

Домашнее задание про чётность.

1. На занятие кружка пришли 24 школьника, среди них отличница Маша. Руководитель спросил у каждого из них, кроме Маши, сколько у них знакомых среди остальных пришедших. В ответ прозвучали только числа 3 и 5. Докажите, что Маша с кем-нибудь знакома.
2. На прямой сидят три жабы. Каждую секунду одна из них прыгает через какую-нибудь из оставшихся (но не через двух сразу). Могут ли они вернуться в начальную позицию через 57 секунд?
3. В классе 18 человек. Каждый день дежурят трое. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через некоторое время каждый ровно один раз подежурил с каждым?
4. Можно ли подобрать такие нечетные числа $a_1, a_2, \dots, a_{100}$, что $1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_{100} = 1$
5. Клетки доски 7×7 покрашены в шахматном порядке. Разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые две соседние клетки. Можно ли с помощью таких операций перекрасить всю доску в белый цвет, если
 1. угловые клетки черные
 2. угловые клетки белые