

Занимательная математика. Младшая группа

Преподаватель: Егор Коровко

ЧИСЛА И ЦИФРЫ

- Сколько существует (а) двузначных; (б) трёхзначных чисел?
- (а) Найдите наибольшее число, в десятичной записи которого все цифры различны. (б) Найдите наименьшее чётное десятизначное число, все цифры которого различны.
- (а) Приведите пример трёхзначного числа, состоящего из различных цифр, следующих в порядке возрастания, в названии которого ещё и все слова начинаются с одной и той же буквы.
(б) Приведите пример трёхзначного числа, наоборот, состоящего из одинаковых цифр, но такого, что в его названии все слова начинаются с разных букв.
- Из числа 4517045821 вычеркните четыре цифры так, чтобы, оставшееся число было:
(а) наибольшим; (б) наименьшим.
- На карточках записаны числа 415, 43, 7, 19, 74, 3. Расположите карточки в ряд так, чтобы получившееся одиннадцатизначное число было наименьшим из возможных.
- В строчку выписаны подряд числа: 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 (именно в этом порядке). Поставьте в этой строчке знаки арифметических действий $+$, $-$ и $\times$ (и никаких скобок!) так, чтобы результат выполнения этих действий оказался равным 444.
- Найдите наименьшее десятизначное число из различных цифр, делящееся на 11.
- Вася задумал три различные цифры, отличные от нуля. Петя записал все возможные двузначные числа, в десятичной записи которых использовались только эти цифры. Сумма записанных чисел равна 231. Найдите цифры, задуманные Васей.
- Есть ли у ребуса $МАТ + БОИ = ИГРЫ$ такое решение, где число $ИГРЫ$ — простое?

Задачи повышенной сложности

- Приведите пример трёхзначного числа, равного сумме факториалов своих цифр.
- Верно ли, что любое натуральное число можно представить в виде отношения двух натуральных чисел, в десятичной записи каждого из которых встречаются подряд цифры 2022?
- Натуральное число n без нулей в записи назовём фантастическим, если какую-то его цифру можно удалить и получить делитель числа n . Например, 25 — фантастическое, так как можно удалить 2 и получить 5 — делитель числа 25. Докажите, что фантастических чисел конечное количество.

Задачи для самостоятельных решений

- Давным-давно островитянин Дерб сказал своим друзьям:
— Вчера мой сосед заявил мне, что он лжец! Кем является Дерб — рыцарем или лжецом?
- Как-то раз встретились два островитянина и один сказал другому: «По крайней мере один из нас — лжец». История умалчивает, ответил ли ему на это что-либо собеседник. Тем не менее определите, кем являются оба?
- В другой раз встретились два островитянина Абыр и Валг.
— По крайней мере один из нас — рыцарь, — глубокомысленно изрёк Абыр.
— Но ты-то уж точно лжец! — рассмеялся ему в лицо Валг. Определите, кем являются оба.
- Однажды в четверг после дождя между островитянами Тимом и Томом произошёл следующий диалог:
— Ты можешь сказать, что я рыцарь, — гордо заявил Тим.
— Ты можешь сказать, что я лжец, — грустно ответил ему Том. Кем являются Тим и Том?

ЛОГИКА

Давайте сыграем в игру. Мы приехали на остров, где живут два племени: рыцари, которые говорят правду и только правду, и лжецы, которые всегда лгут (и тех и других можно назвать аборигенами).

1. Мы знаем, что Женя — рыцарь, а Саша — лжец. Придумайте, какой вопрос можно задать им обоим так, чтобы они ответили на него одинаково.
2. За столом сидят два жителя острова. Один из них сказал: «По крайней мере, один из нас рыцарь». Второй ему ответил: «Ты лжец!» Кто из них кто?
3. За столом по кругу сидит 12 аборигенов. Каждый из них говорит «Мой сосед справа — лжец». Сколько среди них лжецов?
4. Местный житель Фёдор всегда говорит правду, но когда ему задали дважды один и тот же вопрос, он дал на него разные ответы. Каким мог быть этот вопрос?
5. За столом по кругу сидит 10 аборигенов. Каждый из них произнёс фразу: «Следующие четверо, сидящие после меня по часовой стрелке, лжецы». Сколько среди этих десяти человек лжецов?
6. Вы опросили 1000 аборигенов, сидящих за огромным столом, и все они сказали: «Все остальные собравшиеся — лжецы». Сколько среди них рыцарей?

