает, что при $r = R$ разность хода Δd составляет нечетное число полуволн. Следовательно, на расстоянии R от точки O находится середина темной полосы. Фактически этот результат получен в предположении, что приведенное значение l является *точным*.

35.7. Свет, имеющий длину волны λ , падает наклонно на дифракционную решетку с периодом d . Угол падения равен α . Какой вид имеет в этом случае формула дифракционной решетки?

✓ $d(\sin \varphi - \sin \alpha) = k\lambda$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Решение. Разность хода между волнами, идущими от краев соседних щелей (см. рис. а), составляет $\Delta d = AD - BC = d(\sin \varphi - \sin \alpha)$. Дифракционный максимум наблюдается при $\Delta d = k\lambda$, т. е. $d(\sin \varphi - \sin \alpha) = k\lambda$. Здесь k — любое целое число; $k = 0$ соответствует случаю $\varphi = \alpha$ (при падении белого света именно в этом направлении наблюдается белый центральный максимум). Значения $k > 0$ и $k < 0$ соответствуют дифракционным максимумам по разные стороны от центрального (см. рис. б).

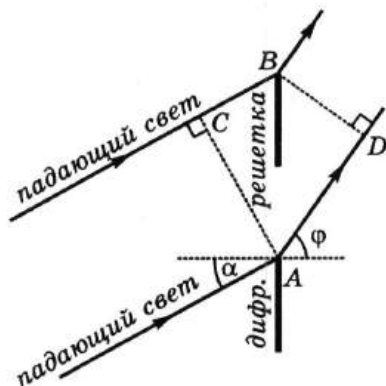


Рис. а

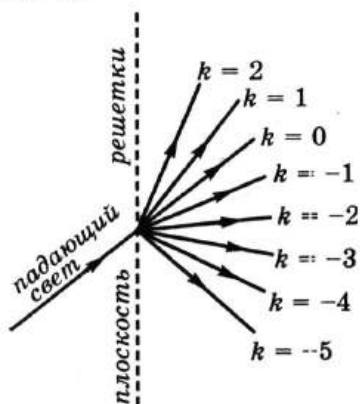
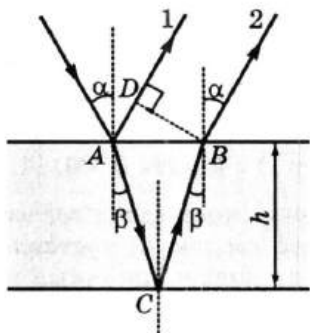


Рис. б

Олимпиадные задачи

О-139. Лучи белого света падают наклонно на тонкую прозрачную пластинку. При этом максимум отражения наблюдается в зеленой части спектра. В сторону какого конца спектра сместится максимум отражения при небольшом уменьшении угла падения лучей? При увеличении угла?

Решение. Максимум отражения наблюдается, когда световые волны, отраженные от обеих поверхностей пластинки (см. рисунок), усиливают друг друга.



Для этого оптическая разность хода Δd пучков 1 и 2 должна быть равна целому числу k длин волн: $\Delta d = \lambda/2 + n(AC + BC) - AD = k\lambda$. Слагаемое $\lambda/2$ учитывает, что при отражении пучка 1 от оптически более плотной среды фаза колебаний электромагнитного поля изменяется на противоположную, т. е. возникает такое же изменение фазы, как при прохождении пути $\lambda/2$. Множитель n учитывает уменьшение скорости света в среде — на пути s в среде возникает такое же изменение фазы $\Delta\phi$, как на пути ns в вакууме: $\Delta\phi = \omega\Delta t = \omega s/v = n\omega s/c$. Используя соотношения

$$AC = BC = \frac{h}{\cos\beta}, \quad AD = 2h \sin\alpha \operatorname{tg}\beta, \quad \text{а также применяя за-}$$

кон преломления, получаем $(k - 1/2)\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$. При уменьшении угла падения α значение λ увеличивается (максимум отражения смещается к красному концу спектра), а при увеличении α значение λ уменьшается (максимум отражения смещается к фиолетовому концу спектра).

- О-140. Белый свет падает нормально на поверхность мыльной пленки с показателем преломления $n = 1,33$. Отраженный свет пропускают через светофильтр с узкой полосой пропускания. Используя поочередно различные светофильтры, наблюдают зависимость коэффициента отражения света от длины волны: при $\lambda_1 = 630$ нм — максимум, а при $\lambda_2 = 525$ нм — ближайший к нему минимум. Какова толщина пленки d ?

☒ $d = 590$ нм.

Решение. Условия интерференционных максимума и минимума отражения имеют вид $(k - 1/2)\lambda_1 = 2dn$ (см. задачу О-140) и $k\lambda_2 = 2dn$. Из этих уравнений находим

$$k = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} = 3, \quad d = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4n(\lambda_1 - \lambda_2)} = 590 \text{ (нм)}. \text{ Обратите вни-}$$

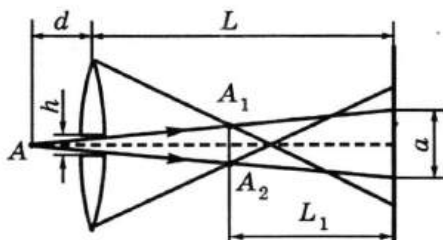
мание, что если бы значение k не было *целым*, задача не имела бы решения (хотя полученные значения k и d удовлетворяли бы написанной системе уравнений).

- О-141.** Собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 10$ см разрезана по диаметру, и части линзы раздвинуты на расстояние $h = 0,5$ мм. Перед линзой на расстоянии $d = 15$ см находится точечный источник монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Оцените число N светлых интерференционных полос на экране, расположенном за линзой на расстоянии $L = 60$ см. Промежуток между частями линзы закрыт непрозрачной перегородкой.

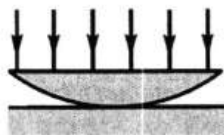
☑ $N \approx 25$.

Решение. Раздвинутые части линзы дают два изображения A_1 и A_2 источника A (см. рисунок) на расстоянии $H = \frac{hd}{d-F}$ друг от друга и на расстоянии $L_1 = L - \frac{dF}{d-F}$ от экрана.

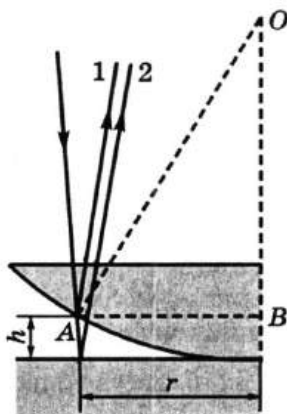
Ширина полосы перекрытия на экране двух световых пучков $a = h(L+d)/d$. Поскольку ширина интерференционных полос на экране $x = \lambda L_1/H$ (см. задачу 35.5), получаем $N \approx a/x \approx 25$.



- О-142. Кольца Ньютона.** Плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны выпуклой стороны $R = 1$ м лежит на плоской стеклянной пластине (см. рисунок). Систему освещают сверху монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм. При наблюдении сверху (в отраженном свете) видно круглое темное пятно, окруженное концентри-



ческими светлыми и темными кольцами. Объясните это явление. Определите радиус r_3 третьего темного кольца.
Решение. Явление обусловлено интерференцией световых пучков, отраженных от двух поверхностей тонкой воздушной прослойки между линзой и пластиной (см. рисунок).



Отклонением пучков от вертикали можно пренебречь; оптическая разность хода лучей $\Delta d = 2h + \lambda/2$ (см. задачу О-140). Из прямоугольного треугольника ABO с учетом соотношения $r \ll R$ получаем $h = r^2/(2R)$. Радиус r_k темного кольца с номером k можно найти из условия интерференционного минимума $\Delta d = (2k + 1)\lambda/2$, т. е. $2h = k\lambda$. Отсюда $r_k = \sqrt{k\lambda R}$; в частности, $r_3 = 1,2$ мм. Темное пятно в центре, соответствующее $k = 0$, обусловлено только «потерей полуволны», т. е. изменением фазы одной из световых волн на противоположную при отражении от оптически более плотной среды.

36. ЦВЕТ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ

- 36.1. Вода освещена красным светом с длиной волны 728 нм. Какова длина волны этого света в воде? Какой цвет увидит человек, открывший глаза под водой? Какой цвет зафиксирует положенная в воду цветная позитивная фотопленка?

☒ 547 нм; красный; красный.

