Занимательная математика. Старшая группа
Преподаватель: Егор Коровко

РАЗНОБОЙ

1. Несколько ребят делили апельсины. Если раздать каждому по 6 апельсинов, то останется 4 лишних. А если попытаться раздать по 7, то не хватит 5 штук. Сколько всего было апельсинов?

2. На складе лежат арбузы и дыни, причём арбузов среди них ровно 50%. Сначала на склад доставили новые дыни и арбузов стало ровно 10%. Потом доставили арбузы и их стало ровно 40%. Во сколько раз увеличилось количество арбузов?

3. На столе лежит четыре шкатулки, по одной шкатулке с изумрудами, рубинами, янтарём и кварцем. Шкатулки пронумерованы числами от 1 до 4, и на каждой из них была надпись.

1) Первая шкатулка: «Во второй шкатулке кварц».

2) Вторая шкатулка: «Изумруды не в этой шкатулке».

3) Третья шкатулка: «Здесь лежат рубины».

4) Четвёртая шкатулка: «Янтарь лежит в 1-й или 2-й шкатулке»

Оказалось, что на двух шкатулках с драгоценными камнями (с изумрудами и с рубинами) надписи ложные, а на двух других (с янтарём и с кварцем) верные. Определите, в какой шкатулке что лежит.

4. Натуральное число назовём отличным, если его можно представить в виде суммы как 8, так и 25 последовательных натуральных чисел. Сколько существует отличных десятизначных чисел?

5. Все делители числа □ пронумеровали в порядке возрастания: 1 = □1 < □2 < □3 ....

Оказалось, что □4+□6+□7 =□. Чему может быть равно □? Перечислите все возможности.

6. 101 школьник играют турнир по шахматам на выбывание (после того, как школьник проиграл, он больше не участвует в турнире). Школьник считается успешным, если он выиграл хотя бы 5 матчей. Какое максимальное количество школьников могло оказаться успешными?

7. Дана плоскость, разделённая на квадратики со стороной 1. Известно, что если у двух клеток на этой плоскости есть общий сосед (по стороне или углу), то расстояние между их центрами меньше 3. В какое наименьшее число цветов можно покрасить клетки этой бесконечной клетчатой плоскости так, чтобы расстояние между центрами клеток одного цвета было строго больше 3?

© 2024 Группа образовательных компаний «Альбион»

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

ЧИСЛА И ЦИФРЫ

1. Допишите к 444... три цифры в конец так, чтобы полученное шестизначное число делилось одновременно на 7, 8 и 9.

2. Найдите последнюю цифру числа (а) $1^4 + 2^4 + \dots + 444^4$; (б) $1^{444} + 2^{444} + \dots + 444^{444}$

3. Существуют ли такие

   (а) 4 различных натуральных числа;
   (б) 5 различных натуральных чисел;
   (в) 5 различных целых чисел;
   (г) 6 различных целых чисел,

что сумма каждых трёх из них — простое число?

4. Докажите, что $n^4 + 2n^2 + 3$ не будет простым числом ни для какого натурального n.

5. Приведите пример трёхзначного числа, равного сумме факториалов своих цифр.

6. Верно ли, что любое натуральное число можно представить в виде отношения двух натуральных чисел, в десятичной записи каждого из которых встречаются подряд цифры 2022?

7. В клетках доски 10×10 записаны числа от 0 до 99 так, как показано на рисунке. На доску поставили 10 не бьющих друг друга ладей. Чему может быть равна сумма чисел в клетках, занятых ладьями? (Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

© 2024 Группа образовательных компаний «Альбион»

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

Задачи повышенной сложности

1. Два четырёхзначных числа без нулей в их записи таковы, что если в каждом из этих чисел переставить первую цифру в конец, то их сумма не изменится. Докажите, что их сумма делится на 1111.

2. Натуральное число ? без нулей в записи назовём фантастическим, если какую-то его цифру можно удалить и получить делитель числа ?. Например, 25 — фантастическое, так как можно удалить 2 и получить 5 — делитель числа 25. Докажите, что фантастических чисел конечное количество.

3. Кирилл написал на доске натуральное число, а потом стёр последнюю цифру и написал её чуть выше, в показателе степени. Оказалось, что результат делится на первое написанное число. Какое наибольшее число мог написать на доске Кирилл?

Задачи для самостоятельных решений

1. (а) Докажите, что 100! не является квадратом целого числа.

   (б) Докажите, что произведение $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 100!$ не является квадратом целого числа.

   (в) Можно ли вычеркнуть из произведения $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 100!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 даёт остаток 2, при делении на 7 — остаток 4, а при делении на 9 — остаток 7.

