*Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс*

# ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ
# 2. ПРОСТРАНСТВО. ВРЕМЯ. ДВИЖЕНИЕ

Оглавление

*Глава* 15

# СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ



## *§ 1. Принцип относительности*

Свыше двухсот лет считалось, что уравнения движения, провозглашенные Ньютоном, правильно описывают природу. Потом в них была обнаружена ошибка. Обнаружена и тут же исправлена. И заметил ошибку, и исправил ее в 1905 г. один и тот же человек — Эйнштейн.

Второй закон Ньютона, выражаемый уравнением

$$\mathbf{F}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt},$$

безмолвно предполагал, что $m$ — величина постоянная. Но теперь мы знаем, что это не так, что масса тела возрастает со скоростью. В формуле, исправленной Эйнштейном, $m$ появилась в таком виде:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (15.1)$$

Здесь «масса покоя» $m_0$— это масса неподвижного тела, а $c$ — скорость света (примерно $3\cdot 10^5$ *км/сек*).

Для кого теория нужна лишь для решения задач, тому этой формулы будет вполне достаточно. Больше ничего от теории относительности ему не понадобится; он просто введет в законы Ньютона поправку на изменяемость массы. Из самой формулы очевидно, что рост массы в обычных условиях незначителен.

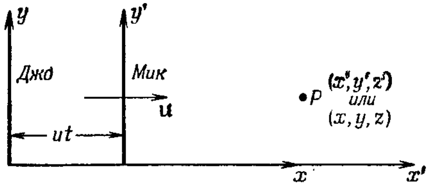
Даже если $v$ — скорость спутника (около 8 *км/сек*), то и при этих условиях $v/c=3/10^5$; подстановка этой величины в формулу показывает, что поправка к массе составит не более одной двухмиллиардной части самой массы, что, пожалуй, заметить невозможно. На самом деле, правильность формулы подтверждена наблюдением движения разнообразных частиц, скорость которых практически вплотную подходила к скорости света. В обычных условиях рост массы незаметен; тем замечательней, что он сперва был обнаружен теоретически, а уж после открыт на опыте. Хотя для достаточно больших скоростей рост может быть как угодно велик, открыт он был не таким путем. Закон этот в момент своего открытия означал лишь едва заметное изменение в некоторых цифрах. Тем интереснее разобраться, как сочетание физического размышления и физического эксперимента вызвало его к жизни. Вклад в это дело внесло немалое число людей, но конечным итогом их деятельности явилось открытие Эйнштейна.

У Эйнштейна, собственно говоря, есть две теории относительности. Мы будем здесь говорить только о *специальной теории относительности*, ведущей свое начало с 1905 г. В 1915 г. Эйнштейн выдвинул еще одну теорию, называемую *общей теорией относительности*. Она обобщает специальную теорию на случай тяготения; мы не будем ее здесь обсуждать.

Принцип относительности впервые высказал Ньютон в одном из следствий из Законов Движения: «Относительные движения друг по отношению к другу тел, заключенных в каком-либо пространстве, одинаковы, покоится ли это пространство или движется равномерно и прямолинейно без вращения». Это означает, к примеру, что при свободном полете межпланетного корабля с постоянной скоростью все опыты, поставленные на этом корабле, все явления, наблюдаемые на нем, будут таковы, как будто он покоится (конечно, при условии, что наружу из корабля выходить не будут). В этом смысл принципа относительности. Мысль эта — довольно проста; вопрос только в том, *верно ли*, что во всех опытах, производимых внутри движущейся системы, законы физики выглядят такими же, какими они были бы, если бы система стояла на одном месте. Давайте же сначала посмотрим, так ли выглядят законы Ньютона в движущейся системе. Для этого нам снова понадобится помощь наших молодых людей — Мика и Джо.

Пускай Мик отправился вдоль по оси $x$ с постоянной скоростью $u$ и измеряет свое положение в какой-то точке, показанной на фиг. 15.1. Он обозначает «$x$-расстояние» точки в своей системе координат как $x'$. Джо стоит на месте и измеряет положение той же точки, обозначая ее $x$-координату в своей системе через $x$. Связь между координатами в двух системах ясна из рисунка. За время $t$ начало системы Мика сдвинулось на $ut$, и если обе системы вначале совпадали, то

$$x'=x-ut, \qquad y'=y,$$
$$z'=z, \qquad t'=t. \tag{15.2}$$




*Фиг. 15.1. Две системы координат, находящиеся в равномерном относительном движении вдоль оси x.*

Если подставить эти преобразования координат в законы Ньютона, то законы эти превращаются в такие же законы, но в штрихованной системе; это значит, что законы Ньютона имеют одинаковый вид в движущейся и в неподвижной системах; потому-то, проделав любые опыты по механике, и нельзя сказать, движется система или нет.

Принцип относительности применялся в механике уже издавна. Многие, в частности Гюйгенс, пользовались им для вывода законов столкновения биллиардных шаров почти так же, как мы в гл. 10* доказывали сохранение импульса.

В прошлом столетии в результате исследования явлений электричества, магнетизма и света интерес к принципу относительности возрос. Максвелл подытожил в своих уравнениях электромагнитного поля многие тщательные исследования этих явлений. Его уравнения сводят воедино электричество, магнетизм, свет. Однако уравнения Максвелла, по-видимому, *не подчиняются* принципу относительности: если преобразовать их подстановкой (15.2), то *их вид не останется прежним.* Значит, в движущемся межпланетном корабле оптические и электрические явления не такие, как в неподвижном; их можно использовать для определения его скорости, в частности определить и абсолютную скорость корабля, сделав подходящие электрические или оптические измерения. Одно из следствий уравнений Максвелла заключается в том, что если возмущение поля порождает свет, то эти электромагнитные волны распространяются во все стороны одинаково и с одинаковой скоростью $c=300\,000$ *км/сек.* Другое следствие уравнений: если источник возмущения движется, то испускаемый свет все равно мчится сквозь пространство со скоростью $c$. Так же бывает и со звуком: скорость звуковых волн тоже не зависит от движения источника.

Эта независимость от движения источника света ставит интересный вопрос. Положим, что мы едем в автомашине со скоростью $u$, а свет от задних фар распространяется со скоростью $c$. Дифференцируя первую строчку в (15.2), получаем

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}-u.$$

* Выпуск 1.

Это означает, что, в согласии с преобразованиями Галилея, видимая скорость света по измерениям, проведенным из автомашины, будет не $c$, а $c-u$. Например, скорость автомашины 100 000 *км/сек*, а скорость света 300 000 *км/сек*, тогда свет от фар будет удаляться с быстротой 200 000 *км/сек*. Во всяком случае, измерив скорость света, испускаемого фарами (если только справедливы преобразования Галилея для света), можно узнать скорость автомашины. На этой идее основывалось множество опытов по определению скорости Земли, но ни один из них не удался: *никакой скорости* обнаружено не было. Вы скоро познакомитесь очень подробно с одним из таких опытов. Вы разберетесь, что в нем случилось и в чем было дело. Что-то неладное творилось в ту пору с уравнениями физики. Но что именно?

## § 2. Преобразование Лоренца

Когда стало ясно, что с уравнениями физики не все ладится, первым долгом подозрение пало на уравнения электродинамики Максвелла. Они только-только были написаны, им было всего 20 лет от роду; казалось почти естественным, что они неверны. Их принялись переписывать, видоизменять и подгонять к тому, чтобы оказался выполненным принцип относительности в галилеевой форме (15.2). При этом в уравнениях электродинамики появились новые члены; они предсказывали новые электрические явления, но эксперимент никаких таких явлений не обнаружил, и пришлось отказаться от попыток изменить уравнения Максвелла. Постепенно всем становилось ясно, что максвелловы законы электродинамики абсолютно правильны, а загвоздка в чем-то другом.

Между тем Лоренц заметил одно замечательно любопытное явление: когда он делал в уравнениях Максвелла подстановку

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad (15.3а)$$

$$y'=y, \qquad (15.3б)$$

$$z'=z, \qquad (15.3в)$$

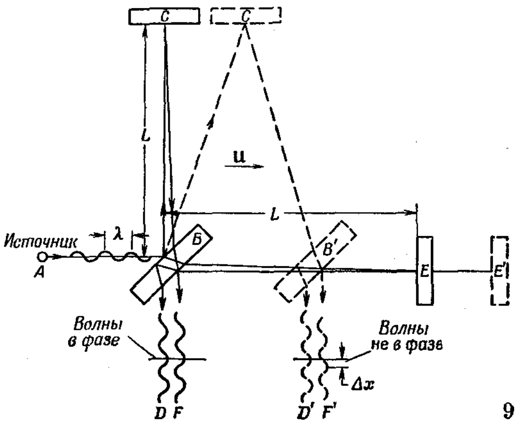
$$t'=\frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad (15.3г)$$

то форма уравнений после подстановки не менялась! Уравнения (15.3) теперь называют *преобразованием Лоренца*. А Эйнштейн, следуя мысли, впервые высказанной Пуанкаре, предположил, что *все физические законы не должны меняться от преобразований Лоренца*. Иными словами, надо менять не законы электродинамики, а законы механики. Но как же изменить законы Ньютона, чтобы *они* при преобразованиях Лоренца не менялись? Когда такая цель поставлена, то остается только переписать уравнения Ньютона так, чтобы выполнялись поставленные условия. Как оказалось, единственное, что нужно от них потребовать,— это, чтоб масса $m$ в уравнениях Ньютона приобрела вид (15.1). Стоит внести это изменение, и наступает полная гармония между уравнениями Ньютона и Максвелла. Если вы теперь, желая согласовать измерения, проведенные Миком и Джо, используете преобразования Лоренца, то вы ни за что не узнаете, кто из них движется, ибо форма всех уравнений в обеих системах координат будет одной и той же!

Интересно понять, что означает эта замена старых преобразований координат и времени на новые. Старые (галилеевы) кажутся очевидными, новые (лоренцевы) выглядят необычно. Как же это может быть, с логической и с экспериментальной точек зрения, что справедливы не старые преобразования, а новые? Чтобы разобраться в этом, мало изучить законы механики, надо (как это и сделал Эйнштейн) проанализировать и наши представления о *пространстве* и *времени*, иначе этих преобразований не поймешь. В течение некоторого времени мы будем изучать эти представления и следствия из них. Покамест же стоит отметить, что такой анализ оказывается вполне оправданным — его результаты согласуются с данными опыта.

## § 3. *Опыт Майкельсона — Морли*

Мы уже говорили, что в свое время были сделаны попытки определить абсолютную скорость движения Земли сквозь воображаемый «эфир», который, как думали тогда, пропитывает собой все пространство. Самый известный из таких опытов проделали в 1887 г. Майкельсон и Морли. Но только через 18 лет отрицательные результаты их опыта объяснил Эйнштейн.