Решение. Частота волны, в том числе и световой, при переходе из одной среды в другую не изменяется. А поскольку скорость света при переходе из воздуха в воду уменьшается в n раз (n — показатель преломления воды), длина волны света уменьшается во столько же раз: $\lambda' = \lambda/n = 547$ (нм). Глаз и фотопленка в воде воспримут свет как красный, потому что действие света на молекулы вещества определяется частотой колебаний электромагнитного поля световой волны.

- 36.2. Почему некоторые тела кажутся белыми, серыми и черными? Объясните.

Решение. Монохроматических электромагнитных излучений белого, серого и черного цветов в природе нет. Такие цвета объясняются различным свойством тел отражать и поглощать излучения, падающие на них. Если тело освещено солнечным излучением, то оно кажется: 1) белым — при полном отражении этого излучения; 2) черным — при поглощении этого излучения; 3) серым — при частичном отражении и поглощении цветных лучей сложного белого излучения.

- 36.3. Почему Солнце или Луна приобретают красный оттенок, когда находятся низко над горизонтом?

Решение. Когда светило находится низко над горизонтом, свет от него проходит в атмосфере наибольшее расстояние. На более длинном пути заметно рассеиваются не только синие и голубые составляющие солнечного света, но также желтые и зеленые. Остаются лишь самые длинные световые волны — красные.

- 36.4. Английский физик Рэлей обнаружил, что короткие волны рассеиваются на мелких неоднородностях среды значительно сильнее, чем длинные. Объясните, исходя из этого, голубой цвет неба.

Решение. Голубой цвет неба обусловлен рассеянием солнечного света: коротковолновая часть видимого солнечного света (фиолетовый, синий, голубой участки спектра) рассеивается в атмосфере сильнее других частей спектра. Вследствие этого коротковолновой участок спектра *прямого* солнечного света ослаблен, и Солнце кажется нам желтоватым, а не белым*. Рассеивающие свет мелкие неоднородности в воздухе представляют собой возникающие в результате хаотического движения молекул микроскопические сгущения и разрежения. В облаках рассеяние света происходит на капельках воды или кристалликах льда, размеры которых велики по сравнению с длиной волны света. В этом случае свет различных частот рассеивается примерно одинаково, чем и объясняется белый или серый цвет облаков.

- 36.5. В цветном телевидении все цвета получаются в результате смешивания красного, синего и зеленого цветов в различных пропорциях. Как при таком смешивании получается желтый цвет и чем он отличается от желтого цвета в спектре радуги?

Решение. Человеческий глаз не является таким совершенным анализатором света, как спектроскоп. Восприятие цвета обусловлено физиологией зрения: на сетчатке размещены «цветочувствительные» приемники трех типов с максимумами чувствительности в красной, синей и зеленой областях спектра. Мозг «делает вывод» о цвете, сравнивая интенсивности нервных импульсов от «красных», «синих» и «зеленых» светочувствительных элементов. Поэтому смешивая красный, синий и зеленый свет, можно вызвать любое *цветоощущение*. Например, смешивая красный и зеленый, можно получить свет, *неотличимый глазом* от спектрально чистого (монохроматического) желтого света. Монохроматическая же волна не может быть получена сложением волн других частот.

* Космонавты описывают *черное* небо и ослепительно *белое* Солнце.

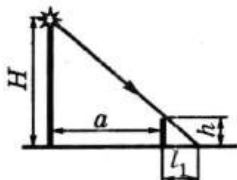
37. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

- 37.1. Вертикальный шест высотой $h = 1$ м, поставленный недалеко от уличного фонаря, отбрасывает тень длиной $l_1 = 80$ см. Если расстояние между фонарным столбом и шестом увеличить на $s = 1,5$ м, то длина тени возрастет до $l_2 = 1,3$ м. На какой высоте H находится фонарь?

☑ 4 м.

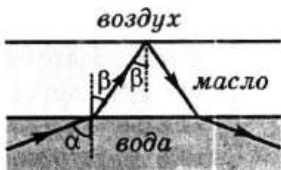
Решение. Обозначим a первоначальное расстояние от фонарного столба до шеста. Тогда из подобия треугольников (см. рисунок, на котором показана одна из двух пар подобных треугольников) $H/h = (a + l_1)/l_1$ и $H/h = (a + s + l_2)/l_2$.

$$\text{Отсюда } H = h \frac{s + l_2 - l_1}{l_2 - l_1} = 4 \text{ (м)}.$$



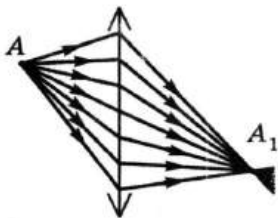
- 37.2. Луч света направлен из воды в воздух так, что происходит полное отражение на границе вода—воздух. Сможет ли этот луч выйти в воздух, если на поверхность воды налить слой прозрачного масла, показатель преломления которого превышает показатель преломления воды?

Решение. После преломления на границе вода—масло луч падает на границу масло—воздух под углом β , меньшим α (см. рисунок). Но ведь и предельный угол полного отражения у масла меньше, чем у воды! Из закона преломления следует, что $\sin \beta = n_{\text{в}} \sin \alpha / n_{\text{м}}$. По условию $\sin \alpha > 1/n_{\text{в}}$; следовательно, $\sin \beta > 1/n_{\text{м}}$, т. е. выйти из масла в воздух луч все-таки не сможет.



- 37.3. Как изменится изображение, полученное на экране при помощи собирающей линзы, если закрыть верхнюю ее половину?

Решение. Изображение каждой точки создается *всеми* лучами, вышедшими из этой точки A и прошедшими через линзу (см. рисунок).



Закрыв верхнюю половину линзы, мы перекрываем часть лучей, но ход остальных лучей не изменяется. Поэтому положение и размер изображения не изменятся, однако оно станет менее ярким.

- 37.4. Из двух сортов стекла с различными показателями преломления изготовлена слоистая линза (см. рисунок). Какое изображение точечного источника света даст эта линза? Считайте, что на границах между слоями свет полностью поглощается.



Решение. Если закрыть все слои из стекла одного сорта, то оставшиеся слои «работают» как обычная линза (см. задачу 37.3). Следовательно, слоистая линза даст *два* изображения каждой точки. На экране, перпендикулярном главной оптической оси линзы, лишь одно из этих изображений может быть четким. Лучи, прошедшие через слои из стекла другого сорта, образуют вокруг изображения светлый ореол.

- 37.5. Почему, открывая глаза под водой, мы видим размытые очертания предметов? Почему маска для подводного плавания позволяет отчетливо видеть под водой?

Решение. Преломление света в оптической системе глаза происходит в основном на *внешней* поверхности роговицы. В воде это преломление резко ослабляется, потому что показатели преломления воды и роговицы почти равны друг другу. В результате глаз становится настолько «дальнозорким», что даже при максимальной деформации хрусталика не удастся сфокусировать изображение на сетчатке. При наличии же маски роговица граничит не с водой, а с воздухом внутри маски. А прохождение света сквозь плоское стекло маски практически не влияет на четкость изображения (вспомните, как четко видны рыбы через стенку аквариума).

- 37.6. В романе писателя-фантаста Герберта Уэллса описаны приключения человека-невидимки, который мог безнаказанно совершать дерзкие преступления. В чем состоит физическая ошибка фантаста?

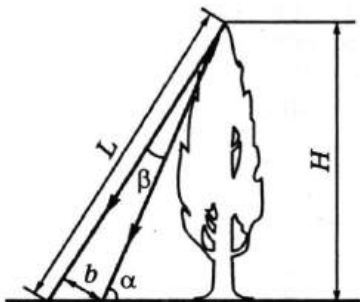
Решение. Чтобы человек стал невидимым, показатель преломления *всех* тканей его тела должен стать равным единице. Следовательно, глаз такого человека не будет преломлять свет и не сможет фокусировать его на сетчатке.

Кроме того, свет будет попадать на сетчатку со всех сторон, а не только через зрачок. И наконец, невидимая сетчатка не будет поглощать свет. Любой из перечисленных причин достаточно, чтобы невидимка оказался слепым.

- 37.7. Солнечные лучи, проходя сквозь маленькие отверстия в листе дерева, дают на земле светлые пятна в форме эллипсов одинаковой формы, но разных размеров. Большая ось самых крупных эллипсов $a = 16$ см, а малая ось $b = 12$ см. Какова высота H дерева? Под каким углом α к горизонту падают солнечные лучи? Угловой размер солнечного диска $\beta = 9,3 \cdot 10^{-3}$ рад.

☑ $H = 9,7$ м; $\alpha = 49^\circ$.

Решение. Солнечные лучи, пройдя сквозь маленькое отверстие, образуют в пространстве круговой конус с углом β при вершине; самые крупные пятна созданы светом, прошедшим через отверстия вблизи вершины дерева (см. рисунок).



