

МАТЕМАТИКА (14-16 лет)

(преподаватель Мария Шаульская)

День 1. Логика. Рыцари и лжецы.

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: "Сколько рыцарей среди твоих спутников?". Первый ответил: "Ни одного". Второй сказал: "Один". Что сказал третий?
2. В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про своё золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:
А: Всё моё золото я украл у Дракона.
Б: Ты лжёшь.
Определите, эльфом или гномом является каждый из них.
3. На острове Невезения живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В Думе острова – 101 депутат. В целях сокращения бюджета было решено сократить Думу на одного депутата. Но каждый из депутатов заявил, что, если его выведут из состава Думы, то среди оставшихся депутатов большинство будут лжецами. Сколько рыцарей и сколько лжецов в Думе?
4. На острове проживают 1234 жителя, каждый из которых либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжёт). Однажды все жители острова разбились на пары, и каждый про своего соседа по паре сказал: "Он – рыцарь!", либо "Он – лжец!". Могло ли в итоге оказаться, что тех и других фраз произнесено поровну?
5. Известно, что среди членов правительства Лимонии (а всего в нём 20 членов) заведомо имеется хотя бы один честный, а также что из любых двух хотя бы один -- взяточник. Сколько в правительстве взяточников?
6. Однажды Алиса оказалась в какой-то из двух стран — А или Я. Она знает, что все жители страны А всегда говорят правду, а все жители страны Я — всегда лгут. Притом все они часто ездят в гости друг к другу. Может ли Алиса, задав один-единственный вопрос первому встречному, узнать, в какой из стран она находится?

День 2. Комбинаторика.

1. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
2. Номер автомашины состоит из трёх букв русского алфавита (используется 30 букв) и трёх цифр: сначала идёт буква, затем три цифры, а затем ещё две буквы. Сколько существует различных номеров автомашин?
3. На танцплощадке собрались N юношей и N девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?
4. Человек имеет 10 друзей и в течение нескольких дней приглашает некоторых из них в гости так, что компания ни разу не повторяется (в какой-то из дней он может не приглашать никого). Сколько дней он может так делать?
5. Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть единица, или остальных?
6. У людоеда в подвале томятся 25 пленников. а) Сколькими способами он может выбрать трёх из них себе на завтрак, обед и ужин? б) А сколько есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?

День 3. Теория вероятности.

1. Девять детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Серёжа и его сестра Маша. Какова вероятность того, что Серёжа и Маша окажутся рядом?
2. Имеется три ящика, в каждом из которых лежат шары с номерами от 0 до 9. Из каждого ящика вынимается по одному шару. Какова вероятность того, что
 - а) вынуты три единицы;
 - б) вынуты три равных числа?
3. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет:
 - а) пять очков;
 - б) не более четырёх очков;
 - в) от 3 до 9 очков включительно.
4. В городе, где живет Рассеянный Учёный, телефонные номера состоят из 7 цифр. Учёный легко запоминает телефонный номер, если этот номер палиндром, то есть, он одинаково читается слева направо и справа налево. Например, номер 4435344 Учёный запоминает легко, потому что этот номер палиндром. А номер 3723627 не палиндром, поэтому Учёный такой номер запоминает с трудом. Найдите вероятность того, что телефонный номер нового случайного знакомого Учёный запомнит легко.
5. Какова вероятность того, что в четырёх сданных картах будет один туз и один король?
6. В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что:
 - а) они выйдут на разных этажах
 - б) двое выйдут на одном этаже;
 - в) все выйдут на одном этаже.

День 4. Математическая индукция.

1. Доказать, что при любом $n \geq 1$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
2. Докажите тождество: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
- 3.

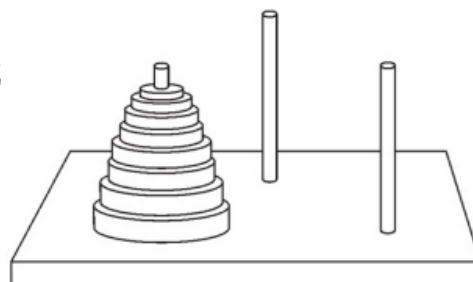
(Ханойские башни) Есть три стержня и несколько колец разного размера (изначально все кольца на одном стержне). Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. Можно ли переместить всю башню с одного стержня на другой, если колец всего

а) 2 кольца, б) 3 кольца, в) 5 колец, г) n колец?

