

МАТЕМАТИКА (старшая группа)

(преподаватель Егор Пархоменко)

Тема № 1. Задачи о турнирах

- 1) Докажите, что если в однокруговом турнире любые два игрока набрали разное количество очков, а ничьих не было, то занявший первое место выиграл у всех, занявший второе – у всех кроме первого ... а тот, кто оказался на последнем месте – тот всем проиграл.
- 2) Шахматист сыграл в турнире 20 партий и набрал 12.5 очков (у него были ничьи). На сколько больше он выиграл партий, чем проиграл?
- 3) В соревнованиях по олимпийской системе (проигравший выбывает) участвует 47 боксеров. Сколько поединков надо провести, чтобы определить победителя?
- 4) Докажите, что в любой момент число участников турнира, завершивших до этого вничью нечётное число партий – чётно.
- 5) Команда «Мустанг» в третьем матче турнира забросила втрое больше шайб, чем в первом, а во втором и четвёртом матчах – в сумме на 8 шайб меньше, чем в первом и третьем вместе взятых. Известно, что в этих четырёх матчах «Мустанг» забросил не более 11 шайб. Какое наибольшее количество матчей он мог выиграть?
- 6) В однокруговом шахматном турнире с 8-ю участниками все партии закончились вничью. Сколько всего очков набрали участники? А сколько всего партий было сыграно?
- 7) В футбольном турнире пяти команд победитель набрал столько очков, сколько все остальные вместе взятые. Сколько ничьих было в этом турнире?
- 8) В круговом турнире трёх королевств Великобритании – Англии, Шотландии и Уэльса играли 6 футбольных команд (по две от Англии, от Шотландии и Уэльса). Все три матча каждого тура проходят одновременно. Есть три судейские бригады – по одной из каждого королевства. Можно ли так составить расписание туров и судей, чтобы каждая бригада не судила никакой матч игроков своей страны с соперниками из другой страны?
- 9) Шестнадцать команд из шестнадцати стран провели однокруговой турнир. Могло ли оказаться так, что каждая команда сыграла во всех этих странах, кроме своей родины?
- 10) В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Докажите, что каждая команда будет соревноваться с командой из всех остальных учащихся класса.

Тема № 2. Графы

- 1) Петя нарисовал несколько точек на плоскости так, что никакие три из них не лежат на одной прямой, и соединил каждые две точки отрезком. Мог ли он нарисовать ровно 7 отрезков?
- 2) В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх однофамильцев. Докажите, что все семеро имеют одну и ту же фамилию.
- 3) Докажите, что среди шести человек обязательно найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
- 4) В стране Древляндия 101 город, некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один маршрут. Сколько в этой стране дорог?
- 5) На плоскости 100 окружностей, составляющих связанную фигуру. Доказать, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.
- 6) В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх братьев. Докажите, что все семеро – братья.
- 7) В классе 20 учеников, причём каждый дружит не менее, чем с 14 другими. Можно ли утверждать, что найдутся четыре ученика, которые все дружат между собой?
- 8) а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см? б) Какое наименьшее число раз придётся ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?
- 9) Несколько гномов после работы в шахте нашли 75 драгоценных камней. Каждый гном отдал каждому по 3 драгоценных камня: алмаз, сапфир и рубин. Правда, каждый гном оставил ещё 3 камня себе. Сколько всего было гномов?
- 10) В графе каждая вершина – синяя или зелёная. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелёными, а каждая зелёная – с девятью синими и шестью зелёными. Каких вершин больше – синих или зелёных?
- 11) Корги и шпицы резвились и бегали по лужайке, и периодически друг с другом сталкивались. Каждый шпиц столкнулся с семью корги, а каждый корги столкнулся с восемью шпицами. Кого было больше – шпицев или корги?
- 12) Вася нарисовал по кругу несколько точек и захотел соединить каждую из точек со всеми остальными линиями. Но 4 точки он забыл соединить между друг другом (между этими 4-мя точками отсутствуют какие-либо линии, соединяющие их). Всего Вася провел 39 линий. Сколько он нарисовал точек?