Диаметр кругового сечения светового конуса на уровне земли равен b ; из-за наклонного падения света пятно на земле имеет форму эллипса с большой осью $a = b/\sin\alpha$. Учитывая, что $b = L\beta$ и $H = L\sin\alpha$, получаем $H = b^2/(a\beta) = 9,7$ (м) и $\sin\alpha = b/a = 0,75$, откуда $\alpha = 49^\circ$.

- 37.8. Над водой на высоте $h_1 = 1$ м поместили горизонтально плоское зеркало. На какой высоте h над водой увидит свое отражение рыба, находящаяся на глубине $h_2 = 0,5$ м?

☑ 3,2 м.

Решение. Проследим за ходом тех отраженных от рыбы солнечных лучей, которые после отражения от зеркала и двух преломлений попадают в глаз рыбы.

1. При выходе в воздух лучи преломляются, создавая мнимое изображение A_1 на глубине, равной h_2/n , т. е. на расстоянии $h_3 = h_1 + h_2/n$ от зеркала.

2. В результате отражения от зеркала (см. рис. а) возникает мнимое изображение A_2 на высоте $h_4 = h_3 + h_1 = 2h_1 + h_2/n$ над водой.

3. При переходе лучей из воздуха снова в воду возникает за счет преломления мнимое изображение A_3 , находящееся на высоте $h = nh_4 = 2nh_1 + h_2 = 3,2$ м над водой (см. рис. б; масштабы на рисунке не выдержаны). Именно это изображение и будет (при желании) наблюдать рыба.

37.9. Постройте изображение наклонной стрелки AB , проходящей через фокус собирающей линзы (см. рисунок).

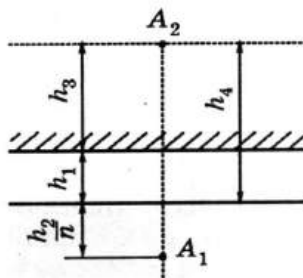


Рис. а

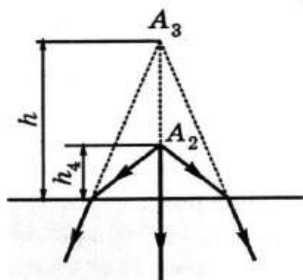
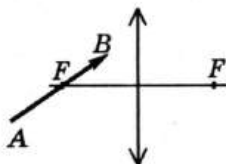
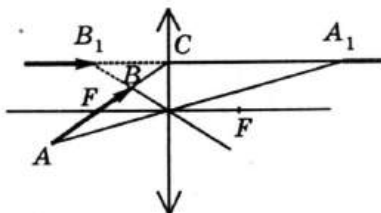


Рис. б



Решение. Действительное изображение отрезка AF и мнимое изображение отрезка FB находятся по разные стороны от линзы. Обе части изображения уходят на бесконечность. Заметим теперь, что если из любой точки стрелки выходит луч в направлении от A к B (см. рисунок), то после преломления он идет по прямой, проходящей через точку C параллельно главной оптической оси линзы. Значит, изображения всех точек стрелки лежат на этой прямой. Дальнейшие построения уже несложны.



37.10. Как изменяется оптическая сила хрусталика глаза при переводе взгляда со страницы книги на облака за окном?

☒ Уменьшается на 4 дптр.

Решение. При чтении оптическая сила глаза $D_1 = 1/d_0 + 1/f$ (здесь d_0 — расстояние наилучшего зрения, f — расстояние от оптического центра глаза до сетчатки). При рассматривании далеких облаков $D_2 = 1/f$.

Изменение оптической силы глаза (совпадающее с изменением оптической силы хрусталика) равно:

$$\Delta D = D_2 - D_1 = -1/d_0 = -4 \text{ дптр.}$$

37.11. Близорукий человек читает без очков, держа книгу на расстоянии $d = 10$ см от глаз. Какова оптическая сила D необходимых ему очков для чтения?

☒ -6 дптр.

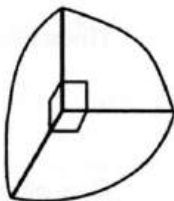
Решение. Человек в правильно подобранных очках читает книгу, держа ее на расстоянии наилучшего зрения $d_0 = 25$ см от глаз. При использовании очков «предметом» для глаза служит уже не страница книги, а созданное линзой очков мнимое изображение этой страницы. Оно-то и должно находиться на расстоянии d от глаз.

Согласно формуле тонкой линзы:

$$D = 1/d_0 - 1/d = -6,0 \text{ дптр.}$$

Олимпиадные задачи

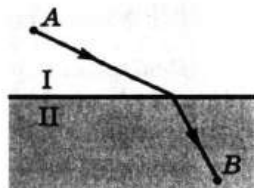
О-143. Три зеркала образуют между собой двугранные прямые углы (см. рисунок). Докажите, что после трех отражений от этой системы зеркал направление луча света изменяется на противоположное.



Решение. Воспользуемся механической аналогией — заменим зеркала упругими стенками, а луч света — упругим шариком (законы отражения в обоих случаях одинаковы). Если направить оси координат вдоль ребер двугранных углов, то при каждом из трех столкновений одна из проекций начальной скорости v шарика (v_x, v_y, v_z) изменяет знак, а остальные две — не изменяются. После трех столкновений проекции скорости на оси координат равны $-v_x, -v_y$ и $-v_z$, т. е. скорость шарика равна $-v$. Рассмотренное свойство

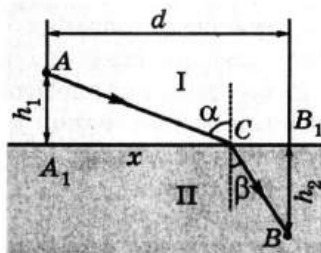
зеркального «трехгранного прямого угла» используется в уголкового отражателях (катафотах).

0-144. Принцип Ферма. Луч света идет из точки A в точку B , преломляясь на плоской границе раздела двух сред (см. рисунок). Докажите, что время прохождения света из точки A в точку B минимально как раз в том случае, когда луч «подчиняется» закону преломления.



Решение. Обозначим через v_1 и v_2 скорости света соответственно в первой и второй средах; α и β — углы падения и преломления луча. Выразим время t , необходимое для прохождения света из точки A в точку B , через длину x отрезка A_1C (см. рисунок):

$$t = \frac{AC}{v_1} + \frac{BC}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}.$$



Производная этой функции

$$t' = \frac{x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \frac{\sin \alpha}{v_1} - \frac{\sin \beta}{v_2}.$$

Она обращается в нуль при условии $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$, т. е. как

раз тогда, когда луч подчиняется закону преломления. Можно показать, что в данном случае это соответствует *наименьшему* значению функции $t(x)$. Принцип Ферма, согласно которому свет всегда «выбирает» траекторию, прохождение которой требует *наименьшего** времени, является общим принципом геометрической оптики: он

* В более строгой формулировке принципа Ферма говорится не о «минимальной» траектории, а о ее «экстремальности».

объясняет как прямолинейное распространение света в однородной среде, так и законы отражения и преломления света.

- 0-145. Расстояние между двумя точечными источниками света $l = 32$ см. Где между ними надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 12$ см, чтобы изображения обоих источников оказались в одной точке?

☒ На расстоянии 8 см от одного из источников.

Решение. Очевидно, одно из изображений будет мнимым, т. е. $f_1 = -f_2$. Будем считать $f_2 > 0$. Из формулы

тонкой линзы следует, что $d_1 = \frac{Ff_2}{f_2 + F}$, $d_2 = \frac{Ff_2}{f_2 - F}$; здесь

d_1 и d_2 — расстояния от линзы до источников света. Из

условия $d_1 + d_2 = l$ находим $f_2 = F\sqrt{\frac{l}{l - 2F}}$.

Отсюда $d_1 = \frac{l}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2F}{l}}\right) = 8$ (см) и $d_2 = l - d_1 = 24$ (см).

- 0-146. Объектив состоит из двух тонких линз, расстояние между которыми $l = 15$ см. Фокусные расстояния линз $F_1 = 20$ см, $F_2 = -10$ см. С помощью этого объектива, обращенного собирающей линзой к Солнцу, получают на экране изображение Солнца. С помощью какой одной линзы можно получить изображение Солнца такого же размера?

☒ Надо взять собирающую линзу с фокусным расстоянием 40 см.