3. Предположим, что 12 из 13 родов завершаются рождением одного ребёнка, а в одном случае из 13 рождаются двое — близнецы. Какую часть общего числа новорождённых составляет число новорождённых близнецов?

4. Плывя по течению реки Миссисипи, доктор Айболит на середине своего пути из Дюбюка в Клинтон встретил своего старого друга Бармалея, плывущего против течения из Клинтона в Дюбюк. Если предположить, что доктор Айболит плыл вдвое медленнее течения, а скорость Бармалея вдвое превысила скорость течения реки, то кто из них плыл дольше по времени до места их встречи и во сколько раз?

5. Карабас Барабас зарыл клад на острове среди 20 деревьев. После этого он написал завещание, в котором указал, как искать клад: надо встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго дерева, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, затем повернуть к четвёртому и пройти четверть расстояния до него, и т.д., наконец, повернуть к двадцатому и пройти двадцатую часть расстояния до него. К сожалению, Карабас забыл указать, как занумерованы деревья! Сколько разных ям придётся выкопать потомкам Барабаса, чтобы всё-таки найти клад?

6. Пусть a, b, c положительные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},$$

и что равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a=b=c$.

© 2024 Группа образовательных компаний «Альбион»

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

ЛОГИКА

Давайте сыграем в игру. Мы приехали на остров, где живут два племени: рыцари, которые говорят правду и только правду, и лжецы, которые всегда лгут (и тех и других можно назвать аборигенами).

1. Некогда перед судом предстали три островитянина, которых для конфиденциальности мы обозначим А, Б и В. Известно, что преступление совершил ровно один из них, но кто из них является рыцарями, а кто - лжецами, было неизвестно.
- Б лжец. Но преступление совершил В – заявил А.
- А и В либо оба рыцари, либо оба лжецы - сообщил суду Б.
- Б говорит правду. Но тем не менее, он и совершил преступление - сказал В.
Поразмышляв недолго, судья не только сумел определить, кто есть кто, но и изобличить преступника. А вы сумеете это сделать?

2. В клетках квадрата 4×4 стоят островитяне. В некоторый момент каждый из них произнёс: «Во всех соседних со мной клетках стоят лжецы». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди них?

3. Как-то раз встретились два островитянина и один сказал другому: «По крайней мере один из нас — лжец». История умалчивает, ответил ли ему на это что-либо собеседник. Тем не менее определите, кем являются оба.

4. В другой раз встретились два островитянина Абыр и Валг.
- По крайней мере один из нас — рыцарь, — глубокомысленно изрек Абыр.
- Но ты то уж точно лжец! — рассмеялся ему в лицо Валг.
Определите, кем являются оба.

5. Однажды в четверг после дождя между островитянами Тимом и Томом произошёл следующий диалог:
- Ты можешь сказать, что я рыцарь, — гордо заявил Тим.
- Ты можешь сказать, что я лжец, — грустно ответил ему Том. Кем являются Тим и Том?

Задачи повышенной сложности

1. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то число (не обязательно целое). Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», ..., десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», . . ., «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное количество рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

2. Вадик написал название своего родного города и все его циклические сдвиги, получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, он составил таблицу 2 и выписал её последний столбец: ВКСАМО. Кфастус сделал то же самое с названием своего родного города и получил МТТЛАРАЕКИС. Что это за город, если его название начинается с буквы С?

Таблица 1	Таблица 2
МОСКВА	АМОСКВ
АМОСКВ	ВАМОСК
ВАМОСК	КВАМОС
КВАМОС	МОСКВА
СКВАМО	ОСКВАМ
ОСКВАМ	СКВАМО

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

3. В стакан, в котором находились 1000 бактерий, поместили вирус. Каждую минуту каждый из имеющихся в стакане вирусов съедает одну бактерию, после чего каждая из оставшихся бактерий делится на две бактерии, а каждый вирус — на два вируса. Наступит ли момент, когда в стакане не останется ни одной бактерии? Если да, то когда?

Задачи для самостоятельных решений

1. На остров рыцарей и лжецов приехал путешественник и нанял проводника. Однажды, увидев вдали жителя острова, путешественник сказал проводнику: «Пойди и спроси у того человека, рыцарь он или лжец». Вскоре проводник вернулся и сказал: «Этот человек сказал, что он лжец». Кем был проводник, рыцарем или лжецом?

2. В парламенте острова рыцарей и лжецов заседает 101 депутат. В целях сокращения бюджета на парламент руководство острова решило уменьшить состав парламента на одного человека. Но каждый из депутатов высказался, что если его исключат из парламента, то среди оставшихся депутатов большинство будут лжецами. Сколько лжецов и рыцарей было изначально в парламенте?

3. За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них за этим же столом есть ровно один друг, причём у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос ”Сидит ли рядом с вами ваш друг?” сидевшие через одного ответили ”Да”. Сколько из остальных могли также ответить ”Да”?

