+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

Занимательная математика для младшей возрастной группы (10-13 лет)

Преподаватель: Антон Зыбковец

Первое занятие:

Вводное занятие, различные задачи из книги “Математический кружок”.

Парадокс «Потерянный доллар» из книги «Девять великих загадок физики».

Задачи:

1. The five-digit numbers 91723 and 85604 use all ten digits between them. The difference between these numbers is 91723 – 85604 = 6119. Find two five-digit numbers which use all ten digits between them and which have the smallest possible difference.

2. Find three different whole numbers A, B and C, so that

- B is the average of A and C
- A^2 is the average of B^2 and C^2 .

Note that not all of the numbers can be positive.

3. You are given that N is a whole number which is a multiple of 6 and a multiple of 10. For each of the following statements say whether you can be sure it is true, it might or might not be true or it definitely isn’t true. Explain your answer in each case.

a N is a multiple of 60.
b N has a factor of 15.
c N is a factor of 100.
d N is a multiple of 7.

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

1 PROBLEM Find x, y and z if

$x + y = 5$
$z + y = 11$
$x + z = 13.$

METHOD The first equation can be rearranged to

$x = 5 - y.$

and the second equation can be rearranged to

$z = 11 - y.$

These two rearrangements imply that

$z + x = (5 - y) + (11 - y) = 16 - 2y$

but the third equation says that

$z + x = 13,$

so

$16 - 2y = 13.$

This is a straightforward equation which can be solved to give $y = 1\frac{1}{2}$.

The first step of this METHOD can now be used to conclude that

$x = 5 - y = 5 - 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

and

$z = 11 - y = 11 - 1\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}.$

a Use the METHOD above to solve the PROBLEM

Find x, y and z if

$x + y = 12$
$z + y = 17$
$x + z = 21$

b Adapt the METHOD to solve the PROBLEM

Find x, y and z if

$x + 3y = 14$
$z + 5y = 21$
$2x - z = 5$

c Try to adapt the METHOD to solve the PROBLEMs below. What goes wrong?

i Find x, y and z if

$x - y = 15$
$z - y = 6$
$x - z = 11$

ii Find x, y and z if

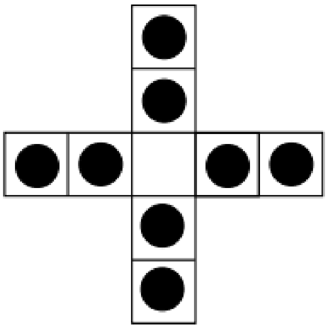
$x - y = 15$
$z - y = 6$
$x - z = 9$

d One of the PROBLEMs in **c** has many solutions, even though the METHOD does not work; but the other PROBLEM has no solutions.

Identify which problem is which, and explain what the difference is between the twoPROBLEMs which means that one has solutions and the other does not.

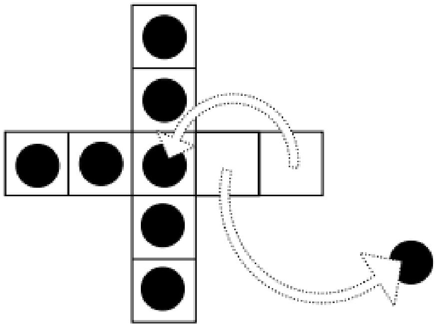
+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

The diagram shows nine squares. There are counters on eight of the squares; the ninth square is empty.



A move on this diagram consists of jumping one counter over another to an empty square. The jumping counter moves in a straight line (up, down, left or right) and lands exactly two squares away from its original position. The counter that is jumped over is removed.

For instance, after the first move the position could be



a Show that all four possible first moves lead to a rotation or reflection of the same position.

The game ends when it is impossible to make a move.

b Show that, however you continue this game, there are at least two counters left when the game ends.

Второе занятие:

Раскраски, задачи на разрезание и замощение

В начале урока изучаем теоретические основы метода, разбираем несколько задач и пробуем самостоятельно решать и сдавать задачи.

Парадокс: Парадокс ящиков Бертрана

1. На каждой клетке доски размером 9 × 9 сидит жук. По свистку каждый из жуков переползает в одну из соседних по диагонали клеток. При этом в некоторых клетках может оказаться больше одного жука, а некоторые клетки окажутся

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

незанятыми. Какое минимальное количество незанятых клеток могло при этом получится?