Решение. Собирающая линза дает изображение Солнца диаметром βF_1 (β — угловой размер Солнца) в своей фокальной плоскости, т. е. за рассеивающей линзой на расстоянии $F_1 - l$ от нее. Это изображение является «мнимым» предметом для рассеивающей линзы, которая дает

действительное изображение на расстоянии $f = \frac{F_2(F_1 - l)}{F_1 + F_2 - l}$.

Диаметр изображения $\beta F_1 \frac{f}{F_1 - l}$. Приравняв его βF , на-

ходим фокусное расстояние необходимой линзы

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2 - l} = 40 \text{ (см)}.$$

О-147. Правильно ли утверждение, что лупа «приближает» к глазу рассматриваемый предмет? Как связано фокусное расстояние лупы с коэффициентом увеличения, указанным на оправе (например, « $\times 4$ »)?

Решение. Лупа представляет собой короткофокусную собирающую линзу. Ее фокусное расстояние F меньше расстояния наилучшего зрения d_0 . При правильном использовании лупы предмет располагают вблизи ее фокальной плоскости. Пусть точка A расположена в этой плоскости. Тогда вышедшие из точки A лучи после прохождения через лупу образуют параллельный пучок (см. рис. а). Благодаря этому глаз без напряжения фокусирует на сетчатке изображение точки A . Таким образом, говорить о «приближении» предмета к глазу неверно: в рассматриваемом случае изображение, полученное с помощью лупы, находится бесконечно далеко, зато и линейное увеличение лупы стремится к бесконечности. Однако в конечном счете важен размер не этого изображения, а размер изображения на сетчатке глаза. Он же определяется углом φ , под которым виден предмет. Для невооруженного (и ненапряженного) глаза этот угол не превышает величину $\varphi_0 = h/d_0$ (см. рис. б), а при использовании лупы (см. рис. а) $\varphi = h/F$ (мы считаем углы φ и φ_0 малыми). Угловое увеличение лупы $\varphi / \varphi_0 = d_0/F > 1$. Именно эту величину и указывают на оправе лупы, поэтому надпись « $\times 4$ » соответствует $F = d_0/4 \approx 6$ см.



Рис. а

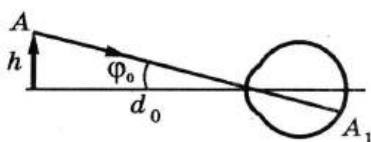


Рис. б

38. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

- 38.1. Релятивистская частица распадается на два одинаковых «осколка». Скорость одного из них равна нулю. Найдите скорость v частицы до распада и скорость v_2 второго «осколка», если известно, что при распаде такой же *неподвижной* частицы оба «осколка» имеют скорость u .

☑ $v = u, v_2 = \frac{2uc^2}{c^2 + u^2}.$

Решение. В системе отсчета K' , в которой частица до распада неподвижна, первый осколок вылетел назад со скоростью u . Поскольку этот осколок неподвижен в лабораторной системе отсчета K , эта система движется относительно K' назад со скоростью u , т. е. $v = u$. Для определения скорости второго осколка в системе отсчета K воспользуемся релятивистской формулой сложения скоростей:

$$v_2 = \frac{v + u}{1 + vu/c^2} = \frac{2uc^2}{c^2 + u^2}.$$

- 38.2. Пусть в системе отсчета K расстояние между точками, в которых произошли два события, равно l , а промежуток времени между этими событиями равен τ .

Обозначим $S = c\tau - l$. В системе отсчета K' соответствующая величина $S' = c\tau' - l'$, где l' и τ' — расстояние и промежуток времени между теми же событиями. Исходя из постулатов теории относительности, докажите, что величины S и S' имеют одинаковый знак или *обе* обращаются в нуль.

Решение. Пусть $S = 0$, т. е. $l = c\tau$. Тогда свет, испущенный при первом событии, может быть поглощен при втором событии. Это утверждение справедливо в *любой* системе отсчета; следовательно, $l' = c\tau'$ и $S' = 0$. Если $S > 0$, то $l/\tau < c$. Это означает, что некоторая частица с *отличной от нуля* массой покоя, испущенная при первом событии, может быть поглощена при втором событии: для этого она должна двигаться со скоростью $v = l/\tau$, что возможно, поскольку эта скорость меньше скорости света. В системе K' скорость этой же частицы $v' = l'/\tau'$. Поскольку эта скорость также *меньше* скорости света, получаем $l'/\tau' < c$,

т. е. $S' > 0$. Методом исключения доказывается, что если $S < 0$, то и $S' < 0$.

- 38.3.** Поскольку одновременность событий относительна, возникает вопрос: существует ли такая система отсчета K' , в которой попадание мяча в окно происходит одновременно с ударом по этому мячу?

Решение. Поскольку скорость мяча меньше c , для двух событий (удара по мячу и попадания мяча в окно) выполняется условие $l < ct$, или $S > 0$ (см. задачу 38.2). В системе отсчета K' величина $t' = 0$, и поэтому величина S' была бы отрицательной, что несовместимо с условием $S > 0$. Следовательно, системы отсчета, в которой оба события произошли бы одновременно, не существует. Аналогично доказывается, что не существует и такой системы отсчета, в которой рассматриваемые события происходят *в обратном порядке* во времени. Заметим, что в такой системе отсчета следствие опережало бы причину (а что, если после попадания мяча в окно игрок передумает бить по мячу?).

- 38.4.** В космическом корабле, летящем со скоростью $v = 0,6 c$ относительно Земли, растет стебель лука со скоростью $u_0 = 5$ см/сут. Какова скорость u роста стебля с точки зрения земного наблюдателя? Стебель расположен под прямым углом к направлению движения корабля.

☒ $u = 4,0$ см/сут.

Решение. За время Δt_0 в системе отсчета «Корабль» стебель удлиняется на $\Delta l = u_0 \Delta t_0$. В системе отсчета «Земля» удлинение стебля такое же (поперечные размеры одинаковы в обеих системах отсчета), но прошедшее время Δt больше: $\Delta t = \Delta t_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Поэтому $u = \frac{\Delta l}{\Delta t} = u_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Фактически мы вывели общую формулу преобразования «поперечной» составляющей скорости при переходе в другую систему отсчета.

- 38.5.** На космической станции, вращающейся вокруг своей оси с угловой скоростью ω , установлен лазер, который посылает световой пучок перпендикулярно оси вращения. Светлое пятно от этого пучка движется по экрану, уста-

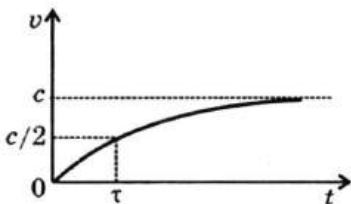
новленному нормально к пучку света на расстоянии l от космической станции. Если экран находится достаточно далеко ($l > c/\omega$), скорость движения светлого пятна $v = \omega l$ превышает скорость света. Не противоречит ли это теории относительности?

Решение. Согласно теории относительности превысить скорость света в вакууме не может ни один *материальный объект*. Однако перемещение светлого пятна на экране не является перемещением материального объекта: от одной точки экрана к другой не переносится энергия или информация. В данном случае свет идет не из одной точки экрана в другую — он идет от лазера. Таким образом, противоречия с теорией относительности нет. Заметим, что скорость перемещения *геометрического* объекта может превышать скорость света.

Олимпиадные задачи

- О-148.** Электрон разгоняется до релятивистской скорости в однородном электрическом поле с напряженностью E . Запишите формулу зависимости скорости v электрона от времени и постройте график этой зависимости. Через какое время τ скорость v достигнет половины скорости света? Начальную скорость электрона считайте равной нулю.

☑ $v = c \frac{eEt}{\sqrt{m^2c^2 + e^2E^2t^2}}; \tau = \frac{mc}{\sqrt{3}eE};$ см. рисунок.



Решение. Из уравнения $F = \frac{dp}{dt}$ при $F = eE = \text{const}$ следует, что $p = eEt$. Поскольку $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, находим

$v = c \frac{eEt}{\sqrt{m^2 c^2 + e^2 E^2 t^2}}$. При $v = c/2$ импульс электрона равен $\frac{mc}{\sqrt{3}}$, откуда $\tau = \frac{mc}{\sqrt{3}eE}$. Когда $eEt \ll mc$, получаем

$v = eEt/m$ («классическое» равноускоренное движение).

- О-149.** Какое расстояние s должен пройти электрон (см. задачу О-148), чтобы приобрести скорость v ? Запишите формулу зависимости $s(t)$.