Задачи повышенной сложности

1. На остров рыцарей и лжецов приехал путешественник и нанял проводника. Однажды, увидев вдали жителя острова, путешественник сказал проводнику: «Пойди и спроси у того человека, рыцарь он или лжец». Вскоре проводник вернулся и сказал: «Этот человек сказал, что он лжец». Кем был проводник, рыцарем или лжецом?
2. В парламенте острова рыцарей и лжецов заседает 101 депутат. В целях сокращения бюджета на парламент руководство острова решило уменьшить состав парламента на одного человека. Но каждый из депутатов высказался, что если его исключат из парламента, то среди оставшихся депутатов большинство будут лжецами. Сколько лжецов и рыцарей было изначально в парламенте?
3. За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них за этим же столом есть ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «Да». Сколько из остальных могли также ответить «Да»?

Задачи для самостоятельных решений

1. Островитянин Ося сказал островитянину Диме: «Среди нас двоих есть лжец». К какому племени принадлежит каждый из них?
2. Абориген сказал своим друзьям: «Вчера мой сосед заявил мне, что он лжец!» Из какого племени этот абориген?
3. Путник встретил троих островитян и спросил каждого: «Сколько рыцарей среди двух твоих спутников?» Первый ответил «Ни одного», второй ответил: «Один». Что сказал третий?
4. Однажды в рамках акции «Передай привет другу» каждый из жителей острова отправил письмо одному из своих друзей. На вопрос «Сколько писем вы получили?» каждый житель острова ответил «Два». Докажите, что лжецов на острове не меньше, чем рыцарей.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КОМБИНАТОРИКА

Правило суммы. Если выбрать А можно одним из N способов, а выбрать В можно одним из M способов, то выбрать либо А либо В можно одним из $N + M$ способов.

Правило произведения. Если выбрать А можно одним из N способов, и для каждого из этих способов В можно выбрать одним из M способов, то выбрать А и В можно одним из $N \times M$ способов.

- В языке людоедского племени только три буквы А, У и Э. Словом считается любой набор из нескольких букв.
 - Выпишите в алфавитном порядке все двухбуквенные людоедские слова.
 - Сколько в этом языке трёхбуквенных слов, начинающихся на букву А? б) Сколько всего трёхбуквенных слов? в) Сколько в этом языке четырёхбуквенных слов?
- В прокате спортивного инвентаря можно получить 5 теннисных ракеток разной степени изношенности, 3 теннисных шарика разного цвета и 4 разных добрых слова. Сколькими способами можно выбрать:
 - Что-нибудь одно;
 - Какие-нибудь два предмета различного типа;
 - Полный комплект для тенниса «ракетка + шарик + доброе слово».
- Сколькими способами можно выбрать черную и белую клетки шахматной доски 8×8 , не имеющие общей стороны?
 - белую и чёрную ладью;
 - белого и чёрного короля;
 - белого и чёрного коня.

Задачи повышенной сложности

Правило дополнения (правило подсчёта котов). Чтобы определить количество нужных элементов множества, можно подсчитать количество всех элементов и вычесть из него количество ненужных. (Чтобы найти количество чёрных кошек в комнате, можно найти общее количество кошек и вычесть из него количество нечёрных).

- У маленькой Юли есть много синих, красных, жёлтых и зелёных кубиков.
 - Сколько разных башен высотой в 6 кубиков может построить Юля?
 - Сколько среди этих башен содержат хотя бы один синий кубик?
 - Сколько среди этих башен содержат хотя бы один синий или зелёный кубик?
- Сколько различных четырёхбуквенных слов можно составить из букв Мумбо-Юмбского алфавита? Как известно, в нём 5 букв: М, У, Б, О, Ю.
 - Сколько четырёхбуквенных мумбо-юмбских слов содержат хотя бы две одинаковые буквы?
- Кубик бросают три раза подряд. Среди возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы раз встречается шестёрка. Сколько их?

Задачи для самостоятельных решений

- В алфавите племени Умба-Юмба всего четыре буквы: Б, М, А, У. Словом считается любая комбинация из пяти букв, в которой есть хотя бы одна гласная. Сколько слов в словаре племени Умба-Юмба?
- Суслик сидит на верхней ступеньке лестницы, ведущей в подвал. Одним прыжком он может спуститься либо на одну, либо на две ступеньки вниз. Сколькими способами он может добраться до двенадцатой ступеньки?
- Сколькими способами можно поставить на шахматную доску двух королей так, чтобы они не били друг друга?
- В математическом кружке занимается 10 ребят. Сколькими способами их можно выстроить в ряд так, чтобы Аня стояла левее Бори, а Боря стоял левее Вовы?