*Фиг. 15.2. Схема опыта Майкельсона — Морли.*

Для опыта Майкельсона — Морли использовался прибор, схема которого показана на фиг. 15.2. Главные части прибора: источник света $A$, посеребренная полупрозрачная стеклянная пластинка $B$, два зеркала $C$ и $E$. Все это жестко укрепляется на тяжелой плите. Зеркала $C$ и $E$ размещены были на одинаковом расстоянии $L$ от пластинки $B$. Пластинка $B$ расщепляет падающий пучок света на два, перпендикулярных один к другому; они направляются на зеркала и отражаются обратно на пластинку $B$. Пройдя снова сквозь пластинку $B$, оба пучка накладываются друг на друга ($D$ и $F$). Если время прохождения света от $B$ до $E$ и обратно равно времени прохождения от $B$ до $C$ и обратно, то возникающие пучки $D$ и $F$ окажутся в фазе и усилятся взаимно; если же эти времена хоть немного отличаются, то в пучках возникает сдвиг по фазе и, как следствие,— интерференция. Если прибор в эфире «покоится», то времена в точности равны, а если он движется направо со скоростью $u$, то появится разница во времени. Давайте посмотрим, почему.

Сначала подсчитаем время прохождения света от $B$ к $E$ и обратно. Пусть время «туда» равно $t_1$, а время «обратно» равно $t_2$. Но пока свет движется от $B$ до зеркала, сам прибор уйдет на расстояние $ut_1$, так что свету придется пройти путь $L+ut_1$ со скоростью $c$. Этот путь можно поэтому обозначить и как $ct_1$; следовательно,

$$ct_1 = L + ut_1, \quad \text{или} \quad t_1 = \frac{L}{c-u}$$

(этот результат становится очевидным, если учесть, что скорость света по отношению к прибору есть $c - u$; тогда как раз время равно длине $L$, деленной на $c - u$). Точно так же можно рассчитать и $t_2$. За это время пластинка $B$ приблизится на расстояние $ut_2$, так что свету на обратном пути придется пройти только $L - ut_2$. Тогда

$$ct_2 = L - ut_2, \quad \text{или} \quad t_2 = \frac{L}{c+u}.$$

Общее же время равно

$$t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - u^2};$$

удобнее это записать в виде

$$t_1 + t_2 = \frac{2L/c}{1 - u^2/c^2}. \tag{15.4}$$

А теперь подсчитаем, сколько времени $t_3$ свет будет идти от пластинки $B$ до зеркала $C$. Как и прежде, за время $t_3$ зеркало $C$ сдвинется направо на расстояние $ut_3$ (до положения $C'$), а свет пройдет по гипотенузе $BC'$ расстояние $ct_3$. Из прямоугольного треугольника следует

$$(ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2,$$

или

$$L^2 = c^2 t_3^2 - u^2 t_3^2 = (c^2 - u^2) t_3^2,$$

откуда

$$t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - u^2}}.$$

При обратной прогулке от точки $C'$ свету приходится пройти то же расстояние; это видно из симметрии рисунка. Значит, и время возвращения то же ($t_3$), а общее время равно $2t_3$. Мы запишем его в виде

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{15.5}$$

Теперь мы можем сравнить оба времени. Числители в (15.4) и (15.5) одинаковы — это время распространения света в покоящемся приборе. В знаменателях член $u^2/c^2$ мал, если только $u$ много меньше $c$. Знаменатели эти показывают, насколько изменяется время из-за движения прибора. Заметьте, что эти изменения *неодинаковы* — время прохождения света до $C$ и обратно чуть меньше времени прохождения до $E$ и обратно. Они не совпадают, даже если расстояния от зеркал до $B$ одинаковы. Остается только точно измерить эту разницу.

Здесь возникает одна техническая тонкость: а что если длины $L$ не точно равны между собой? Ведь точного равенства все равно никогда не добьешься. В этом случае надо просто повернуть прибор на 90°, расположив $BC$ *по* движению, а $BE$ — *поперек*. Различие в длинах тогда перестает играть роль, и остается только наблюдать за *сдвигом* интерференционных полос при повороте прибора.

Во время опыта Майкельсон и Морли расположили прибор так, что отрезок $BE$ оказался параллельным движению Земли по орбите (в определенный час дня и ночи). Орбитальная скорость равна примерно 30 *км/сек*, и «снос эфира» в определенные часы дня или ночи и в определенное время года должен достигать этой величины. Прибор был достаточно чувствителен, чтобы заметить такое явление. Но никакого различия во временах обнаружено не было — скорость движения Земли сквозь эфир оказалось невозможно обнаружить. Результат опыта был нулевой.

Это было загадочно. Это настораживало. Первую плодотворную идею, как выйти из тупика, выдвинул Лоренц. Он допустил, что все материальные тела при движении сжимаются, но только в направлении движения. Таким образом, если длина покоящегося тела есть $L_0$, то длина тела, движущегося со скоростью $u$ (назовем ее $L_{\|}$, где значок $\|$ показывает, что движение происходит вдоль длины тела), дается формулой

$$L_{\|}=L_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{15.6}$$

Если эту формулу применить к интерферометру Майкельсона — Морли, то расстояние от $B$ до $C$ останется прежним, а расстояние от $B$ до $E$ укоротится до $L\sqrt{1-u^2/c^2}$. Таким образом, уравнение (15.5) не изменится, но $L$ в уравнении (15.4) изменится в соответствии с (15.6). В результате мы получим

$$t_1+t_2=\frac{(2L/c)\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-u^2/c^2}=\frac{2L/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{15.7}$$

Сравнивая это с (15.5), мы видим, что теперь $t_1+t_2=2t_3$. Стало быть, если прибор действительно сокращается так, как мы предположили, то становится понятным, почему опыт Майкельсона — Морли никакого эффекта не дал.

Хотя гипотеза сокращения успешно объясняла отрицательный итог опыта, она сама оказалась беззащитной перед обвинением, что ее единственная цель — избавиться от трудностей в объяснении опыта. Она была чересчур искусственной. Однако сходные трудности возникали и в других опытах по обнаружению эфирного ветра. В конце концов стало казаться, что природа вступила в «заговор» против человека, что она прибегла к конспирации и то и дело вводит какие-то новые явления, чтобы свести к нулю каждое явление, с помощью которого человек пытается измерить $u$.

И наконец, было признано (на это указал Пуанкаре), что *полная конспирация — это и есть закон природы*! Пуанкаре предположил, что в природе *есть закон*, заключающийся в том, что нельзя обнаружить эфирный ветер *никаким* способом, т. е. абсолютную скорость обнаружить невозможно.

## § 4. *Преобразование времени*

При проверке, согласуется ли идея о сокращении расстояний с фактами, обнаруженными в других опытах, оказывается, что все действительно согласуется, если только считать, что *время тоже преобразуется* и притом так, как это высказано в уравнении (15.3). По этой-то причине время $t_3$, которое затратит свет на путешествие от $B$ к $C$ и обратно, оказывается неодинаковым, если его вычисляет человек, делающий этот опыт в движущемся межпланетном корабле, или же неподвижный наблюдатель, который следит со стороны за этим кораблем. Для первого время $t_3$ равно просто $2L/c$, а для второго оно равно $2L/c\sqrt{1-u^2/c^2}$ [уравнение (15.5)]. Иными словами, если вы со стороны наблюдаете, как космонавт закуривает папиросу, вам кажется, что он делает это медленнее, нежели обычно, хотя сам он считает, что все происходит в нормальном темпе. Стало быть, не только длины должны сокращаться, но и приборы для измерения времени («часы») должны замедлить свой ход. Иначе говоря, когда часы на космическом корабле отсчитывают, по мнению космонавта, 1 *сек*, то, по мнению стороннего наблюдателя, пройдет $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ *сек*.

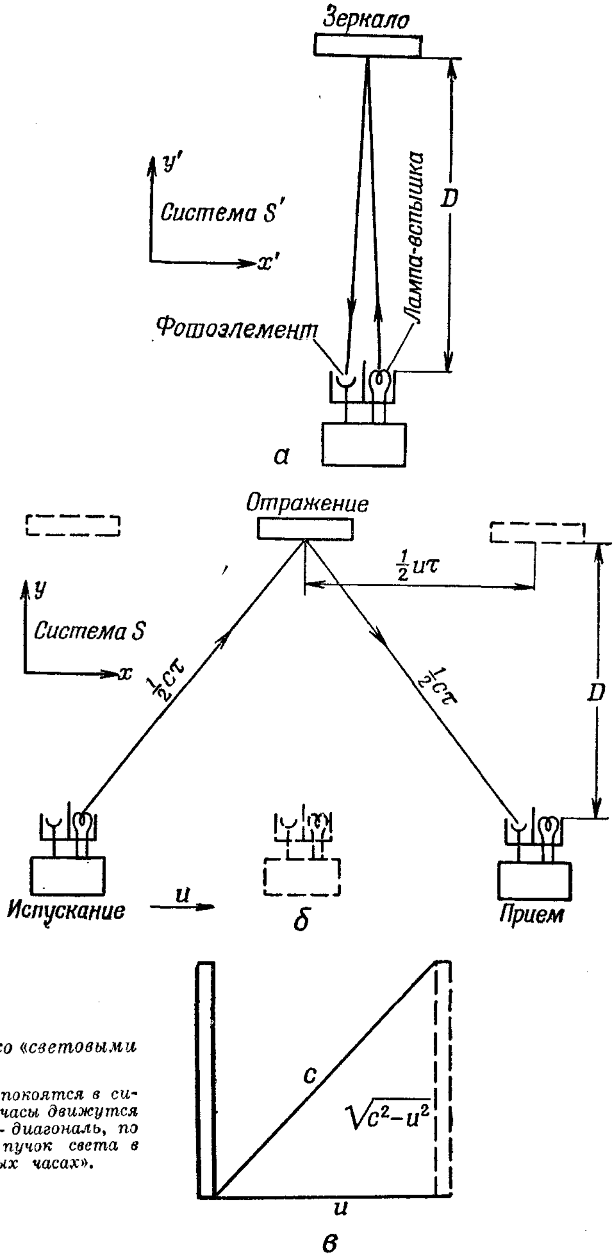
Замедление хода часов в движущейся системе — явление весьма своеобразное, и его стоит пояснить. Чтобы понять его, давайте проследим, что бывает с часовым механизмом, когда часы движутся. Так как это довольно сложно, то лучше часы выбрать попроще. Пусть это будет стержень (метровой длины) с зеркалами на обоих концах. Если пустить световой сигнал между зеркалами, то он будет без конца бегать туда-сюда, а часы будут тикать каждый раз, как только свет достигнет нижнего конца. Конструкция довольно глупая, но в принципе такие часы возможны. И вот мы изготовим двое таких часов со стержнями равной длины и синхронизуем их ход, пустив их одновременно; ясно, что они всегда будут идти одинаково: ведь длина стержней одна и та же, а скорость света $c$ — тоже. Дадим одни часы космонавту; пусть он возьмет их с собой на межпланетный корабль и поставит их поперек направления движения, тогда длина стержня не изменится. Да, но откуда мы знаем, что поперечная длина не меняется? Наблюдатель может договориться с космонавтом, что на высоте $y$ в тот момент, когда стержни поравняются, каждый сделает другому на его стержне метку. Из симметрии следует, что отметки придутся на те же самые координаты $y$ и $y'$, в противном случае одна метка окажется ниже или выше другой и, сравнив их, можно будет сказать, кто из них двигался на самом деле.