Решение. Согласно закону сохранения энергии

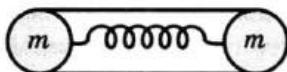
$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 + A, \text{ где } A = Fs = eEs \text{ — работа электриче-}$$

ского поля. Отсюда $s = \frac{mc^2}{eE} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right)$. Подставляя в

это выражение формулу для v (см. задачу О-148), получаем

$$s = \frac{c}{eE} (\sqrt{m^2 c^2 + e^2 E^2 t^2} - mc).$$

- О-150.** На концах трубки со сжатой легкой пружиной удерживаются нитью одинаковые шарики массой m (см. рисунок).



При разрыве нити шарики разлетаются с одинаковыми скоростями u . Найдите скорости v_1 и v_2 разлетающихся шариков, если в момент «выстрела» трубка движется поступательно в направлении своей оси со скоростью $v > u$. Найдите также суммарный импульс p разлетающихся шариков. Не противоречит ли полученный результат закону сохранения импульса? Скорости v , u считайте релятивистскими.

$$\checkmark \quad v_1 = \frac{v+u}{1+vu/c^2}, \quad v_2 = \frac{v-u}{1-vu/c^2},$$

$$p = \frac{2mv}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}}.$$

Решение. Согласно релятивистскому закону сложения

$$\text{скоростей } v_1 = \frac{v+u}{1+vu/c^2}, \quad v_2 = \frac{v-u}{1-vu/c^2}.$$

Суммарный импульс разлетающихся шариков равен:

$$p = \frac{mv_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + \frac{mv_2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} = \frac{2mv}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}}. \text{ До вы-}$$

стрела суммарный импульс шариков был меньше:

$p_0 = 2mv/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Однако следует учесть, что сжатая пружина обладала потенциальной энергией, которая при выстреле перешла в кинетическую энергию шариков:

$$W = 2mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1 \right). \text{ Эта энергия вычислена в систе-}$$

ме отсчета, в которой пружина покоилась, т. е. представляет собой добавку к энергии покоя пружины. Ей соответствует добавка $m_1 = W/c^2$ к массе покоя, а при движе-

нии со скоростью v — импульс $p_1 = \frac{m_1 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Нетрудно

проверить, что $p_0 + p_1 = p$ в полном соответствии с законом сохранения импульса. Заметим, что масса покоя системы до распада больше суммарной массы покоя «осколков» (такая ситуация типична для распада ядер).

- 0-151. Какую энергию W нужно сообщить протону, чтобы при бомбардировке неподвижных атомов водорода стали возможны те же процессы рождения частиц, что и в случае столкновения двух протонов, движущихся навстречу друг другу с энергией $W_1 = 70$ ГэВ каждый?

☒ $W = 10\,400$ ГэВ.

Решение. В обоих случаях должна быть одинакова скорость u движения одного из протонов в системе отсчета, связанной с другим протоном. При энергии W_1 скорость v протона относительно неподвижной системы отсчета

определяется из соотношения $W_1 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Эта ско-

рость $v = c \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{W_1} \right)^2}$ при $W_1 \gg mc^2$ близка к скорости

света. Согласно релятивистскому закону сложения ско-

ростей $u = \frac{2v}{1+v^2/c^2} = \frac{2c \sqrt{1 - (mc^2/W_1)^2}}{2 - (mc^2/W_1)^2}$. Именно такую

скорость должен иметь протон при бомбардировке неподвижной мишени. Его энергия $W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} =$

$$= \frac{2W_1^2}{mc^2} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{W_1} \right)^2 \right). \text{ При } W_1 \gg mc^2 \text{ (в данном случае это}$$

условие выполняется) получаем $W = \frac{2W_1^2}{mc^2}$. Полученная

формула объясняет преимущества ускорителей частиц на встречных пучках.

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

39. СВЕТОВЫЕ КВАНТЫ

- 39.1. Под каким напряжением U работает рентгеновская трубка, если самое «жесткое» излучение в ее спектре имеет длину волны $\lambda_{\min} = 3,0 \cdot 10^{-11}$ м?

☒ $U = 41$ кВ.

Решение. Энергия излучаемого фотона $h\nu = hc/\lambda$ не может превышать полученной электроном при разгоне кинетической энергии $W_k = eU$.

Поэтому $\frac{hc}{\lambda_{\min}} = eU$, откуда $U = \frac{hc}{e\lambda_{\min}} = 41$ (кВ).

- 39.2. Для калия красная граница фотоэффекта равна $\lambda_{\max} = 0,62$ мкм. Какую максимальную скорость v могут иметь фотоэлектроны, вылетающие при облучении калия фиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 0,42$ мкм?

☒ $v = 580$ км/с.

Решение. Работа выхода совпадает с минимальной энергией фотона, вызывающего фотоэффект: $A = hc/\lambda_{\max}$. Тогда из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта следует:

$$v = \sqrt{\frac{2hc(\lambda_{\max} - \lambda)}{m\lambda\lambda_{\max}}} = 5,8 \cdot 10^5 \text{ (м/с)}.$$

- 39.3. При освещении поверхности некоторого металла фиолетовым светом с длиной волны $\lambda_1 = 0,40$ мкм выбитые светом электроны задерживаются запирающим напряжением $U_1 = 2,0$ В. Чему равно запирающее напряжение U_2 при освещении того же металла красным светом с длиной волны $\lambda_2 = 0,77$ мкм?

☒ $U_2 = 0,51$ В.

Решение. Запирающее напряжение связано с максимальной кинетической энергией фотоэлектронов соотношением $W_k = eU$. Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта $hc/\lambda_1 = A + eU_1$, $hc/\lambda_2 = A + eU_2$. Отсюда

$$U_2 = U_1 + \frac{hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = 0,51 \text{ (В)}.$$

- 39.4. На поверхность падает нормально свет. Интенсивность излучения I . Найдите давление p света на поверхность в двух случаях: когда поверхность черная и когда она зеркальная.

☑ I/c ; $2I/c$.

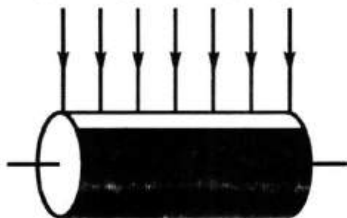
Решение. При падении на черную поверхность фотон с энергией W_0 поглощается, передавая поверхности импульс W_0/c . За время Δt поверхность площадью S поглотит излучение с энергией $W = IS\Delta t$, содержащее W/W_0 фотонов.

Переданный поверхности импульс $\frac{W}{W_0} \cdot \frac{W_0}{c} = \frac{IS\Delta t}{c}$; с дру-

гой стороны, он равен $F\Delta t = p_s S\Delta t$. Отсюда $p_s = I/c$. При отражении от зеркальной поверхности фотоны изменяют свой импульс на противоположный. При этом каждый фотон передает поверхности импульс $2W_0/c$; таким образом, давление света на зеркальную поверхность вдвое больше, чем на черную. Заметим, что классическая теория электромагнитного поля предсказывает ту же величину светового давления, что и квантовая теория.

Олимпиадные задачи

- О-152. Находящийся в вакууме легкий цилиндр может с очень малым трением вращаться вокруг своей оси (см. рисунок). Половина поверхности цилиндра окрашена в черный цвет, другая половина — зеркальная. Каким будет положение устойчивого равновесия цилиндра под действием света, если световые лучи перпендикулярны оси цилиндра?



Решение. Поворот цилиндра зависит не от силы светового давления, а от момента этой силы. Сила $\vec{F}_s$ светового давления на небольшой зеркальный участок поверхности (см. рис. а) направлена нормально к поверхности, т. е.

вдоль радиуса; момент этой силы равен нулю. Момент же силы $\vec{F}_q$ светового давления на черные участки поверхности стремится повернуть цилиндр зеркальной стороной к свету. На рис. 6 показано положение устойчивого равновесия.

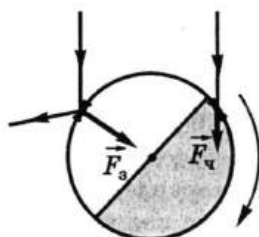


Рис. а

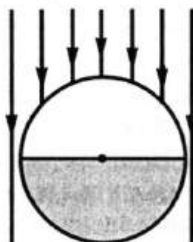


Рис. б

О-153. *Эффект Комптона.* При взаимодействии с веществом рентгеновское излучение с длиной волны λ рассеивается. При этом длина волны излучения, отклонившегося от первоначального направления распространения на угол θ , увеличивается на $\Delta\lambda$. Выразите величину $\Delta\lambda$ через угол θ , рассматривая рассеяние как результат столкновений рентгеновских фотонов с неподвижными свободными электронами. Учтите, что вследствие таких столкновений электроны приобретают скорости, сравнимые со скоростью света.

