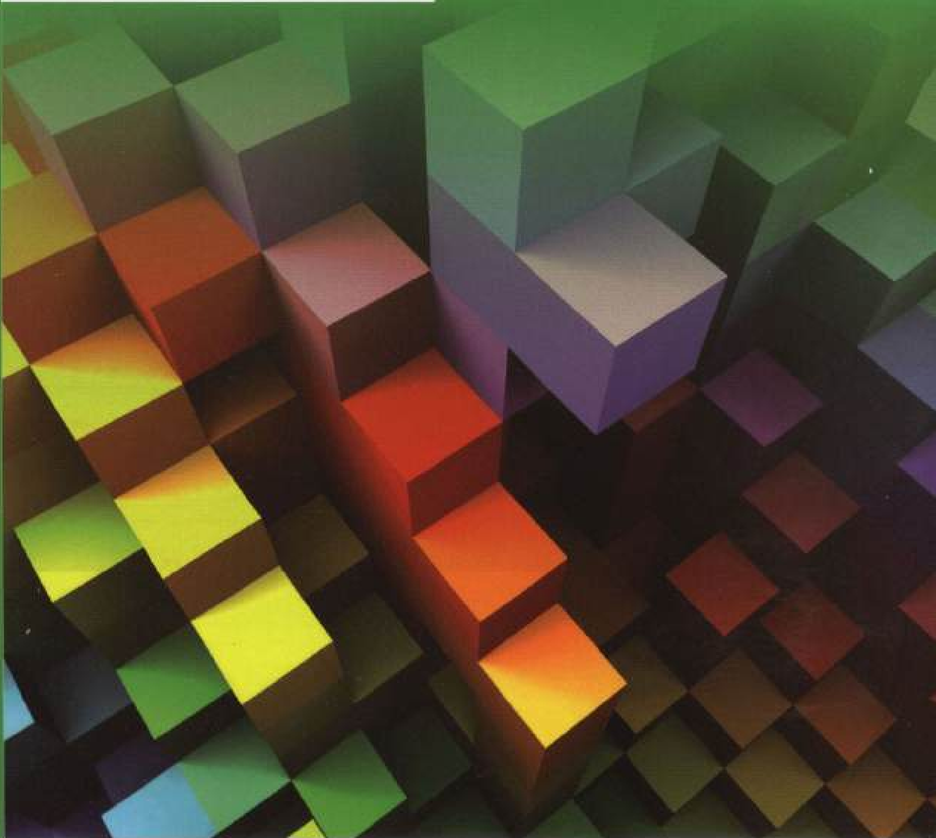
И.В. Раскина,
А.Д. Блинков



ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ

Выпуск 25

Школьные математические кружки
Выпуск 25

И. В. Раскина, А. Д. Блинков

Текстовые задачи

Москва
Издательство МЦНМО

УДК 51(07)
ББК 22.1
Р24

Раскина И. В., Блинков А. Д.

Р24 Текстовые задачи. — М.: МЦНМО, 2023. — 230 с. — (Школьные математические кружки; Вып. 25).

ISBN 978-5-4439-1740-5

Двадцать пятая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена текстовым задачам. Такие задачи очень важны для освоения учащимися математических методов работы с информацией.

В неё вошли разработки двенадцати занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для преподавателя. Имеется специальный раздел, посвященный работе с процентами.

Значительную часть книжки занимают дополнительные задачи с решениями и комментариями. Приведен список использованной литературы, а также указаны авторы задач.

Для удобства использования заключительная часть книжки, как всегда, сделана в виде раздаточных материалов. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям математики.

ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-1740-5

Предисловие

И чем же? — одними словами!
И. Бунин

Чему учат в школе? На разных уроках разному. Но почти на всех и не в последнюю очередь — работать с информацией. Воспринимать её, анализировать, делать выводы и описывать результат. Текст — основной источник информации. Поэтому текстовые задачи — один из краеугольных камней школьной программы по математике. Краеугольный в прямом смысле, соединяющий две «смежные стены»: текстовую постановку задач и математические методы их решения.

В современных учебниках это обстоятельство иногда подчёркивается особыми типами заданий: «переведите на математический язык», «постройте математическую модель» и т. п. Такие задания обычно подразумевают составление уравнений, неравенств или их систем. Эти моменты нашли отражение в предлагаемой книжке. Умению выбирать подходящую переменную и вычленять в тексте условие, позволяющее составить уравнение, посвящено шестое занятие, на седьмом занятии мы учимся не бояться большого количества переменных, на десятом — составлять системы уравнений, а на одиннадцатом — работать с неравенствами.

Но начинаем мы не с этого. Уравнение — важный, но далеко не единственный способ преобразования текста задачи в удобную для анализа форму. На этапе восприятия информации бывают полезны «промежуточные языки». Для задач первого занятия эту роль играет *чертёж*; для части задач третьего и всех задач четвёртого занятия — *таблица*. На втором и отчасти третьем занятиях отрабатывается навык *переформулировки* задач с языка процентов на язык умножения.

В школьных учебниках и в методической литературе таким приёмам уделено мало внимания. Приводя в качестве образца верные решения, их авторы, казалось бы, подробно объясняют переход от текста к уравнению. Но чем же? Одними словами. Целенаправленное обучение преобразованию текстовой информации в различные форматы кажется нам важным по двум причинам. Во-первых, вместо сообщения верных решений оно вооружает учеников удобными алгоритмами, применимыми к широкому классу задач. Во-вторых, умение решать текстовые задачи вообще не конечная цель, а лишь одно из средств, помогающих научить школьников работать с информацией математическими методами.

В одной из первых книжек нашей серии, «Арифметических задачах» П. В. Чулкова, приведены оригинальные решения задач, входящих в золотой фонд школьной математики. Перенос акцента с красоты решений на то, как их можно было бы придумать, побудил авторов включить в эту книжку не только алгебраические, но и арифметические методы решения задач. Не избегая частичного повторения тем и типов задач, имеющихся в книге П. В. Чулкова, мы старались не дублировать ни формулировок, ни подходов к решению. Также мы постарались не дублировать задачи, вошедшие в книжку А. Д. Блинкова «Классические средние в арифметике и геометрии».

Книжка «Текстовые задачи» содержит **двенадцать** занятий. В материалы каждого занятия входят: поясняющий текст для учителя; несколько подробно разобранных типовых задач; задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач (в ряде случаев — несколькими способами); методические комментарии для учителя, часто включающие в себя *путь к решению* (текст, объясняющий, как можно прийти к этому решению).

Отдельным списком представлены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также, как правило, приведены подробные решения (в отдельных случаях — ответы и указания). Для удобства в конце каждого занятия приведён список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые могут быть отнесены к нескольким занятиям.

Отметим, что многие задачи (как из занятий, так и из дополнительной части) ранее использовались на различных математических олимпиадах и турнирах, поэтому сюжеты этих задач яркие и запоминающиеся. Это выгодно отличает их от большинства задач школьных учебников и служит дополнительной мотивацией для учеников.

Материалы этой книжки могут использоваться как для проведения занятий кружка, так и для уроков математики в 5—9 классах. Занятия упорядочены не по сложности, а в соответствии с прохождением школьной программы. Как правило, задачи в них сгруппированы не по содержанию, а по методам решения; исключение сделано для двух тем: процентов (занятия 2, 3 и отчасти 4) и отношения скоростей (занятие 5). Как показывает практика, эти темы традиционно трудны для школьников в силу того, что это относительные величины. Интуиция, идущая от работы с целыми величинами, здесь не всегда работает. Более подробно об этом говорится в отдельной главе «Проценты», предваряющей все занятия.

Проводя занятие, посвящённое методу решения задач, важно соблюдать меру. С одной стороны, надо учить ребят, что делать, если задача не решается: как наглядно представить условие, на какие его особенности обратить внимание и т. д. С другой стороны, конкретный школьник может в данный момент вовсе не нуждаться в помощи, потому что эта задача для него проста. Либо он предпочитает решить её по-своему, нерационально или даже с ошибками, которые покажутся ему досадной случайностью. Преподавателю задача может быть интересна не сама по себе, а как пример применения определённой техники. А ученику может быть важным получить верный ответ и сделать это самому, а не по чужой подсказке. Эти противоречия можно смягчить разбором части задач для самостоятельного решения. После того как решишь задачу по-своему, обычно потом нетрудно и интересно посмотреть на альтернативный подход. Если метод действительно хорош, то рано или поздно ученик его применит.

Занятие 1 наиболее уместно проводить для 5 класса. Условия всех включённых в него задач можно наглядно изобразить с помощью отрезков соответствующей длины или точек на координатном луче. К нему в полной мере относится всё сказанное в предыдущем абзаце. Зачем ребёнку утруждать себя чертежом в задаче в одно действие? Часть детей и без этого легко назовёт верный ответ. Кто-то сначала перепутает, но неизбежно угадает со второго раза и в итоге будет доволен собой.

Готовое верное решение тоже можно ярко и понятно рассказать без чертежа. Интересно сравнить, например, решения аналогичных задач: задачи Д4 из этой книжки (нарисуем и увидим) и задачи 8 занятия 1 из книжки [16] (предположим, что дело было так... теперь добавим). Чтобы догадаться, что именно надо предположить и что потом добавить, надо обладать либо творческим мышлением, либо достаточным опытом в решении задач конкретного типа. А чертёж мы рекомендуем ученикам использовать как первый шаг для понимания условия задач, а учителям — как способ быстро превратить понятное некоторым в понятное всем. И на этом занятии советуем делать чертёж к каждой разбираемой задаче. Если учитель или ученик дополнит чертёж интересным словесным объяснением, это только плюс.

Занятия 2 и 3 полностью составлены из задач на проценты. Группировка по содержанию для этой темы нам показалась уместной, поскольку почти все школьники одинаково плохо её усваивают на уроках. Почему так происходит? Потому что с процентами действительно неудобно работать. Но они и придуманы вовсе не для работы, а лишь для передачи информации. Поэтому язык процентов уместен в выпуске новостей, в научной статье, в деловом отчёте. А на уроках математики — только в двух случаях: в формулировке задачи и при записи ответа. А для работы удобны не проценты, а дроби, десятичные и обыкновенные.

В нашей книжке мы исходим из того, что на школьных уроках дети познакомились с понятием процента и научились находить один процент как промежуточное действие в любой из трёх типовых задач-одноходовок на проценты. Этот этап необходим для понимания смысла процентов, хотя и увеличивает количество действий вдвое или даже втрое. Например, если надо увеличить число 15 на 30 %, достаточно умножить его на 1,3. А пятиклассников учат сначала найти 1 % от 15, потом — 30 % от 15, а затем прибавить полученный результат к 15. Если это твёрдо выучить и остановиться, более сложные задачи на проценты из-за большого количества действий останутся недоступны большинству учеников.

Одноходовые задачи на проценты в книжке не рассматриваются, таких задач более чем достаточно в любом школьном учебнике. Перевод с языка процентов на язык умножения десятичных дробей мы считаем идеологической основой темы «Проценты», ему полностью посвящено второе занятие. Оно призвано помочь детям осознать, что проценты, десятичные дроби и обыкновенные дроби — не три отдельные темы, а разные языки, и привыкнуть во всех затруднительных случаях переводить задачу с удобного только для журналистов языка процентов на родной язык дробей. Преодолеть «языковой барьер» помогает достаточное количество устных и письменных упражнений на заполнение пробела типа «Увеличить на 30% означает умножить на ...» и «Было x, стало $0{,}6x$. Значит, число уменьшилось на ... процентов».

Так как применение пропорций в задачах на проценты обычно неплохо изучается на уроках, то мы его используем как уже сформированную технику на третьем занятии. Основной новый метод в третьем занятии — это применение таблиц. На этом занятии также отрабатывается умение определять, что следует брать за 100%, с помощью волшебного слова «чем». Оба занятия имеет смысл проводить в 6—7 классах.

Занятие 4 составлено, на первый взгляд, из разных по тематике задач. Объединяет их наличие в условии трёх величин, одна из которых равна произведению двух других. В качестве универсального «ключа» к таким задачам рассматривается составление таблиц. Оно развивает также общие умения: структурировать информацию, видеть связь между величинами, удачно вводить переменные.

Идеологически это занятие продолжает первое: таблицы, как и чертежи, помогают осознать условие, перевести его на другой язык. Они одинаково хорошо совмещаются и с решением задач по действиям, и с составлением уравнений. Подобранные задачи ориентированы на учеников 6—7 классов. В занятие также вошли задачи на проценты, в которых, кроме составления таблиц, используются идеи и техники двух предыдущих занятий.

Занятие 5 учит использовать отношение скоростей при решении задач на движение. Замеченная на занятии 4 идея родства между разнообразными по тематике задачами о трёх величинах типа «два множителя и их произведение» проявляется на этот раз в наличии задач на производительность и на стоимость, в которых умение увидеть пропорциональность величин также упрощает решение. А навык понимания условия с помощью чертежа применяется в гораздо более сложных случаях, чем на первом занятии. Технически предложенные решения доступны в конце 6 класса, но по сложности некоторые задачи ближе к 7 и даже 8 классу.

Первые пять занятий развивали и расширяли курс математики 5—6 классов. Дальнейшие в большей степени примыкают к курсу алгебры 7 и 8 классов.

На **занятии 6** обсуждаются задачи на составление уравнений с одной переменной. Оно уместно в 7 классе, опирается на накопленный на уроках опыт в составлении уравнений и обобщает его. Также в нём развивается идея первого занятия о родстве арифметических и алгебраических решений: одно и то же можно обозначить переменной, можно частью, можно единичным отрезком или клеточкой. Не случайно книжку «Арифметические задачи» продолжают не «Алгебраические задачи», а именно «текстовые». Умение решать задачи алгебраически — не повод полностью отказаться от арифметического подхода.

Занятие 7 посвящено задачам, для решения которых уместно ввести несколько переменных. При этом часто требуется найти значение не каждой переменной по отдельности, а либо их линейной комбинации, либо их отношения. На занятии обсуждается что можно найти по данным задачи, а что нельзя. Кроме того, в нескольких задачах встречается среднее арифметическое каких-либо величин. В процессе их решения показан полезный приём перехода от него к сумме всех величин. Занятие адресовано семиклассникам.

На **занятии 8** ученики смогут применить полученные ранее навыки в новых ситуациях. Все задачи этого занятия так или иначе связаны с движением по течению и против течения. Некоторые из них имеют традиционные сюжеты: движение по реке или по эскалатору. Их решение позволит школьникам вспомнить основные идеи и техники, характерные для таких задач. Основную часть занятия составляют задачи с другими сюжетами, в которых рассматриваются величины, одновременно по одной причине убывающие, а по другой возрастающие (либо также убывающие). Несмотря на несхожесть сюжетов, это позволяет их также интерпретировать в виде движения по реке. Кроме того, в таких задачах интересно проследить связь между алгебраическим и арифметическим решениями. Это занятие предназначено для 8—9 классов.

Занятие 9 содержит задачи, в которых все величины целые, что позволяет, наряду с составлением уравнений, использовать факты из теории делимости, перебор и другие нестандартные рассуждения. Сами факты чаще всего известны из школьной программы, но умение применить их в нужный момент и на нужном уровне строгости нуждается в отработке. Уравнения, составляемые в процессе решения, как правило, содержат несколько переменных и не решаются, если не использовать указанные приёмы. Занятие также адресовано 8—9 классам, но может проводиться и ранее.

Занятие 10 посвящено задачам, для решения которых уместно составлять системы уравнений. Как правило, эти уравнения линейные или легко сводятся к линейным. Это занятие предназначено для 7—8 классов. Применять системы уравнений к решению отдельных задач можно и ранее, до изучения соответствующей темы. Сложение уравнений и подстановка — естественные идеи, доступные и шестиклассникам. А на уроках в 7 классе изучаются алгоритмы, позволяющие решить любую систему линейных уравнений, в том числе и с неудобными коэффициентами. Вместе с тем при работе со школьниками, испытывающими технические трудности, его можно отнести и к 9 классу.

Занятие 11 содержит задачи, для решения которых потребуется использовать неравенства и оценки. Исходя из школьной программы его уместно проводить в 8—9 классах, но для «продвинутых» учащихся оно доступно и ранее. Задачи этого занятия весьма разнообразны: в некоторых надо составлять и решать линейные неравенства или их системы, в других — сравнить две величины, что позволяет отработать определения понятий «больше» и «меньше», а третьи можно решить на уровне арифметических действий и здравого смысла.

Занятие 12 — нестандартные задачи — соответствует своему названию. Часть задач этого занятия с удовольствием решат отдельные пятиклассники, часть поставит в тупик выпускников школы, причём эти части пересекаются. Оно несколько отличается от предыдущих занятий: почти все предлагаемые задачи — для самостоятельного решения. Это обусловлено тем, что для этих задач невозможно вычленить типовые приёмы решения, каждая из них потребует отдельного подхода.

По традиции в конце книжки все занятия представлены в виде дидактических материалов. Понятно, что преподаватель математического кружка (или учитель на уроках или факультативных занятиях) может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения и т. д.

Выражаем благодарность всем авторам книг и статей, указанных в списке литературы, а также авторам всех использованных задач (многих из которых установить, к сожалению, не удалось).

Мы благодарим А. И. Сгибнева, Ю. М. Эдлина и А. В. Шкловера, которые высказали ряд ценных замечаний, ознакомившись с черновой версией текстов. Наша особая благодарность — редактору серии А. В. Шаповалову. Его внимательное прочтение книги способствовало улучшению и уточнению текстов: как вводных замечаний, так и условий и решений задач. Отдельное спасибо — сотрудникам издательства МЦНМО, без деятельного участия которых эта книжка не была бы издана.

Проценты

— Что с проблемой?
— Я её решила.
— И как ты её решила?
— Я решила, что это не проблема.

Проценты считаются трудной темой. Попытаемся разделить трудности на объективные, преодоление которых поможет ученикам подняться на ступеньку выше, и искусственные, которые хорошо бы обойти за счёт продуманной методики.

Начнём с определения. **Процент — это не отдельное глубокое математическое понятие. Это всего лишь одна сотая.** Почему их используют чаще других дробей? В первую очередь потому, что единый знаменатель 100 упрощает сравнение дробей. Разница между 67-процентной и 60-процентной скидкой очевидна, а сравнение $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$ требует навыка и усилий.

Стандартный общий знаменатель удобен ещё и при сложении дробей. Но сложение — далеко не основная операция в работе с дробями. Чаще приходится находить дробь от числа и число по его дроби, что связано с умножением и делением числа (как целого, так и дробного) на дробь. В более сложных задачах техническое удобство каждого действия вообще становится менее значимым по сравнению с общей логикой решения. Таким образом, проценты удобны именно как форма представления информации, но не как аппарат для вычислений. Никакого раздела «Проценты», изучающего методы работы с ними, в математике нет.

Объём и последовательность изучения процентов в массовой школе соответствует сказанному выше. Рассмотрим их на примере учебника Н. Я. Виленкина. Проценты вводятся в конце пятого класса. Дети знакомятся с определением и учатся решать три типа элементарных задач-одноходовок на проценты. Для этого достаточно одного параграфа.

Более сложные, многоходовые задачи на проценты в учебнике Н. Я. Виленкина появляются позже, в 6 классе, но не как отдельная тема, а лишь как одна из возможных формулировок задач на дроби. Соответственно и решаются они с помощью умножения и деления на дробь.

Очередной шаг в решении задач на проценты ученики делают после изучения пропорций. Появляется алгоритм, универсальный для всех трёх типов элементарных задач, и даже слабые ученики перестают их путать. Заметим, что и на этот раз проценты рассматриваются не как особый математический объект с заслуживающими изучения свойствами, а как внешний признак типовой элементарной задачи, которую удобно решать с помощью пропорций.

Дети неплохо усваивают алгоритмы решения типовых задач-одноходовок на проценты. Но даже небольшое усложнение условия приводит к большой путанице. Её причина в том, что **проценты, как и любая дробь от числа, — величина относительная, а не абсолютная.** Работая с ними, надо чётко понимать, от какой величины они берутся (иногда её называют базой). Но для краткости её не всегда явно указывают. Школьник может поначалу вообще не видеть проблемы и применять привычные алгоритмы работы с абсолютными величинами, т. е. складывать проценты от разных величин. А может неверно понять условие и ошибиться в выборе базы. То ли «плохо умеет читать», то ли условие задачи действительно с точки зрения грамматики можно трактовать неоднозначно.

Привычный и удобный для восприятия знак % усугубляет проблему. Он внешне напоминает единицу измерения. Школьник привык, что одноимённые единицы разумно складывать без лишних вопросов. Если вчера продали 10 кг картофеля, а сегодня 20 кг, то всего продали 30 кг картофеля. Никакие уточнения не нужны. Если «кг» заменить на «мешков» или «шт.», логика не изменится. А почему она должна меняться, если вместо «шт.» написать «%»? Тем более что в некоторых задачах и сложение процентов приводит к верному ответу. В этом проценты коварнее обыкновенных и десятичных дробей. Если после числа нет знака (т. е. вместо 10% написано 0,1), читатель скорее обратит внимание на отсутствие размерности.

Ещё одну дополнительную трудность создаёт предлог «на». В начальной школе вырабатывается твёрдый рефлекс: «Если больше <u>на</u> сколько-то, то надо прибавить. А если <u>во</u>

сколько-то раз, то умножить». Поэтому привычка увеличивать число 15 на 30% не умножением на 1,3, а в три действия (сначала найти 1%, потом 30% — чтобы узнать, что прибавить, и наконец прибавить) так живуча. Для задач в одно действие она полезна и с точки зрения осознанности, и с точки зрения удобства устного счёта. Но она сильно усложняет решение многоходовых задач (это бы ещё полбеды, все такие задачи искусственные и чем-то напоминают цирковые фокусы) и применение алгебраического метода (если вместо $1{,}3x$ каждый раз писать $x + x : 100 \cdot 30$, то выйдет беда).

Одновременное разрушение нескольких стереотипов придаёт каждой задаче на проценты более чем в одно действие ореол нестандартности. Однако встречающиеся в них **ситуации хоть и не просты, но довольно однообразны и легко классифицируются**. Чтобы стать «магистром процентов», достаточно освоить работу с четырьмя конструкциями. Каждая может либо образовывать самостоятельную задачу, либо быть элементом более сложной.

1. Величина последовательно изменяется несколько раз. Проценты каждый раз берутся от новой базы. Так происходит, скажем, при начислении банковского процента на текущий остаток. Например, вклад дважды увеличивался на 10%, но в итоге не на 20%, поскольку база изменилась. Заметим, что если в условии это явно не указано, то задача не вполне корректна.

2. Дана разница двух величин в процентах (или её требуется найти). Многие ученики не видят разницы между «А на 40% больше Б» и «Б на 40% меньше А». Она спрятана за предлогом «на» и знаком «%». Запомнить, что тут дело нечисто и с «%» почему-то нельзя обращаться как с «кг» и «км», можно и с первого раза. Но научиться не путать А и Б в конкретной ситуации трудно. А учителю легко переоценить успех: с вероятностью $\frac{1}{2}$ ученик наугад сделает правильно, а если полкласса верно решили трудную задачу, это обычно не так уж плохо. Заметим, что в задачах на дроби предлог «на» используется реже, а база обычно явно указана. Например, «Малыш съел $\frac{2}{5}$ от того, что съел Карлсон» — типично, коротко и ясно. Или «Малыш съел на 60% меньше

Карлсона» — так же типично и коротко, но не сразу ясно, чем плохо принять съеденное Малышом за 100%.

3. Развитие той же ситуации для трёх одноимённых величин. Если знаешь разницу между А и Б и разницу между Б и В, то как найти разницу между А и В? Ну ясно же, что сложением или вычитанием! Как тут не возненавидеть проценты, в которых и это почему-то нельзя...

4. Зная процентное изменение двух величин, определить процентное изменение связанной с ними третьей величины. Третья величина может быть произведением двух первых (найти изменение площади прямоугольника по изменению сторон), их частным (найти изменение скорости движения по изменению времени и расстояния) или линейной комбинацией (найти изменение периметра прямоугольника по изменению сторон; в таком случае в условии дополнительно дано отношение сторон). Тут неопытный ученик скорее даже не ошибётся, а просто растеряется и не напишет ничего или сделает непредсказуемые ошибки.

Итак, задачи на проценты:

- трудны для учеников, не привыкших к работе с относительными величинами;
- сводятся к нескольким типовым ситуациям.

Это означает, что не следует относиться к ним **как к нестандартным задачам.** С помощью подходящих алгоритмов и технических приёмов можно обучить школьников грамотно действовать в типовых ситуациях. Выбор технических приёмов обуславливает более общая педагогическая задача: **научить грамотно обращаться не только с абсолютными, но и с относительными величинами**, т. е. понимать, что они имеют смысл не сами по себе, а в связи с некой основой, или «базой». Эта связь устанавливается с помощью умножения на дробь. При таком подходе **умение решать задачи на проценты сводится к двум вспомогательным навыкам.**

1. При чтении условия **перевести его с языка процентов на язык дробей.** Например, «увеличили на 10%» автоматически следует понимать как «умножили на 1,1» и т. п. Всю содержательную часть решения осуществлять на языке дробей. Перед записью ответа осуществить обратный перевод. Например, было x, а стало $0{,}28x$, т. е. 28% от исходной величины.

Спрашивалось, на сколько процентов она уменьшилась. Ответ: на 72%.

2. **Уметь верно определять базу**, т. е. понимать, какая именно величина принимается в данном случае за 100%.

Составляя занятия 2, 3 и отчасти 4, мы исходили из изложенного ниже примерного плана работы с процентами на уроках и кружке.

1. Понятие процента. Решение трёх типов элементарных задач на проценты через нахождение 1%. Обычно качественно изучается на уроках и не входит в нашу книжку.

2. Связь процентов с умножением на дробь. Тоже проходится на уроках, но не всегда хорошо отрабатывается. На первом этапе полезны упражнения на заполнение пробела типа «Увеличить на 30% означает умножить на ...» и «Было x, стало $0{,}6x$. Значит, число уменьшилось на ... процентов». Их отсутствие или недостаток на уроках можно восполнить на кружке. КПД таких вопросов очень высок, так как ни на оформление, ни на вычисление время не тратится. Только на осознание и краткий ответ. В книжке такие упражнения не приводятся.

3. Решение одноходовых задач не через нахождение 1%, а умножением или делением на дробь. Тоже изучается на уроках и тоже не всегда хорошо. Дети (и часть учителей) считают, что если старый способ удобен, то переучиваться на новый способ незачем. Старый действительно удобен, и «отменять» его действительно незачем. Но новый необходим для дальнейшего продвижения. Если ребёнка, решившего «по-старому», похвалить за верное решение, а потом самому или с помощью другого ученика быстро записать второе решение, конфликта не возникает, постепенно дети становятся «двуязычными». Этот этап в нашей книжке тоже никак не представлен.

4. Решение двухходовых задач, подобных задаче 2.1 нашего занятия. В занятии рассмотрены два подхода к ней и указано преимущество второго. В этой книжке всего одна задача такого уровня, чего явно недостаточно. Такие задачи есть в школьных учебниках и другой литературе.

5. Решению сложных задач с помощью умножения на дробь полностью посвящено второе занятие нашей книжки. Его смысл не столько в отработке полезного навыка на бо-

лее сложном материале, сколько в мотивации к применению нового навыка. Продемонстрировать преимущество пока ещё непривычного языка умножения на дробь могут лишь задачи, решать которые на этом языке значительно удобнее, чем через нахождение 1% от числа. Наиболее эффективно проводить это занятие одновременно с предыдущим этапом, т. е. сначала решить несколько двухходовых задач. Часть детей предпочитает решать их «по-старому», через нахождение 1%. Затем провести это занятие, которое должно и самых упорных убедить в удобстве языка умножения. А затем продолжить решение двухходовых задач в качестве закрепления и повторения. Почти все задачи второго занятия связаны с изменением одной и той же величины, т. е. с первой из четырёх описанных выше конструкций.

6. Обучение правильному выбору базы. Люди с высоким развитием логической культуры, автоматически анализирующие и верно понимающие прочитанное, в этом не нуждаются, но таких мало. Гораздо большее число людей можно успешно обучить с помощью специальных приёмов верно понимать несколько конкретных словесных оборотов, относящихся к процентам. Формированию этого навыка посвящено третье занятие. Содержательно занятие построено на второй и третьей упомянутых конструкциях.

7. Четвёртой конструкции посвящён фрагмент четвёртого занятия. Для школьников, обученных воспринимать процентное изменение как умножение на дробь и верно искать базу, основная сложность таких задач заключается уже не в работе с процентами, а в установлении взаимосвязи между несколькими величинами. Это удобно делать с помощью таблиц, которые мы активно пропагандируем и вообще, и на четвёртом занятии в особенности.

Предложенный план лишь примерный и может варьироваться. Например, пункт 6 ничем не плохо поменять местами с пунктами 4 и 5 или перемешать с ними; у учителя могут быть свои интересные приёмы, не упомянутые в нашей книжке; не всегда возможно согласовать происходящее на кружке и на уроках и т. д. Но есть и концептуальный момент: **задачи на проценты, аналогичные задачам занятия 2, 3 и 4, могут принести вред вместо пользы, если их предлагать до обучения**

находить процент от числа умножением его на соответствующую дробь. Это утверждение далеко не очевидно. Более того, у части читателей оно вызовет активный протест. Разве задача может принести вред? Разве плохо занять способных детей задачей со звёздочкой до того, как весь класс подтянется к изучению простого метода её решения? Только здесь ещё не хватало возрастных ограничений!

Однако рассмотрим конкретную ситуацию. Вскоре после знакомства с понятием процента и тремя типами элементарных одноходовок на кружке предложена задача 2.1 из этой книжки и несколько аналогичных. Пока умножение на дробь ещё не пройдено, из двух рассмотренных в занятии способов ребятам доступен только первый. Одни запомнят приём и научатся решать такие задачи сразу, другие постепенно, третьи так и не научатся. Ну и что, это же задача со звёздочкой? Зато самые толковые смогут применить тот же метод и к более сложным задачам (см. альтернативное решение задачи 2.6).

А что дальше? С точки зрения развития математической культуры дальше тупик. Хорошая задача не только даёт повод подумать и от этого стать капельку умнее, но и продвигает ученика содержательно в правильном направлении, формирует полезные рефлексы. А какой рефлекс формирует действие $110 : 100 \cdot 10 = 11$ (%)? Что с процентами можно обращаться примерно как с килограммами. Ну то есть иногда можно. Со $110\,\%$ можно. И потом уже надо складывать $110\,\% + 11\,\%$, тогда ответ верный. А сразу прибавлять $100\,\% + 10\,\% + 10\,\% = 120\,\%$ нельзя, тогда ответ будет неверный. Вы что-то поняли? И я не совсем всё. Но задачи теперь буду решать правильно. Ну то есть иногда правильно.

До описанного абсурда дело редко доходит. Одни дети хорошо понимают, когда запись $110\,\%$ означает просто долю (т. е. 1,1), а когда количество той или иной величины (т. е. $1{,}1x$ или $1{,}1y$). Другие понимают это в процессе обсуждения задачи, но потом забывают суть, т. е. понимают «не совсем всё». И упорно пытаются складывать относительные величины в дальнейшем. Практика показывает, что «других» очень много. И что взрослые люди либо решают такие задачи двукратным умножением на 1,1, либо всю жизнь считают проценты трудной темой.

Предвидим ещё одно разумное возражение. Между первым знакомством с процентами и нахождением дроби от числа может пройти полгода. Неужели всё это время нельзя давать дополнительные задачи на проценты повышенной трудности? На этот вопрос есть как минимум два ответа. Во-первых, не все интересные задачи на проценты умножением решаются существенно проще, чем через нахождение 1% от числа. Если в задаче кроме относительных величин есть и абсолютные, их решать можно и нужно когда и как угодно. Таковы, например, задачи на дроби и проценты, решаемые с конца, а также задачи на концентрацию (в том числе знаменитые «сухие грибы» и аналогичные задачи, связанные с сухим веществом).

Во-вторых, учеников сильного класса и тем более математического кружка обучить находить 110% от числа умножением его на 1,1 можно при желании и до освоения технологии нахождения дроби от числа умножением на неё. Потому что поделить на 100 и умножить на 110 — всё равно что умножить на 110, а потом подвинуть запятую на два разряда влево, т. е. умножить на 1,1. Чтобы это понять, достаточно уметь умножать десятичные дроби, а обыкновенные не обязательно. Так что знаменатель 100, выбранный человечеством для процентов, действительно самый лучший знаменатель на свете!

Занятие 1
Нарисуем условие

Что нам стоит дом построить?
Нарисуем — будем жить!

С. Маршак

Чтобы решить задачу, надо осознать её условие. Нулевого шага — прочитать его — хватает не всегда. Простейший первый шаг — сделать краткую запись условия — помогает выделить главное и структурировать данные. Второй шаг — не только изобразить данные словами и числами, но и проиллюстрировать графически. В этом занятии собраны задачи, в которых чертёж служит ключом к решению. Их можно разделить на две группы. Первая связана со сложением и вычитанием (больше *на...*), вторая — с умножением и делением (больше *в...*, задачи на доли и дроби).

Не путать сложение с вычитанием учат в начальной школе и в начале 5 класса. В задачах 1.1 и 1.5 бóльшая величина изображается более длинным отрезком. В задачах 1.2 и 1.7 предлагается изобразить числа в виде точек на координатном луче; здесь «больше» означает правее. Обе эти техники уместны не только на занятиях кружка, но и на уроках, для тренировки можно использовать также задачи Д1—Д3.

С задачами на доли и дроби школьники встречаются в течение нескольких лет, постепенно меняя технику их решения. Решение «на клеточках» до изучения действий с обыкновенными дробями способствует глубокому неформальному пониманию дробей. Такие решения мы предлагаем в задачах 1.3, 1.4, 1.6, 1.9, 1.10, а также Д4—Д9 и Д11.

Применение графических схем в задачах на движение не вошло в это занятие и вообще в эту книжку; оно обсуждается, например, в книгах [3] и [16], а также во многих других изданиях.

Это занятие адресовано пятиклассникам. Главная его цель — развитие навыка графического изображения условия в затруднительной ситуации. Если ученику решение очевидно сразу, пусть решает как хочет. Потом он легко поймёт смысл чертежа при разборе. А при малейших затруднениях стоит посоветовать для начала нарисовать условие.

1.1. Эники-Беники. Эники и Беники ели вареники с вишней и с творогом. Эники съели на 35 больше вареников с вишней, чем Беники. А всего вареников Эники съели на 26 больше, чем Беники. Кто съел больше вареников с творогом и на сколько?

Решение. Изобразим вареники с вишней сплошной линией, а с творогом — штриховой (см. рис. 1.1). На чертеже порция вареников с творогом для каждого едока состоит из двух частей. Одна часть у них одинаковая, а другая нет. У Беников она составляет 35 вареников, а у Эников — 26 вареников. Поэтому Беники съели больше на $35 - 26 = 9$ вареников с творогом.

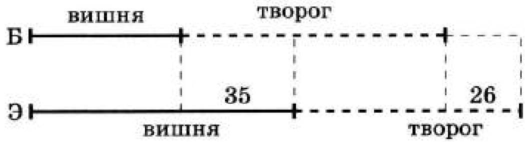


Рис. 1.1

Ответ: Беники съели на 9 вареников с творогом больше.

1.2. День рождения. У Саши и Вани дни рождения в один и тот же день. Каждый из них отмечает свой день рождения тортом со свечками по количеству исполнившихся ему лет. В тот год, когда они познакомились, у Саши на торте было столько же свечек, сколько у Вани сегодня. Известно, что суммарное количество свечек на четырёх тортах Вани и Саши (тогда и сегодня) равно 216. Сколько лет исполнилось Ване сегодня?

Рис. 1.2

Решение 1. В год знакомства Саше исполнилось столько же лет, сколько Ване сегодня. Обозначим это число буквой a и отметим на координатном луче точку с координатой a (см. рис. 1.2). На том же луче отметим точки, соответствующие возрасту Вани тогда и возрасту Саши сегодня. Между «тогда» и «сегодня» для Саши и для Вани прошло одинаковое число лет, поэтому длины стрелочек на рисунке одинаковы. Если одно слагаемое на сколько-то увеличить, а другое на столько же уменьшить, их сумма не изменится. Поэтому суммарное количество свечек на четырёх тортах равно $4a = 216$. Тогда $a = 216 : 4 = 54$.

Решение 2. Пусть сегодня на торте у Вани a свечек. В год знакомства, на t лет раньше, на торте у Саши было также a свечек, а на торте Вани было $(a - t)$ свечек. Следовательно, сегодня на торте у Саши $(a + t)$ свечек. Тогда указанное в условии суммарное количество свечей равно

$$a + a + (a - t) + (a + t) = 4a.$$

Таким образом, $4a = 216$, т.е. $a = 54$. Значит, сегодня Ване исполнилось 54 года.

Ответ: 54 года.

1.3. Торт. Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая у Пятачка?

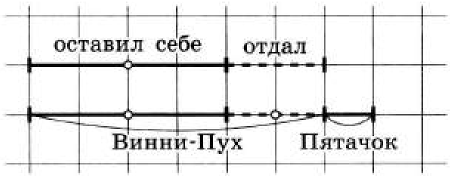


Рис. 1.3

Решение 1. См. рис. 1.3. Первый отрезок изображает долю Винни-Пуха: треть её (штриховая линия) он отдал, а две трети (сплошная линия) оставил себе. На втором чертеже нарисован весь торт: доля Пятачка увеличилась втрое, значит, штриховой подарок друга составляет две части, а исходная доля Пятачка — одну, вдвое меньше штриховой. Теперь считаем клеточки: Пятачку вначале досталась одна из семи, а Винни-Пуху шесть из семи.

Решение 2. Пусть вначале доля Пятачка составляла x. Потом она увеличилась втрое и стала составлять $3x$. Значит, Винни-Пух отдал Пятачку $3x - x = 2x$. Это треть его доли, а вся его доля равна $6x$. Весть торт составляет $6x + x = 7x$.

Ответ: у Пуха вначале было $\frac{6}{7}$ торта, а у Пятачка была $\frac{1}{7}$.

▸ Решение задач на части с помощью клеточек вызывает два вопроса. Первый — насколько оно строгое? Этот вопрос касается не сути решения, а языка. Клеточки и другие графические методы помогают осознать условие и увидеть решение. Когда суть понятна, можно при желании называть клеточку (две клеточки и т. д.) частью или даже ввести переменную, как в решении 2. Выбор переменной — дело тонкое. Если принять за x долю Винни-Пуха, придётся работать с дробными коэффициентами. А можно ввести даже две переменные (массы первоначальных кусков Винни-Пуха и Пятачка) и искать их отношение. Чертёж помогает не только рассказать решение «на клеточном уровне», но и удачно выбрать переменную и записать то же самое решение «по-взрослому».

Второй вопрос: как выбрать масштаб, чтобы клеточки помогали, а не мешали? В рассмотренной задаче всё так хорошо получилось отчасти оттого, что отданная треть доли Винни-Пуха изображалась двумя клеточками. Поэтому она удобно поделилась пополам, и исходная доля Пятачка соответствует одной клетке. Но первоначально выбранная длина отрезка может оказаться неудачной, и наглядный чертёж не всегда получается с первого раза. Предлагаем учителю на занятии сначала специально взять неудачную длину отрезка, заметить это и вместе с учениками подобрать нужную. В данном случае треть должна делиться пополам, поэтому долю Винни-Пуха и разумно изобразить отрезком длины 6 (или 12) клеток. Такие упражнения подводят к разумности приведения дробей к общему знаменателю и впоследствии помогут лучше понять, как и зачем оно делается. ◂

1.4. Зонтики. Однажды в город пришёл торговец с зонтиками трёх цветов. Синих зонтиков у него было вдвое меньше, чем жёлтых и красных, красных — втрое меньше, чем жёлтых и синих, а жёлтых зонтиков было 30. Сколько всего зонтиков было у торговца?

Решение. См. рис. 1.4. На первом отрезке показано, что синих зонтиков вдвое меньше, чем жёлтых и красных. Этот же рисунок можно истолковать по-другому: синие зонтики составляют треть от всех. Аналогично на втором отрезке показано, что красных втрое меньше, чем жёлтых и синих. Это означает, что красные зонтики составляют четверть от

Рис. 1.4

всех. Нарисуем третий отрезок, изображающий все зонтики. Чтобы на нём чётко изображались и $\frac{1}{3}$, и $\frac{1}{4}$, сделаем его длиной 12 клеточек. Тогда синим зонтикам соответствует отрезок в 4 клетки, красным — в 3 клетки, а на долю жёлтых зонтиков останется $12 - 3 - 4 = 5$ клеток. Если 30 зонтиков изображаются как 5 клеток, то каждая клетка — это 6 зонтиков, а всего у торговца было $12 \cdot 6 = 72$ зонтика.

Ответ: 72 зонтика.

► Если сложение дробей уже пройдено, то вместо третьего отрезка проще записать действие $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$. А затем найти целое, зная, что $\frac{5}{12}$ от него составляют 30 зонтиков. ◄

Задачи для самостоятельного решения

1.5. Раздача слонов. Остап Бендер и Киса Воробьянинов раздавали населению слонов. Утром у Остапа было на 12 слонов больше, чем у Кисы, а к вечеру у Кисы осталось на 5 слонов больше, чем у Остапа. Кто раздал больше слонов за день и на сколько?

1.6. Баскетбол. На тренировке баскетболист 140 раз бросал мяч в кольцо. Количество промахов составило $\frac{2}{5}$ от числа попаданий. Сколько раз баскетболист попал в кольцо?

1.7. Печенье. Большая пачка печенья на 140 граммов тяжелее маленькой. А пять больших пачек весят на 340 граммов больше, чем семь маленьких. Что весит больше и на сколько: пять больших пачек печенья или девять маленьких?

1.8. Крокозябра. У Алисы живёт крокозябра. Каждый день она съедает бананов ровно в два раза больше своего веса, а каждую ночь худеет в три раза. Уезжая на четырёхдневные каникулы, Алиса оставила ей 40 кг бананов, и этого крокозябре в точности хватило. Сколько весила крокозябра до отъезда Алисы?

1.9. Рыбы. В пруду водится три вида рыб: окуни, щуки и карпы. Когда у рыбака спросили, сколько он сегодня поймал, он ответил: «Окуней в 3 раза больше, чем остальной рыбы, а щук в 9 раз меньше, чем остальной рыбы». Какой процент от всего улова составляют карпы?

1.10. Население. На острове $\frac{2}{3}$ всех мужчин женаты и $\frac{3}{5}$ всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке? (*Законы острова допускают брак только между мужчиной и женщиной, живущими на этом острове.*)

Ответы, решения, комментарии

1.5. Ответ: Остап раздал больше на 17 слонов.

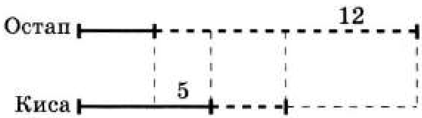


Рис. 1.5

Решение. Изобразим розданных за день слонов штриховыми отрезками, а оставшихся к вечеру сплошными (см. рис. 1.5). Видно, что Остап раздал слонов столько, сколько Киса, и ещё $5+12=17$ слонов.

1.6. Ответ: 100 раз.

Решение. Изобразим промахи и попадания (см. рис. 1.6). Видно, что удачные броски составили $\frac{5}{7}$ от всех, т. е. их было $140:7\cdot 5=100$.

Рис. 1.6

1.7. Ответ: девять маленьких весят больше на 20 граммов.

Решение. Отметим на координатном луче (см. рис. 1.7) точку 5Б — массу пяти больших пачек печенья. Точка 5М (масса пяти маленьких пачек) расположена на $140 \cdot 5 = 700$ граммов левее. Точка 7М по условию левее, чем 5Б, на 340 граммов.

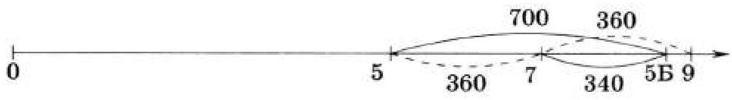


Рис. 1.7

Расстояния между 5М и 7М и между 7М и 9М равны $700 - 340 = 360$ граммов. Значит, 9 маленьких пачек тяжелее пяти больших на $360 - 340 = 20$ граммов.

► Чертёж в этой задаче может сыграть двойную роль: сначала помочь разобраться с условием и найти массу двух маленьких пачек печенья, а затем помочь заметить короткое продолжение решения. Вместо этого можно было бы найти массу маленькой пачки: $360 : 2 = 180$ (г), а затем и большой: $180 + 140 = 320$ (г), далее найти массу пяти больших пачек печенья и девяти маленьких, после чего вычесть из большего меньшее. ◄

1.8. Ответ: 5 кг.

Решение. См. рис. 1.8. Нарисуем вес крокозябры утром, затем после поедания бананов (добавляются два таких же отрезка) и на следующее утро (отрезок уменьшается втрое). Видим, что каждое утро крокозябра весит одинаково. Значит, и бананов она ела все 4 дня поровну: по $40 : 4 = 10$ кг. А весит крокозябра по утрам $10 : 2 = 5$ кг.

Рис. 1.8

1.9. Ответ: 15 %.

Решение. Изобразим утверждение «Окуней в 3 раза больше, чем остальной рыбы» на отрезке (см. рис. 1.9). Видим, что этот же факт можно описать по-другому: окуни составляют $\frac{3}{4}$, или 75 %, всего улова. С помощью аналогичного рисунка понимаем, что щуки составляют $\frac{1}{10}$, или 10 %, всего улова. Тогда карпы составляют оставшиеся $100\,\% - 75\,\% - 10\,\% = 15\,\%$ улова.

Рис. 1.9

1.10. Ответ: $\frac{12}{19}$.

Решение 1. Изобразим всех мужчин и всех женщин с помощью двух отрезков. На первом отрезке отметим $\frac{2}{3}$, на втором — $\frac{3}{5}$ (см. рис. 1.10). По условию $\frac{2}{3}$ всех мужчин и $\frac{3}{5}$ всех женщин равны одному и тому же числу, т. е. отмеченные отрезки должны иметь одинаковую длину. С учётом числителей 2 и 3 удобно изобразить их длиной 6 клеток. Тогда количество мужчин соответствует 9 клеточкам-частям, женщин — 10 частям, а всё население острова — 19 частям. Из них в браке состоит $6 + 6 = 12$ частей, т. е. в браке состоит $\frac{12}{19}$ населения острова.

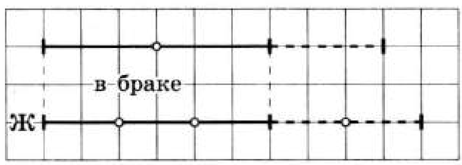


Рис. 1.10

Решение 2. Пусть количество супружеских пар на острове равно n. Из условия задачи следует, что на острове $\frac{5}{3}n$ женщин и $\frac{3}{2}n$ мужчин. Всего на острове $\frac{5}{3}n + \frac{3}{2}n = \frac{19}{6}n$ жителей, из них в браке состоят $2n$. Искомая доля равна $2n : \left(\frac{19}{6}n\right) = \frac{12}{19}$.

► Можно также использовать задачи Д1—Д13, Д42. ◄

Занятие 2
Проценты и умножение

Что такое умножение?
Это умное сложение.
Ведь умней — умножить раз,
Чем слагать всё целый час.
А. Усачёв

Это занятие, адресованное шестиклассникам, начинается с классической задачи 2.1, к которой приведены два решения. Первое основано на нахождении 1 %. Второе рассматривает увеличение на 10 % как умножение на дробь 1,1. Разница между этими подходами подробно обсуждалась в предшествующем тексте. Основная цель нашего занятия — мотивировать переход с привычного детям, но непродуктивного для дальнейшего развития первого способа на язык умножения на дробь. Подобно всякому переучиванию, для мотивации требуются задачи, решать которые на этом языке значительно удобнее, чем через нахождение 1 % от числа. Это может обуславливаться несколькими факторами.

1. Величина меняется несколько раз. Поэтому экономия в количестве действий существенна.

2. Дана и ищется не абсолютная величина, а надо найти, во сколько раз (на сколько процентов) она изменилась. Лишнее арифметическое действие шестикласснику сделать сравнительно легко, а работать с долями с помощью переменной мешает плохое владение алгеброй.

3. Если не выполнять действия по очереди, а записать сразу умножение на все нужные множители, иногда можно упростить вычисления за счёт перестановки множителей и сокращения дробей.

Все описанные причины делают задачи не только интересными и мотивирующими, но и сложными, не подходящими для первого знакомства с умножением в задачах на проценты. Преподаватель может столкнуться с противоречием: знакомство с новым методом и его отработка требуют простых задач, а мотивируют его применять только достаточно сложные. Преодолению указанного противоречия способствует согласованная работа на уроках и на занятиях кружка с учётом изложенного в предшествующем тексте. Компенсировать её отсутствие руководитель кружка может за счёт подготовительных упражнений, подобрав по ситуации подходящие время, количество и сложность.

Концентрируясь на идее умножения, мы пока избегаем обсуждения другой важной проблемы: выбора базы, которая принимается за 100%. Об этом пойдёт речь на следующем занятии. Отметим также, что ни пропорции, ни линейные уравнения пока не используются.

2.1. Рубли и проценты. а) У Алисы было 100 золотых. Алиса добыла ещё 10 золотых в понедельник и 10 золотых во вторник. Сколько у неё теперь денег?

б) В банке «Базилио» вклад ежемесячно увеличивается на 10% по сравнению с предыдущим месяцем. На сколько процентов увеличится вклад за 2 месяца?

Решение. а) Ответ очевиден: $100+10+10=120$ золотых.

б) Если бы проценты оба раза начислялись на первоначальный вклад, задача была бы аналогична предыдущей и ответ был бы «на $10\%+10\%=20\%$». Но складывать проценты от разных величин бессмысленно. Верное решение получится, если пошагово следить за изменением суммы. Это можно реализовать либо на языке процентов, либо на языке умножения на дробь.

Первый способ. Примем исходную сумму за 100%. Тогда:

1) $100\%+10\%=110\%$ — стало через месяц;

2) $110:100\cdot 10=11$ (%) — от исходного вклада прибавилось за второй месяц;

3) $10\%+11\%=21\%$ — увеличился вклад за два месяца.

Второй способ. Примем исходную сумму за x рублей. Так как увеличение на 10% означает умножение на 1,1, запишем цепочкой её изменения:

$$x \to 1{,}1x \to 1{,}1\cdot 1{,}1x = 1{,}21x.$$

Умножение на 1,21 соответствует увеличению на 21%.

Ответ: а) 120 золотых; б) на 21%.

► Первый способ записывается в три действия, второй — в одну строчку. Зато большинству учеников деление на 100 (т.е. переход к 1%) поначалу понятнее, чем умножение на десятичную дробь. В задачах такой сложности разница не принципиальна. Но привычка сразу переводить задачи на проценты на язык умножения на дробь превращает в стандартные упражнения и гораздо более сложные и разнообразные задачи. К ним и перейдём. ◄

2.2. Дождь и солнышко. Куртка промокла под дождём, отчего её масса увеличилась на 25%. На солнышке куртка подсохла, и её масса уменьшилась на 10%. Затем снова пошёл дождь, и куртка потяжелела на 20%. А потом снова выглянуло солнышко, и масса куртки уменьшилась на 20%. На сколько процентов и в какую сторону в итоге изменилась масса куртки?

Решение. Приняв за x кг исходную массу куртки, запишем цепочкой её изменения:

$$x \to 1{,}25x \to 0{,}9 \cdot 1{,}25x \to 1{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}25x \to 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}25x.$$

Сэкономить усилия поможет частичный переход к обыкновенным дробям, подсказывающий применение законов умножения:

$$x \to \frac{5}{4}x \to 0{,}9 \cdot \frac{5}{4}x \to 1{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot \frac{5}{4}x \to \frac{4}{5} \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot \frac{5}{4}x = \\ = 1{,}2 \cdot 0{,}9x = 1{,}08x.$$

Теперь ясно, что куртка потяжелела на 8%.

Ответ: увеличилась на 8%.

2.3. Лук и морковь. К началу недели в овощной магазин завезли одинаковое количество лука и моркови. В понедельник магазин продал 60% лука и 50% моркови. Во вторник — 50% оставшегося лука и 40% оставшейся моркови. В среду — 40% оставшегося лука и 30% оставшейся моркови. В четверг — 30% оставшегося лука и 20% оставшейся моркови. Чего и во сколько раз больше осталось к утру пятницы: лука или моркови?

Решение. Пусть в магазин завезли по x кг лука и моркови. В понедельник количество лука уменьшилось на 60%, т. е. его осталось $0{,}4x$ кг. Запишем, сколько лука оставалось к утру очередного дня, в виде цепочки:

$$x \to 0{,}4x \to 0{,}5 \cdot 0{,}4x \to 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4x \to 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4x \text{ (кг)}.$$

Теперь запишем аналогичную цепочку для моркови:

$$x \to 0{,}5x \to 0{,}6 \cdot 0{,}5x \to 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5x \to 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5x \text{ (кг)}.$$

Разделим массу моркови к утру пятницы на массу лука, записав это в виде дроби:

$$\frac{0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5x}{0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4x} = \frac{0{,}8}{0{,}4} = 2.$$

Ответ: моркови осталось больше в 2 раза.

► Задачи на «остаток от остатка» внешне выглядят по-другому, а по сути не отличаются от задач типа 2.1 и 2.2: продать (съесть, потратить и т. п.) 60 % как раз и означает уменьшить на 60 %, продать 50 % — уменьшить то, что получилось, ещё на 50 % и т. д. Если вместо процентов «продаётся» десятичная или обыкновенная дробь от текущего остатка, последовательные умножения на дополняющие до единицы дроби остаются кратчайшим методом решения. Альтернатива — считать по шагам проценты от процентов примерно так:

$100-60=40\,\%$ — осталось лука к утру вторника;

$0{,}5\cdot 40\,\%=20\,\%$ — продали лука во вторник;

$40-20=20\,\%$ — осталось лука к утру среды и т. д.

Этот путь проходим, но задача получается в 15 действий, и сделать их без единой ошибки шансов немного.

Вторая хитрость, которую мы применили, — не считать по отдельности массы лука и моркови, а сократить дробь. В этой задаче экономия усилий ещё заметнее, чем в предыдущей. ◄

2.4. Зоопарк. В австралийском зоопарке 35 % всех кенгуру серые, а 13 % всех животных зоопарка — это кенгуру, но не серые. Сколько процентов от всех животных в зоопарке составляют кенгуру?