Так что же происходит в движущихся часах? Входя на борт корабля, космонавт убедился, что это вполне приличные стандартные часы и ничего особенного в их поведении на корабле он не заметил. Если бы он что-то заметил, то сразу понял бы, что он движется; если хоть что-то меняется в результате движения, то ясно, что он движется. Принцип же относительности утверждает, что в равномерно движущейся системе это невозможно; стало быть, в часах никаких изменений не произошло. С другой стороны, когда внешний наблюдатель взглянет на пролетающие мимо часы, он увидит, что свет, перебегая от зеркала к зеркалу, на самом деле движется зигзагами, потому что стержень все время перемещается боком. Мы уже анализировали такое зигзагообразное движение в связи с опытом Майкельсона — Морли. Когда за заданное время стержень сдвинется на расстояние, пропорциональное $u$ (фиг. 15.3), то расстояние, пройденное за то же время светом, будет пропорционально $c$, и поэтому расстояние по вертикали пропорционально $\sqrt{c^2-u^2}$.

Значит, свету понадобится *больше времени*, чтобы пройти движущийся стержень из конца в конец,— больше, чем когда стержень неподвижен. Поэтому кажущийся промежуток времени между тиканьями движущихся часов удлинится в той же пропорции, во сколько гипотенуза треугольника длиннее катета (из-за этого в формуле и появляется корень). Из рисунка также видно, что чем $u$ больше, тем сильнее видимое замедление хода часов. И не только такие часы начнут отставать, но (если только теория относительности правильна!) любые часы, основанные на любом принципе, также должны отстать, причем в том же отношении. За это можно поручиться, не проделывая дальнейшего анализа. Почему?

Чтобы ответить и на этот вопрос, положим, что у нас есть еще двое часов, целиком сходных между собой, скажем, с зубчатками и камнями, или основанных на радиоактивном распаде, или еще каких-нибудь. Опять согласуем их ход с нашими первыми часами. Пусть, пока свет прогуляется до конца и обратно, известив о своем прибытии тиканьем, за это время новая модель завершит свой цикл и тоже возвестит об этом какой-нибудь вспышкой, звонком или любым иным сигналом. Захватим с собой на космический корабль новую модель часов. Может быть, эти часы уже не отстанут, а будут идти так же, как их неподвижный двойник. Ах, нет! Если они разойдутся с первой моделью (которая тоже находится на корабле), то человек сможет использовать этот разнобой между показаниями обоих часов, чтобы определить скорость корабля. А ведь считается, что скорость узнать немыслимо. Смотрите, как ловко! *Нам не нужно ничего знать о механизме работы* новых часов, не нужно знать, что именно *в них* замедляется, мы просто знаем, что, какова бы ни была причина, ход часов будет выглядеть замедленным, и притом в любых часах одинаково.

Что же выходит? Если *все* движущиеся часы замедляют свой ход, если любой способ измерения времени приводит к замедленному темпу течения времени, нам остается только сказать, что *само время*, в определенном смысле, кажется на движущемся корабле замедленным. На корабле все: и пульс космонавта, и быстрота его соображения, и время, потребное для зажигания папиросы, и период возмужания и постарения — все это должно замедлиться в одинаковой степени, ибо иначе можно будет узнать, что корабль движется. Биологи и медики иногда говорят, что у них нет уверенности в том, что раковая опухоль будет в космическом корабле развиваться дольше.




*Фиг. 15.3. Опыт со «световыми часами».*

*а — «световые часы» покоятся в системе $S'$; б — те же часы движутся через систему $S$; в — диагональ, по которой движется пучок света в движущихся «световых часах».*

Однако с точки зрения современного физика это случится почти наверняка; в противном случае можно было бы по быстроте развития опухоли судить о скорости корабля!

Очень интересным примером замедления времени при движении снабжают нас мю-мезоны (мюоны) — частицы, которые в среднем через $2{,}2\cdot 10^{-6}$ *сек* самопроизвольно распадаются. Они приходят на Землю с космическими лучами, но могут быть созданы и искусственно в лаборатории. Часть космических мюонов распадается еще на большой высоте, а остальные — только после того, как остановятся в веществе. Ясно, что при таком кратком времени жизни мюон не может пройти больше 600 *м*, даже если он будет двигаться со скоростью света. Но хотя мюоны возникают на верхних границах атмосферы, примерно на высоте 10 *км* и выше, их все-таки обнаруживают в земных лабораториях среди космических лучей. Как это может быть? Ответ состоит в том, что разные мюоны летят с различными скоростями, иногда довольно близкими к скорости света. С их собственной точки зрения они живут всего лишь около 2 *мксек*, с нашей же — их жизненный путь несравненно более долог, достаточно долог, чтобы достигнуть поверхности Земли. Их жизнь удлиняется в $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ раз. Среднее время жизни мюонов разных скоростей было точно измерено, причем полученное значение хорошо согласуется с формулой.

Мы не знаем, почему мезон распадается и каков его внутренний механизм, но зато мы знаем, что его поведение удовлетворяет принципу относительности. Тем и полезен этот принцип — он позволяет делать предсказания даже о тех вещах, о которых другим путем мы мало чего узнаем. К примеру, еще не имея никакого представления о причинах распада мезона, мы все же можем предсказать, что если его скорость составит $^9/_{10}$ скорости света, то кажущаяся продолжительность отведенного ему срока жизни будет равна $2{,}2\cdot 10^{-6}/\sqrt{1-9^2/10^2}$ *сек*. И это предсказание оправдывается. Правда, неплохо?

## § 5. Лоренцево сокращение

Теперь мы вернемся к преобразованию Лоренца (15.3) и попытаемся лучше понять связь между системами координат $(x, y, z, t)$ и $(x', y', z', t')$. Будем называть их системами $S$ и $S'$, или соответственно системами Джо и Мика. Мы уже отметили, что первое уравнение основывается на предположении Лоренца о том, что по направлению $x$ все тела сжимаются. Как же можно доказать, что такое сокращение действительно бывает? Мы уже понимаем, что в опыте Майкельсона — Морли по принципу относительности *поперечное* плечо $BC$ не может сократиться; в то же время нулевой результат опыта требует, чтобы *времена* были равны. Чтобы получился такой результат, приходится допустить, что продольное плечо $BE$ кажется сжатым в отношении $\sqrt{1-u^2/c^2}$. Что означает это сокращение на языке Джо и Мика? Положим, что Мик, двигаясь с системой $S'$ в направлении $x'$, измеряет метровой линейкой координату $x'$ в некоторой точке. Он прикладывает линейку $x'$ раз и думает, что расстояние равно $x'$ метрам. С точки же зрения Джо, (в системе $S$) линейка у Мика в руках укорочена, а «на самом деле» отмеренное им расстояние равно $x'\sqrt{1-u^2/c^2}$ метров. Поэтому если система $S'$ удалилась от системы $S$ на расстояние $ut$, то наблюдатель в системе $S$ должен сказать, что эта точка (в его координатах) удалена от начала на $x=x'\sqrt{1-u^2/c^2}+ut$, или

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Это и есть первое уравнение из преобразований Лоренца.

## § 6. *Одновременность*

Подобным же образом из-за различия в масштабах времени появляется и знаменатель в уравнении (15.3г) в преобразованиях Лоренца. Самое интересное в этом уравнении — это новый и неожиданный член в числителе, член $ux/c^2$. В чем его смысл? Внимательно вдумавшись в положение вещей, можно понять, что события, происходящие, по мнению Мика (наблюдателя в системе $S'$), в разных местах одновременно, с точки зрения Джо (в системе $S$), вовсе *не* одновременны. Когда одно событие случилось в точке $x_1$ в момент $t_0$, а другое — в точке $x_2$ в тот же момент $t_0$, то соответствующие моменты $t'_1$ и $t'_2$ отличаются на

$$t'_2-t'_1=\frac{u(x_1-x_2)/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Это явление можно назвать «нарушением одновременности удаленных событий». Чтобы пояснить его, рассмотрим следующий опыт.

Пусть человек, движущийся в космическом корабле (система $S'$), установил в двух концах корабля часы. Он хочет знать, одинаково ли они идут. Как синхронизовать ход часов? Это можно сделать по-разному. Вот один из способов, он почти не требует вычислений. Расположимся как раз где-то посредине между часами. Из этой точки пошлем в обе стороны световые сигналы. Они будут двигаться в обоих направлениях с одинаковой скоростью и достигнут обоих часов в одно и то же время. Вот этот-то одновременный приход сигналов и можно применить для согласования хода. Положим, что человек в $S'$ таким способом согласует ход часов. Посмотрим, согласится ли наблюдатель в системе $S$, что эти часы идут одинаково. Космонавт в системе $S'$ имеет право верить, что их ход одинаков; ведь он не знает, что он движется. Но наблюдатель в системе $S$ сразу рассудит, что раз корабль движется, то часы на носу корабля удалились от светового сигнала и свету пришлось пройти больше половины длины корабля, прежде чем он достиг часов; часы на корме, наоборот, двигались к световому сигналу — значит, его путь сократился. Поэтому сигнал сперва дошел до часов на корме, хотя космонавту в системе $S'$ показалось, что сигналы достигли обоих часов одновременно. Итак, выходит, что когда космонавт считает, что события в двух местах корабля произошли одновременно (при одном и том же значении $t'$ в его системе координат), то в другой системе координат *одинаковым* $t'$ отвечают *разные* значения $t$!

## § 7. *Четырехвекторы*

Что еще можно обнаружить в преобразованиях Лоренца? Любопытно, что в них преобразование $x$ и $t$ по форме похоже на преобразование $x$ и $y$, изученное нами в гл. 11, когда мы говорили о вращении координат. Тогда мы получили

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \end{aligned} \tag{15.8}$$

т. е. новое $x'$ перемешивает старые $x$ и $y$, а $y'$ тоже их перемешивает. Подобным же образом в преобразовании Лоренца новое $x'$ есть смесь старых $x$ и $t$, а новое $t'$ — смесь $t$ и $x$. Значит, преобразование Лоренца похоже на вращение, но «вращение» в *пространстве и времени*. Это весьма странное понятие. Проверить аналогию с вращением можно, вычислив величину

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{15.9}$$

В этом уравнении три первых члена в каждой стороне представляют собой в трехмерной геометрии квадрат расстояния между точкой и началом координат (сферу). Он не меняется (остается инвариантным), несмотря на вращение осей координат. Аналогично, уравнение (15.9) свидетельствует о том, что существует определенная комбинация координат и времени, которая остается инвариантной при преобразовании Лоренца. Значит, имеется полная аналогия с вращением; аналогия эта такого рода, что векторы, т. е. величины, составленные из «компонент», преобразуемых так же, как и координаты, оказываются полезными и в теории относительности.

