

## Занятие 3. Теория множеств

### Теория

Множество — это совокупность различных объектов, называемых элементами множества.

Пример:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\emptyset = \{\}$ .  $\emptyset$  - пустое множество.

Мощность множества — количество элементов в множестве. Обозначается  $|A|$ .

*Чему равна мощность множества  $A$ ? Чему равна мощность множества  $\emptyset$ ?*

3 принадлежит множеству  $A$ :  $3 \in A$

7 не принадлежит множеству  $A$ :  $7 \notin A$

Подмножество — множество, состоящее только из элементов множества  $A$ . Обозначается  $B \subseteq A$ . Если  $B \subseteq A$  и  $B \neq A$ , то  $B$  - собственное подмножество множества  $A$ . Обозначается  $B \subset A$ .

Множество, состоящее из всех подмножеств множества  $A$ , называется множеством всех подмножеств множества  $A$  и обозначается  $2^A$ . *Чему равна мощность множества  $2^A$ ?*

Объединение множеств — множество, состоящее из всех элементов множества  $A$  и всех элементов множества  $B$ . Обозначается  $A \cup B$ .

Пересечение множеств — множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат и множеству  $A$ , и множеству  $B$ . Обозначается  $A \cap B$ .

### Парадокс Рассела

Пусть  $A$  - множество всех множеств, которые не содержат самих себя. Тогда возникает вопрос: содержит ли  $A$  само себя? Если содержит, то по определению  $A$  не должно содержать себя. Если не содержит, то по определению  $A$  должно содержать себя. Таким образом, возникает противоречие.

Из-за наличия этого парадокса оригинальная теория множеств называется наивной теорией множеств. Во избежание парадоксов была создана аксиоматическая теория множеств.

## Задания

1.  $A = \{3, \text{яблоко}, \emptyset, \{3, 15\}\}$ . Чему равна мощность множества  $A$ ? Чему равна мощность  $2^A$ . Выпишите это множество явно. Чему равна мощность пересечения этого множества и множества всех песчинок на земле?
2. Для некоего множества  $A$ , чему равны результаты этих выражений:  $A \cap \emptyset$ ,  $A \cup \emptyset$ ,  $A \cap A$ ,  $A \cup A$ ?
3. Зная  $|A|$ , чему равна мощность множества  $2^A$ ?
4. Зная  $|A|$ ,  $|B|$ ,  $|A \cap B|$ , чему равна мощность множества  $A \cup B$ ?
5. В классе все увлекаются математикой или биологией. Сколько человек в классе, если математикой занимаются 15 человек, биологией – 20, а математикой и биологией – 10?
6. В саду у Ани и Вити росло 2006 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?
7. В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?
8. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот», а остальных — слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали своё слово верно?
9. Антон, Артём и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовём задачу трудной, если её решил только один человек, и лёгкой, если её решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества лёгких?

## Домашнее задание

1.  $A = \{3, 7, 15, \emptyset\}$ , чему равно  $|A|$ ,  $2^A$ ,  $|2^A|$ ,  $A \cap 2^A$ ,  $A \cup 2^A$ ?
2. Известно, что  $|A| = 5$ ,  $|B| = 7$ ,  $|A \cap B| = 3$ . Чему равно  $|A \cup B|$ ?
3. Известно, что  $|A| = 5$ ,  $|B| = 7$ ,  $|C| = 6$ ,  $|A \cap B| = 3$ ,  $|A \cap C| = 4$ ,  $|B \cap C| = 3$ .  
Чему равно  $|A \cup B \cup C|$ ?
4. Существует ли множество, у которого ровно 7 подмножеств?