2. Квадрат 8×8 клеток выкрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нём любой прямоугольник из трёх клеток и перекрасить их все в противоположный цвет (белые в чёрный, чёрные — в белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в чёрный цвет?

3. Можно ли замостить таблицу 2017×2017 доминошками 1×2, которые разрешается располагать только горизонтально, и прямоугольниками 1×3, которые разрешается располагать только вертикально?

4. Квадрат 9×9 разрезан на квадраты 2×2 и «уголки» из трёх клеток. Какое наибольшее количество квадратов 2×2 могло при этом получиться?

5. На клетчатой плоскости отмечено 100 клеток. Докажите, что можно отметить среди них 25 клеток так, чтобы они не имели общих точек.

6. (а) Из доски 8×8 вырезали одну клетку так, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×3. Укажите все клетки, которые могут быть вырезаны и докажите, что других нет.
(б) Тот же вопрос, только для доски 11×11 и прямоугольников 1×4.

7. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трёх клеток, не выходящими за его пределы, в несколько слоёв так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам?

8. Петя и Вася играют в игру на решётке в виде сот. Петя закрашивает в чёрный цвет два соседних шестиугольника, а Вася стирает один любой закрашенный. Какое максимальное количество закрашенных шестиугольников подряд может гарантировано получить Петя?

9. В 17 клеток квадрата 5×5 поставили по одной фишке. За один ход все фишки передвигаются в соседнюю по стороне клетку. Запрещается ставить две фишки в одну клетку и, если фишка передвигалась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвинуться по вертикали, и наоборот. Может ли процесс продолжаться сколь угодно долго?

Третье занятие:

Игра “Математическая перестрелка”.

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

Правила игры:

Каждому игроку выдаётся номер (если детей много, то можно разбить их на команды). Все номера должно быть видно всем.
Есть четыре локации: город, больница, реанимация, морг. Изначально все дети в городе.
Каждому даётся листок с задачами. Задачи у всех одинаковые, но в разном порядке.
Можно решать их только в том порядке, в котором они у тебя на листке.
Решение задачи даёт две возможности: выстрел или лечение. Если ты стреляешь, то нужно написать, в кого. Стрелять можно только по тем, кто в твоей локации. Лечить можно только себя. Первые два хода в городе лечиться нельзя.
Выстрелы (и лечения) записываются на листочек в формате: какой номер стреляет, в кого, какой задачей и какой ответ (нужен только ответ). Если лечение, то какой номер лечится, какой задачей и какой ответ. Листочки собирает курьер киллера и отдаёт их киллеру (преподаватель). Если ответ правильный, выстрел (лечение) засчитан.
Каждые n минут (обычно это минут 7-10) объявляется конец дня и зачитываются удачные выстрелы и лечения. Если в игрока попали больше раз, чем он вылечился, он перемещается на одну локацию ниже, если он вылечился больше раз, чем в него попали, то на одну выше. Важно, чего было больше: ранений или лечений. Если одинаково, то ничего не происходит. За один «день» нельзя подняться или опуститься больше, чем на один уровень.
Если игрок попадает в морг, то он выбывает из игры.
Также есть различные модификации игры, например, преподаватель может подбрасывать монетку перед выстрелом, и если выпадает орёл, то выстрел не засчитан. Либо можно решать задачи в любом порядке, но их выдают партиями каждые 15-20 минут.
Задачи делаются перед олимпиадой на основании результатов на занятиях.

Четвёртое занятие:

Игры. В начале теория и примеры, можно тренировать выигрышные стратегии с соседом по парте.

Парадокс: Дни рождений

1. (а) Часовая стрелка установлена на 12 часах. Двое по очереди двигают её на 2 или 3 часа вперёд. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку на 11 часов. Через 11 часов можно «перепрыгивать». Кто выигрывает при правильной игре? (б) А что произойдёт, если ещё разрешить переводить на 4 часа?

2. Есть многозначное число, например, 999. Вычисляется сумма его цифр (в данном случае 27) и начинается игра. Первый называет любое число от 27 до 999 (27 — можно называть, а 999 — нет), исходное число заменяется на это строго меньшее число. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Рассматриваются все числа из не более чем 100 цифр, при скольких из них при правильной игре победит второй

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

игрок?

