

Занимательная математика для старшей возрастной группы (14-17 лет)

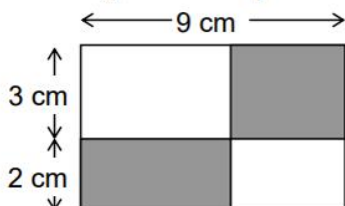
Преподаватель: Антон Зыбковец

Первое занятие:

Вводное занятие. Оценка уровня участников, решение задач.

Парадокс «Потерянный доллар» из книги «Девять великих загадок физики».

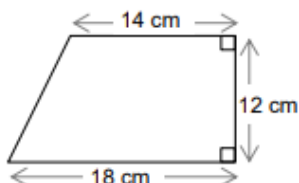
- 5 Five bananas and two kiwi fruit cost £2·30, and four bananas and three kiwi fruit cost £2·47.
How much would it cost to buy two bananas and one kiwi fruit?
- 6 In September, there were three times as many boys as girls in a class.
In October, two new girls joined the class and one of the boys was expelled.
Then there were only twice as many boys as girls in the class.
How many boys and girls were there in the class in September?
- 7 The two shaded rectangles have equal area. What is the total shaded area?



a $\frac{1}{6}x - \frac{1}{4}(x-5) = 1$

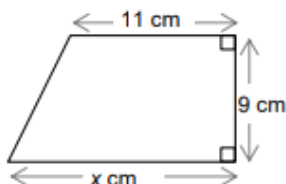
b $\frac{x}{x-1} = \frac{x+1}{x-2}$

Some questions might expect you to work backwards through a problem.
For example, you could probably work out the area of this trapezium easily enough



but question 4 asks you to work backwards through a similar problem.

- 4 The area of this trapezium is 117 cm^2 . What is the length $x \text{ cm}$ of its base?



Второй день:

Парадокс: Парадокс ящиков Бертрانا

Комбинаторика и теория вероятностей.

<i>Перестановки</i>	<i>Размещения</i>	<i>Сочетания</i>
Дано: n Выбираем: n	Дано: n Выбираем: k	Дано: n Выбираем: k
Порядок имеет значение	Порядок имеет значение	Порядок не имеет значение
$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Пояснение формул и решение задач.

- Сколькими способами можно собрать бригаду из 3 физиков и 4 лириков, если имеется 6 физиков и 8 лириков?
- Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковых цифры
- Анаграмма — это слово (не обязательно осмысленное), полученное из данного слова перестановкой букв. Например, бьорд является анаграммой слова дробь. Сколько всего анаграмм у слова дробь? У слова класс? У слова колобок?
- Сколькими способами можно разложить пять одинаковых шаров по трём различным ящикам? На число шаров в ящике ограничений нет.
- Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x + y + z = 5$?
- Маршрутом мы будем называть ломаную, у которой вершины имеют целочисленные координаты, а звенья направлены либо вправо, либо вверх. Сколько маршрутов ведут из точки $A(0, 0)$ в точку $B(10, 6)$? Сколько таких маршрутов проходит через точку $M(6, 4)$?

Третье занятие: Системы счисления

Парадокс: Дни рождений

Решение задач.

- Вы знакомы с римскими цифрами. Первые три из них — I, V, X. Их легко изобразить, используя палочки или спички. Ниже написано несколько неверных равенств. Как можно получить из них верные равенства, если разрешается переложить с одного места на другое только одну спичку (палочку)?
 - $VII - V = XI$;
 - $IX - V = VI$;
 - $VI - IX = III$;
 - $VIII - III = X$.
- Какие числа записаны римскими цифрами:
 - MCMXCIX;
 - CMLXXXVIII;
 - MCXLVII?

Что это за числа?

- В некоторой непозиционной системе счисления цифры обозначаются геометрическими фигурами. Ниже представлены некоторые числа этой системы счисления и соответствующие им числа десятичной системы счисления:

Неизвестная система	Десятичная система
 	4
 	6
  	19
  	190
  	1900

Определите числовой эквивалент символов , , , .

- Используя метод разностей запишите следующие числа

- в восьмеричной системе счисления: 7, 9, 24, 35, 57, 64;
- в пятеричной системе счисления: 9, 13, 21, 36, 50, 57;
- в троичной системе счисления: 3, 6, 12, 25, 27, 29;
- в двоичной системе счисления: 2, 5, 7, 11, 15, 25.