© 2024 Группа образовательных компаний «Альбион»

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КОМБИНАТОРИКА

***Парадокс Монти Холла**. Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трёх дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверьми — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где — козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас — «не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2?» Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?*

1. В классе “ Альбион” учится 26 человек.

(а) Сколько существует способов расставить их в ряд?

(б) Сколько существует способов расставить их по кругу (расстановки, отличающиеся друг от друга поворотом, считаются одинаковыми)?

2. Сколькими способами учитель может выбрать из учеников 8«Ъ»

(а) двоих;
(б) троих;
(в) пятерых;
(г) двадцать пять человек, чтобы они таскали мебель в интересах школы?

3. А скольким способами учитель вообще может выбрать команду таскателей мебели (включая варианты «не брать никого» и «взять всех»)?

4. Учитель объявил перерыв и предложил школьникам решить две задачи:

(а) Британские моряки прибыли на остров и хотят обменять у местных аборигенов коробку спичек на мешок жемчужин по курсу «одна спичка — одна жемчужина». Аборигены считать не умеют. Как им убедиться, что обмен произойдёт честно?

(б) Довольные аборигены вернулись домой с 666 спичками. Докажите, что количество способов выбрать из этих спичек 100 и количество способов выбрать из этих спичек 566 — равные числа, используя, по возможности, аборигенские методы сравнения.

5. После перерыва Алексей отказался таскать мебель и перевёлся в другой класс. Докажите, что теперь у учителя равное количество способов выбрать чётное и нечётное число таскателей.

6. Алексей одумался и вернулся. Докажите, что количество способов выбрать нечётный и чётный отряд таскателей по-прежнему одинаково!

***

Задачи повышенной сложности

1. На сайте школы «Альбион» необходимо придумать пароль, состоящий из 10 символов, где символом может быть буква латинского алфавита или цифра. Сколько способов придумать пароль, в котором будет:
    1) ровно одна цифра;
    2) хотя бы одна цифра?
2. Каждый день из 20 Мстителей четырёх отправляют охранять камни бесконечности. Сколькими способами можно выбирать охранников в течение пяти дней так, чтобы каждый день их состав был разный?

3. В центре Переславля-Залесского дороги образуют идеальную сетку. Стасе нужно добраться в точку, которая находится на расстоянии 10 клеток по горизонтали и 5 клеток по вертикали, если смотреть по карте. Сколько способов у него построить маршрут?

© 2024 Группа образовательных компаний «Альбион»

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

Задачи для самостоятельных решений

1. (а) Сколько существует пятизначных чисел, в которых есть хотя бы две совпадающие цифры?

(б) Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры различны

(в) Сколько существует пятизначных чисел?

(г) Сколько существует пятизначных чисел, у которых есть хотя бы четыре одинаковые цифры?

(д) Сколько существует пятизначных чисел, у которых ровно три одинаковые цифры?

2. Король не очень любит числа с нулями, а к остальным числам относится нормально. Каких чисел больше среди нормальных с точки зрения короля — с суммой цифр 444 или с суммой цифр 443?

3. Дано число 101.

(а) Сколько существует способов разложить его в сумму двух натуральных слагаемых, если порядок слагаемых важен?

(б) Сколько существует способов разложить его в сумму двух натуральных слагаемых, если порядок слагаемых не важен?

(в) Сколько существует способов разложить его в сумму трёх натуральных слагаемых, если порядок слагаемых важен?

(г) Сколько существует способов разложить его в сумму ста натуральных слагаемых, если порядок слагаемых важен?

4. Король хочет раздать трём своим сыновьям 200 мешков с золотом так, чтобы каждый получил хотя бы по 33 мешка. Докажите, что количество способов сделать это совпадает с ответом задачи 3в (сам ответ в 3в тут можно не находить).

5. Сколько существует трёхзначных чисел, у которых первая цифра больше двух других, а вторая меньше третьей?

© 2024 Группа образовательных компаний «Альбион»

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

ТЕОРИЯ ИГР И СТРАТЕГИИ

1. Имеется 30 балок, длины которых 3 или 4 метра, а их суммарная длина равна ста метрам. В очередной раз выйдя из себя, Кайло Рэн перерубил их на куски. Какое количество разрезов он сделал, если длина каждого куска составила 1 метр?

2. 33 мстителя организуют патруль 33 дня. В первый день должен выйти один мститель, во второй — два, в третий — три и так далее, в последний день — общий сбор. Сможет ли Кэп организовать патрули так, чтобы все мстители вышли одинаковое количество раз?