Итак, мы расширим понятие вектора. Пока он у нас мог иметь только пространственные компоненты. Теперь включим в это понятие и временну́ю компоненту, т. е. мы ожидаем, что существуют векторы с четырьмя компонентами: три из них похожи на компоненты обычного вектора, а к ним привязана четвертая — аналог времени.

В следующих главах мы проанализируем это понятие. Мы увидим, что если идеи этого параграфа приложить к импульсу, то преобразование даст три пространственные составляющие, подобные обычным компонентам импульса, и четвертую компоненту — временну́ю часть (которая есть не что иное, как *энергия*).

## § 8. *Релятивистская динамика*

Теперь мы готовы к тому, чтобы с более общей точки зрения исследовать, как преобразования Лоренца изменяют законы механики. [До сих пор мы только объясняли, как изменяются длины и времена, но не объяснили, как получить измененную формулу для $m$, уравнение (15.1). Это будет сделано в следующей главе.] Изучение следствий формулы Эйнштейна для массы $m$ в механике Ньютона мы начнем с закона силы. Сила есть быстрота изменения импульса, т. е.

$$\mathbf{F}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}.$$

Импульс по-прежнему равен $mv$, но теперь

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}=\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (15.10)$$

Это законы Ньютона в записи Эйнштейна. При этом видоизменении, если действие и противодействие по-прежнему равны (может, не в каждый момент, но по крайней мере после усреднения по времени), то, как и раньше, импульс должен сохраняться, но сохраняющейся величиной является не старое $m\mathbf{v}$ при постоянном $m$, а выражение (15.10) с переменной массой. С таким изменением в формуле для импульса сохранение импульса по-прежнему будет существовать.

Посмотрим теперь, как импульс зависит от скорости. В ньютоновой механике он ей пропорционален. В релятивистской механике в большом интервале скоростей (много меньших $c$) они также примерно пропорциональны [см. (15.10)], потому что корень мало отличается от единицы. Но когда $v$ почти равно $c$, то корень почти равен нулю и импульс поэтому беспредельно растет.

Что бывает, когда на тело долгое время воздействует постоянная сила? В механике Ньютона скорость тела беспрерывно будет возрастать и может превысить даже скорость света. В релятивистской же механике это невозможно. В теории относительности беспрерывно растет не скорость тела, а его импульс, и рост этот сказывается не на скорости, а на массе тела. Со временем ускорение, т. е. изменения в скорости, практически исчезает, но импульс продолжает расти. Поскольку сила приводит к очень малым изменениям в скорости тела, мы, естественно, считаем, что у тела громадная инерция. Но как раз это самое и утверждает релятивистская формула (15.10) для массы тела; она говорит, что инерция крайне велика, когда $v$ почти равно $c$. Разберем пример. Чтобы отклонить быстрые электроны в синхротроне Калифорнийского Технологического института, необходимо магнитное поле, в 2000 раз более сильное, чем следует из законов Ньютона. Иными словами, масса электронов в синхротроне в 2000 раз больше их нормальной массы, достигая массы протона! Если $m$ в 2000 раз больше $m_0$, то $1-v^2/c^2$ равно 1/4 000 000, или $v$ отличается от $c$ на 1/8 000 000, т. е. скорость электронов вплотную подходит к скорости света. Если электроны и свет одновременно отправятся в соседнюю лабораторию (находящуюся, скажем, в 200 *м*), то кто явится первым? Ясное дело, свет: он всегда движется быстрее *. Но насколько быстрее? Трудно сказать, насколько раньше во времени, но зато можно сказать, на какое расстояние отстанут электроны: на $^1/_{30}$ *мм*, т. е. на $^1/_3$ толщины этого листка бумаги! Масса электронов в этих состязаниях чудовищна, а скорость не выше скорости света.

На чем еще скажется релятивистский рост массы? Рассмотрим движение молекул газа в баллоне. Если газ нагреть, скорость молекул возрастет, а вместе с нею и их масса. Газ станет тяжелее. Насколько?

Разлагая $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}=m_0(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ в ряд по формуле бинома Ньютона, можно найти приближенно рост массы при малых скоростях. Получается

$$m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}=m_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right).$$

Из формулы ясно, что при малых $v$ ряд быстро сходится и первых двух-трех членов здесь вполне достаточно. Значит, можно написать

$$m\approx m_0+\frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right), \qquad (15.11)$$

* Правда, *видимый* свет проиграет гонку из-за преломления в воздухе. А $\gamma$-излучение ее, несомненно, выиграет.

где второй член и выражает рост массы за счет повышения скорости. Когда растет температура, $v^2$ растет в равной мере, значит, увеличение массы пропорционально повышению температуры. Но $\frac{1}{2}m_0v^2$ — это кинетическая энергия в старомодном, ньютоновом смысле этого слова. Значит, можно сказать, что прирост массы газа равен приросту кинетической энергии, деленной на $c^2$, т. е. $\Delta m = \Delta(\text{к.э.})/c^2$.

### § 9. *Связь массы и энергии*

Это наблюдение навело Эйнштейна на мысль, что массу тела можно выразить проще, чем по формуле (15.1), если сказать, что масса равна полному содержанию энергии в теле, деленному на $c^2$. Если (15.11) помножить на $c^2$, получается

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}\,m_0v^2 + \dots\,. \tag{15.12}$$

Здесь левая часть дает полную энергию тела, а в последнем члене справа мы узнаем обычную кинетическую энергию. Эйнштейн осмыслил первый член справа (очень большое постоянное число $m_0c^2$) как часть полной энергии тела, а именно как его внутреннюю энергию, или «энергию покоя».

К каким следствиям мы придем, если вслед за Эйнштейном предположим, что *энергия тела всегда равна* $mc^2$? Тогда мы сможем вывести формулу (15.1) зависимости массы от скорости, ту самую, которую до сих пор мы принимали на веру. Пусть тело сперва покоится, обладая энергией $m_0c^2$. Затем мы прикладываем к телу силу, которая сдвигает его с места и поставляет ему кинетическую энергию; раз энергия примется возрастать, то начнет расти и масса (это все заложено в первоначальном предположении). Пока сила действует, энергия и масса продолжают расти. Мы уже видели (см. гл. 13), что быстрота роста энергии со временем равна произведению силы на скорость

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \tag{15.13}$$

Кроме того, $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$ [см. гл. 9, уравнение (9.1)]. Связав все это с определением $E$ и подставив в (15.13), получим

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \mathbf{v}\cdot\frac{d\,(m\mathbf{v})}{dt}\,. \tag{15.14}$$

Мы хотим решить это уравнение относительно $m$. Для этого помножим обе части на $2m$. Уравнение обратится в

$$c^2\,(2m)\,\frac{dm}{dt} = 2m\mathbf{v}\,\frac{d\,(m\mathbf{v})}{dt}\,. \tag{15.15}$$

Теперь нам нужно избавиться от производных, т. е. проинтегрировать обе части равенства. В величине $(2m)\,dm/dt$ можно узнать производную по времени от $m^2$, а в $(2m\mathbf{v})\cdot d(m\mathbf{v})/dt$ — производную по времени от $(mv)^2$. Значит, (15.15) совпадает с

$$c^2\frac{d(m^2)}{dt}=\frac{d(m^2v^2)}{dt}. \qquad (15.16)$$

Когда производные двух величин равны, то сами величины могут отличаться не больше чем на константу $C$. Это позволяет написать

$$m^2c^2=m^2v^2+C. \qquad (15.17)$$

Определим теперь константу $C$ явно. Так как уравнение (15.17) должно выполняться при любых скоростях, то можно взять $v=0$ и обозначить в этом случае массу через $m_0$. Подстановка этих чисел в (15.17) дает

$$m_0^2c^2=0+C.$$

Это значение $C$ теперь можно подставить в уравнение (15.17). Оно принимает вид

$$m^2c^2=m^2v^2+m_0^2c^2. \qquad (15.18)$$

Разделим на $c^2$ и перенесем члены с $m$ в левую часть

$$m^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=m_0^2,$$

откуда

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (15.19)$$

А это и есть формула (15.1), т. е. как раз то, что необходимо, чтобы в уравнении (15.12) было соответствие между массой и энергией.

В обычных условиях изменения в энергии приводят к очень малым изменениям в массе: почти никогда не удается из данного количества вещества извлечь много энергии; но в атомной бомбе с энергией взрыва, эквивалентной 20 000 тонн тринитротолуола, весь пепел, осевший после взрыва, на 1 *г* легче первоначального количества расщепляющегося материала. Это потому, что выделилась энергия, которая имела массу 1 *г*, в согласии с формулой $\Delta E=\Delta(mc^2)$. Вывод об эквивалентности массы и энергии прекрасно подтвердился в опытах по аннигиляции материи — превращению вещества в энергию. Электрон с позитроном могут взаимодействовать в покое, имея каждый массу покоя $m_0$. При сближении они исчезают, а вместо них излучаются два $\gamma$-луча, каждый опять с энергией $m_0c^2$. Этот опыт прямо сообщает нам о величине энергии, связанной с существованием массы покоя у частицы.

*Глава* 16

# РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭНЕРГИЯ И РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ИМПУЛЬС



## § 1. *Относительность и «философы»*

В этой главе мы продолжим обсуждение принципа относительности Эйнштейна — Пуанкаре, его влияния на наши физические воззрения и на весь характер человеческого мышления.

Пуанкаре следующим образом сформулировал принцип относительности: «Согласно принципу относительности, законы физических явлений обязаны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, который относительно него переносится равномерным движением, так что у нас нет и не может быть никаких способов отличить, уносит ли нас такое движение или не уносит».

Когда эта мысль обрушилась на человечество, среди философов началась суматоха. Особенно среди «философов за чашкой чая», которые говорят: «О, это очень просто: теория Эйнштейна утверждает, что все относительно!» Поразительное множество таких «философов» — и не только рассуждающих за чашкой чая (впрочем, не желая их обижать, я буду говорить только о «философах за чашкой чая») — твердят: «Из открытий Эйнштейна следует, что все относительно; это оказало глубокое влияние на нашу мысль». И еще потом добавляют: «В физике было доказано, что явления зависят от системы отсчета». Можно услышать немало подобных вещей, но трудно понять их смысл. По-видимому, системы отсчета, о которых идет речь, — это те системы координат, которыми мы пользовались в анализе теории относительности. Итак, тот факт, что «все зависит от системы отсчета», оказывает могучее влияние на современную мысль. Остается только удивляться, почему? Ведь прежде всего сама идея: «все зависит от точки зрения» — настолько проста, что, несомненно, не было нужды обременять себя анализом трудностей физической теории относительности, чтобы открыть ее. Всякий, кто идет по тротуару, знает, что все, что он видит, зависит от его системы отсчета. Сперва он видит лица прохожих, а уж потом — их затылки. И почти во всех философских заключениях, о которых говорят, что они проистекли из теории относительности, нет ничего более глубокого, чем утверждения типа: «Пешеход выглядит спереди иначе, нежели сзади». Известный рассказ о нескольких слепых, споривших, на что похож слон, тоже весьма напоминает теорию относительности с точки зрения таких философов.