- Для записи больших десятичных чисел в других системах счисления, надо данное число нацело разделить на основание новой системы, частное опять разделить на основание новой системы и так до тех пор, пока не получим частное, меньшее основания

новой системы. Воспользуйтесь этим правилом для перевода числа 2005 в следующие системы счисления:

- 1) в восьмеричную;
- 2) в пятеричную;
- 3) в двоичную.

6. Задача-игра «Угадывание задуманного числа по отрезкам». Один из учеников (ведущий) задумывает некоторое трёхзначное число, мысленно делит задуманное число пополам, полученную половину опять пополам и т. д. Если число нечётное, то от него отбрасывается единица. При каждом делении ведущий чертит на доске отрезок, направленный вертикально, если делится нечётное число, и горизонтально, если делится чётное число. Как на основании полученной фигуры безошибочно определить задуманное число?

7. Какое минимальное основание имеет система счисления, если в ней записаны числа 123, 222, 111, 241? Определите десятичный эквивалент данных чисел в найденной системе счисления.

8. Запишите наибольшее двузначное число и определите его десятичный эквивалент для следующих систем счисления:

- 1) в восьмеричной системе счисления;
- 2) в пятеричной системе счисления;
- 3) в троичной системе счисления;
- 4) в двоичной системе счисления

Четвёртое занятие:

Игра “Математическая перестрелка”

Правила игры:

Каждому игроку выдаётся номер (если детей много, то можно разбить их на команды). Все номера должно быть видно всем.

Есть четыре локации: город, больница, реанимация, морг. Изначально все дети в городе.

Каждому даётся листок с задачами. Задачи у всех одинаковые, но в разном порядке.

Можно решать их только в том порядке, в котором они у тебя на листке.

Решение задачи даёт две возможности: выстрел или лечение. Если ты стреляешь, то нужно написать, в кого. Стрелять можно только по тем, кто в твоей локации. Лечить можно только себя. Первые два хода в городе лечиться нельзя.

Выстрелы (и лечения) записываются на листочек в формате: какой номер стреляет, в кого, какой задачей и какой ответ (нужен только ответ). Если лечение, то какой номер лечится, какой задачей и какой ответ. Листочки собирает курьер киллера и отдаёт их киллеру (преподаватель). Если ответ правильный, выстрел (лечение) засчитан.

Каждые n минут (обычно это минут 7-10) объявляется конец дня и зачитываются удачные

выстрелы и лечения. Если в игрока попали больше раз, чем он вылечился, он перемещается на одну локацию ниже, если он вылечился больше раз, чем в него попали, то на одну выше. Важно, чего было больше: ранений или лечений. Если одинаково, то ничего не происходит. За один «день» нельзя подняться или опуститься больше, чем на один уровень.

Если игрок попадает в морг, то он выбывает из игры.

Также есть различные модификации игры, например, преподаватель может подбрасывать монетку перед выстрелом, и если выпадает орёл, то выстрел не засчитан. Либо можно решать задачи в любом порядке, но их выдают партиями каждые 15-20 минут.

Пятое занятие:

Парадокс: Монти Холла

Экскурс в геометрию Лобачевского

Теорема 1 (ключевая теорема). Пусть вершина A неевклидова треугольника ABC совпадает с центром модели Пуанкаре и точка B_0 симметрична B относительно абсолюта¹. Тогда $S(ABC) = 2\tau$, где $\tau = \angle AB_0C$.

¹Т.е. точка B_0 является образом точки B при инверсии относительно абсолюта.

Упражнение 1. Используя ключевую теорему, решите следующие задачи

1) Постройте в неевклидовом треугольнике ABC отрезок AX , делящий площадь ABC пополам. Верно ли, что отрезок AX является медианой?

2) Постройте в неевклидовом треугольнике ABC точку T , такую, что площади треугольников ABT , BCT и CAT равны. Верно ли, что точка T является точкой пересечения медиан?

Упражнение 2. Рассмотрим на плоскости Лобачевского отрезок AB и прямую s . Найдите на прямой s точку C , такую, что площадь треугольника ABC минимальна.

Упражнение 3. Докажите аналог ключевой теоремы на сфере: множеством точек, образующих с данным отрезком AB треугольники постоянной площади, является окружность, проходящая через точки A_0 и B_0 , симметричные точкам A и B относительно центра сферы.

Шестое занятие:

Дорешивание и разбор задач.

Программу можно оптимизировать в зависимости от уровня знаний, который выяснится в процессе, кроме того, неразобранные задачи можно потом сдавать на любом занятии. Некоторые задачи, которые вызвали у большинства затруднения, могут рассказывать решившие её ученики у доски. Также можно устраивать занятия с “разнобоем”.