► **Путь к решению.** В условии говорится о доле (в процентах) от числа всех кенгуру и о доле от числа всех животных зоопарка. А найти надо отношение (в процентах) числа кенгуру к числу всех животных. Значит, с этими двумя величинами — все животные и кенгуру — и будем работать. ◄

Решение. Пусть в зоопарке n животных, из которых k кенгуру. Тогда серых кенгуру $0{,}35k$, а не серых кенгуру — $0{,}65k$. С другой стороны, не серых кенгуру $0{,}13n$. Из уравнения

$$0{,}13n = 0{,}65k$$

получим, что $n=5k$, т. е. кенгуру составляют $\frac{1}{5}$, или 20 %, от всех животных зоопарка.

Ответ: 20 %.

Задачи для самостоятельного решения

2.5. Число. Что больше: 15 % от 22 % данного числа или 22 % от 15 % данного числа?

2.6. Калоши. Корней Иванович прислал Крокодилу новых и сладких калош. В первый же день сам Крокодил съел на ужин 25% угощения, его жена — 30% остатка, а Тотоша — 40% того, что не съели мама с папой. Сколько процентов от присланных калош крокодилье семейство оставило на завтра?

2.7. Прибыль. Два торговца купили в городе одинаковое количество товара по одной и той же цене и увезли каждый в свою деревню продавать. Первый продал весь товар в два раза дороже закупочной цены. Второй сначала поднял цену на 60% и продал четвёртую часть товара, затем поднял цену ещё на 40% и продал остальную часть товара. Кто из них выручил больше?

2.8. Размножение. Для лаборатории биологи купили мышек и мушек. И те и другие вскоре размножились. Количество мышек увеличилось на 20%, а мушек — в 20 раз. В результате количество мышек составило 60% от количества мушек. Кого и во сколько раз больше купили биологи?

2.9. Варенье. Чтобы научиться решать задачи на проценты, надо в понедельник съесть немножко варенья, а затем каждый день есть его больше, чем в предыдущий день: во вторник на 10%, в среду на 20%, в четверг на 30%, в пятницу на 40%, а в субботу на 50%. В понедельник Илья и Егор съели одинаковое количество варенья. Дальше каждый ошибся ровно один раз, не увеличив, а уменьшив дозу на указанное число процентов. Илья так ошибся в среду, а Егор в субботу. Кто и во сколько раз больше съел варенья в субботу?

2.10. Солнце и дождь. В Стране Дураков бывают только солнечные или дождливые дни. Банк «Кэт-энд-фокс» работает круглосуточно и предлагает два вида вкладов.

1. Вклад «Солнечный»: сумма по вкладу увеличивается на 20% каждый солнечный день и уменьшается на 20% каждый дождливый день.

2. Вклад «Дождливый», который устроен ровно наоборот.

Буратино положил в ночь на 1 июля равные суммы денег по обоим вкладам. В ночь на 1 августа сумма по вкладу «Солнечный» была на 50% больше суммы по вкладу «Дождливый». Сколько в июле было солнечных дней?

2.5. Ответ: равны.

Решение. Пусть данное число равно x. Тогда 15% от 22% данного числа — это $0{,}15 \cdot 0{,}22x$, а 22% от 15% данного числа — это $0{,}22 \cdot 0{,}15x$. Без вычислений ясно, что эти произведения равны, но можно и сосчитать, что каждое из них составляет 3,3% от данного числа.

2.6. Ответ: 31,5%.

Решение. Приняв за x кг массу присланных калош, запишем цепочкой её изменения:

$$x \to 0{,}75x \to 0{,}7 \cdot 0{,}75x \to 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}75x = 0{,}315x,$$

т. е. 31,5% калош оставлено на завтра.

► Школьники, не приученные к умножению, могут пойти по другому пути. Например, такому:

1) 100% − 25% = 75% — осталось после Крокодила;

2) 30% от 75% — это 22,5% — съела жена (вычислять можно по-разному);

3) 75% − 22,5% = 52,5% — осталось после Крокодила и его жены;

4) 40% от 52,5% — это 21% — съел Тотоша;

5) 52,5% − 21% = 31,5%. ◄

2.7. Ответ: второй выручил больше.

Решение. Пусть каждый торговец купил товара на x рублей. Тогда первый выручил $2x$ рублей, а второй выручил

$$1{,}6 \cdot \frac{1}{4}x + 1{,}6 \cdot 1{,}4 \cdot \frac{3}{4}x = 0{,}4x + 1{,}2 \cdot 1{,}4x =$$
$$= 0{,}4x + 1{,}68x = 2{,}08x \text{ рублей.}$$

2.8. Ответ: мышек в 10 раз больше.

Решение. Пусть купили x мышек и y мушек. После размножения мышек стало $1{,}2x$, а мушек — $20y$. По условию $1{,}2x = 0{,}6 \cdot 20y = 12y$. Значит, $x = 10y$, т. е. мышек купили в 10 раз больше.

2.9. Ответ: Илья съел больше в 2 раза.

Решение. Пусть в понедельник Илья и Егор съели по x граммов варенья. Если не ошибаться, то в субботу каждый съел бы по $1{,}1 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}5x$ граммов варенья. Но Илья по ошибке вместо 1,2 в среду умножал на 0,8. А Егор в субботу вместо умножения на 1,5 умножил на 0,5. Составим отношение, записав в числителе, сколько варенья съел Илья, а в знаменателе — Егор, и упростим его:

$$\frac{1{,}1\cdot 0{,}8\cdot 1{,}3\cdot 1{,}4\cdot 1{,}5x}{1{,}1\cdot 1{,}2\cdot 1{,}3\cdot 1{,}4\cdot 0{,}5x}=\frac{0{,}8\cdot 1{,}5}{1{,}2\cdot 0{,}5}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 1}=2.$$

2.10. Ответ: 16.

Решение. Сумма по вкладу «Солнечный» умножается на 1,2 в солнечные дни и на 0,8 в дождливые, а по вкладу «Дождливый» — наоборот. Порядок множителей на произведение не влияет, поэтому можно считать, что в начале месяца солнечные и дождливые дни чередовались, а потом шли подряд солнечные (так как в итоге сумма по этому вкладу оказалась больше). После каждой пары «один солнечный и один дождливый день» оба вклада умножались на один и тот же множитель $1{,}2\cdot 0{,}8$, так что их отношение не менялось. После каждого солнечного дня в конце месяца отношение сумм на вкладах «Солнечный» и «Дождливый» умножалось на $\frac{1{,}2}{0{,}8}=1{,}5$. Так как в итоге оно умножилось как раз на 1,5, «лишний» солнечный день был один. Всего в июле 31 день, из них $15+1=16$ были солнечными, а 15 — дождливыми.

► Можно также использовать задачи Д8, Д9, Д14–Д22. ◄

Занятие 3
Проценты, таблицы и волшебное слово

Я скажу тебе это слово. Но помни: говорить его надо тихим голосом, глядя прямо в глаза тому, с кем говоришь.

В. Осеева. Волшебное слово

Это занятие адресовано шестиклассникам. Его имеет смысл проводить после изучения пропорций, но можно до изучения линейных уравнений. Оно составлено из задач, решаемых с помощью стандартных алгоритмов.

Сложными эти задачи оказываются тогда, когда предлагаются детям, знакомым с понятием процента, но не обученным ни предлагаемым в нашей книжке, ни каким-либо другим способам их решения. Изобрести даже не велосипед, а сразу несколько велосипедов подряд могут немногие. Перечислим основные проблемы и предлагаемые методы их преодоления.

Проблема	**Предлагаемое решение**
С чего начать? Куда девать данные условия?	Составить таблицу.
Какую из величин брать за основу (за 100 %, за x)?	Волшебное слово «чем».
Сложная задача распадается на несколько элементарных. А ученик и в решении элементарных иногда ошибается.	Пропорция одинаково работает во всех типах элементарных задач.

Вот и все секреты. Подробно они изложены в решениях задач. С их помощью в разряд типовых переносятся задачи про изменение обратно пропорциональных величин (задачи 3.1, 3.4, 3.5), а также двух (задачи 3.2, 3.7) и трёх (задачи 3.3, 3.8) одноимённых величин. Применять их надо по мере необходимости: если ученик способен понять условие и без волшебных слов, а потом сравнить величины в процентах и без пропорций, не надо ему мешать. А вот навык оформлять решение в виде таблицы полезен и как способ внятно изложить свои мысли, и как «мостик» к решению более сложных задач.

Во всех задачах этого занятия данными и искомыми являются не абсолютные, а относительные значения одних величин, выраженные в процентах от других. В качестве языка решения мы рассматриваем работу с переменными: это строго и полезно для развития алгебраических навыков.

К задаче 3.1, кроме решения 3 в указанном стиле, мы привели два других. Их математическая суть едина и состоит в обратной пропорциональности величин. Не обязательно разбирать с учениками все три способа. Если они сами предлагают какой-то из них, его и можно довести до конца.

Вместо переменной можно также использовать части (или вводить подходящие искусственные единицы измерения), клеточки или конкретные числовые значения. Решения на языке частей и клеточек мы только приветствуем (см. задачи 3.3 и 3.8). Они лучше развивают чувство числа, но менее стандартны, им труднее научить. Предположения о конкретных числовых значениях тоже приводят к верным ответам, но без дополнительных обоснований решения не являются полными, а обоснования не проще введения переменной (см. комментарий после задачи 3.1).

3.1. Улитка и черепаха. Скорость черепахи на 60% больше скорости улитки. На сколько процентов меньше времени потребуется черепахе, чем улитке, чтобы проползти ту же дистанцию?

Решение 1. Перейдём от процентов к умножению. Скорость черепахи на 60% — т. е. в 1,6 раза — больше скорости улитки. Так как при неизменном расстоянии скорость и время обратно пропорциональны, то черепаха потратит на прохождение всей дистанции в 1,6 раза меньше времени, чем улитка. Время черепахи получится, если время улитки разделить на $1{,}6 = \frac{8}{5}$, или, что то же самое, умножить на $\frac{5}{8}$. Таким образом, надо найти $\frac{5}{8}$ от времени улитки. А $\frac{5}{8}$ от 100% — это 62,5%.

Решение 2. Введём в условие волшебное слово: скорость черепахи на 60% больше, *чем* скорость улитки. Оно подсказывает, что за 100% надо принять скорость улитки. Скорость черепахи на 60% больше, т. е. составляет 160%. Слова «чем улитке» изначально были в формулировке вопроса про время, поэтому и время улитки надо принять за 100%. Верно ли, что время черепахи на 60% меньше времени улитки и составляет от него $100\% - 60\% = 40\%$? Нет: время черепахи меньше времени улитки не на столько же процентов, а **во столько же раз**, во сколько её скорость больше.

► Разве это не одно и то же? Нет, так как в одном случае речь идёт об увеличении, а в другом — об уменьшении. Например, увеличить какую-либо величину на 100 % означает увеличить её вдвое, т. е. умножить на 2. Уменьшить вдвое означает уменьшить вовсе не на 100 %, а на 50 %. А если уменьшить на 100 %, ничего не останется. ◄

Итак, введём переменную a, изобразим обратную пропорциональность скорости и времени на схеме (см. рис. 3.1, a) и составим пропорцию: $\frac{160}{100}=\frac{100}{a}$, откуда находим

$$a=\frac{10\,000}{160}=\frac{125}{2}=62{,}5\ (\%).$$

Это на 37,5 % меньше, чем 100 %.

а)

	Скорость ↓	Время ↑
Черепаха	160 %	a %
Улитка	100 %	100 %

б)

	Время ↓	↓
Черепаха	x	a %
Улитка	$1{,}6x$	100 %

Рис. 3.1

► Схема с процентами удобна для шестиклассника, но вызывает справедливые вопросы. В чём измеряются скорость и время? Не в процентах же! Чтобы то же самое изложить аккуратно, потребуются три пропорции. Если скорости черепахи и улитки равны v_1 км/ч и v_2 км/ч, а времени они потратят t_1 ч и t_2 ч соответственно, то $\frac{v_2}{v_1}=\frac{160}{100}$, $\frac{v_2}{v_1}=\frac{t_1}{t_2}$ и $\frac{t_1}{t_2}=\frac{100}{a}$, откуда и следует наша пропорция $\frac{160}{100}=\frac{100}{a}$.

Достичь компромисса между строгостью и краткостью записи, а также между пониманием сути и возможностью следовать простым алгоритмам помогает сочетание перехода от процентов к умножению и схемы со стрелочками в одном решении. Рассмотрим такой промежуточный подход. ◄

Решение 3. Аналогично первому решению получим, что черепаха потратит на прохождение всей дистанции в 1,6 раза меньше, чем улитка. Примем за x время черепахи (единица измерения любая), тогда время улитки равно $1{,}6x$ в тех же единицах измерения. На сколько же процентов меньше времени потребуется черепахе, *чем* улитке? Волшебное «чем» подсказывает принять время улитки за 100%, показать это на схеме (см. рис. 3.1, *б*) и составить пропорцию:

$$a = \frac{100x}{1{,}6x} = 100 : \frac{8}{5} = 100 \cdot \frac{5}{8} = 62{,}5(\%).$$

Остаётся вычесть это число из 100%, чтобы ответить на вопрос задачи.

Ответ: на 37,5%.

► Стиля решения 3 мы чаще всего и будем придерживаться в дальнейшем. ◄

3.2. Пиджак и брюки. Пиджак стоил на 80% дороже брюк. Потом на пиджак объявили 25-процентную скидку, а брюки, наоборот, подорожали на 20%. Что теперь стоит дороже и на сколько процентов?

Решение. Запишем в виде таблицы цену пиджака и брюк в рублях до и после изменения цены (первые три столбца таблицы).

	До	После	
Пиджак	$1{,}8x$	$0{,}75 \cdot 1{,}8x = 1{,}35x$	$a\%$
Брюки	x	$1{,}2x$	100%

Порядок заполнения таблицы показан на схеме (рис. 3.2 *а*).

а)
$$\begin{tikzcd} 1{,}8x \arrow[r] & 0{,}75 \cdot 1{,}8x = 1{,}35x \\ x \arrow[u] \arrow[r] & 1{,}2x \end{tikzcd}$$

б)
$$\begin{array}{ll} 0{,}75 \cdot 1{,}8x = 1{,}35x & a\% \\ \downarrow 1{,}2x & 100\% \downarrow \end{array}$$

Рис. 3.2

Видим, что $1{,}35x > 1{,}2x$, т. е. пиджак теперь стоит дороже, *чем* брюки. Выделенное слово «чем» и здесь подсказывает, что за 100% принимаем цену брюк, а цену пиджака (в процентах относительно цены брюк) ищем. Например, с помощью пропорции, дописывая четвёртый столбец к таблице и прямо в ней дорисовывая стрелки (см. рис. 3.2 *б*).

Если при составлении пропорции вместо результата $1{,}35x$ записать произведение $0{,}75 \cdot 1{,}8x$, вычисления упростятся:

$$\frac{0{,}75 \cdot 1{,}8x}{1{,}2x} = \frac{a}{100}; \quad \frac{0{,}75 \cdot 3}{2} = \frac{a}{100}; \quad a = \frac{75 \cdot 3}{2} = 112{,}5\ (\%).$$

Остаётся вычесть 100 %, чтобы ответить на вопрос задачи.

Ответ: пиджак дороже на 12,5 %.

► Распространённая ошибка: вместо цен $1{,}8x$ и x цены пиджака и брюк записывают как x и $0{,}2x$. От неё предостерегает всё то же волшебное слово «чем»: пиджак стоил на 80 % дороже, *чем* брюки. Значит, его цену здесь и берём за «начало отсчёта», только в данном случае не за 100 %, а за 180 %.

Рассмотрим также «решение на примере». Пусть брюки стоили 100 рублей. Тогда пиджак стоил 180 рублей. После скидки пиджак стал стоить 135 рублей, а брюки после подорожания — 120 рублей. 135 больше, чем 120, на 12,5 %.

Признать такое решение верным мешает произвольно выбранная цена брюк. Тем не менее верный ответ получен не случайно; он получился бы при любой выбранной цене брюк, так как от неё он не зависит. Наиболее простой способ доказать это — ввести переменную, что мы и сделали. Решение на примере также можно обосновать, заменив рубли на условные денежные единицы, равные $\frac{1}{100}$, т. е. 1 % цены брюк. ◄

3.3. Что тяжелее? Колода на 25 % легче камня и на 40 % легче бревна. Что и на сколько процентов тяжелее: камень или бревно?

Колода	$0{,}6x$	75 %
Камень		100 %
Бревно	x	

Решение. 1. Выразим массы всех трёх предметов через одну и ту же переменную. Что взять за x (т. е. за 100 %)? Колода легче, *чем* камень. Значит, камень? Или бревно, ведь колода легче, *чем* бревно... Как выйдет в итоге проще, угадать трудно. Пусть, например, x кг весит бревно, тогда колода весит $0{,}6x$ кг. Чтобы выразить массу камня через x, есть несколько способов.

Первый способ — ввести ещё одну переменную. Пусть камень весит y кг, тогда колода весит $0{,}75y$ кг. Из уравнения $0{,}6x = 0{,}75y$ получим, что $y = 0{,}6x : 0{,}75 = 0{,}8x$.

Второй способ использует удобные числа. Колода легче камня на 25 %, т. е. составляет от его массы $\frac{3}{4}$. Ищем число по его дроби: $0{,}6x : \frac{3}{4} = 0{,}8x$.

Третий способ: при любых затруднениях составлять пропорцию. Решив её, мы получаем тот же результат. Так или иначе, первый столбец таблицы заполнен.

Колода	$0{,}6x$	
Камень	$0{,}8x$	100 %
Бревно	x	a %

2. Чтобы теперь ответить на вопрос задачи, снова думаем: что взять за 100 %? Бревно тяжелее, *чем* камень. Увы, нам не повезло: за 100 % придётся брать массу камня. Соблазн сравнить x и $0{,}8x$ и быстренько написать в ответе 20 % велик, но быстренько получать неверный ответ — не наш выбор.

Составляем очередную пропорцию. Решая её, получим

$$a = \frac{100x}{0{,}8x} = 125\ (\%).$$

Ответ: бревно тяжелее камня на 25 %.

► Показан длинный, зато надёжный и универсальный путь. Короткое решение тоже есть. Например, заметим, что масса колоды составляет $\frac{3}{4}$ массы камня и $\frac{3}{5}$ массы бревна. Это означает, что её массу можно изобразить отрезком длиной в 3 клетки, массу камня — 4 клетки, а массу бревна — 5 клеток (см. рис. 3.3). Тогда ответ очевиден. Используя вместо клеток части или условные единицы массы, это решение нетрудно сделать строгим. ◄

Рис. 3.3

Задачи для самостоятельного решения

3.4. Цена сыра. «Ламбер» дороже костромского сыра на 30 %. На сколько процентов костромской сыр дешевле «Ламбера»? Округлите ответ до целых процентов.

3.5. Топливо. Расход бензина в новой модели автомобиля понизился на 20 % по сравнению с предыдущей. На сколько процентов увеличилось расстояние, которое можно теперь проехать с теми же затратами топлива?

3.6. Наследство. Два брата получили одинаковое наследство. Через несколько лет старший увеличил своё состояние на 80%, став в полтора раза богаче младшего. На сколько процентов увеличил своё состояние младший брат?

3.7. Фрукты. Летом яблоки были на 60% дешевле, чем бананы. Но к зиме яблоки подорожали в 3,5 раза, а бананы — лишь на 5%. Какие фрукты стали дешевле и на сколько процентов?

3.8. Ещё раз: что тяжелее? Чемодан на 50% тяжелее сумки, но на 50% легче рюкзака. На сколько процентов рюкзак тяжелее сумки?

3.9. Монеты. У купца золотых монет на 30% меньше, чем серебряных, и на 12,5% меньше, чем медных. Каких монет, медных или серебряных, у купца больше и на сколько процентов?

3.10. Площадь и объём. У Лёши есть большие кубы и маленькие кубики. Площадь поверхности у куба на 125% больше, чем у кубика. На сколько процентов объём куба больше объёма кубика?

Ответы, решения, комментарии

3.4. Ответ: на 23%.

Решение. Чтобы не перепутать, где 100% (основа для сравнения), переформулируем условие: «Ламбер» дороже, *чем* костромской сыр, на 30%. Это значит, что если костромской сыр стоит x рублей, то «Ламбер» — $1{,}3x$ рублей. Спрашивается, на сколько процентов костромской сыр дешевле, *чем* «Ламбер», т. е. в вопросе за 100% надо взять «Ламбер» Составим пропорцию: $\frac{100}{a} = \frac{1{,}3x}{x}$ (см. рис. 3.4).

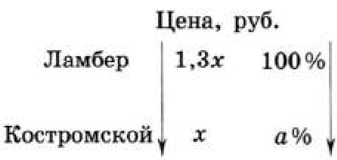


Рис. 3.4

$$a = \frac{100x}{1{,}3x} = \frac{1000}{13} = 76{,}9\ldots \approx 77\ (\%), \quad 100\% - 77\% = 23\%.$$

► В данном случае округление результата промежуточного действия привело к верному ответу. Но тут нужна осторожность: если бы вместо 76,9... получилось ровно 76,5, то округление до 77 привело бы к неверному ответу 23 вместо верного 24. ◄

3.5. Ответ: на 25 %.

Решение. Расход бензина обратно пропорционален расстоянию, которое можно проехать с фиксированными затратами топлива. Расход бензина в новой модели по сравнению с предыдущей понизился на 20 %, т. е. умножился на $0{,}8=\frac{4}{5}$. В таком случае расстояние умножилось на обратную дробь $\frac{5}{4}=1{,}25$, т. е. увеличилось на 25 %.

► Для непривычных величин заметить и использовать обратную пропорциональность ещё сложнее, чем для скорости и времени в задаче 3.1. Объяснить её можно так. Пусть автомобиль проехал x километров, затратив y литров бензина. Тогда расход бензина составляет $\frac{y}{x}$ л/км, а на одном литре бензина можно проехать $\frac{x}{y}$ км. Во сколько раз $\frac{y}{x}$ уменьшится, во столько же раз $\frac{x}{y}$ увеличится. ◄

3.6. Ответ: на 20 %.

Решение. Пусть каждый брат получил в наследство x рублей. Через несколько лет у старшего брата стало $1{,}8x$ рублей. Это в 1,5 раза больше, чем у младшего. Значит, у младшего стало $1{,}8x:1{,}5=1{,}2x$ рублей, что на 20 % больше, чем x.

3.7. Ответ: бананы стали дешевле яблок на 25 %.

Решение. Пусть 1 кг бананов летом стоил x рублей, тогда 1 кг яблок стоил $0{,}4x$ рублей. Зимой яблоки стали стоить $3{,}5\cdot 0{,}4x=1{,}4x$ рублей, а бананы — $1{,}05x$ рублей. Отношение цены бананов к цене яблок зимой составило $\frac{1{,}05x}{1{,}4x}=\frac{3}{4}$, т. е. бананы стали на 25 % дешевле яблок.

► На сколько процентов одна величина больше другой, в задаче 3.6 очевидно (так как сравнивать пришлось с x), в задаче 3.4 найдено с помощью волшебного слова «чем» и пропорции, а в задаче 3.7 нужное отношение записано сразу, без наводящих приёмов. На практике выбор способа решения всегда за учеником. Волшебные слова и пропорции помогают, если без них ученик не знает, что делать, или ошибается. ◄

3.8. Ответ: на 200 %.

Чемодан	$1{,}5x$	
Сумка	x	100 %
Рюкзак	$3x$	300 %

Решение. На 50 % тяжелее означает тяжелее в 1,5 раза. А на 50 % легче означает легче в 2 раза. Теперь с помощью переменных (см. таблицу) или отрезков (см. рис. 3.5) можно убедиться, что рюкзак втрое тяжелее сумки. Рюкзак тяжелее, *чем* сумка, её и возьмём за 100 %, тогда рюкзак составляет 300 %, а искомая разница равна 200 %.

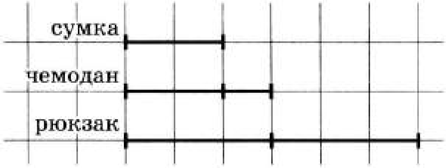


Рис. 3.5

3.9. Ответ: серебряных монет больше на 25 %.

Золотых	$0{,}7x$	
Серебряных	x	a %
Медных	$0{,}8x$	100 %

Решение. Пусть у купца x серебряных монет, тогда золотых монет у него $0{,}7x$. Золотых монет меньше, чем медных, на 12,5 %, т. е. на $\frac{1}{8}$. Значит, золотые монеты от медных составляют $\frac{7}{8}$. Так как золотых монет $0{,}7x$, то медных — $0{,}8x$. Заполним первый столбец таблицы.

Видим, что серебряных монет больше, *чем* медных. Волшебное слово подсказывает, что за 100 % надо принять количество медных монет. Количество серебряных монет найдём из пропорции: $a = \frac{100x}{0{,}8x} = 125$ (%), т. е. их больше, чем медных, на 25 %.

3.10. Ответ: на 237,5 %.

Решение. У куба с ребром a площадь поверхности вычисляется по формуле $S = 6a^2$, а объём — $V = a^3$. Поэтому при увеличении ребра куба в k раз площадь поверхности увеличивается в k^2 раз, а объём — в k^3 раз. По условию площадь поверхности куба в 2,25 раз больше, чем у кубика. Значит, ребро больше в 1,5 раза, а объём — в $1{,}5^3 = \frac{27}{8} = 3{,}375$ раз, т. е. на 237,5 %.

► Можно также использовать задачи Д23–Д28. ◄

Занятие 4
Таблицы в задачах о трёх величинах

Кто сказал, что машина не может
И не хочет работать на нас?
В. Высоцкий. Лётчик-испытатель

Текстовые задачи школьной программы покоятся на «трёх китах»: движение, работа, концентрация. Посмотрим на них повнимательнее. В задачах на движение изучается взаимосвязь трёх величин: скорости, времени и их произведения — расстояния. Аналогичные величины есть и в задачах на работу: производительность, время и их произведение — объём работы. Но и задачи на концентрацию устроены так же; в них есть масса всего раствора (сплава и т. п.), концентрация определённого вещества и их произведение — масса этого вещества. Таким образом, все три кита «анатомически» похожи! Более того, «мелкая рыбёшка» устроена так же: два множителя и их произведение. Например, таковы задачи про цену, количество (множители) и стоимость (произведение) или про урожайность, площадь поля (множители) и урожай (произведение).

Замеченная общая особенность позволяет схожим образом работать с очень широким классом задач. Речь идёт о составлении таблиц по условию задачи. Такие таблицы обычно используются в сложных задачах на составление дробно-рациональных уравнений и систем в 8—9 классах. А ученикам 5—7 классов предлагается проявлять сообразительность, изобретая короткие арифметические решения и составляя линейные уравнения. Но сложность субъективна. На этом занятии мы покажем, что таблицы одинаково хорошо сочетаются с самыми разными методами решения задач: арифметическим (задача 4.2), составлением уравнения с одной (задачи 4.3, 4.6, 4.7) и двумя (задача 4.1) переменными, а также с помощью переменных, но без уравнения (задачи 4.4, 4.5, 4.8, 4.9, 4.10). Основная задача таблицы — преобразовать информационный хаос условия в удобную последовательность фактов, с каждым из которых понятно, что надо делать. При всём разнообразии техники и тематики мы все 10 раз будем действовать по одной и той же схеме и задавать себе одни и те же вопросы с небольшими вариациями.

1. Читаем условие первый раз. О каких трёх величинах идёт речь? В чём они измеряются? Пишем заголовки трёх столбцов таблицы. Указываем единицы измерения. Определяем, какая из трёх

величин — произведение двух других. Это помогают понять и здравый смысл, и знакомые формулы (например, $S = vt$), и единицы измерения. Например, если это «руб.», «кг» и «руб./кг», то последняя — «руб./кг» — получается, если рубли разделить на килограммы; поэтому где рубли, там и произведение.

2. Читаем условие второй раз. Записываем в таблицу данные. Это либо числа, либо подсказанные условием переменные и простейшие выражения с ними.

3. Если в строке таблицы заполнены две клетки, заполняем третью умножением или делением. Так поступаем с каждой строкой. Если пришлось делить и это затрудняет дальнейшее решение, пробуем ввести переменные по-другому: так, чтобы обойтись умножением.

4. Читаем условие третий раз. Что надо найти? Не ясен ли ответ из таблицы? Что пока не использовано? Не это ли условие для составления уравнения?

Прелесть в том, что в первых трёх пунктах мы действуем механически, таблица сама «думает» за нас! Четвёртый пункт разнообразнее. Иногда задача может оказаться почти решённой, остаётся лишь записать ответ. В других случаях предстоит ещё составить и решить уравнение или догадаться, что и как дальше надо считать. Но, глядя в таблицу, придумать последний шаг шансов больше, чем бесконечно и безнадёжно перечитывая условие. А тот, кто сам сделал все, кроме трудного последнего шага, его как минимум поймёт и в другой раз сделает этот шаг самостоятельно.

Отметим дополнительные соображения, используемые в отдельных задачах.

1. Какие величины имеет смысл складывать/вычитать (задачи 4.2, 4.3, 4.7)? Ответ в каждой задаче свой. Это может быть скорость (получается скорость сближения или удаления, скорость по и против течения) или её аналог — производительность, а также масса, стоимость и т. д.

2. Если данные и/или искомые величины выражаются в процентах, комбинируем чтение условия с помощью таблиц и навыки работы с процентами: умножение, пропорции, волшебное слово «чем» (задачи 4.4, 4.5, 4.8, 4.9, 4.10).

Задачи на концентрацию в это занятие «не поместились»: нельзя объять необъятное. Недостатка в них в учебниках и другой литературе нет; примеры использования таблиц в задачах на концентрацию разобраны в занятии 6.

Несомненно, отдельные задачи этого занятия хороший ученик может решить и без всяких таблиц. Но целью этого занятия является не развитие гибкости ума, а освоение мощного технического средства. Поэтому необычно много — пять задач — предлагается для совместного разбора с обязательным составлением таблицы. А задачи для самостоятельного решения ученик имеет право решать как угодно, но после этого ему будет полезно увидеть и решение с таблицей.

4.1. Оказалось. Когда автомобиль проехал часть пути из пункта A в пункт B, то оказалось, что он проехал столько километров, сколько минут ему придётся ехать оставшуюся часть пути. Но когда он проехал и эту часть пути, то оказалось, что он опять проехал столько километров, сколько минут он затратил на первую часть пути. Какова скорость автомобиля, если она постоянна?

► **Путь к решению.** Первое впечатление: разве можно что-то найти, если вообще ни одного числа не дано? Осознать условие задачи на движение часто помогает чертёж. Но здесь он прояснит немного: нет ни встреч, ни обгонов, ни изменений скорости или направления. А что есть? Три величины: скорость, время и расстояние. При этом последняя равна произведению двух первых. В таких случаях удобно составить таблицу, расположив эту последнюю величину — расстояние — в последнем столбце. А потом начать читать условие заново, внося в таблицу данные. В этой задаче числовых данных нет, но данные — это не только числа, а ещё и равенства (или отношения), подсказывающие, какие переменные разумно ввести. ◄

Решение. Читаем первое предложение. Вводим переменную x и вносим её в таблицу. Читаем второе предложение. Вводим переменную y и вносим её в таблицу. Теперь в каждой строке таблицы заполнены по две клетки, и таблица подсказывает: заполни третью! Заполняем столбец скорости. Таблица заполнена.

	Скорость, км/мин	Время, мин	Расстояние, км
Первая часть пути	$\frac{x}{y}$	y	x
Вторая часть пути	$\frac{y}{x}$	x	y

Продолжаем читать условие. Так как скорость постоянна, составим уравнение: $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$. Поскольку x и y положительны, это означает, что $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}=1$.

Ответ: 1 км/мин = 60 км/ч.

4.2. Сено. У крестьянина были коза, корова и кобыла. Он подсчитал, что одного стога сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу один месяц, либо козу и корову $\frac{3}{4}$ месяца, либо кобылу и корову $\frac{1}{3}$ месяца. Не ошибся ли он?

► **Путь к решению.** В задаче даны три числа: 1, $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{3}$. Распространённая ошибка — попытка сложить их. Но что мы при этом найдём? Уж во всяком случае не время, за которое животные вместе съедят стог: оно на самом деле меньше каждого из слагаемых. Чтобы понять, что можно здесь складывать, подумаем, о каких величинах идёт речь. Если еду считать работой, то дан объём работы — 1 стог, а также время выполнения работы в нескольких ситуациях. Связывающая их третья величина — производительность «труда» животных. Производительность, как и скорости, можно складывать, вот и перейдём к ней с помощью таблицы. Объём работы — произведение времени и производительности, поэтому её столбец располагаем последним. ◄

Решение. Прочитав условие первый раз, определяем, о каких трёх величинах идёт речь в задаче. Подготовим пустую таблицу для времени, производительности и количества съеденных стогов сена. Читая условие второй раз, заполняем два столбца.

	Время, месяцев	Производительность, стогов в месяц	Работа, стогов
Коза и кобыла	1		1
Коза и корова	$\frac{3}{4}$		1
Кобыла и корова	$\frac{1}{3}$		1

В строках заполнены по две клетки, таблица подсказывает, как заполнить третью.

	Время, месяцев	Производительность, стогов в месяц	Работа, стогов
Коза и кобыла	1	1	1
Коза и корова	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	1
Кобыла и корова	$\frac{1}{3}$	3	1

Таблица заполнена и больше не думает за нас. Условие использовано почти полностью. Почти — потому что остался вопрос, намекающий, что дальше надо поискать противоречие. Например, попробовать найти производительность каждого животного по отдельности. С кобылой и коровой проблем не возникнет, а производительность козы окажется отрицательной. Коротко эту идею можно записать, добавив к таблице ещё одну строчку.

	Время, месяцев	Производительность, стогов в месяц	Работа, стогов
Коза и кобыла	1	1	1
Коза и корова	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	1
Кобыла и корова	$\frac{1}{3}$	3	1
2 козы, кобыла и корова		$1+\frac{4}{3}=2\frac{1}{3}$	

Замечаем, что $3>2\frac{1}{3}$, т. е. кобыла и корова едят быстрее, чем 2 козы, кобыла и корова, чего быть не может.

Ответ: крестьянин ошибся.

4.3. Сколько костей? Говядина без костей стоит 90 рублей за килограмм, говядина с костями — 78 рублей за килограмм, а кости без говядины — 15 рублей за килограмм. Сколько костей в килограмме говядины?

► **Путь к решению.** Читаем условие первый раз. В задаче идёт речь о трёх видах продуктов: говядине без костей, костях и их «смеси» — говядине с костями. Для каждого продукта указана цена, а спрашивается в задаче про количество. Где цена и количество, там и стоимость. Готовим таблицу.

	Количество, кг	Цена, руб./кг	Стоимость, руб.
Мясо			
Кости			
Говядина			

Читая условие второй раз, начинаем таблицу заполнять. Возможная первая попытка такая.

	Количество, кг	Цена, руб./кг	Стоимость, руб.
Мясо	1	90	90
Кости	1	15	15
Говядина	1	78	78

Все данные внесены, а к пониманию задачи мы не приблизились. В предыдущей задаче прорывной была идея сложить производительности из подходящих строк. Что имеет смысл складывать в этой задаче? Цены нельзя, зато можно стоимость мяса и костей в одном куске говядины. Только тогда надо брать не по килограмму всего, а столько костей и мяса, сколько их бывает в килограмме говядины. Сколько именно, мы не знаем и хотим узнать, поэтому введём переменную. ◄

Решение. Пусть в килограмме говядины x кг костей, тогда «чистой» говядины в нём $(1-x)$ кг. Составим таблицу.

	Количество, кг	Цена, руб./кг	Стоимость, руб.
Кости	x	15	$15x$
Мясо	$1-x$	90	$90(1-x)$
Говядина	1	78	78

Стоимость 1 кг говядины складывается из стоимости входящих в него мяса и костей. Составим уравнение:

$$15x+90(1-x)=78.$$

Решив его, получим, что $x=0{,}16$.

Ответ: 160 грамм.

► Готовое написанное решение короткое, понятное и кажется вполне доступным и без составления таблицы. Простота обманчива. Задача предлагалась в 2003 году на математической регате. Из 63 команд московских семиклассников только четыре поняли, о каких величинах идёт речь в задаче, и верно решили её. ◀

4.4. Грузы. Один водитель сделал на 12,5 % больше рейсов, чем второй, на зато второй каждый раз перевозил в 1,5 раза больше груза. Кто перевёз больше и на сколько процентов?

Решение. В задаче идёт речь о трёх величинах. Первая — количество рейсов. Вторая — масса груза, перевозимого за один рейс. Фактически это производительность, её логично измерять в тоннах за рейс. Тогда третья — масса всего перевезённого груза — измеряется в тоннах. Заполняем строку заголовков таблицы. Читая условие повторно, вводим две переменные и заполняем по две клетки в каждой строке. Чтобы не перепутать водителей, используем волшебное слово «чем». Как только две клетки (множители) в строке заполнены, можно заполнить и третью (произведение).

	Рейсов	Производительность, тонн/рейс	Перевёз всего, тонн
Первый водитель	$1{,}125x$	y	$1{,}125xy$
Второй водитель	x	$1{,}5y$	$1{,}5xy$

При заполнении таблицы задача почти «решилась сама». Осталось заметить, что второй водитель перевёз больше, *чем* первый. Для ответа на вопрос можно составить пропорцию, приняв груз первого водителя $1{,}125xy$ за 100 %. Вместо этого можно найти сначала, во сколько раз больше перевёз второй водитель, а затем перейти к процентам:

$$\frac{1{,}5xy1{,}125xy}{=}\frac{3}{2}:\frac{9}{8}=\frac{4}{3}.$$

Итак, второй перевёз больше на треть, т. е. на $33\frac{1}{3}$ %.

Ответ: второй перевёз больше на $33\frac{1}{3}$ %.

4.5. Завод. На производство крямзелей секретный завод потратил на 25 % меньше титана, чем на производство штрюнделей. На один крямзель идёт на 20 % больше титана, чем на один штрюндель. Чего и на сколько процентов больше сделано на заводе: крямзелей или штрюнделей?

Решение 1. Читая условие первый раз, определяем, о каких трёх величинах идёт речь. Массу потраченного титана будем измерять в килограммах. Есть ещё количество изделий в штуках и расход титана на одно изделие в кг/шт. Тройка единиц измерения (кг, шт., кг/шт.) подсказывает, что масса всего титана играет роль произведения. Рисуем таблицу и заполняем строку заголовков.

	Количество изделий, шт.	Масса титана на одно изделие, кг/шт.	Масса всего титана, кг
Крямзели	$\frac{5}{8}\cdot\frac{x}{y}$	$1{,}2y$	$0{,}75x$
Штрюндели	$\frac{x}{y}$	y	x

Читая условие второй раз, заполняем третий, а затем второй столбцы. Как и в прошлый раз, не боимся двух переменных (они сократятся) и контролируем себя с помощью слова «чем». Для заполнения третьей клетки каждой строки (т. е. первого столбца) на этот раз требуется не умножение, а деление:

$$\frac{0{,}75x}{1{,}2y}=\frac{3\cdot5\cdot x}{4\cdot6\cdot y}=\frac{5x}{8y}.$$

Видим, что штрюнделей сделано больше, *чем* крямзелей, в $\frac{8}{5}$ раза, или на 60%.

Решение 2. Если даже такая работа с алгебраическими дробями вызывает дополнительные сложности, то их можно избежать, всегда вводя переменные для величин-множителей, а не для произведения. В данном случае так, как показано в таблице.

	Количество изделий, шт.	Масса титана на одно изделие, кг/шт.	Масса всего титана, кг
Крямзели		$1{,}2y$	$0{,}75xy$
Штрюндели	x	y	xy

Для заполнения последней клетки определяем коэффициент перед x делением чисел.

$$\frac{0{,}75}{1{,}2}=\frac{3}{4}:\frac{6}{5}=\frac{5}{8}.$$

Таким образом, на заводе сделано $\frac{5}{8}x$ крямзелей. Пишем это в последнюю клетку. Видим, что штрюнделей сделано больше, *чем* крямзелей. Составляем пропорцию (см. рис. 4.1). Решая её, находим, что

$$a = \frac{800}{5} = 160\,(\%).$$

Осталось вычесть 100 %.

$$\begin{array}{r|cc|}
 & \text{штук} & \\
\text{крямзелей} & \frac{5}{8}x & 100\% \\
\text{штрюнделей} & x & a\%
\end{array}$$

Рис. 4.1

Ответ: штрюнделей больше на 60 %.

Задачи для самостоятельного решения

4.6. Столько же. Сорок пять конфет стоят столько же рублей, сколько конфет можно купить на 20 рублей. Сколько конфет можно купить на 50 рублей?

4.7. Забег. На тренировке Газов бежал на 20 % быстрее, чем Тормозов, зато Тормозов бежал на 60 % дольше. У кого из них дистанция оказалась длиннее и на сколько процентов?

4.8. Урожай. Под капусту первый фермер отвёл вдвое больше земли, чем его сосед, но урожайность у него оказалась на 40 % ниже, чем у соседа. У кого урожай капусты меньше и на сколько процентов?

4.9. Яблоки. В магазине после снижения цен на яблоки их продали за день на 50 % больше, чем до снижения цен, а дневная выручка возросла при этом на 12,5 %. На сколько процентов была снижена цена?

4.10. Кока-кола. Артём в силу природной лени обычно делает работу за 6 часов. Но если он выпьет кока-колы, то выполняет эту же работу за 3 часа. Артём начал выполнять эту работу в полдень, но в какой-то момент ему принесли кока-колу, поэтому он закончил работу за 4 часа. В котором часу Артёму принесли кока-колу?

4.6. Ответ: 75 конфет.

► **Путь к решению.** Составим таблицу для трёх величин: цена, количество и стоимость конфет. Внесём в неё данные условия.

Количество конфет, шт.	Цена, руб./шт.	Стоимость, руб.
45		
		20
?		50

В условии есть два равенства: одно явно описано словами «столько же», другое связано с тем, что цена конфет постоянна. Любое из этих равенств можно использовать для введения переменной, при этом в строках образуются по две заполненные клетки, что позволяет заполнить третью. После этого второе равенство порождает уравнения. Рассмотрим оба пути. ◄

Решение 1. Пусть конфета стоит x рублей.

Количество конфет, шт.	Цена, руб./шт.	Стоимость, руб.
45	x	$45x$
$\frac{20}{x}$	x	20
$\frac{50}{x}$	x	50

Тогда $45x = \frac{20}{x}$. Решаем уравнение: $x^2 = \frac{20}{45}$; $x^2 = \frac{4}{9}$; $x = \frac{2}{3}$. Находим

$$\frac{50}{x} = 75 \text{ (конфет).}$$

Решение 2. Пусть 45 конфет стоят y рублей и на 20 рублей можно купить y конфет.

Тогда цена конфеты равна $\frac{y}{45} = \frac{20}{y}$. Отсюда следует, что

$$y^2 = 20 \cdot 45 = 900, \quad y = 30.$$

Цена равна

$$\frac{y}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3} \text{ рубля}$$

за одну конфету (вписываем в нужную клетку таблицы), а на 50 рублей можно купить $50 : \frac{2}{3} = 75$ конфет.

Количество конфет, шт.	Цена, руб./шт.	Стоимость, руб.
45	$\frac{y}{45}$	y
y	$\frac{20}{y}$	20
		50

4.7. Ответ: больше пробежал Тормозов на $33\frac{1}{3}\,\%$.

Решение. Расстояние — произведение скорости и времени. Составим таблицу, записывая расстояние в последнем столбце. Внесём в неё данные задачи: скорость и время, введя переменные x и y. Столбец расстояния заполним умножением.

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Газов	$1{,}2x$	y	$1{,}2xy$
Тормозов	x	$1{,}6y$	$1{,}6xy$

Теперь поймём, чьё расстояние соответствует $100\,\%$, переформулировав вопрос: Тормозов пробежал больше, *чем* Газов. Составляем и решаем пропорцию (см. рис. 4.2), после чего вычитанием получим ответ.

$$\begin{array}{l|ll}
 & S\text{, км} & \\
\text{Газов} & 1{,}2xy & 100\,\% \\
\text{Тормозов} & 1{,}6xy & a\,\%
\end{array}$$

Рис. 4.2

$$a = \frac{1{,}6xy \cdot 100}{1{,}2xy} = \frac{400}{3} = 133\frac{1}{3}\ (\%); \quad 133\frac{1}{3} - 100 = 33\frac{1}{3}\ (\%).$$

4.8. Ответ: меньше у второго на $16\frac{2}{3}\,\%$.

Решение. Составим таблицу, исходя из того, что урожай равен произведению посевной площади и урожайности.

	Площадь, га	Урожайность, т/га	Урожай, тонн
Первый	$2x$	$0{,}6y$	$1{,}2xy$
Второй	x	y	xy

Внимательно читаем вопрос. Урожай у второго фермера *меньше, чем* у первого. Принимая $1{,}2xy$ за $100\,\%$, составляем пропорцию и находим из неё урожай второго фермера:

$$a = \frac{100xy}{1{,}2xy} = \frac{1000}{12} = 83\frac{1}{3}\ (\%).$$

Это меньше, чем у первого, на

$$100 - 83\frac{1}{3} = 16\frac{2}{3}\ (\%).$$

4.9. Ответ: на $25\,\%$.

Решение. Выручка — произведение цены яблок и их количества. Составим таблицу, записывая выручку в последнем столбце. Введём две переменные в соответствии с данными задачи. Переменные удобнее выбрать так, чтобы избежать их деления. Для этого за y примем первоначальную цену яблок, а не первоначальную выручку.

	Цена, руб./кг	Продано яблок, кг	Выручка, руб.
До снижения цен	y	x	xy
После снижения цен	$0{,}75y$	$1{,}5x$	$1{,}125xy$

Осталось понять, на что надо умножить 1,5, чтобы получить 1,125. На $1{,}125:1{,}5=0{,}75$. Заполняем последнюю клетку таблицы: $0{,}75y$. Значит, цена была снижена на $25\,\%$.

4.10. Ответ: в 14:00.

Решение 1. Как и в задаче 4.2, составим таблицу, чтобы от времени (которое нельзя складывать) перейти к производительности и сделанной работе.

В данном случае работают не два персонажа одновременно (тогда можно было бы сложить их производительность), а один и тот же Артём, но производительность его в разные

	Время, ч	Производительность	Объём работы
Обычно	6	$\frac{1}{6}$	1
С кока-колой	3	$\frac{1}{3}$	1
До кока-колы	x	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}x$
После кока-колы	$4-x$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}(4-x)$

периоды времени разная. Поэтому складывать можно будет сделанную им в течение этих периодов времени работу. Про вид и количество работы ничего не сказано. В таких случаях количество работы удобно принять за единицу. Можно считать, что Артём сделал одно дело, тогда единица измерения производительности — дел/час. Часто в заголовке таблицы указывают только часы как единицу времени, при этом фактически производительность измеряется в долях работы в час.

Так как Артём сделал в итоге всю работу, составим уравнение: $\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}(4-x)=1$. Решая уравнение, получим $x=2$, т. е. кока-колу принесли в $12+2=14$ часов.

Решение 2. Изобразим 6 часов медленной работы тонким отрезком длиной в 6 клеточек, а 3 часа быстрой работы жирным отрезком длиной в 3 клеточки. С кока-колой Артём работает в $6:3=2$ раза быстрее, как бы за двоих. На чертеже этому соответствует превращение двух тонких клеточек в одну жирную.

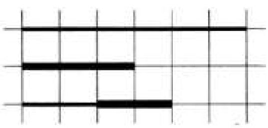


Рис. 4.3

По условию Артём работал 4 часа. Отрезок из 6 часов-клеточек уменьшился до 4 клеточек, т. е. 4 тонкие клеточки превратились в 2 жирные, а 2 так и остались тонкими (нижний отрезок на рис. 4.3). В переводе с «клеточного» языка это означает, что 2 часа Артём работал медленно без кока-колы, а потом ещё два часа с кока-колой, «за двоих». Значит, кока-колу принесли в 14:00.

► Можно также использовать задачи Д29—Д38, Д77. ◄

Занятие 5
Отношение скоростей и другие пропорции

Спрашивается в задаче:
Чёрт его несёт туда
От любимого тем паче
Пункта А?

Ю. Ким. Весенняя задача. Песня о двух пешеходах

Задачи на отношение скоростей среди всех задач на движение занимают место, аналогичное месту аффинных задач в геометрии. На идею пропорциональности времени, скорости и расстояния в разных сочетаниях имеет смысл обратить внимание на уроках при изучении пропорций в 6 классе. Начать можно с простых вопросов типа «Как изменится время прохождения пути, если скорость увеличится вдвое? А если скорость увеличится вдвое, но и путь возрастёт в 6 раз?».

Цель нашего занятия сложнее: учить использовать отношение скоростей не только там, где оно явно дано в условии или в вопросе (как в задачах 5.2, 5.4, 5.8). Умение видеть пропорциональность величин помогает найти короткие и красивые решения сложных задач, чаще всего на движение (задачи 5.1, 5.5, 5.6, 5.7, 5.10), реже на работу (задачи 5.3, 5.8) и другие темы (задача 5.9).

К большинству задач удобно сделать чертёж, а потом моделировать движение двух объектов с помощью двух рук; можно дополнительно оставлять следы мелками двух цветов. К сожалению, анимацию невозможно передать в книжке. Несколько разных решений имеют все задачи, а не только те, для которых они написаны. Умение использовать чертёж (в том числе точно по клеточкам) не менее ценно, чем применение пропорций, хотя иногда приходится помочь ученику такое решение обосновать. Если же ученик верно решает задачу, введя много переменных, его стоит потом познакомить и с решением, использующим пропорциональность. Чем труднее задача, тем заметнее преимущество метода. Поэтому мы предлагаем нарушить принцип «от простого к сложному». Хорошо, если после подробного обсуждения задачи 5.1 — пожалуй, самой сложной задачи занятия — ученики сами предложат решение задачи 5.2, связанное с пропорциональностью.

Некоторые задачи на движение можно также решать, используя построение графиков. Этот подход подробно разобран в книге [3, занятие 3], поэтому здесь мы его не рассматриваем.

При переходе к математической модели в задачах на движение мы делаем стандартные допущения. В частности, все объекты двигаются с постоянными скоростями, не отдыхают часами и не делают остановок даже в момент разворота, если иное явно не указано в условии. Подобные договорённости полезно проговаривать в двух случаях.

1. Они неочевидны ученикам.

2. Ради возможности получить хоть какой-то ответ мы пренебрегаем тем, чем с точки зрения физики пренебрегать нельзя. Например, в задаче 5.10 мы считаем, что чайка 3 секунды неподвижна, а затем мгновенно набирает скорость, достаточную для того, чтобы догнать катер за несколько секунд. А в задаче Д41 не учтено, что для того, чтобы Чебурашка выскочил из трамвая, этот трамвай, наверное, должен притормозить. Мы обратили внимание именно на эти задачи, поскольку ответ в них дан с точностью до секунды.

5.1. Прогулка. Два джентльмена прогуливаются по бульвару. Они начали прогулку одновременно с противоположных концов бульвара и впервые встретились в 50 метрах от его середины. Дойдя до конца бульвара, каждый немедленно разворачивается и идёт обратно с той же скоростью. Джентльмены встретились лицом к лицу ещё дважды, после чего один догнал другого в конце бульвара. Найдите длину бульвара.

Решение 1. Пусть s метров — длина бульвара, x м/мин и y м/мин — скорости джентльменов ($x > y$), а до первой встречи они шли t минут. Тогда условие о первой встрече записывается в виде двух уравнений: $xt = 0{,}5s + 50$, $yt = 0{,}5s - 50$.

Условие о том, когда первый джентльмен догнал второго, означает, что к этому моменту второй прошёл весь бульвар трижды, а первый — четырежды. Момент один и тот же, поэтому $\frac{3s}{y} = \frac{4s}{x}$. Получено три уравнения с четырьмя переменными. Требуется найти только одну из них — s. Для этого выразим дважды одну и ту же величину $\frac{x}{y}$. Поделив первое уравнение на второе и сократив на t, запишем $\frac{x}{y} = \frac{0{,}5s + 50}{0{,}5s - 50}$. Третье уравнение преобразуем к виду $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$. Приравняем правые части получившихся уравнений: $\frac{0{,}5s + 50}{0{,}5s - 50} = \frac{4}{3}$. Решая и это уравнение как пропорцию, находим $s = 700$.

▶ Это решение можно понимать на двух уровнях. Первый: введём побольше переменных, напишем побольше уравнений, объединим их в систему, а потом как-нибудь её решим. Второй: выразим дважды отношение скоростей джентльменов $\frac{x}{y}$ и получим уравнение с одной переменной. При таком подходе можно только этой переменной и обойтись. ◀

Решение 2. Из условия о том, когда первый джентльмен догнал второго, следует, что за одно и то же время первый прошёл длину бульвара 4 раза, а второй — 3 раза. Значит, отношение их скоростей равно $4:3$. Но тогда и расстояния, пройденные джентльменами к моменту первой встречи, относятся так же, т.е. $\frac{0,5x+50}{0,5x-50}=\frac{4}{3}$, где x метров — длина бульвара. Решая пропорцию, находим $x=700$.

Ответ: 700 метров.

▶ Формула $s=vt$ связывает три величины. Если одна из них постоянна, то две другие пропорциональны, прямо или обратно. Получаются три полезных свойства:

- при постоянном времени во сколько раз быстрее идёшь, во столько же раз больше успеешь пройти;
- при постоянной скорости во сколько раз дольше идёшь, во столько же раз больше пройдёшь;
- «в k раз быстрее» одновременно означает две вещи: «в k раз больше скорость» и «для прохождения того же пути требуется в k раз меньше времени». ◀

5.2. Из пункта *А* в пункт *Б* выехал велосипедист Вася. Одновременно из пункта *Б* ему навстречу вышел пешеход Петя. После их встречи велосипедист Вася повернул обратно, а пешеход Петя продолжил свой путь. Известно, что Вася вернулся в *А* на 30 минут раньше Пети, при этом его скорость была в 5 раз больше Петиной. Сколько времени затратил пешеход Петя на путь из *Б* в *А*?

Решение. Пешеход и велосипедист до встречи двигались одно и то же время. Но велосипедист ехал в 5 раз быстрее, поэтому и расстояние он преодолел в 5 раз большее (на рис. 5.1 имеем $AB=5BБ$, где B — точка встречи). После встречи он возвращался в пункт A столько же времени, сколько ехал до встречи. За это время пешеход оказался в точке $П$, т.е. успел пройти расстояние $BП=БB$. По условию расстояние $AП$

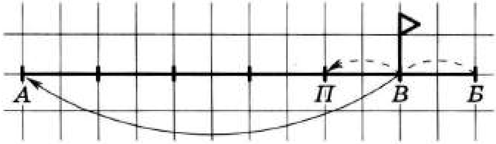


Рис. 5.1

пешеход прошёл за 30 минут. Это $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ пути. А весь путь *БА* он прошёл за 45 минут.