☒ $\Delta\lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}$, где m — масса покоя электрона.

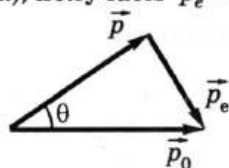
Решение. Воспользуемся законами сохранения энергии и импульса: $mc^2 + W_0 = W + W_e$, $\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e$. Здесь $\vec{p}_0$ и $\vec{p}$ — начальный и конечный импульсы фотона, $\vec{p}_e$ — им-

пульс, переданный электрону; $W_0 = \frac{hc}{\lambda}$ и $W = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda}$ —

энергия фотона до и после рассеяния; $W_e = c\sqrt{m^2c^2 + p_e^2}$ — конечная энергия электрона, mc^2 — его энергия покоя.

Применяя теорему косинусов (см. рисунок), получаем $p_e^2 =$

$= p_0^2 + p^2 - 2p_0p \cos\theta$. Подставляя это выражение в формулу закона сохранения энергии и учитывая, что $p_0 = \frac{h}{\lambda}$,



$$p = \frac{h}{\lambda + \Delta\lambda}, \text{ находим } \Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2}. \text{ Заме-}$$

тим, что значение $\Delta\lambda$ не зависит от длины волны падающего рентгеновского излучения.

- О-154.** Длина волны рентгеновского излучения после комптоновского рассеяния (см. задачу О-153) увеличилась с $\lambda_1 = 2,0$ пм до $\lambda_2 = 2,4$ пм. Какова кинетическая энергия W_k вылетающих электронов (выразите ее в МэВ) и их скорость v ? Найдите также угол рассеяния θ рентгеновского излучения и угол α между направлением вылета электронов и направлением падающего излучения.

☒ $W_k = 0,10$ МэВ, $v = 1,6 \cdot 10^8$ м/с, $\theta = 33^\circ$, $\alpha = 58^\circ$.

Решение. Из полученного в задаче О-153 результата следу-

ет: $\theta = \arccos\left(1 - \frac{mc(\lambda_2 - \lambda_1)}{h}\right) = 33^\circ$. Кинетическая энергия

электрона равна энергии, потерянной фотоном:

$$W_k = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = 1,66 \cdot 10^{-14} \text{ (Дж)} = 0,10 \text{ (МэВ)}.$$

Полная энергия электрона $W = W_k + mc^2 = 0,61$ МэВ. Из

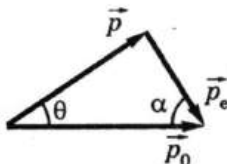
соотношения $W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ находим $v = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{W}\right)^2} =$

$$= 0,55c = 1,6 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

Применяя теорему синусов к треугольнику импульсов

(см. рисунок), получаем $\sin\alpha = \frac{p \sin\theta}{p_e} = \frac{hc^2 \sin\theta}{\lambda_2 v W} = 0,85$ и

$$\alpha = 58^\circ.$$



40. ФИЗИКА АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА

- 40.1. Вычислите энергию связи $E_{\text{св}}$ и удельную энергию связи $E_{\text{св}}/A$ для ядер ${}^7_3\text{Li}$ и ${}^{27}_{13}\text{Al}$.

☒ 39,2 МэВ и 5,6 МэВ/нуклон для ядра лития; 225 МэВ и 8,3 МэВ/нуклон для ядра алюминия.

Решение. Для атомного ядра массой m_a дефект масс $\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_a$, где Z — атомный номер элемента, $N = A - Z$ — число нейтронов в ядре, A — массовое число.

Считая $m_a = m_{\text{ат}} - Zm_e$, находим $\Delta m = Z(m_p + m_e) + Nm_n - m_{\text{ат}} = Zm_{\text{H}} + Nm_n - m_{\text{ат}}$. Здесь $m_{\text{ат}}$ — масса нейтрального атома данного типа, $m_{\text{H}} = m_p + m_e$ — масса атома водорода ${}^1_1\text{H}$. Энергия связи $E_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2$. Для ядра ${}^7_3\text{Li}$ получаем

$$\Delta m = 3m_{\text{H}} + 4m_n - m_{\text{Li}} = 0,0421 \text{ (а.е.м.)};$$

$$E_{\text{св}} = 0,0421 \text{ (а.е.м.)} \cdot 931,5 \text{ (МэВ/а.е.м.)} = 39,2 \text{ (МэВ)};$$

$$E_{\text{св}}/A = 5,6 \text{ (МэВ/нуклон)}.$$

Для ядра ${}^{27}_{13}\text{Al}$ дефект масс 0,242 а.е.м., $E_{\text{св}} = 225 \text{ МэВ}$,

$$E_{\text{св}}/A = 8,3 \text{ МэВ/нуклон}.$$

- 40.2. Какая энергия выделяется при синтезе одного ядра ${}^4_2\text{He}$ из дейтерия и трития?

☒ 17,6 МэВ.

Решение. В ядерной реакции ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$ масса покоя образовавшихся частиц *меньше* массы покоя частиц, вступивших в реакцию, на $\Delta m = 0,0189 \text{ а.е.м.}$ Следовательно, при реакции *выделяется* энергия:

$$W_0 = \Delta m \cdot c^2 = 0,0189 \text{ (а.е.м.)} \cdot 931,5 \text{ (МэВ/а.е.м.)} = 17,6 \text{ (МэВ)}.$$

- 40.3. Кинетическая энергия частиц, вылетающих из ядра при радиоактивном распаде, в миллионы раз превышает кинетическую энергию электронов в атоме. Как объяснить такое огромное различие в энергиях?

Решение. Из соотношения неопределенности следует, что неопределенность импульса нуклона в ядре в десятки и сотни тысяч раз больше неопределенности импульса элек-

трона в атоме. Это означает, что нуклоны в ядре с большой вероятностью имеют огромные импульсы, а значит, и огромные кинетические энергии: расчеты показывают, что кинетические энергии нуклонов в ядре оказываются действительно порядка миллионов электрон-вольт.

- 40.4.** Протон, двигавшийся со скоростью $v_0 = 500$ км/с, столкнулся с неподвижным ядром. В результате упругого столкновения направление движения протона изменилось на противоположное, а модуль его скорости уменьшился до $v = 400$ км/с. С каким ядром могло произойти это столкновение?

☒ С ядром бериллия.

Решение. Применим к столкновению законы сохранения импульса и энергии:

$$mv_0 = Mu - mv, \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Здесь m — масса протона, M и u — масса ядра и его скорость после столкновения. Исключая из этих уравнений

u , получаем $M = m \frac{v_0 + v}{v_0 - v} = 9m$. Такую массу имеет ядро

бериллия.

- 40.5.** Найдите минимальную кинетическую энергию W_k протона, способного «разбить» ядро дейтерия на протон и нейтрон.

☒ 3,3 МэВ.

Решение. В результате разделения ядра дейтерия на протон и нейтрон масса покоя системы возрастает на величину $\Delta m = 0,00239$ а.е.м. Следовательно, энергия покоя системы возрастает на $\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 2,2$ (МэВ). Однако начальная кинетическая энергия протона должна превышать ΔE : ведь после реакции все частицы обладают кинетической энергией. Можно доказать, что эта энергия минимальна в том случае, когда все частицы движутся в одном направлении с одинаковой скоростью. Обозначив эту скорость v , а начальную скорость протона v_0 , получаем из закона сохранения импульса $v = v_0/3$ (суммарную массу системы мы считаем равной $3m_p$, где m_p — масса протона). Тогда из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{m_p v_0^2}{2} = \Delta E + \frac{3m_p (v_0/3)^2}{2},$$

откуда находим минимальную кинетическую энергию

протона: $\frac{m_p v_0^2}{2} = \frac{3\Delta E}{2}.$

- 40.6. Какую минимальную кинетическую энергию W_0 должна иметь α -частица для осуществления ядерной реакции ${}^7_3\text{Li} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{10}_5\text{B} + {}^1_0\text{n}$?

☑ 4,4 МэВ.

Решение. В результате реакции масса покоя частиц увеличивается на $\Delta m = 0,003$ а.е.м. При этом поглощается энергия $W_1 = \Delta m \cdot c^2 = 2,8$ (МэВ). Однако α -частица должна иметь энергию $W_0 > W_1$, чтобы сообщить кинетическую энергию W_2 ядру бора и нейтрону. Минимальное значение W_2 соответствует случаю, когда эти частицы движутся с одинаковой скоростью $v = 4v_0/11$ (v_0 — скорость α -частицы; мы округляем массы частиц до значений, кратных а.е.м.). Тогда $W_2 = 4W_0/11$; согласно закону сохранения энергии $W_0 = W_1 + 4W_0/11$, откуда $W_0 = 11W_1/7 = 4,4$ (МэВ).