Тема 3: «Математические игры»

- 1) Фили и Кили играют в шахматы. Кроме шахматной доски у них есть одна ладья, которую они поставили в правый нижний угол, и делают ею ходы по очереди, причём ходить разрешается только вверх или влево (на любое количество клеток). Кто не может сделать хода, тот проиграл. Кили ходит первым. Кто выиграет при правильной игре?
- 2) Имеются две кучки конфет: в одной - 20, в другой - 21. За ход нужно съесть одну из кучек, а вторую разделить на две не обязательно равных кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
- 3) Имеется три кучки камней: в первой – 10, во второй – 15, в третьей – 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет?
- 4) Числа от 1 до 20 выписаны в строчку. Игроки по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того, как все места заполнены, подсчитывается результат. Если он чётен, то выигрывает первый игрок, если нечётен, то второй. Кто выиграет?
- 5) В мешке лежат 2022 конфеты. Пупсень и Вупсень по очереди берут конфеты из мешка. Пупсень за один ход может взять 1 или 4 конфеты, а Вупсень – 1 или 3 конфеты. Начинает Пупсень, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
- 6) На столе лежат две стопки монет: в одной из них 30 монет, а в другой - 20. За ход разрешается взять любое количество монет из одной стопки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?
- 7) Два гроссмейстера по очереди ставят на шахматную доску ладьи (за один ход – одну ладью) так, чтобы они не били друг друга. Тот, кто не сможет поставить ладью, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре – первый или второй гроссмейстер?
- 8) Петя и Миша играют в такую игру. Петя берёт в каждую руку по монетке: в одну – 10 коп., а в другую – 15. После этого содержимое левой руки он умножает на 4, 10, 12 или 26, а содержимое правой руки – на 7, 13, 21 или 35. Затем Петя складывает два получившихся произведения и называет Мише результат.
Может ли Миша, зная этот результат, определить, в какой руке у Пети – правой или левой – монета достоинством в 10 коп.?
- 9) Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычёркивает 9 чисел (по своему выбору) из последовательности 1,2,...,100,101. После одиннадцати таких вычёркиваний останутся 2 числа. Первому игроку присуждается столько очков, какова разница между этими оставшимися числами. Доказать, что первый игрок всегда сможет набрать по крайней мере 55 очков, как бы ни играл второй.

Тема 4: «Логические задачи»

- 1) Близнецы Вася и Петя придумали собственный язык и отвечают на вопросы только на нём. На этом языке «Да» и «Нет» звучат как «Йырг» и «Афшл», но какое что означает – неизвестно. Вася всегда честен, а Петя всегда врёт. Придумайте один вопрос, который можно задать стоящему перед нами мальчику и который позволит определить, кто из мальчиков перед нами. При этом кто из мальчиков стоит перед нами неизвестно. Вопрос должен быть простым, чётким и подразумевать ответ «Да» или «Нет».
- 2) Вася дошёл в игровом квесте в погоне за сокровищами до последнего рубежа. Перед ним — две двери, одна ведёт к сокровищу, вторая — к смертельно опасному лабиринту. У каждой двери стоит стражник, каждый из них знает, какая дверь ведёт к сокровищу. Один из стражников никогда не врёт, другой — врёт всегда. Вася не знает, кто из них вран, а кто нет. Прежде чем выбрать дверь, задать можно только один Вопрос и только одному стражнику. Что спросить Васе, чтобы попасть к сокровищу?
- 3) За столом сидят пять человек, каждый из которых является либо рыцарем, либо лжецом (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждый из них утверждает: «Мои соседи справа и слева – оба лжецы». Сколько лжецов сидит за столом?
- 4) Землю захватили инопланетяне. Они планируют уничтожить всю планету, но решили дать человечеству шанс. Они выбрали десяток самых умных людей и поместили их в абсолютно тёмную комнату, посадив в ряд, один за другим. На каждого из людей надели по шляпе, шляпы всего двух цветов — розовые и зеленые. После того, как все шляпы оказываются на головах, свет включается. Инопланетянин начинает с последнего человека в ряду и спрашивает о том, какого цвета шляпа у него на голове. Других слов, кроме цвета шляпы, произносить нельзя. Отмалчиваться — тоже. Если он отвечает верно, остаётся в живых, ошибается — его убивают.