4. Доказать, что при любом $n \geq 1$:

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

5. На плоскости проведены n прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что они разбивают плоскость на $2n$ областей.



День 5. Доказательство от противного.

1. Имеется 101 пуговица, каждая пуговица — одного из 11 цветов. Докажите, что либо среди этих пуговиц найдутся 11 пуговиц одного цвета, либо 11 пуговиц разных цветов.
2. За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа - мальчики.
3. Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?
4. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.
5. Среди любых десяти из шестидесяти ребят найдутся трое одноклассников. Докажите, что среди всех них найдутся 15 одноклассников.
6. Докажите, что простых чисел, дающих остаток 2 при делении на 3, бесконечно много.

День 6. Теория чисел. Делимость

1. You are given that N is a whole number which is a multiple of 6 and a multiple of 10. For each of the following statements say whether you can be sure it is true, it might or might not be true or it definitely isn't true. Explain your answer in each case. A) N is a multiple of 60. B) N has a factor of 15. C) N is a factor of 100. D) N is a multiple of 7.
2. Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.
3. Можно ли монетами по 14 и 35 шиллингов заплатить без сдачи сумму в 10 000 шиллингов?
4. Ковбой Билл зашёл в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара и шесть коробков непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал с него 11 долларов 80 центов (1 доллар = 100 центов), и в ответ на это Билл вытащил револьвер. Тогда бармен пересчитал стоимость покупки и исправил ошибку. Как Билл догадался, что бармен пытался его обсчитать?
5. Силач Шварценеггер может одним ударом разбить любой кусок бетона на три части. Сколько ударов ему понадобится сделать, чтобы разбить бетонную плиту на 111 частей?
6. На поле Чудес растут деревья с золотыми монетами (на разных деревьях может быть разное число монет!). Каждую ночь на каждом дереве вырастает одна монета. 1 марта на деревьях было всего 2005 монет. В марте Буратино посадил ещё одно дерево (пока без монет), и 31 марта на деревьях оказалось всего 2992 монеты. В какой день Буратино посадил дерево?

День 7. Логика. Задачи-шутки.

1. Мальчик Стёпа говорит: позавчера мне было 10 лет, а в следующем году мне исполнится 13. Может ли такое быть?
2. Король решил уволить в отставку премьер-министра, но не хотел его обидеть. Когда премьер-министр пришёл к королю, тот сказал: "В этот портфель я положил два листа бумаги. На одном из них написано "Останьтесь", на другом — "Уходите". Листок, который вы сейчас не глядя вытянете из портфеля, решит вашу судьбу". Премьер-министр догадался, что на обоих листках написано "Уходите". Однако ему удалось сделать так, что король его оставил. Как поступил премьер-министр?
3. В комнате стоят трёхногие табуретки и четвероногие стулья. Когда на все эти сидячие места уселись люди, в комнате оказалось 39 ног. Сколько в комнате табуреток?
4. Назовём натуральное число "изумительным", если оно имеет вид $a^b + b^a$ (где a и b - натуральные числа). Например, число 57 - изумительное, так как $57 = 2^5 + 5^2$. Является ли изумительным число 2006?
5. В озере есть участок, заросший кувшинками. Каждый день этот участок увеличивается в размере в 2 раза. Известно, что кувшинки покроют всю поверхность озера за 48 дней. За сколько дней кувшинки покроют ровно половину поверхности озера?
6. Найдите ключ к "тарабарской грамоте" - тайнописи, применявшейся ранее в России для дипломатической переписки: "Пайцике тсюг т "камащамлтой чмароке" — кайпонили, нмирепашвейля мапее ш Моллии цся цинсоракигелтой неменилти".

День 8. Задачи на движение

1. A man is going to ride his horse from his house to a town 39 miles away. After he leaves his house, he rides at 24 miles per hour for the first forty-five minutes, then speeds up when he reaches a good track and rides at 36 miles per hour for the next 15 miles, until he reaches a river. He then lets the horse drink for ten minutes. After this, he continues to town at a gentle pace through the woods. Altogether, he finds he has taken two hours to travel the 39 miles from his house to the town. What is his average speed when he is riding at a gentle pace through the woods?