- 40.7. Период полураспада плутония-238 $T = 86$ лет. При распаде каждого ядра этого изотопа выделяется энергия $E_0 = 5,5$ МэВ. Сколько энергии выделяется за $t = 1$ сут в образце, содержащем $m = 10$ мг плутония-238?

☑ 490 Дж.

Решение. В образце содержится $N_0 = \frac{m}{M} N_A$ атомов плутония (здесь $M = 0,238$ кг/моль). Число распавшихся атомов:

$$\begin{aligned} \Delta N &= N_0 - N = N_0 \left(1 - 2^{-t/T} \right) = \\ &= N_0 \left(1 - e^{-t \ln 2 / T} \right) = N_A \ln 2 \frac{m}{M} \cdot \frac{t}{T}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что для малых значений x справедливо приближенное соотношение $1 - e^{-x} \approx x$. Выделив-

шаяся энергия $E = \Delta N \cdot E_0 = N_A E_0 \ln 2 \frac{m}{M} \cdot \frac{t}{T}.$

Олимпиадные задачи

- О-155. Рассматривая электрон как классическую частицу, движущуюся в атоме водорода по круговой орбите вокруг неподвижного протона, выразите скорость v электрона и его механическую энергию W через радиус r орбиты.

Решение. Сила Кулона $F_{\text{ж}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ сообщает электрону цен-

тростремительное ускорение v^2/r . Из второго закона Ньюто-

на следует: $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r}}$. Отсюда находим энергию движу-

щегося вокруг ядра электрона: $W = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$.

Она отрицательна, как и должно быть для связанной частицы, которая не может уйти на бесконечность (напомним, что нулевой уровень потенциальной энергии здесь, как обычно, соответствует бесконечно большому расстоянию между частицами).

- О-156. Когда атом водорода находится в основном состоянии, де-бройлевская длина волны электрона как раз совпадает с длиной его «траектории». Пользуясь полученными в задаче О-155 результатами, найдите радиус r «орбиты» электрона. Вычислите также энергию ионизации W_i , т. е. энергию, которую необходимо сообщить электрону, чтобы он покинул атом. Величину W_i выразите в электрон-вольтах.

☒ $5,3 \cdot 10^{-11}$ м; 13,6 эВ.

Решение. Де-бройлевская длина волны электрона $\lambda =$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{e} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 r}{m}} \quad (\text{см. задачу О-155}). \text{ Из условия } \lambda = 2\pi r$$

следует, что $r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m} = 5,3 \cdot 10^{-11}$ м. Для ионизации ато-

ма необходима энергия $W_i = |W| = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = 13,6$ (эВ).

- О-157. В образцах урановой руды всегда содержится некоторое количество атомов тория-234, образовавшихся в результате α -распада урана-238 (период полураспада $T_U = 4,5 \cdot 10^9$ лет).

Торий также радиоактивен (период полураспада равен $T_{\text{Th}} = 24$ сут). Сколько атомов тория содержится в образце урановой руды, в котором находится $m = 0,5$ г урана-238?

☑ $1,8 \cdot 10^{10}$.

Решение. Число распадающихся за время $\tau \ll T$ радиоактивных атомов $\Delta N = N_0 - N_0 \cdot 2^{-\frac{\tau}{T}} = N_0 \tau \ln 2 / T$. В образце руды одновременно идут два процесса: распад урана, увеличивающий число атомов тория, и распад образовавшихся атомов тория. В результате число атомов тория остается практически неизменным. Приравняв количества распадов урана и тория, происшедших за одно и то же время, получаем:

$$\frac{N_{\text{Th}}}{T_{\text{Th}}} = \frac{N_{\text{U}}}{T_{\text{U}}}.$$

Поскольку $N_{\text{U}} = \frac{m N_{\text{A}}}{M_{\text{U}}}$, находим $N_{\text{Th}} = \frac{N_{\text{A}} m T_{\text{Th}}}{M T_{\text{U}}} = 1,8 \cdot 10^{10}$.

O-158. Мишень из ${}^6_3\text{Li}$ подвергают бомбардировке нейтронами.

Какова кинетическая энергия W_n этих нейтронов, если в направлении движения нейтронов вылетают α -частицы с кинетической энергией $W_{\alpha} = 3$ МэВ? Энергией испускаемых γ -квантов можно пренебречь.

☑ $0,61$ МэВ.

Решение. В реакции ${}^6_3\text{Li} + {}^1_0n \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^4_2\text{He}$ масса покоя частиц уменьшается на $\Delta m = 5,14 \cdot 10^{-3}$ а.е.м., т. е. выделяется энергия $W = \Delta m \cdot c^2 = 4,8$ МэВ. Движение частиц нерелятивистское; если не учитывать энергию, уносимую γ -излучением, закон сохранения энергии принимает вид $W_n + W = W_{\text{T}} + W_{\alpha}$, где W_{T} — кинетическая энергия ядра трития. Используя также закон сохранения импульса, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{m_n v_n^2}{2} - \frac{m_{\text{T}} v_{\text{T}}^2}{2} = W_{\alpha} - W, \\ m_n v_n = m_{\text{T}} v_{\text{T}} + m_{\alpha} v_{\alpha}. \end{cases}$$

Обозначив $v_n / v_{\alpha} = x$ и принимая $m_{\text{T}} = 3m_n$, $m_{\alpha} = 4m_n$, получаем уравнение $x^2 + 4x - 14 + 6W/W_{\alpha} = 0$. Подставив

числовые значения W и W_α , находим положительный корень этого уравнения $x' = 0,9$. Следовательно,

$$W_n = \frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{x^2}{4} \cdot \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \frac{x^2}{4} W_\alpha = 0,61 \text{ (МэВ)}.$$

- О-159. Атомная электростанция мощностью $P = 1000$ МВт имеет КПД 20 %. Какова масса m расходуемого за сутки урана-235? Считайте, что при каждом делении ядра урана выделяется энергия $W_0 = 200$ МэВ.

☒ 5,3 кг.

Решение. Пусть за время $\tau = 1$ сут произошло N актов деления. Полезная (электрическая) мощность составляет $P = \eta N W_0 / \tau$ (здесь $\eta = 0,2$).

Отсюда $N = P \tau / (\eta W_0)$; масса израсходованного урана

$$m = \frac{MN}{N_A} = \frac{MP\tau}{\eta N_A W_0} = 5,3 \text{ (кг)}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Гравитационная постоянная	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Молярная масса воздуха	$0,029 \text{ кг/моль}$
Нормальное атмосферное давление	101325 Па
Масса Солнца	$1,989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
Масса Земли	$5,976 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Радиус Солнца	$6,96 \cdot 10^8 \text{ м}$
Средний радиус Земли	$6,371 \cdot 10^6 \text{ м}$
Среднее расстояние от Земли до Солнца	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Масса Луны	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ кг}$
Радиус Луны	$1,737 \cdot 10^6 \text{ м}$
Среднее расстояние от Земли до Луны	$3,844 \cdot 10^8 \text{ м}$
Элементарный электрический заряд	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} =$ $= 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ а.е.м.}$
Масса покоя протона	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг} =$ $= 1,00728 \text{ а.е.м.}$
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} =$ $= 1,00867 \text{ а.е.м.}$
Энергия покоя электрона	$E_{0e} = 8,187 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} =$ $= 0,511 \text{ МэВ}$
Энергия покоя протона	$E_{0p} = 1,503 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} =$ $= 938,26 \text{ МэВ}$
Энергия покоя нейтрона	$E_{0n} = 1,505 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} =$ $= 939,55 \text{ МэВ}$
Скорость света в вакууме	$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
1 атомная единица массы	$1,66057 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Постоянная Планка	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Коэффициент пропорциональности между единицами измерения массы и энергии	$c^2 = \frac{E}{m} = 931,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}}$
Отношение заряда электрона к его массе	$\frac{e}{m_e} = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

ПЛОТНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Вещество	ρ , кг/м ³	ρ , г/см ³	Вещество	ρ , кг/м ³	ρ , г/см ³
Алюминий	2700	2,70	Никель	8900	8,90
Бетон	2200	2,20	Олово	7300	7,30
Гранит	2600	2,60	Парафин	900	0,90
Дуб (сухой)	800	0,80	Песок (сухой)	1500	1,50
Ель (сухая)	600	0,60	Пробка	240	0,24
Железо	7800	7,80	Свинец	11300	11,30
Золото	19300	19,3	Серебро	10500	10,50
Кирпич	1600	1,60	Сосна (сухая)	400	0,40
Латунь	8500	8,50	Сталь	7800	7,80
Лед	900	0,90	Стекло	2500	2,50
Медь	8900	8,90	Чугун	7000	7,00
Мрамор	2700	2,70			

ПЛОТНОСТЬ ЖИДКОСТЕЙ

Вещество	ρ , кг/м ³	ρ , г/см ³	Вещество	ρ , кг/м ³	ρ , г/см ³
Ацетон	790	0,79	Масло		
Бензин	710	0,71	машинное	900	0,90
Вода	1000	1,00	Нефть	800	0,80
Вода морская	1030	1,03	Ртуть	13600	13,60
Глицерин	1260	1,26	Серная кислота	1800	1,80
Керосин	800	0,80	Спирт	800	0,80

ПЛОТНОСТЬ ГАЗОВ

(при 0 °С и давлении 760 мм рт. ст.)