3. Имеется клетчатая шоколадка 322×2022. За ход можно съесть дольку и все другие дольки, которые находятся выше и правее неё. Проигрывает тот, кто откусывает последнюю клетку (там яд). Кто выигрывает при правильной игре?

4. На доске написано число 5005^{5005}. Двое играют в следующую игру: за один ход можно либо стереть с доски два одинаковых числа, либо стереть число n и вместо него записать два числа, в произведении дающих n, но меньших него. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

5. На доске написаны числа от 1 до 10000. За ход разрешается вычеркнуть любое число вместе со всеми его делителями. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

6. На столе лежат карточки, на которых написаны по разу все делители числа 540000, причём на каждой карточке написан один из делителей. Два игрока по очереди берут себе по одной карточке. Проигрывает тот, у кого число на одной из его карточек делится на число на другой из его карточек. Кто выигрывает при правильной игре?

7. В куче N камней. Игроки берут по очереди 1, 2 или 3 камня. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

(а) Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

(б) Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если один раз за игру можно пропустить ход? (Если один игрок пропустил ход, то второй уже больше не может).

(в) Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если ход можно пропустить m раз за игру? (m ходов в сумме на двух игроков).

8. На доске написано число 2. За один ход разрешается прибавить к уже имеющемуся числу любой его делитель, отличный от самого числа. Проигрывает тот, кто первым получит число, большее тысячи. Кто выигрывает при правильной игре?

9. Даны натуральные $n > k > 1$. Кирилл и Паша по очереди красят клетки квадрата $n \times n$ в чёрный цвет. Выигрывает тот, после хода которого в каждом квадрате $k \times k$ будет хотя бы одна чёрная клетка. Кто выигрывает при правильной игре?

Пятое занятие:

Парадокс: Монти Холла

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи задаются рекуррентным соотношением: $F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Комбинаторные свойства

1. Найдите количество слов длины n, состоящих только из букв «а» и «б» и не содержащих в записи двух букв «б» подряд.

2. Есть доска $2 \times n$. Сколькими способами её можно замостить домино?

3. Длины 13 отрезков являются натуральными числами, меньшими 225. Докажите, что среди них найдутся три отрезка, из которых можно сложить треугольник.

4. Рассмотрим последовательность 0, 1, 10, 101, 10110, 10110101, ... Каждое следующее число получается из предыдущего так: каждый 0 заменяется на 1, каждая 1 — на 10.
(а) Рассмотрим другое описание данной последовательности. Каждое следующее число получается так: берём последнее число и приписываем к нему справа предыдущее. Докажите, что эти два описания задают одну и ту же последовательность.
(б) Найдите количество нулей и количество единиц в n-м числе.

5. Из чисел от 1 до 144 загадано одно. Разрешается выбрать подмножество чисел и спросить, есть ли среди них загаданное. За ответ «да» надо заплатить 2 рубля, за ответ «нет» — 1 рубль. Какое наименьшее количество денег потребуется, чтобы угадать число?

Алгебраические свойства

6. Докажите, что:
(а) $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$;
(б) $F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$;
(в) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

7. Докажите, что сумма пяти последовательных чисел Фибоначчи не является числом Фибоначчи.

8. Найдите чему равна сумма: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 5} + \cdots + \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}$.

9. **(а)** Докажите, что два любых соседних числа Фибоначчи взаимно просты.
(б) Докажите, что для любых натуральных m и n верно $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$.
(в) Докажите, что для любых натуральных m и n верно $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

10. **(а)** Докажите, что для любого n существует $k > 2$ такое, что $F_k \equiv 1 \pmod{n}$.
(б) Докажите, что для любого n существует $k > 2$ такое, что $F_k \equiv 0 \pmod{n}$.
(в) Пусть m — наименьший номер, при котором число Фибоначчи F_m кратно n. Докажите, что все числа Фибоначчи, кратные n, имеют номера, кратные m.

Шестое занятие:

Парадокс: Ахиллес и черепаха.

Некоторые задачи, которые вызвали у большинства затруднения, могут быть разобраны решившими её учениками у доски. Также можно устраивать занятия с “разнобоем”, куда войдут задачи с желаемых ресурсов (http://www.kvant.info/zk_math.htm)