Нельзя посмотреть, какого цвета ваша шляпа, но можно договориться о некоем принципе, по которому отвечать всем. Расположение шляп — случайное, комбинации могут быть любыми, вам видны все шляпы, которые расположены перед вами. Вопрос: Что нужно отвечать, чтобы выжило как можно больше людей?
- 5) Встретились два жителя острова рыцарей и лжецов. По крайней мере один из нас – рыцарь, - глубокомысленно изрёк первый житель. - Но ты то уж точно лжец! – рассмеялся ему в лицо второй житель. Определите, кем являются оба.
- 6) Иван Иванович купил собаку. Саша думает, что эта собака – чёрный пудель, Паша считает её белой болонкой, а Маша – белым бульдогом. Известно, что каждый из ребят верно угадал либо породу, либо цвет шерсти собаки. Назовите породу собаки и её цвет шерсти
- 7) В Стране Чудес проводилось следствие по делу об украденном бульоне. На суде Мартовский Заяц заявил, что бульон украл Болванщик. Соня и Болванщик тоже дали показания, но что они сказали, никто не запомнил, а запись смыло Алисиными слезами.

В ходе судебного заседания выяснилось, что бульон украл лишь один из подсудимых и что только он дал правдивые показания. Так кто украл бульон?

8) В комнате собрались люди – каждый либо рыцарь, либо лжец. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Из комнаты слышались голоса:

Первый голос: 1) Нас в комнате не более трёх человек, 2) мы все лжецы.

Второй голос: 1) нас в комнате не более четырёх человек 2) не все мы лжецы.

Третий голос: 1) нас в комнате пятеро 2) трое из нас – лжецы.

Кого в комнате больше – рыцарей или лжецов?

9) Лиса и медведь любят малину, а волк – нет. Тот, кто живёт в избушке на курьих ножках, всегда лжёт. Те двое, чьи домики стоят на земле, всегда говорят правду. Житель избы на курьих ножках сказал своим двум соседям: «Вы оба любите малину». Житель одной из избушек, стоящих на земле, сказал: «Мы с медведем любим малину». Кто в избушке на курьих ножках?

10) В параллели 5-го класса 168 учеников, среди них есть дети, которые всегда говорят правду (рыцари), и дети, которые всегда врут (лжецы). Каждый — либо рыцарь, либо лжец. Учитель может спросить любого пятиклассника о любом другом: «Он рыцарь?» или «Он лжец?».

Учитель знает, что когда ученик отвечает «Да», его тип меняется на противоположный (лжец становится рыцарем, а рыцарь – лжецом). Пятиклассники знают друг про друга, кто есть кто.

Может ли учитель опросить пятиклассников так, чтобы к окончанию опроса все дети были одного типа?

11) Аня, Галя, Ира и Юля занимаются в спортивной школе в разных секциях: шахматы, волейбол, гимнастика и баскетбол. Аня, Ира и волейболистка – одноклассницы. Аня и Галя на тренировки ходят пешком вместе, а гимнастка ездит на автобусе. Шахматистка не знакома ни с волейболисткой, ни с баскетболисткой. Кто в какой секции занимается?

Тема 5: «Математическая индукция»

1) Докажите, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел кратна 9.

2) Докажите, что неравенство $2n > 2n + 1$ верно при всех натуральных $n \geq 3$.

3) Докажите неравенство Бернулли: $(1 + x)^n \geq 1 + xn$,

где $x > -1$, а n – натуральное число.

Докажите, что сумма первых n нечётных чисел равна квадрату их числа:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

4) Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких разных степеней двойки.

5) Докажите, что сумма углов произвольного многоугольника равна $180^\circ(n - 2)$

6) Найдите в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, ... число, стоящее а) на 6-м; б) на 1994-м месте. Ответ объясните.

7) Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.

8) Докажите, что сумму из целого числа рублей больше семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 рублей?

9) Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

10) Головоломка "Ханойская башня" представляет собой восемь дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трёх колышков. Требуется переместить всю башню на другой колышек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Докажите, что головоломка имеет решение. Какой способ будет оптимальным (по числу перекладываний дисков)?