Ответ: 45 минут.

5.3. Свечи. Одновременно зажгли две свечи одинаковой длины: толстую (сгорает за 4 часа) и тонкую (сгорает за 2 часа). Через некоторое время их потушили. Оказалось, что огарок толстой в три раза длиннее огарка тонкой. Сколько времени горели свечи?

Решение 1. Длина сгоревшего участка прямо пропорциональна времени горения. Поэтому если свечи горели x часов, то за это время сгорело $\frac{x}{4}$ толстой свечи и $\frac{x}{2}$ тонкой (считаем в частях свечи, а не, например, в метрах). А остались соответственно $1-\frac{x}{4}$ и $1-\frac{x}{2}$. По условию $1-\frac{x}{4}=3\left(1-\frac{x}{2}\right)$. Решая уравнение, получим $x=1{,}6$.

Решение 2. Нарисуем огарки свечей в виде отрезков: от толстой осталось 3 клетки, а от тонкой — 1 клетка. Сверху к этим отрезкам можно дорисовать штриховой линией сгоревшую часть. Подумаем про длину штриховых линий.

Рис. 5.2

Толстая свеча сгорает за 4 часа, а тонкая — за 2 часа, т. е. тонкая горит вдвое быстрее: за одно и то же время её сгоревший кусок вдвое больше. Но так как исходные длины свечей одинаковые, то он больше на разницу длин огарков, т. е. на $3-1=2$ клетки. Значит, толстую свечу удлиняем на 2 клетки, а тонкую — на 4 клетки; исходная длина свеч равна 5 клеткам (см. рис. 5.2). Толстая свеча горела $\frac{2}{5}$ от 4 часов, т. е. $\frac{8}{5}$ ч $=1$ ч 36 мин.

Ответ: 1 час 36 минут.

► Как догадаться, что задачу можно решить с помощью пропорциональности величин? В задаче 5.1 дано только расстояние и расстояние же надо найти. Ни скорость, ни пройденный путь численно не даны. Но есть условие постоянства скоростей, и можно заметить, что отношение пройденных расстояний равно $4:3$. В задаче 5.2 дано только время и время же надо найти; дано также отношение скоростей. В задаче 5.3 ситуация аналогична: дано время, надо найти время, а дополнительно известно отношение длин огарков (аналог расстояний). Таким образом, даны значения той же величины, которую нужно найти, а про остальные величины известны лишь их отношения (или постоянство). Такие задачи мы и рассматриваем на этом занятии. ◄

Задачи для самостоятельного решения

5.4. Соревнование. Четыре гнома (Бомбур, Фили, Кили и Торин) соревновались в беге на скорость по волшебному лесу. Фили бегает в три раза быстрее Бомбура, а Кили — в два раза быстрее Фили. Фили, Кили и Бомбур пробежали от оврага до ёлки эстафетой, каждый по трети пути. Во сколько раз быстрее Бомбура должен бежать Торин, чтобы в одиночку проделать весь путь за такое же время?

5.5. Автобус и грузовик. Из пункта O в пункт E выехал автобус. Через 5 минут из пункта O по той же дороге выехал грузовик. Через 10 минут после этого он обогнал автобус и прибыл в пункт E на 15 минут раньше автобуса. Сколько времени автобус ехал из пункта O в пункт E?

5.6. Гонцы. Из пунктов E и $Ю$ навстречу друг другу одновременно выбежали два гонца с постоянными скоростями. Добежав до конца, они немедленно поворачивали обратно. Первый раз они встретились в 6 км от E, а второй раз — в 4 км от $Ю$. Найдите расстояние между E и $Ю$.

5.7. Лифт. В доме два лифта: пассажирский и грузовой. Каждый лифт ходит вверх и вниз с одной и той же постоянной скоростью, но у грузового и пассажирского лифта эти скорости отличаются. Сейчас пассажирский лифт на 10-м, а грузовой — на 21-м этаже. Саша живёт на 18-м этаже, а Ваня — на самом верхнем, и оба они хотят спуститься на первый этаж. Саше безразлично, какой лифт вызвать, — он спустится за одинаковое время. Любопытно, что и Ване тоже всё равно, какой из лифтов вызывать. Сколько этажей в доме?

5.8. Грядка клубники. Три подруги работают на сборе клубники. Аня вместе Катей могут собрать всю клубнику с грядки вдвое быстрее Жени, а Женя с Катей — втрое быстрее Ани. Во сколько раз Аня с Женей справились бы быстрее с этой грядкой, чем Катя в одиночку?

5.9. Соль. Купец купил в Твери несколько мешков соли и продал их в Москве с прибылью в 100 рублей. На все вырученные деньги он снова купил в Твери соль (по тверской цене) и продал в Москве (по московской цене). На этот раз прибыль составила 120 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?

5.10. Кормёжка. Чайку кормят с плывущего катера. Вниз бросают кусок хлеба, чайка за 3 секунды поднимает кусок с поверхности моря, а затем за 12 секунд догоняет катер. Войдя в залив, катер уменьшил скорость в два раза. Какое время теперь потребуется чайке, чтобы догнать катер, после того как она поднимет кусок хлеба?

Ответы, решения, комментарии

5.4. Ответ: в два раза.

Решение 1. Пусть Кили пробегает свою часть пути за одну единицу времени. Так как Фили бежит в два раза медленнее, то такое же расстояние он пробежит за две единицы времени. Аналогично Бомбур пробежит свою часть пути за шесть единиц времени. Все вместе они пробегут от оврага до ёлки за $6+2+1=9$ единиц времени. Таким образом, Торин должен пробежать весь путь за 9 единиц времени, т.е. каждый этап эстафеты — за 3 единицы времени. Следовательно, он должен бежать в $6:3=2$ раза быстрее Бомбура.

Решение 2. Пусть скорость Бомбура равна v км/ч, тогда скорость Фили — $3v$ км/ч, а скорость Кили — $6v$ км/ч. Пусть треть расстояния от ёлки до оврага составляет s км. Тогда на эстафету гномы затратят

$$\frac{s}{v}+\frac{s}{3v}+\frac{s}{6v}=\frac{9s}{6v}=\frac{3s}{2v} \text{ часов.}$$

Торину нужно пробежать расстояние $3s$ км за такое же время, значит, его скорость должна составлять $2v$ км/ч.

5.5. Ответ: 1 час.

Решение. Рассмотрим часть пути от пункта O до места обгона. Автобус его проехал за 15 минут, а грузовик — за 10 минут. Это означает, что он ехал в $15 : 10 = 1{,}5$ раза быстрее автобуса. Теперь посмотрим на весь путь. Грузовик и его проехал в 1,5 раза быстрее. При этом он потратил на $5 + 15 = 20$ минут меньше. Из уравнения $1{,}5t - t = 20$ получим, что он ехал $t = 40$ минут, а автобус — 60 минут.

5.6. Ответ: 14 км.

Решение. От начала пути до первой встречи гонцы вместе пробежали расстояние от E до $Ю$ однократно, а между первой и второй встречами — двукратно, потратив на это вдвое больше времени. От старта до первой встречи гонец из E пробежал 6 км, а между двумя встречами — вдвое больше, т. е. 12 км. Всего он пробежал $6 + 12 = 18$ (км). Последние 4 км он бежал обратно от $Ю$ к E. Значит, от E до $Ю$ он бежал $18 - 4 = 14$ (км).

5.7. Ответ: 33 этажа.

Решение. Для того чтобы Саша оказался на первом этаже в пассажирском лифте, лифт должен проехать $8 + 17 = 25$ пролётов между соседними этажами, а для его спуска вниз на грузовом — 20 пролётов. Так как время движения одно и то же, то скорости грузового и пассажирского лифтов относятся как $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$.

Пусть в доме n этажей. Тогда для спуска Вани пассажирский лифт преодолеет $(n - 10) + (n - 1) = 2n - 11$ пролётов, а грузовой преодолеет $(n - 21) + (n - 1) = 2n - 22$ пролётов. Следовательно, $\frac{2n - 22}{2n - 11} = \frac{4}{5}$, откуда находим $n = 33$.

5.8. Ответ: в 1,4 раза.

Решение 1. Пусть девушки втроём собрали клубнику со всей грядки. Поймём, какую часть клубники собрала каждая из них, с учётом пропорциональности объёма работы и производительности: *во сколько раз быстрее собираешь, во столько раз больше соберёшь за то же самое время.* По условию Аня и Катя собрали вдвое больше Жени, т.е. $\frac{2}{3}$ всей клубники, а Женя собрала $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ клубники. Аналогично Женя и Катя собрали втрое больше Ани, т.е. $\frac{3}{4}$ клубники, а Аня — только

$\frac{1}{4}$ клубники. Женя и Аня вместе собрали $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ клубники, а Катя — оставшиеся $1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$. Таким образом, Аня и Женя вместе работают в $\frac{7}{12}:\frac{5}{12}=7:5=1{,}4$ раза быстрее Кати.

► Помимо пропорциональности, использована связь части от всего и части от остатка (см. задачу 1.4). ◄

Решение 2. Количество клубники на грядке примем за единицу. Обозначим через x, y и z производительность Жени, Ани и Кати соответственно. По условию

$$2\cdot\frac{1}{y+z}=\frac{1}{x},\quad 3\cdot\frac{1}{x+z}=\frac{1}{y}.$$

Из первого уравнения получим, что $2x=y+z$, т. е. $z=2x-y$. Из второго уравнения $3y=x+z$. Следовательно,

$$y=\frac{3}{4}x,\quad z=\frac{5}{4}x.$$

Тогда

$$\frac{1}{z}:\frac{1}{x+y}=\frac{x+y}{z}=\frac{7}{5}.$$

► Можно было бы использовать в качестве количества всей клубники переменную и указать единицу измерения (килограммы, ящики и т. п.). В процессе решения системы уравнений эта переменная уничтожится. ◄

5.9. Ответ: 500 рублей.

Решение 1. Во второй раз купец продавал соли столько же, сколько раньше, и ещё на 100 «тверских» рублей. В результате он получил дополнительно $120-100=20$ рублей прибыли. Таким образом, прибыль составляет $\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ от тверской цены. Поэтому, чтобы получить 100 рублей прибыли, надо купить соли на 500 рублей.

Решение 2. Пусть купец потратил на первую покупку x рублей. Запишем историю движения денег: $x\to x+100\to$ $\to x+220$. Цены каждый раз умножались на один и тот же коэффициент, равный отношению московской цены к тверской. Составим пропорцию:

$$\frac{x}{x+100}=\frac{x+100}{x+220}.$$

Решив её, получим, что $x=500$.

Решение 3. Пусть килограмм соли стоит в Твери x рублей, а в Москве — y рублей и купец в первый раз купил a кг соли. Тогда по условию $a(y-x)=100$. Вырученная сумма составила ay рублей, значит, во второй раз купец смог купить $\frac{ay}{x}$ кг соли. В этом случае прибыль составила

$$\frac{ayx}{.}y-ay=\frac{ay(y-x)}{x} \text{ рублей.}$$

По условию $\frac{ay(y-x)}{x}=120$. Из двух полученных уравнений следует, что $\frac{100y}{x}=120$, т. е. $y=\frac{6}{5}x$. Подставляя этот результат в первое уравнение, получим, что $ax=500$.

5.10. Ответ: 2 секунды.

Решение. Из условия задачи следует, что одно и то же расстояние чайка пролетает за 12 секунд, а катер проходит за $12+3=15$ секунд. Следовательно, отношение скорости чайки к скорости катера (до входа в залив) равно $15:12=5:4$. После того как катер войдёт в залив, это отношение станет равным $5:2$. Значит, теперь, чтобы преодолеть одно и то же расстояние, чайке потребуется в 2,5 раза меньше времени, чем катеру. Так как разница во времени по-прежнему составляет 3 секунды, то из уравнения $2{,}5t-t=3$, где t — искомое время, находим, что $t=2$.

► Можно также использовать задачи Д39–Д53, Д101. ◄

Занятие 6
Составление уравнений: зачем и как

Но, Боже правый, как быть, когда
Всё чаще, меж строгих схем,
Торчит проклятый вопрос «куда?»
И подлый вопрос «зачем?»

М. Щербаков. Закон ходьбы

При составлении уравнения по текстовой задаче встают два вопроса: что обозначить с помощью переменной и откуда возьмётся равенство. Второй вопрос можно переформулировать. Уравнения в текстовых задачах — частный случай общематематической идеи подсчёта двумя способами. Для их составления надо поискать соответствующую величину.

Порой встаёт ещё и третий вопрос. А нужно ли вообще здесь уравнение? Введение переменной обычно упрощает решение, автоматизирует творческий процесс. Чем больше переменных, тем выше степень автоматизации. Чем-то это хорошо: расширяется круг задач, доступных данному ученику; научившись составлять уравнения на простых для него задачах, он имеет больше шансов решить потом и сложную. Но чем-то и плохо: за алгебраическими преобразованиями суть задачи может потеряться. Если времени на занятии недостаточно, нам кажется предпочтительнее успеть сравнить арифметическое и алгебраическое решения задач 6.1, 6.4 и 6.6, чем успеть решить как можно больше задач.

На этом занятии повторяются также идеи предыдущих: изображение данных с помощью отрезков (задачи 6.1, 6.6), связь процентов и умножения (задачи 6.2, 6.8, 6.10), применение таблиц (задачи 6.2, 6.3, 6.6, 6.10).

6.1. Ручки. Офеня (*продавец вразнос*) купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя офеня получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

► **Путь к решению 1.** Это пример простейшей ситуации. Что взять за x, подсказывается условием: как раз то, что спрашивается, т.е. цену ручки в рублях. Появление уравнения тоже подсказано: написано, что прибыль одинаковая, потому её надо найти в двух случаях и приравнять. ◄

Решение 1. Если оптовая цена ручки составляет x рублей, то прибыль от продажи одному покупателю одной ручки равна $(5-x)$ рублей, а прибыль от продажи трёх ручек равна $(10-3x)$ рублей. По условию $5-x=10-3x$, откуда следует, что $x=2{,}5$.

Решение 2. Изобразим оптовую цену ручек сплошными отрезками, а прибыль — штриховыми (см. рис. 6.1). Видим, что $3-1=2$ ручки стоят $10-5=5$ рублей, поэтому одна ручка стоит 2,5 рубля.

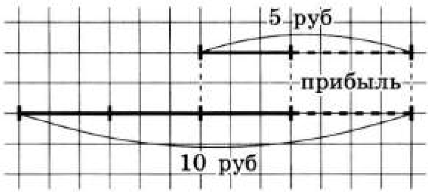


Рис. 6.1

Ответ: 2,5 рубля.

► Разница между двумя решениями внешняя: цену ручки можно обозначить переменной x или отрезком. Это вопрос вкуса и удобства. ◄

6.2. Двоечники. В классе хватает двоечников, но Вовочка учится хуже всех. Педсовет решил, что либо Вовочка должен к концу четверти исправить двойки, либо его исключат. Если Вовочка исправит двойки, то в классе будет 24 % двоечников, а если его выгонят, то двоечников станет 25 %. Какой процент двоечников в классе сейчас?

► **Путь к решению.** Читаем условие. Из первого предложения понимаем только, что Вовочка — двоечник. Из второго — что в задаче сравниваются две ситуации. Какими величинами они различаются? Одна явно указана — это процент двоечников. Переводим с языка новостей и отчётов на удобный язык умножения: если Вовочка исправит двойки, то число двоечников будет получаться после умножения числа всех учеников класса на 0,24. Ага, теперь ясно. Это задача о трёх величинах: количестве учеников в классе, доле двоечников (аналог концентрации) и их произведении — количестве двоечников. ◄

Решение. Пусть вместе с Вовочкой в классе n учеников. Составим таблицу. Третий столбец получаем умножением первых двух.

	Количество учеников	Доля двоечников	Двоечников
Если исправит	n	0,24	$0{,}24n$
Если исключат	$n-1$	0,25	$0{,}25(n-1)$

► **Путь к решению.** Условие прочитано, таблица заполнена, задача пока не решена. Чтобы её решить, надо составить уравнение. А для этого понять, что подсчитано двумя способами, т. е. что можно приравнять. Если не придумывается, зайдём с другого конца. Мы зачем-то нашли число двоечников в классе в двух случаях: если Вовочка перестанет быть двоечником или если его исключат. Как связаны эти числа? ◄

Решение (продолжение). Так как двумя способами подсчитаны одни и те же двоечники, то

$$0{,}24n = 0{,}25(n-1),$$

т. е. $0{,}01n = 0{,}25$. Значит, $n = 25$, столько сейчас человек в классе. А двоечников без Вовочки $0{,}24n = 0{,}25(n-1) = 6$, а с Вовочкой $6 + 1 = 7$. Они составляют $\frac{7}{25} \cdot 100\,\% = 28\,\%$.

Ответ: 28 %.

► В обеих задачах составление уравнения основано на универсальной идее подсчёта двумя способами. Но в первой выбор удобной переменной подсказан вопросом задачи, а во второй пришлось подумать, о каких вообще величинах в задаче идёт речь, и выбрать ту, с которой удобно сочетаются числовые данные. ◄

Задачи для самостоятельного решения

6.3. Наклейки. У одноклассниц Маши и Светы одинаковое количество тетрадей. Они купили одинаковые наборы наклеек с котиками. Маша наклеила на 7 тетрадей по одному котику, а на остальные — по 7 котиков. Света наклеила на 11 тетрадей по одному котику, а на остальные — по 11 котиков. Сколько котиков было в наборе, если каждая девочка израсходовала весь набор?

6.4. Акция. Туристическая фирма провела акцию: «Купи путёвку в Египет, приведи четырёх друзей, которые также купят путёвку, и получи стоимость путёвки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из покупателей привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

6.5. Мантии. Гарри, Рон и Гермиона хотели купить одинаковые непромокаемые мантии. Однако им не хватало денег: Рону — трети цены мантии, Гермионе — четверти, а Гарри — одной пятой цены мантии. Когда на распродаже цена мантии упала на 9,4 сиклей, друзья объединили имеющиеся деньги и купили три мантии, потратив все деньги. Сколько сиклей стоила одна мантия до снижения цены?

6.6. Сыр. Когда лиса откусила у двух медвежат по одинаковому кусочку сыра, у первого медвежонка осталось втрое меньше сыра, чем у второго. После этого лиса снова откусила у каждого медвежонка точно по такому же кусочку, и у первого осталось вчетверо меньше сыра, чем у второго. Во сколько раз меньше сыра было у первого медвежонка, чем у второго, до прихода лисы?

6.7. Весы. У весов сдвинута шкала (в частности, при отсутствии груза весы показывают не на ноль). Когда на эти весы положили одну связку бананов, весы показали 1,5 кг. Когда на них положили связку бананов побольше, весы показали 2,5 кг. Когда взвесили сразу обе связки бананов, весы показали 3,5 кг. Сколько на самом деле весили связки бананов?

6.8. Конфеты. Карлсону подарили пакет с конфетами: шоколадными и карамельками. За первые 10 минут Карлсон съел 20% всех конфет, причём 25% из них составляли карамельки. После этого Карлсон съел ещё 3 шоколадные конфеты, и доля карамелек среди съеденных Карлсоном конфет понизилась до 20%. Сколько конфет было в подаренном Карлсону пакете?

6.9. Встреча. Поезд, который шёл на восток, в 10 часов 36 минут проехал мимо станции Таксимо, а в 16 часов 21 минуту — мимо Новой Чары. Встречный поезд вышел из Новой Чары в 10 часов 30 минут и прибыл в Таксимо в 15 часов 6 минут. В какое время встретились поезда, если их скорости постоянны?

6.10. Носки. У Андрея в ящике вперемешку лежат носки: целые — их 60 % — и с дырками — их 40 %. Когда Андрей достал 4 носка, процент оставшихся носков с дырками в ящике возрос до 50 %. Сколько носков в ящике могло быть первоначально?

Ответы, решения, комментарии

6.3. Ответ: 77.

Решение. Пусть у каждой девочки x тетрадей. Маша использовала $7+7(x-7)$ наклеек, а Света — $11+11(x-11)$ наклеек. Так как все наклейки использованы, то $7+7(x-7)=$ $=11+11(x-11)$. Решая это уравнение, получим $x=17$. Значит, в каждом наборе было $7+7(17-7)=77$ наклеек.

► Одинаковое число тетрадей и одинаковое число наклеек в наборе — явные подсказки. Одно — переменная, другое — уравнение. Вопрос про наклейки. Но за переменную важнее брать не то, про что спрашивают, а то, через что удобнее выражать остальные величины. В частности, умножать удобнее, чем делить.

На самом деле и эта задача про три величины, одна из которых — произведение двух других. Поэтому она также может быть описана таблицей. ◄

	Количество тетрадей	Количество наклеек на одной тетради	Общее количество наклеек
Маша	7	1	7
	$x-7$	7	$7(x-7)$
Всего наклеек у Маши			$7+7(x-7)$
Света	11	1	11
	$x-11$	11	$11(x-11)$
Всего наклеек у Светы			$11+11(x-11)$

6.4. Ответ: 29.

Решение 1. Пусть каждый из x потенциальных «счастливчиков» привёл по 4 друга. Тогда «приведённых» клиентов $4x$, ещё 13 пришли сами, значит, всего туристов было $13+4x$. С другой стороны, x человек привели новых клиентов, а 100 человек не привели, т.е. всего туристов было $x+100$. Получим уравнение: $13+4x=x+100$, откуда находим $x=29$.

Решение 2. Откуда берутся люди, заплатившие за путёвку? Либо сами приходят, либо их приводят друзья. Сами в фирму пришли 13 человек, а в итоге заплатили за путёвку 100 человек. Значит, $100-13=87$ плательщиков добавились за счёт операции «приведи друзей».

Что происходит при каждой такой операции? Во-первых, появляется один счастливчик. Во-вторых, количество клиентов, которые должны заплатить фирме, увеличивается на $4-1=3$. Чтобы добавились 87 человек, потребовалось $87:3=$ $=29$ операций. В результате каждой из них один человек поехал в Египет бесплатно.

► Решение 1 в явном виде ещё раз показывает, что составление уравнения — это всегда подсчёт двумя способами.

Как можно придумать решение 2? Попробовать подобрать ответ, предполагая конкретный порядок. Например, сначала приходят 13 человек сами. Потом каждый из этих 13 человек приводит 4 друзей и едет бесплатно. Потом из приведённых 52 человек 16 приводят по 4 друга. Такое решение требует объяснения, почему при другом порядке привода друзей ответ не изменится. Если это сделать аккуратно, мы фактически придём к решению 2. ◄

6.5. Ответ: 36 сиклей.

Решение. Пусть сначала мантия стоила x сиклей, тогда у Рона было $\frac{2}{3}x$ сиклей, у Гермионы — $\frac{3}{4}x$ сиклей, а у Гарри — $\frac{4}{5}x$ сиклей. На распродаже мантия стоила $(x-9{,}4)$ сикля, а три мантии — $3(x-9{,}4)$ сиклей. Так как друзья купили три мантии, потратив все деньги, то

$$\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}x=3(x-9{,}4).$$

Решая это уравнение, получим $x=36$.

6.6. Ответ: в 2,5 раза.

Решение 1. После первого откусывания у первого медвежонка была одна часть сыра, а у второго три такие части.

Разность кусков — две части. Та же разница после второго откусывания составляет три новые части. Значит, удобно считать, что разница составляет 6 квантов. Изобразим куски отрезками, квант — это одна клетка (см. рис. 6.2). После первого откусывания часть — это 3 кванта, т.е. у первого медвежонка было 3 кванта, а у второго — 9. После второго откусывания часть — это 2 кванта, т.е. у первого медвежонка было 2 кванта, а у второго — 8. Лиса откусывает по $3-2=9-8=1$ кванту. До её прихода у первого медвежонка было 4 кванта сыра, а у второго — 10 квантов, т.е. у первого было меньше в $10:4=2{,}5$ раза.

Рис. 6.2

Решение 2. Введём новую единицу измерения, соответствующую массе второго куска после первого откусывания. Пусть в этих единицах Лиса каждый раз откусывала по x. Запишем массы кусков.

	Вначале	После первого откусывания	После второго откусывания
Первый	$1+x$	1	$1-x$
Второй	$3+x$	3	$3-x$

По условию задачи $3-x=4(1-x)$, откуда находим $x=\frac{1}{3}$. Тогда

$$\frac{3+x}{1+x}=\frac{10}{4}=2{,}5.$$

Решение 3. Пусть масса первого куска равна y г, второго — x г, а Лиса откусывала каждый раз по z г. Тогда

$$y - z = 3(x - z).$$

После второго откусывания массы кусков уменьшились на $2z$ г, поэтому

$$y - 2z = 4(x - 2z).$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $z = 5z - x$, т. е. $x = 4z$. Подставляя этот результат в первое уравнение, получим, что $y = 10z$. Следовательно, отношение масс кусков равно

$$\frac{y}{x} = \frac{10z}{4z} = 2{,}5.$$

► Этот пример ещё раз показывает, что для решения одной и той же задачи можно обойтись вовсе без переменных, составить уравнение с одной переменной или систему уравнений с несколькими переменными. ◄

6.7. Ответ: 1 кг и 2 кг.

Решение. Пусть при нулевой массе груза весы показывают x кг (x может быть и отрицательным). Тогда при каждом взвешивании весы показывают на x кг больше, чем настоящий вес. Таким образом, первая связка бананов на самом деле весит $(1{,}5 - x)$ кг, вторая связка бананов весит $(2{,}5 - x)$ кг, а обе связки бананов вместе весят $(3{,}5 - x)$ кг. Следовательно, можно составить уравнение:

$$(1{,}5 - x) + (2{,}5 - x) = 3{,}5 - x,$$

откуда находим $x = 0{,}5$. Значит, связки бананов на самом деле весили 1 кг и 2 кг.

6.8. Ответ: 60.

► **Путь к решению.** Эта задача, как и задача 6.2, на концентрацию. Но тоже с необычным сухим веществом. В задаче 6.2 эту роль играли двоечники. А здесь — либо шоколадные конфеты, либо карамельки. Мы остановимся на карамельках, любители шоколадных конфет могут предложить своё аналогичное решение.

Что выбрать за x? Очевидный выбор подсказан вопросом: количество всех конфет. Тогда в первые 10 минут съедены всего $0{,}2x$ конфет, из них $0{,}25 \cdot 0{,}2x = 0{,}05x$ карамелек и $0{,}75 \cdot 0{,}2x = 0{,}15x$ шоколадных и т. д. Решение нетрудно довести до конца. Но лучше его немного упростить. С самого начала x умножается на 0,2 и больше в чистом виде ни разу не используется. Если вместо $0{,}2x$ сразу будет x, коэффициенты упростятся. ◄

Решение. Пусть за первые 10 минут Карлсон съел x конфет. Составим таблицу.

	Всего конфет	Концентрация карамелек	Карамелек
За 10 минут	x	0,25	$0{,}25x$
Съел в итоге	$x+3$	0,2	$0{,}2(x+3)$

Так как дополнительных карамелек Карлсон не ел, составим уравнение $0{,}25x = 0{,}2(x+3)$.

Решив его, получим $x = 12$. Но это не все конфеты, а только 20. А всего в пакете было $12 \cdot 5 = 60$ конфет.

6.9. Ответ: в 13 часов 6 минут.

► **Путь к решению.** Это задача на встречное движение. Но ни старт, ни финиш у поездов не одновременны, что мешает использовать скорость их сближения или удаления. С другой стороны, ни в условии, ни в вопросе нет скоростей и расстояний, а есть только время. Как отмечено на прошлом занятии, это характерный признак задач на отношение скоростей. Условие постоянства скоростей дополнительно подсказывает, откуда возьмётся равенство в уравнении: надо дважды выразить, во сколько раз один поезд идёт быстрее другого (см. замечание перед задачей 5.2). Дважды — значит, на двух разных участках. Разумных участков всего три: восточный, западный и весь путь целиком. Восточный и западный равноправны, а весь путь целиком удобнее всего, так как время, затраченное на его прохождение каждым поездом, вычисляется без переменной. Естественная переменная — время встречи. ◄

Решение 1. Первый поезд прошёл весь путь за

$$16 \text{ ч } 21 \text{ мин} - 10 \text{ ч } 36 \text{ мин} = 5 \text{ ч } 45 \text{ мин} = \frac{23}{4} \text{ ч},$$

а второй — за

$$15 \text{ ч } 6\text{мин} - 10 \text{ ч } 30 \text{ мин} = 4 \text{ ч } 36 \text{ мин} = \frac{23}{5} \text{ ч}.$$

Примем время встречи за x часов. Составим таблицу.

	Весь путь, ч	Западный участок (от Таксимо до места встречи), ч
Первый поезд	$\frac{23}{4}$	$x-10\frac{3}{5}$
Второй поезд	$\frac{23}{5}$	$15\frac{1}{10}-x$

Составим пропорцию с помощью любого из двух соображений.

1. Так как скорости постоянны, то во сколько раз быстрее второй поезд прошёл весь путь, во столько же раз быстрее он прошёл и западный участок, т. е.

$$\frac{23}{4}:\frac{23}{5}=\left(x-10\frac{3}{5}\right):\left(15\frac{1}{10}-x\right).$$

2. Выразим дважды, какую часть всего пути составляет западный участок:

$$\left(x-10\frac{3}{5}\right):\frac{23}{4}=\left(15\frac{1}{10}-x\right):\frac{23}{5}.$$

По основному свойству пропорции в любом случае получим линейное уравнение

$$\frac{23}{4}\left(15\frac{1}{10}-x\right)=\frac{23}{5}\left(x-10\frac{3}{5}\right),\quad \text{или}\quad 5\left(15\frac{1}{10}-x\right)=4\left(x-10\frac{3}{5}\right).$$

Решая его, получим $x=13{,}1$.

Решение 2. Пусть расстояние между Новой Чарой и Таксимо равно s км. Тогда, вычислив время движения каждого поезда, выразим и их скорости: $\frac{4s}{23}$ км/ч и $\frac{5s}{23}$ км/ч. Если x ч — время встречи, то длина западного участка равна $\left(x-10\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4s}{23}$ км, а восточного — $\left(x-10\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5s}{23}$ км. Расстояние от Новой Чары до Таксимо составляет

$$\left(x-10\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4s}{23}+\left(x-10\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5s}{23}=s \text{ км}.$$

Разделим обе части уравнения на s, а затем решим его. Получим $x=13{,}1$.

6.10. Ответ: 20 или 10.

► **Путь к решению.** Умную фразу «процент оставшихся носков с дырками в ящике возрос до 50 %» можно переформулировать по-простому: целых стало столько же, сколько дырявых. Это ключ к составлению простейшего уравнения. Точнее, пяти уравнений, поскольку есть пять случаев распределения целых и дырявых носков среди вынутых. ◄

Решение. Пусть в ящике было x носков. Из них целых было $0{,}4x$, а дырявых — $0{,}6x$. Среди вынутых Андреем носков целых могло оказаться 0, 1, 2, 3 или 4. Рассмотрим все эти случаи с помощью таблицы.

Достал целых	Осталось целых	Осталось дырявых	Уравнение	Его корень
0	$0{,}4x$	$0{,}6x-4$	$0{,}4x=0{,}6x-4$	20
1	$0{,}4x-1$	$0{,}6x-3$	$0{,}4x-1=0{,}6x-3$	10
2	$0{,}4x-2$	$0{,}6x-2$	$0{,}4x-2=0{,}6x-2$	0
3	$0{,}4x-3$	$0{,}6x-1$	$0{,}4x-3=0{,}6x-1$	-10
4	$0{,}4x-4$	$0{,}6x$	$0{,}4x-4=0{,}6x$	-20

Так как в ящике было положительное число носков, подходят только первые два случая.

► Можно также использовать задачи Д50, Д54–Д66. ◄

Занятие 7
Много переменных — это не страшно

А удача — награда за смелость.

Н.Добронравов. Надежда

Цель этого занятия — научить школьников не бояться вводить больше переменных, чем получается уравнений. Такая смелость приводит к успеху, если требуется найти не значения всех переменных по отдельности, а связанное с ними выражение.

В частности, в задачах 7.1, 7.5, 7.6, 7.10 удаётся найти линейную комбинацию введённых переменных, причём именно ту, которая позволяет ответить на вопрос задачи. Эта же идея работает и задачах 7.4 и 7.7 в упрощённом виде: линейной комбинацией является одна из переменных.

В задачах 7.2, 7.3, 7.8 и 7.9 требуется и удаётся найти не значения самих переменных, а их отношение. Это всегда возможно, если по условию составлено однородное уравнение.

После решения каждой такой задачи интересно обсудить, что по данным условия можно найти, а что нельзя. Также полезно заметить, что задачи первого типа решаются порой за счёт хитрой подгонки данных условия, а второго — независимо от числовых данных.

Кроме того, в задачах 7.1, 7.3 и 7.7 встречается среднее арифметическое каких-либо величин. В процессе их решения показан полезный приём перехода от него к сумме всех величин.

Предварительного знакомства с системами уравнений не предполагается, работа с двумя уравнениями появляется эпизодически и лишь на элементарном, интуитивно понятном уровне.

7.1. Зарплата. В средней школе №1 Страны Дураков работали штатные и внештатные педагоги. Средняя зарплата штатных составляла 45 грошей в месяц, а внештатных — 11. После того как «из высших соображений» одного штатного педагога перевели во внештатные, сохранив его зарплату, и у штатных, и у внештатных педагогов средняя зарплата выросла на 2 гроша в месяц. Сколько в этой школе педагогов?

► В этой задаче речь идёт о количестве педагогов и об их средней зарплате. С этими двумя величинами связана третья — их произведение — суммарная зарплата. И количество штатных педагогов, и их суммарную зарплату разумно складывать; этим она удобнее средней зарплаты. ◄

Решение. Пусть вначале в школе работало x штатных педагогов и y внештатных. Выразим суммарную зарплату всех педагогов до и после перевода одного из них во внештатные.

	Количество педагогов	Их средняя зарплата, грошей в месяц	Суммарная зарплата, грошей в месяц
Было, штатные	x	45	$45x$
Было, внештатные	y	11	$11y$
Было, всего	$x+y$		$45x+11y$
Стало, штатные	$x-1$	47	$47(x-1)$
Стало, внештатные	$y+1$	13	$13(y+1)$
Стало, всего	$x+y$		$47(x-1)+13(y+1)$

Так как суммарная зарплата не изменилась, составим уравнение:

$$45x+11y=47(x-1)+13(y+1).$$

После упрощения получим, что $x+y=17$.

Ответ: 17 педагогов.

► В этой задаче есть два чуда. Первое: суммарная (а значит, и средняя) зарплата всех не изменилась, а средняя зарплата каждой группы увеличилась. Как такое могло произойти? А вот как: зарплата переведённого педагога была ниже средней для штатных, но выше средней для внештатных, поэтому его переход повысил среднюю зарплату в каждой группе.

Второе чудо: мы ввели две переменные, составили только одно уравнение, но задачу при этом решили. Как такое могло произойти? А вот как: каждую переменную по отдельности найти нельзя, но этого и не требовалось. А требовалось найти их сумму, она и нашлась.

Отметим также, что приём перехода от среднего арифметического нескольких величин к их сумме полезен и его стоит запомнить. ◄

7.2. Эксперименты. Сельский гипнотизёр Иван Карпович разводит индюков и кур. Вследствие его экспериментов десятая часть индюков считает, что они куры, а десятая часть кур считает, что они индюки. И вообще, пятая часть всех птиц Ивана Карповича считают себя индюками. А какую часть его птичника составляют индюки на самом деле?

Решение. Пусть у Ивана Карповича x кур и y индюков. Индюками себя считают $0{,}9y$ индюков и $0{,}1x$ кур, что составляет пятую часть от населения птичника, которое равно $x+y$. Таким образом, $0{,}9y+0{,}1x=0{,}2(x+y)$, откуда после упрощения получим, что $0{,}1x=0{,}7y$, т. е. $x=7y$. Тогда искомая величина равна

$$\frac{y}{x+y}=\frac{y}{8y}=\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

► Мы снова ввели две переменные, а составили только одно уравнение. Этого хватило по двум причинам. Во-первых, это уравнение однородное: все слагаемые — одночлены первой степени, свободного члена нет. Из таких уравнений всегда можно узнать отношение переменных. Во-вторых, именно это отношение требовалось найти (точнее, связанное с ним похожее отношение). А значения переменных по отдельности найти невозможно, да и незачем. ◄

Задачи для самостоятельного решения

7.3. Средний возраст. Делегация некоторой страны на Олимпийских играх состоит из спортсменов и чиновников. Средний возраст этих спортсменов на начало олимпиады составил 22 года, а чиновников — 47 лет. При этом средний возраст всех членов делегации был равен 41 году. Какова в этой делегации доля чиновников, выраженная в процентах?

7.4. Игра. На ролевой игре эльфов оказалось на 20 меньше, чем гномов и гоблинов, вместе взятых, а гоблинов — на 14 меньше, чем эльфов и гномов, вместе взятых. Сколько гномов участвовали в игре?

7.5. Пестики — тычинки. Артемон подарил Мальвине букет из аленьких цветочков и чёрных роз. У каждой чёрной розы 4 пестика и 4 тычинки, а на стебле 2 листка. У каждого аленького цветочка 8 пестиков и 10 тычинок, а на стебле

3 листка. Листков в букете на 108 меньше, чем пестиков. Сколько тычинок в букете?

7.6. Каша. Сорока-ворона кашу варила, деток кормила. Третьему птенцу досталось столько же каши, сколько первым двум, вместе взятым. Четвёртому — столько же, сколько второму и третьему. Пятому — столько же, сколько третьему и четвёртому. Шестому — столько же, сколько четвёртому и пятому. А седьмому не досталось — каша кончилась! Известно, что пятый птенец получил 10 г каши. Сколько каши сварила сорока-ворона?

7.7. Отметки. Коля и Вася за январь получили по 20 оценок, причём Коля получил пятёрок столько же, сколько Вася четвёрок; четвёрок — столько же, сколько Вася троек; троек — столько же, сколько Вася двоек; двоек — столько же, сколько Вася пятёрок. При этом средний балл за январь у них одинаковый. Сколько двоек за январь получил Коля?

7.8. Денежка. М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20 %, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены ещё раз вырастут на 20 %?

7.9. Выборы. На выборах в парламент банановой республики каждый её житель проголосовал за одну из партий. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90 % не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46 % жителей республики любят мандарины?

7.10. Пересчёт. В шахматном турнире Солнечного города участвовало 100 коротышек. Каждый сыграл с каждым один раз. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не 0,5 очка (как он думал), а 0, а за поражение — не 0, а -1. При этом за победу начислялось 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем думал. Сколько очков набрал Незнайка?

Ответы, решения, комментарии

7.3. Ответ: 76 %.

Решение. Пусть делегация состоит из x спортсменов и y чиновников, тогда суммарный возраст спортсменов равен $22x$, а чиновников — $47y$. Делегация насчитывает $(x+y)$ человек, поэтому её суммарный возраст равен $41(x+y)$. Получим уравнение:

$$22x+47y=41(x+y).$$

Упростив его, получим, что $6y=19x$. Доля чиновников, выраженная в процентах, равна

$$\frac{y}{x+y}\cdot 100\,\% = \frac{6y}{6x+6y}\cdot 100\,\% = \frac{19x}{6x+19x}\cdot 100\,\% = \frac{19}{25}\cdot 100\,\% = 76\,\%.$$

7.4. Ответ: 17 гномов.

Решение. Пусть в игре участвовали a эльфов, n гномов и b гоблинов. По условию $a=n+b-20$. Кроме того, $b=a+n-14$. Складывая эти уравнения, получим

$$a+b=(n+b-20)+(a+n-14).$$

Вычитая $a+b$ из обеих частей, получим, что $2n-34=0$, откуда $n=17$.

► Мы ввели три переменные, но составили только два уравнения. Если уравнений меньше, чем переменных, то, как правило, невозможно найти значения всех переменных. И в данном случае найти можно только количество гномов. Ни количество эльфов, ни количество гоблинов однозначно условием не задаётся. ◄

7.5. Ответ: 216.

Решение. Пусть в букете a аленьких цветочков и b чёрных роз. Тогда в нём $8a+4b$ пестиков, $10a+4b$ тычинок и $3a+2b$ листков. Из условия «листков на 108 меньше, чем пестиков» получается уравнение $3a+2b+108=8a+4b$, откуда следует, что $5a+2b=108$. Ни a, ни b найти нельзя. Но этого и не требуется. А что требуется узнать? Количество тычинок. Оно равно $10a+4b=2(5a+2b)=216$.

► В задаче 7.1 удалось найти сумму $x+y$, в задаче 7.3 — одну из переменных n, в задаче 7.4 — значение выражения $10a+4b$. Все эти выражения являются линейными комбинациями введённых переменных. Условия подобных задач подбираются так, чтобы нужная линейная комбинация «нашлась сама». ◄

7.6. Ответ: 40 г.

Решение. Пусть первому птенцу досталось m г каши, а второму — n г. Запишем, сколько кому досталось граммов каши.

Первому	m
Второму	n
Третьему	$m+n$
Четвёртому	$m+2n$
Пятому	$2m+3n$
Шестому	$3m+5n$
Всем вместе	$m+n+(m+n)+(m+2n)+(2m+3n)+(3m+5n)=$ $=8m+12n=4(2m+3n)$

Видим, что общее количество каши в 4 раза больше, чем досталось пятому птенцу. Значит, сорока-ворона сварила $10\cdot 4=$ $=40$ (г) каши.

7.7. Ответ: пять двоек.

Решение. По условию задачи составим таблицу.

	5	4	3	2	Сумма всех баллов
Коля	x	y	z	t	$5x+4y+3z+2t$
Вася	t	x	y	z	$5t+4x+3y+2z$

У Коли и Васи одинаковое количество оценок и одинаковый средний балл. Значит, и суммы баллов можно приравнять:

$$5x+4y+3z+2t = 5t+4x+3y+2z.$$

После упрощения получим, что $x+y+z=3t$. Что мы пока не использовали? Общее количество оценок: $x+y+z+t=20$. Сопоставляя уравнения, видим, что $4t=20$, $t=5$. Мы нашли единственную переменную из четырёх, но именно ту, про которую спрашивалось.

7.8. Ответ: хватит.

Решение. Обозначим стоимость хлеба через x, а стоимость кваса — через y (до подорожания). Тогда денежка равна $x+y$. После повышения цен хлеб стал стоить $1{,}2x$, а квас — $1{,}2y$.

Поэтому денежка стала равна $0{,}6x + 1{,}2y$. Таким образом, $x + y = 0{,}6x + 1{,}2y$, т. е. $2x = y$, поэтому денежка равна $1{,}5y$. После второго повышения цен квас стал стоить $1{,}2 \cdot 1{,}2y = 1{,}44y < 1{,}5y$. Следовательно, денежки на квас хватит.

► Эта задача, как и задачи 7.2 и 7.3, сводится к нахождению отношения двух величин: цен хлеба и кваса, поэтому одно уравнение с двумя переменными приводит к успеху. Но это обстоятельство глубоко спрятано в её условии. ◄

7.9. Ответ: 40 %.

Решение. Пусть за партию «Мандарин» проголосовало m человек, а за другие партии — d человек. Тогда мандарины любят $m + 0{,}1d$ человек (если 90 % голосовавших за другие партии не любят мандарины, то остальные 10 % их любят). С другой стороны, мандарины любят $0{,}46(m + d)$ человек. Из уравнения $m + 0{,}1d = 0{,}46(m + d)$ получим, что $0{,}54m = 0{,}36d$, т. е. $m : d = 0{,}36 : 0{,}54 = 2 : 3$. Таким образом, за партию «Мандарин» проголосовали $\frac{2}{5}$, или 40 %, жителей республики.

7.10. Ответ: 33.

Решение. Пусть Незнайка выиграл a партий, сыграл вничью b партий, а проиграл x партий. Тогда $a + b + c = 99$. При первом способе подсчёта Незнайка набрал $a + 0{,}5b$ очков, а при втором — $(a - c)$. По условию $2(a - c) = a + 0{,}5b$. Следовательно, $a = 0{,}5b + 2c$. Подставив это выражение в первое уравнение, получим $b = 66 - 2c$. Таким образом, $a = 33 + c$, т. е. искомая величина $a - c = 33$.

► Можно также использовать задачи Д62, Д67—Д77, Д95, Д96, Д101. ◄

Занятие 8
Всё течёт, всё меняется

И текли куда надо каналы,
И в конце куда надо впадали.
В. Высоцкий. Баллада о детстве

Это занятие адресовано ученикам 8–9 классов, имеющим богатый опыт решения задач на движение по реке. Предполагается, что благодаря задачам 8.1, 8.2 и 8.5 они не впервые узнают, а лишь вспомнят такие идеи и техники, как:

- взаимосвязь скоростей, связанных с течением;
- независимость скорости сближения или удаления плавучих средств от скорости течения реки (см. решение 1 задачи 8.2 с последующим замечанием);
- отношение скоростей (повторение занятия 5).

А новое, трудное и интересное на этом занятии — это умение узнавать реку в неожиданном обличии и применять описанные техники в задачах с разнообразными сюжетами. Естественная аналогия с рекой для эскалатора и его собрата — траволатора поможет решить кому-то самостоятельно, а кому-то под руководством учителя задачу 8.6 и довольно сложную задачу 8.9. Для задачи 8.4 (восходящей к Исааку Ньютону), а также задач 8.7 и 8.8 аналогия с движением по реке гораздо менее очевидна и, возможно, впервые описывается в методической литературе. В этих задачах рассматриваются величины, которые одновременно по одной причине убывают, а по другой возрастают (плывут против течения) либо также убывают (плывут по течению). Умение видеть общую сущность во внешне непохожих формулировках и применять освоенные методы к новым классам задач — одна из основ математического мышления. Явный перевод задач 8.7 и 8.8 на язык задачи Ньютона и/или на язык движения по реке заинтересует школьников, склонных к литературному творчеству, а для ещё не решивших задачу окажется существенной подсказкой.

От чрезмерного увлечения установлением ложных аналогий по внешним признакам предостерегает задача 8.10.

8.1. Скорости. Чтобы проплыть расстояние между двумя пристанями по течению, лодке требуется в три раза меньше времени, чем чтобы преодолеть то же расстояние против течения. Во сколько раз собственная скорость лодки больше скорости течения?

Решение. При постоянном расстоянии во сколько раз меньше время, во столько же раз больше скорость. Поэтому если скорость лодки против течения равна v, то её скорость по течению равна $3v$. Собственная скорость лодки равна среднему арифметическому скоростей по течению и против течения, а скорость течения — полуразности этих скоростей (см. рис. 8.1). Поэтому собственная скорость лодки равна $2v$, а скорость течения — v.

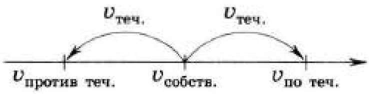


Рис. 8.1

Ответ: в 2 раза.

► Подробнее о взаимосвязи скоростей, связанных с течением реки, говорится в книге [4]. ◄

8.2. Шарфик. С соседних островов озера одновременно поплыли навстречу друг другу шлюпка и галера. За время от их старта до встречи бабушка пирата как раз связала синий шарфик. Назавтра, пока бабушка вязала красный шарфик, шлюпка успела проплыть 6 километров по течению реки, а галера — 8 километров против течения той же реки. Сколько километров между островами, если бабушка всегда вяжет шарфики одинаково быстро?

Решение 1. Если бы назавтра шлюпка и галера стартовали в $6+8=14$ км друг от друга и плыли друг другу навстречу, то за время вязания шарфика они как раз встретились бы. Как влияет на это течение реки? А никак! Оно с одинаковой скоростью и в одинаковом направлении сносит всё время шлюпку и галеру и не влияет на изменение расстояния между ними. Поэтому и по озеру за время вязания шарфика шлюпка и галера успели бы вместе проплыть те же 14 км.

► Текущую реку в этой задаче удобно представлять как движущуюся ленту. По ней плывут навстречу друг другу галера и шлюпка. Скорость их сближения не зависит от скорости движения ленты. Озеру соответствует неподвижная лента. ◄

Решение 2. Пусть бабушка вяжет шарфик за t часов, собственные скорости шлюпки и галеры равны x км/ч и y км/ч соответственно, а скорость течения — v км/ч. Тогда из условия про красный шарфик

$$t = \frac{6}{x+v} = \frac{8}{y-v},$$

откуда можно получить два уравнения: $tx+tv=6$ и $ty-tv=8$. Сложив их, получим $tx+ty=14$. По озеру шлюпка и галера сближаются со скоростью $(x+y)$ км/ч, поэтому за t часов они проплывут $t(x+y)=tx+ty=14$ (км).

Ответ: 14 км.

8.3. Марсианский бамбук. Бамбук на Марсе растёт так, что каждая точка его стебля поднимается вверх с одной и той же скоростью. Однажды улитка заползла с земли на вершину такого бамбука за 7 часов. Отдохнув ровно час на вершине, она спустилась на землю за 8 часов. Во сколько раз скорость улитки больше скорости роста бамбука, если обе скорости постоянны?

► **Путь к решению.** Для начала заметим, что настоящий бамбук растёт совсем не так. Это злаковое растение, а у злаков участки активного роста располагаются в нижней части каждого отдельного междоузлия. Условие «каждая точка его стебля поднимается вверх с одной и той же скоростью» описывает удивительный бамбук с единственным междоузлием. Или... удивительную реку, текущую вверх. Задача станет гораздо понятнее и привычнее, если переформулировать её на языке движения по реке.

Улитка плыла по течению реки 7 часов. Отдохнув ровно час, она вернулась к месту старта за 8 часов. Во сколько раз собственная скорость улитки больше скорости течения?

Как и предыдущую, эту задачу можно решить и вооружившись несколькими переменными, и «голыми руками», с помощью воображения и здравого смысла. ◄

Решение 1. Пусть скорость роста бамбука равна v м/час, а собственная скорость улитки — u м/час. Тогда улитка двигалась вверх со скоростью $(u+v)$ м/час (относительно земли) и через 7 часов оказалась на высоте $7(u+v)$ м. Если изначальная высота бамбука равна h м, то вершина бамбука через 7 часов находилась на высоте $(h+7v)$ м. Так как улитка доползла до вершины, получим уравнение $7(u+v)=h+7v$, или $7u=h$.

За время отдыха улитки бамбук вырос ещё на v метров, и спускаться улитке пришлось с высоты $(h+7v)$ м. Она двигалась вниз со скоростью $(u+v)$ м/час в течение 8 часов. Получаем уравнение $8(u-v)=h+8v$. Подставляя в него $h=7u$, получим $u=16v$.

Решение 2. Почему улитка спускалась дольше, чем поднималась? Потому что бамбук вырос. По условию этой задачи бамбук растёт от корня, а остальная часть стебля не растягивается. Таким образом, улитка, которая поднялась вверх за 7 часов, за те же 7 часов вернулась к той точке бамбука, которая в момент её старта была на уровне земли. А потом ещё за $8-7=1$ час она проползла участок, на который бамбук вырос за $7+1+8=16$ часов, проведённых ею на бамбуке. Итак, на длину этого участка бамбук прирастает за 16 часов, а улитка проползает её за 1 час. Поэтому её скорость в 16 раз больше.

Решение 2 на языке движения по реке. Будем считать, что одновременно от одной и той же пристани отплыли по течению лодка с улиткой и плот. Течение одинаково сносит плот и улитку, поэтому никак не влияет на скорость улитки относительно плота. Улитка, которая 7 часов уплывала от плота, за те же 7 часов вернулась к нему. А потом ещё за $8-7=1$ час добралась до пристани. В течение этого часа она удалялась от плота со своей собственной скоростью и оказалась в результате от плота на расстоянии, которое плот преодолел за $7+1+8=16$ часов. Поэтому её скорость в 16 раз больше.

Ответ: в 16 раз.

► Математически более сложная ситуация получается при переходе к противоположному предельному случаю. Если считать, что у бамбука бесконечно много узлов, расположенных бесконечно часто, получится равномерный по всей длине рост бамбука, рассмотренный, в частности, в статье: С. Дворянинов, З. Краугер, В. Протасов. Сколько времени длится причаливание? (см. «Квант», 2017, №11, с. 5, задача 4). ◄

8.4. Коровы. Трава на всём лугу растёт одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров съели бы всю траву за

24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколько должно быть коров, чтобы вся трава на лугу была съедена за 96 дней?

► **Путь к решению 1.** Почему между количеством коров и требуемым количеством дней нет обратной пропорциональности? Потому что трава продолжает расти. От чего зависит связь между количеством коров и временем, на которое им хватит еды? От исходного количества травы, скорости роста травы и скорости еды коров. В каких единицах измерять траву? Можно в единицах массы, объёма или в условных единицах, не конкретизируя их физический смысл. Примерно так: вначале на лугу было t единиц травы, в день вырастает по d единиц травы, а каждая корова съедает по k единиц травы в день. Подходящий выбор единицы измерения позволяет сэкономить одну переменную. Например, назовём количество травы, съедаемое коровой за день, одной порцией. ◄

Решение 1. Пусть вначале на лугу было t порций травы, а за день вырастает по d порций травы. Тогда через 24 дня без коров на лугу было бы $t + 24d$ порций травы. Всю её за эти 24 дня съели 70 коров, т. е.

$$t + 24d = 70 \cdot 24 = 1680.$$

Аналогично получим второе уравнение: $ty + 60d = 30 \cdot 60 = 1800$. Если искомое количество коров обозначить через x, то получится третье уравнение: $t + 96d = x \cdot 96$.

Вычтем из первого уравнения второе. В левой части получим $(t + 60d) - (t + 24d) = 36d$, а в правой получим $1800 - 1680 = 120$, т. е. $36d = 120$. Теперь можно заметить, что и

$$(t + 96d) - (t + 60d) = 36d,$$

поэтому $x \cdot 96 - 1800 = 120$, откуда следует, что $96x = 1920$, т. е. $x = 20$.

► Решение получилось коротким за счёт удобного совпадения: $96 - 60 = 60 - 24 = 36$. Однако и без него логика принципиально не изменилась бы, просто пришлось бы чуть дольше считать. Сначала из уравнения $36d = 120$ мы нашли бы $d = 3\frac{1}{3}$, затем подставили бы это значение в первое или второе уравнение и нашли t, получив $t = 1680 - 24d = 1680 - 80 = 1600$, и наконец подставили бы t и d в третье уравнение и нашли x.