3. Рид Ричардс и Тони Старк решили побороться за звание умнейшего человека. Они по очереди выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 2020 (но запрещено выписывать уже имеющееся число). Начинает мистер Фантастик. Если после хода игрока на доске оказываются три числа, образующих арифметическую прогрессию — этот игрок выигрывает. Игра получилась нечестной, и у одного игрока есть выигрышная стратегия. У кого?

4. В арсенале империи есть 10 шагоходов AT-AT и огромные чашечные весы. Известно, что если любые четыре шагохода встанут на левую чашу и любые три — на правую, то левая чаша перевесит. Три AT-AT встали на левую чашу и два — на правую. Какая чаша перевесит?

***

Задачи повышенной сложности

1. Питер Квилл и Тор, выясняя в очередной раз, кто из них капитан Бенатара, решили раз и навсегда это выяснить, сыграв в игру. В начале по кругу стоят числа 1, 2, 3, 4. Каждым своим ходом первый прибавляет к двум соседним числам по 1, а второй меняет любые два соседних числа местами. Первым ходит Квилл. Он выигрывает, если все числа станут равными. Может ли Тор ему помешать?

2. Есть две коробки, в одной 2021 конфет, а в другой 2022. Голодные после пробежек Барри Аллен и Уолли Уэст решают сыграть в такую игру: за один ход они съедают любое количество конфет, отличное от нуля, из любой коробки. Правила игры не допускают, чтобы после какого-то хода число конфет в одной из коробок делилось на число конфет в другой. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход, не нарушив этого условия. Кто сможет выиграть: Барри, начинающий игру, или Уолли, как бы ни играл его соперник?

Задачи для самостоятельных решений

1. 33 человека-паука организуют патруль 33 дня. В первый день должен выйти один паук, во второй — два, в третий — три и так далее, в последний день — общий сбор. Сможет ли Мигель О-Хара организовать патрули так, чтобы все пауки вышли одинаковое количество раз?

2. Двенадцать различных симбиотов стоят в ряд. Иногда в один из них заходит носитель. При этом ровно один из его соседей (если они были) выбирается из своего и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться поглощены симбиотами, если вначале все они были без носителя?

© 2024 Группа образовательных компаний «Альбион»

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@oxbrige.ru

МАТБОЙ

1. Даны параллелограмм ABCD и точка K такая, что AK = BD. Точка M — середина CK. Докажите, что ∠BMD = 90°.

2. На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты.

Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.

3. Даны четыре натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных трёх. Наименьшее общее кратное каждых трёх из данных чисел делится на оставшееся четвёртое. Докажите, что произведение данных чисел — точный квадрат.

4. В таблице 10 × 10 записано 100 различных чисел. За ход можно выбрать любой составленный из клеток прямоугольник и переставить все числа в нём симметрично относительно его центра («повернуть прямоугольник на 180°»).

Всегда ли за 99 ходов можно добиться, чтобы числа возрастали в каждой строке слева направо и в каждом столбце — снизу вверх?

5. Пусть p — простое число, большее 10. Взяли число, делящееся на p, и вставили между какими-то двумя его соседними цифрами k-значное число A. Получили число, делящееся на p. В него вставили k-значное число B — между двумя соседними цифрами числа A — и результат снова оказался делящимся на p. Докажите, что число B получается из числа A перестановкой цифр.

6. В коробке лежат белые, синие, красные и зелёные конфеты. Белых конфет в 4 раза меньше, чем синих, красных и зелёных вместе взятых. Синих конфет в 6 раз меньше, чем белых, красных и зелёных вместе.

Докажите, что если есть по конфете в день, то конфет хватит на месяц, и ещё останется.

7. Вася выписал несколько чисел от 1 до ⍰ в некотором порядке, получилось одно число. Может ли оно читаться одинаково слева направо и справа налево?

8. Несколько ёжиков собирали яблоки и груши, и в итоге все собрали поровну фруктов. Сколько было ёжиков, если один из них собрал четверть всех яблок и шестую часть всех груш?

9. В кофейне встретились 55 индийцев и турок, каждый из которых пил чай либо кофе. Все индийцы говорят правду, когда пьют чай, и обманывают, когда пьют кофе, а все турки — наоборот. На вопрос «Вы пьёте кофе?» ответили «Да» 44 человека, на вопрос «Вы турок?» — 33 человека, а с утверждением «На улице идёт дождь» согласилось 22 человека. Сколько индийцев в кофейне пьют чай?

10. Найдите все такие натуральные ⍰, что (2⍰)! + 13 делится на ⍰ + 1.

Часы показывают полдень. Двое играющих переводят часовую стрелку на 2 или 3 часа вперёд. Если после хода игрока стрелка указывает на 6, он выиграл. Кто из игроков сможет гарантировать себе победу?

© 2024 Группа образовательных компаний «Альбион»