11) В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

Тема 6: «Инварианты»

- 1) На доске написано число 1. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?
- 2) Кузнечик прыгает по прямой: первый прыжок на 1 см, второй – на 2 см, третий – на 3 см и так далее. Может ли он после двадцать пятого прыжка вернуться в ту же точку, откуда начинал?
- 3) В угловой клетке таблицы 4×4 стоит знак «-», а в остальных клетках знак «+». За один ход разрешается в любой строке и в любом столбце поменять все знаки на противоположные. Можно ли сделать так, чтобы все знаки в таблице стали одинаковыми?
- 4) На доске написаны три целых числа: A , B , C . В следующей строке под ними пишутся три всевозможные разности этих чисел: $A - B$, $B - C$, $C - A$ и так далее, до пятой строки включительно. Можно ли подобрать числа A , B , C так, чтобы в пятой строке было число 1997?
- 5) У Ильи есть табличка 3×3 , заполненная числами от 1 до 9 так, как в таблице слева. За один ход Илья может поменять местами любые две строчки или любые два столбца. Может ли он за несколько ходов получить таблицу справа?
- 6) В языке Древнего Племена алфавит состоит всего из двух букв: "М" и "О". Два слова являются синонимами, если одно из другого можно получить при помощи исключения или добавления буквосочетаний "МО" и "ОММ", повторяемых в любом порядке и любом количестве. Являются ли синонимами в языке Древнего Племена слова "ОММ" и "МОО"?
- 7) Круг разделён на 6 секторов, в котором по часовой стрелке стоят числа 1,0,1,0,0,0. Можно прибавлять по единице к любым числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли сделать все числа равными?
- 8) Можно ли ходом коня обойти все клетки шахматной доски, начав с клетки $a1$, закончив в клетке $h8$ и на каждой клетке доски побывав ровно один раз?
- 9) Набор чисел a , b , c каждую секунду заменяется на $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$. В начале имеется набор чисел 2000, 2002, 2003. Может ли через некоторое время получиться набор 2001, 2002, 2003?
- 10) На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их суммой $ab + a + b$. Какое число может получиться после 19 таких операций?

Тема № 7: «Лингвистические задачи»

1) Даны фразы на японском языке (в русской транскрипции) и их переводы на русский язык:

1. Сэнсэй-га боку-но мура-кара мати-э итта. Учитель шёл из моей деревни в город.
2. Боку-но тоmodати-га сэнсей-но хон-о тотта. Мой товарищ брал книгу учителя.
3. Хигаси-кара-но кадзи-га мура-дэ фуйта. В деревне дул восточный ветер
4. Сэнсей-га мити-дэ кава-но фукуро-о сагасита. Учитель искал на дороге кожаный мешок.
5. Кодомо-га мура-дэ сэнсэй-о мита. Ребёнок видел учителя в деревне.

Задание: Переведите на японский язык (в русской транскрипции):

1. Учитель шёл на восток.
 2. Товарищ искал в городе кожу.
 3. Ребёнок видел меня на дороге в город.
- 2) В арабском языке 28 согласных звуков и 6 гласных, из них три кратких и три долгих. Слова в этом языке составляются из звуков по следующим правилам:
- а) первый звук слова – согласный, второй – гласный б) не могут встречаться два гласных подряд;
 - в) не могут встречаться три согласных подряд;
 - г) после долгого гласного не могут идти два разных согласных.

Задание: Сколько различных слов, состоящих из 5 звуков, можно составить в соответствии с правилами этого языка?