ТЕОРИЯ ИГР И СТРАТЕГИИ

- (а) Часовая стрелка установлена на 12 часах. Двое по очереди двигают её на 2 или 3 часа вперёд. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку на 11 часов. Через 11 часов можно «перепрыгивать». Кто выигрывает при правильной игре?
(б) А что произойдёт, если ещё разрешить переводить на 4 часа?
- Есть многозначное число, например, 999. Вычисляется сумма его цифр (в данном случае 27) и начинается игра. Первый называет любое число от 27 до 999 (27 — можно называть, а 999 — нет), исходное число заменяется на это строго меньшее число. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Рассматриваются все числа из не более чем 100 цифр. При скольких из них при правильной игре победит второй игрок?
- Имеется клетчатая шоколадка 322×2022 . За ход можно съесть дольку и все другие дольки, которые находятся выше и правее её. Проигрывает тот, кто откусывает последнюю клетку (там яд). Кто выигрывает при правильной игре?
- На доске написано число 5005^{5005} . Двое играют в следующую игру: за один ход можно либо стереть с доски два одинаковых числа, либо стереть число n и вместо него записать два числа, в произведении дающих n , но меньших него. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
- На доске написаны числа от 1 до 10000. За ход разрешается вычеркнуть любое число вместе со всеми его делителями. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
- На столе лежат карточки, на которых написаны по разу все делители числа 540000, причём на каждой карточке написан один из делителей. Два игрока по очереди берут себе по одной карточке. Проигрывает тот, у кого число на одной из его карточек делится на число на другой из его карточек. Кто выигрывает при правильной игре?

Задачи повышенной сложности

- В куче N камней. Игроки берут по очереди 1, 2 или 3 камня. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.
(а) Кто из игроков выигрывает при правильной игре?
(б) Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если один раз за игру можно пропустить ход? (Если один игрок пропустил ход, то второй уже больше не может).
(в) Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если ход можно пропустить m раз за игру? (m ходов в сумме на двух игроков).
- На доске написано число 2. За один ход разрешается прибавить к уже имеющемуся числу любой его делитель, отличный от самого числа. Проигрывает тот, кто первым получит число, большее тысячи. Кто выигрывает при правильной игре?
- Даны натуральные числа $n > k > 1$. Кирилл и Паша по очереди красят клетки квадрата $n \times n$ в чёрный цвет. Выигрывает тот, после хода которого в каждом квадрате $k \times k$ будет хотя бы одна чёрная клетка. Кто выигрывает при правильной игре?

Задачи для самостоятельных решений

- На столе лежит кучка из N спичек. Двое по очереди берут из неё любое число спичек, являющееся полным квадратом. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что существует бесконечно много натуральных N , для которых у второго игрока есть выигрышная стратегия.

- Паша и Вова играют в игру. Перед ними лежат две шоколадки:

- 100×100 и 100×500 ;
- 2×1000 и 4×2000 .

За один ход нужно выбрать одну из шоколадок, разломать её на две прямоугольные части с целыми сторонами и съесть один из трёх кусочков (в том числе можно съесть кусочек, который игрок сейчас не ломал). Ходят по очереди, начинает Паша, проигрывает тот, кто не сможет ходить. Кто из игроков побеждает при правильной игре?

ИГРА «ПЕРЕСТРЕЛКА»

1. Вася задумал число, умножил его на 2, прибавил 10, разделил на 5, умножил на 4 и вычел 18. В ответе у него получилось 62. Какое число задумал Вася?
2. В летнем лагере было три спортивных секции: шахматы, теннис и волейбол. Каждый пятый шахматист занимался ещё и теннисом. Каждый шестой теннисист ходил на шахматы, а четверть всех теннисистов занималась волейболом. Среди волейболистов каждый седьмой ходил ещё и на теннис. Всего на волейбол ходило 84 человека. Сколько человек ходило в шахматную секцию?
3. В коробке лежат синие, красные и зелёные шарики. Чтобы наверняка достать красный шарик, нужно взять 14 шариков (а тринадцати для этого может и не хватить), чтобы наверняка достать синий шарик, нужно взять 16 шариков, а чтобы достать зелёный, нужно взять 17 шариков. Сколько шариков каждого из цветов в коробке?
4. У Джона Сильвера было 30 монет достоинством 10, 15 и 20 пиастров каждая. Всего у него было 500 пиастров. Насколько больше у него было монет в 20 пиастров, чем монет в 10 пиастров? Укажите все возможные варианты и объясните, почему нет других.
5. Шахматную доску разрезали на прямоугольники шириной в одну клетку. Длина прямоугольников может быть различной. Боря забрал себе все прямоугольники, у которых обе крайние клетки белые, а Чарли – все прямоугольники, у которых обе крайние клетки чёрные. Могло ли у одного из них получиться больше прямоугольников, чем у другого?
6. На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.
7. Даны четыре натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных трёх. Наименьшее общее кратное каждых трёх из данных чисел делится на оставшееся четвёртое. Докажите, что произведение данных чисел — точный квадрат.