Путь к решению 2. Алгебраические действия имеют понятный смысл. Что такое

$$(t+60d)-(t+24d)=(t+96d)-(t+60d)=36d?$$

Это количество травы, выросшее на лугу за $60-24=96-60=36$ дней. Чтобы понять, что выражение $36d$ именно это и означает, переменная t не требуется. А в чём смысл вычитания правых частей уравнений

$$70\cdot 24-30\cdot 60=1800-1680=120?$$

Это разница в количестве травы (в порциях), съедаемой 70 коровами за 24 дня и 30 коровами за 60 дней. ◄

Решение 2. Пусть корова съедает в день одну порцию травы. За $60-24=36$ дней на лугу выросло $30\cdot 60-70\cdot 24=120$ порций. Значит, помимо съеденных за 60 дней тридцатью коровами 1800 порций, за добавочные $96-60=36$ дней вырастет ещё 120 порций. Всего вырастет 1920 порций. За 96 дней их съедят $1920:96=20$ коров.

Ответ: 20 коров.

► В этой задаче тоже можно увидеть движение по реке. Количество травы на лугу равномерно изменяется, что соответствует течению. Поедание травы коровами можно считать движением против течения. Остаётся интерпретировать изменяющееся количество коров, которому пропорциональна «скорость лодки».

Отвлечёмся от законов физики и допустим, что скорость пропорциональна мощности мотора. Тогда это можно сделать, например, так.

Если на катер поставить мотор мощностью 70 лошадиных сил, то он доплывёт против течения до пристани за 24 минуты, а если 30 лошадиных сил, то за час. Какова мощность мотора, если катер плывёт до пристани 1 час 36 минут?

Интересно предложить ученикам пересказать не только условие, но и решение задачи Ньютона на этом языке. Можно также после знакомства с условием сразу обсудить аналогию с движением по реке и предложить переформулировать задачу, решить её, а в последнюю очередь пересказать решение, превратив гребцов обратно в коров. ◄

Задачи для самостоятельного решения

8.5. Катер. Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее, поэтому летом катер идёт по течению в 1,5 раза быстрее, чем против течения. Найдите скорость течения реки весной.

8.6. Траволатор. Вася и Петя шли рядом с одинаковой скоростью. Когда им на пути встретился траволатор (горизонтальный эскалатор), то Петя пошёл рядом с ним, а Вася по траволатору. Через одну минуту они одновременно подошли к концу траволатора, но по пути Вася на 15 секунд остановился завязать шнурки. За какое время Вася прошёл бы траволатор, если бы не останавливался?

8.7. Слоны. На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за один день, а стадо из 37 слонов — за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон?

8.8. Змей Горыныч. Врач сообщил Змею Горынычу, что если Змей будет выкуривать по 6 сигарет в день, то помрёт через 10 лет, а если по 17 сигарет в день, то через 5 лет. Сколько проживёт Змей, если бросит курить? (*Условимся, что все годы одинаковой длины, а каждая сигарета сокращает жизнь на одно и то же время.*)

8.9. Эскалатор. Бабушка и два её внука, Вася и Коля, одновременно вступают на эскалатор. Бабушка стоит на месте, а Вася и Коля бегут вниз и считают ступеньки, на которые наступают. Вася бежит в 2 раза быстрее Коли (т. е. Вася насчитывает 2 ступеньки, в то время как Коля — только одну). Когда бабушка доезжает до середины эскалатора, Вася уже добегает до конца, насчитав при этом 60 ступенек. Сколько ступенек насчитает на эскалаторе Коля?

8.10. Караван. По пустыне равномерно движется караван верблюдов длиной в 1 км. Всадник проехал от конца каравана к началу и вернулся к концу каравана. За это время караван прошёл 1 км. Какой путь проехал всадник, если скорость его была постоянной?

Ответы, решения, комментарии

8.5. Ответ: 5 км/ч.

Решение. Составим таблицу (все скорости измеряем в км/ч). Так как весенние скорости катера по течению и против течения различаются в $\frac{5}{3}$ раза, их удобно принять за $5x$ и $3x$ соответственно.

Скорость катера по течению весной	$5x$
Скорость катера против течения весной	$3x$
Собственная скорость катера	$4x$
Скорость течения весной	x
Скорость течения летом	$x-1$
Скорость катера по течению летом	$5x-1$
Скорость катера против течения летом	$3x+1$

По условию задачи составим уравнение:

$$5x-1=1{,}5(3x+1).$$

Решая его, получим, что $x=5$.

8.6. Ответ: за 48 секунд.

Решение. Пусть v м/с — собственная скорость мальчиков, u м/с — скорость движения траволатора. Тогда Вася двигался со скоростью $(v+u)$ м/с в течение 45 секунд, а 15 секунд — со скоростью u м/с и за минуту продвинулся на $45(v+u)+15u$ метров. А Петя за эту минуту прошёл $60v$ м. Так как за минуту они оба переместились на расстояние, равное длине траволатора, то $45(v+u)+15u=60v$, а значит, $v=4u$. Следовательно, если бы Вася не останавливался, то он прошёл бы траволатор за $\frac{60\cdot 4u5u}{=}48$ (с).

8.7. Ответ: за 365 дней.

Решение 1. Пусть каждый слон за один день выпивает *порцию* воды. Тогда 183 слона за день выпили 183 *порции*, а 37 слонов за 5 дней выпили 185 *порций*. Это означает, что за 4 дня в озеро добавилось 2 *порции* воды, т. е. по полпорции в день.

183 порции в первом случае состоят из 0,5 порции воды, появившейся за день из ключей, и 182,5 порций «старой» воды. Одному слону предстоит выпить 182,5 порций «старой» воды, к которым ежедневно добавляются по полпорции све-

жей ключевой. За день он будет выпивать эти полпорции и полпорции «старой». Тогда 182,5 порции «старой» воды закончатся за $182{,}5 : 0{,}5 = 365$ дней.

Решение 2. Пусть объём озера — V литров и ключи добавляют x литров воды в день. Тогда из первого условия следует, что один слон выпивает $\frac{V+x}{183}$ литров воды в день, а из второго условия следует, что эта же величина равна $\frac{V+5x}{37\cdot 5}$ л.

Приравнивая, получим

$$\frac{V+x}{183} = \frac{V+5x}{37\cdot 5},$$

откуда следует, что $V = 365x$. Таким образом, каждый слон за один день выпивает $2x$ литров воды. Пусть один слон выпьет озеро за k дней, тогда $365x + kx = 2kx$, а значит, $k = 365$.

8.8. Ответ: 22 года.

Решение. В году в среднем 365,25 дней. Для краткости обозначим это число буквой p. Пусть, бросив курить, Змей прожил бы n дней, а каждая выкуренная сигарета сокращает его жизнь на x дней. Выкуривая по 6 сигарет в день, Змей за 10 лет выкурит $60p$ сигарет, сократит этим свою жизнь на $60px$ дней и проживёт в результате $n - 60px = 10p$ дней. Аналогично $n - 85px = 5p$. Вычитая из второго уравнения первое, получим, что $25px = 5p$, откуда следует, что $x = 0{,}2$. Тогда $n = 12p + 10p = 22p$, т. е. Змей мог бы прожить 22 года.

► Можно обойтись без уравнений и их вычитания. В чём разница между $60p$ сигарет и $85p$ сигарет? С одной стороны, в $25p$ сигарет. А с другой — в первом случае Змей проживёт ещё 10 лет, а в другом случае 5 лет. Таким образом, $25p$ сигарет забирают у Змея 5 лет жизни. Тогда каждые $5p$ сигарет забирают год жизни, а $60p$ сигарет — 12 лет. Если за 10 лет вместо $60p$ сигарет не выкурить ни одной, можно прожить на 12 лет больше, т. е. $10 + 12 = 22$ года.

Эту задачу можно аналогично задачам 8.4 и 8.7 переформулировать в терминах еды: 6 сигарет в день съедают жизнь Змея Горыныча за 10 лет, а 17 сигарет в день — за 5 лет. Однако существенное отличие останется. И дело не в том, что слоны больше похожи на коров, чем сигареты, а озеро больше напоминает луг, чем Змея Горыныча. А в том, что, в отличие от травы на лугу, жизнь Змея закончится, даже если он бросит курить. Имеющийся остаток травы на лугу увеличивается, а коровы его уменьшают, действуя в обратную сторону, и в конце концов доводят до нуля. А имеющийся у Змея остаток жизни и сам постепенно уменьшается, причём сигареты действуют в ту же сторону, ускоряя обнуление.

Картина проясняется, если движение жизни к её концу также считать течением реки. Все плывут по своей реке к пристани – нулевой отметке. Но слоны и коровы против течения, а Змей Горыныч – по течению. ◄

8.9. Ответ: 40 ступенек.

► **Путь к решению.** Движение по эскалатору по направлению его движения аналогично движению по течению реки. Так и будем его для удобства называть. Важно осознать, что в этой задаче одновременно происходят два процесса: перемещение в пространстве и счёт ступенек. Скорость счёта, т.е. произнесения слов «первая, вторая, третья, ...», не зависит от движения эскалатора и совпадает со скоростью движения персонажа по неподвижному эскалатору. А скорость перемещения в пространстве – это скорость по течению. ◄

Решение 1. За одно и то же время Вася пробежал по направлению движения эскалатора вдвое больше стоявшей бабушки, поэтому его скорость по течению вдвое больше скорости бабушки, равной скорости эскалатора (течения). В таком случае его собственная скорость равна скорости течения. А Колина собственная скорость вдвое меньше Васиной.

Итак, если собственная Колина скорость равна v, то Васина собственная скорость равна $2v$, скорость эскалатора (течения) тоже равна $2v$, скорость по течению у Коли равна $3v$, а у Васи – $4v$. Единицы измерения можно не указывать, так как в дальнейшем используются не скорости, а лишь их отношения.

Коля называет ступеньки вдвое медленнее Васи (выше пояснялось, почему здесь берётся отношение их *собственных* скоростей). Поэтому за время Васиного бега он назвал бы не 60, а 30 ступенек. Но Колина скорость по течению составляет $\frac{3}{4}$ от Васиной скорости по течению, поэтому он пробыл на эскалаторе в $\frac{4}{3}$ раза дольше и успел насчитать $\frac{4}{3} \cdot 30 = 40$ ступенек.

Решение 2. Так как Коля насчитывает одну ступеньку, когда Вася — две, то он всё время находится ровно посередине между бабушкой и Васей. Поэтому, когда Вася добегает до конца, а бабушка доезжает до середины, Коля преодолевает $\frac{3}{4}$ эскалатора. При этом он насчитывает $60:2=30$ ступенек, т. е. он насчитывает по 10 ступенек на каждую четверть эскалатора. Значит, на всём эскалаторе он насчитает 40 ступенек.

► По данным задачи можно найти и длину эскалатора. Так как собственная скорость Васи вдвое меньше его скорости «по течению», то по неподвижному эскалатору ему пришлось бы бежать вдвое дольше, чем по едущему. И за время бега он бы насчитал не 60, а 120 ступенек. Это и есть длина эскалатора. ◄

8.10. Ответ: $1+\sqrt{2}$ км.

Решение 1. Примем скорость каравана за единицу. Точнее, введём удобную единицу времени: мгновение — это время, за которое караван проходит 1 км, тогда скорость каравана равна 1 км/мгн. Пусть скорость всадника равна v км/мгн. Тогда время, затраченное на проезд от конца каравана к началу, равно $\frac{1}{v-1}$ мгн, а время, затраченное на проезд от начала к концу, равно $\frac{1}{v+1}$ мгн. По условию

$$\frac{1}{v-1}+\frac{1}{v+1}=1.$$

Это уравнение преобразуется к виду $v^2-2v-1=0$. Отсюда, учитывая, что $v>0$, получим $v=1+\sqrt{2}$. Таким образом, за то время, что караван проходит 1 км со скоростью 1 км/мгн, всадник проедет указанное в ответе расстояние.

► Отметим, что полученное квадратное уравнение решается без формул: достаточно прибавить 2 к обеим частям, тогда $(v-1)^2=2$.

Решение кажется коротким и несложным. Но чтобы догадаться принять скорость каравана за единицу, надо понять, что задача эта на отношение скоростей: во сколько раз быстрее каравана скачет всадник, во столько же раз большее расстояние он преодолеет. Понять это помогает замеченный в занятии 5 признак: даны только расстояния, и найти надо расстояние.

Если этого всего не заметить, можно ввести две переменные. Нужное отношение всё равно найдётся, так как уравнение получится однородным. С похожей ситуацией мы сталкивались на занятии 7, но там все однородные уравнения были линейными. ◄

Решение 2. Пусть скорость каравана равна x км/ч, а всадника — v км/ч. Тогда в одну сторону всадник преодолевал расстояние в 1 км (длина каравана) со скоростью $(v-x)$ км/ч, а в другую — со скоростью $(v+x)$ км/ч. Составим таблицу (пока без последней строки).

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км	Примечание
Всадник вперёд	$v-x$	$\frac{1}{v-x}$	1	1 км — длина каравана
Всадник назад	$v+x$	$\frac{1}{v+x}$	1	1 км — длина каравана
Караван	x	$\frac{1}{x}$	1	1 км прошёл караван
Всадник	v	$\frac{1}{x}$	$\frac{v}{x}$	

По условию всадник потратил в сумме столько же времени, что и караван, т. е. $\frac{1}{v-x}+\frac{1}{v+x}=\frac{1}{x}$. Найти значения v и x из одного такого уравнения явно нельзя. А что надо найти? Путь, который всадник со скоростью v преодолевает за время $\frac{1}{x}$. Заполняем четвёртую строку таблицы. Видим, что найти надо величину $\frac{v}{x}$. Для этого можно всё уравнение умножить на x. При этом знаменатели поделятся на x и уравнение примет вид

$$\frac{1}{\frac{v}{x}-1}+\frac{1}{\frac{v}{x}+1}=1.$$

Сделав замену $\frac{v}{x}=y$, получим уравнение

$$\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}=1.$$

Далее всё делается так же, как в решении 1.

► Казалось бы, идущий караван напоминает реку никак не меньше, чем стадо коров или Змей Горыныч. Но при внимательном взгляде аналогия оказывается либо неверной, либо довольно сложной. Караван — не река, по которой плывёт всадник; скорость его движения не влияет на скорость всадника. Кроме того, важна его длина. При желании можно считать, что первый и последний верблюды плывут как плоты по реке, а всадник скачет вдоль реки по дороге. Но поможет решить задачу скорее не эта картина, а общий навык решения задач на движение. ◄

► Можно также использовать задачи Д78–Д82, Д110. ◄

Занятие 9
Целые числа и делимость

> Вот и выбирай,
> по пять, очень большие, но вчера,
> либо по три, маленькие, но сегодня, понял?
> Не все, но понял, но не все? Но все-таки понял...
>
> *М.Жванецкий. Я видел раков*

В каких случаях удаётся ввести переменных больше, чем уравнений, но всё равно решить задачу? На седьмом занятии это происходило за счёт того, что требовалось найти не сами значения переменных, а «удобное выражение». А на этом занятии — за счёт дополнительных условий. В частности, если по смыслу задачи значения переменных должны быть целыми, то будем учиться использовать соображения делимости.

На уроках в зависимости от программы делимость изучается в шестом или даже в пятом классе, в основном на уровне готовых алгоритмов, и больше не повторяется. В результате школьники часто затрудняются в обосновании решений с помощью делимости не потому, что это трудно, а потому, что им никогда не говорили, что и как надо обосновывать. Цель нашего занятия — смягчить эту проблему.

Предлагаемые задачи группируются вокруг трёх основных идей, поочерёдно изложенных в трёх задачах для разбора.

- Разложение чисел на простые множители. Теорема о взаимно простых числах и основная теорема арифметики (задачи 9.1, 9.4, 9.6).
- Разложение алгебраических выражений на множители (задачи 9.2, 9.7, 9.8).
- Решение линейных уравнений с двумя переменными в целых числах (задачи 9.3, 9.5, 9.9).

Первой группе задач предшествует небольшое теоретическое вступление. Вторая опирается на те же факты, при этом расширяется только алгебраическая техника. В третьей эту роль играет комментарий к задаче 9.3. Его уместность на этом занятии оставляем на усмотрение преподавателя. Подробно про делимость целых чисел и её изучение на математическом кружке написано в книге [14] и многих других источниках.

Другой тип условий связан с неравенствами, ограничивающими возможные значения переменных. После определения границ все целочисленные решения могут быть найдены полным перебором. Переборные решения верные, но часто недопустимо трудоёмкие. Дополнительные соображения, в том числе связанные с делимостью, помогают сократить перебор или вовсе его избежать. Для решения задач этого занятия достаточно знакомства с понятием неравенства на бытовом уровне. Применение техники решения неравенств как самой по себе, так и в сочетании с делимостью будет обсуждаться в занятии 11.

Две важные теоремы

1. Теорема. *Если ka кратно b, причём числа k и b* ***взаимно просты****, то a кратно b.*

► При использовании этого утверждения ссылка на взаимную простоту обязательна. Её важность можно продемонстрировать, предложив, например, следующее упражнение. ◄

Упражнение. Числа x и y натуральные. Можно ли наверняка утверждать, что x кратно 12, если: а) $21x = 12y$; б) $22x = 12y$; в) $23x = 12y$?

В пунктах а) и б) ответ: «нет». Для обоснования достаточно привести контрпримеры контрпримеры. В пункте в) ответ: «да». Он обосновывается так: по условию $23x$ кратно 12 (*вспомните определение делимости*!). Так как 23 и 12 взаимно просты, то x кратно 12.

2. Основная теорема арифметики. *Каждое натуральное число, отличное от 1, можно разложить на простые множители, и притом* ***единственным*** *способом с точностью до порядка множителей.*

9.1. Большие и маленькие. На рынке продавали раков: больших — по 5 рублей, маленьких — по 3 рубля, а также жаб — по рублю. Иван и Степан купили себе раков на одинаковые суммы денег, причём Иван купил больших и маленьких раков поровну, а Степан — вдвое меньше больших раков, чем маленьких. Иван расплатился одной сторублёвой купюрой, а Степан — несколькими десятирублёвыми монетами. У продавца не оказалось мелких денег, поэтому он выдал сдачу Ивану опять же раками, а Степану — жабами. Сколько всего животных унесли приятели с рынка?

Решение. Прочитав условие первый раз, понимаем лишь, что оно длинное, без таблицы не разберёшься. Читаем второй раз, вводим естественные переменные и заполняем таблицу.

	Больших, по 5 рублей	Маленьких, по 3 рубля	Стоимость всех раков в рублях
Иван	x	x	$5x+3x=8x$
Степан	y	$2y$	$5y+6y=11y$

Из условия следует, что $8x=11y$, причём x и y — целые числа. Значит, $11y$ кратно 8. Так как 8 и 11 — взаимно простые числа, то y кратно 8. Поскольку Иван расплатился одной сторублёвой купюрой, стоимость раков $8x$ не превосходит 100 рублей, поэтому решением является только $x=11$, $y=8$. Вместе Иван и Степан купили $2x+3y=2\cdot 11+3\cdot 8=46$ раков, потратив по 88 рублей каждый.

Так как Степан расплачивался десятирублёвыми монетами, то он заплатил 90 рублей, значит, сдачу (2 рубля) ему могли дать только двумя жабами. Иван получил 12 рублей сдачи раками. Так как уравнение $5x+3y=12$, где x и y — целые неотрицательные числа, имеет единственное решение: $x=0$, $y=4$, то он получил 4 маленьких рака. Таким образом, приятели унесли с рынка $46+2+4=52$ животных.

Ответ: 52 животных.

► Отметим ещё раз, что без упоминания взаимной простоты чисел 8 и 11 это решение не было бы полным. ◄

9.2. Замок. Кодовый замок состоит из десяти кнопок с цифрами от 0 до 9. Чтобы его открыть, надо одновременно нажать на две кнопки. Известно, что если к произведению этих цифр добавить их сумму, то получится 34. Определите нужную комбинацию цифр.

Решение. Пусть m и n — искомые цифры. По условию $mn+m+n=34$. Прибавив к обеим частям уравнения по 1 и разложив левую часть на множители, получим $(m+1)(n+1)=35$. Так как m и n — цифры, то $m+1$ и $n+1$ — делители числа 35, заключённые в границах от 1 до 10. Значит, одно из этих чисел равно 5, а другое — 7, а искомая комбинация цифр — это 4 и 6.

Ответ: 4 и 6.

► Если не догадаться прибавить 1 и разложить на множители, то уравнение можно решить и перебором. Пусть $n=0$. Подставив, получим уравнение $m=34$, но 34 — не цифра.

Пусть $n=1$. Подставив, получим уравнение $m+m+1=34$, не имеющее натуральных решений. Пусть $n=2$ и т. д. Если считать, что $n<m$, то из неравенства $mn<34$ получим, что $n<6$, и перебор быстро закончится. ◄

9.3. Процент отличников. В начале года в 7 классе учились 25 человек. После того как туда пришли семеро новеньких, процент отличников увеличился на 10. Сколько теперь отличников в классе?

► Прежде чем приступать к решению, уточним формулировку. То, что процент отличников увеличился на 10, означает, что если отличники раньше составляли $a\,\%$, то теперь они составляют $(a+10)\,\%$. Если бы на 10 процентов увеличилось количество отличников, то это бы означало, что было a отличников, а стало $1{,}1a$ отличников. ◄

Решение. Пусть в классе было x отличников, а пришло ещё y отличников. Тогда из условия задачи следует равенство

$$\frac{x+y}{32}-\frac{x}{25}=\frac{1}{10}.$$

Избавившись от знаменателей, получим уравнение $25y-7x=$ $=80$. Это линейное уравнение с двумя переменными. Если бы x и y могли быть любыми числами, то решений было бы бесконечно много. Но в данном случае x и y — целые неотрицательные числа, причём $y\leqslant 7$. Поэтому нетрудно сделать полный перебор, рассматривая значения y от 0 до 7. При $y=0, 1, 2, 3$ получится $x<0$. Для оставшихся значений $y=4, 5, 6, 7$ получим, что целое значение x получается в единственном случае: $y=6$, $x=10$. Таким образом, отличников стало 16.

Ответ: 16.

► Полный перебор не всегда настолько короток. В книге [14] и другой литературе описан алгоритм решения линейных уравнений с двумя переменными в целых числах. В частности, доказывается, что если a и b — взаимно простые числа, а c — любое целое число, то для уравнения $ax+by=c$ всегда удастся подобрать целочисленное решение $(x; y)$. Так что наличие у уравнения $25y-7x=80$ решения $(10, 6)$ не случайно, а закономерно. Этому решению соответствует равенство $150-70=80$. Все остальные решения уравнения $25y-7x=80$ в целых числах можно получить, меняя в равенстве $150-70=80$ числа 150 и 70 так, чтобы разность по-прежнему равнялась 80, т.е. увеличивая или уменьшая их на одну и ту же величину. Так как первое слагаемое кратно 25, а второе — 7, то эта величина должна быть кратной $7 \cdot 25 = 175$. При этом y будет меняться на $7, 14, 21, \ldots$, а x — на $25, 50, 75, \ldots$ Получится бесконечно много целочисленных решений, их можно представить в виде таблицы, бесконечной в обе стороны.

x	...	-40	-15	10	35	60	...	$10+25t$
y	...	-8	-1	6	13	20	...	$6+7t$

Остаётся выбрать значения, удовлетворяющие условию исходной задачи. ◄

Задачи для самостоятельного решения

9.4. Сторожа. Несколько бригад сторожей спали одинаковое количество ночей. В каждой бригаде количество сторожей одно и то же, отличное от 1. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем количество бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 человеко-ночь?

9.5. Тир. Коля стрелял в тире. Если он попадал в цель, то ему давали ещё 3 дополнительных патрона. А если он попадал в цель два раза подряд, то за второе попадание ему давали 4 патрона. Сначала Коле дали 15 патронов, он сделал 44 выстрела, и патроны у него закончились. Сколько раз Коля попал в цель, если три раза подряд он не попал ни разу?

9.6. Скидка. Толстый выпуск газеты стоит 30 рублей, а тонкий — дешевле. Для пенсионеров установлена скидка на одно и то же количество процентов на все газеты, поэтому тонкий выпуск той же газеты они покупают за 15 рублей. Известно, что в любом случае газета стоит целое количество рублей. Сколько стоит тонкая газета без скидки и сколько стоит толстая газета для пенсионеров?

9.7. Пирожки и булочки. Если каждый мальчик купит пирожок, а каждая девочка — булочку, то они вместе потратят на 1 рубль меньше, чем если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка — пирожок. И пирожок, и булочка стоят целое число рублей. Известно, что мальчиков больше, чем девочек. На сколько?

9.8. Числа в треугольнике. В каждой вершине треугольника записано натуральное число. На каждой стороне записано произведение чисел в её концах, а внутри треугольника — произведение чисел, стоящих в вершинах. Сумма всех записанных чисел равна 1000. Какие числа записаны в вершинах?

9.9. Пётр и Павел. Пётр родился в XIX веке, а его брат Павел — в XX веке. Однажды братья встретились на праздновании своего общего дня рождения. Пётр сказал: «Мой возраст равен сумме цифр года моего рождения». — «Мой тоже», — ответил Павел. На сколько лет Павел младше Петра?

9.10. По Бальзаку. Шагреневая кожа исполняет желания, но после каждого желания её площадь уменьшается: либо на 1 дм^2 в обычном случае, либо в два раза — если желание было заветное. Десять желаний уменьшили площадь кожи втрое, следующие несколько — ещё всемеро, а ещё через несколько желаний кожа вообще пропала. Какова первоначальная площадь кожи?

Ответы, решения, комментарии

9.4. Ответ: 7 сторожей.

Решение. Обозначим через s количество сторожей в бригаде, через b — количество бригад, а через n — количество ночей, которые проспал один сторож. Тогда $sbn = 1001$, причём $1 < s < n < b$. Из разложения на простые множители $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ видим, что 1001 можно единственным способом разложить на три множителя, бóльших 1, поэтому $s = 7$.

► Ссылка на единственность разложения в том или ином виде необходима для строгого решения. ◄

9.5. Ответ: 9 раз.

Решение 1. Всего Коля получил $44 - 15 = 29$ дополнительных патронов. За каждый успешный выстрел он получал 3 патрона, и ещё один, если этот выстрел был повторным попаданием. Значит, всего Коля попал в цель $\frac{29-t}{3}$ раза, где t — количество повторных попаданий.

Для того чтобы полученная дробь принимала натуральные значения, число t должно давать остаток 2 при делении на 3.

Таких значений t довольно много: $2, 5, 8, \ldots, 26$. Но условие «три раза подряд он не попал ни разу» означает, что каждому повторному попаданию непосредственно предшествовало ровно одно попадание. Кроме того, могли быть одиночные попадания. Поэтому количество повторных попаданий составляет не более половины от их общего количества, т. е. $2t \leqslant \frac{29-t}{3}$. Из чисел $2, 5, 8, \ldots, 26$ этому условию удовлетворяет лишь $t=2$, поэтому в цель Коля попал $\frac{29-2}{3}=9$ раз.

Решение 2. Пусть x — количество первых попаданий, за которые Коля получил $3x$ дополнительных патронов. После каких-то из этих x выстрелов последовало y попаданий в цель и Коля получил ещё $4y$ патронов. Так как всего было истрачено 44 патрона, то $15+3x+4y=44$, следовательно, $3x+4y=29$.

Учитывая, что x и y — натуральные числа, причём $x \geqslant y$, получим $5 \leqslant x \leqslant 9$. Кроме того, x — нечётное число. Подстановкой $x=5, 7, 9$ находим единственное решение полученного уравнения: $x=7$, $y=2$. Тогда искомое количество попаданий — это $x+y=9$.

► Возможны также похожие рассуждения, если в качестве переменных выбраны количество одиночных попаданий и количество двойных. ◄

9.6. Ответ: 25 рублей и 18 рублей или 18 рублей и 25 рублей.

Решение. Пусть толстая газета для пенсионеров стоит p рублей а полная стоимость тонкой газеты — t рублей. По условию $t<30$. Условие «скидка на одинаковое число процентов» переведём, как всегда, на «беспроцентный» язык: газеты для пенсионеров дешевле обычных в одно и то же число раз. Значит, $\frac{p}{30}=\frac{15}{t}$, т. е. $pt=450$. По условию p и t — натуральные числа, поэтому t — делитель числа $450=2\cdot3^2\cdot5^2$, причём $15<t<30$. Отсюда следует, что $t=25$ или $t=18$. Соответствующие значения p: $p=18$ или $p=25$.

9.7. Ответ: на одного.

Решение 1. Обозначим через x и y количества мальчиков и девочек соответственно. Пусть также цены пирожка и булочки — это a и b рублей соответственно. Если каждый мальчик купит пирожок, а каждая девочка — булочку, то они вместе потратят $(xa+yb)$ рублей, а если каждый мальчик купит булочку, а каждая девочка — пирожок, то они потратят $(xb + ya)$ рублей. Разница составляет 1 рубль, поэтому $(xb + ya) - (xa + yb) = 1$.

Раскрыв скобки в левой части и разложив на множители, получим $(x - y)(b - a) = 1$. Так как $x > y$, то каждый из сомножителей равен 1, т. е. $x = y + 1$.

► Из полученного уравнения также следует, что булочка дороже пирожка на рубль.

Это решение ещё раз показывает, что надо вводить столько переменных, сколько удобно для составления уравнения. ◄

Решение 2. Пусть мальчики купят по пирожку и станут в ряд, а девочки купят по булочке и станут в ряд напротив мальчиков, образовав с ними пары. По условию сколько-то мальчиков останутся без пары. Пусть теперь внутри каждой пары девочки и мальчики поменяются покупками. Теперь у каждой девочки есть пирожок. А почти у всех мальчиков булочки, и только у мальчиков без пары по-прежнему пирожки. По условию, если пирожки таких мальчиков заменить на булочки, выйдет на 1 рубль дешевле. Так как на замене каждого пирожка на булочку экономится не менее рубля, то мальчик без пары может быть только один. Таким образом, мальчиков на одного больше, чем девочек.

9.8. Ответ: 6, 10 и 12.

Решение. Пусть a, b и c — числа, записанные в вершинах, тогда на сторонах записаны числа ab, bc и ac, а внутри — abc. По условию $a + b + c + ab + bc + ac + abc = 1000$. Прибавим к обеим частям по единице и разложим левую часть на множители, тогда $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 1001$. Так как при разложении на простые множители $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, то значения a, b и c — это 6, 10 и 12 (порядок не важен).

9.9. Ответ: на 9 лет.

Решение. 1. Пусть Пётр и Павел родились в $\overline{18xy}$ и $\overline{19uv}$ годах соответственно. Во время их встречи Петру и Павлу было $1 + 8 + x + y$ и $1 + 9 + u + v$ лет соответственно. Определим двумя способами год, в котором произошла встреча. Возраст Петра на тот момент был равен сумме цифр его года рождения, следовательно, встреча произошла в

$$(1800 + 10x + y) + (1 + 8 + x + y) = 11x + 2y + 1809 \text{ году.}$$

С другой стороны, возраст Павла также был равен сумме цифр его года рождения, значит, встреча произошла в

$$(1900 + 10u + v) + (1 + 9 + u + v) = 11u + 2v + 1910 \text{ году.}$$

Таким образом, $11x + 2y + 1809 = 11u + 2v + 1910$.

Однозначно определить значение всех четырёх переменных шансов немного. Пора задуматься: а что надо найти? Разность возрастов Петра и Павла. Она равна

$$(1 + 8 + x + y) - (1 + 9 + u + v) = (x - u) + (y - v) - 1.$$

Теперь видны два упрощения: можно переписать уравнение в виде $11(x - u) + 2(y - v) = 101$ и ввести замену $x - u = a$, $y - v = b$. Уравнение примет вид $11a + 2b = 101$, а найти надо $a + b - 1$.

По смыслу задачи a и b — это разности двух цифр. Поэтому они целые и находятся в границах от -9 до 9. Но тогда $-18 \leqslant 2b \leqslant 18$, следовательно, $83 \leqslant 11a = 101 - 2b \leqslant 119$. Между 83 и 119 лишь три числа кратны 11, это 88, 99 и 110. Так как число $11a = 101 - 2b$ должно быть нечётным, то остаётся единственная возможность: $a = 9$, тогда $b = 1$. Искомая разность возрастов равна $a + b - 1 = 9 + 1 - 1 = 9$.

2. Разберём ещё два «крайних» случая: Пётр мог родиться в 1900 году (который тоже относится к XIX веку), или Павел мог родиться в 2000 году.

В первом случае встреча состоялась бы в 1910 году, значит, Павел родился не раньше 1901 и не позже 1910 года, тогда ему не могло быть $1 + 9 + 1 = 11$ лет на момент встречи. Противоречие.

Во втором случае встреча состоялась бы в 2002 году, и Петру на тот момент было бы не меньше чем 102 года, чего также не может быть, так как сумма цифр любого целого числа от 1801 до 1900 не больше чем 27.

► Из условия $x - ua = 9$ цифры x и u находятся однозначно: $x = 9$, $u = 0$. А вот для пары y, v условие $y - v = b = 1$ оставляет 9 возможностей. Пётр мог родиться в любой год между 1891 и 1899, а Павел — между 1900 и 1908. Так как 1900 год не относится ещё к XX веку, на самом деле возможностей не 9, а 8.

Уравнение $11a + 2b = 101$ можно было решить в целых числах, переписав его в виде $11a + 2(b - 1) = 99$. Так как выражения в скобках принимают только целые значения, то $b-1$ делится на 11. Кроме того, $-9 \leqslant b \leqslant 9$, а значит, $b=1$. Следовательно, $a=9$. ◄

9.10. Ответ: 42 дм^2.

Решение. Как использовать условие «...кожа вообще пропала»? Оно означает, что площадь кожи, выраженная в дм^2, уменьшаясь последовательно либо на 1, либо вдвое, стала нулевой. Следовательно, её можно получить обратным процессом, начав с 0, прибавляя 1 и умножая на 2 в некотором порядке. Поэтому в каждый момент площадь кожи выражалась целым числом квадратным дециметров.

Пусть первоначальная площадь кожи равна S дм^2 $(S>0)$. Уменьшение кожи за неизвестное число желаний всемеро означает только то, что S кратно семи.

Из того, что за первые 10 желаний S уменьшилась втрое, следует, что среди них было не более одного заветного, так как даже $\frac{S}{4}<\frac{S}{3}$. Таким образом, среди первых десяти желаний либо вообще не было заветных, либо было одно заветное.

В первом случае получим, что $S-10=\frac{S}{3}$. Тогда $S=15$, но это число не кратно семи. Значит, этот случай невозможен.

Рассмотрим второй случай. Пусть сначала было k обычных желаний, затем заветное, а затем ещё $(9-k)$ обычных. Получим уравнение

$$\frac{S-k}{2}-(9-k)=\frac{S}{3},$$

из которого следует, что $S=3(18-k)$. Так как 3 и 7 взаимно просты, а S кратно 7, то и $18-k$ кратно 7. Тогда условие $0 \leqslant k \leqslant 9$ оставляет единственную возможность: $k=4$, $18-k=14$, $S=42$.

► Можно показать, что процесс, описанный в условии задачи, возможен. Например, сначала было загадано 4 обычных желания и площадь уменьшилась до 38, затем одно заветное и пять обычных, тогда площадь стала равна 14, т. е. уменьшилась втрое. Затем было загадано ещё 12 обычных желаний и площадь стала равна 2, т. е. уменьшилась всемеро, а потом было загадано ещё два обычных желания и кожа исчезла. ◄

► Можно также использовать задачи Д52, Д63, Д83—Д96. ◄

Занятие 10
Сколько переменных? Сколько уравнений?

> Если система правильная, ни за что не проиграешь. А счастье всегда может обмануть.
>
> *Дж. Лондон. Смок Беллью*

Это занятие адресовано ученикам 8—9 классов и с технической точки зрения посвящено прежде всего составлению и решению систем линейных уравнений. Однако составление и решение систем — не цель нашего занятия, а лишь дополнительное мощное средство решения большинства его задач. В частности, в задачах 10.5 и 10.8 дополнительно приведены арифметические решения. В задаче 10.1 показано, как обойтись одной переменной, без составления системы. Возможно, кто-то придумает, как обойтись без систем и в других задачах.

Цель этого занятия та же, что и у занятия 7: потренироваться вводить столько переменных, сколько удобно, устанавливать связи между ними и понимать, какого количества связей достаточно. В задачах 10.1, 10.5, 10.7, 10.9 количество уравнений совпадает с количеством переменных, а в остальных шести задачах удобно ввести переменных больше, чем составить уравнений. Возникающие при этом ситуации развивают идеи занятия 7 для большего числа уравнений и более разнообразны.

- Важны не значения каждой переменной, а отношения некоторых из них; используется однородность уравнений (задачи 10.2, 10.6).
- Требуется найти значения не всех переменных по отдельности, а значение их линейной комбинации (задачи 10.3, 10.4, 10.8). В отличие от занятия 7, нужные комбинации могут не только «получиться сами», но и быть целенаправленно найдены благодаря опыту решения систем линейных уравнений.
- Решение системы из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными легче угадать, чем вычислить (задача 10.9). Но подробный анализ задачи 10.3, дополненный опытом решения задач 10.4 и 10.8, помогает понять, почему единственность в таком случае неочевидна. В результате понятие линейной зависимости уравнений хоть формально и не вводится, но фактически изучается.

- Система из трёх уравнений с четырьмя неизвестными имеет единственное решение благодаря дополнительному условию (задача 10.10).
- Не все составленные уравнения линейные. Система решается с помощью замены (задача 10.2) или сводится к линейной после тождественных преобразований (задача 10.7).

С точки зрения сюжета выделяется группа задач про возраст. Ключевое соображение — для всех персонажей между одними и теми же моментами проходит одно и то же число лет — формулируется в задаче 10.1 и закрепляется в задачах 10.4 и 10.5.

Применять системы уравнений к решению отдельных задач можно и до изучения соответствующей темы. Сложение уравнений и подстановка — естественные идеи, доступные пяти- и шестиклассникам. На уроках в 7 классе изучаются алгоритмы, позволяющие решить *любую* систему линейных уравнений, в том числе и с неудобными коэффициентами. Дополнительные задачи Д97—Д99 доступны и до этого.

10.1. Не запутаться. Король сказал королеве: «Сейчас мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам теперь. Когда же Вам будет столько лет, сколько мне теперь, нам вместе будет 63 года». Интересно, сколько лет сейчас каждому из них?

Решение 1. В условии говорится о двух персонажах (король и королева) и трёх моментах времени: «тогда», «теперь» и «когда нам вместе будет 63 года». Чтобы не запутаться, составим таблицу с соответствующими заголовками строк и столбцов. Читая условие заново, вводим переменные.

	Король	Королева
Тогда	y	x
Теперь	$2x$	y
Будет	$63 - 2x$	$2x$

«Сейчас мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда...» — вам тогда было x лет, а мне теперь $2x$.

«...когда мне было столько лет, сколько вам теперь» — мне тогда и Вам теперь по y лет.

Для третьей строки новые переменные не нужны.

Составить уравнения поможет ключевое соображение в задачах про возрасты: *для всех персонажей между одними и теми же моментами проходит одно и то же число лет.*

Сопоставляя «тогда» и «теперь», составим уравнение:

$$2x - y = y - x.$$

Сопоставляя «теперь» и «будет», составим второе уравнение:

$$2x - y = 63 - 2x - 2x.$$

Объединяем их в систему:

$$\begin{cases} 2x - y = y - x, \\ 2x - y = 63 - 2x - 2x. \end{cases}$$

Упростим каждое уравнение:

$$\begin{cases} 3x = 2y, \\ 6x - y = 63. \end{cases}$$

Единственным решением системы является пара $x = 14$, $y = 21$. Значит, сейчас королю $2x = 28$ (лет), а королеве $y = 21$ (год).

► Использование таблицы и введение двух переменных позволило решить задачу с помощью стандартных шагов. Проявив находчивость, можно придумать и более короткое решение. ◄

Решение 2. Обозначим через t разницу возрастов короля и королевы. Поскольку сейчас королеве столько же лет, сколько было королю «тогда», значит, от «тогда» до «сейчас» прошло также t лет, а разница между возрастом короля «сейчас» и королевы «тогда» равна $2t$ лет. Следовательно, возраст королевы «тогда» — $2t$, а возраст короля «сейчас» — $4t$. Когда королеве станет $4t$ лет, королю будет $5t$ лет. Таким образом, $4t + 5t = 63$, откуда находим $t = 7$. Следовательно, $4t = 28$ лет королю, $3t = 21$ год королеве.

Ответ: королю 28 лет, королеве 21 год.

10.2. Насосы. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера за 11 часов. Если бы сначала три насоса заполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За какое время три насоса могут заполнить второй танкер? (Объёмы танкеров различны.)

Решение. Читая условие задачи, начинаем заполнять таблицу.

	Производительность, баррели/ч	Время, ч	Объём, баррели
4 насоса	$4x$	11	$V_1 + \frac{1}{3}V_2$
3 насоса	$3x$	$\frac{V_1}{3x}$	V_1
1 насос	x	$\frac{V_2}{4x}$	$\frac{1}{4}V_2$
3 насоса	$3x$	$\frac{V_2}{3x}$	V_2

Пусть объёмы танкеров — V_1 баррелей и V_2 баррелей (единицы измерения могут быть любыми), производительность каждого насоса — x баррелей в час.

Заполнив первые три строки, составим два уравнения:

$$4x \cdot 11 = V_1 + \frac{1}{3}V_2, \quad \frac{V_1}{3x} + \frac{V_2}{4x} = 18.$$

Второе уравнение не линейное. Кроме того, уравнений меньше, чем переменных. Самое время прочитать вопрос задачи. Заполняем четвёртую строку. Теперь видно, что имеет смысл в первом уравнении разделить обе части на x и сделать замену: $\frac{V_1}{x} = a$, $\frac{V_2}{x} = b$. Относительно новых переменных оба уравнения линейны, а найти требуется $\frac{b}{3}$. Умножим первое уравнение на 3, а второе на 12, чтобы работать с целыми коэффициентами:

$$\begin{cases} 3a + b = 132, \\ 4a + 3b = 216. \end{cases}$$

Решая систему, получим $a = 36$, $b = 24$. Отсюда находим $\frac{b}{3} = 8$.

Ответ: за 8 часов.

10.3. Разнообразие. Если 2 км пройти пешком, 3 км проехать на велосипеде и 20 км — на мотоцикле, то потребуется 1 ч 6 мин; если 5 км пройти пешком, 8 км проехать на велосипеде и 30 км — на мотоцикле, то потребуется 2 ч 24 мин. Найдите время, необходимое для того, чтобы пройти 4 км пешком, проехать 5 км на велосипеде и 80 км на мотоцикле.

► **Путь к решению.** Пусть скорость передвижения пешком равна x км/ч, на велосипеде — y км/ч, а на машине —

z км/ч. Тогда первое условие запишется в виде уравнения $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{20}{z}=1{,}1$. Уравнение можно сделать линейным, введя замену $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$, $\frac{1}{z}=c$. Заметим, что величины $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$ имеют ясный физический смысл — это время прохождения одного километра соответствующим способом. Поэтому введём немного необычные для задач на движение переменные. ◄

Решение. Пусть на преодоление 1 км пешком требуется x ч, на велосипеде — y ч, а на мотоцикле — z часов. Тогда по условию задачи составим систему:

$$\begin{cases} 2x+3y+20z = 1{,}1, & (1) \\ 5x+8y+30z = 2{,}4. & (2) \end{cases}$$

Решить систему из двух линейных уравнений с тремя переменными нельзя. Но и найти требуется не значение каждой переменной по отдельности, а значение выражения $4x+5y+{}$ $+80z$. Если задача корректна, то оно является линейной комбинацией выражений $2x+3y+20z$ и $2x+3y+20z$, т. е. его коэффициенты подобраны таким образом, что для некоторых чисел a и b равенство

$$a(2x+3y+20z)+b(5x+8y+30z) = 4x+5y+80z$$

становится тождеством. Если такие a и b существуют, то должны одновременно выполняться три равенства: $2a+5b=4$, $3a+8b=5$, $20a+30b=80$. Решая получившуюся систему из трёх уравнений с двумя переменными, получим $a=7$, $b=-2$. Итак, мы выяснили, что

$$4x+5y+80z = 7(2x+3y+20z)-2(5x+8y+30z) =$$
$$= 7\cdot 1{,}1-2\cdot 2{,}4 = 7{,}7-4{,}8 = 2{,}9.$$

Осталось перевести 2,9 часа в часы и минуты.

Ответ: 2 часа 54 минуты.

► Найти из системы значение выражения $4x+5y+80z$ можно и более привычным для школьника образом, выразив две переменные через третью. Если задача корректна, то при подстановке полученных формул в выражение $4x+5y+80z$ третья переменная должна уничтожиться и его значение «найдётся само». Покажем одну из возможных реализаций этого плана. ◄

1. Умножим уравнение (1) на -3, уравнение (2) на 2 и сложим результаты. Получим

$$4x + 7y = 1{,}5. \tag{3}$$

2. Вычтем из уравнения (3) уравнение (1), умноженное на 2. Получим

$$y - 40z = -0{,}7. \tag{4}$$

3. Уравнение (4) позволяет выразить y через z. А именно: $y = 40z - 0{,}7$. Уравнение (3) позволяет выразить x через y, а затем и через z. Удобнее выражать не x, а $4x$. Получится $4x = 1{,}5 - 7y = 1{,}5 - 280z + 4{,}9 = 6{,}4 - 280z$.

4. Подставим полученные значения x и y в искомое выражение:

$$4x + 5y + 80z = 6{,}4 - 280z + 5(40z - 0{,}7) + 80z = 6{,}4 - 3{,}5 = 2{,}9.$$

► Заметим, что «фокус удаётся» независимо от выбранного метода решения, но лишь при соответствующем подборе коэффициентов. Осознать это помогает дополнительный вопрос: а можно ли по данным задачи определить время, необходимое для того, чтобы пройти 2 км пешком, проехать 5 км на велосипеде и 80 км на мотоцикле? Ответ отрицательный. Наш вопрос отличается от исходного только расстоянием, пройденным пешком. Если бы можно было ответить на оба вопроса, то можно было бы найти x. Подставив x в уравнения (1) и (2), мы бы получили систему двух уравнений относительно y и z и смогли бы найти их значения. А найти значения всех трёх переменных из двух линейных уравнений нельзя. ◄

Задачи для самостоятельного решения

10.4. Сколько лет? Когда Коля был молод, как Оля,
столько лет было тётушке Поле,
сколько Коле теперь вместе с Олей.
Сколько лет было Коле, когда тётушка Поля
была в нынешнем возрасте Коли?

10.5. Трое детей. На вопрос о возрасте своих детей математик ответил: «У нас трое детей. Когда родился наш первенец, суммарный возраст членов семьи составлял 45 лет, год назад, когда родился третий ребёнок, — 70 лет, а в этом году суммарный возраст детей — 14 лет. Сколько сейчас лет каждому ребёнку?

10.6. Фестиваль. В шахматном фестивале участвовали англичане, немцы и французы. Каждый англичанин сыграл ровно с пятью немцами и двумя французами, каждый немец — с шестью англичанами и четырьмя французами, а каждый француз — с тремя англичанами и с одинаковым числом немцев. Найдите это число.

10.7. На треке. В соревнованиях велогонщиков на круговом треке приняли участие Вася, Петя и Коля, стартовав одновременно. Вася каждый круг проезжал на 2 секунды быстрее Пети, а Петя — на три секунды быстрее Коли. Когда Вася закончил дистанцию, Пете осталось проехать один круг, а Коле — два круга. Сколько кругов составляла дистанция?

10.8. Оценки. За контрольную работу каждый из 25 школьников получил одну из оценок «3», «4» или «5». На сколько больше было пятёрок, чем троек, если сумма всех оценок равна 106?

10.9. Бассейн. Три насоса, работая 3 часа непрерывно, полностью наполняют бассейн водой. Если первый насос будет работать 1 час, второй — 2 часа, а третий — 6 часов, они также наполнят бассейн полностью. И, наконец, если первый насос будет работать 8 часов, а второй и третий по полчаса, то они также наполнят бассейн. Верно ли, что все насосы работают с одинаковой производительностью?

10.10. Урок. Несколько учеников отвечали на уроке, и каждый получил не ниже тройки. Аня получила отметку, которая на 10 меньше, чем сумма отметок остальных; Боря получил отметку, которая на 8 меньше, чем сумма отметок остальных; Вера — отметку, которая на 6 меньше, чем сумма отметок остальных. Сколько человек отвечало на уроке и какие отметки они получили?

Ответы, решения, комментарии

10.4. Ответ: Коля тогда только родился.

Решение. Пусть теперь Оле x лет, а Коле y лет. Заполним таблицу, постепенно читая условие. Найти надо z. Для этого заметим, что с момента времени №3 (Поля была в возрасте Коли) до момента №1 (Коля был молод, как Оля) для Коли прошло столько же лет, сколько для тётушки Поли. Таким образом, $(x+y)-y=x-z$. Упрощаем: $x=x-z$, откуда следует, что $z=0$.

	Коля	Оля	Поля
Коля молод, как Оля	x		$x+y$
Теперь	y	x	
Поля была в возрасте Коли	z		y

10.5. Ответ: 8 лет, 5 лет и 1 год.

Решение 1. Пусть в момент рождения третьего ребёнка первому было x лет, а второму — y лет. За время, прошедшее между рождениями первого и третьего, каждый из родителей постарел на x лет. Следовательно, $45+2x+x+y=70$. Упрощая это уравнение, получим $3x+y=25$.

На данный момент детям исполнилось 1 год, $(y+1)$ лет и $(x+1)$ лет, значит, $(x+1)+(y+1)+1=14$, т.е. $x+y=11$. Решая получившуюся систему уравнений, получим, что $x=7$, $y=4$. Таким образом, среднему ребёнку сейчас исполнилось $y+1=5$ лет, а старшему исполнилось $x+1=8$ лет.

Решение 2. Год назад суммарный возраст всех детей был $14-3=11$ лет. На суммарный возраст мамы с папой осталось $70-11=59$ лет. Со времени рождения первенца он увеличился на $59-45=14$ лет, т.е. с того времени до прошлого года прошло $14:2=7$ лет. Значит, старшему ребёнку год назад было $14-7=7$ лет, а сейчас ему 8 лет. Младшему сейчас, очевидно, 1 год. А среднему $14-8-1=5$ лет.

10.6. Ответ: 5.

Решение. Пусть в фестивале участвовало x англичан, y немцев и z французов. Тогда англичане сыграли $5x$ партий с немцами и $2x$ партий с французами, немцы сыграли $6y$ партий с англичанами и $4y$ партий с французами, а французы — $3z$ партий с англичанами и kz партий с немцами, где k — искомое число. Значит, должны выполняться равенства $5x=6y$; $2x=3z$ и $4y=kz$. Следовательно,

$$k=\frac{4y}{z}=4\cdot\frac{\frac{5}{6}x}{\frac{2}{3}x}=5.$$

► Отметим, что из условия задачи также следует, что количество англичан, немцев и французов, участвовавших в фестивале, должно быть равно $6n$, $5n$ и $4n$ соответственно, где n — любое натуральное число. ◄

10.7. Ответ: 6 кругов.

Решение. Пусть дистанция составляла n кругов, а Вася преодолевал каждый круг за t секунд. Составим таблицу.

	Кругов	Секунд на круг	Всего секунд
Вася	n	t	tn
Петя	$n-1$	$t+2$	$(t+2)(n-1)$
Коля	$n-2$	$t+5$	$(t+5)(n-2)$

Из условия задачи следует, что

$$tn=(t+2)(n-1)=(t+5)(n-2),$$

что можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} tn=(t+5)(n-2), \\ tn=(t+2)(n-1). \end{cases}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых уравнения становятся линейными:

$$\begin{cases} 5n-2t=10, \\ 2n-t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5n-2t=10, \\ 4n-2t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=6, \\ t=10. \end{cases}$$

10.8. Ответ: на 6.

Решение 1. Пусть a школьников получили тройку, b школьников — четвёрку, c школьников — пятёрку. Из условия задачи следует, что $a+b+c=25$ и $3a+4b+5c=106$.

Умножим обе части первого уравнения на 4: $4a+4b+4c=100$. Теперь вычтем из второго уравнения полученное, тогда $c-a=6$.

► Аналогично задаче 10.3 это решение основано на том, что искомое выражение $c-a$ является линейной комбинацией выражений $a+b+c$ и $3a+4b+5c$, значения которых известны из условия. ◄

Решение 2. Если бы все школьники получили оценку «4», то сумма баллов равнялась бы 100. Если несколько четвёрок заменить b тройками и столько же заменить пятёрками, то сумма по-прежнему будет равна 100. Почему же она равна 106? Потому что $106 - 100 = 6$ человек получили пятёрки, не скомпенсированные чьими-то тройками.

10.9. Ответ: верно.

Решение. Обозначив производительности насосов через x, y и z соответственно (единица измерения — часть бассейна в час), составим систему трёх линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 1, \\ x + 2y + 6z = 1, \\ 8x + 0,5y + 0,5z = 1. \end{cases}$$

Решая её методом сложения или подстановки, получим единственный ответ: $x = y = z = \frac{1}{9}$.

► Можно ли ответить на вопрос задачи, не решая составленную систему? Пусть производительности всех насосов одинаковые, т. е. $x = y = z$. Тогда все три уравнения примут вид $9x = 1$, откуда следует, что $x = \frac{1}{9}$. Это означает, что тройка $x = y = z = \frac{1}{9}$ является решением системы. Есть ли у системы другие решения?

Для систем двух уравнений с двумя переменными верный ответ на этот вопрос интуитивно очевиден и изучается на уроках. По наличию или отсутствию пропорциональности коэффициентов уравнений ясно взаимное расположение соответствующих прямых, а значит, и количество решений системы. В данном случае никакой пропорциональности не просматривается. Но для трёх уравнений это вовсе не означает единственности решения! В задаче 10.3 по виду выражений $2x + 3y + 20z$, $5x + 8y + 30z$ и $4x + 5y + 80z$ также не было заметно, что третье уравнение можно выразить через два первых. Если переменных и уравнений более двух, то честно решить систему — самый простой способ доказать единственность решения. ◄

10.10. Ответ: отвечало 4 человека; один получил «5», двое — «4», один — «3».

Решение. Пусть S — сумма всех полученных оценок, A — оценка Ани, $Б$ — оценка Бори, $В$ — оценка Веры. Из условия задачи следует, что $S - A = A + 10$; $S - Б = Б + 8$; $S - В = В + 6$.

