

**МАТЕМАТИКА (старшая группа)**  
(преподаватель Мария Шамонова)

**Занятие 1.**

**Разминка.**

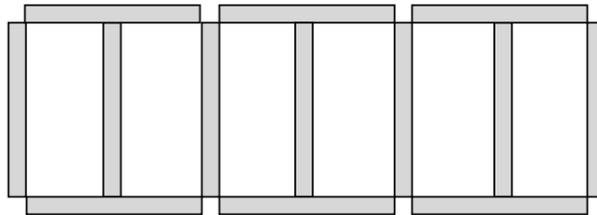
The length of an arc of a circle is 15 cm. The corresponding sector area is  $150 \text{ cm}^2$ .

Find

- the **radius** of the circle
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- the **angle** (measured either in degrees or radians) subtended at the centre of the circle by the arc.

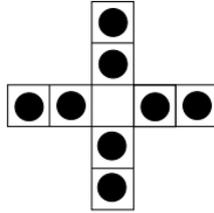
When freezing, water increases its volume by  $\frac{1}{11}$ . By what part of its volume will ice decrease when it melts and turns back into water?

18. A farmer had carefully assembled 13 identical fence panels to create 6 identical pens for his pigs.



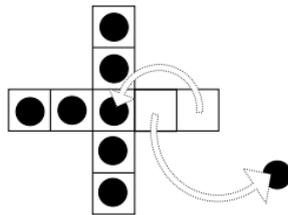
During the night some antisocial person stole one of the panels. Show how the farmer can use the 12 remaining panels to create 6 identical pens.

- 14 The diagram shows nine squares. There are counters on eight of the squares; the ninth square is empty.



A move on this diagram consists of jumping one counter over another to an empty square. The jumping counter moves in a straight line (up, down, left or right) and lands exactly two squares away from its original position. The counter that is jumped over is removed.

For instance, after the first move the position could be



- a Show that all four possible first moves lead to a rotation or reflection of the same position.

The game ends when it is impossible to make a move.

- b Show that, however you continue this game, there are at least two counters left when the game ends.

...

## Основные задачи. Графы

- 1) Все грани выпуклого многогранника - треугольники. Докажите, что каждое ребро многогранника можно покрасить в красный или синий цвет так, что из любой его вершины в любую другую можно попасть, двигаясь по рёбрам одного цвета.
- 2) В государстве 50 городов, из каждого выходит по 8 дорог. Сколько всего дорог в государстве?
- 3) В турнире принимает участие 15 шахматистов. Может ли быть так, что в какой-то момент каждый из них сыграл ровно 7 партий?
- 4) Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит по 3 дороги, быть 100 городов?
- 5) Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми. Каждый белый – с 3 чёрными и 3 белыми. Сколько лоскутков белого цвета?
- 6) Города империи с  $k$  столицами соединены дорогами так, что из любого города в другой можно по этим дорогам проехать. Доказать, что империю можно разделить на  $k$  республик так, что каждая республика имеет столицу и из любого города республики до столицы можно доехать по кратчайшему пути.
- 7) В стране есть несколько городов. Между некоторыми из них летают самолёты в одном направлении. Известно, что есть город, вылетов из которого, нельзя, перелетая из города в город, побывать в каждом городе страны. Докажите, что часть городов может отделиться так, что ни в один из отделившихся городов нельзя будет попасть с помощью перелётов ни из какого города оставшейся части.

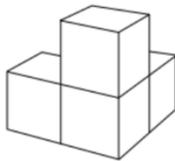
## Занятие 2.

### Разминка.

Bacteria on a Petri dish divide every hour, doubling their number (and the surface of the dish that they cover). If entire surface of the dish was covered by a monolayer of bacterial cells in 24 hours, what time did it take for these bacteria to cover one half of the Petri dish?

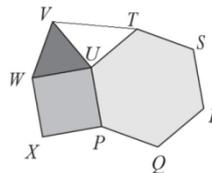
Jahnvi has four cubes all the same size: one blue, one red, one white and one yellow. She wants to glue the four cubes together to make the solid shape shown.