Вещество	ρ , кг/м ³	Вещество	ρ , кг/м ³
Азот	1,25	Гелий	0,18
Воздух	1,29	Кислород	1,43
Водород	0,09	Природный газ	0,80

ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВ

ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг · °С)	Температура плавления, °С	Удельная теплота плавления, кДж/кг
Алюминий	0,90	660	390
Вольфрам	0,13	3387	185
Дерево	2,50		
Железо	0,45	1535	270
Золото	0,13	1064	67
Кирпич	0,88		
Латунь	0,40	1000	370
Лед	2,10	0	330
Магний	1,10	650	370
Медь	0,38	1085	210
Натрий	1,34	97,8	113
Олово	0,23	232	58
Песок	0,80		
Платина	0,14	1772	113
Свинец	0,13	327	24
Серебро	0,24	962	87
Сталь	0,46	1400	82
Стекло	0,80		
Цинк	0,40	419	112,2
Чугун	0,54	1200	96

ЖИДКОСТИ

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг · °С)	Температура кипения*, °С	Удельная теплота парообразования**, МДж/кг
Вода	4,2	100	2,3
Масло подсолнечное	1,8		
Ртуть	0,14	357	0,29
Спирт	2,5	78	0,90
Эфир	3,34	35	0,40

Удельная теплоемкость воздуха — 1,0 кДж/(кг · °С)

УДЕЛЬНАЯ ТЕПЛОТА СГОРАНИЯ ТОПЛИВА

Вещество	q, МДж/кг	Вещество	q, МДж/кг
Антрацит	30	Каменный уголь	27
Бензин	44	Керосин	43
Водород	120	Порох	3,8
Древесный уголь	34	Природный газ	44
Дрова сухие	12	Спирт	26

УДЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ 20 °С

Вещество	ρ , Ом · мм ² /м	Вещество	ρ , Ом · мм ² /м
Алюминий	0,028	Никелин	0,42
Вольфрам	0,055	Нихром	1,1
Железо	0,098	Свинец	0,21
Латунь	0,071	Серебро	0,016
Константан	0,50	Сталь	0,12
Медь	0,017	Уголь	40

* При нормальном атмосферном давлении.

** При нормальном атмосферном давлении и температуре кипения.

ПСИХРОМЕТРИЧЕСКАЯ ТАБЛИЦА

Показания сухого термометра, °C	Разность показаний сухого и влажного термометров, °C									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Относительная влажность воздуха, %									
0	100	81	63	45	28	11	—	—	—	—
2	100	84	68	51	35	20	—	—	—	—
4	100	85	70	56	42	28	14	—	—	—
6	100	86	73	60	47	35	23	10	—	—
8	100	87	75	63	51	40	28	18	7	—
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	5
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11
14	100	90	79	70	60	51	42	34	25	17
16	100	91	81	71	62	54	46	37	30	22
18	100	91	82	73	65	56	49	41	34	27
20	100	92	83	74	66	59	51	44	37	30
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37
26	100	92	85	78	71	64	58	51	46	40
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44

Зависимость давления p_n и плотности ρ_n
насыщенного водяного пара от температуры t

$t, ^\circ\text{C}$	$p_n, \text{кПа}$	$\rho_n, \text{г/м}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	$p_n, \text{кПа}$	$\rho_n, \text{г/м}^3$
0	0,61	4,8	18	2,07	15,4
3	0,76	6,0	19	2,20	16,3
6	0,93	7,3	20	2,33	17,3
10	1,23	9,4	25	3,17	23,0
15	1,71	12,8	30	4,24	30,4
16	1,81	13,6	50	12,34	82,9
17	1,93	14,5	90	70,11	423,3

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Винипласт	3,5	Парафин	2
Вода	81	Слюда	7,5
Керосин	2,1	Стекло	8
Масло машинное	2,5	Текстолит	7

СКОРОСТЬ ЗВУКА, м/с

Вода	1500	Воздух	340	Стекло	5500
------	------	--------	-----	--------	------

ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ при 20 °С, мН/м

Вода	73
Керосин	24
Мыльный раствор	40
Ртуть	510
Спирт	22

ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ (средний для видимых лучей)

Алмаз	2,42	Сероуглерод	1,63
Бензол	1,5	Спирт этиловый	1,36
Вода	1,33	Стекло	1,5

РАБОТА ВЫХОДА ЭЛЕКТРОНОВ (эВ)

Вольфрам	4,5	Платина	5,3
Калий	2,2	Серебро	4,3
Литий	2,4	Цезий	1,8
Оксид бария	1,3	Цинк	4,2

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ АТОМНАЯ МАССА**НЕКОТОРЫХ ИЗОТОПОВ, а. е. м.**

(для определения массы ядра необходимо
вычесть от массы атома суммарную массу электронов)

Изотоп	Масса нейтрального атома	Изотоп	Масса нейтрального атома
^1_1H (водород)	1,00783	$^{12}_6\text{C}$ (углерод)	12,00000
^2_1H (дейтерий)	2,01410	$^{13}_6\text{C}$ (углерод)	13,00335
^3_1H (тритий)	3,01605	$^{14}_7\text{N}$ (азот)	14,00307
^3_2He (гелий)	3,01602	$^{15}_7\text{N}$ (азот)	15,00011
^4_2He (гелий)	4,00260	$^{16}_8\text{O}$ (кислород)	15,99491
^6_3Li (литий)	6,01513	$^{17}_8\text{O}$ (кислород)	16,99913
^7_3Li (литий)	7,01601	$^{27}_{13}\text{Al}$ (алюминий)	26,98146
^8_4Be (бериллий)	8,00531	$^{30}_{14}\text{Si}$ (кремний)	29,97376
^9_4Be (бериллий)	9,01219	$^{40}_{20}\text{Ca}$ (кальций)	39,96259
$^{10}_5\text{B}$ (бор)	10,01294	$^{56}_{26}\text{Fe}$ (железо)	55,93494
$^{11}_5\text{B}$ (бор)	11,00931	$^{226}_{88}\text{Ra}$ (радий)	226,02435

Для детей старше шести лет.
В соответствии с Федеральным законом
от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ.

Учебное издание

*Илья Маркович Гельфгат,
Лев Элевич Гендеништейн,
Леонид Анатольевич Кирик*

**Решение ключевых задач по физике
для профильной школы
10—11 классы**

Научный редактор *Е.Н. Евлахова*
Литературный редактор *Л.В. Дмитриева*
Компьютерная верстка *С.И. Удалов*
Корректор *К.П. Бондаренко*

Подписано в печать 17.07.2020. Формат 60х88/16.
Усл.-печ. л. 17,59. Тираж 3000 экз.
ООО «Илекса», 107553, г. Москва, ул. Амурская, д. 2, стр. 2,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
телефон: +7 (964) 534-80-01

Отпечатано в ГУП МО «Коломенская типография».
140400, г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2а.
ИНН 5022013940. Тел.: 8(496) 618-69-33, 8(496) 618-60-16
Заказ 3135.

И.М.Гельфгат,
Л.Э.Генденштейн,
Л.А.Кирик

РЕШЕНИЕ КЛЮЧЕВЫХ ЗАДАЧ по **ФИЗИКЕ** для профильной школы

Больше 3000 задач,
от простых до олимпиадных,
можно найти в книге:



ISBN 978-5-89237-252-7



9 785892 372527

И.М.Гельфгат, Л.Э.Генденштейн, Л.А.Кирик

Гельфгат. Физика 10-11
1 кл. Реш. ключ. задач

3407306

Цена: 430.00



23840783640730600010