Следовательно, $S = 2А + 10 = 2Б + 8 = 2В + 6$. Значит, $В - Б = Б - А = 1$. Так как двоек не было, то возможен только один вариант: $А = 3$, $Б = 4$, $В = 5$. Следовательно, $S = 16$, тогда $S - (А + Б + В) = 4$, т. е. ещё один ученик получил оценку «4».

► Система из трёх уравнений с четырьмя переменными на этот раз решилась не по алгебраическим причинам, а из-за дополнительного условия: переменные А, Б и В могут принимать только значения 3, 4 или 5. ◄

► Можно также использовать задачи Д29, Д50, Д51, Д53, Д62, Д97—Д103. ◄

Занятие 11
Неравенства

Все животные равны, но некоторые животные равнее других.
Дж.Оруэлл. Скотный двор

Обычно вопрос в текстовой задаче имеет форму «Сколько..?» и предполагает единственный ответ, реже ответов несколько; бесконечное множество ответов — ситуация исключительная. Поэтому условия, которые описываются не уравнениями, а неравенствами, в задачах встречаются редко. В этом занятии собраны именно такие задачи.

Половина их имеет указанную выше форму вопроса и соответствующего ответа. Как правило, составление неравенств, а не уравнений приводит к конечному множеству ответов (в том числе к единственному ответу) тогда, когда по смыслу задачи ответом является целое число. В занятии 9 мы уже рассматривали задачи, в которых ограничения в виде неравенств позволяли отсеять посторонние решения. Поскольку это занятие адресовано школьникам, уже умеющим решать линейные неравенства и их системы, мы сможем действовать и в другом порядке: сначала решить неравенство или систему, а затем выбрать из получившегося множества целые решения.

В задачах 11.1, 11.3, 11.4, 11.7 решением неравенства или системы неравенств является числовой интервал, содержащий единственное целое число.

В задаче 11.5 неравенство даёт только верхнюю оценку, нижняя — ноль — получается из условия положительности ответа. В этой задаче применяется также дополнительное соображение, позволяющее выбрать верный ответ.

Формулировки оставшихся задач наводят на мысль о неравенствах даже внешне. В задачах 11.2 и 11.8 требуется не найти точный ответ, а лишь получить одностороннюю оценку. В задаче 11.6 оценку необходимо дополнить примером, но в процессе поиска оценки он становится очевидным.

В задачах 11.9 и 11.10 требуется не вычислить. а только сравнить две величины. Заметим, что составить разность этих величин и сравнить её с нулём — не просто полезный технический приём, на этом строятся определения понятий «больше» и «меньше».

Задачи 11.6 и 11.7 могут быть решены как с явным применением неравенств, так и с помощью арифметических действий и здравого смысла. Как и в задачах на составление уравнений, нам кажется, что ученику, решившему задачу с помощью неравенства или системы неравенств, интересно и полезно потом рассказать такое решение. А показывать ли решение с помощью неравенств, если и без них всё быстро и красиво получилось, — большой вопрос.

Занятие доступно после изучения темы «Решение линейных неравенств и их систем». Доказательству алгебраических неравенств уделяется мало внимания в программе основной школы, поэтому связанные с ними задачи Д106 и Д108 вынесены в раздел дополнительных.

11.1. По бутылям. Квас заполняет несколько 50-литровых бутылей. Если его разлить в 40-литровые бутыли, то понадобится на пять бутылей больше, причём одна из них останется неполной. Если же этот квас разлить в 70-литровые бутыли, то их понадобится на четыре меньше и тоже одна бутыль останется неполной. Сколько имеется кваса?

Решение. Пусть квас заполняет n пятидесятилитровых бутылей. Тогда имеется $50n$ литров кваса и условие записывается в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} 40(n+4) < 50n < 40(n+5), \\ 70(n-5) < 50n < 70(n-4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(n+4) < 5n, \\ 5n < 4(n+5), \\ 7(n-5) < 5n, \\ 5n < 7(n-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 16, \\ n < 20, \\ n < 17{,}5, \\ n > 14 \end{cases} \Leftrightarrow 16 < n < 17{,}5.$$

Получаем, что $n = 17$ — единственное целочисленное решение системы. Следовательно, имеется $50n = 850$ литров кваса.

Ответ: 850 литров.

► В задаче 11.1 все действия были естественными: составили систему неравенств с одной переменной, решили её, выбрали единственное целое решение. Обратим внимание на два технических приёма, которые помогут и в менее стандартной задаче 11.2.

1. Если крайние части двойного неравенства содержат переменную, его надо разбить на два отдельных.

2. Для целого числа условие «больше 16» означает, что оно не меньше 17. ◄

11.2. Шалтай-Болтай. Известно, что 175 Шалтаев стоят дороже, чем 125 Болтаев, но дешевле, чем 126. Хватит ли ста рублей на трёх Шалтаев и одного Болтая, если каждый из них стоит целое число рублей?

► **Путь к решению.** В каком случае могло бы не хватить 100 рублей? Если бы Шалтаи или Болтаи стоили дорого. А что может мешать им стоить дёшево? Условие про целое число рублей. Например, если Болтай стоит 1 рубль, то 175 Шалтаев стоят больше 125, но меньше 126 рублей, а в этом промежутке вообще целых чисел нет. Если 2 рубля, то 175 Шалтаев стоят между 250 и 252 рублями, т.е. 251 рубль, но 251 не делится на 175. Длина промежутка растёт, рано или поздно там окажется число, кратное 175. Перебором можно выяснить, когда именно. Если ввести переменные, составить по условию неравенства и учесть комментарий к задаче 11.1, можно сэкономить время и силы. ◄

Решение. Пусть Ш рублей — цена одного Шалтая, а Б рублей — одного Болтая. Из условия следует, что

$$125Б < 175Ш < 126Б.$$

Вспомним первый приём: запишем вместо двойного неравенства два отдельных и упростим их. Получим, что $7Ш > 5Б$ и $25Ш < 18Б$. Теперь используем второй приём: если целое число больше целого числа $5Б$, то оно не меньше, чем $5Б + 1$. Таким образом, $7Ш \geqslant 5Б + 1$ и $25Ш \leqslant 18Б - 1$. А теперь вернёмся к двойному неравенству: $125Б + 25 \leqslant 175Ш \leqslant 126Б - 7$. Тогда $125Б + 25 \leqslant 126Б - 7$, т. е. $Б \geqslant 32$. Значит,

$$7Ш \geqslant 5Б + 1 \geqslant 161,$$

следовательно, $Ш \geqslant 23$. Таким образом, $3Ш + Б \geqslant 69 + 32 = 101$.

Ответ: нет.

Задачи для самостоятельного решения

11.3. Выкуп. Для выкупа своей сестры — принцессы старшему брату не хватало пяти бриллиантов, среднему — шести, младшему — семи. Если любые два брата сложатся, то бриллиантов всё равно не хватит, но если сложатся все трое, то хватит с избытком. Сколько бриллиантов составляет выкуп?

11.4. Стулья. В зале расставлены стулья в 13 рядов, причём на последний ряд не хватило нескольких стульев. Потом их переставили в 27 рядов, при этом в каждом ряду поставили на 7 стульев меньше, чем при первоначальной расстановке, и на последний ряд не хватило 3 стульев. Сколько всего было стульев?

11.5. Столы. Турнир математических боёв в «Берендеевых Полянах» продолжался 7 дней. На 28 команд-участниц в столовой накрывалось ровно 28 столов. В первый же день не все команды ели за своим столом. Во второй день команд, евших не за своим столом, оказалось на 2 больше, в третий день — ещё на 2 больше и т. д. По окончании турнира выяснилось, что каждая команда всё-таки сумела поесть за отведённым ей столом не менее пяти дней. Сколько команд ели за своим столом в последний день? (*В течение одного дня команда ела за одним и тем же столом.*)

11.6. Пух и Пятачок. Как-то Кролик торопился на встречу с осликом Иа-Иа, но к нему неожиданно пришли Винни-Пух и Пятачок. Будучи хорошо воспитанным, Кролик предложил гостям подкрепиться. Пух завязал салфеткой рот Пятачку и в одиночку съел 10 горшков мёда и 22 банки сгущёнки, причём горшок мёда он съедал за 2 минуты, а банку сгущёнки — за минуту. Узнав, что больше ничего сладкого в доме нет, Пух попрощался и увёл Пятачка. Кролик с огорчением подумал, что он бы не опоздал на встречу с осликом, если бы Пух поделился с Пятачком. Зная, что Пятачок съедает горшок мёда за 5 минут, а банку сгущёнки — за 3 минуты, Кролик вычислил наименьшее время, за которое гости могли бы уничтожить его запасы. Чему равно это время? (*Как горшок мёда, так и банку сгущёнки можно делить на любые части.*)

11.7. Деньги. В нескольких кошельках лежат одинаковые суммы денег. Если бы количество кошельков было на 1% меньше, а денег в каждом кошельке — на копейку больше, то общая сумма денег была бы меньше. А если бы, наоборот, количество кошельков было больше на 1%, а денег в каждом кошельке — на копейку меньше, то общая сумма денег также была бы меньше. Во сколько раз увеличится общая сумма денег, если количество кошельков не менять, но в каждый кошелёк добавить по рублю?

11.8. Чёртики. Аня, Ваня и Саня рисовали чёртиков на чистых листах. Экономная Аня нарисовала чёртиков больше, чем Ваня и Саня вместе, израсходовав меньше всех листочков. Расточительный Ваня нарисовал меньше всех чёртиков, но израсходовал больше листочков, чем Аня вместе с Саней. Больше пяти чёртиков на листок не влезает. Могла ли Аня нарисовать меньше чем 30 чёртиков?

11.9. Диктант. При проверке диктанта в классе оказалось, что грубые ошибки составляют более четверти всех ошибок. Если бы каждый ученик сделал в три раза больше грубых ошибок и на две больше негрубых, то количество грубых ошибок стало бы ровно в пять раз меньше количества негрубых. Верно ли, что треть класса написала диктант без ошибок?

11.10. Шаги. Федя и Наташа стартуют с одного места и равномерно движутся по прямой в одном направлении. Федя идёт спокойно, а Наташа бежит. Пробежав 400 своих шагов, Наташа поворачивает обратно. В этот момент Федя начинает считать свои шаги и до встречи с Наташей насчитывает их 100. Чьи шаги длиннее: идущего Феди или бегущей Наташи?

Ответы, решения, комментарии

11.3. Ответ: 10.

Решение 1. Пусть размер выкупа — x бриллиантов, тогда у старшего есть $x-5$ бриллиантов, у среднего — $(x-6)$, а у младшего — $(x-7)$. Так как суммарного количества бриллиантов, которые имеются у любых двух братьев, для выкупа не хватит, то $x-5+x-6<x$, т.е. $x<11$. Зная, что суммарного количества бриллиантов у трёх братьев с избытком хватит, получим $x-5+x-6+x-7>x$, т.е. $x>9$.

Таким образом, $9<x<11$, значит, $x=10$.

Решение 2. Так как бриллиантов среднего и старшего братьев не хватает, а среднему брату недоставало шести бриллиантов, у старшего их не больше пяти. Кроме того, из условия следует, что у среднего брата на один бриллиант меньше, чем у старшего, а у младшего ещё на один меньше. Также понятно, что у младшего хотя бы один бриллиант есть, так как иначе все трое тоже не смогли бы выкупить принцессу. Остаётся перебрать тройки чисел (5; 4; 3), (4; 3; 2), (3; 2; 1) и убедиться, что только первая тройка удовлетворяет условию задачи.

11.4. Ответ: 159 стульев.

Решение. Пусть всего было s стульев, причём до перестановки в каждом ряду их было по x, а после перестановки во всех рядах, кроме последнего, стало по $x-7$. Нехватка нескольких стульев при расстановке в 13 рядов записывается в виде двойного неравенства: $12x < s < 13x$. Нехватка трёх стульев при расстановке в 27 рядов записывается в виде равенства $s = 27(x-7) - 3$, т. е. $s = 27x - 192$. Теперь можно исключить s: $12x < 27x - 192 < 13x$.

Как и в предыдущих задачах, разбиваем двойное неравенство на два отдельных. Из неравенства

$$12x < 27x - 192$$

получим, что $x > 12{,}8$, а из неравенства

$$27x - 192 < 13x$$

— что $x < 13\frac{5}{7}$. Единственное натуральное x, удовлетворяющее обоим неравенствам, — это 13. Тогда $s = 27 \cdot 13 - 192 = 159$.

11.5. Ответ: 14.

Решение. Пусть в первый день $x > 0$ команд ели не за своим столом, тогда во второй день таких команд было $x+2$, в третий — $(x+4)$, ..., в седьмой — $(x+12)$. Просуммировав, получим, что $7x+42$ раза столы занимались неправильно. Всего столы занимались $28 \cdot 7$ раз, из которых не меньше чем $28 \cdot 5$ раз правильно. Значит, $7x + 42 \leqslant 28 \cdot 2$. Отсюда следует, что $x \leqslant 2$. Но $x \neq 1$, так как в первый день не могла одна команда сидеть неправильно, а все остальные правильно. Поэтому $x = 2$, значит, в последний день не за своим столом ели 14 команд.

11.6. Ответ: 30 минут.

Решение 1. Сравним производительности Винни-Пуха и Пятачка. Мёд Винни-Пух ест в $5:2 = 2{,}5$ раз быстрее, а сгущёнку — в $3:1 = 3$ раза быстрее. Поэтому для ускорения процесса вначале Пух должен есть сгущёнку, а Пятачок — мёд. Пух съест всю сгущёнку за 22 минуты, Пятачок за это время успеет съесть только $22:5 = 4{,}4$ горшка мёда. Оставшиеся $10 - 4{,}4 = 5{,}6$ горшков мёда друзья будут есть со скоростью $0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$ горшков в минуту и справятся за $5{,}6 : 0{,}7 = 8$ минут. Всего же они потратят $22 + 8 = 30$ минут.

Решение 2. Пусть Пух съест x горшков мёда и y банок сгущёнки (эти числа не обязательно целые). Он потратит на еду $(2x+y)$ минут. Пятачку достанутся $(10-x)$ горшков мёда и $(22-y)$ банок сгущёнки, он с ними справится за $5(10-x)+3(22-y)$ (минут). Если Пух и Пятачок потратят на еду наименьшее возможное время, они закончат есть одновременно, иначе один помог бы другому и тем самым уменьшил их общее время. Составим уравнение:

$$2x+y=5(10-x)+3(22-y).$$

Отсюда следует, что $y=\frac{116-7x}{4}$, и тогда $2x+y=\frac{x}{4}+29$.

Так как $y\leqslant 22$, то $116-7x\leqslant 88$, т. е. $x\geqslant 4$. Значит, наименьшее значение $2x+y$ достигается при $x=4$ и равно 30. Для этого Пух должен съесть 4 горшка мёда и всю сгущёнку, а Пятачок — 6 горшков мёда.

11.7. Ответ: в 2 раза.

Решение 1. Пусть в каждом из n кошельков находится по x копеек, тогда общая сумма денег — nx копеек. Из условия задачи следуют два неравенства: $0{,}99n(x+1)<nx$ и $1{,}01n(x-1)<nx$. Из первого неравенства получим, что $x>99$, а из второго — что $x<101$. Следовательно, $99<x<101$ и x целое, т. е. $x=100$.

Таким образом, в каждом кошельке лежит по 100 копеек, т. е. по рублю. Если в каждый кошелёк добавить ещё по рублю, то количество денег в нём удвоится, значит, удвоится и общая сумма денег.

Решение 2. Из первого условия следует, что из каждой сотни кошельков убирается один, а в остальные кошельки добавляется 99 копеек. Поскольку общая сумма денег при этом становится меньше, то в каждом кошельке должно лежать больше чем 99 копеек. Из второго условия следует, что к каждой сотне кошельков прибавляется один, но сумма денег в этих кошельках уменьшается на 101 копейку. Поскольку общая сумма денег также уменьшится, то в каждом кошельке должно лежать меньше чем 101 копейка. Дальнейшие рассуждения такие же, как в решении 1.

11.8. Ответ: нет.

Решение. Пусть Аня потратила n листов бумаги, тогда Саня потратил не меньше чем $(n+1)$ лист, а Ваня — не меньше чем

$(2n+2)$. Значит, Ваня нарисовал не меньше, чем $(2n+2)$ чёртика, а Саня — не меньше чем $(2n+3)$. Следовательно, Аня нарисовала по крайней мере $(4n+6)$ чёртиков. Так как у неё было n листочков, то она не могла нарисовать больше чем $5n$ чёртиков. Таким образом, $4n+6 \leqslant 5n$, т.е. $n \geqslant 6$. Тогда $4n+6 \geqslant 30$.

11.9. Ответ: верно.

Решение. Пусть в классе k учеников, и пусть x — количество допущенных ошибок, из которых y ошибок грубые. Тогда негрубых ошибок $x-y$. По условию $y > \frac{x}{4}$.

Если бы каждый ученик сделал в три раза больше грубых ошибок и на две больше негрубых, то получилось бы $3y$ грубых и $(x-y+2k)$ негрубых. Поэтому $x-y+2k = 5 \cdot 3y$. Отсюда следует, что

$$y = \frac{x+2k}{16}.$$

Подставив это значение y в ранее полученное неравенство, получим

$$\frac{x+2k}{16} > \frac{x}{4},$$

т.е. $x < \frac{2}{3}k$. Так как количество учеников, сделавших ошибки, не превосходит количества ошибок, то из этого неравенства следует ответ.

► Ещё до решения задачи интересно задуматься: как такое вообще может быть? Казалось бы, количество грубых ошибок увеличилось сильнее, чем негрубых (втрое больше — это заметнее, чем всего лишь на 2 больше). Но их доля уменьшилась: была больше $\frac{1}{4}$, а стала $\frac{1}{5}$. Секрет как раз в большом количестве ребят, не сделавших ошибок: от увеличения втрое ноль не изменяется, а 2 гораздо больше 0.

Отметим, что в задачах 11.8 и 11.9 использовано одно и то же нетривиальное соображение: чёртиков не меньше, чем листков, а сделавших ошибки учеников не меньше, чем ошибок. ◄

11.10. Ответ: шаги Наташи длиннее.

Решение. Пусть Наташин шаг будет единицей длины (сокращённо нш), u нш/ч — скорость Наташи, v нш/ч — скорость Феди. Наташа пробежала 400 шагов за $\frac{400}{u}$ часов. Федя за это время прошёл расстояние $\frac{400v}{u}$ нш, значит, расстояние между ними на момент поворота Наташи было равно $\frac{400(u-v)}{u}$ нш. Время их сближения равно $\frac{400(u-v)}{u(u+v)}$ ч. За это время Федя прошёл $\frac{400v(u-v)}{u(u+v)}$ нш.

Сравним $\frac{400v(u-v)}{u(u+v)}$ и 100, составив их разность:

$$100 - \frac{400v(u-v)}{u(u+v)} = \frac{100(u^2 - 3uv + 4v^2)}{u(u+v)} > 0,$$

так как $u^2 - 3uv + 4v^2 = (u - 1{,}5v)^2 + 1{,}75v^2 > 0$. Следовательно, $\frac{400v(u-v)}{u(u+v)} < 100$, т.е. расстояние, которое прошёл Федя, сделав 100 шагов, меньше 100 Наташиных шагов. Это означает, что Наташин шаг длиннее.

► Можно также использовать задачи Д104–Д110. ◄

Занятие 12
Нестандартные задачи

> А когда управится, сядет у ворот —
> Сказочку расскажет, песенку споёт.
>
> *К. Чуковский. Курица*

Нестандартными мы назвали вовсе не наиболее трудные для учеников задачи. Они трудны скорее для учителей и авторов книжек. Для учителей, потому что их бесполезно «раскладывать по полочкам» и приклеивать к каждой пошаговый рецепт: тут составь таблицу, там введи несколько переменных и тому подобное. Точнее, разложить-то можно и даже советы про каждую дать, но «полочки» будут совсем другими.

Одну полочку назовём по-детски: «придумай историю». И положим на неё обычные с виду задачи, в которых привычная рука так и норовит ввести переменные и составить сложные уравнения. Но если посмотреть на сюжет с неожиданной стороны, рассказать сказку, поколдовать или порисовать, задача «решится сама» в два-три арифметических действия. Это не фигура речи: задачи 12.2—12.4 именно во столько действий и решаются. А в задаче 12.1 вычислений и вовсе нет.

Табличка на второй полочке выглядит более внушительно: «комбинаторная алгебра». (Почти так же страшно, как «алгебраическая геометрия», да?) Прочитав условие задачи с этой полочки, надо подумать, как такое могло получиться. Например, начать с крайнего случая, а потом проверить, возможны ли другие. Или написать одно или несколько уравнений, а когда они не решатся, обратить внимание на дополнительные ограничения. Чаще всего (а на этом занятии всегда) они связаны либо с тем, что значения переменных целые, либо с неравенствами. Если возникнет несколько случаев, следует рассмотреть их по очереди.

Положить на такие полочки задачи гораздо проще, чем научить их решать. Для любого натурального n можно красиво и со вкусом разобрать n лежащих на них задач, но от этого ученикам всё равно не станет ясно, как решать $(n+1)$-ю. Задача 12.1 предлагается для разбора не столько как подсказка к аналогичной задаче 12.3, сколько как образец творческого подхода к условию вместо рефлекторного составления уравнений.

12.1. Сувениры. Фирма, состоящая из нескольких рабочих и бригадира, производит сувениры. В течение дня каждый рабочий делал по одинаковому целому количеству сувениров, а бригадир — также целое количество, которое на 13 больше, чем средняя дневная производительность фирмы. Сколько рабочих в фирме?

Решение 1. Пусть в конце рабочего дня бригадир поровну раздаст рабочим «лишние» сувениры так, чтобы у всех стало поровну (см. рис. 12.1). Так как и каждый рабочий сделал целое число сувениров, и средняя производительность фирмы — целое число (оно на 13 отличается от целого числа сувениров, изготовленных бригадиром), то каждый получит целое число сувениров. Разделить 13 сувениров поровну можно либо раздав их по одному каждому из 13 рабочих, либо отдав все 13 сувениров единственному рабочему. По условию рабочих несколько, поэтому второй случай исключён.

Рис. 12.1

Решение 2. Пусть каждый из n рабочих изготовляет в день по x сувениров, а бригадир — y. По условию $y = \frac{xn+y}{n+1} + 13$. Выразив отсюда y, получим $y = x + 13 + \frac{13}{n}$. Так как $n > 1$, то $n = 13$.

Ответ: 13.

► Отметим, что $y = x + 14$, но значения x и y найти невозможно. ◄

Задачи для самостоятельного решения

12.2. Яма. Трое рабочих копают яму. Они работают по очереди, причём каждый из них работает столько времени, сколько нужно двум другим, чтобы вырыть половину ямы. Работая таким образом, они выкопали яму. Во сколько раз быстрее трое рабочих выкопают такую же яму, если будут работать одновременно?

12.3. Учитель и ученики. В классе находятся учитель и несколько учеников. Известно, что возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе. Сколько учеников находится в классе?

12.4. Обгоны. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был в 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

12.5. Муравьи. По кольцевой дорожке длиной 60 см движутся в обе стороны муравьи со скоростью 1 см/с. Когда два муравья сталкиваются, они мгновенно разворачиваются и начинают двигаться с той же скоростью в противоположных направлениях. За минуту биолог насчитал 48 попарных столкновений, причём ни одно из них не произошло в момент начала наблюдения. Сколько муравьёв могло быть на дорожке?

12.6. Мельницы. Дон Кихот одержал победу над десятью ветряными мельницами. Некоторым он отрубил по два крыла, некоторым — по три, а остальным — все четыре. Первые три мельницы в сумме потеряли в полтора раза меньше крыльев, чем остальные семь. Мельниц, ставших однокрылыми, больше, чем мельниц, ставших двукрылыми. Сколько мельниц лишилось всех четырёх крыльев?

12.7. Слоны. В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если взять любого слона, кроме стоящего справа, и прибавить к его весу удвоенный вес его правого соседа, то получится 15 тонн (для каждого из 14 слонов). Найдите вес каждого из 15 слонов.

12.8. Москва—Саратов. Товарный поезд, отправившись из Москвы в x часов y минут, прибыл в Саратов в y часов z минут. Время в пути составило z часов x минут. Найдите все возможные значения x.

12.9. Оплата номеров. Управдом Остап Бендер собрал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич заинтересовался, почему у них в третьем подъезде надо собрать денег на 20% больше, чем во втором, хотя квартир во всех подъездах поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что за двузначные номера приходится платить вдвое, а за трёхзначные — втрое больше, чем за однозначные. Сколько квартир в каждом подъезде?

12.10. Тыквондо. В чемпионате мира по тыквондо 18 спортсменов состязались в разбивании тыквы одним ударом на максимальное число частей. Все участники показали различные результаты, причём у чемпиона получилось втрое больше частей, чем у занявшего десятое место, но меньше, чем у занявших девятое и десятое места, вместе взятых. Какого результата добился чемпион, если суммарное количество частей у всех участников оказалось меньше 270? (*Неразбитая тыква считается одной частью.*)

Ответы, решения, комментарии

12.2. Ответ: в 2,5 раза.

Решение. Пусть, пока один рабочий роет яму в соответствии с очередью, остальные тоже не бездельничают, а рядом роют сверхплановые ямы. За время работы каждого из трёх рабочих будут вырыты сверх плана три половины ямы. А всего будут вырыты $1 + 1{,}5 = 2{,}5$ ямы. Значит, работая одновременно, они выкопали бы одну яму в 2,5 раза быстрее.

► А что, работая таким образом, рабочие действительно выкопали ровно одну яму? Рассмотрим простейший частный случай: каждый мог бы выкопать яму за час. Тогда любые двое — за полчаса. Работая полчаса, каждый выкопал бы пол-ямы, и итогом поочерёдной работы были бы полторы ямы, а не одна.

Случайный пример противоречит условию. Что это может означать? Что они не могут быть верными одновременно. Либо в условии ошибка, либо из него можно сделать какой-то вывод о производительности рабочих и наш пример этому выводу не соответствует, а именно: производительности рабочих не могут быть одинаковыми! Экспериментируя с производительностями, нетрудно «заставить» рабочих выкопать указанным образом как больше ямы, так и меньше. Подобрать пример, когда они выкопают ровно одну яму, сложнее, но этого и не требуется.

Казалось бы, рабочие находились в равных условиях, т.е. каждый работал примерно треть времени. Почему же если не отдыхать, то яма будет вырыта не втрое быстрее, а всего в 2,5 раза? Потому что в условии «каждый из них работает столько времени, сколько нужно двум другим, чтобы вырыть половину ямы» спрятано неравноправие. Двум медленным рабочим требуется больше времени для выкапывания половины ямы, чем двум быстрым. Поэтому быстрый рабочий копал дольше медленного и разница получилась меньше чем в три раза. ◄

12.3. Ответ: 5 учеников.

Решение 1. Средний возраст всех присутствующих на $24 - 20 = 4$ года больше среднего возраста учеников (см. рис. 12.2).

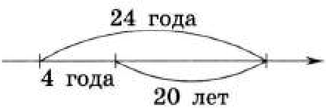


Рис. 12.2

Представим теперь, что учитель может (а дети не возражают) поделиться с детьми своими годами и решил каждому подарить по 4 года. Если каждый ученик повзрослеет на 4 года, то и средний возраст всех детей повысится на 4 года. Чтобы средний возраст всех присутствующих стал равным среднему возрасту повзрослевших детей, учитель должен помолодеть до этого же возраста. Как видно по чертежу, он помолодел на 20 лет, раздавая ученикам по 4 года. Значит, учеников было $20 : 4 = 5$.

Решение 2. Пусть в классе n учеников, их средний возраст — p лет, а возраст учителя — m лет. По условию $m = p + 24$ и $m = \frac{pn+m}{n+1} + 20$. Упрощая второе уравнение, получим

$$m(n+1) = pn + m + 20(n+1),$$

т. е. $n(m-p)=20(n+1)$. Из первого уравнения следует, что $m-p=24$, тогда $24n=20n+20$, откуда находим $n=5$.

12.4. Ответ: 2 км.

Решение 1. Будем считать, что пешеход неподвижен. (В таких случаях физики говорят: «Рассмотрим систему отсчёта, связанную с пешеходом».) Мотоциклист вначале отставал от пешехода на 6 км, а потом обогнал его на 3 км, а велосипедист вначале находился вровень с пешеходом, а затем обогнал его на 3 км (см. рис. 12.3). За одно и то же время мотоциклист проехал *относительно пешехода* 9 км, а велосипедист — 3 км. Следовательно, скорость мотоциклиста *относительно пешехода* в 3 раза больше скорости велосипедиста *относительно пешехода*. Так как мотоциклист, догнав пешехода, проехал *относительно пешехода* 6 км, то велосипедист проехал *относительно пешехода* в три раза меньше, т. е. 2 км.

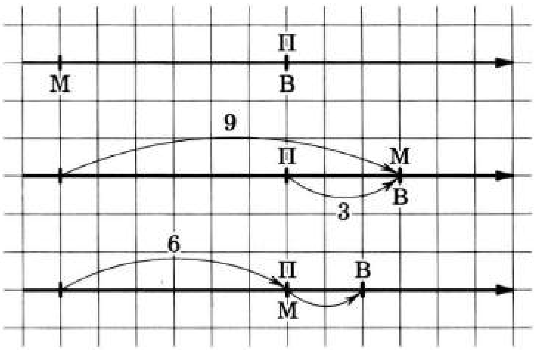


Рис. 12.3

Решение 2. Пусть скорости мотоциклиста, велосипедиста и пешехода равны соответственно a км/ч, b км/ч и c км/ч. Пусть также с момента «встречи» пешехода и велосипедиста до момента «встречи» мотоциклиста и велосипедиста прошло t часов, а с момента «встречи» пешехода и велосипедиста до момента «встречи» пешехода и мотоциклиста прошло T часов. Тогда составляем три уравнения: $(a-c)t=9$; $(b-c)t=3$; $(a-c)T=6$. Найдём искомое расстояние $S=(b-c)T$. Разделив первое уравнение на второе, получим, что $\frac{a-c}{b-c}=3$. Тогда $\frac{(a-c)T}{(b-c)T}=3$, т. е. $\frac{6}{S}=3$, $S=2$.

► Относительность движения и в этой задаче помогает осознать движущаяся лента. Можно считать, что по дороге со своими скоростями движутся три объекта: велосипедист, мотоциклист и пешеход, который несёт длинную ленту. Тогда чертежи, с помощью которых мы решили задачу, будут соответствовать не пешеходу, непонятно с какой стати остановившемуся, а изображать положение мотоциклиста и велосипедиста на ленте.

Задача также эффективно решается с помощью графиков на координатной плоскости. Подробнее см. книгу [3]. ◄

12.5. Ответ: 10, 11, 14 или 25.

Решение. Заметим, что ситуация не изменится, если считать, что после столкновения муравьи не разворачиваются, а продолжают своё движение, не меняя направления и скорости. Пусть какие-то два муравья столкнулись, тогда через 30 секунд после этого каждый из них проползёт половину круга и они столкнутся вновь. Следовательно, у каждой такой пары произойдёт ровно 2 столкновения за минуту.

Таким образом, если x муравьёв ползут в одну сторону, а y муравьёв — в противоположную, то $2xy = 48 \Leftrightarrow xy = 24$. Следовательно, искомая величина $x + y$ может принимать значения $1 + 24 = 25$, $2 + 12 = 14$, $3 + 8 = 11$, $4 + 6 = 10$.

12.6. Ответ: 3 мельницы.

► **Путь к решению.** Начнём с подбора хотя бы одного примера, как такое могло быть. Сумма трёх слагаемых в полтора раза меньше суммы семи других слагаемых. Это означает, что три слагаемых сравнительно большие, а семь — сравнительно маленькие. Все слагаемые равны 2, 3 или 4. ◄

Решение. Пусть первые три мельницы потеряли $2x$ крыльев, тогда остальные семь потеряли $3x$ крыльев, причём число x натуральное.

Так как мельниц всего десять, то из условия «мельниц, ставших однокрылыми, больше, чем мельниц, ставших двукрылыми» следует, что два крыла могли потерять не более четырёх мельниц, а остальные потеряли больше. В таком случае $3x \geqslant 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 17$. Так как x — натуральное число, то $x \geqslant 6$, а $2x \geqslant 12$. Но $2x$ крыльев потеряли 3 мельницы, поэтому $2x \leqslant 12$. Значит, $x = 6$, каждая из первых трёх мельниц потеряла по 4 крыла, а остальные семь, вместе взятые, — 18 крыльев. Как можно составить сумму 18 из семи слагаемых, равных 2, 3 или 4, среди которых двоек меньше, чем троек? Для начала запишем на счёт каждой из семи мельниц по 2 крыла. Осталось распределить ещё $18-14=4$ потерянных крыла. Разбить 4 на слагаемые 1 или 2 можно тремя способами: $4=1+1+1+1=1+1+2=2+2$. Им соответствуют разбиения

$$18=2+2+2+3+3+3+3=2+2+2+2+3+3+4=$$
$$=2+2+2+2+2+4+4.$$

В двух последних случаях мельниц, потерявших два крыла, окажется больше, чем потерявших три крыла, что противоречит условию. Поэтому среди семи остальных мельниц потерявших все четыре крыла нет.

12.7. Ответ: каждый слон весит 5 тонн.

► **Путь к решению.** Одна возможность сразу понятна: все слоны весят по 5 тонн. Попробуем подобрать другой пример. Например, у первого слева слона по сравнению с 5 тоннами будет избыток веса 1 кг. Тогда у его правого соседа должен быть недостаток веса 0,5 кг. Так не годится, все слоны весят целое число килограммов. Вот если бы у первого был избыток веса 2 кг, то у второго — недостаток 1 кг, и всё бы хорошо, но как быть с третьим слоном? ◄

Решение. Занумеруем слонов слева направо числами от 1 до 15. Обозначим вес слона с номером i через $5000+x_i$ кг ($i=1, \ldots, 15$). Тогда

$$(5000+x_i)+2(5000+x_{i+1})=15\,000,$$

т. е. $x_i=-2x_{i+1}$. Значит, $x_1=-2x_2=2^2x_3=-2^3x_4=\ldots=2^{14}x_{15}$. Если $x_{15}>0$, то $x_{15}\geqslant 1$, $x_1\geqslant 2^{14}=16\,384$ и вес первого слона превышает 15 тонн. Аналогичным образом приходим к противоречию при $x_{15}<0$. Значит, $x_{15}=0$, тогда $x_1=x_2=\ldots=x_{15}=0$, т. е. вес каждого слона равен 5 т.

12.8. Ответ: 0 или 12.

► **Путь к решению.** Можно ли записать условие в виде ребуса:

$$\begin{array}{r} x \text{ ч } y \text{ мин} \\ +\; z \text{ ч } x \text{ мин} \\ \hline y \text{ ч } z \text{ мин?} \end{array}$$

Это не вполне корректно: поезд мог идти и больше суток. Если про это не забыть, такая запись удобна и помогает не запутаться в трёх переменных. ◄

Решение. Заметим, что $x + y < 24 + 24 < 60$, поэтому число минут времени прибытия $z = x + y$. Число часов y времени прибытия отличается от суммы $x + z = 2x + y$ на число, кратное 24 (количество часов в сутках). Отсюда ясно, что x кратно 12, а так как $x < 24$, то либо $x = 0$, либо $x = 12$.

Оба значения возможны: например, поезд отходит в 0:15, находится в пути 15 часов и прибывает в 15:15 или отходит в 12:15, находится в пути 27 часов 12 минут и прибывает в 15:27.

12.9. Ответ: в каждом подъезде по 66 квартир.

Решение. Пусть в каждом подъезде x квартир, а однозначный номер стоит s рублей. Поскольку в доме есть трёхзначные номера (они упомянуты) и нет четырёхзначных (они не упомянуты), то $3x$ — трёхзначное число. Число x не однозначное (иначе $3x$ не больше 27) и не трёхзначное (иначе во втором и третьем подъездах номера квартир только трёхзначные), значит, x двузначное. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $2x$ — двузначное число. Тогда во втором подъезде все номера двузначные, поэтому собрано $2xs$ рублей. В третьем подъезде $(99 - 2x)$ двузначных номеров и $3x - 99$ трёхзначных, поэтому в нём собрано $2s(99 - 2x) + 3s(3x - 99)$ рублей. По условию

$$1{,}2 \cdot 2sx = 2s(99 - 2x) + 3s(3x - 99),$$

откуда следует, что $2{,}4x = 5x - 99$, т. е. $x = 990 : 26$ — не целое число.

2. Пусть $2x$ — трёхзначное число. Тогда во втором подъезде $(99 - 2x)$ двузначных и $(3x - 99)$ трёхзначных номеров, а в третьем — x трёхзначных номеров. Следовательно,

$$1{,}2(4x - 99) = 3x,$$

откуда находим $x = 66$.

Проверка показывает, что в этом случае числа $2x$ и $3x$ действительно трёхзначные.

► Отметим, что если допустить, что в первых трёх подъездах могут быть и квартиры, номера которых содержат более трёх цифр, то возможны также ответы $x = 4545$ или $x = 5454$. ◄

12.10. Ответ: 27 частей.

Решение. Пусть k-й участник разбивал тыкву на a_k частей. По условию $a_1 = 3a_{10}$, но $a_1 < a_{10} + a_9$. Отсюда следует, что $a_9 > 2a_{10}$. Будем выписывать наименьшие возможные результаты, начиная с последнего места. Получим такую таблицу.

Место	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Количество частей	1	2	3	4	5	6	7	8	9	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Суммарное количество частей равно

$$(1 + 2 + \ldots + 9) + (19 + 20 + \ldots + 27) = 45 + 207 = 252 < 270,$$

значит, такое возможно.

Пусть $a_1 > 27$. Тогда $a_1 \geqslant 30$, $a_{10} \geqslant 10$, $a_9 \geqslant 21$ и таблица наименьших возможных результатов выглядит так.

Место	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Количество частей	1	2	3	4	5	6	7	8	10	21	22	23	24	25	26	27	28	30

Суммарное количество частей равно

$$(1 + 2 + \ldots + 8) + 10 + (21 + 22 + \ldots + 28) + 30 =$$
$$= 36 + 10 + 196 + 30 = 272 > 270,$$

что противоречит условию.

► Можно также использовать задачи Д62, Д110–Д116. ◄

Дополнительные задачи

Д1. Леший и Баба-яга собирали поганки и мухоморы. Леший набрал на 32 мухомора больше, чем Баба-яга, а всего в его корзине на 13 грибов меньше, чем у Бабы-яги. Кто набрал больше поганок и на сколько?

Д2. В спортивной школе занимается на 48 меньше девочек, чем в музыкальной. А всего учеников в музыкальной школе на 72 больше, чем в спортивной. В какой из школ больше мальчиков и на сколько?

Д3. Соня напекла печенья и пригласила подруг. Если каждая девочка возьмёт по 4 штуки, то ещё восемь останется. А если каждая захочет взять по 6, то четырёх не хватит. Много ли печенья испекла Соня?

Д4. В одной школе число учителей-мужчин составляет $\frac{2}{7}$ от числа учительниц. Какую часть составляют мужчины от числа всех учителей этой школы?

Д5. В лесу $\frac{1}{5}$ часть деревьев хвойные, а остальные — лиственные. Во сколько раз лиственных деревьев больше, чем хвойных?

Д6. Карлсон съел вчетверо больше плюшек, чем Малыш, после чего блюдо опустело. Сколько процентов плюшек досталось Малышу?

Д7. Число мальчиков в школьном хоре составляет 25% от числа девочек. Какой процент составляет в этом хоре число девочек от числа мальчиков?

Д8. Художник раскрашивает партию матрёшек. После очередного рабочего дня количество раскрашенных матрёшек увеличилось на 20%, а количество нераскрашенных на 25% уменьшилось. Какая часть матрёшек теперь раскрашена?

Д9. Остап Бендер и Киса Воробьянинов разделили между собой выручку от продажи слонов населению. Остап подумал: если бы я взял денег на 40% больше, то Кисе досталось бы на 60% меньше, чем сейчас. А на сколько процентов меньше получил бы денег Киса, если бы Остап взял себе денег на 50% больше?

Д10. Дядя Фёдор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин совместно съели торт. Фёдор съел в два раза меньше, чем Печкин, а Матроскин съел в два раза меньше, чем та часть торта, которую не съел Печкин. Какую часть торта съел почтальон Печкин, если Шарик съел десятую часть торта?

Д11. Бабка, Внучка, Жучка, Кошка и Мышка съели у Деда на огороде всю репку. Жучка съела треть того, что съела Внучка, Кошка — вдвое меньше Жучки, Мышка — вдвое меньше Кошки, а Бабка — половину того, что не съела Внучка. Какую часть всей репы съела Внучка?

Д12. Четверо товарищей купили вместе лодку. Первый внёс половину суммы, внесённой остальными, второй — третью часть суммы, внесённой остальными, третий — четверть суммы, внесённой остальными, а четвёртый внёс 130 рублей. Сколько стоит лодка?

Д13. Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, то общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Д14. Три пирата делили мешок монет. Первый забрал $\frac{3}{7}$ всех монет, второй — 51% остатка, после чего третьему осталось на 8 монет меньше, чем получил второй. Сколько монет было в мешке?

Д15. На заводе 40% всех станков заменили новыми, производительность которых больше на 60%. На сколько процентов повысился выпуск продукции на заводе?

Д16. Профессор Флитвик научил студентов заклинанию «Ауджере N», мгновенно увеличивающему нужный объект на N%. В конце занятия он материализовал перед Гарри и Гермионой двух совершенно одинаковых маленьких дракончиков. Гарри произнёс своему дракончику «Ауджере-1», потом «Ауджере-2», потом «Ауджере-3» и так далее до «Ауджере-13». Гермиона для своего дракончика произнесла те же самые заклинания, но в обратном порядке. Чей дракончик стал в итоге больше?

Д17. За день пребывания в Летней Волшебной Школе знаний прибавляется на столько процентов, какое сегодня число.

Например, за 30 июня знаний станет на 30% больше, а за 1 июля — только на 1% больше. Незнайка учился в ЛВШ с 10 по 20 июня включительно, а Знайка — с 11 по 21 июня. У кого теперь больше знаний и на сколько процентов, если до ЛВШ их знания были одинаковыми?

Д18. В воскресенье доллар и франк стоили одинаково. В понедельник доллар упал на 1%, а франк поднялся на 1%. Во вторник доллар вырос на 1%, а франк вырос на 4%. В среду доллар вырос на 4%, а франк — на 7%. В четверг доллар вырос на 7%, а франк — на 10%. На сколько процентов доллар стал дешевле франка вечером в четверг?

Д19. За первый год население некоторой деревни возросло на n человек, а за второй — на 300 человек. При этом за первый год население увеличилось на 300%, а за второй — на n%. Сколько жителей стало в деревне?

Д20. Число 51,2 трижды увеличили на одно и то же число процентов, а потом трижды уменьшили на то же самое число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали число?

Д21. На перемене несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли в него. В результате количество учеников в лицее после перемены уменьшилось на 10%, а доля мальчиков среди учеников лицея увеличилась с 50% до 55%. Увеличилось или уменьшилось количество мальчиков?

Д22. Вася положил некую сумму в рублях в банк под 20% годовых. Петя взял другую сумму в рублях, перевёл её в доллары и положил в банк под 10% годовых. За год цена одного доллара в рублях увеличилась на 9,5%. Когда через год Петя перевёл свой вклад в рубли, то оказалось, что за год Вася и Петя получили одинаковую прибыль. У кого первоначально была сумма больше — у Васи или у Пети?

Д23. Платье стоило на 60% дороже блузки. На платье объявили 60-процентную скидку, а на блузку — 20-процентную. Что после скидки стало дороже и на сколько процентов?

Д24. Катя запостила двух котиков. Первый из них собрал на 40% больше лайков. На сколько процентов меньше лайков собрал второй котик? Ответ округлите до целого числа процентов.

Д25. Пончик на 150% тяжелее Незнайки и на 25% тяжелее Сиропчика. На сколько процентов Сиропчик тяжелее Незнайки? На сколько процентов Незнайка легче Сиропчика?

Д26. В строительство дома Нуф-Нуф инвестировал на 20% меньше желудей, чем Ниф-Ниф, и вдвое меньше, чем Наф-Наф. Кто инвестировал больше желудей в строительство: Ниф-Ниф или Наф-Наф — и на сколько процентов?

Д27. Берёза на 40% ниже сосны, но на 50% выше дуба. На сколько процентов дуб ниже сосны?

Д28. В автопарке кондукторов работает на 700% больше, чем контролёров, но на 50% меньше, чем водителей. На сколько процентов:

а) контролёров меньше, чем кондукторов;

б) водителей больше, чем кондукторов;

в) водителей больше, чем контролёров;

г) контролёров меньше, чем водителей?

Д29. На птичьем дворе хозяйка рассыпала пшено. Цыплята с утятами склевали бы его за 2 часа 24 минуты, цыплята с индюшатами — за 3 часа, а утята с индюшатами — за 4 часа. Через какое время закончится пшено, если цыплята, утята и индюшата возьмутся за него все вместе?

Д30. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготовляют творог жирностью 15,5%, и при этом получается сыворотка жирностью 0,5%. Сколько творога получается из одной тонны такого молока?

Д31. а) Производительность труда рабочего повысилась на 25%. На сколько процентов меньше времени теперь ему требуется для выполнения того же объёма работы?

б) Узнав о достижениях рабочего, бригадир понизил расценки на 25%. В какую сторону и на сколько процентов изменился в результате заработок этого рабочего?

Д32. Когда электричество подорожало на 30%, бабушка стала следить, чтобы свет не горел попусту, поэтому траты на электричество выросли только на 4%. На сколько процентов бабушке удалось понизить расход электричества?

Д33. а) При Страшиле Мудром зарплата Железного Дровосека выросла на 15%, а цены на солому понизились на 8%. На сколько процентов больше соломы теперь можно купить на зарплату Дровосека?

б) Потом правил Лев Добрый. Он увеличил среднюю зарплату в 3 раза, после чего цены на солому выросли на 300%. На сколько процентов меньше теперь можно купить соломы на среднюю зарплату?

Д34. У одного фермера в 1,4 раза больше земли под картошкой, чем у другого, но собрал он картошки осенью лишь на 5% больше. На сколько процентов у второго фермера выше урожайность?

Д35. На детский носок бабушка тратит на 70% меньше шерсти, чем на взрослый. А на все детские носки она потратила на 40% меньше шерсти, чем на все взрослые. Каких носков, детских или взрослых, бабушка связала больше и во сколько раз?

Д36. Цена билета в театр была 1800 рублей. После её снижения число зрителей увеличилось на 50%, а выручка выросла на 25%. Найдите новую цену билета.

Д37. В Шоколадной стране 40% населения составляют дети, остальные — взрослые. При этом взрослым достаётся лишь 20% всего имеющегося шоколада, остальной съедают дети. Во сколько раз больше шоколада достаётся в среднем каждому ребёнку в сравнении со взрослым жителем Шоколадной страны?

Д38. Какую часть сотрудников фирмы надо уволить, чтобы при уменьшении фонда заработной платы на 20% повысить среднюю зарплату оставшихся сотрудников на 20%?

Д39. На середине дороги от Васиного дома до школы стоит светофор. В понедельник Вася попал на зелёный сигнал светофора. Во вторник он шёл с той же скоростью, но простоял на светофоре 5 минут, а после этого увеличил скорость вдвое. И в понедельник, и во вторник он потратил на путь от дома до школы одинаковое время. Какое?

Д40. Из города в село выезжает велосипедист, а через час из села в город ему навстречу выезжает мотоциклист, скорость которого втрое больше скорости велосипедиста. Ровно посередине между городом и селом велосипедист и мотоциклист встретились. Сколько времени в пути провёл велосипедист до встречи?

Д41. Чебурашка, проезжая на трамвае, заметил Крокодила Гену, который шёл вдоль линии трамвая в противоположную сторону. Через 10 секунд Чебурашка выскочил из трамвая и побежал догонять Гену. Бежал он вдвое быстрее, чем шёл Гена, но в 5 раз медленнее, чем ехал трамвай. За сколько времени он догонит Гену?

Д42. Винни-Пух и Пятачок сели за стол немного подкрепиться и начали одновременно есть мёд из одного горшка, не отвлекаясь на разговоры. Если бы Винни-Пух ел со скоростью Пятачка, то процесс еды длился бы на 4 минуты дольше, а если бы, наоборот, Пятачок ел со скоростью Винни-Пуха — то сократился бы на 1 минуту. За какое время мёд из горшка был полностью съеден?

Д43. Две свечи одинаковой длины, но разных диаметров зажжены одновременно. Одна из них полностью сгорает за 3 часа, вторая — за 5 часов. Горящие свечи трижды фотографировали. Первый раз длины оставшихся частей относились как $2:3$, второй раз — как $1:2$, третий раз — как $1:3$. Когда производилось фотографирование?

Д44. Два джентльмена прогуливаются по бульвару. Они одновременно начинают прогулку в одном из концов и идут каждый со своей постоянной скоростью. Дойдя до конца бульвара, джентльмен мгновенно разворачивается и с той же скоростью идёт обратно. Встретившись в третий раз, джентльмены заметили, что друг друга они не обгоняли, а расстояние от третьей точки встречи до каждой из двух первых равно 200 м. Сколько пройдёт каждый из джентльменов до следующей встречи?

Д45. Пончик закусывал в придорожном кафе, когда мимо него проехал автобус. Через три плюшки после автобуса мимо Пончика проехал мотоцикл, а ещё через три плюшки — автомобиль. Мимо Сиропчика, который закусывал в другом кафе у той же дороги, они проехали в другом порядке: сначала — автобус, через три плюшки — автомобиль, а ещё через три плюшки — мотоцикл. Известно, что Пончик и Сиропчик всегда едят плюшки с одной и той же постоянной скоростью. Найдите скорость автобуса, если скорость автомобиля — 60 км/ч, а скорость мотоцикла — 30 км/ч.

Д46. Из пункта A в пункт B одновременно по двум разным дорогам выезжают два автомобиля. Если первый поедет с постоянной скоростью v, то второй должен ехать со скоростью, на 25 км/ч большей, чтобы одновременно с первым приехать в B. Если же второй поедет с постоянной скоростью v, то первый должен ехать со скоростью, на 20 км/ч меньшей, чтобы приехать в B одновременно со вторым. Найдите, чему равна скорость v.

Д47. Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шёл с постоянной скоростью. Один шёл из пункта A в пункт B, другой – из пункта B в пункт A. Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один – в B в 4 часа вечера, а другой – в A в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?

Д48. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Двигаясь без остановок с постоянной скоростью, они встретились через 30 часов после выхода. Сколько времени затратил на прохождение пути AB каждый поезд, если известно, что первый прибыл в B на 25 часов позже, чем второй прибыл в A?

Д49. Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу, один из пункта A в пункт B, другой из пункта B в пункт A. Каждый шёл с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в 12 км от B, второй раз – в 6 км от A через 6 часов после первой встречи. Найдите расстояние между A и B и скорости обоих туристов.

Д50. Из Златоуста в Миасс выехали одновременно ГАЗ, МАЗ и КамАЗ. КамАЗ, доехав до Миасса, сразу повернул назад и встретил МАЗ в 18 км, а ГАЗ – в 25 км от Миасса. МАЗ, доехав до Миасса, также сразу повернул назад и встретил ГАЗ в 8 км от Миасса. Каково расстояние от Златоуста до Миасса?

Д51. Из города в одном направлении выехало три автомобиля: второй – через 10 минут после первого, третий – через 20 минут после второго. Через 30 минут после своего выезда третий автомобиль догнал второй, а ещё через 10 минут – первый. Через сколько минут после своего выезда из города второй автомобиль догнал первый?

Д52. Расстояние между елкой и сосной 80 метров. Ровно посередине между ними растет береза, а ровно посередине между березой и сосной – липа. Зайчик встал у елки, ёжик –

у сосны, а затем они одновременно побежали навстречу друг другу и встретились у куста с малиной. На следующий день они опять решили пробежаться навстречу друг другу, только теперь зайчик начал у липы, а ёжик — у березы. И они встретились у того же самого куста с малиной, что и вчера. На каком расстоянии от сосны находится этот куст? (Скорости зайчика и ёжика постоянны.)

Д53. Маша вышла из дома, а через некоторое время оттуда же вышел Миша, который ещё через какое-то время догнал Машу. Если бы Миша шёл со скоростью, в два раза большей, то он догнал бы Машу в три раза быстрее. Во сколько раз быстрее он бы догнал Машу, если бы он шёл со скоростью, в два раза большей, чем в первый раз, а Маша — со скоростью, в два раза меньшей?

Д54. На лужайке жёлтых одуванчиков было вдвое больше, чем белых. Когда три жёлтых одуванчика побелели, а два белых облетели, жёлтых стало на 6 больше, чем белых. Сколько одуванчиков росло на лужайке?

Д55. Нам с братом вместе 35 лет. Если бы я был в 2 раза старше, чем восемь лет назад, то мне было бы столько лет, сколько моему брату шесть лет назад. Сколько лет мне и сколько моему брату?

Д56. В классе за каждой партой сидят двое учеников. Парт, за которыми сидят двое мальчиков, в два раза больше, чем парт, за которыми сидят две девочки. А парт, за которыми сидят две девочки, вдвое больше, чем парт, за которыми сидят мальчик и девочка. Сколько в этом классе мальчиков, если девочек — 10?

Д57. Антон, Вася, Саша и Дима ехали на машине из города A в город B, каждый из них по очереди был за рулём, но скорость движения была одна и та же. Антон вёл машину в два раза меньше, чем Вася, а Саша вёл машину столько же, сколько Антон и Дима, вместе взятые. Дима был за рулём лишь десятую часть пути. Какую часть пути за рулём был Вася?

Д58. Трое пиратов делили клад. Первому досталась треть от общего количества монет и ещё 1 монета, второму досталась четверть от общего количества монет и ещё 5 монет, третьему досталась пятая часть от общего количества монет и ещё 20 монет. Сколько монет было в кладе?

Д59. У лифта на первом этаже большого дома встретились пятеро друзей. Женя сказал: «Если считать отсюда, то я живу в два раза выше Вовы, в три раза выше Пети, в четыре раза выше Андрея и в шесть раз выше Тани. «Ты это здорово подметил, — отозвался Андрей, — а ты, Петя, поменьше стучи гантелями у меня над головой». На каком этаже живёт Андрей?

Д60. Петя ехал из Петрова в Николаево, а Коля — наоборот. Они встретились, когда Петя проехал 10 км и ещё четверть оставшегося ему до Николаева пути, а Коля проехал 20 км и треть оставшегося ему до Петрова пути. Какое расстояние между Петрово и Николаево?