How many differently-coloured shapes can Jahnvi make? (Two shapes are considered to be the same if one can be picked up and turned around so that it looks identical to the other.)



4. The diagram shows a regular hexagon  $PQRSTU$ , a square  $PUWX$  and an equilateral triangle  $UVW$ .

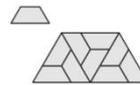
What is the angle  $TVU$ ?



6. The small trapezium on the right has three equal sides and angles of  $60^\circ$  and  $120^\circ$ . Nine copies of this trapezium can be placed together to make a larger version of it, as shown.

The larger trapezium has perimeter 18 cm.

What is the perimeter of the smaller trapezium?



- A 2 cm      B 4 cm      C 6 cm      D 8 cm      E 9 cm

### Основные задачи. Индукция

- В посёлке 100 домов. Сколько заборов, не пересекающих друг друга, можно поставить, чтобы каждый забор огораживал хотя бы 1 дом и никакие 2 забора не огораживали бы одну и ту же совокупность домов?
- На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость  $n$  прямых?
- Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.
- Докажите, что  $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$
- Любую ли сумму из целого числа рублей больше семи, можно уплатить без сдачи купюрами по 3 и 5 рублей?
- Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие 2 из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере 2 вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.
- В прямоугольнике  $3 \times n$  стоят фишки трёх цветов, по  $n$  штук каждого цвета. Доказать, что фишки можно переставить в каждой строке так, что в каждом столбце будут фишки всех цветов.

## Занятия 3-4.

### Математическая регата + разбор заданий.

Нужно будет напечатать листы с заданиями отдельно по турам и на определённое число команд.

*Тур 1. 10 минут. Каждая задача – 6 баллов.*

- 1.1. Существуют ли такие натуральные числа  $a$  и  $b$ , что  $b$  является натуральной степенью  $a$  и  $b$  в 16 раз больше  $a$ ?
- 1.2. Одно из измерений прямоугольника увеличили на 99см, а другое уменьшили на 1см. Можно ли утверждать, что площадь прямоугольника увеличилась? Обоснуйте ответ.
- 1.3. Незнайка лжёт по понедельникам, вторникам и пятницам, в другие дни говорит правду. В какие дни недели Незнайка может сказать: «Я лгал позавчера и буду лгать послезавтра»? Ответ обоснуйте.

*Тур 2. 15 минут. Каждая задача – 7 баллов.*

- 2.1. В доме двое механических часов. Одни из них спешат на 10 минут в сутки, а другие на 15 минут в сутки отстают. Сегодня в полдень и те, и другие часы показывали верное время. Когда в следующий раз они одновременно покажут верное время?
- 2.2. Можно ли изобразить 2 четырёхугольника так, чтобы их пересечение оказалось десятиугольником?
- 2.3. В поезде Москва-Переславль ввели сплошную нумерацию мест в вагонах. Во всех вагонах одинаковое количество мест. Известно, что места 385 и 416 в одном вагоне, а места 544 и 577 – в разных, причём эти вагоны не соседние. Сколько мест в одном вагоне? Обоснуйте ответ.

*Тур 3. 15 минут. Каждая задача – 7 баллов.*

- 3.1. При каких значениях  $k$  прямые  $y=kx$  и  $y=x+1$  пересекаются в первой координатной четверти?
- 3.2. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  точка  $K$  – середина гипотенузы  $AB$ , а  $M$  делит катет  $AC$  в отношении 2:1 (считая от вершины  $A$ ). Найдите острые углы треугольника  $ABC$ , если отрезок  $MK$  перпендикулярен  $AB$ .
- 3.3. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым по одной партии. Победитель выиграл у всех и набрал очков в 5 раз меньше, чем все остальные вместе. Сколько было участников? (Победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0 очков)

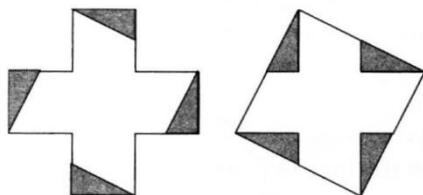
*Тур 4. 20 минут. Каждая задача – 8 баллов.*