Но в теории относительности, пожалуй, есть кое-что и поглубже, чем наблюдение, что человек спереди выглядит иначе, чем сзади. Принцип относительности куда глубже этого, ведь *с его помощью мы можем делать определенные предсказания*. Но было бы более чем странно, если бы только это наблюдение позволило нам предсказывать поведение природы.

Есть и другая школа «философов». Эти чувствуют себя очень неуютно из-за теории относительности, которая заявляет, что нельзя определить свою абсолютную скорость, не глядя ни на что снаружи корабля. Они восклицают: «Вполне понятно, что никто не может измерить своей скорости, не выглядывая наружу. Само собой очевидно, что *бессмысленно* говорить о чьей-то скорости, если не глядеть по сторонам. Глупцы были те физики, которые думали иначе. Их вдруг осенило, вот они и рады; но если бы мы, философы, представляли, какие проблемы стояли перед физиками, мы их давно решили бы чисто мозговым усилием и сразу же поняли бы, что невозможно определить скорость, не выглянув наружу. И мы сделали бы громадный вклад в эту их физику». Эти философы всегда топчутся около нас, они мельтешат на обочинах науки, то и дело порываясь сообщить нам что-то. Но никогда на самом деле они не понимали всей тонкости и глубины наших проблем.

Наша неспособность засечь абсолютное движение — это результат *опытов*, а не итог плоского философствования. Это легко пояснить. Начать с того, что еще Ньютон считал, что действительно невозможно узнать свою скорость, если движешься прямолинейно и равномерно. Ведь первым-то провозгласил принцип относительности именно Ньютон (мы цитировали его слова в предыдущей главе). Почему же в те, ньютоновы времена философы не поднимали такого шума о том, что «все относительно» и так далее и тому подобное? А потому, что пока Максвелл не развил свою электродинамику, существовали физические законы, позволявшие утверждать, что *можно* измерить свою скорость, даже и не выглянув наружу; но вскоре после Максвелла *экспериментально* было установлено, что это *невозможно*.

А теперь скажите, *действительно* ли так уж абсолютно и определенно необходимо с философской точки зрения, чтобы невозможно было знать свою скорость, не посмотрев по сторонам? Одним из следствий теории относительности явилось развитие философии, которая утверждала: «Определять можно только то, что поддается измерению! Так как ясно, что нельзя измерить скорость, не видя, по отношению к чему она измеряется, то естественно, что понятие абсолютной скорости *смысла не имеет*. Физики обязаны понять, что можно говорить только о том, что поддается измерению». Но *в этом-то и весь вопрос*: сказать, *можем ли мы определить* абсолютную скорость,— это все равно, что решить, можно или нельзя *выяснить из эксперимента*, движется ли корабль, не выглядывая в иллюминатор. Иными словами, нельзя *априори* утверждать, что что-то измеримо, а что-то нет; это решает не рассуждение, а эксперимент. Немного найдется философов, которые хладнокровно объявят очевидным, что если скорость света внутри автомобиля равна 300 000 *км/сек*, а скорость самого автомобиля достигает 100 000 *км/сек*, то свет проносится мимо наблюдателя на дороге тоже со скоростью 300 000 *км/сек*. Для них это потрясающий факт; даже те из них, для кого относительность разумеется сама собой, обнаруживают, когда вы предъявляете им конкретный факт, что это совсем не так уж очевидно.

И наконец, есть даже «философы», утверждающие, что вообще мы не в состоянии обнаруживать никакого движения, не выглядывая наружу. А уж это просто неверно. Действительно, нельзя заметить *равномерного* движения по *прямой* линии, но если бы вся комната *вертелась*, мы бы определенно об этом знали, потому что все в ней разлеталось бы к стенкам — наблюдались бы всяческого рода «центробежные» эффекты. Тот факт, что Земля наша вращается вокруг своей оси, можно обнаружить, не глядя на звезды, скажем, с помощью так называемого маятника Фуко. Стало быть, неверно, что «все относительно»; нельзя обнаружить только *равномерное движение*, не выглядывая наружу. Равномерное *вращение* вокруг фиксированной оси обнаружить *можно*. А когда вы это скажете философу, он очень огорчится, что прежде этого не понимал; ему, видите ли, казалось, что просто невозможно установить вращение вокруг оси, не наблюдая внешний мир. Правда, если он достаточно сообразителен, то через некоторое время он может вернуться и заявить: «Понял! На самом деле никакого абсолютного вращения не существует. Видите ли,— скажет он,— на самом деле мы вращаемся *относительно звезд*. И вследствие какого-то невыясненного влияния, оказываемого на тела звездами, возникает центробежная сила».

Ну что ж! Судя по всему, это верно; в настоящее время у нас нет способа узнать, существовала бы центробежная сила, если бы не было звезд и туманностей. Не в наших силах сделать такой эксперимент — убрать все туманности, а затем измерить наше вращение; значит, тут мы ничего сказать не можем. Мы должны допустить, что философ может оказаться прав. Он тогда расцветает от удовольствия и изрекает: «И вообще совершенно необходимо, чтобы все в мире в конечном счете подчинялось тому же принципу: *абсолютное* вращение — это бессмысленно, можно говорить только о вращении *по отношению* к туманностям». И тут-то мы ему ответим: «А тогда скажи, друг мой, само собой или не само собой разумеется, что равномерное движение по прямой линии *относительно туманностей* не должно никак чувствоваться внутри автомобиля?» И теперь, когда движение уже больше не абсолютное, когда оно стало движением *относительно туманностей*, вопрос оказывается темным и на него можно ответить, лишь поставив эксперимент.

Но в *чем* же в таком случае выразились философские влияния теории относительности? *Какие новые идеи и предложения* внушил физикам принцип относительности? Если ограничиться только этого рода влияниями, то их можно описать следующим образом. Первое открытие, по существу, состояло в том, что даже те идеи, которые уже очень долго держатся и очень точно проверены, могут быть ошибочными. Каким это было большим потрясением — открыть, что законы Ньютона неверны, и это после того, как все годы они казались точными! Теперь, конечно, ясно, что не опыты были неправильными, а просто все они проделывались в слишком ограниченном интервале скоростей — таком узком, что релятивистские эффекты невозможно было заметить. И все же теперь мы взираем на наши законы физики куда более смиренно — ведь любой из них *может* оказаться ошибочным!

Во-вторых, если возникают некие «странные» идеи, вроде того, что когда идешь, то время тянется медленнее и т. д., то неуместен вопрос: *нравится* ли это нам? Единственно уместен здесь другой вопрос: согласуются ли эти идеи с тем, что показал опыт? Иначе говоря, «странные идеи» должны быть согласны только с *экспериментом*. Единственный резон, почему мы должны обсуждать поведение часов и т. п., состоит в следующем: мы должны доказать, что, хотя определение растяжения времени и очень странно, с нашим способом измерять время оно *вполне согласуется*.

И наконец, теория относительности подсказала нам еще кое-что; может быть, это был чисто технический совет, но он оказался чрезвычайно полезным при изучении других физических законов. Совет состоял в том, что надо *обращать вни-*

*мание на симметрию законов*, или, более определенно, искать способы, с помощью которых законы можно преобразовать, сохраняя при этом их форму. Когда мы обсуждали теорию векторов, мы отмечали, что основные законы движения не меняются, когда мы особым образом изменяем пространственные и временны́е переменные (пользуемся преобразованием Лоренца). Идея изучать операции, при которых основные законы не меняются, оказалась и впрямь очень полезной.

## § 2. *Парадокс близнецов*

Чтобы продолжить наше изучение преобразований Лоренца и релятивистских эффектов, рассмотрим известный «парадокс» — парадокс близнецов, скажем, Петера и Пауля. Подросши, Пауль улетает на космическом корабле с очень высокой скоростью. Петер остается на Земле. Он видит, что Пауль уносится с огромной скоростью, и ему кажется, что часы Пауля замедляют свой ход, сердце Пауля бьется реже, мысли текут ленивее. С точки зрения Петера, все замирает. Сам же Пауль, конечно, ничего этого не замечает. Но когда после долгих странствий он возвратится на Землю, он окажется моложе Петера! Верно ли это? Да, это одно из тех следствий теории относительности, которые легко продемонстрировать. Мю-мезоны живут дольше, если они движутся; так и Пауль проживет дольше, если будет двигаться. «Парадоксом» это явление называют лишь те, кто считает, что принцип относительности утверждает относительность *всякого движения*. Они восклицают: «Хе-хе-хе! А не можем ли мы сказать, что с точки зрения Пауля двигался *Петер* и что именно Петер должен был медленнее стареть? Из симметрии тогда следует единственный возможный вывод: при встрече возраст обоих братьев должен оказаться одинаковым».

Но ведь чтобы встретиться и помериться годами, Пауль должен либо остановиться в конце путешествия и сравнить часы, либо, еще проще, вернуться. А возвратиться может только тот, кто двигался. И он знает о том, что двигался, потому что ему пришлось повернуть, а при повороте на корабле произошло много необычных вещей: заработали ракеты, предметы скатились к одной стенке и т. д. А Петер ничего этого не испытал.

Поэтому можно высказать такое правило: тот, *кто почувствовал ускорение*, кто увидел, как вещи скатывались к стенке, и т. д.,— тот и окажется моложе. Разница между братьями имеет «абсолютный» смысл, и все это вполне правильно. Когда мы обсуждали долгую жизнь движущегося мю-мезона, в качестве примера мы пользовались его прямолинейным движением сквозь атмосферу. Но можно породить мю-мезоны и в лаборатории и заставить с помощью магнита их двигаться по кругу. И даже при таком ускоренном движении они проживут дольше, причем столько же, сколько и при прямолинейном движении с этой скоростью. Можно было бы попытаться разрешить парадокс опытным путем: сравнить покоящийся мю-мезон с закрученным по кругу. Несомненно, окажется, что закрученный мю-мезон проживет дольше. Такого опыта еще никто не ставил, но он и не нужен, потому что и так все прекрасно согласуется. Конечно, те, кто настаивает на том, что каждый отдельный факт должен быть непосредственно проверен, этим не удовлетворятся. А мы все же уверенно беремся предсказать результат опыта, в котором Пауль кружится по замкнутому кругу.