Д61. По кольцевой дороге бегают Никита и Егор, стартовавшие из одного места в противоположные стороны. Известно, что Никита пробегает круг на 12 секунд быстрее, чем Егор, но всё равно тратит на это больше 30 секунд. Оказалось, что в седьмой раз после старта они встретились в том же месте, откуда начали. За какое время каждый из них пробегает круг?

Д62. В школьной олимпиаде по математике участвовало 100 человек, по физике — 50, по информатике — 48. Ровно в двух олимпиадах участвовало вдвое меньше учеников, чем в одной, а в трёх — втрое меньше, чем в одной. Сколько учеников участвовало хотя бы в одной олимпиаде?

Д63. Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 7, 12 и 15 скамеек. А когда поезд отъезжал, один из математиков насчитал скамеек в три раза больше, чем другой. А сколько скамеек насчитал третий?

Д64. Коля не очень любит вишню, а Оля эту кислятину вообще терпеть не может. Но мама дала Оле и Коле по тарелке очень полезной вишни. Сначала Коля со своей тарелки треть вишен съел, а треть переложил на Олину тарелку. Потом Оля переложила половину оказавшихся у неё вишен Коле. Коля снова съел треть оказавшихся у него вишен, а треть переложил Оле. А Оля опять переложила Коле половину своих вишен. В результате на Колиной тарелке вишен стало столько, сколько в самом начале мама дала Оле. Сколько вишен теперь у Оли, если всего мама дала детям 60 вишен?

Д65. После утренней пробежки Карлсон худеет на килограмм, а к вечеру (после поедания плюшек) его вес увеличивается на треть. К вечеру третьего дня (после того, как он начал бегать) Карлсон обнаружил, что поправился вдвое. Сколько он весил до того, как начал заниматься спортом?

Д66. В одной школе 143 выпускника собрались поступать в театральный институт, а остальные — в медицинский. Потом 40% будущих медиков передумали и решили пойти в театральный. Потом 40% тех, кто собрался в театральный, передумали и решили пойти в медицинский. В результате в оба института пошло поровну выпускников. По сколько именно?

Д67. Мама попросила купить 4 кг картошки и полкило печенья. Сын перепутал и купил вместо этого 4 кг печенья и полкило картошки. Вышло даже вдвое дешевле, чем рассчитывала мама. Что дороже, картошка или печенье, и во сколько раз?

Д68. Четыре козы и три овцы съедают за пять дней столько же сена, сколько три козы и пять овец за четыре дня. Кто съедает за день больше сена, коза или овца, и во сколько раз?

Д69. В тесте к каждому вопросу указано 5 вариантов ответа. Когда двоечнику удаётся списать, он отвечает верно, в противном случае — наугад (т.е. среди несписанных ответов — пятая часть верных). За год двоечник верно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

Д70. Пётр Петрович и Иван Иванович ехали вместе в поезде. Каждый из них сначала смотрел в окно, потом читал газету, потом разгадывал кроссворд и под конец пил чай. Только у Петра Петровича на каждое следующее занятие уходило вдвое больше времени, чем на предыдущее, а у Ивана Ивановича — в 4 раза больше. Начали смотреть в окно они одновременно и кончили пить чай также одновременно. Что делал Пётр Петрович, когда Иван Иванович приступил к кроссворду?

Д71. Некто гулял 5 часов — сначала он шёл по горизонтальной дороге, затем поднялся в гору и наконец по старому маршруту возвратился в исходный пункт. Скорость гуляющего была 4 км/ч на горизонтальном участке, 3 км/ч — при подъёме и 6 км/ч — при спуске. Найдите пройденное расстояние.

Д72. Длину прямоугольника уменьшили на 10%, а ширину уменьшили на 20%. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 12 %. На сколько процентов уменьшился бы периметр исходного прямоугольника, если бы его длину уменьшили на 20 %, а ширину уменьшили на 10 %?

Д73. Электричка Москва—Петушки проходит начальный путь — от Курского вокзала до Дрезны — втрое дольше, чем от Леоново до Петушков. При этом на путь от Дрезны до Петушков у неё уходит в два раза меньше времени, чем от Курского вокзала до Леоново. Во сколько раз время пути от Курского вокзала до Петушков больше, чем от Дрезны до Леоново?

Д74. Петя отправился пешком из лагеря в посёлок. В 12:00, когда Петя был в a км от лагеря, его нагнал велосипедист, посадил и подвёз, высадив в a км от посёлка. После этого Петя пришёл в посёлок в 14:00. Сколько времени потребуется Пете на обратный путь пешком из посёлка в лагерь, если известно, что на велосипеде его везли со скоростью, вдвое большей, чем он ходит пешком?

Д75. Если первый маляр будет работать 5 часов, второй — 6 часов, а третий — 8 часов, то они полностью покрасят забор. Если же первый маляр будет работать 4 часа, второй — 5 часов, а третий — 7 часов, то они покрасят только 85 % забора. Сколько времени потребуется малярам, чтобы покрасить весь забор, если они будут работать все вместе одинаковое время?

Д76. Тридцать школьников сдавали тест по математике. Средний балл тех, кто успешно прошёл тестирование, — 84 балла, а тех, кто провалил испытания, — 60 баллов. Средний балл всех сдающих составил 80 баллов. Сколько всего испытуемых успешно прошли тестирование?

Д77. Три пирата вечером поделили добытые за день бриллианты: по двенадцать Биллу и Сэму, а остальные — Джону, который считать не умел. Ночью Билл у Сэма, Сэм у Джона, а Джон у Билла украли по одному бриллианту. В результате средняя масса бриллиантов у Билла уменьшилась на один карат, у Сэма уменьшилась на два карата, зато у Джона увеличилась на четыре карата. Сколько бриллиантов досталось Джону?

Д78. Теплоход, не меняя собственной скорости, проплыл от пристани A до пристани B вниз по течению за 5 ч, а обратно, против течения, за 6 ч. За какое время от A до B доплывёт плот?

Д79. Корабль идёт вниз по течению из пункта A в пункт B 2 часа, а такое же расстояние по озеру из B в C он идёт 3 часа. За сколько времени от A до B доплывёт плот?

Д80. Три стада одинаковых быков пригнали на луга, покрытые травой одинаковой густоты, высоты и скорости роста. Первый луг площадью $3\frac{1}{3}$ га прокормил первое стадо из 12 быков на протяжении 4 недель; второй — площадью 10 га — второе стадо из 21 быка в течение 9 недель, третий луг площадью 24 га прокормил третье стадо в течение 18 недель. Сколько быков было в третьем стаде?

Д81. В воскресенье Ваня прошёл по неподвижному эскалатору и насчитал 36 ступенек. В понедельник этот же эскалатор двигался вниз, и Ваня спустился по движущемуся эскалатору и сосчитал ступеньки. Во вторник эскалатор по-прежнему двигался вниз, но Ваня с той же скоростью поднялся но нему и вновь сосчитал ступеньки. Известно, что собственная скорость мальчика всегда в 1,4 раза больше скорости движущегося эскалатора. Сколько ступенек он насчитал в понедельник и во вторник?

Д82. Колонна бегущих спортсменов, имеющая длину L, движется с постоянной скоростью по обочине шоссе. Машина с тренером обгоняет колонну, двигаясь с втрое большей скоростью. Каждый спортсмен, с которым поравнялась машина, разворачивается и бежит в обратном направлении с прежней скоростью. Какой будет длина колонны, когда развернётся последний спортсмен?

Д83. Ноздрёв ловким движением спрятал шашку Чичикова за обшлаг рукава. В результате чёрных шашек на доске оказалось в 4 раза больше, чем было белых шашек за несколько ходов до этого. Сколько всего шашек осталось на доске после похищения, если непосредственно перед ним чёрных шашек было в 5 раз больше, чем белых? (*В начале игры у каждого из игроков по* 12 *шашек.*)

Д84. На уроке физкультуры весь класс выстроили по росту в порядке его убывания (рост у всех различный). Дима заметил, что тех, кто выше него, ровно в 4 раза больше, чем тех, кто его ниже, а Лена заметила, что стоящих впереди неё в 3 раза меньше, чем стоящих позади. Сколько учеников в классе, если их не больше тридцати?

Д85. В трамвае ехало 60 человек: контролёры, кондукторы, лжекондукторы (граждане, выдававшие себя за кондукторов), лжеконтролёры (граждане, выдававшие себя за контролёров) и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжеконтролёров и лжекондукторов в 4 раза меньше числа настоящих кондукторов и контролёров. Общее число контролёров и лжеконтролёров в 7 раз больше общего числа кондукторов и лжекондукторов. Сколько в трамвае обычных пассажиров?

Д86. Три мужа – Андрей, Иван и Степан – пошли со своими жёнами – Анной, Екатериной и Ольгой – за покупками. Каждый платил за каждую вещь по столько рублей, сколько он купил вещей. Андрей купил на 23 вещи больше Анны, Иван – на 11 вещей больше Екатерины, а Степан – на 23 вещи меньше Ольги. Определите, кто на ком женат, если каждый из мужей потратил на 63 рубля больше, чем его жена.

Д87. Вифсла, Тофсла и Хемуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. После каждого попавшего в него снежка Вифсла бросал 6 новых снежков, Хемуль – 5, а Тофсла – 4. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. (*В себя самого снежками не кидаются, и один снежок не может попасть в двоих.*)

Д88. На доске была записана правильная несократимая дробь. Переписывая её в тетрадь, Петя прибавил единицу к числителю дроби (сохранив знаменатель), а Вася уменьшил её знаменатель на величину числителя, а числитель оставил прежним. В результате у мальчиков получились равные дроби. Какая дробь была на доске?

Д89. В первый день Маша собрала на 25% грибов меньше, чем Вася, а во второй день – на 20% больше, чем Вася. За два дня Маша собрала грибов на 10% больше, чем Вася. Какое наименьшее количество грибов они могли собрать вместе?

Д90. Отец говорит сыну:

– Сегодня у нас у обоих день рождения, и ты стал ровно в 2 раза моложе меня.

– Да, и это восьмой раз за мою жизнь, когда я моложе тебя в целое число раз.

Сколько лет сыну, если отец не старше 75 лет?

Д91. Балда договорился с попом отработать на него ровно год и расплатиться щелчками по лбу. Балда предложил, чтобы за каждый отработанный день ему добавлялся один щелчок, а за каждый прогул вычиталось 10 щелчков. Поп же настаивал на более хитром (по его мнению) варианте: за отработанный день начисляется 12 щелчков, а за пропущенный вычитается аж 121 щелчок. По окончании срока выяснилось, что в обоих случаях поп должен получить от Балды одно и то же количество щелчков. Сколько именно?

Д92. Бригада из нескольких рабочих за 7 полных дней может выполнить такое же задание, какое может выполнить эта же бригада без двух человек за несколько полных дней, и такое же, как без шести человек за несколько полных дней. Сколько рабочих в бригаде? (*Производительность рабочих одинаковая.*)

Д93. В одном стакане было 100 мл раствора кислоты, причём доля кислоты (по объёму) составляла 40%, а в другом — 150 мл с долей кислоты 50%. Ложку раствора из первого стакана перелили во второй и после перемешивания такую же ложку перелили из второго в стакана в первый. В результате доля кислоты в каждом из стаканов по-прежнему выражалась целым числом процентов.

а) Найдите доли кислоты в стаканах после переливаний.

б) Найдите вместимость ложки (*объём ложки меньше объёма стакана*).

Д94. Учитель написал на доске число. Саша решил поделить его с остатком на 102, а Маша — на 103. Оказалось, что частное, полученное Сашей, и остаток, полученный Машей, в сумме дают 20. Какой остаток получил Саша?

Д95. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принёс с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста — король и герцог — были с ног до головы закиданы припасами, причём на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но *все* дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

Д96. В классе провели контрольную работу. Оказалось, что средняя оценка у мальчиков — 4, у девочек — 3,25, а у всего класса — 3,6. Сколько мальчиков и сколько девочек писало работу, если известно, что в классе больше 30 человек, но меньше 50?

Д97. Рассеянный Вовочка при сложении двух натуральных чисел по ошибке приписал ноль на конце первого слагаемого и вместо числа 2006 получил число 4157. Какие числа складывал Вовочка?

Д98. У юного художника была одна банка синей и одна банка жёлтой краски, каждой из которых хватает на покраску 38 дм^2 площади. Использовав всю эту краску, он нарисовал картину: синее небо, зелёную траву и жёлтое солнце. Зелёный цвет он получал, смешивая две части жёлтой краски и одну часть синей. Какая площадь на его картине закрашена каждым цветом, если площадь травы на картине на 6 дм^2 больше, чем площадь неба?

Д99. В классе учатся 30 человек: отличники, троечники и двоечники. Отличники на все вопросы отвечают правильно, двоечники всегда ошибаются, а троечники на заданные им вопросы строго по очереди то отвечают верно, то ошибаются. Всем ученикам было последовательно задано по три вопроса: «Ты отличник?», «Ты троечник?», «Ты двоечник?». Ответили «Да» на первый вопрос — 19 учащихся, на второй — 12, на третий — 9. Сколько троечников учится в этом классе?

Д100. Двое рабочих за 2 часа вырыли траншею. После этого первый устал и начал работать втрое медленнее, а второй, наоборот, раззадорился и стал работать втрое быстрее. В итоге вторую такую траншею они выкопали за час. Во сколько раз производительность второго рабочего была больше производительности первого изначально?

Д101. Андрей вышел из пункта A в 10:18 и, двигаясь с постоянной скоростью, пришёл в пункт B в 13:30. В тот же день Борис вышел из B в 9:00 и, идя по той же дороге с постоянной скоростью, пришёл в A в 11:40. Дорога пересекает реку. Андрей и Борис одновременно подошли к мосту через эту реку, каждый со своей стороны. Андрей ушёл с моста на одну минуту позже Бориса. Когда они подошли к мосту?

Д102. Если бы Александр Македонский прожил на 5 лет меньше, то он бы правил четверть своей жизни, а если бы он прожил на 9 лет больше, то правил бы полжизни. Сколько лет он прожил? (*Как и прочие цари, Александр правил пожизненно.*)

Д103. Сейчас всем членам одной семьи, состоящей из мужа, жены, дочери и сына, 73 года. Известно, что муж старше жены на 3 года, дочь старше сына на 2 года. Четыре года назад всем членам семьи в сумме было 58 лет. Сколько лет сейчас каждому?

Д104. Четыре кота — Васька, Пушок, Базилио и Леопольд — охотились на мышей. Пушок с Леопольдом поймали вместе столько же мышей, сколько Базилио с Васькой. Васька поймал мышей больше, чем Базилио, но Васька с Леопольдом поймали мышей меньше, чем Пушок с Базилио. Сколько мышей поймал каждый кот, если Пушок поймал 3 мыши?

Д105. Вася получил за четверть десять оценок по математике, и его средний балл равен 2,3. Учителя попросили «дорисовать» в журнал несколько троек и поставить за четверть 3. Какое наименьшее количество троек придётся дорисовать, чтобы средний балл оказался не менее 2,5?

Д106. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

Д107. Смуглянка собрала целое число килограммов винограда и ровно четверть винограда отдала парню. Тот разложил его по килограммовым пакетам (получилось не менее одного), а остаток съел. Если бы парень получил треть винограда, то количество пакетов с виноградом осталось бы прежним. Сколько винограда собрала смуглянка?

Д108. В школе прошла контрольная работа. Оказалось, что средний балл тех, кто получил «3» или «5», меньше, чем средний балл тех, кто получил «2» или «4». Верно ли, что средний балл тех, кто получил «4» или «5», превышает средний балл тех, кто получил «2» или «3», меньше чем на 2?

Д109. Огромный пирог разделили между сотней гостей. Первый гость получил 1% целого пирога, второй — 2% того, что осталось, третий — 3% того, что осталось после первых двух гостей, и т. д. Последний гость получил 100% того, что осталось после 99-го гостя. Чей кусок пирога оказался самым большим?

Д110. По реке от пристани A до пристани B туристы проплыли на моторной лодке, а обратно вернулись на катере, который быстрее лодки. Известно, что время путешествия не изменилось бы, если бы скорость течения реки была на 1 км/ч больше, чем есть. Какая из пристаней расположена выше по течению: A или B?

Д111. Каждый цветок на поляне цветёт ровно 30 дней. Известно, что каждый день пять цветков увядают, а взамен распускаются пять новых. Сколько цветущих цветков на поляне?

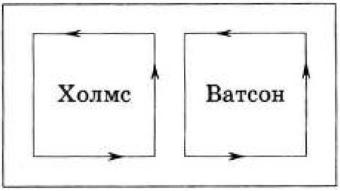
Д112. Три землекопа, работая одновременно, выкопали за час 0,7 траншеи. Известно, что землекопы работают с разной скоростью, причём каждый из них может выкопать такую траншею за целое число часов, но меньше чем за сутки. За какое время выкопает траншею каждый из них?

Д113. В мешке лежит 26 долларовых купюр номиналом 1, 2 и 5 долларов. Известно, что если вы будете вытаскивать купюры по одной, не глядя, то, вытянув 20 купюр, вы вытащите как минимум одну однодолларовую купюру, две двухдолларовые и пять — по пять долларов. Сколько денег в мешке?

Д114. Электронные часы показывают время от 00:00 до 23:59. Найдите все такие показания часов, когда количество минут, прошедших с полуночи, ровно в 100 раз больше суммы цифр на часах.

Д115. Верёвочку сложили пополам, потом ещё раз пополам, потом снова пополам, а затем все слои верёвочки разрезали в каком-то месте. Какова могла быть длина верёвочки, если известно, что какие-то два из полученных кусков имели длины 9 метров и 4 метра?

Д116. Дорожки парка идут по периметрам двух квадратных газонов с одной общей стороной — дорожкой. По дорожкам гуляют с постоянными скоростями Холмс и Ватсон; каждый обходит свой газон против часовой стрелки (см. рисунок). Скорость Холмса на 20% больше скорости Ватсона. Время от времени джентльмены встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий — через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в четвёртый раз?



Ответы, решения, комментарии

Д1. Ответ: Баба-яга набрала на 45 поганок больше (см. рис. 1).

Рис. 1

► Сравните с задачей 1.5. ◄

Д2. Ответ: в музыкальной больше на 24 (см. рис. 2).

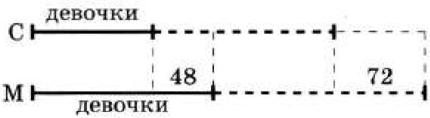


Рис. 2

► Сравните с задачей 1.1. ◄

Д3. Ответ: 32.

Решение. По рис. 3 на координатном луче заметим, что если каждая девочка возьмёт на 2 печенья больше, то разница составит $8+4=12$ печений. Значит, девочек было $12:2=6$, а Соня испекла $6\cdot 4+8=32$ печенья.

Рис. 3

► Тот же результат можно получить из уравнения $4Д+8=$ $=6Д-4$. ◄

Д4. Ответ: $\frac{2}{9}$ (см. рис. 4).

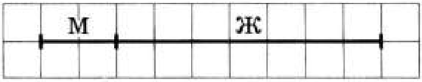


Рис. 4

Д5. Ответ: в 4 раза (см. рис. 5).

Рис. 5

Д6. Ответ: 20 % (см. рис. 6).

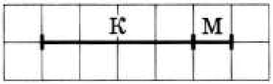


Рис. 6

Д7. Ответ: 400 %.

Решение. Из условия следует, что мальчиков в 4 раза меньше, чем девочек (см. рис. 7). Поэтому если число мальчиков принять за 100 %, то число девочек составит 400 %.

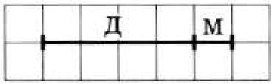


Рис. 7

Д8. Ответ: $\frac{2}{3}$.

Решение 1. Раскрашенных матрёшек стало на 20 %, т. е. на $\frac{1}{5}$, больше. Поэтому удобно изобразить раскрашенные матрёшки в виде отрезка из 5 клеточек, к которым добавилась шестая (см. рис. 8). Эта же клеточка соответствует четверти матрёшек, которые *были* не раскрашены. Это значит, что нераскрашенным матрёшкам сначала соответствовали 4 клеточки, а потом 3. Все матрёшки изображаются $5 + 4 = 9$ клеточками, раскрашенных стало $5 + 1 = 6$ клеточек, т. е. $\frac{2}{3}$.

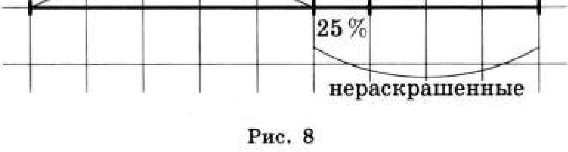


Рис. 8

Решение 2. Пусть вначале было x раскрашенных матрёшек и y нераскрашенных. За день художник раскрасил

$0{,}2x = 0{,}25y$ матрёшек. Следовательно, $y = 0{,}8x$, а всего матрёшек $x + y = 1{,}8x$. К концу дня раскрашены $1{,}2x$ матрёшек, что составляет $\frac{2}{3}$ всех матрёшек.

Д9. Ответ: на 75%.

Решение 1. Из условия следует, что если бы Остап взял денег на $\frac{2}{5}$ больше, то доля Кисы уменьшилась бы на $\frac{3}{5}$. Отрезок, который будет изображать $\frac{2}{5}$ выручки Остапа и $\frac{3}{5}$ выручки Кисы, удобно взять длиной в 6 клеточек. Тогда всего Остапу досталось 15 клеточек, а Кисе — 10 клеточек (см. два верхних отрезка на рис. 9). Если бы Остап взял на 50% больше, он бы забрал у Кисы 7,5 клеточки из 10, т. е. 75%.

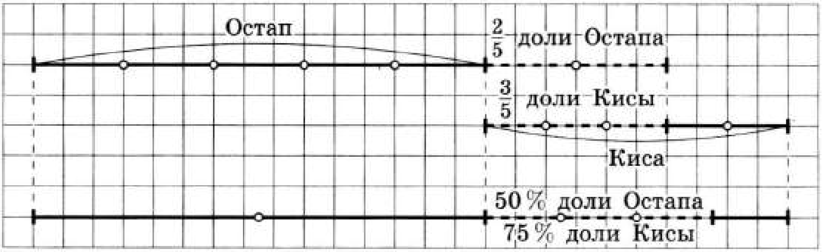


Рис. 9

Решение 2. Пусть Остап взял себе x рублей, а Киса взял себе y рублей, тогда по условию $0{,}4x = 0{,}6y$. Отсюда получим, что $0{,}5x = 0{,}75y$. Следовательно, если бы доля Остапа увеличилась на 50%, то доля Воробьянинова уменьшилась бы на 75%.

Д10. Ответ: 0,4.

Решение 1. Дядя Фёдор и Матроскин вместе съели половину торта (см. рис. 10). Вторую половину съели Шарик и почтальон Печкин. Если Шарику досталась $\frac{1}{10}$ часть торта, то Печкину — $0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$ торта.

Рис. 10

Решение 2. Пусть часть торта, которую съел Печкин, составляет x, тогда Фёдор съел $0{,}5x$ от торта, а Матроскин съел

$0{,}5(1-x)$ от торта. Вместе они съели

$$0{,}5x+0{,}5(1-x)=0{,}5,$$

т. е. половину торта. Так как Шарик съел десятую часть торта, то $x+0{,}1=0{,}5$, т. е. $x=0{,}4$.

Д11. Ответ: $\frac{6}{13}$.

Решение 1. Читая условие, будем последовательно изображать доли персонажей отрезками соответствующей длины. Для делимости на 3, а потом на 2 изобразим долю Внучки в виде 6 клеток (см. рис. 11; разумной альтернативой были бы также 12 клеток). Тогда Жучка «съела» две клетки, Кошка — одну клетку, Мышка — $\frac{1}{2}$ клетки. Бабка съела половину того, что не съела Внучка, т. е. столько же, сколько Жучка, Кошка и Мышка вместе взятые или $2+1+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$ клеточки. Итак, все вместе съели $6+3\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}=13$ клеток, и доля Внучки составляет $\frac{6}{13}$ от всей репы.

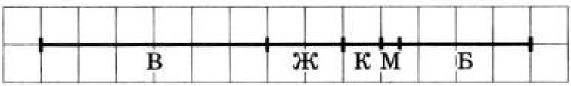


Рис. 11

Решение 2. Пусть Мышка съела x репы (единица измерения любая). Тогда Кошка съела $2x$, Жучка — $4x$, а Внучка — $12x$. Бабка съела столько же, сколько Жучка, Кошка и Мышка вместе взятые, т. е. $x+2x+4x=7x$. Все вместе съели $12x+7x+7x=26x$. Доля Внучки составляет $\frac{12}{26}=\frac{6}{13}$.

► Во втором решении для выбора переменной применяется стандартное соображение: бери за x самое маленькое. ◄

Д12. Ответ: 600 рублей.

Решение. Рассуждая по аналогии с решением задачи 1.4, получим, что первый внёс $\frac{1}{3}$ всей суммы, второй — $\frac{1}{4}$, а третий — $\frac{1}{5}$. Вместе они внесли $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$ всей суммы, поэтому 130 рублей составляют $1-\frac{47}{60}=\frac{13}{60}$ стоимости лодки. Следовательно, лодка стоит $130:13\cdot 60=600$ рублей.

Д13. Ответ: 27 %.

Решение. По рис. 12 видно, что зарплата мужа составляет 67 % дохода семьи. Две трети стипендии дочери — это 4 %, поэтому вся стипендия — 6 %. Значит, на зарплату жены остаётся $100\% - 67\% - 6\% = 27\%$.

Рис. 12

Д14. Ответ: 700 монет.

Решение 1. Пусть в мешке было x монет. Тогда после первого пирата в мешке осталось $\frac{4}{7}x$ монет. Второму пирату досталось $0{,}51 \cdot \frac{4}{7}x$, а третьему — $0{,}49 \cdot \frac{4}{7}x$ монет. Так как второму досталось на 8 монет больше, составим уравнение: $0{,}51 \cdot \frac{4}{7}x - 0{,}49 \cdot \frac{4}{7}x = 8$. Решая его, получим, что $x = 700$.

Решение 2. Второй пират взял 51 % от остатка, а третьему осталось 49 % остатка. Разница в 8 монет соответствует 2 % остатка. Значит, 1 % остатка — это 4 монеты, а весь остаток после первого пирата — 400 монет. Он взял $\frac{3}{7}$ всех монет, а оставил $\frac{4}{7}$ всех монет. Так как $\frac{4}{7}$ всех монет — это 400, то всего было $400 : 4 \cdot 7 = 700$ монет.

Д15. Ответ: на 24 %.

► Про рабочее время ничего не сказано, поэтому считаем, что оно не изменилось. В таком случае выпуск продукции повысился во столько же раз (и на столько же процентов), что и производительность станков. ◄

Решение. Пусть общая производительность всех станков раньше составляла x. После замены она стала равна $0{,}4 \cdot 1{,}6x + 0{,}6x = 1{,}24x$, т. е. увеличилась на 24 %.

Д16. Ответ: дракончики стали одинаковыми.

Решение. Размер (независимо от того, в чём его измерять) одного дракончика умножался последовательно на 1,01, 1,02, 1,03, ..., 1,13. А другого — на те же самые множители, но в обратном порядке. Остаётся вспомнить про переместительный закон умножения.

Д17. Ответ: у Знайки больше на 10%.

Решение. Обозначив исходное количество знаний через x и рассуждая по аналогии с решением задачи 2.2, получим, что отношение знаний Знайки и Незнайки после окончания ЛВШ равно

$$\frac{1{,}11 \cdot 1{,}12 \cdot \ldots \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}21x}{1{,}1 \cdot 1{,}11 \cdot \ldots \cdot 1{,}19 \cdot 1{,}2x} = \frac{1{,}21}{1{,}1} = 1{,}1.$$

Следовательно, знаний теперь больше у Знайки на 10%.

Д18. Ответ: на 10%.

► Рассуждения аналогичны решениям задач 2.3, 2.9, Д17. ◄

Д19. Ответ: 500 жителей.

Решение. Предположим, что сначала в деревне было m жителей. Тогда через год в деревне стало $m+n=4m$ жителей, откуда следует, что $n=3m$. Ещё через год количество жителей увеличилось на $4m \cdot \frac{3m}{100} = 300$ человек. Так как $m>0$, то $m=50$. Таким образом, в деревне стало $4m+300=500$ человек.

Д20. Ответ: на 50%.

Решение. Число 51,2 трижды умножали на одно и то же число x, а потом трижды умножали на другое число y. Порядок действий роли не играет, поэтому можно считать, что его трижды умножали на число $xy=k$. Из уравнения $51{,}2 \cdot k^3 = 21{,}6$ получим, что

$$k^3 = \frac{216}{512} = \frac{6^3}{8^3} = \left(\frac{3}{4}\right)^3,$$

т. е. $k=\frac{3}{4}$. Теперь учтём, что и увеличивали, и уменьшали на одно и то же число процентов p, т. е.

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right) = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, $1-\left(\frac{p}{100}\right)^2 = \frac{3}{4}$, $\frac{p}{100} = \frac{1}{2}$, $p=50$.

Д21. Ответ: количество мальчиков уменьшилось.

Решение. Пусть до начала перемены мальчиков было m человек. Так как это число составляло 50% от общего количества учеников, то всего в лицее было $2m$ школьников. После перемены количество учеников уменьшилось на 10%, т. е. их стало $2m \cdot 0{,}9 = 1{,}8m$ человек. Из них мальчики составляли 55%, т. е. их стало $1{,}8m \cdot 0{,}55 = 0{,}99m$. Так как $m > 0{,}99m$, то количество мальчиков уменьшилось.

Д22. Ответ: у Васи.

► **Путь к решению.** Что такое «цена одного доллара в рублях»? В нашей задаче это коэффициент k из равенства $r = k \cdot d$, где r — количество имеющихся денег, если считать их в рублях, а d — эти же деньги, если считать их в долларах. В жизни всё сложнее: фиксированной цены доллара k не существует, курс покупки любой валюты отличается от курса продажи. Условие задачи становится корректным, если понимать его так: при обмене долларов на рубли через год коэффициент k в равенстве $r = k \cdot d$ стал на $9{,}5\,\%$ больше, чем был аналогичный коэффициент при обмене рублей на доллары год назад. ◄

Решение. Васина сумма денег умножилась на 1,2. Посмотрим, на что умножились Петины деньги. Пусть у Пети было r рублей. На них он сначала купил доллары. Если каждый доллар стоил k рублей, то Петины r рублей превратились в $\frac{r}{k}$ долларов. Их он положил в банк под $10\,\%$ годовых, поэтому через год у него стало

$$1{,}1 \cdot \frac{r}{k} = \frac{1{,}1r}{k} \text{ долларов.}$$

При обратном переводе в рубли каждый доллар стоил уже не k рублей, а на $9{,}5\,\%$ больше, т.е. $1{,}095k$ рублей. Поэтому $\frac{1{,}1r}{k}$ долларов превратились в $\frac{1{,}1r}{k} \cdot 1{,}095k = 1{,}2045r$ рублей, т.е. Петины деньги умножились на 1,2045. Понятно, что $1{,}2045 > 1{,}2$, т.е. Петя вложил деньги выгоднее. Почему же прибыль получилась одинаковой? Потому что исходная сумма была больше у Васи.

Д23. Ответ: блузка дороже платья на $25\,\%$.

► Решение аналогично решениям задач 3.2 и 3.7. ◄

Д24. Ответ: на $29\,\%$.

► Сравните с задачей 3.4. ◄

Д25. Ответ: Сиропчик на $100\,\%$ тяжелее Незнайки, а Незнайка на $50\,\%$ легче Сиропчика.

► См. задачи 3.3 и 3.8. ◄

Д26. Ответ: Наф-Наф больше на $60\,\%$.

Решение. Пусть Ниф-Ниф инвестировал в строительство дома x желудей. Тогда Нуф-Нуф инвестировал $0{,}8x$ жёлудей, а Наф-Наф — $1{,}6x$ жёлудей. Это на $60\,\%$ больше, чем x.

Д27. Ответ: на $60\,\%$.

► См. задачи 3.3 и 3.8. ◄

Д28. Ответ: а) на 87,5%; б) на 100%; в) на 1500%; г) на 93,75%.

Д29. Ответ: 2 часа.

Решение 1. Примем количество всего пшена за 1. Составим таблицу.

	Время, часов	Производительность, доля пшена/час	Количество пшена
Цыплята и утята	$2\frac{2}{5}$	$\frac{5}{12}$	1
Цыплята и индюшата	3	$\frac{1}{3}$	1
Утята и индюшата	4	$\frac{1}{4}$	1

Сложив все три строки, найдём производительность удвоенного количества цыплят, утят и индюшат, она равна $\frac{5}{12}+\frac{1}{3}+$ $+\frac{1}{4}=1$, т. е. они склевали бы всё пшено за час. Если количество птенцов не удваивать, то они за час склюют половину всего пшена. Значит, зерно закончится за 2 часа.

Решение 2. Пусть рассыпано m граммов пшена, а цыплята, утята и индюшата поедают x, y и z граммов в минуту соответственно. Из условия задачи

$$m = 144(x+y) = 180(x+z) = 240(y+z).$$

Тогда

$$x+y=\frac{m}{144}, \quad x+z=\frac{m}{180}, \quad y+z=\frac{m}{240}.$$

Сложив эти равенства почленно и разделив на 2, получим $x+y+z=\frac{m}{120}$, значит,

$$\frac{m}{x+y+z} = m : \frac{m}{120} = 120.$$

Д30. Ответ: 300 кг.

► **Путь к решению.** Что такое жирность? Это концентрация жира в продукте, т. е. отношение массы содержащегося в нём жира к массе всего продукта. Таким образом, для каждого продукта (молока, творога и сыворотки) имеет смысл рассматривать три величины: массу всего продукта (в тоннах), массу жира (тоже в тоннах) и их отношение (безразмерное, так как тонны сокращаются).

И в реальной жизни, и в условиях задач жирность принято указывать в процентах. Как и в других типах задач на проценты, для решения удобнее сразу представить их в виде десятичных дробей. Жирность 5%, 0,5% и 15,5% означает концентрацию жира 0,05, 0,005 и 0,155 соответственно. ◄

Решение. Считая, что молоко состоит из творога и сыворотки (так и есть, если забыть про окисление и нагревание), составим таблицу.

	Всего, т	Жирность	Жира, т
Творог	x	0,155	$0{,}155x$
Сыворотка	$1-x$	0,005	$0{,}005(1-x)$
Молоко	1	0,05	0,05

Так как часть молочного жира попала в творог, а остаток — в сыворотку, составим уравнение:

$$0{,}155x+0{,}005(1-x)=0{,}05.$$

Умножив обе части на 1000, получим

$$155x+5(1-x)=50.$$

Разделим обе части на 5: $31x+1-x=10$. Тогда $30x=9$, $x=0{,}3$.

► Сравните с решением задачи 4.3. ◄

Д31. Ответ: а) на 20%; б) заработок уменьшился на 6,25%.

а) **Решение 1.** Можно считать, что рабочий делает детали. Составим таблицу.

	Производительность, деталей в час	Время, часов	Количество деталей
Было	x	y	xy
Стало	$\frac{5}{4}x$	$\frac{4}{5}y$	xy

Сначала заполним первую строчку. Количество деталей во вторую строку перенесём без изменений. Производительность увеличилась на 25%, или на четверть, поэтому вместо x запишем $\frac{5}{4}x$. Разделив xy на $\frac{5}{4}x$, получим время $\frac{4}{5}y$ (часов). Это меньше, чем y, на $\frac{1}{5}$ часть, или на 20%.

► Разницу в процентах можно было бы найти и с помощью пропорции. ◄

Решение 2. Производительность рабочего выросла на 25%, т.е. он стал работать на 25%, или в $1{,}25=\frac{5}{4}$ раза, быстрее. Поэтому он потратит на тот же объём работы в $\frac{5}{4}$ меньше времени. Время работы надо разделить на $\frac{5}{4}$, т.е. умножить на $\frac{4}{5}=0{,}8$, что соответствует нахождению 80%, или уменьшению на 20%.

б) **Решение.** В задаче идёт речь о трёх величинах: производительности, расценках и заработке. Им соответствуют три столбца таблицы.

	Производительность, деталей в час	Расценки, рублей за деталь	Заработок, рублей в час
Было	x	y	xy
Стало	$\frac{5}{4}x$	$\frac{3}{4}y$	$\frac{15}{16}xy$

Измерять производительность в деталях в час подсказывает предыдущий пункт, расценки в рублях за деталь — здравый смысл. Равенство

$$\frac{\text{дет.}}{\text{ч}}\cdot\frac{\text{руб.}}{\text{дет.}}=\frac{\text{руб.}}{\text{ч}}$$

показывает, что заработок измеряется не в рублях, а в рублях в час и что именно он является произведением двух других величин. Для заполнения второй строки таблицы запишем увеличение на 25% как умножение на $0{,}75=\frac{3}{4}$, уменьшение на 25% — как умножение на $1{,}25=\frac{5}{4}$, а затем перемножим

$$\frac{5}{4}x\cdot\frac{3}{4}y=\frac{15}{16}xy.$$

Видим, что заработок уменьшился на $\frac{1}{16}=6{,}25\%$.

Д32. Ответ: на 20%.

Д33. Ответ: а) на 25%; б) на 25%.

Д34. Ответ: на $33\frac{1}{3}\%$.

Д35. Ответ: детских больше в 2 раза.

Д36. Ответ: 1500 рублей.

Д37. Ответ: в 6 раз.

Д38. Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение. Составим таблицу.

	Количество сотрудников	Средняя зарплата, рублей на человека	Фонд зарплаты, рублей
До увольнения	N	s	Ns
После увольнения	$\frac{2}{3}N$	$\frac{6}{5}s$	$\frac{4}{5}Ns$

Все клетки, кроме количества сотрудников после увольнения, заполняются при чтении условия. Коэффициент $\frac{2}{3}$ при N находится делением: $\frac{4}{5}:\frac{6}{5}=\frac{2}{3}$. Таким образом, надо уволить $\frac{1}{3}$ часть сотрудников фирмы.

Д39. Ответ: 20 минут.

Решение 1. При неизменном расстоянии время и скорость обратно пропорциональны. Вдвое увеличив скорость, Вася тем самым вдвое уменьшил время прохождения второй половины пути во вторник. По условию он на этом сэкономил 5 минут. Значит, при прежней скорости он бы потратил на вторую половину пути 10 минут, а на весь путь — 20 минут.

Решение 2. Пусть в понедельник Вася шёл со скоростью v м/мин и затратил на путь от дома до школы $2t$ минут, тогда длина половины пути от дома до школы равна vt метров. Во вторник вторую половину пути Вася шёл со скоростью $2v$ м/мин и затратил на 5 минут меньше, т. е. $(t-5)$ минут. Следовательно, $vt=2v(t-5)$, откуда находим $t=10$. Таким образом, весь путь от дома до школы занял 20 минут.

Д40. Ответ: 1,5 часа.

Решение. Велосипедист и мотоциклист проехали одинаковые расстояния до встречи, а скорость мотоциклиста втрое больше. Это означает, что времени он потратил втрое меньше. По условию он потратил меньше на час. Значит, велосипедист ехал 1,5 часа, а мотоциклист — 0,5 часа.

Д41. Ответ: за 1 минуту 50 секунд.

Решение 1. Изобразим движение героев (см. рис. 13). Флажок — место, где Чебурашка заметил Гену. За 10 секунд Гена пришёл оттуда в точку Г. Назовём это расстояние клеткой. Чебурашка за 10 секунд пробегает 2 клетки, а на трамвае проезжает впятеро больше — 10 клеток. Когда Чебурашка вышел из трамвая, друзей разделяло 11 клеток. За каждые следующие 10 секунд Гена будет проходить по одной клетке, а Чебурашка пробегать по две клетки; расстояние между ними будет сокращаться на 1 клетку. Чтобы сократить разрыв в 11 клеток, Чебурашке потребуется 11 раз по 10 секунд, т. е. 110 секунд.

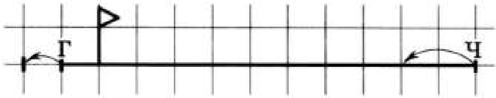


Рис. 13

Решение 2. Пусть Гена ходит со скоростью x м/с. Тогда Чебурашка бегает со скоростью $2x$ м/с, а скорость трамвая — 10 м/с. Дальнейшие действия оформлены в виде таблицы и пронумерованы в порядке выполнения.

	Скорость, м/с	Время, с	Расстояние, м
Гена (пока ехал трамвай)	x	10	1) $10x$
Чебурашка в трамвае	$10x$	10	2) $100x$
Чебурашка бежит	$2x$		
Чебурашка догоняет Гену	4) $2x - x = x$	5) $110x : x = 110$	3) $10x + 100x = 110x$

Д42. Ответ: за 2 минуты 40 секунд.

Решение 1. Если бы друзья ели с одинаковой скоростью, каждый съел бы по полгоршка. Но из условия ясно, что Винни-Пух ел быстрее и поэтому успел съесть свои полгоршка и добавку. Если бы Пятачок ел со скоростью Винни-Пуха, то Винни-Пуху не пришлось бы тратить время на добавку, т. е. добавка со скоростью Винни-Пуха съедается как раз за одну минуту. А если бы Винни-Пух ел со скоростью Пятачка, то Пятачок не оставил бы ему добавку, а съел бы сам за дополнительные 4 минуты, т. е. со скоростью Пятачка добавка съедается за 4 минуты. Мы выяснили, что Винни-Пух ест в 4 раза быстрее Пятачка.

Изобразим теперь горшок мёда в виде отрезка (см. рис. 14). Чтобы каждый «съел» целое число клеточек, оно должно делиться на $4+1=5$. Для изображения добавки надо будет разделить отрезок пополам. Итак, наименьшее удобное число клеточек — 10. Из них Пятачок съел 2 клеточки, а Винни-Пух — 8. Добавку в $8-5=3$ клеточки Винни-Пух съел за одну минуту, т. е. каждую клеточку он съедал за 20 секунд, а на 8 клеточек мёда у него ушло 160 секунд, т. е. 2 минуты 40 секунд.

Рис. 14

Решение 2. Как и в решении 1, разделим долю Винни-Пуха на полгоршка и добавку. Пусть мёд был съеден за t минут. Из условия ясно, что Винни-Пух ел быстрее. Он успел съесть за это время свои полгоршка и добавку. Если бы оба друга ели со скоростью Винни-Пуха, то каждый съел бы ровно полгоршка за $(t-1)$ минуту. Это значит, что добавку Винни-Пух съедает за минуту. Если бы оба ели со скоростью Пятачка, то тоже съели бы по полгоршка, но за $(t+4)$ минуты. За дополнительные 4 минуты Пятачок съел бы как раз добавку. Отсюда ясно, что Винни-Пух ест в 4 раза быстрее. Другими словами, он ест за четверых Пятачков.

Переформулируем задачу: $4+1=5$ Пятачков съели мёд за t минут, а $4+4=8$ Пятачков могли бы это сделать за $t-1$ минуту. Один Пятачок может съесть горшок мёда за $5t=8(t-1)$ минут. Решая это уравнение, получим $t=\frac{8}{3}$.

Решение 3. Пусть за минуту Винни-Пух съедает m кг мёда, Пятачок — n кг, а процесс их совместной еды длится t минут. Тогда из условия задачи получим два уравнения: $(m+n)t=$ $=2n(t+4)$, $(m+n)t=2m(t-1)$.

Из первого уравнения следует, что $(m-n)t=8n$, а из второго — что $(m-n)t=2m$. Тогда $m=4n$, т. е. Винни-Пух ест мёд в 4 раза быстрее, чем Пятачок. Подставив полученный результат, например, в первое уравнение, получим $5nt=2n(t+4)$, т. е. $5t=2t+8$, откуда находим $t=2\frac{2}{3}$.

► Эта задача есть в книге [16], но мы сочли уместным такой повтор, так как наши решения принципиально отличны от предложенного там решения. ◄

Д43. Ответ: через 1 час 40 минут, через $2\frac{1}{7}$ часа и через 2 часа 30 минут после зажжения.

Решение. Пусть свечи горели x часов. Тогда от первой свечи осталось $1-\frac{x}{3}$ длины, а от второй осталось $1-\frac{x}{5}$ её длины. Первому фотографированию соответствует уравнение

$$3\left(1-\frac{x}{3}\right)=2\left(1-\frac{x}{5}\right),$$

из которого находим $x=\frac{5}{3}$.

Второму фотографированию соответствует уравнение

$$2\left(1-\frac{x}{3}\right)=1-\frac{x}{5},$$

из которого находим $x=2\frac{1}{7}$.

Третьему фотографированию соответствует уравнение

$$3\left(1-\frac{x}{3}\right)=1-\frac{x}{5},$$

из которого находим $x=2{,}5$.

► Этот же ответ можно получить, изобразив на клетчатой бумаге сплошным отрезком оставшиеся части свечей и под-

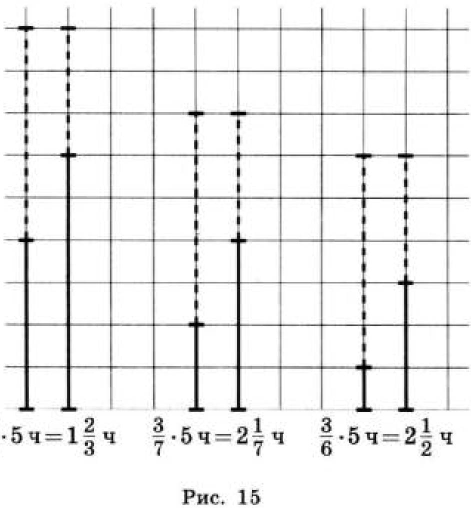


Рис. 15

бирая по клеточкам штриховые отрезки с отношением длин $5:3$, дополняющие их до одинаковой длины (см. рис. 15). ◄

Д44. Ответ: 800 м и 600 м.

Решение. Обозначим начало и конец бульвара через A и B соответственно, а точки встреч — через C_1, C_2 и C_3 (см. рис. 16). Три промежутка времени: от начала до первой встречи, от первой встречи до второй и от второй встречи до третьей — равны друг другу. Это так, поскольку за каждый из них джентльмены общими усилиями проходили удвоенную длину бульвара. Для удобства будем называть этот промежуток словом «тайм». Пусть $BC_1 = x$ м, тогда за тайм медленный джентльмен прошёл $(AB - x)$ м, а быстрый прошёл $(AB + x)$ м. За два тайма медленный и быстрый прошли $(2AB - 2x)$ м и $(2AB + 2x)$ м соответственно, т. е. $AC_2 = 2x$. За три тайма медленный и быстрый прошли $(3AB - 3x)$ м и $(3AB + 3x)$ м соответственно, т. е. $BC_3 = 3x$ (поэтому точки располагаются так, как показано на рисунке).

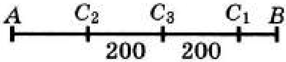


Рис. 16

По условию $BC_3 = BC_1 + 200$. Из уравнения $x + 200 = 3x$ получим $x = 100$. Тогда

$$AB = 2x + 200 + 200 + x = 700 \text{ (м)}.$$

Значит, за один тайм быстрый проходит $700 + 100 = 800$ (м), а медленный проходит $700 - 100 = 600$ (м). Именно столько они и пройдут до следующей встречи.

Д45. Ответ: 40 км/ч.

Решение. Пусть в тот момент, когда автобус проезжал мимо Пончика, мотоциклу оставалось x км до первого кафе. Это означает, что за время поедания трёх плюшек мотоцикл проезжает x км. Автомобиль движется вдвое быстрее мотоцикла и проехал за это же время $2x$ км. Столько же он проехал и за следующее время поедания трёх плюшек. Значит, в тот момент, когда мимо Пончика проезжал автобус, автомашина была от него вчетверо дальше, чем мотоцикл.

Когда же автобус проезжал мимо Сиропчика, и автомашина, и мотоцикл были позади него на расстоянии $2x$ км. Стало быть, пока автобус ехал от Пончика до Сиропчика, автомашина догнала мотоцикл, ликвидировав отставание в $4x - x = 3x$ км. За это же время автомашина сократила отставание от автобуса на $4x - 2x = 2x$ км. Это значит, что скорость, с которой машина догоняет мотоцикл (30 км/ч), составляет $\frac{3}{2}$ от скорости, с которой она догоняет автобус. Таким образом, машина догоняет автобус со скоростью 20 км/ч, значит, скорость автобуса равна $60 - 20 = 40$ км/ч.

Д46. Ответ: 100 км/ч.

Решение. Если время одинаково, то отношение расстояний (в данном случае длин дорог) равно отношению скоростей. Выразив его дважды, составим уравнение: $\frac{v}{v+25} = \frac{v-20}{v}$. Отсюда следует, что $v^2 = (v+25)(v-20)$, $v = 100$.

Д47. Ответ: в 6 часов утра.

Решение 1. Пусть C — место встречи. Изобразим путь первого пешехода штриховой линией, а второго — сплошной (см. рис. 17 *а*). От места встречи C второй до пункта B дошёл за 4 часа, а первый до пункта A — за 9 часов. Зададим себе вопросы.

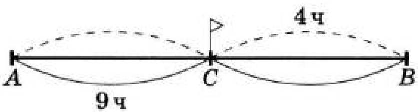
а)


Рис. 17

1. Что больше: AC или BC? Первый пришёл в B раньше второго. Значит, он шёл быстрее, поэтому больше успел пройти до встречи, т. е. $AC > BC$.

2. А про время пути до места встречи что-то известно? На самом деле да: известно, что оно одинаковое у обоих пешеходов. Поэтому его разумно обозначить через x (ч) — это важная часть условия, а не просто напоминание, что именно его и надо найти.

Уточним чертёж (см. рис. 17 *б*).

б)


Рис. 17

3. Теперь можно уточнить и первый вопрос: во сколько раз AC больше CB? При постоянной скорости пройденный путь пропорционален времени. Первый пешеход шёл с постоянной скоростью, значит, $\frac{AC}{CB}=\frac{x}{4}$. Но и второй пешеход шёл с постоянной скоростью, поэтому $\frac{AC}{CB}=\frac{9}{x}$. Следовательно, $\frac{x}{4}=\frac{9}{x}$, откуда находим $x=6$. Итак, от полудня до рассвета прошло 6 часов, значит, рассвет был в 6 часов утра.

► Та же пропорция $\frac{x}{4}=\frac{9}{x}$ могла быть получена из других соображений: второй пешеход затратил на первый участок пути в $\frac{9}{x}$ раз больше времени, чем первый, а на второй участок — в $\frac{x}{4}$ раз больше. Обе дроби $\frac{9}{x}$ и $\frac{x}{4}$ равны отношению скоростей первого и второго пешеходов, поэтому их можно приравнять. ◄

Решение 2. Пусть расстояние от места встречи до пункта A равно s_1 км, до пункта B — s_2 км, а до полудня пешеходы шли x часов. Разделив соответствующие расстояния на время, запишем скорости пешеходов.

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Первый пешеход до встречи	$\frac{s_1}{x}$	x	s_1
Первый пешеход после встречи	$\frac{s_2}{4}$	4	s_2
Второй пешеход до встречи	$\frac{s_2}{x}$	x	s_2
Второй пешеход после встречи	$\frac{s_1}{9}$	9	s_1

Поскольку пешеходы не меняли скоростей после встречи, составим уравнения: $\frac{s_1}{x}=\frac{s_2}{4}$, $\frac{s_2}{x}=\frac{s_1}{9}$. Из первого уравнения следует, что $\frac{s_1}{s_2}=\frac{x}{4}$, а из второго — что $\frac{s_1}{s_2}=\frac{9}{x}$. Таким образом, $\frac{x}{4}=\frac{9}{x}$, значит, $x=6$. Итак, от полудня до рассвета прошло 6 часов, т.е. рассвет был в 6 часов утра.

► Задача предлагалась в 1999 г. на Математическом празднике, есть в учебнике Д. В. Дорофеева и Л. Г. Петерсон для 6 класса. В книге [4] она разбирается при изучении среднего геометрического. ◄

Д48. Ответ: 75 часов и 50 часов.

Решение. Обозначим точку встречи буквой C. Пусть после встречи первый поезд ехал ещё x часов, тогда второй поезд ехал ещё $x-25$ часов. При постоянной скорости пройденный путь пропорционален времени, поэтому

$$\frac{AC}{CB}=\frac{30}{x}=\frac{x-25}{30}.$$

Единственный положительный корень получившегося квадратного уравнения: $x=45$. Всего первый поезд ехал

$$30+45=75 \text{ часов},$$

а второй ехал

$$75-25=50 \text{ часов.}$$

► Сравните с задачей Д47.

Отметим также, что ту же пропорцию можно получить, записав дважды отношение скоростей поездов, которое обратно отношению отрезков времени, затраченному ими на один и тот же участок пути.

Задача позаимствована из книги [5, № 10.40]. Не изучавший квадратных уравнений ученик может угадать x из пропорции и затем заметить, что по смыслу задачи $x-25>0$, а в таком случае при увеличении x дробь $\frac{30}{x}$ уменьшается, а дробь $\frac{x-25}{30}$ увеличивается, поэтому других решений задача (не уравнение!) иметь не может. ◄

Д49. Ответ: 30 км; 6 км/ч и 4 км/ч.

Решение. До первой встречи туристы вместе прошли расстояние AB однократно, а между первой и второй встречами — двукратно, потратив на это вдвое больше времени. Теперь можно решать по действиям, как в 5 классе:

1) $6:2=3$ (ч) — шли туристы до первой встречи;

2) $12:3=4$ (км/ч) — скорость второго туриста;

3) $4(3+6)=36$ (км) — прошёл второй турист до второй встречи;

4) $36-6=30$ (км) — расстояние между A и B;

5) $30:3=10$ (км/ч) — скорость сближения;

6) $10-4=6$ (км/ч) — скорость первого туриста.

► Сравните с решением задачи 5.6.

Задача позаимствована из книги [5, № 10.46]. Девятиклассники обычно решают её с помощью системы уравнений с тремя переменными. ◄

Д50. Ответ: 60 км.