- 3) Перед нами зашифрованный русский текст: 1 2 + 3 + 4 + 5, 6 + 4 + 6 7 + 8 + 9 + 4 + 10 + 11
2 + 4 + 12 + 4 + 13 + 14. 1 15 + 6 + 16 + 7 + 16 7 + 8 + 9 + 14 8 + 8.
6 + 10 + 16 7 + 8 + 9 + 4 + 8 + 10 2 + 4 + 12 + 4 + 13 + 17
15 + 6 + 16 + 7 + 8 + 8, 10 + 16 + 10 7 + 8 + 9 + 17 + 10
18 + 16 + 19 + 11 + 9 + 8 2 + 4 + 12 + 4 + 13. 2 + 4 6 + 4 + 20 + 12 + 14 + 5
7 + 8 + 9 + 8 + 3 + 3 + 14 + 5 2 + 4 + 12 + 4 + 13 + 14
2 + 4 + 13 + 17 + 15 + 19 + 1 + 5 + 10 + 15 + 1 16 + 13 + 6 + 17

Каждой букве соответствует одно число (не обязательно её номер в алфавите, е и ё – одна и та же буква), буквы в одном слове разделяются плюсами, слова – пробелами. Расшифруйте этот текст.

4) Даны пословицы на курдском языке и их переводы на русский язык:

1. Дэрд дэрд дьзэ Нужда рождает нужду.

2. К'эсиб дэрде к'эсиб дьхунэ Бедняк понимает нужду бедняка.
3. Гае қэлп баре гьран нагьртэ Ленивый бык не берёт тяжёлую ношу.
4. Шер гоште шер нахвэ, шер гоште га дьхвэ Лев не ест мясо льва, лев ест мясо быка.
5. Ч'э'ве к'ор саг' дьбэ, дьле қэлп саг' набэ Слепой глаз становится здоровым, ленивое сердце не становится здоровым.

Переведите на курдский язык:

- а) ленивый лев ест мясо;
- б) здоровый бедняк берёт ношу;
- в) бык бедняка не понимает бедняка.

Примечание: г', к', ч', q, w - особые согласные звуки, э', э, ь -- особые гласные звуки курдского языка.

5) Найдите ключ к "тарабарской грамоте" — тайнописи, применявшейся ранее в России для дипломатической переписки: "Пайцике тсюг т ""камащамлтой чмароке"" — кайпонили, нмирепяшвейля мапее ш Моллии цся цинсоракигелтой неменилти".

6) Будем составлять предложения из слов: он, не, посадил, старика, на, осла.

При этом каждое слово должно входить во всякое предложение только один раз, каждое слово может употребляться только в той форме, в которой оно приведено в условии, использовать другие слова или какие-либо знаки препинания запрещается.

Задание: Определите, сколько предложений русского языка можно составить из приведённых слов при соблюдении указанных требований.

7) Даны следующие четыре множества слов:

1. (а) зверь, червь, инфузория, поэт, шука (б) стол, книга, земля, треугольник, пальто
2. (а) кит, ласточка, окунь, тигр, муравей (б) женщина, начальник, парикмахер, муж, кассир
3. (а) воробей, самолёт, баба-яга, муха, ракета (б) книга, туннель, уж, колодец, телефон
4. (а) собака, лошадь, голубь, осёл, мул (б) медведь, кенгуру, змея, тигр, окунь

Строки (а) и (б) в каждом случае соотносятся следующим образом: слова из строки 1(а) все обладают некоторым смысловым признаком, которым не обладает ни одно из слов строки 1(б). Назовём этот признак первым. Аналогично получаем второй признак (им обладают слова из 2(а) и не обладают слова из 2(б)), третий и четвёртый признак.

Задание: найдите слово (или слова), которое обладает всеми четырьмя признаками вместе.

8) Попробуйте расшифровать отрывок из книги "Алиса в Зазеркалье": " — БЕРПИ Э ЙДЕМГОКВЭЫ БИБЕО-ЖАКЙПЧ ЗВЕЛЕ, — ЗБИСИВ ФИВМИУ-КЕВМИУ ПЕЛЕВЧЖЕ ДГОСГАМОВЧЖЕ, — ЕЖЕ ЕСЖИЬИОМ МЕВЧБЕ МЕ, ЫМЕ Э ЦЕЬЙ, ЫМЕКЮ ЕЖЕ ЕСЖИЬИВЕ, — ЖА КЕВЧФО, ЖА ТОЖЧФО". Текст зашифрован так: десять букв ("а", "е", "и", "й", "о", "у", "ы", "э", "ю", "я") разбиты на пары, и каждая из этих букв в тексте заменена второй из пары. Все остальные буквы точно так же разбиты на пары.