## § 3. *Преобразование скоростей*

Главное отличие принципа относительности Эйнштейна от принципа относительности Ньютона заключается в том, что законы преобразований, связывающих координаты и времена в системах, движущихся относительно друг друга, различны. Правильный закон преобразований (Лоренца) таков:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\
y' &= y, \\
z' &= z, \\
t' &= \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.
\end{aligned}
\tag{16.1}
$$

Эти уравнения отвечают сравнительно простому случаю, когда наблюдатели движутся относительно друг друга вдоль общей оси $x$. Конечно, мыслимы и другие направления движения, но самое общее преобразование Лоренца выглядит довольно сложно: в нем перемешаны все четыре числа. Мы и впредь будем пользоваться этой простой формулой, так как она содержит в себе все существенные черты теории относительности.

Рассмотрим теперь дальнейшие следствия этого преобразования. Прежде всего интересно разрешить эти уравнения относительно $x$, $y$, $z$, $t$. Это система четырех линейных уравнений для четырех неизвестных, и их можно решить — выразить $x$, $y$, $z$, $t$ через $x'$, $y'$, $z'$, $t'$. Результат этот потому интересен, что он говорит нам, как «покоящаяся» система координат выглядит с точки зрения «движущейся». Ясно, что из-за относительности движения и постоянства скорости тот, кто «движется», может, если пожелает, счесть себя неподвижным, другого — движущимся. А поскольку он движется в обратную сторону, то получит то же преобразование, но с противоположным знаком у скорости. Это в точности то, что дает и прямое решение системы, так что все сходится. Вот если бы не сошлось, было бы от чего встревожиться!

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\
y &= y', \\
z &= z', \\
t &= \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.
\end{aligned}
\tag{16.2}
$$

Теперь займемся интересным вопросом о сложении скоростей в теории относительности. Напомним, что первоначально загадка состояла в том, что свет проходит 300 000 *км/сек* во всех системах, даже если они движутся друг относительно друга. Это — частный случай более общей задачи. Приведем пример. Пусть предмет внутри космического корабля движется вперед со скоростью 200 000 *км/сек*; скорость самого корабля тоже 200 000 *км/сек*. С какой скоростью перемещается предмет с точки зрения внешнего наблюдателя? Хочется сказать: 400 000 *км/сек*, но эта цифра уж больно подозрительна: получается скорость бóльшая, чем скорость света! Разве можно себе это представить?

Общая постановка задачи такова. Пусть скорость тела внутри корабля равна $v$ (с точки зрения наблюдателя на корабле), а сам корабль имеет скорость $u$ по отношению к Земле. Мы желаем знать, с какой скоростью $v_x$ это тело движется с точки зрения земного наблюдателя. Впрочем, это тоже не самый общий случай, потому что движение происходит в направлении $x$. Могут быть формулы для преобразования скоростей в направлении $y$ или в любом другом; если они будут нужны, их всегда можно вывести. Внутри корабля скорость тела равна $v_{x'}$. Это значит, что перемещение $x'$ равно скорости, умноженной на время:

$$x' = v_{x'} t'. \tag{16.3}$$

Остается только подсчитать, какие у тела значения $x$ и $t$ с точки зрения внешнего наблюдателя, если $x'$ и $t'$ связаны соотношением (16.3). Подставим (16.3) в (16.2) и получим

$$x = \frac{v_{x'} t' + ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{16.4}$$

Но здесь $x$ выражено через $t'$. А скорость с точки зрения внешнего наблюдателя — это *«его» расстояние*, деленное на *«его» время*, а *не на время другого наблюдателя*! Значит, надо и *время* подсчитать с его позиций

$$t=\frac{t'+u(v_{x'}t')/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \qquad (16.5)$$

А теперь разделим $x$ на $t$. Квадратные корни сократятся, останется же

$$v_x=\frac{x}{t}=\frac{u+v_{x'}}{1+uv_{x'}/c^2}. \qquad (16.6)$$

Это и есть искомый закон: суммарная скорость не равна сумме скоростей (это привело бы ко всяким несообразностям), но «подправлена» знаменателем $1+uv/c^2$.

Что же теперь будет получаться? Пусть ваша скорость внутри корабля равна половине скорости света, а скорость корабля тоже равна половине скорости света. Значит, и $u$ равно $\frac{1}{2}c$, и $v$ равно $\frac{1}{2}c$, но в знаменателе $uv$ равно $\frac{1}{4}$, так что

$$v=\frac{\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}c}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4c}{5}.$$

Выходит по теории относительности, что $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ дают не 1, а $\frac{4}{5}$. Небольшие скорости, конечно, можно складывать, как обычно, потому что, пока скорости по сравнению со скоростью света малы, о знаменателе $(1+uv/c^2)$ можно забыть, но на больших скоростях положение меняется.

Возьмем предельный случай. Положим, что человек на борту корабля наблюдает, как распространяется *свет*. Тогда $v=c$. Что обнаружит земной наблюдатель? Ответ будет такой:

$$v=\frac{u+c}{1+uc/c^2}=c\frac{u+c}{u+c}=c.$$

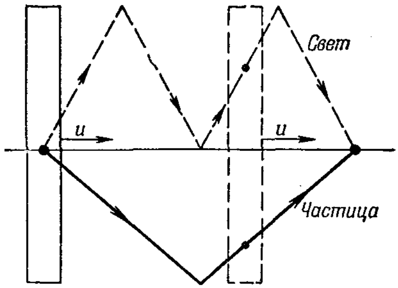
Значит, если что-то движется со скоростью света внутри корабля, то, с точки зрения стороннего наблюдателя, скорость не изменится, она по-прежнему будет равна скорости света! Это именно то, ради чего в первую очередь предназначал Эйнштейн свою теорию относительности.

Конечно, бывает, что движение тела не совпадает по направлению с равномерным движением корабля. Например, тело движется «вверх» со скоростью $v_{y'}$ по отношению к кораблю, а корабль движется «горизонтально». Проделывая такие же манипуляции (только $x$ надо заменить на $y$), получаем

$$y=y'=v_{y'}t',$$

так что при $v_{x'}=0$

$$v_y=\frac{y}{t}=v_{y'}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \qquad (16.7)$$

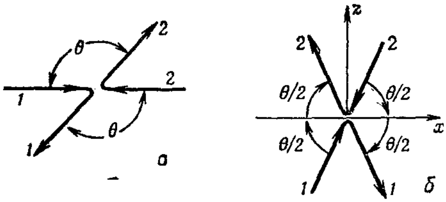



*Фиг. 16.1. Траектории светового луча и частицы внутри движущихся часов.*

Итак, боковая скорость тела уже не $v_{y'}$, а $v_{y'}\sqrt{1-u^2/c^2}$. Этот результат мы получили, пользуясь формулами преобразований. Но он вытекает и прямо из принципа относительности по следующей причине (всегда бывает полезно докопаться до первоначальной причины). Мы уже раньше рассуждали (см. фиг. 15.3) о том, как могут работать движущиеся часы; свет кажется распространяющимся наискось со скоростью $c$ в неподвижной системе, в то время как в движущейся системе он просто движется вертикально с той же скоростью. Мы нашли, что *вертикальная компонента* скорости в неподвижной системе меньше скорости света на множитель $\sqrt{1-u^2/c^2}$ [см. уравнение (15.3)]. Пусть теперь материальная частица движется в тех же «часах» взад-вперед со скоростью, равной $1/n$ скорости света (фиг. 16.1). Пока частица пройдет туда и обратно, свет пройдет этот путь ровно $n$ раз ($n$ — целое число). Значит, каждое тиканье «часов с частицей» совпадет с $n$-м тиканьем «световых часов». *Этот факт должен остаться верным и тогда, когда тело движется*, потому что физическое явление совпадения остается совпадением в любой системе. Ну а поскольку скорость $c_y$ меньше скорости света, то скорость $v_y$ частицы должна быть меньше соответствующей скорости в том же отношении (с квадратным корнем)! Вот почему в любой вертикальной скорости появляется корень.

## § 4. Релятивистская масса

Из предыдущей главы мы усвоили, что масса тела растет с увеличением его скорости. Но никаких доказательств этого, похожих на те рассуждения с часами, которыми мы обосновали замедление времени, мы не привели. Сейчас, однако, мы можем доказать, что (как следствие принципа относительности и прочих разумных соображений) масса должна изменяться именно таким образом. (Мы должны говорить о «прочих соображениях» по той причине, что нельзя ничего доказать, нельзя надеяться на осмысленные выводы, не опираясь на какие-то законы, которые предполагаются верными.) Чтобы не изучать




*Фиг. 16.2. Упругое столкновение одинаковых тел, движущихся с равными скоростями в противоположных направлениях, при различном выборе систем координат.*

законы преобразования силы, обратимся к *столкновениям* частиц. Здесь нам не понадобится закон действия силы, а хватит только предположения о сохранении энергии и импульса. Кроме того, мы предположим, что импульс движущейся частицы — это вектор, всегда направленный по ее движению. Но мы не будем считать импульс *пропорциональным* скорости, как это делал Ньютон. Для нас он будет просто некоторой *функцией* скорости. Мы будем писать вектор импульса в виде вектора скорости, умноженного на некоторый коэффициент

$$\mathbf{p} = m_v \mathbf{v}. \tag{16.8}$$

Индекс $v$ у коэффициента будет напоминать нам, что это функция скорости $v$. Будем называть этот коэффициент «массой». Ясно, что при небольших скоростях это как раз та самая масса, которую мы привыкли измерять. Теперь, исходя из того принципа, что законы физики во всех системах координат одинаковы, попробуем показать, что формула для $m_v$ должна иметь вид $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

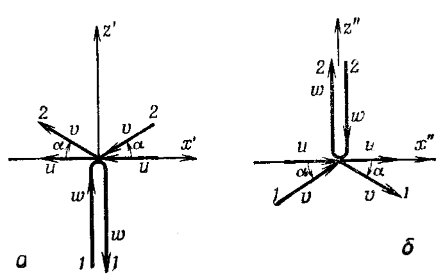
Пусть у нас есть две частицы (к примеру, два протона), которые между собой совершенно одинаковы и движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. Их общий импульс равен нулю. Что с ними случится? После столкновения их направления движения должны все равно остаться противоположными, потому что если это не так, то их суммарный вектор импульса будет отличен от нуля, т. е. не сохранится. Раз частицы одинаковы, то и скорости их должны быть одинаковы; более того, они просто должны остаться прежними, иначе энергия при столкновении изменится. Значит, схема такого упругого обратимого столкновения будет выглядеть, как на фиг. 16.2,*а*: все стрелки одинаковы, все скорости равны. Предположим, что такие столкновения всегда можно подготовить, что в них допустимы любые углы θ и что начальные скорости частиц могут быть любыми. Далее, напомним, что одно и то же столкновение выглядит по-разному, смотря по тому, как повернуты оси. Для удобства мы так повернем оси, чтобы горизонталь делила пополам угол между направлениями частиц до и после столкновения (фиг. 16.2,*б*). Это то же столкновение, что и на фиг. 16.2,*а*, но с повернутыми осями.