- 4.1. Существуют ли 3 таких различных числа  $a, b, c$ , что  $a(b-c)=b(c-a)=c(a-b)$  ?
- 4.2. Треугольник  $ABC$  равнобедренный, угол  $BAC$  равен  $120^\circ$ . На продолжении стороны  $AC$  за вершину  $A$  взята точка  $D$ .  $AD=2AB$ . Докажите, что треугольник  $BDC$  равнобедренный.
- 4.3. На экране компьютера было записано число 123 456 789. Вася так вставил пробелы между некоторыми цифрами числа, что оно разбилось на несколько кусков. Числа, записанные на любых двух кусках, оказались взаимно простыми. Какое наибольшее число кусков могло получиться?  
Напоминание: взаимно простые числа – натуральные, имеющие только один общий делитель – единицу.

## Занятие 5.

### Разминка.

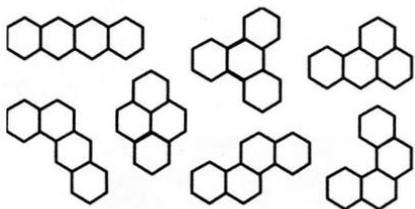
To paraphrase the old music-hall joke, almost any insult will make a Greek cross. But what I want you to do is *unmake* a Greek cross. In this region of Puzzledom, a Greek cross is five equal squares joined to make a + shape. I want you to convert it to a square, by cutting it into pieces and reassembling them. Here's one solution, using five pieces. But can you find an alternative, using four pieces, *all the same shape*?



Greek cross to square in five pieces. Now do it with four.

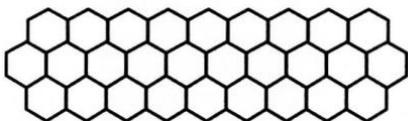
### Where There's a Wall, There's a Way

In the county of Hexshire, fields are separated by walls built from the local stones – which for some reason are all made from identical hexagonal lumps joined together. Perhaps they originated as basalt columns like the ones in the Giant's Causeway. Anyway, Farmer Hogswill has seven stones, each formed from four hexagons. In fact, they are precisely the seven possible combinations of four hexagons:



Seven stones to make a wall.

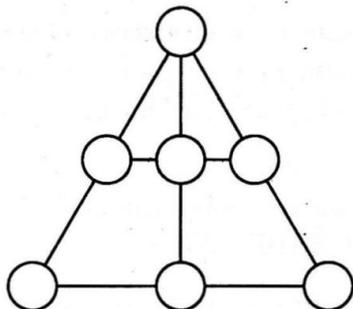
He has to make a wall shaped like this:



The required wall.

How can he do it? (He can rotate the stones and turn them over to obtain their mirror images if necessary.)

**278. Расположить в кружках числа от 1 до 7 так, чтобы сумма чисел по каждой прямой, содержащей три круга, была одна и та же.**



### **Основные задачи. Комбинаторика.**

- 1) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную букву из слова а) камзол; б) здание?
- 2) Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами можно сделать этот выбор?
- 3) Сколькими способами можно составить трёхцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти различных цветов? А если одна из полос должна быть красной?
- 4) Собрание из 40 человек выбирает председателя, секретаря и 5 членов комиссии. Сколько разных комиссий может быть составлено?
- 5) В урне  $m$  белых шаров и  $n$  чёрных. Сколькими способами можно выбрать из урны  $g$  шаров, из которых белых будет  $k$  штук? Каждый шар пронумерован.
- 6) Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько различных букетов можно составить?
- 7) На школьном вечере присутствует 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?
- 8) На полке стоит  $m+n$  различных книг, из которых  $m$  в чёрных переплётах, а  $n$  – в красных. Сколько существует перестановок этих книг, при которых книги в чёрных переплётах занимают первые  $m$  мест? Сколько положений, в которых книги в чёрных переплётах стоят рядом?