Решение. Пусть расстояние между городами равно x км, скорость ГАЗа — g км/ч, МАЗа — m км/ч, а КамАЗа — k км/ч. До встречи МАЗа и КамАЗа МАЗ проехал $x-18$ км, а КамАЗ проехал $(x+18)$ км. Поэтому $\frac{k}{m}=\frac{x+18}{x-18}$. Аналогично

$$\frac{g}{k}=\frac{x-25}{x+25} \quad \text{и} \quad \frac{m}{g}=\frac{x+8}{x-8}.$$

Перемножив получившиеся уравнения, получим уравнение с одной переменной:

$$\frac{x+18}{x-18}\cdot\frac{x-25}{x+25}\cdot\frac{x+8}{x-8}=1.$$

Преобразуем полученное уравнение, учитывая, что знаменатели дробей отличны от нуля:

$$x^3+x^2+(18\cdot 8-18\cdot 25-8\cdot 25)x-18\cdot 8\cdot 25=$$
$$=x^3-x^2+(18\cdot 8-18\cdot 25-8\cdot 25)x+18\cdot 8\cdot 25.$$

После упрощения получаем $2x^2=2\cdot 18\cdot 8\cdot 25$. Так как $x>0$, то $x=60$.

Д51. Ответ: через 200 минут.

Решение 1. Пусть v_1, v_2 и v_3 — скорости первого, второго и третьего автомобилей соответственно (выраженные, например, в километрах в минуту). Одно и то же расстояние третий автомобиль проехал за 30 минут, а второй — за 50 минут Значит, третий едет в $\frac{v_3}{v_2}=\frac{50}{30}=\frac{5}{3}$ раз быстрее. Кроме того, одно и то же расстояние третий автомобиль проехал за 40 минут, а первый — за 70 минут. Значит, третий едет в $\frac{v_3}{v_1}=\frac{70}{40}=\frac{7}{4}$ раз быстрее. Сравним скорости двух первых автомобилей: $\frac{v_2}{v_1}=\frac{v_3}{v_1}:\frac{v_3}{v_2}=\frac{7}{4}:\frac{5}{3}=\frac{21}{20}$. Поэтому до встречи первый автомобиль ехал $21t$ минут, а второй — $20t$ минут. Разница составляет $21t-20t=t=10$ минут. Значит, второй автомобиль догнал первый через $20t=200$ минут.

Решение 2. Введя такие же обозначения для скоростей автомобилей и учитывая скорости их сближения, составим систему уравнений и преобразуем её:

$$\begin{cases} (v_3 - v_2)\cdot 30 = v_2 \cdot 20, \\ (v_3 - v_1)\cdot 40 = v_1 \cdot 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3v_3 = 5v_2, \\ 4v_3 = 7v_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{21}{20}.$$

Пусть искомое время равно x (минут), тогда

$$(v_2 - v_1)x = v_1 \cdot 10 \Leftrightarrow \frac{10}{x} = \frac{v_2}{v_1} - 1.$$

С учётом найденного отношения скоростей получим, что $x = 200$.

Решение 3. 1. Так как третий автомобиль выехал через 20 минут после второго, а догнал его ещё через 30 минут, то за 30 минут он проезжает такое же расстояние, какое второй проезжает за 50 минут. Следовательно, за 120 минут он проезжает столько же, сколько второй за 200 минут.

2. Так как третий автомобиль выехал через 30 минут после первого, а догнал его ещё через 40 минут, то за 40 минут он проезжает такое же расстояние, какое первый проезжает за 70 минут. Следовательно, за 120 минут он проезжает столько же, сколько второй за 210 минут.

3. Второй автомобиль выехал через 10 минут после первого и за 200 минут проехал столько же, сколько первый за 210 минут. Значит, через 200 минут после выезда из города второй автомобиль догнал первый.

Д52. Ответ: 32 м.

Решение 1. На следующий день выяснилось, что куст малины растёт между берёзой и липой. Пусть от него до берёзы x м. Тогда в первый день зайчик пробежал $(40 + x)$ м, а ёжик за то же время $(40 - x)$ м, поэтому отношение их скоростей равно $\frac{40 + x}{40 - x}$. На следующий день зайчик пробежал $(20 - x)$ м, а ёжик — x м. Найдя повторно отношение тех же скоростей, составим уравнение $\frac{40 + x}{40 - x} = \frac{20 - x}{x}$. Решив его, находим, что $x = 8$, тогда $40 - x = 32$.

Решение 2. Представим себе, что каждый пробежал подряд свои дистанции за оба дня, не останавливаясь у куста с малиной. Тогда зайчик пробежал $40 + 20 = 60$ метров от ёлки до липы, а ёжик — 40 метров от сосны до берёзы. Таким образом, отношение их скоростей равно $\frac{60}{40} = \frac{3}{2}$. Следовательно, в первый день ёжик пробежал расстояния между сосной и ёлкой, т. е. $\frac{2}{5}\cdot 80 = 32$ метра. А бежал он как раз от сосны до куста с малиной.

Д53. Ответ: в семь раз.

Решение 1. Пусть Миша вышел на t минут позже Маши и догнал её ещё через T минут. Одно и то же расстояние Миша прошёл за T минут, а Маша — за $(T+t)$ минут. Это означает, что Миша идёт в $\frac{T+t}{T} = 1 + \frac{t}{T}$ раз быстрее Маши.

Во втором случае одно и то же расстояние (отличное от первого) Миша прошёл бы за $\frac{T}{3}$ минут, а Маша — за $\left(\frac{T}{3}+t\right)$ минут, т. е. Миша шёл бы быстрее Маши в

$$\frac{\frac{T}{3}+t}{\frac{T}{3}} = \frac{T+3t}{T} = 1 + 3\frac{t}{T} \text{ раз.}$$

По условию

$$1 + 3\frac{t}{T} = 2\left(1 + \frac{t}{T}\right),$$

следовательно, $\frac{t}{T} = 1$. Это означает, во-первых, что $T = t$, а во-вторых, что Миша идёт в $1 + \frac{t}{T} = 1 + 1 = 2$ раза быстрее Маши.

Если Мишина скорость вдвое увеличится, а Машина вдвое уменьшится, то Миша станет идти в 8 раз быстрее Маши. Если Миша догонит Машу за x минут, то $\frac{t+x}{x} = 8$. Тогда

$$x = \frac{t}{7} = \frac{T}{7}.$$

Решение 2. Пусть первоначальные скорости Миши и Маши равны x км/ч и y км/ч соответственно, Миша вышел на t часов позже Маши и догнал её ещё через T часов. Тогда

$$\begin{cases} xT = y(T+t), \\ 2x\cdot\frac{T}{3} = y\left(\frac{T}{3}+t\right) \end{cases}$$

(*первые два условия*). Разделив почленно второе уравнение на первое, получим

$$\frac{\frac{T}{3}+t}{T+t} = \frac{2}{3},$$

т. е. $t = T$. Подставив этот результат в любое из уравнений системы, получим, что $\frac{x}{y} = 2$.

Пусть τ — время, за которое Миша догонит Машу, если его скорость в два раза больше, а Машина — в два раза меньше. Тогда $2x\tau = \frac{y}{2}(\tau + t)$, значит, $\frac{\tau + T}{\tau} = \frac{4x}{y} = 8$, следовательно, $\frac{T}{\tau} = 7$.

Д54. Ответ: 30 одуванчиков.

Решение. Пусть было x белых одуванчиков, тогда жёлтых было $2x$. Составим таблицу по условию задачи.

	Белых	Жёлтых
Было	x	$2x$
Стало	$x + 3 - 2 = x + 1$	$2x - 3$

Жёлтых одуванчиков стало на 6 больше, т. е. $2x - 3 = x + 1 + 6$, откуда находим $x = 10$. Значит, всего на лужайке росло $2x + x = 3x = 30$ одуванчиков.

Д55. Ответ: мне 15 лет, а брату — 20.

Решение. Так как дана сумма двух неизвестных величин, достаточно ввести переменную только для одной из них. Пусть мой нынешний возраст — x лет, тогда возраст брата составляет $(35 - x)$ лет. Из условия задачи $2(x - 8) = 35 - x - 6$, откуда находим $x = 15$. Тогда $35 - x = 20$.

Д56. Ответ: 18.

Решение. Пусть в классе x парт, за которыми сидят мальчик и девочка, тогда парт, за которыми сидят две девочки, — $2x$. Приравнивая количество девочек в классе, получим $2 \cdot 2x + x = 10$, следовательно, $x = 2$. Так как в классе $4x$ парт, за которыми сидят два мальчика, то в классе $2 \cdot 4x + x = 9x = 18$ мальчиков.

Д57. Ответ: 0,4.

Решение. Пусть часть пути, когда за рулём был Антон, составляет x, тогда часть пути, когда вёл машину Саша, составляет $(x + 0{,}1)$, а часть пути, когда за рулём был Вася, равна $2x$. Таким образом, $2x + x + (x + 0{,}1) + 0{,}1 = 1$. Следовательно, $x = 0{,}2$, тогда $2x = 0{,}4$.

Д58. Ответ: 120.

Решение. Пусть общее количество монет равно x, тогда по условию задачи получим уравнение:

$$\frac{x}{3}+1+\frac{x}{4}+5+\frac{x}{5}+20=x.$$

Его решение: $x=120$.

► Если не хочется работать с дробями, то общее количество монет можно принять за $60m$, так как 60 — это наименьшее общее кратное чисел 3, 4 и 5. ◄

Д59. Ответ: на четвёртом.

Решение 1. Пусть от первого этажа до этажа Жени x этажей. Тогда до Вовиного этажа $\frac{x}{2}$ этажей, до Петиного — $\frac{x}{3}$, до этажа Андрея — $\frac{x}{4}$, а до Таниного — $\frac{x}{6}$. Андрей живёт этажом ниже Пети, поэтому $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=1$. Значит, $x=12$. До этажа Андрея от первого $\frac{x}{4}=3$ этажа, т. е. живёт он на четвёртом этаже. Заметим, что данные про этажи Вовы и Тани оказались лишними.

Решение 2. Пусть Андрей живёт на этаже с номером x, тогда между первым этажом и этажом Андрея $(x-1)$ этаж, между первым этажом и этажом Жени $4(x-1)$ этажей, между первым этажом и этажом Пети $\frac{4}{3}(x-1)$ этажей. Так как Петя живёт на этаж выше Андрея, то $(x-1)+1=\frac{4}{3}(x-1)$. Решая это уравнение, получим $x=4$.

Д60. Ответ: 50 км.

Решение. Пусть S км — искомое расстояние. Тогда до встречи Петя проехал $10+\frac{S-10}{4}$ (км), а Коля проехал $20+\frac{S-20}{3}$ (км). Следовательно,

$$10+\frac{S-10}{4}+20+\frac{S-20}{3}=S.$$

Умножив обе части этого уравнения на 12 и приведя подобные слагаемые, получим $250+7S=12S$, т. е. $S=50$.

Д61. Ответ: Никита — за 36 секунд, Егор — за 48 секунд.

Решение. Пусть Никита пробегает круг за t секунд, тогда Егор — за $(t+12)$ секунд. Заметим, что до первой встречи мальчики вместе пробежали круг, до второй — два круга, ..., до седьмой встречи — 7 кругов. Так как в седьмой раз после старта они встретились в том же месте, откуда начали, то каждый пробежал целое число кругов. Из условия следует, что Никита пробежал больше, а время их движения одинаково. Таким образом, возможны три случая, которые мы рассмотрим, составив таблицу.

Пробежал Никита	Пробежал Егор	Уравнение	Его корень
6	1	$6t = t + 12$	$t = 2{,}4$
5	2	$5t = 2(t + 12)$	$t = 8$
4	3	$4t = 3(t + 12)$	$t = 36$

Условию $t > 30$ удовлетворяет только последний случай.

Д62. Ответ: 121.

Решение 1. Пусть на каждой олимпиаде все её участники получили по конфете. Всего организаторами роздано $100 + 50 + 48 = 198$ конфет. Столько же получено детьми. Для подсчёта конфет с точки зрения детей разделим их на три группы. Дети из первой группы участвовали лишь в одной олимпиаде и получили по одной конфете. Дети из второй группы участвовали в двух олимпиадах и получили по две конфеты. Но так как их было вдвое меньше, то всего конфет детям из первой и второй групп досталось поровну. И столько же конфет по аналогичным соображениям получили в совокупности дети из третьей группы — участники трёх олимпиад. Итак, дети каждой группы получили $198 : 3 = 66$ конфет. Значит, в первой группе было 66 детей, во второй — $66 : 2 = 33$ ребёнка, а в третьей — $66 : 3 = 22$ ребёнка. Всего же в олимпиадах принял участие $66 + 33 + 22 = 121$ ученик.

► Конфеты — удобный счётчик. В [13, с. 94] «методом конфет» решены задачи Д20, Д21 и Д22. ◄

Решение 2. Пусть в одной олимпиаде участвовало x учеников. Тогда в двух олимпиадах участвовало $\frac{x}{2}$ учеников, а в трёх — $\frac{x}{3}$ учеников. Если сложить 100, 50 и 48, то $\frac{x}{2}$ учеников окажутся посчитанными дважды, а $\frac{x}{3}$ посчитанными трижды. Чтобы все были посчитаны ровно по одному разу, вычтем лишние количества и получим $(100 + 50 + 48) - \left(\frac{x}{2} + \frac{2x}{3}\right)$ учеников. С другой стороны, всего участников олимпиад было $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$. Из уравнения

$$(100 + 50 + 48) - \left(\frac{x}{2} + \frac{2x}{3}\right) = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$$

получаем, что $198 = 3x$, т.е. $x = 66$. Значит, хотя бы в одной олимпиаде участвовало

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 66 + 33 + 22 = 121 \text{ человек.}$$

Решение 3. Изобразим условие задачи с помощью кругов Эйлера, введя обозначения так, как на рис. 18.

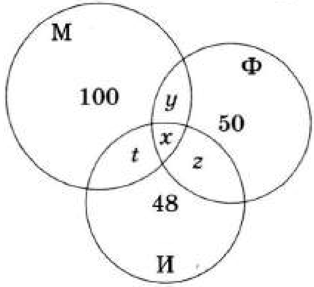


Рис. 18

Выразим количество участников ровно одной олимпиады. Среди математиков их $100 - (x + y + t)$ человек, среди физиков их $50 - (x + y + z)$, а среди информатиков их $48 - (x + t + z)$. Значит, ровно в одной олимпиаде участвовало $198 - 3x - 2(t + y + z)$.

Пусть $t + y + z = s$, тогда по условию задачи $3x = 198 - 3x - 2s = 2s$. Решая эту систему, получим $x = 22$, $s = 33$. Следовательно, ровно в одной олимпиаде участвовало 66 человек, а хотя бы в одной — $66 + 33 + 22 = 121$.

Д63. Ответ: 7.

Решение. Из условия задачи следует, что каждый из математиков в своих подсчётах учёл все скамейки на станции ровно по одному разу, т.е. в итоге они насчитали равное количество скамеек. Тогда если после отправления поезда третий математик насчитал n скамеек, то второй должен был насчитать $(n + 3)$ скамейки, а первый — $(n + 8)$ скамеек.

Таким образом, $\frac{n+8}{n+3} = 3$, или $\frac{n+3}{n} = 3$, или $\frac{n+8}{n} = 3$. Первые два уравнения не имеют натуральных корней, а решением третьего уравнения является $n = 4$. Следовательно, всего на станции 19 скамеек, а математик, о котором спрашивается в задаче, — тот, кто при подъезде к станции насчитал 12 скамеек. Значит, при отъезде от станции он насчитал 7 скамеек.

Д64. Ответ: 14.

Решение. Введём переменную и составим таблицу.

	Коля	Оля
Вначале	x	$60-x$
После первого хода Коли	$\frac{1}{3}x$	$60-x+\frac{1}{3}x=60-\frac{2}{3}x$
После ответа Оли	$30-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x=30$	$\frac{1}{2}\left(60-\frac{2}{3}x\right)=30-\frac{1}{3}x$
После второго хода Коли	10	$40-\frac{1}{3}x$
После ответа Оли	$10+20-\frac{1}{6}x=30-\frac{1}{6}x$	$\frac{1}{2}\left(40-\frac{1}{3}x\right)=20-\frac{1}{6}x$

По условию задачи $30-\frac{1}{6}x=60-x$. Решая это уравнение, получим, что $x=36$. Теперь у Оли $20-\frac{1}{6}x=20-6=14$ вишен.

► Таблица здесь удобна по двум причинам. Во-первых, количество вишен меняется не один раз (было и стало), а многократно. Во-вторых, приходится не по очереди, а одновременно следить за количеством вишен у Коли и у Оли.

Заполняя таблицу, важно сразу же упрощать получившиеся выражения. Если оставить это на этап решения уравнения, то мало шансов нигде не ошибиться. ◄

Д65. Ответ: 14,8 кг.

Решение. Пусть до занятий спортом Карлсон весил x кг. Запишем, как изменялся его вес (в килограммах).

Перед первой пробежкой	x
После первой пробежки	$x-1$
К концу первого дня	$\frac{4}{3}(x-1)$
После второй пробежки	$\frac{4}{3}(x-1)-1=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}$
К концу второго дня	$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right)=\frac{16}{9}x-\frac{28}{9}$
После третьей пробежки	$\frac{16}{9}x-\frac{28}{9}-1=\frac{16}{9}x-\frac{37}{9}$
К концу третьего дня	$\frac{4}{3}\left(\frac{16}{9}x-\frac{37}{9}\right)=\frac{64}{27}x-\frac{148}{27}$

По условию задачи $\frac{64}{27}x-\frac{148}{27}=2x$, следовательно, $x=14{,}8$.

Д66. Ответ: по 99.

Решение. Пусть вначале в медицинский институт собрались x выпускников. Составим таблицу, в которую будем последовательно записывать количество желающих пойти в театральный и медицинский институты.

В театральный	В медицинский
143	x
$143+0{,}4x$	$0{,}6x$
$0{,}6(143+0{,}4x)$	$0{,}6x+0{,}4(143+0{,}4x)$

Так как в оба института в итоге решило пойти поровну выпускников, можно приравнять их количества:

$$0{,}6(143+0{,}4x)=0{,}6x+0{,}4(143+0{,}4x).$$

Это уравнение можно решить без сложных вычислений:

$$0{,}2\cdot 143+0{,}24x=0{,}6x+0{,}16x,$$

и тогда $0{,}2\cdot 143=0{,}52x$. Разделив обе части на 13, получим $0{,}2\cdot 11=0{,}04x$, следовательно, $x=55$.

Таким образом, в каждый институт пошло по

$$0{,}5(143+x)=0{,}5(143+55)=99 \text{ человек.}$$

► Можно было сразу составить более простое уравнение: так как в институты пошло поровну выпускников, то в каждый пошло по $0{,}5(143+x)$ человека. Значит, $0{,}6(143+0{,}4x)=$ $=0{,}5(143+x)$. ◄

Д67. Ответ: картошка в 2,5 раза дороже.

Решение. Пусть 1 кг картошки стоит x рублей, а 1 кг печенья — y рублей. По условию $4x+0{,}5y=2(0{,}5x+4y)$, откуда следует, что $x=2{,}5y$.

Д68. Ответ: овца съедает больше в 1,6 раз.

Решение. Пусть коза съедает за день x кг сена, а овца — y кг. Четыре козы и три овцы съедают за пять дней $5(4x+3y)$ кг сена, а три козы и пять овец за четыре дня — $4(3x+5y)$ кг. По условию $5(4x+3y)=4(3x+5y)$. Упрощая уравнение, получим $8x=5y$, т. е. $\frac{y}{x}=\frac{8}{5}=1{,}6$.

Д69. Ответ: $\frac{3}{8}$.

Решение 1. Пусть за год двоечник списал x и угадал y верных ответов, тогда всего им было выбрано $x+5y$ ответов. По условию $\frac{x+y}{x+5y}=\frac{1}{2}$, следовательно, $x=3y$. Доля списанных ответов составляет

$$\frac{x}{x+5y}=\frac{3y}{3y+5y}=\frac{3}{8}.$$

Решение 2. Примем количество всех ответов за единицу. Пусть d — доля несписанных ответов, тогда доля неверных ответов — $\frac{4}{5}d$. Из условия задачи следует, что $\frac{4}{5}d=\frac{1}{2}$, т. е. $d=\frac{5}{8}$. Следовательно, доля списанных ответов составляет $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$.

Д70. Ответ: смотрел в окно.

Решение. Пусть Пётр Петрович смотрел в окно x минут, а Иван Иванович — y минут. Тогда

$$x+2x+4x+8x=y+4y+16y+64y,$$

т. е. $15x=85y$. Иван Иванович начал разгадывать кроссворд через $5y=\frac{15x}{17}$ минут. Это меньше чем x, значит, Пётр Петрович в это время смотрел в окно.

Д71. Ответ: 20 км.

Решение 1. Пусть время движения по ровному участку в одну сторону равно t часов (оно одинаково на пути туда и обратно, так как одно и то же расстояние пройдено с одной и той же скоростью), а время движения при спуске — T часов. Так как подъём шёл со скоростью, в два раза меньшей, то на него затрачено $2T$ часов. Таким образом, $t+2T+T+t=5$, т. е. $2t+3T=5$.

В каждую сторону турист прошёл

$$6T+4t=2(2t+3T)=10 \text{ (км)}.$$

Значит, всего им пройдено 20 км.

Решение 2. Если считать дорогу туда и обратно, то на каждый километр горизонтальной дороги турист тратил по $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ часа, а на каждый километр горного участка — $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ часа. Значит, при данных скоростях пройденный путь не зависит от длины горного участка и равен $5:\frac{1}{2}=10$ (км) в каждую сторону, а весь путь — 20 км.

Д72. Ответ: на 18 %.

Решение. Пусть длина прямоугольника равна a, а его ширина равна b, тогда периметр прямоугольника равен $2(a+b)$. По условию $2(0{,}9a+0{,}8b)=0{,}88\cdot 2(a+b)$. Разделим обе части на 2, тогда $0{,}9a+0{,}8b=0{,}88(a+b)$.

► Можно было сразу записать уравнение в таком виде, так как полупериметр уменьшается во столько же раз, во сколько и периметр. ◄

После упрощения получим, что $a=4b$.

Исходный прямоугольник имел периметр

$$2(a+b) = 2(4b+b) = 10b.$$

Если длину уменьшить на 20 %, а ширину — на 10 %, то периметр станет равен

$$2(0{,}8a+0{,}9b) = 2(0{,}8\cdot 4b+0{,}9b) = 8{,}2b.$$

Если принять $10b$ за 100 %, то $8{,}2b$ составляет $\frac{8{,}2b}{10b}\cdot 100\,\% = 82\,\%$, т. е. на 18 % меньше.

► Можно было сразу выражать не новый периметр, а величину, на которую он уменьшится, т. е. $2(0{,}2a+0{,}1b)=1{,}8b$, что составляет 18 % от $10b$. ◄

Д73. Ответ: в пять раз.

Решение. Обозначим время движения (например, в часах) от Леоново до Петушков через x, а время движения от Дрезны до Петушков — через y. Тогда по условию время движения от Курского вокзала до Дрезны — $3x$, а от Курского вокзала до Леоново — $2y$ (см. рис. 19).

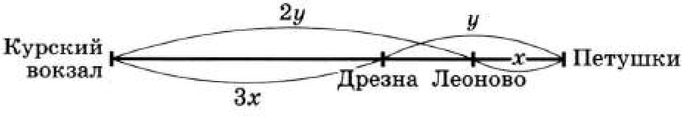


Рис. 19

Время движения от Москвы до Петушков можно найти двумя способами:

1) суммируя время движения от Курского вокзала до Леоново и от Леоново до Петушков, т. е. $2y+x$;

2) суммируя время движения от Курского вокзала до Дрезны и от Дрезны до Петушков, т. е. $3x+y$.

Приравнивая эти выражения, получим $2y+x=3x+y$, т.е. $y=2x$. Тогда время движения от Дрезны до Леоново равно $y-x=2x-x=x$, а время движения от Курского вокзала до Петушков равно $3x+y=3x+2x=5x$. Следовательно, искомое отношение равно пяти.

Д74. Ответ: 4 часа.

Решение 1. Пусть скорость Пети равна v км/ч, тогда скорость его езды на велосипеде равна $2v$ км/ч. Если x км Петя проехал на велосипеде, то расстояние от лагеря до посёлка равно $2a+x$ (км). Составим уравнение:

$$\frac{a}{v}+\frac{x}{2v}=2 \;\Leftrightarrow\; \frac{2a+x}{2v}=2.$$

Тогда $\dfrac{x+2a}{v}=4$, что и требуется.

Решение 2. За два часа обратного пути Петя пройдёт a км и половину того расстояния, на которое его подвезли (так как идёт он вдвое медленнее, чем едет). Так как подобрали его также в a км от лагеря, то осталось ему пройти ещё столько же, значит, весь обратный путь займёт 4 часа.

Д75. Ответ: 6 ч 40 мин.

Решение. Пусть производительность работы маляров равна x, y и z заборов в час соответственно. Тогда по условию $5x+6y+8=1$ и $4x+5y+7z=0{,}85$. Вычитая второе уравнение из первого, получим $x+y+z=0{,}15$, т.е. найдена производительность совместной работы маляров. Следовательно, время покраски забора при совместной работе маляров равно

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{0{,}15}=6\frac{2}{3}\ \text{(ч)}.$$

Д76. Ответ: 25.

Решение. Пусть x школьников прошли тестирование успешно, тогда провалились $30-x$. Сумма баллов, набранных всеми школьниками, равна

$$84x+60(30-x)=24x+1800.$$

Так как средний балл всех тестировавшихся равен 80, то эта же сумма равна $80\cdot 30=2400$. Таким образом, $24x+1800=$ $=2400$, откуда находим $x=25$.

Д77. Ответ: 9 бриллиантов.

Решение 1. Читая условие задачи, составляем две таблицы, щедро вводя переменные. Учитываем, что у каждого пирата количество бриллиантов за ночь не изменилось.

До краж	Средняя масса	Количество	Общая масса
Билл	b	12	$12b$
Сэм	s	12	$12s$
Джон	d	x	xd

После краж	Средняя масса	Количество	Общая масса
Билл	$b-1$	12	$12(b-1)$
Сэм	$s-2$	12	$12(s-2)$
Джон	$d+4$	x	$x(d+4)$

Осталось найти массу всех бриллиантов до и после кражи и приравнять их. Получится уравнение

$$12b+12s+xd=12(b-1)+12(s-2)+x(d+4).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим $4x-36=0$, т.е. $x=9$.

Решение 2. Заметим, что количество бриллиантов у каждого пирата за ночь не изменилось. Так как у Билла 12 бриллиантов, а их средняя масса уменьшилась на 1 карат, то сумма их масс уменьшилась на 12 каратов. Аналогично у Сэма также 12 бриллиантов, их средняя масса уменьшилась на 2 карата, поэтому сумма их масс уменьшилась на 24 карата. Поскольку масса бриллиантов у Билла и Сэма уменьшилась на 36 каратов, то у Джона она на те же 36 каратов увеличилась. Так как средняя масса бриллиантов Джона увеличилась на 4 карата, то у него было $36:4=9$ бриллиантов.

Д78. Ответ: за 60 часов.

Решение. При постоянном расстоянии во сколько раз меньше время, во столько же раз больше скорость. Чтобы работать с целыми коэффициентами, примем скорость теплохода по течению за $6v$, а против течения — за $5v$ и заполним две первые строки таблицы.

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
По течению	$5v$	6	$30v$
Против течения	$6v$	5	$30v$
Течение (плот)	$0{,}5v$	60	$30v$

В третьей сначала запишем то же расстояние, что в первых двух. Затем вычислим скорость течения как полуразность скоростей по течению и против течения. Зная содержимое двух клеток строки, в последнюю очередь ответим на вопрос задачи: $\frac{30v0{,}5v}{=}60$.

Д79. Ответ: 6 часов.

Решение. Пусть $AB = BC = s$, тогда скорость корабля по течению равна $\frac{s}{2}$, а в стоячей воде — $\frac{s}{3}$. Значит, скорость течения равна $\frac{s}{2} - \frac{s}{3} = \frac{s}{6}$, поэтому плот будет плыть от A до B $s : \frac{s}{6} = 6$ (ч).

► Также можно в качестве переменных взять скорости (аналогично решению предыдущей задачи). ◄

Д80. Ответ: 36.

Решение. Назовём порцией количество травы, съедаемой одним быком за один день. Пусть на одном гектаре растёт t порций травы, а за неделю вырастает ещё d порций. Тогда из условия про первый луг получим, что $3\frac{1}{3}(t + 4d) = 12 \cdot 4$, т. е. $t + 4d = 14{,}4$. Аналогично из условия про второй луг следует, что $10(t + 9d) = 21 \cdot 9$, т. е. $t + 9d = 18{,}9$. Вычитая первое уравнение из второго, получим $5d = 4{,}5$, т. е. $d = 0{,}9$. Тогда $t = 14{,}4 - 4d = 10{,}8$.

На третьем лугу за 18 недель будет

$$24(t + 18d) = 24(10{,}8 + 18 \cdot 0{,}9) = 24 \cdot 27 \text{ порций.}$$

Этого количества на 18 недель хватит для $24 \cdot 27 : 18 = 36$ быков.

► По сравнению с задачей 8.4 происходит некоторое усложнение за счёт различных площадей лугов. ◄

Д81. Ответ: 21 и 126 ступенек соответственно.

Решение 1. Расстояние удобно измерять в ступеньках, тогда скорость будет измеряться в ступеньках в минуту. В понедельник и во вторник Ваня прошёл то же расстояние, что и на неподвижном эскалаторе, т.е. 36 ступенек. Если принять скорость эскалатора за x ступенек в минуту, то Ванина собственная скорость — $1{,}4x$ ступенек в минуту. Заполним таблицу, характеризующую перемещение Вани.

	Время, минут	Скорость, ступенек/мин	Расстояние, ступенек
Эскалатор неподвижен, воскресенье	$\frac{36}{1{,}4x}$	$1{,}4x$	36
«По течению», понедельник	$\frac{36}{2{,}4x}$	$2{,}4x$	36
«Против течения», вторник	$\frac{36}{0{,}4x}$	$0{,}4x$	36

Одновременно с перемещением происходил и второй процесс — подсчёт ступенек. Слова «первая, вторая, третья, ...» Ваня во все дни произносил с одной и той же скоростью, равной скорости его перемещения по неподвижному эскалатору, т.е. $1{,}4x$ ступенек в минуту. На счёт ступенек в конкретный день Ваня потратил такое же время, что и на перемещение в этот день. Мы выяснили содержимое двух первых столбцов новой таблицы, характеризующей счёт ступенек (для сокращения записи достаточно было бы добавить столбец про скорость счёта к уже имеющейся; время в ней и так было).

	Время, минут	Скорость счёта, ступенек/мин	Число насчитанных ступенек
Эскалатор неподвижен, воскресенье	$\frac{36}{1{,}4x}$	$1{,}4x$	36
«По течению», понедельник	$\frac{36}{2{,}4x}$	$1{,}4x$	$\frac{36}{2{,}4x}\cdot 1{,}4x=21$
«Против течения», вторник	$\frac{36}{0{,}4x}$	$1{,}4x$	$\frac{36}{0{,}4x}\cdot 1{,}4x=126$

Произведение скорости счёта и времени — это как раз количество названных ступенек, которое мы ищем. Оно равно

$\frac{36}{2{,}4x}\cdot 1{,}4x=21$ ступеньке в понедельник и $\frac{36}{0{,}4x}\cdot 1{,}4x=126$ ступенькам во вторник.

Решение 2. Ваня во все дни называет номера ступенек с одинаковой скоростью — с той, с которой он идёт по неподвижному эскалатору. Во сколько раз быстрее он преодолеет эскалатор, во столько раз меньше номеров успеет назвать. В понедельник Ваня идёт по сравнению с воскресеньем в $\frac{2{,}4}{1{,}4}=\frac{12}{7}$ раз быстрее, поэтому ступенек назовёт во столько же раз меньше, а именно $36:\frac{12}{7}=21$ ступеньку, а во вторник его скорость умножается на $\frac{0{,}4}{1{,}4}=\frac{2}{7}$, следовательно, и время, и количество ступенек на это же число делятся, и ступенек Ваня насчитает $36:\frac{2}{7}=126$.

► Число 36 является средним гармоническим полученных ответов 21 и 126. Подробнее о том, почему это так, рассказано в книге [4]. ◄

Д82. Ответ: $2L$.

Решение 1. Скорость машины относительно бегущих в исходном направлении спортсменов равна $2V$, где V — скорость спортсменов. Поэтому время разворота колонны составит $\frac{L}{2V}$. За это время первый развернувшийся пробежит расстояние $0{,}5L$ в обратном направлении, а последний развернувшийся пробежит расстояние $0{,}5L$ в исходном направлении. Поскольку перед началом разворотов первого и последнего разделяла дистанция L, длина новой колонны будет равна $L+0{,}5L+$ $+0{,}5L=2L$.

Решение 2. Пусть по-прежнему время разворота колонны равно $\frac{L}{2V}$. Скорость удаления от машины первого развернувшегося спортсмена равна $V+3V=4V$, поэтому за время разворота колонны он удалится от машины на расстояние $4V\cdot\frac{L}{2V}=2L$. Это и будет длина развернувшейся колонны.

► Сравните с задачей 8.10. ◄

Д83. Ответ: 5.

Решение. После похищения количество чёрных шашек кратно 4. Так как в начале игры шашек каждого цвета на доске по 12, чёрных могло остаться 4, 8 или 12. До похищения число чёрных шашек было кратно 5, т. е. их было 5 или 10. Ноздрёв спрятал одну шашку неизвестного цвета. Возможен только один случай: было 5 чёрных шашек, одну Ноздрёв снял, осталось 4. Тогда белая шашка осталась одна, а всего шашек на доске 5.

Д84. Ответ: 21.

Решение. Пусть ниже Димы x детей, тогда $4x$ детей выше него. Аналогично если y детей стоят впереди Лены (т. е. выше неё), то ниже неё $3y$ детей. Так как в обоих случаях рассматриваются одни те же школьники, то $4x+1+x=y+1+3y$, т. е. $5x=4y$. Так как 4 и 5 — взаимно простые числа, то x делится на 4, а y делится на 5. По условию $5x+1 \leqslant 30$, поэтому $x=4$, тогда $y=5$. Значит, в классе 21 человек.

Д85. Ответ: 20.

Решение. Общее количество лжеконтролёров и лжекондукторов в 5 раз меньше количества необычных пассажиров (т. е. контролёров, кондукторов, лжеконтролёров и лжекондукторов). Следовательно, количество необычных пассажиров кратно 5. Аналогично количество кондукторов и лжекондукторов в 8 раз меньше количества необычных пассажиров, следовательно, количество необычных пассажиров кратно 8. Так как числа 5 и 8 взаимно простые, то количество необычных пассажиров кратно 40 и при этом не превосходит 60. Значит, всего имеется 40 необычных пассажиров, а остальные 20 пассажиров — обычные.

Д86. Ответ: Андрей женат на Ольге, Иван — на Анне, Степан — на Екатерине.

Решение. Из условия задачи следует, что каждый из шести человек потратил количество рублей, являющееся квадратом натурального числа. Пусть муж потратил a^2 рублей, а его жена — b^2, тогда $a^2-b^2=63 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)=3^2\cdot 7$. Так как числа $a+b$ и $a-b$ натуральные и $a+b>a-b$, то возможны ровно три случая:

1) $\begin{cases} a+b=63, \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=32, \\ b=31; \end{cases}$

2) $\begin{cases} a+b=21, \\ a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12, \\ b=9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} a+b=9, \\ a-b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8, \\ b=1. \end{cases}$

Проверяя условия, связанные с количеством купленных вещей, получим, что требуемые равенства выполняются в единственном случае: $a = 32$ (Андрей), $b = 31$ (Ольга); $a = 12$ (Иван), $b = 9$ (Анна); $a = 8$ (Степан), $b = 1$ (Екатерина).

Д87. Ответ: в каждого попали по одному разу.

Решение. Если в Вифслу, Тофслу и Хемуля попало x, y и z снежков соответственно, то всего было брошено $13 + x + y + z$ снежков. С другой стороны, Вифсла бросил $6x$, Хемуль — $5y$, а Тофсла — $4z + 1$ снежков (вместе с первым). Следовательно,

$$6x + 5y + 4z + 1 = 13 + x + y + z,$$

т. е. $5x + 4y + 3z = 12$.

Это уравнение можно решить полным перебором, так как все переменные принимают целые неотрицательные значения. Следовательно, $x \leqslant 2$, $y \leqslant 3$, $z \leqslant 4$. Получим три тройки решений: $(0, 0, 4)$, $(0, 3, 0)$ и $(1, 1, 1)$. Но первые две означают, что снежки попадали только в кого-то одного. Кидать снежки в самого себя он по условию не мог, и ни у кого другого кидать в него тоже не было причин. Откуда же взялись снежки, которые в него попали? Поэтому возможен только третий случай.

Д88. Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $\frac{p}{q}$ — исходная дробь, тогда

$$\frac{p+1}{q} = \frac{p}{q-p}, \quad \text{или} \quad q = p^2 + p.$$

Следовательно, q делится на p. При этом исходная дробь несократима, значит, $p = 1$, тогда $q = 2$.

Д89. Ответ: 189.

Решение. Пусть Вася собрал в первый день x грибов, а во второй день — y грибов, тогда Маша собрала $\frac{3}{4}x$ и $\frac{6}{5}y$ грибов соответственно. По условию $\frac{11}{10}(x + y) = \frac{3}{4}x + \frac{6}{5}y$. Решая это уравнение, получим $22x + 22y = 15x + 24y$, т. е. $7x = 2y$. Из условия задачи следует, что числа x и y натуральные, причём x кратно 4, а y кратно 5. Пусть $x = 4k$, $y = 5n$, где $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $28k = 10n$, т. е. $14k = 5n$. Так как $\text{НОД}(14; 5) = 1$, то k кратно 5, а n кратно 14. Таким образом, среди всех $(k; n)$, удовлетворяющих полученному равенству, наименьшими являются $k = 5$, $n = 14$. Следовательно, $x = 20$; $y = 70$. Общее количество грибов: $\frac{7}{4}x + \frac{11}{5}y = 35 + 154 = 189$.

Д90. Ответ: 30 лет или 24 года.

Решение. Пусть в момент рождения сына отцу было N лет. Когда сыну исполнилось k лет, отцу исполнилось $(N+k)$ лет. Это число делится k на тогда и только тогда, когда N делится на k. Таким образом, задача сводится к подбору числа N, у которого ровно 8 делителей. При этом $2N$ не больше 75, т. е. $N \leqslant 37$. Числа, имеющие 8 делителей, могут быть представлены в одном из трёх видов: p^7, p^3q или pqr (где p, q и r — простые числа). Перебором устанавливается, что только числа $24 = 2^3 \cdot 3$ и $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ имеют 8 делителей и не превосходят 37.

Д91. Ответ: 3 щелчка.

Решение. Пусть Балда отработал a дней и прогулял b дней, тогда $a - 10b = 12a - 121b$. Упрощая это равенство, получим, что $11a = 111b$. Поскольку числа 11 и 111 взаимно простые, то a кратно 111, b кратно 11. Так как $a \leqslant 366$, то a может быть равно 111, 222 или 333. Соответствующие значения b — 11, 22, 33. Тогда сумма $a+b$ (количество дней в году) принимает значения 122, 244 и 366 соответственно. Отсюда заключаем, что год был високосным, т. е. $a = 333$, $b = 33$. Следовательно, попу причитается $a - 10b = 333 - 330 = 3$ щелчка.

► Отметим, что полученный ответ полностью согласуется с литературным источником: А. С. Пушкин, «Сказка о попе и его работнике Балде». ◄

Д92. Ответ: 9 рабочих.

Решение. Пусть в бригаде x рабочих; время, за которое бригада выполняет задание без двух человек, — t_1 дней, а без шести человек — t_2 дней. Дневную производительность одного рабочего примем за единицу.

Из условия задачи следует, что

$$7x = (x-2)t_1 = (x-6)t_2.$$

Тогда из первого равенства получаем $t_1 = \frac{7x}{x-2}$, т. е.

$$t_1 = 7 + \frac{14}{x-2}.$$

Так как t_1 и x — натуральные числа, то $x-2$ является делителем числа 14. Кроме того, из условия задачи следует, что $x > 6$, значит, $x - 2 > 4$. Следовательно, $x - 2 = 7$ или $x - 2 = 14$, т. е. $x = 9$ или $x = 15$.

Аналогично из второго равенства получаем

$$t_2 = \frac{7x}{x-6} \Leftrightarrow t_2 = 7 + \frac{42}{x-6},$$

т. е. $x-6$ является делителем числа 42. Проверим на эту делимость полученные значения x. Так как 42 делится на $9-6=3$, но не делится на $15-6=9$, то $x=9$.

Д93. Ответ: а) 43% и 48%; б) 37,5 мл.

Решение. а) Пусть в результате переливаний доля кислоты стала $(40+p)\%$ в первом стакане и $(50-q)\%$ — во втором. Объём кислоты в первом стакане увеличился при этом на p мл, а во втором — уменьшился на $\frac{150q}{100} = \frac{3q}{2}$ мл. Следовательно, $2p = 3q$. Так как $40+p < 50-q$, т. е. $p+q<10$, то условиям задачи удовлетворяет ровно одна пара натуральных чисел: $p=3$, $q=2$. Таким образом, доля кислоты в первом стакане стала равна 43%, а во втором — 48%.

б) Обозначим вместимость ложки через V. Так как после первого переливания во втором стакане стало $(75+0{,}4V)$ мл кислоты в $(150+V)$ мл раствора, то $\frac{75+0{,}4V}{150+V} = 0{,}48$. Решая это уравнение, получим $V=37{,}5$.

Д94. Ответ: 20.

Решение. Пусть частное и остаток Саши равны соответственно p и q, частное Маши равно t, а её остаток равен $20-p$ (все эти числа натуральные, причём $p \geqslant t$). Так как они делили одно и то же число, то $102p+q = 103t+(20-p)$. Это равенство можно привести к виду $103(p-t) = 20-q$. Тогда $p=t$, иначе полученное равенство не выполняется, поэтому $q=20$.

Д95. Ответ: 101.

Решение. Пусть в короля попало x яиц и y кочанов. Тогда всего зрители принесли $5x$ яиц и $7y$ кочанов. По условию $5x$ кратно 3. Так как 5 и 3 взаимно просты, то x кратно 3, т. е. $x=3m$, где m — натуральное число. Аналогично $7y$ по условию чётно, значит, $y=2k$, где k — натуральное число.

Так как в короля и герцога попало поровну предметов, то $64+x+y=4x+6y$, т. е. $3x+5y=64$. Подставив в полученное уравнение $x=3m$ и $y=2k$, получим уравнение $9m+10k=64$, имеющее единственное решение в натуральных числах: $k=1$, $m=6$. Значит, $x=18$, $y=2$.

Таким образом, 64 зрителя принесли дохлую кошку, $7y:2=$ $=7$ зрителей принесли гнилую капусту и $5x:3=30$ зрителей принесли тухлые яйца. Итого $64+7+30=101$ зритель.

Д96. Ответ: 21 мальчик и 24 девочки.

Решение. Пусть в классе x мальчиков и y девочек, т. е. в классе учатся $(x+y)$ человек. Тогда сумма оценок мальчиков равна $4x$, а сумма оценок девочек равна $3{,}25y$. По условию

$$\frac{4x+3{,}25y}{x+y}=3{,}6.$$

После упрощения получим, что $8x=7y$, т. е. $x=\frac{7y}{8}$. Так как 7 и 8 — взаимно простые числа, то y делится на 8. Находя значение x при $y=8, 16, \ldots$ и учитывая, что $30<x+y<50$, получим ответ.

► Сравните с задачей Д76. ◄

Д97. Ответ: 239 и 1767.

Решение. Пусть Вовочка должен был сложить числа a и b, а фактически сложил числа $10a$ и b, тогда $a+b=2006$ и $10a+b=4157$.

Вычитая из второго уравнения первое, получим $9a=2151$, т. е. $a=239$. Тогда $b=2006-239=1767$.

Д98. Ответ: синим закрашено 27 дм^2, зелёным — 33 дм^2, а жёлтым — 16 дм^2.

Решение. Обозначим площади, закрашенные синим (blue), зелёным (green) и жёлтым (yellow) цветом, через B, G и Y соответственно. Так как зелёный цвет получается смешением двух частей жёлтой краски и одной части синей, то на закрашивание зелёным цветом площади G расходуется количество жёлтой краски, соответствующее площади $\frac{2}{3}G$, а синей — $\frac{1}{3}G$. Учитывая, что вся синяя краска была израсходована, составим уравнение: $B+\frac{1}{3}G=38$. Кроме того, по условию G на 6 дм^2 больше, чем B, т. е. $B=G-6$. Подставив значение B в составленное уравнение, получим, что $G=33$, значит, $B=27$. Так как вся жёлтая краска также была израсходована, то $Y+\frac{2}{3}G=38$. Подставив в это равенство значение $G=33$, получим, что $Y=16$.

Д99. Ответ: 20.

Решение. Пусть a — количество отличников, b — количество двоечников, c — количество тех троечников, которые ошиблись в ответе на первый вопрос, правильно ответили на второй и ошиблись в ответе на третий.

По условию $a+b+c=19$, $b+c=12$, $c=9$. Отсюда следует, что $b=3$, $a=7$. Значит, количество троечников равно $30-7-3=20$.

Д100. Ответ: в $\frac{5}{3}$ раза.

Решение. Пусть первоначальная производительность рабочих составляла x и y (траншей за час). Тогда $2(x+y)=1$. При рытье второй траншеи производительность первого стала $\frac{1}{3}x$, а второго — $3y$, поэтому $\frac{1}{3}x+3y=1$. Из первого уравнения выражаем $y=\frac{1}{2}-x$. Подставив это значение y во второе уравнение, получим $\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}-3x=1$, откуда находим $x=\frac{3}{16}$, тогда $y=\frac{5}{16}$. Таким образом, $\frac{y}{x}=\frac{5}{3}$.

Д101. Ответ: в 11 часов.

Решение 1. Андрей и Борис были в пути $\frac{16}{5}$ и $\frac{8}{3}$ часа соответственно. Пусть a км/ч и b км/ч — скорости Андрея и Бориса соответственно. Так как они прошли одинаковые расстояния, то

$$\frac{16}{5}a=\frac{8}{3}b. \tag{1}$$

Пусть также они подошли к мосту длины L км в момент времени t, тогда это расстояние можно выразить ещё раз:

$$a\left(t-10\frac{3}{10}\right)+b(t-9)+L=\frac{16}{5}a. \tag{2}$$

Так как Андрей ушёл с моста на одну минуту позже Бориса, то

$$\frac{L}{a}-\frac{L}{b}=\frac{1}{60}. \tag{3}$$

Тем самым получена система из трёх уравнений с четырьмя переменными.

Из уравнения (1) найдём, что $b=1{,}2a$. Подставив этот результат в уравнение (3), получим, что $L=0{,}1a$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$a(t-10{,}3)+1{,}2a(t-9)+0{,}1a=3{,}2a.$$

Разделив обе его части на a, получим линейное уравнение с одной переменной, из которого найдём $t=11$.

► Как и во многих задачах занятия 7, нам не помешало, что переменных больше, чем уравнений, так как после преобразований мы получили линейное однородное уравнение. В данном случае это объясняется тем, что нам не важны сами скорости Андрея и Бориса, а важно только их отношение. Поэтому возможно другое решение, основанное на идеях занятия 5. ◄

Решение 2. Так как Андрей и Борис прошли одно и то же расстояние, то их скорости обратно пропорциональны затраченному времени, т. е. отношение скоростей Андрея и Бориса равно $\frac{8}{3} : \frac{16}{5} = \frac{5}{6}$. Значит, их скорости можно обозначить через $5x$ км/ч и $6x$ км/ч соответственно. Пусть Борис проходит мост за t минут, тогда Андрей его проходит за $(t+1)$ минуту. Время движения по мосту обратно пропорционально скорости, т. е. $\frac{t}{t+1} = \frac{5}{6}$, откуда находим $t = 5$ (мин). Значит, длина моста равна $6x \cdot \frac{1}{12} = 0{,}5x$ (км).

Пусть Андрей и Борис подошли к мосту в момент времени T, тогда выразим расстояние от A до B двумя способами и приравняем: $5x(T - 10{,}3) + 6x(T - 9) + 0{,}5x = 3{,}2 \cdot 5x$. Разделив обе части этого уравнения на x, получим линейное уравнение с одной переменной, из которого найдём $T = 11$.

Д102. Ответ: 33 года.

Решение. Пусть Александр прожил x лет, из которых правил y лет. Учитывая, что при изменении срока жизни срок правления изменяется соответственно, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x-5}{4} = y - 5, \\ \frac{x+9}{2} = y + 9. \end{cases}$$

Её решение:

$$\begin{cases} x = 33, \\ y = 12. \end{cases}$$

Д103. Ответ: мужу 34 года, жене 31 год, дочери 5 лет, сыну 3 года.

Решение. За 4 года суммарный возраст четырёх членов семьи должен был увеличиться на 16 лет, а по условию он увеличился на $73 - 58 = 15$ лет, значит, 4 года назад сын ещё не родился, а родился через год. Таким образом, сыну сейчас 3 года, а дочери $3 + 2 = 5$ лет. Пусть жене сейчас x лет, тогда мужу $(x+3)$ года. Следовательно, $x+3+x+5+3=73$, откуда находим $x=31$. Это возраст жены, а мужу сейчас 34 года.

Д104. Ответ: Васька поймал двух мышей, Базилио одну, а Леопольд ни одной.

Решение. Пусть Васька, Базилио и Леопольд поймали соответственно V, B и L мышей. Тогда условие записывается в виде системы из одного уравнения и двух неравенств: $3+L=B+V$; $V>B$; $V+L<3+B$.

Из уравнения следует, что $L=B+V-3$. Подставим это выражение во второе неравенство: $V+B+V-3<3+B$, т. е. $V<3$. Так как $V>B$ и значения всех переменных натуральные или равны нулю, возможны всего три случая: $V=1$, $B=0$, или $V=2$, $B=0$, или $V=2$, $B=1$. Только в последнем случае значение $L=B+V-3$ неотрицательно. Значит, $V=2$, $B=1$, $L=0$.

Д105. Ответ: 4.

Решение. Пусть учитель доставил в журнал n троек, тогда сумма всех оценок стала равна $23+3n$, а количество оценок стало равно $10+n$. Тройку за четверть можно будет поставить, если средний балл не меньше чем 2,5. Следовательно, $\frac{23+3n}{10+n} \geqslant 2{,}5$. Решая это неравенство, получим $n \geqslant 4$.

► Возможно также решение, в котором перебором показано, что меньше четырёх троек не хватит, а четырёх уже достаточно. ◄

Д106. Ответ: доля голубоглазых среди блондинов.

Решение. Пусть всего людей n, из них g голубоглазых и b блондинов, а количество голубоглазых блондинов равно x. По условию $\frac{x}{g} > \frac{b}{n}$. Умножим это неравенство на $\frac{g}{b}$, тогда $\frac{x}{b} > \frac{g}{n}$.

Д107. Ответ: 5 кг.

Решение 1. Так как разница в доле парня $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ не увеличила количество килограммовых пакетов, то смуглянка собрала меньше чем 12 кг. При этом четверть собранного больше чем 1 кг, значит, она собрала больше чем 4 кг. Заметим, что искомое количество килограммов не должно делиться на 4 (иначе парню нечего будет съедать) и не должно делиться на 3 (иначе при делении на 4 целая часть частного будет меньше, чем при делении на 3). Таким образом, смуглянка могла собрать 5 кг, 7 кг, 10 кг или 11 кг. Проверкой получаем, что единственно возможный ответ — это 5.

► Можно также не использовать соображения делимости, а проверить все целые числа от 5 до 11. ◄

Решение 2. Пусть смуглянка собрала x кг винограда, а парень разложил его по n пакетам, тогда из условия задачи следует, что должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} n < \dfrac{x}{4} < n+1, \\ n \leqslant \dfrac{x}{3} < n+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n < x < 4n+4, \\ 3n \leqslant x < 3n+3. \end{cases}$$

Так как $n > 0$, то $3n < 4n$ и $3n+3 < 4n+3$.

Следовательно, система равносильна двойному неравенству $4n < x < 3n+3$. Так как x и n — натуральные числа, то его можно усилить: $4n+1 \leqslant x \leqslant 3n+2$. Тогда $4n+1 \leqslant 3n+2$, следовательно, $n \leqslant 1$. Таким образом, $n = 1$, $x = 4n+1 = 3n+2 = 5$.

Д108. Ответ: верно.

Решение 1. Пусть a, b, c и d — количество учащихся, получивших «2», «3», «4» и «5» соответственно. По условию $\dfrac{3b+5d}{b+d} < \dfrac{2a+4c}{a+c}$. Так как знаменатели по смыслу задачи положительны, то обе части неравенства можно на них умножить. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим $ab + 3ad < bc - dc$.

Утверждение, истинность которого требуется проверить, записывается в виде неравенства $\dfrac{4c+5d}{c+d} < 2 + \dfrac{2a+3b}{a+b}$. После умножения на положительные знаменатели, раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых оно приводится к виду $ad < bc$.

Итак, в задаче спрашивается, следует ли из неравенства $ab + 3ad < bc - dc$ неравенство $ad < bc$. Нетрудно проверить, что следует: так как значения всех переменных положительные, то $ad < ab + 3ad < bc - dc < bc$.

► Условие «средний балл тех, кто получил „3“или „5“, меньше, чем средний балл тех, кто получил „2“или „4“» может показаться парадоксальным. Но лишь на первый взгляд. Оно означает, что троек гораздо больше, чем пятёрок, а четвёрок гораздо больше, чем двоек, т. е. троек и четвёрок много, а двоек и пятёрок мало. Условие «средний балл тех, кто получил „4“или „5“, превышает средний балл тех, кто получил „2“или „3“, меньше чем на „2“» говорит о подобном: доля двоечников среди получивших «2» или «3» меньше доли четвёрочников среди получивших «4» или «5». ◄

Решение 2. Пусть a, b, c и d — количество учащихся, получивших «2», «3», «4» и «5» соответственно. По условию

$$\frac{3b+5d}{b+d} = 3 + \frac{2d}{b+d} < \frac{2a+4c}{a+c} = 2 + \frac{2c}{a+c},$$

следовательно, $2 + \frac{2d}{b+d} < 2 + \frac{2c}{a+c}$, что равносильно неравенству $\frac{d}{b+d} < \frac{c}{a+c}$. Упрощая это неравенство, получим $ad < bc$, значит, $ad + bd < bc + bd$, т. е. $d(a+b) < b(c+d)$. Следовательно,

$$\frac{4c+5d}{c+d} = 4 + \frac{d}{c+d} < 2 + 2 + \frac{b}{a+b} = 2 + \frac{2a+3b}{a+b}.$$

► Это решение короче, но выделение целой части кажется искусственным приёмом. Однако оно имеет и неформальный смысл. В частности, если отнять по три балла у троечников и отличников (понизив средний балл этой группы на 3) и по два балла у двоечников и четвёрочников (понизив средний балл этой группы на 2), то средний балл в каждой группе станет правильной дробью. Сравнение этих дробей равносильно сравнению доли троечников в первой группе и двоечников во второй. Связь сравнения такого рода долей с условием задачи показана выше. ◄

Д109. Ответ: лучше всего быть десятым гостем — он получит самый большой кусок пирога.