Теперь начинается самое главное: взглянем на это столкновение с позиций наблюдателя, движущегося на автомашине со скоростью, совпадающей с горизонтальной компонентой скорости одной из частиц. Как оно будет выглядеть? Наблюдателю покажется, что частица *1* поднимается прямо вверх (горизонтальная компонента у нее пропала), а после столкновения падает прямо вниз по той же причине (фиг. 16.3, *а*). Зато частица *2* движется совсем иначе, она проносится мимо с колоссальной скоростью и под малым углом (но этот угол и до и после столкновения *одинаков*). Обозначим горизонтальную компоненту скорости частицы *2* через $u$, а вертикальную скорость частицы *1* — через $w$.

Чему же равна вертикальная скорость $u\operatorname{tg}\alpha$ частицы *2*? Зная это, можно получить правильное выражение для импульса, пользуясь сохранением импульса в вертикальном направлении. (Сохранение горизонтальной компоненты импульса и так обеспечено: у обеих частиц до и после столкновения эта компонента одинакова, а у частицы *1* она вообще равна нулю. Так что следует требовать только сохранения вертикальной скорости $u\operatorname{tg}\alpha$.) Но вертикальную скорость *можно* получить, просто взглянув на это столкновение с другой точки зрения! Посмотрите на столкновение, изображенное на фиг. 16.3, *а* из автомашины, которая движется теперь налево со скоростью $u$. Вы увидите то же столкновение, но перевернутое «вверх ногами» (фиг. 16.3, *б*). Теперь уже частица *2* упадет и подскочит со скоростью $w$, а горизонтальную скорость $u$ приобретет частица *1*. Вы уже, конечно, догадываетесь, чему равна горизонтальная скорость $u\operatorname{tg}\alpha$; она равна $w\sqrt{1-u^2/c^2}$ [см. уравнение (16.7)]. Кроме того, нам известно, что изменение вертикального импульса вертикально движущейся частицы равно

$$\Delta p = 2m_w w$$

(двойка здесь потому, что движение вверх перешло в движение вниз). У частицы, движущейся косо, скорость равна $v$, ее компоненты равны $u$ и $w\sqrt{1-u^2/c^2}$, а масса ее $m_v$. Изменение




*Фиг. 16.3. Еще две картины того же столкновения (видимые из движущихся автомашин).*

*вертикального* импульса этой частицы $\Delta p' = 2m_v w \sqrt{1-u^2/c^2}$, так как в соответствии с нашим предположением (16.8) любая компонента импульса равна произведению одноименной компоненты скорости на массу, отвечающую этой скорости. Но суммарный импульс равен нулю. Значит, и вертикальные импульсы должны взаимно сократиться, отношение же массы, движущейся со скоростью $w$, к массе, движущейся со скоростью $v$, должно оказаться равным

$$\frac{m_w}{m_v} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{16.9}$$

Перейдем к предельному случаю, когда $w$ стремится к нулю. При очень малых $w$ величины $v$ и $u$ практически совпадут, $m_w \to m_0$, а $m_v \to m_u$. Окончательный результат таков:

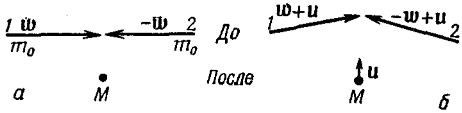
$$m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{16.10}$$

Проделайте теперь такое интересное упражнение: проверьте, будет ли выполнено условие (16.9) при произвольных $w$, когда масса подчиняется формуле (16.10). При этом скорость $v$, стоящую в уравнении (16.9), можно найти из прямоугольного треугольника

$$v^2 = u^2 + w^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right).$$

Вы увидите, что (16.9) выполняется тождественно, хотя выше нам понадобился только предел этого равенства при $w \to 0$.

Теперь перейдем к дальнейшим следствиям, считая уже, что, согласно (16.10), масса зависит от скорости. Рассмотрим так называемое *неупругое столкновение*. Для простоты предположим, что из двух одинаковых тел, сталкивающихся с равными скоростями $w$, образуется новое тело, которое больше не распадается (фиг. 16.4,*а*). Массы тел до столкновения равны, как мы знаем, $m_0/\sqrt{1-w^2/c^2}$. Предположив сохраняемость импульса и приняв принцип относительности, можно продемонстрировать интересное свойство массы вновь образованного тела. Представим себе бесконечно малую скорость $u$, поперечную к скоростям $w$ (можно было бы работать и с конечной скоростью $u$, но с бесконечно малым значением $u$ легче во всем разобраться), и посмотрим на это столкновение, двигаясь в лифте со скоростью $-u$. Перед нами окажется картина, изображенная на фиг. 16.4, *а*. Составное тело обладает неизвестной массой $M$. У тела *1*, как и у тела *2*, есть компонента скорости $u$, направленная вверх, и горизонтальная компонента, практически равная $w$. После столкновения остается масса $M$, *Фиг. 16.4. Две картины неупругого соударения тел равной массы.*




движущаяся вверх со скоростью $u$, много меньшей и скорости света и скорости $w$. Импульс должен остаться прежним; посмотрим поэтому, каким он был до столкновения и каким стал потом. До столкновения он был равен $p \approx 2m_w u$, а потом стал $p' = M_u u$. Но $M_u$ из-за малости $u$, по существу, совпадает с $M_0$. Благодаря сохранению импульса

$$M_0 = 2m_w. \tag{16.11}$$

Итак, *масса тела, образуемого при столкновении двух одинаковых тел, равна их удвоенной массе.* Вы, правда, можете сказать: «Ну и что ж, это просто сохранение массы». Но не торопитесь восклицать: «Ну и что ж!», потому что *сами-то массы тел были больше, чем когда тела неподвижны.* Они вносят в суммарную массу $M$ не массу покоя, а *больше.* Не правда ли, поразительно! Оказывается, сохранение импульса в столкновении двух тел требует, чтобы образуемая ими масса была больше их масс покоя, хотя после столкновения эти тела сами придут в состояние покоя!

## § 5. Релятивистская энергия

Немного выше мы показали, что зависимость массы от скорости и законы Ньютона приводят к тому, что изменения в кинетической энергии тела, появляющиеся в результате работы приложенных к нему сил, оказываются всегда равными

$$\Delta T = (m_u - m_0)c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2. \tag{16.12}$$

Потом мы продвинулись дальше и обнаружили, что полная энергия тела равна полной его массе, умноженной на $c^2$. Продолжим эти рассуждения.

Предположим, что наши два тела с равными массами (те, которые столкнулись) можно «видеть» даже тогда, когда они оказываются внутри тела $M$. Скажем, протон с нейтроном столкнулись, но все еще продолжают двигаться внутри $M$. Масса тела $M$, как мы обнаружили, равна не $2m_0$, а $2m_w$. Этой массой $2m_w$ снабдили тело его составные части, чья масса покоя была $2m_0$; значит, *избыток* массы составного тела равен привнесенной кинетической энергии. Это означает, конечно, что *у энергии есть инерция.* Ранее мы говорили о нагреве газа и показали, что поскольку молекулы газа движутся, а движущиеся тела становятся массивнее, то при нагревании газа и усилении движения молекул газ становится тяжелее. Но на самом деле такое рассуждение является совершенно общим; наше обсуждение свойств неупругого соударения тоже показывает, что добавочная масса появляется всегда, даже тогда, когда она не является *кинетической* энергией. Иными словами, если две частицы сближаются и при этом образуется потенциальная или другая форма энергии, если части составного тела замедляются потенциальным барьером, производя работу против внутренних сил, и т. д.,— во всех этих случаях масса тела по-прежнему равна полной привнесенной энергии. Итак, вы видите, что выведенное выше сохранение массы равнозначно сохранению энергии, поэтому в теории относительности нельзя говорить о неупругих соударениях, как это было в механике Ньютона. Согласно механике Ньютона, ничего страшного не произошло бы, если бы два тела, столкнувшись, образовали тело с массой $2m_0$, не отличающееся от того, какое получилось бы, если их медленно приложить друг к другу. Конечно, из закона сохранения энергии мы знаем, что внутри тела имеется добавочная кинетическая энергия, но по закону Ньютона на массу это никак не влияет. А теперь выясняется, что это невозможно: поскольку до столкновения у тел была кинетическая энергия, то составное тело окажется *тяжелее*; значит, это будет уже *другое* тело. Если осторожно приложить два тела друг к другу, то возникает тело с массой $2m_0$; когда же вы их с силой столкнете, то появится тело с большей массой. А если масса отличается, то мы можем это *заметить.* Итак, сохранение импульса в теории относительности с необходимостью сопровождается сохранением энергии.

Отсюда вытекают интересные следствия. Пусть имеется тело с измеренной массой $M$, и предположим, что что-то стряслось и оно распалось на две равные части, имеющие скорости $w$ и массы $m_w$. Предположим теперь, что эти части, двигаясь через вещество, постепенно замедлились и остановились. Теперь их масса $m_0$. Сколько энергии они отдали веществу? По теореме, доказанной раньше, каждый кусок отдаст энергию $(m_w - m_0)c^2$. Она перейдет в разные формы, например в теплоту, в потенциальную энергию и т. д. Так как $2m_w = M$, то высвободившаяся энергия $E = (M - 2m_0)c^2$. Это уравнение было использовано для оценки количества энергии, которое могло бы выделиться при ядерном расщеплении в атомной бомбе (хотя части бомбы не точно равны, но примерно они равны). Масса атома урана была известна (ее измерили заранее), была известна и масса атомов, на которые она расщеплялась,— иода, ксенона и т. д. (имеются в виду не массы движущихся атомов, а массы *покоя*). Иными словами, и $M$ и $m_0$ были известны. Вычтя одно значение массы из другого, можно прикинуть, сколько энергии высвободится, если $M$ распадется «пополам». По этой причине все газеты считали Эйнштейна «отцом» атомной бомбы. На самом же деле под этим подразумевалось только, что он мог бы заранее подсчитать выделившуюся энергию, если бы ему указали, какой процесс произойдет. Энергию, которая должна высвободиться, когда атом урана подвергнется распаду, подсчитали лишь за полгода до первого прямого испытания. И как только энергия действительно выделилась, ее непосредственно измерили (не будь формулы Эйнштейна, энергию измерили бы другим способом), а с момента, когда ее измерили, формула уже была не нужна. Это отнюдь не принижение заслуг Эйнштейна, а скорее критика газетных высказываний и популярных описаний развития физики и техники. Проблема, как добиться того, чтобы процесс выделения энергии прошел эффективно и быстро, ничего общего с формулой не имеет.