Решение. Пусть какой-то из гостей с номером k отрежет себе кусочек от некоторой части пирога x. Его доля составит $\frac{xk}{100}$. После этого от пирога останется

$$x - \frac{xk}{100} = \frac{x(100-k)}{100}.$$

Следующий гость с номером $k+1$ получит кусок пирога, равный $\frac{x(100-k)}{100} \cdot \frac{k+1}{100}$.

Значит, гость с номером $k+1$ получит больше, чем гость с номером k, если

$$\frac{(100-k)(k+1)}{100^2} > \frac{k}{100}.$$

После упрощения получим неравенство $k^2 + k < 100$. Оно верно для натуральных $k = 1, 2, \ldots, 9$. Таким образом, порция будет расти для гостей с номерами от 1 до 9, а с десятого гостя начнёт уменьшаться.

► Неравенство $k^2+k<100$ квадратичное. Но так как по условию k натуральное, значение выражения k^2+k возрастает с увеличением k. Поэтому умения решать квадратичные неравенства здесь не требуется, достаточно убедиться, что для $k=9$ оно выполняется, а для $k=10$ — нет. ◄

Д110. Ответ: пристань A выше по течению.

Решение. Пусть расстояние от A до B равно s км, x км/ч — скорость судна, идущего по течению, y км/ч — скорость судна, идущего против течения, а z км/ч — скорость течения. Тогда, приравнивая реальное время путешествия и время для случая увеличенной скорости течения, получим, что

$$\frac{s}{x+z}+\frac{s}{y-z}=\frac{s}{x+z+1}+\frac{s}{y-z-1}.$$

Разделив обе части уравнения на s и перенеся некоторые слагаемые в другую часть, приведём уравнение к виду

$$\frac{1}{x+z}-\frac{1}{x+z+1}=\frac{1}{y-z-1}-\frac{1}{y-z}.$$

Тогда

$$(x+z)(x+z+1)=(y-z)(y-z-1).$$

После переноса слагаемых в левую часть, раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых и разложения на множители получим

$$(x+y)(x-y+2z+1)=0.$$

Так как $x+y>0$, то $y=x+2z+1$, поэтому $x<y$. Это означает, что x — это скорость лодки и именно она шла по течению, следовательно, пункт A расположен выше по течению реки.

► Отметим, что из условия следует, что расстояние от A до B надо измерять в км, поэтому не очень хорошо принимать его за единицу.

Полезно также провести анализ полученного результата. Запишем его так: $y-z=(x+z)+1$. Это означает, что реальная скорость катера против течения равна скорости лодки по течению, если скорость течения больше на 1 км/ч. Это не случайно. Запишем исходное уравнение в виде

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b-1},$$

где $x+z=a$, $y-z=b$. Заметим, что если разделить 2 на каждую часть, то среднее гармоническое чисел a и $a+1$ равно среднему гармоническому чисел b и $b-1$. А это возможно только в случае, когда $b-1=a$ и $a+1=b$. Значит, $b>a$. ◄

Д111. Ответ: 150 цветков.

Решение. Назовём пять цветков одного «возраста» «букетом». Из условия задачи следует, что количество цветущих букетов на поляне постоянно: каждый день один букет увядает, а взамен распускается новый.

Рассмотрим первый день цветения произвольного букета. Цветки в нём начнут увядать после того, как пройдёт 30 дней. За этот период успевают зацвести (и не увянуть) ещё 29 букетов. Именно эти букеты (и только они) цветут на тридцатый день. Следовательно, ежедневно на поляне находятся $30\cdot 5=150$ цветущих цветков.

Д112. Ответ: за 3 ч, 5 ч и 6 ч соответственно.

Решение. Пусть x, y и z часов — время, за которое каждый из землекопов может вырыть траншею. По условию

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{10},$$

где x, y и z — натуральные числа, меньшие чем 24. Без ограничения общности можно считать, что $x<y<z$, тогда $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}>\frac{1}{z}$. Следовательно, $\frac{3}{x}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{10}$, поэтому $x<\frac{30}{7}$, т.е. $x\leqslant 4$. Учитывая, что $x>1$, достаточно рассмотреть три случая.

1. Пусть $x=2$, тогда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{5}$. Выразив y, получим $y=5+\frac{25}{z-5}$. Так как $\frac{25}{z-5}\in\mathbb{N}$, то $z=6, 10, 30$. Если $z=6$, то $y=30>24$. Если $z=10$, то $y=10=z$. Значение $z=30$ не подходит, так как $30>24$.

Таким образом, этот случай невозможен.

2. Пусть $x=3$, тогда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{30}$. Так как $\frac{2}{y}>\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{30}$, то $y<\frac{60}{11}$. Учитывая, что $y>x$, получим, что $y=4$ или $y=5$.

Если $y=4$, то $z=\frac{60}{7}\notin\mathbb{N}$. Если $y=5$, то $z=6$, значит, $(3; 5; 6)$ является решением.

3. Пусть $x=4$, тогда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{9}{20}$. Так как $\frac{2}{y}>\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{9}{20}$, то $y<\frac{40}{9}$, т.е. $y\leqslant 4$. С другой стороны, $y>x$. Таким образом, в этом случае решений нет.

Д113. Ответ: 78 долларов.

Решение. Допустим, что в мешке a банкнот с номиналом 1 доллар, b двухдолларовых купюр и c пятидолларовых. Всего в мешке 26 купюр, поэтому, вытащив 20, мы оставим внутри 6. Если, оставив в мешке шесть купюр, мы наверняка вытащим из него хотя бы одну однодолларовую, значит, $a \geqslant 6+1$.

Рассуждая таким же образом, получим ещё два неравенства: $b \geqslant 6+2$; $c \geqslant 6+5$, а всего в мешке, как известно, 26 банкнот. Рассмотрим минимальные значения переменных a, b и c: $a=7$, $b=8$, $c=11$, тогда $a+b+c=26$. Значит, в мешке именно столько купюр каждого достоинства. Подставив их номиналы, узнаем, сколько денег в мешке:

$$7\cdot 1+8\cdot 2+11\cdot 5=78.$$

Д114. Ответ: 00:00 или 18:20.

Решение. Пусть в искомый момент времени на часах горели цифры $ab{:}cd$, тогда с полуночи прошло $60(10a+b)+10c+d$ минут. По условию

$$60(10a+b)+10c+d=100(a+b+c+d).$$

После упрощения это уравнение примет вид $500a=40b+90c+99d$. Так как $99d$ должно делится на 10, то $d=0$. Тогда уравнение примет вид $50a=4b+9c$, причём a может принимать только значения 0, 1 или 2.

Если $a=0$, то $b=c=0$, т. е. один из возможных ответов — 00:00.

Если $a=1$, то $4b+9c=50$. Следовательно, c — чётная цифра. Кроме того, $c \leqslant 5$, так как выражает десятки минут. Если $c=4$, то b не целое число. Если $c=2$, то $b=8$. Таким образом, получаем ещё один ответ: 18:20.

Если $a=2$, то решений нет, так как $50a=100$, а $4b+9c \leqslant 4\cdot 9+9\cdot 5=81$.

Д115. Ответ: 52 м, или 68 м, или 88 м.

Решение. При разрезании могли образоваться куски трёх различных типов (см. рис. 20), причём длина одного из типов кусков ровно вдвое больше, чем другого. Обозначим эти длины x, $2x$ и y соответственно, а длину всей верёвки — L.

Подсчитав количество кусков каждого типа, получим, что $L = 8x + 4y = 4(2x + y)$.

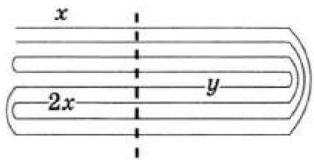


Рис. 20

Все возможные в соответствии с условием варианты длин кусков представлены в таблице.

x	4	2	9	4,5
y	9	9	4	4
L	68	52	88	52

Д116. Ответ: через 35 минут.

Решение. Попросим садовника погулять вокруг газона Холмса симметрично Ватсону относительно общей стороны. Тогда садовник будет ходить вокруг газона по часовой стрелке и встречаться с Холмсом регулярно, через равные промежутки времени. А поскольку по общей дорожке садовник и Ватсон идут бок о бок, то Ватсон встречается с Холмсом тогда и только тогда, когда садовник встречается с Холмсом на общей дорожке. Поскольку скорости Холмса и садовника относятся как $6:5$, то между очередными встречами с садовником Холмс успевает пройти $\frac{6}{11}$ периметра квадрата, а садовник — $\frac{5}{11}$.

С точки зрения движения по дорожке контур квадрата можно считать окружностью. Отмеряя от произвольной точки по $\frac{6}{11}$ её длины, мы отметим ровно 11 точек встреч, которые разбивают окружность на 11 равных частей. Обозначим эти точки через $P_1, P_2, \ldots, P_{11}$, занумеровав их по порядку против часовой стрелки. Встречи Холмса и садовника происходят через равные промежутки времени T последовательно в точках $P_1, P_7, P_2, P_8, P_3, P_9, P_4, P_{10}, P_5, P_{11}, P_6, P_1$ и т.д.

Общая дорожка составляет ровно четверть круга. На неё могут попасть две или три отмеченные точки (четыре точки не поместятся, так как расстояние между крайними точками будет составлять $\frac{3}{11} > \frac{1}{4}$, а одна точка не сможет разбить четверть круга на промежутки, меньшие $\frac{1}{11}$).

Если на общей дорожке лежат какие-то три последовательные точки (пусть P_1, P_2 и P_3), то встречи в этих точках (а значит, и с Ватсоном) происходят через промежутки времени $2T$, $2T$, $7T$, $2T$, $2T$, $7T$, ... Поэтому $2T = 10$ мин, и следующая встреча случится через $5T = 35$ минут.

Если же на общей дорожке лежат две последовательные точки (пусть P_1, P_2), то встречи в этих точках происходят через промежутки времени $2T$, $9T$, $2T$, $9T$, $2T$, $9T$, ... Это противоречит двум встречам подряд через равные промежутки времени, поэтому такой случай невозможен.

► В этой задаче сошлись воедино отношение скоростей и проценты, неравенства и комбинаторная алгебра, а главное — умение переформулировать условие, придумывая истории. Вот и книжке конец, а решивший — молодец! ◄

Авторы задач

Большинство использованных в книжке задач давно и заслуженно стали математическим фольклором или восходят к нему. Эти задачи вошли во многие задачники, учебные пособия, книжки и статьи (см. список использованной литературы), поэтому их часто публикуют без указания авторов. Однако это не повод умалчивать об авторах в тех случаях, когда они известны (в случаях, когда автор не один, его соавторы указаны в скобках).

Э. Акопян: 9.3
И. Акулич: 9.1, 9.10, 11.7, 12.1, 12.6, 12.10, Д91, Д95
С. Берлов: Д108
А. Блинков: 1.2, 5.7 (А. Хачатурян), 9.6, 11.5, Д38
Д. Ботин: 9.4
Г. Гальперин: 11.3
Е. Гладкова: Д83 (И. Раскина)
Т. Голенищева-Кутузова: Д87 (В. Клепцын)
В. Гуровиц: 1.10
О. Зайцева: 6.10
А. Заславский: Д44
Д. Калинин: 7.10 (С. Токарев)
В. Клепцын: 8.6 (М. Хачатурян), Д87 (Т. Голенищева-Кутузова)
А. Ковальджи: 1.3 (И. Раскина), 7.8, 8.8
К. Кохась: 11.9
Г. Кукин: 4.2, 11.1
Ф. Назаров: 11.10, 12.7
И. Ньютон: 8.4
И. Раскина: 1.1, 1.3 (А. Ковальджи), 1.4, 7.6, Д83 (Е. Гладкова)
А. Саблин: 6.1
А. Савин: Д101
Р. Семизаров: 11.8
А. Спивак: Д42, Д85
Д. Терёшин: 11.6
С. Токарев: 7.10 (Д. Калинин), 12.8, Д45, Д50, Д93, Д110
В. Трушков: 4.10
Р. Фёдоров: 7.9
С. Фомин: 7.7, 9.7, 11.2
Б. Френкин: Д19
А. Хачатурян: 4.3, 5.7 (А. Блинков), 9.9
М. Хачатурян: 8.6 (В. Клепцын)
А. Храбров: 7.1
А. Чеботарёв: Д63
А. Шаповалов: 7.5, 9.8, 12.9, Д62, Д74, Д114, Д116
Д. Шноль: 5.10, Д22, Д53, Д90
А. Штерн: Д70
И. Ященко: Д69

Литература и веб-ресурсы

1. *Агаханов Н.Х. и др.* Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993—2009. Заключительные этапы. М.: МЦНМО, 2010.
2. *Агаханов Н.Х. и др.* Математика. Областные олимпиады школьников по математике. 8—11 класс. М.: Просвещение, 2010.
3. *Блинков А.Д.* Геометрия в негеометрических задачах. М.: МЦНМО, 2016.
4. *Блинков А.Д.* Классические средние в арифметике и геометрии. М.: МЦНМО, 2019.
5. *Галицкий М.Л. и др.* Сборник задач по алгебре для 8—9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики. М.: Просвещение, 1992.
6. *Грибалко А.В., Медников Л.Э.* XXI—XXII турниры математических боёв имени А.П.Савина. М.: МЦНМО, 2020.
7. *Грибалко А.В., Медников Л.Э.* XXIII—XXIV турниры математических боёв имени А.П. Савина. М.: МЦНМО, 2021.
8. *Довбыш Р.И. и др.* Сборник материалов математических олимпиад. Донецк: ООО ПКФ «ВАО», 2005.
9. Избранные задачи окружных олимпиад по математике в Москве / Сост. А.Д.Блинков. М.: МЦНМО, 2015.
10. Московские математические регаты. Ч. 1, 2 / Сост. А.Д.Блинков, Е.С.Горская, В.М.Гуровиц. М.: МЦНМО, 2014.
11. *Прасолов В.В.* Задачи по алгебре. 8 класс. М.: МЦНМО, 2020.
12. *Прасолов В.В.* Задачи по арифметике и наглядной геометрии. 6 класс. М.: МЦНМО, 2021.
13. *Раскина И.В., Шаповалов А.В.* Комбинаторика М.: МЦНМО, 2020.
14. *Сгибнев А.И.* Делимость и простые числа. М.: МЦНМО, 2019.
15. *Фомин Д.В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб.: Политехника, 1994.
16. *Чулков П.В.* Арифметические задачи. М.: МЦНМО, 2019.
17. *Шаповалов А.В., Медников Л.Э.* Как готовиться к математическим боям. 400 задач турниров имени А.П.Савина. М.: МЦНМО, 2014.
18. *Шаповалов А.В., Ященко И.В.* Вертикальная математика для всех. М.: МЦНМО, 2018.
19. `https://olympiads.mccme.ru/matprazdnik/prob.html` — Архив задач Математического праздника.

20. http://olympiads.mccme.ru/regata — Математические регаты.
21. https://olympiads.mccme.ru/ustn — Задачи устных городских олимпиад для 6—7 классов.
22. http://www.problems.ru — База задач по математике.
23. http://tursavin.ru/problems.html — Задачи турниров математических боёв имени А. П. Савина.
24. https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru/zadachi — Задачи конкурса «Кенгуру».

Раздаточный материал

Занятие 1. Нарисуем условие

1.1. Эники-Беники. Эники и Беники ели вареники с вишней и с творогом. Эники съели на 35 больше вареников с вишней, чем Беники. А всего вареников Эники съели на 26 больше, чем Беники. Кто съел больше вареников с творогом и на сколько?

1.2. День рождения. У Саши и Вани дни рождения в один и тот же день. Каждый из них отмечает свой день рождения тортом со свечками по количеству исполнившихся ему лет. В тот год, когда они познакомились, у Саши на торте было столько же свечек, сколько у Вани сегодня. Известно, что суммарное количество свечек на четырёх тортах Вани и Саши (тогда и сегодня) равно 216. Сколько лет исполнилось Ване сегодня?

1.3. Торт. Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая у Пятачка?

1.4. Зонтики. Однажды в город пришёл торговец с зонтиками трёх цветов. Синих зонтиков у него было вдвое меньше, чем жёлтых и красных, красных — втрое меньше, чем жёлтых и синих, а жёлтых зонтиков было 30. Сколько всего зонтиков было у торговца?

1.5. Раздача слонов. Остап Бендер и Киса Воробьянинов раздавали населению слонов. Утром у Остапа было на 12 слонов больше, чем у Кисы, а к вечеру у Кисы осталось на 5 слонов больше, чем у Остапа. Кто раздал больше слонов за день и на сколько?

1.6. Баскетбол. На тренировке баскетболист 140 раз бросал мяч в кольцо. Количество промахов составило $\frac{2}{5}$ от числа попаданий. Сколько раз баскетболист попал в кольцо?

1.7. Печенье. Большая пачка печенья на 140 граммов тяжелее маленькой. А пять больших пачек весят на 340 граммов больше, чем семь маленьких. Что весит больше и на сколько: пять больших пачек печенья или девять маленьких?

1.8. Крокозябра. У Алисы живёт крокозябра. Каждый день она съедает бананов ровно в два раза больше своего веса, а каждую ночь худеет в три раза. Уезжая на четырёхдневные каникулы, Алиса оставила ей 40 кг бананов, и этого крокозябре в точности хватило. Сколько весила крокозябра до отъезда Алисы?

1.9. Рыбы. В пруду водится три вида рыб: окуни, щуки и карпы. Когда у рыбака спросили, сколько он сегодня поймал, он ответил: «Окуней в 3 раза больше, чем остальной рыбы, а щук в 9 раз меньше, чем остальной рыбы». Какой процент от всего улова составляют карпы?

1.10. Население. На острове $\frac{2}{3}$ всех мужчин женаты и $\frac{3}{5}$ всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке? (*Законы острова допускают брак только между мужчиной и женщиной, живущими на этом острове.*)

Занятие 2. Проценты и умножение

2.1. Рубли и проценты. а) У Алисы было 100 золотых. Алиса добыла ещё 10 золотых в понедельник и 10 золотых во вторник. Сколько у неё теперь денег?

б) В банке «Базилио» вклад ежемесячно увеличивается на 10% по сравнению с предыдущим месяцем. На сколько процентов увеличится вклад за 2 месяца?

2.2. Дождь и солнышко. Куртка промокла под дождём, отчего её масса увеличилась на 25%. На солнышке куртка подсохла, и её масса уменьшилась на 10%. Затем снова пошёл дождь, и куртка потяжелела на 20%. А потом снова выглянуло солнышко, и масса куртки уменьшилась на 20%. На сколько процентов и в какую сторону в итоге изменилась масса куртки?

2.3. Лук и морковь. К началу недели в овощной магазин завезли одинаковое количество лука и моркови. В понедельник магазин продал 60% лука и 50% моркови. Во вторник — 50% оставшегося лука и 40% оставшейся моркови. В среду — 40% оставшегося лука и 30% оставшейся моркови. В четверг — 30% оставшегося лука и 20% оставшейся моркови. Чего и во сколько раз больше осталось к утру пятницы: лука или моркови?

2.4. Зоопарк. В австралийском зоопарке 35% всех кенгуру серые, а 13% всех животных зоопарка — это кенгуру, но не серые. Сколько процентов от всех животных в зоопарке составляют кенгуру?

2.5. Число. Что больше: 15% от 22% данного числа или 22% от 15% данного числа?

2.6. Калоши. Корней Иванович прислал Крокодилу новых и сладких калош. В первый же день сам Крокодил съел на ужин 25% угощения, его жена — 30% остатка, а Тотоша — 40% того, что не съели мама с папой. Сколько процентов от присланных калош крокодилье семейство оставило на завтра?

2.7. Прибыль. Два торговца купили в городе одинаковое количество товара по одной и той же цене и увезли каждый в свою деревню продавать. Первый продал весь товар в два раза дороже закупочной цены. Второй сначала поднял цену на 60% и продал четвёртую часть товара, затем поднял цену ещё на 40% и продал остальную часть товара. Кто из них выручил больше?

2.8. Размножение. Для лаборатории биологи купили мышек и мушек. И те, и другие вскоре размножились. Количество мышек увеличилось на 20%, а мушек — в 20 раз. В результате количество мышек составило 60% от количества мушек. Кого и во сколько раз больше купили биологи?

2.9. Варенье. Чтобы научиться решать задачи на проценты, надо в понедельник съесть немножко варенья, а затем каждый день есть его больше, чем в предыдущий день: во вторник на 10%, в среду на 20%, в четверг на 30%, в пятницу на 40%, а в субботу на 50%. В понедельник Илья и Егор съели одинаковое количество варенья. Дальше каждый ошибся ровно один раз, не увеличив, а уменьшив дозу на указанное число процентов. Илья так ошибся в среду, а Егор в субботу. Кто и во сколько раз больше съел варенья в субботу?

2.10. Солнце и дождь. В Стране Дураков бывают только солнечные или дождливые дни. Банк «Кэт-энд-фокс» работает круглосуточно и предлагает два вида вкладов.

1. Вклад «Солнечный»: сумма по вкладу увеличивается на 20% каждый солнечный день и уменьшается на 20% каждый дождливый день.

2. Вклад «Дождливый», который устроен ровно наоборот.

Буратино положил в ночь на 1 июля равные суммы денег по обоим вкладам. В ночь на 1 августа сумма по вкладу «Солнечный» была на 50% больше суммы по вкладу «Дождливый». Сколько в июле было солнечных дней?

Занятие 3. Проценты, таблицы и волшебное слово

3.1. Улитка и черепаха. Скорость черепахи на 60% больше скорости улитки. На сколько процентов меньше времени потребуется черепахе, чем улитке, чтобы проползти ту же дистанцию?

3.2. Пиджак и брюки. Пиджак стоил на 80% дороже брюк. Потом на пиджак объявили 25-процентную скидку, а брюки, наоборот, подорожали на 20%. Что теперь стоит дороже и на сколько процентов?

3.3. Что тяжелее? Колода на 25% легче камня и на 40% легче бревна. Что и на сколько процентов тяжелее: камень или бревно?

3.4. Цена сыра. «Ламбер» дороже костромского сыра на 30%. На сколько процентов костромской сыр дешевле «Ламбера»? Округлите ответ до целых процентов.

3.5. Топливо. Расход бензина в новой модели автомобиля понизился на 20% по сравнению с предыдущей. На сколько процентов увеличилось расстояние, которое можно теперь проехать с теми же затратами топлива?

3.6. Наследство. Два брата получили одинаковое наследство. Через несколько лет старший увеличил своё состояние на 80%, став в полтора раза богаче младшего. На сколько процентов увеличил своё состояние младший брат?

3.7. Фрукты. Летом яблоки были на 60% дешевле, чем бананы. Но к зиме яблоки подорожали в 3,5 раза, а бананы — лишь на 5%. Какие фрукты стали дешевле и на сколько процентов?

3.8. Ещё раз: что тяжелее? Чемодан на 50% тяжелее сумки, но на 50% легче рюкзака. На сколько процентов рюкзак тяжелее сумки?

3.9. Монеты. У купца золотых монет на 30% меньше, чем серебряных, и на 12,5% меньше, чем медных. Каких монет, медных или серебряных, у купца больше и на сколько процентов?

3.10. Площадь и объём. У Лёши есть большие кубы и маленькие кубики. Площадь поверхности у куба на 125% больше, чем у кубика. На сколько процентов объём куба больше объёма кубика?

Занятие 4. Таблицы в задачах о трёх величинах

4.1. Оказалось. Когда автомобиль проехал часть пути из пункта A в пункт B, то оказалось, что он проехал столько километров, сколько минут ему придётся ехать оставшуюся часть пути. Но когда он проехал и эту часть пути, то оказалось, что он опять проехал столько километров, сколько минут он затратил на первую часть пути. Какова скорость автомобиля, если она постоянна?

4.2. Сено. У крестьянина были коза, корова и кобыла. Он подсчитал, что одного стога сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу один месяц, либо козу и корову $\frac{3}{4}$ месяца, либо кобылу и корову $\frac{1}{3}$ месяца. Не ошибся ли он?

4.3. Сколько костей? Говядина без костей стоит 90 рублей за килограмм, говядина с костями — 78 рублей за килограмм, а кости без говядины — 15 рублей за килограмм. Сколько костей в килограмме говядины?

4.4. Грузы. Один водитель сделал на 12,5 % больше рейсов, чем второй, на зато второй каждый раз перевозил в 1,5 раза больше груза. Кто перевёз больше и на сколько процентов?

4.5. Завод. На производство крямзелей секретный завод потратил на 25 % меньше титана, чем на производство штрюнделей. На один крямзель идёт на 20 % больше титана, чем на один штрюндель. Чего и на сколько процентов больше сделано на заводе: крямзелей или штрюнделей?

4.6. Столько же. Сорок пять конфет стоят столько же рублей, сколько конфет можно купить на 20 рублей. Сколько конфет можно купить на 50 рублей?

4.7. Забег. На тренировке Газов бежал на 20 % быстрее, чем Тормозов, зато Тормозов бежал на 60 % дольше. У кого из них дистанция оказалась длиннее и на сколько процентов?

4.8. Урожай. Под капусту первый фермер отвёл вдвое больше земли, чем его сосед, но урожайность у него оказалась на 40 % ниже, чем у соседа. У кого урожай капусты меньше и на сколько процентов?

4.9. Яблоки. В магазине после снижения цен на яблоки их продали за день на 50 % больше, чем до снижения цен, а дневная выручка возросла при этом на 12,5 %. На сколько процентов была снижена цена?

4.10. Кока-кола. Артём в силу природной лени, обычно делает работу за 6 часов. Но если он выпьет кока-колы, то выполняет эту же работу за 3 часа. Артём начал выполнять эту работу в полдень, но в какой-то момент ему принесли кока-колу, поэтому он закончил работу за 4 часа. В котором часу Артёму принесли кока-колу?

Занятие 5. Отношение скоростей и другие пропорции

5.1. Прогулка. Два джентльмена прогуливаются по бульвару. Они начали прогулку одновременно с противоположных концов бульвара и впервые встретились в 50 метрах от его середины. Дойдя до конца бульвара, каждый немедленно разворачивается и идёт обратно с той же скоростью. Джентльмены встретились лицом к лицу ещё дважды, после чего один догнал другого в конце бульвара. Найдите длину бульвара.

5.2. Из пункта *A* в пункт B выехал велосипедист Вася. Одновременно из пункта B ему навстречу вышел пешеход Петя. После их встречи велосипедист Вася повернул обратно, а пешеход Петя продолжил свой путь. Известно, что Вася вернулся в A на 30 минут раньше Пети, при этом его скорость была в 5 раз больше Петиной. Сколько времени затратил пешеход Петя на путь из B в A?

5.3. Свечи. Одновременно зажгли две свечи одинаковой длины: толстую (сгорает за 4 часа) и тонкую (сгорает за 2 часа). Через некоторое время их потушили. Оказалось, что огарок толстой в три раза длиннее огарка тонкой. Сколько времени горели свечи?

5.4. Соревнование. Четыре гнома (Бомбур, Фили, Кили и Торин) соревновались в беге на скорость по волшебному лесу. Фили бегает в три раза быстрее Бомбура, а Кили — в два раза быстрее Фили. Фили, Кили и Бомбур пробежали от оврага до ёлки эстафетой, каждый по трети пути. Во сколько раз быстрее Бомбура должен бежать Торин, чтобы в одиночку проделать весь путь за такое же время?

5.5. Автобус и грузовик. Из пункта O в пункт E выехал автобус. Через 5 минут из пункта O по той же дороге выехал грузовик. Через 10 минут после этого он обогнал автобус и прибыл в пункт E на 15 минут раньше автобуса. Сколько времени автобус ехал из пункта O в пункт E?

5.6. Гонцы. Из пунктов E и $Ю$ навстречу друг другу одновременно выбежали два гонца с постоянными скоростями. Добежав до конца, они немедленно поворачивали обратно. Первый раз они встретились в 6 км от E, а второй раз — в 4 км от $Ю$. Найдите расстояние между E и $Ю$.

5.7. Лифт. В доме два лифта: пассажирский и грузовой. Каждый лифт ходит вверх и вниз с одной и той же постоянной скоростью, но у грузового и пассажирского лифта эти скорости отличаются. Сейчас пассажирский лифт на 10-м, а грузовой — на 21-м этаже. Саша живёт на 18-м этаже, а Ваня — на самом верхнем, и оба они хотят спуститься на первый этаж. Саше безразлично, какой лифт вызвать, — он спустится за одинаковое время. Любопытно, что и Ване тоже всё равно, какой из лифтов вызывать. Сколько этажей в доме?

5.8. Грядка клубники. Три подруги работают на сборе клубники. Аня вместе Катей могут собрать всю клубнику с грядки вдвое быстрее Жени, а Женя с Катей — втрое быстрее Ани. Во сколько раз Аня с Женей справились бы быстрее с этой грядкой, чем Катя в одиночку?

5.9. Соль. Купец купил в Твери несколько мешков соли и продал их в Москве с прибылью в 100 рублей. На все вырученные деньги он снова купил в Твери соль (по тверской цене) и продал в Москве (по московской цене). На этот раз прибыль составила 120 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?

5.10. Кормёжка. Чайку кормят с плывущего катера. Вниз бросают кусок хлеба, чайка за 3 секунды поднимает кусок с поверхности моря, а затем за 12 секунд догоняет катер. Войдя в залив, катер уменьшил скорость в два раза. Какое время теперь потребуется чайке, чтобы догнать катер, после того как она поднимет кусок хлеба?

Занятие 6. Составление уравнений: зачем и как

6.1. Ручки. Офеня (*продавец вразнос*) купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя офеня получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

6.2. Двоечники. В классе хватает двоечников, но Вовочка учится хуже всех. Педсовет решил, что либо Вовочка должен к концу четверти исправить двойки, либо его исключат. Если Вовочка исправит двойки, то в классе будет 24 % двоечников, а если его выгонят, то двоечников станет 25 %. Какой процент двоечников в классе сейчас?

6.3. Наклейки. У одноклассниц Маши и Светы одинаковое количество тетрадей. Они купили одинаковые наборы наклеек с котиками. Маша наклеила на 7 тетрадей по одному котику, а на остальные — по 7 котиков. Света наклеила на 11 тетрадей по одному котику, а на остальные — по 11 котиков. Сколько котиков было в наборе, если каждая девочка израсходовала весь набор?

6.4. Акция. Туристическая фирма провела акцию: «Купи путёвку в Египет, приведи четырёх друзей, которые также купят путёвку, и получи стоимость путёвки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из покупателей привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

6.5. Мантии. Гарри, Рон и Гермиона хотели купить одинаковые непромокаемые мантии. Однако им не хватало денег: Рону — трети цены мантии, Гермионе — четверти, а Гарри — одной пятой цены мантии. Когда на распродаже цена мантии упала на 9,4 сиклей, друзья объединили имеющиеся деньги и купили три мантии, потратив все деньги. Сколько сиклей стоила одна мантия до снижения цены?

6.6. Сыр. Когда лиса откусила у двух медвежат по одинаковому кусочку сыра, у первого медвежонка осталось втрое меньше сыра, чем у второго. После этого лиса снова откусила у каждого медвежонка точно по такому же кусочку, и у первого осталось вчетверо меньше сыра, чем у второго.

Во сколько раз меньше сыра было у первого медвежонка, чем у второго, до прихода лисы?

6.7. Весы. У весов сдвинута шкала (в частности, при отсутствии груза весы показывают не на ноль). Когда на эти весы положили одну связку бананов, весы показали 1,5 кг. Когда на них положили связку бананов побольше, весы показали 2,5 кг. Когда взвесили сразу обе связки бананов, весы показали 3,5 кг. Сколько на самом деле весили связки бананов?

6.8. Конфеты. Карлсону подарили пакет с конфетами: шоколадными и карамельками. За первые 10 минут Карлсон съел 20% всех конфет, причём 25% из них составляли карамельки. После этого Карлсон съел ещё 3 шоколадные конфеты, и доля карамелек среди съеденных Карлсоном конфет понизилась до 20%. Сколько конфет было в подаренном Карлсону пакете?

6.9. Встреча. Поезд, который шёл на восток, в 10 часов 36 минут проехал мимо станции Таксимо, а в 16 часов 21 минуту — мимо Новой Чары. Встречный поезд вышел из Новой Чары в 10 часов 30 минут и прибыл в Таксимо в 15 часов 6 минут. В какое время встретились поезда, если их скорости постоянны?

6.10. Носки. У Андрея в ящике вперемешку лежат носки: целые — их 60% — и с дырками — их 40%. Когда Андрей достал 4 носка, процент оставшихся носков с дырками в ящике возрос до 50%. Сколько носков в ящике могло быть первоначально?

Занятие 7. Много переменных — это не страшно

7.1. Зарплата. В средней школе № 1 Страны Дураков работали штатные и внештатные педагоги. Средняя зарплата штатных составляла 45 грошей в месяц, а внештатных — 11. После того как «из высших соображений» одного штатного педагога перевели во внештатные, сохранив его зарплату, и у штатных, и у внештатных педагогов средняя зарплата выросла на 2 гроша в месяц. Сколько в этой школе педагогов?

7.2. Эксперименты. Сельский гипнотизёр Иван Карпович разводит индюков и кур. Вследствие его экспериментов десятая часть индюков считает, что они куры, а десятая часть кур считает, что они индюки. И вообще, пятая часть всех птиц Ивана Карповича считают себя индюками. А какую часть его птичника составляют индюки на самом деле?

7.3. Средний возраст. Делегация некоторой страны на Олимпийских играх состоит из спортсменов и чиновников. Средний возраст этих спортсменов на начало олимпиады составил 22 года, а чиновников — 47 лет. При этом средний возраст всех членов делегации был равен 41 году. Какова в этой делегации доля чиновников, выраженная в процентах?

7.4. Игра. На ролевой игре эльфов оказалось на 20 меньше, чем гномов и гоблинов, вместе взятых, а гоблинов — на 14 меньше, чем эльфов и гномов, вместе взятых. Сколько гномов участвовали в игре?

7.5. Пестики — тычинки. Артемон подарил Мальвине букет из аленьких цветочков и чёрных роз. У каждой чёрной розы 4 пестика и 4 тычинки, а на стебле 2 листка. У каждого аленького цветочка 8 пестиков и 10 тычинок, а на стебле 3 листка. Листков в букете на 108 меньше, чем пестиков. Сколько тычинок в букете?

7.6. Каша. Сорока-ворона кашу варила, деток кормила. Третьему птенцу досталось столько же каши, сколько первым двум, вместе взятым. Четвёртому — столько же, сколько второму и третьему. Пятому — столько же, сколько третьему и четвёртому. Шестому — столько же, сколько четвёртому и пятому. А седьмому не досталось — каша кончилась! Известно, что пятый птенец получил 10 г каши. Сколько каши сварила сорока-ворона?

7.7. Отметки. Коля и Вася за январь получили по 20 оценок, причём Коля получил пятёрок столько же, сколько Вася четвёрок; четвёрок — столько же, сколько Вася троек; троек — столько же, сколько Вася двоек; двоек — столько же, сколько Вася пятёрок. При этом средний балл за январь у них одинаковый. Сколько двоек за январь получил Коля?

7.8. Денежка. М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20 %, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены ещё раз вырастут на 20 %?

7.9. Выборы. На выборах в парламент банановой республики каждый её житель проголосовал за одну из партий. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90 % не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46 % жителей республики любят мандарины?

7.10. Пересчёт. В шахматном турнире Солнечного города участвовало 100 коротышек. Каждый сыграл с каждым один раз. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не 0,5 очка (как он думал), а 0, а за поражение — не 0, а −1. При этом за победу начислялось 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем думал. Сколько очков набрал Незнайка?

Занятие 8. Всё течёт, всё меняется

8.1. Скорости. Чтобы проплыть расстояние между двумя пристанями по течению, лодке требуется в три раза меньше времени, чем чтобы преодолеть то же расстояние против течения. Во сколько раз собственная скорость лодки больше скорости течения?

8.2. Шарфик. С соседних островов озера одновременно поплыли навстречу друг другу шлюпка и галера. За время от их старта до встречи бабушка пирата как раз связала синий шарфик. Назавтра, пока бабушка вязала красный шарфик, шлюпка успела проплыть 6 километров по течению реки, а галера — 8 километров против течения той же реки. Сколько километров между островами, если бабушка всегда вяжет шарфики одинаково быстро?

8.3. Марсианский бамбук. Бамбук на Марсе растёт так, что каждая точка его стебля поднимается вверх с одной и той же скоростью. Однажды улитка заползла с земли на вершину такого бамбука за 7 часов. Отдохнув ровно час на вершине, она спустилась на землю за 8 часов. Во сколько раз скорость улитки больше скорости роста бамбука, если обе скорости постоянны?

8.4. Коровы. Трава на всём лугу растёт одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров съели бы всю траву за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколько должно быть коров, чтобы вся трава на лугу была съедена за 96 дней?

8.5. Катер. Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее, поэтому летом катер идёт по течению в 1,5 раза быстрее, чем против течения. Найдите скорость течения реки весной.

8.6. Траволатор. Вася и Петя шли рядом с одинаковой скоростью. Когда им на пути встретился траволатор (горизонтальный эскалатор), то Петя пошёл рядом с ним, а Вася по траволатору. Через одну минуту они одновременно подошли к концу траволатора, но по пути Вася на 15 секунд остановился завязать шнурки. За какое время Вася прошёл бы траволатор, если бы не останавливался?

8.7. Слоны. На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за один день, а стадо из 37 слонов — за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон?

8.8. Змей Горыныч. Врач сообщил Змею Горынычу, что если Змей будет выкуривать по 6 сигарет в день, то помрёт через 10 лет, а если по 17 сигарет в день, то через 5 лет. Сколько проживёт Змей, если бросит курить? (*Условимся, что все годы одинаковой длины, а каждая сигарета сокращает жизнь на одно и то же время.*)

8.9. Эскалатор. Бабушка и два её внука, Вася и Коля, одновременно вступают на эскалатор. Бабушка стоит на месте, а Вася и Коля бегут вниз и считают ступеньки, на которые наступают. Вася бежит в 2 раза быстрее Коли (т. е. Вася насчитывает 2 ступеньки, в то время как Коля — только одну). Когда бабушка доезжает до середины эскалатора, Вася уже добегает до конца, насчитав при этом 60 ступенек. Сколько ступенек насчитает на эскалаторе Коля?

8.10. Караван. По пустыне равномерно движется караван верблюдов длиной в 1 км. Всадник проехал от конца каравана к началу и вернулся к концу каравана. За это время караван прошёл 1 км. Какой путь проехал всадник, если скорость его была постоянной?

Занятие 9. Целые числа и делимость

9.1. Большие и маленькие. На рынке продавали раков: больших — по 5 рублей, маленьких — по 3 рубля, а также жаб — по рублю. Иван и Степан купили себе раков на одинаковые суммы денег, причём Иван купил больших и маленьких раков поровну, а Степан — вдвое меньше больших раков, чем маленьких. Иван расплатился одной сторублёвой купюрой, а Степан — несколькими десятирублёвыми монетами. У продавца не оказалось мелких денег, поэтому он выдал сдачу Ивану опять же раками, а Степану — жабами. Сколько всего животных унесли приятели с рынка?

9.2. Замок. Кодовый замок состоит из десяти кнопок с цифрами от 0 до 9. Чтобы его открыть, надо одновременно нажать на две кнопки. Известно, что если к произведению этих цифр добавить их сумму, то получится 34. Определите нужную комбинацию цифр.

9.3. Процент отличников. В начале года в 7 классе учились 25 человек. После того как туда пришли семеро новеньких, процент отличников увеличился на 10. Сколько теперь отличников в классе?

9.4. Сторожа. Несколько бригад сторожей спали одинаковое количество ночей. В каждой бригаде количество сторожей одно и то же, отличное от 1. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем количество бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 человеко-ночь?

9.5. Тир. Коля стрелял в тире. Если он попадал в цель, то ему давали ещё 3 дополнительных патрона. А если он попадал в цель два раза подряд, то за второе попадание ему давали 4 патрона. Сначала Коле дали 15 патронов, он сделал 44 выстрела, и патроны у него закончились. Сколько раз Коля попал в цель, если три раза подряд он не попал ни разу?

9.6. Скидка. Толстый выпуск газеты стоит 30 рублей, а тонкий — дешевле. Для пенсионеров установлена скидка на одно и то же количество процентов на все газеты, поэтому тонкий выпуск той же газеты они покупают за 15 рублей. Известно, что в любом случае газета стоит целое количество рублей.

Сколько стоит тонкая газета без скидки и сколько стоит толстая газета для пенсионеров?

9.7. Пирожки и булочки. Если каждый мальчик купит пирожок, а каждая девочка — булочку, то они вместе потратят на 1 рубль меньше, чем если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка — пирожок. И пирожок, и булочка стоят целое число рублей. Известно, что мальчиков больше, чем девочек. На сколько?

9.8. Числа в треугольнике. В каждой вершине треугольника записано натуральное число. На каждой стороне записано произведение чисел в её концах, а внутри треугольника — произведение чисел, стоящих в вершинах. Сумма всех записанных чисел равна 1000. Какие числа записаны в вершинах?

9.9. Пётр и Павел. Пётр родился в XIX веке, а его брат Павел — в XX веке. Однажды братья встретились на праздновании своего общего дня рождения. Пётр сказал: «Мой возраст равен сумме цифр года моего рождения». — «Мой тоже», — ответил Павел. На сколько лет Павел младше Петра?

9.10. По Бальзаку. Шагреневая кожа исполняет желания, но после каждого желания её площадь уменьшается: либо на 1 дм^2 в обычном случае, либо в два раза — если желание было заветное. Десять желаний уменьшили площадь кожи втрое, следующие несколько — ещё всемеро, а ещё через несколько желаний кожа вообще пропала. Какова первоначальная площадь кожи?

Занятие 10. Сколько переменных? Сколько уравнений?

10.1. Не запутаться. Король сказал королеве: «Сейчас мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам теперь. Когда же Вам будет столько лет, сколько мне теперь, нам вместе будет 63 года». Интересно, сколько лет сейчас каждому из них?

10.2. Насосы. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера за 11 часов. Если бы сначала три насоса заполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За какое время три насоса могут заполнить второй танкер? (Объёмы танкеров различны.)

10.3. Разнообразие. Если 2 км пройти пешком, 3 км проехать на велосипеде и 20 км — на мотоцикле, то потребуется 1 ч 6 мин; если 5 км пройти пешком, 8 км проехать на велосипеде и 30 км — на мотоцикле, то потребуется 2 ч 24 мин. Найдите время, необходимое для того, чтобы пройти 4 км пешком, проехать 5 км на велосипеде и 80 км на мотоцикле.

10.4. Сколько лет? Когда Коля был молод, как Оля,
столько лет было тётушке Поле,
сколько Коле теперь вместе с Олей.
Сколько лет было Коле, когда тётушка Поля
была в нынешнем возрасте Коли?

10.5. Трое детей. На вопрос о возрасте своих детей математик ответил: «У нас трое детей. Когда родился наш первенец, суммарный возраст членов семьи составлял 45 лет, год назад, когда родился третий ребёнок, — 70 лет, а в этом году суммарный возраст детей — 14 лет. Сколько сейчас лет каждому ребёнку?

10.6. Фестиваль. В шахматном фестивале участвовали англичане, немцы и французы. Каждый англичанин сыграл ровно с пятью немцами и двумя французами, каждый немец — с шестью англичанами и четырьмя французами, а каждый француз — с тремя англичанами и с одинаковым числом немцев. Найдите это число.

10.7. На треке. В соревнованиях велогонщиков на круговом треке приняли участие Вася, Петя и Коля, стартовав одновременно. Вася каждый круг проезжал на 2 секунды быстрее Пети, а Петя — на три секунды быстрее Коли. Когда Вася закончил дистанцию, Пете осталось проехать один круг, а Коле — два круга. Сколько кругов составляла дистанция?

10.8. Оценки. За контрольную работу каждый из 25 школьников получил одну из оценок «3», «4» или «5». На сколько больше было пятёрок, чем троек, если сумма всех оценок равна 106?

10.9. Бассейн. Три насоса, работая 3 часа непрерывно, полностью наполняют бассейн водой. Если первый насос будет работать 1 час, второй — 2 часа, а третий — 6 часов, они также наполнят бассейн полностью. И, наконец, если первый насос будет работать 8 часов, а второй и третий по полчаса, то они также наполнят бассейн. Верно ли, что все насосы работают с одинаковой производительностью?

10.10. Урок. Несколько учеников отвечали на уроке, и каждый получил не ниже тройки. Аня получила отметку, которая на 10 меньше, чем сумма отметок остальных; Боря получил отметку, которая на 8 меньше, чем сумма отметок остальных; Вера — отметку, которая на 6 меньше, чем сумма отметок остальных. Сколько человек отвечало на уроке и какие отметки они получили?

Занятие 11. Неравенства

11.1. По бутылям. Квас заполняет несколько 50-литровых бутылей. Если его разлить в 40-литровые бутыли, то понадобится на пять бутылей больше, причём одна из них останется неполной. Если же этот квас разлить в 70-литровые бутыли, то их понадобится на четыре меньше и тоже одна бутыль останется неполной. Сколько имеется кваса?

11.2. Шалтай-Болтай. Известно, что 175 Шалтаев стоят дороже, чем 125 Болтаев, но дешевле, чем 126. Хватит ли ста рублей на трёх Шалтаев и одного Болтая, если каждый из них стоит целое число рублей?

11.3. Выкуп. Для выкупа своей сестры — принцессы старшему брату не хватало пяти бриллиантов, среднему — шести, младшему — семи. Если любые два брата сложатся, то бриллиантов всё равно не хватит, но если сложатся все трое, то хватит с избытком. Сколько бриллиантов составляет выкуп?

11.4. Стулья. В зале расставлены стулья в 13 рядов, причём на последний ряд не хватило нескольких стульев. Потом их переставили в 27 рядов, при этом в каждом ряду поставили на 7 стульев меньше, чем при первоначальной расстановке, и на последний ряд не хватило 3 стульев. Сколько всего было стульев?

11.5. Столы. Турнир математических боёв в «Берендеевых Полянах» продолжался 7 дней. На 28 команд-участниц в столовой накрывалось ровно 28 столов. В первый же день не все команды ели за своим столом. Во второй день команд, евших не за своим столом, оказалось на 2 больше, в третий день — ещё на 2 больше и т. д. По окончании турнира выяснилось, что каждая команда всё-таки сумела поесть за отведённым ей столом не менее пяти дней. Сколько команд ели за своим столом в последний день? (*В течение одного дня команда ела за одним и тем же столом.*)

11.6. Пух и Пятачок. Как-то Кролик торопился на встречу с осликом Иа-Иа, но к нему неожиданно пришли Винни-Пух и Пятачок. Будучи хорошо воспитанным, Кролик предложил гостям подкрепиться. Пух завязал салфеткой рот Пятачку и в одиночку съел 10 горшков мёда и 22 банки сгущёнки, причём горшок мёда он съедал за 2 минуты, а банку сгущёнки — за минуту. Узнав, что больше ничего сладкого в доме нет, Пух попрощался и увёл Пятачка. Кролик с огорчением подумал, что он бы не опоздал на встречу с осликом, если бы Пух поделился с Пятачком. Зная, что Пятачок съедает горшок мёда за 5 минут, а банку сгущёнки — за 3 минуты, Кролик вычислил наименьшее время, за которое гости могли бы уничтожить его запасы. Чему равно это время? (*Как горшок мёда, так и банку сгущёнки можно делить на любые части.*)

11.7. Деньги. В нескольких кошельках лежат одинаковые суммы денег. Если бы количество кошельков было на 1% меньше, а денег в каждом кошельке — на копейку больше, то общая сумма денег была бы меньше. А если бы, наоборот, количество кошельков было больше на 1%, а денег в каждом кошельке — на копейку меньше, то общая сумма денег также была бы меньше. Во сколько раз увеличится общая сумма денег, если количество кошельков не менять, но в каждый кошелёк добавить по рублю?

11.8. Чёртики. Аня, Ваня и Саня рисовали чёртиков на чистых листах. Экономная Аня нарисовала чёртиков больше, чем Ваня и Саня вместе, израсходовав меньше всех листочков. Расточительный Ваня нарисовал меньше всех чёртиков, но израсходовал больше листочков, чем Аня вместе с Саней. Больше пяти чёртиков на листок не влезает. Могла ли Аня нарисовать меньше чем 30 чёртиков?

11.9. Диктант. При проверке диктанта в классе оказалось, что грубые ошибки составляют более четверти всех ошибок. Если бы каждый ученик сделал в три раза больше грубых ошибок и на две больше негрубых, то количество грубых ошибок стало бы ровно в пять раз меньше количества негрубых. Верно ли, что треть класса написала диктант без ошибок?

11.10. Шаги. Федя и Наташа стартуют с одного места и равномерно движутся по прямой в одном направлении. Федя идёт спокойно, а Наташа бежит. Пробежав 400 своих шагов, Наташа поворачивает обратно. В этот момент Федя начинает считать свои шаги и до встречи с Наташей насчитывает их 100. Чьи шаги длиннее: идущего Феди или бегущей Наташи?

Занятие 12. Нестандартные задачи

12.1. Сувениры. Фирма, состоящая из нескольких рабочих и бригадира, производит сувениры. В течение дня каждый рабочий делал по одинаковому целому количеству сувениров, а бригадир — также целое количество, которое на 13 больше, чем средняя дневная производительность фирмы. Сколько рабочих в фирме?

12.2. Яма. Трое рабочих копают яму. Они работают по очереди, причём каждый из них работает столько времени, сколько нужно двум другим, чтобы вырыть половину ямы. Работая таким образом, они выкопали яму. Во сколько раз быстрее трое рабочих выкопают такую же яму, если будут работать одновременно?

12.3. Учитель и ученики. В классе находятся учитель и несколько учеников. Известно, что возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе. Сколько учеников находится в классе?

12.4. Обгоны. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был в 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

12.5. Муравьи. По кольцевой дорожке длиной 60 см движутся в обе стороны муравьи со скоростью 1 см/с. Когда два муравья сталкиваются, они мгновенно разворачиваются и начинают двигаться с той же скоростью в противоположных направлениях. За минуту биолог насчитал 48 попарных столкновений, причём ни одно из них не произошло в момент начала наблюдения. Сколько муравьёв могло быть на дорожке?

12.6. Мельницы. Дон Кихот одержал победу над десятью ветряными мельницами. Некоторым он отрубил по два крыла, некоторым — по три, а остальным — все четыре. Первые три мельницы в сумме потеряли в полтора раза меньше крыльев, чем остальные семь. Мельниц, ставших однокрылыми, больше, чем мельниц, ставших двукрылыми. Сколько мельниц лишилось всех четырёх крыльев?

12.7. Слоны. В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если взять любого слона, кроме стоящего справа, и прибавить к его весу удвоенный вес его правого соседа, то получится 15 тонн (для каждого из 14 слонов). Найдите вес каждого из 15 слонов.

12.8. Москва—Саратов. Товарный поезд, отправившись из Москвы в x часов y минут, прибыл в Саратов в y часов z минут. Время в пути составило z часов x минут. Найдите все возможные значения x.

12.9. Оплата номеров. Управдом Остап Бендер собрал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич заинтересовался, почему у них в третьем подъезде надо собрать денег на 20% больше, чем во втором, хотя квартир во всех подъездах поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что за двузначные номера приходится платить вдвое, а за трёхзначные — втрое больше, чем за однозначные. Сколько квартир в каждом подъезде?

12.10. Тыквондо. В чемпионате мира по тыквондо 18 спортсменов состязались в разбивании тыквы одним ударом на максимальное число частей. Все участники показали различные результаты, причём у чемпиона получилось втрое больше частей, чем у занявшего десятое место, но меньше, чем у занявших девятое и десятое места, вместе взятых. Какого результата добился чемпион, если суммарное количество частей у всех участников оказалось меньше 270? (*Неразбитая тыква считается одной частью.*)

020000 048572 0200

Оглавление

Учебно-методическое издание

Инесса Владимировна Раскина
Александр Давидович Блинков

Текстовые задачи

Серия «Школьные математические кружки»

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком 6+

Подписано в печать 22.09.2022 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$.
Печать офсетная. Печ. л. 14,5. Тираж 2000 экз. Заказ № 975.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“». г. Москва,
ул. Руставели, д. 14, стр. 6. Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

В СЕРИИ «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ» ВЫШЛИ КНИГИ:

25. ***И. В. Раскина, А. Д. Блинков.*** Текстовые задачи
24. ***И. В. Раскина, А. В. Шаповалов.*** Комбинаторика: заседание продолжается
23. ***А. Д. Блинков, Г. Б. Филипповский.*** Геометрические задачи на экстремумы
22. ***А. Д. Блинков.*** Геометрия для 7 класса, обычная и не очень
21. ***А. В. Шаповалов.*** Индукция без формальностей
20. ***И. В. Раскина, А. В. Шаповалов.*** Комбинаторика
19. ***А. И. Сгибнев.*** Геометрия на подвижных чертежах
18. ***А. Д. Блинков.*** Последовательности
17. ***Ю. А. Блинков, Е. С. Горская.*** Вписанные углы
16. ***К. А. Кноп.*** Азы теории чисел
15. ***А. Д. Блинков.*** Геометрия в негеометрических задачах
14. ***И. В. Раскина.*** Логика для всех: от пиратов до мудрецов
13. ***А. В. Шаповалов.*** Математические конструкции: от хижин к дворцам
12. ***А. Д. Блинков, В. М. Гуровиц.*** Непрерывность
11. ***И. В. Раскина, Д. Э. Шноль.*** Логические задачи
10. ***А. А. Заславский, Б. Р. Френкин, А. В. Шаповалов.*** Задачи о турнирах
9. ***А. В. Шаповалов.*** Как построить пример?
8. ***А. И. Сгибнев.*** Делимость и простые числа
7. ***А. Д. Блинков.*** Классические средние
6. ***Г. А. Мерзон, И. В. Ященко.*** Длина. Площадь. Объем
5. ***К. А. Кноп.*** Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам
4. ***А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков.*** Геометрические задачи на построение
3. ***П. В. Чулков.*** Арифметические задачи
2. ***В. М. Гуровиц, В. В. Ховрина.*** Графы
1. ***Л. Э. Медников.*** Чётность

Выпуск
25