Формула имеет значение и в химии. Скажем, если бы мы взвесили молекулу двуокиси углерода и сравнили ее массу с массой углерода и кислорода, мы бы могли определить, сколько энергии высвобождается, когда углерод и кислород образуют углекислоту. Плохо только то, что эта разница масс так мала, что технически опыт очень трудно проделать.

Теперь обратимся к такому вопросу: нужно ли отныне добавлять к кинетической энергии $m_0c^2$ и говорить с этих пор, что полная энергия объекта равна $mc^2$? Во-первых, если бы нам были *видны* составные части с массой покоя $m_0$ внутри объекта $M$, то можно было бы говорить, что часть массы $M$ есть механическая масса покоя составных частей, а другая часть — их кинетическая энергия, третья — потенциальная. Хотя в природе и на самом деле открыты различные частицы, с которыми происходят как раз такие реакции (реакции слияния в одну), однако никакими способами *невозможно* при этом *разглядеть внутри $M$* какие-то *составные части*. Например, распад $K$-мезона на два пиона происходит по закону (16.11), но бесмысленно считать, что он состоит из $2\pi$, потому что он распадается порой и на $3\pi$!

А поэтому возникает *новая идея*: нет нужды знать, как тела устроены изнутри; нельзя и не нужно разбираться в том, какую часть энергии внутри частицы можно считать энергией покоя тех частей, на которые она распадется. Неудобно, а порой и невозможно разбивать полную энергию $mc^2$ тела на энергию покоя внутренних частей, их кинетическую и потенциальную энергии; вместо этого мы просто говорим о *полной энергии* частицы. Мы «сдвигаем начало отсчета» энергий, добавляя ко всему константу $m_0c^2$, и говорим, что полная энергия частицы равна ее массе движения, умноженной на $c^2$, а когда тело остановится, его энергия есть его масса в покое, умноженная на $c^2$.

И наконец, легко обнаружить, что скорость $v$, импульс $P$ и полная энергия $E$ довольно просто связаны между собой. Как это ни странно, формула $m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ очень редко употребляется на практике. Вместо этого незаменимыми оказываются два соотношения, которые легко доказать:

$$E^2-P^2c^2=M_0^2c^4 \tag{16.13}$$

и

$$Pc=\frac{Ev}{c}\,. \tag{16.14}$$

*Глава* 17

# ПРОСТРАНСТВО - ВРЕМЯ



## § 1. *Геометрия пространства-времени*

Теория относительности показывает, что связь между местоположением события и моментом, в какой оно происходит, при измерениях в двух разных системах отсчета совсем не такая, как можно было ожидать на основе наших интуитивных представлений. Очень важно ясно представить себе связь пространства и времени, возникающую из преобразований Лоренца. Поэтому мы глубже рассмотрим этот вопрос.

Координаты и время $(x, y, z, t)$, измеренные «покоящимся» наблюдателем, преобразуются в координаты и время $(x', y', z', t')$, измеренные внутри «движущегося» со скоростью $u$ космического корабля:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{17.1}$$

Давайте сравним эти уравнения с уравнением (11.5), которое тоже связывает измерения в двух системах, только одна из них теперь *вращается* относительно другой

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{17.2}$$

В этом частном случае у Мика и Джо оси $x'$ и $x$ повернуты на угол $\theta$. Но и в том и в другом случае мы замечаем, что «штрихованные» величины — это «перемешанные» между собой «нештрихованные»: новое $x'$ есть смесь $x$ и $y$, а новое $y'$ — другая смесь $x$ и $y$.

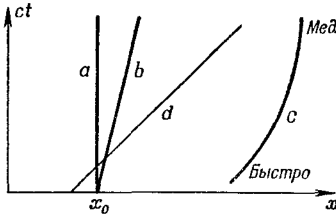
Проведем следующую аналогию: когда мы глядим на предмет, мы различаем его «видимую ширину» и «видимую толщину». Но эти два понятия — «ширина» и «толщина» — отнюдь не *основные* свойства предмета. Отойдите в сторону, взгляните на предмет под другим углом — видимая ширина и видимая толщина предмета станут другими. Можно написать формулы, позволяющие узнать новые ширину и толщину по известным старым и по углу поворота. Уравнения (17.2) — как раз эти формулы. Можно сказать, что данная толщина есть своего рода «смесь» всех ширин и всех толщин. Если б мы не могли сдвинуться с места, если б мы на данный предмет всегда глядели из одного и того же положения, то нам все эти рассуждения показались бы неуместными; мы ведь и так всегда видели бы пред собой «настоящую» ширину и «настоящую» толщину и знали бы, что это совершенно разные качества предмета: один связан с углом, под каким виден предмет, другой требует фокусирования глаза и даже интуиции. Они казались бы абсолютно различными, их незачем было бы смешивать. Только потому, что мы *в состоянии* обойти вокруг предмета, мы понимаем, что ширина и толщина — это разные стороны одного и того же предмета.

*Нельзя ли взглянуть на преобразование Лоренца таким же способом*? Ведь и здесь перед нами смесь — смесь местоположения и момента времени. Из значений координаты и времени получается новая координата. Иначе говоря, в измерениях пространства, сделанных одним человеком, есть с точки зрения другого малая примесь времени. Наша аналогия позволяет высказать следующую мысль: «реальность» предмета, на который мы смотрим, включает нечто большее (говоря грубо и образно), чем его «ширину» и его «толщину», потому что обе они *зависят* от того, *как* мы смотрим на предмет. Оказавшись на новом месте, наш мозг немедленно пересчитывает и ширину, и толщину. Но когда мы будем двигаться с большой скоростью, наш мозг не сможет немедленно пересчитать координаты и время: у нас нет опыта движений со скоростями, близкими к световой, мы не ощущаем время и пространство как явления одной природы. Все равно как если бы нас усадили на какое-то место, заставили бы разглядывать ширину какого-то предмета и при этом не разрешали бы даже поворачивать голову. Мы теперь понимаем, что, будь у нас такая возможность, мы могли бы увидеть немножко от времени другого человека, как бы «заглянуть» сзади него.

Итак, мы должны попытаться представить себе предметы в мире нового типа, в котором время с пространством смешано в том же смысле, в каком предметы нашего привычного про-

Ф и г. 17.1. *Пути трех частиц в пространстве-времени.*

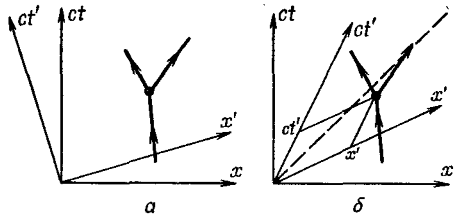
*a — частица покоится в точке $x=x_0$; b — частица отправилась из точки $x = x_0$ с постоянной скоростью; c — частица начала было двигаться, но затормозила; d — распространение света.*




странственного мира можно разглядывать с разных направлений. Мы должны считать, что предметы, занимающие некоторое место и существующие некоторый период времени, занимают некую «дольку» мира нового типа и что мы смотрим на эту «дольку» с разных точек зрения, когда движемся с разной скоростью. Этот новый мир, эта геометрическая реальность, в которой имеются «дольки», занимающие некоторое пространство и существующие некоторое время, называется *пространством-временем*. Данная точка $(x, y, z, t)$ в пространстве-времени носит название *события*. Представьте, например, что ось $x$ мы поместили горизонтально, оси $y$ и $z$ — в двух других направлениях, взаимно перпендикулярных и перпендикулярных к странице (!), а ось $t$ направили вертикально. Как на такой диаграмме изобразится, скажем, движущаяся частица? Когда частица неподвижна, у нее есть какая-то координата $x$; время течет, а $x$ остается все тем же, и тем же, и тем же. Значит, ее «путь» — это прямая, параллельная оси ($a$ на фиг. 17.1). С другой стороны, если она равномерно удаляется, то с течением времени растет и $x$ ($b$ на фиг. 17.1). Таким образом, частица, которая сперва двигалась, а потом стала замедлять свой ход, изобразится чем-то похожим на кривую $c$ на фиг. 17.1. Другими словами, всякая устойчивая, нераспадающаяся частица изображается линией в пространстве-времени. А распадающаяся частица изобразится вилкой, потому что она превращается в две частицы, выходящие из одной точки.

А как обстоит дело со светом? Скорость света всегда одна и та же, значит, свет можно изображать прямыми линиями одинакового наклона ($d$ на фиг. 17.1).

Итак, согласно высказанной нами идее, если происходит некое событие, например частица внезапно распадается в какой-то пространственно-временно́й точке $(x, t)$ на две, то, если это для чего-нибудь нужно, поворотом осей можно получить значения $x$ и $t$ в новой системе (фиг. 17.2, $a$). Но это не так: ведь уравнение (17.1) *не совпадает* с преобразованием (17.2), в них по-разному расставлены знаки, в одном встречаются $\sin\theta$ и $\cos\theta$, а в другом — некоторые алгебраические




*Фиг. 17.2. Два изображения распада частицы.*
*а — неверное; б — верное.*

величины. (Вообще-то иногда алгебраические величины выражаются через косинус и синус, но в данном случае это невозможно.) А все-таки эти выражения *очень похожи*. Как мы с вами увидим, нельзя представлять себе пространство-время в виде реальной обычной геометрии, и все из-за этой разницы в знаках. На самом деле, хотя мы этого пока не подчеркивали, оказывается, что движущийся наблюдатель должен пользоваться осями, равнонаклоненными к линии светового луча, и проектировать точку на эти оси при помощи отрезков, им параллельных. Это показано на фиг. 17.2, *б*. Мы не будем заниматься этой геометрией, она не особенно помогает; легче работать прямо с уравнениями.

## § 2. *Пространственно-временны́е интервалы*

Хотя геометрия пространства-времени не обычная (не евклидова), тем не менее эта геометрия очень похожа на евклидову, но в некоторых отношениях весьма своеобразная. Если это представление о геометрии правильно, то должны существовать такие функции координат и времени, которые не зависят от системы координат. К примеру, при обычных вращениях, если взять две точки, одну для простоты в начале координат обеих систем, а другую в любом другом месте, то в обеих системах координат расстояние между точками будет одинаково. Это первое свойство точек, которое не зависит от частного способа измерения: квадрат расстояния, или $x^2+y^2+z^2$, не меняется при поворотах. А как с пространством-временем? Не трудно показать, что и здесь есть нечто, не зависящее от способа измерения, а именно комбинация $c^2t^2-x^2-y^2-z^2$ одинакова до и после преобразования

$$c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2. \qquad (17.3)$$

Поэтому эта величина, подобно расстоянию, «реальна» в том смысле, который был придан этому слову выше; ее называют *интервалом* между двумя пространственно-временны́ми точками, одна из которых в этом случае совпадает с началом координат. (Точнее говоря, это не интервал, а квадрат интервала, точно так же как и $x^2+y^2+z^2$ — квадрат расстояния.) Это название подчеркивает различие в геометриях; обратите внимание, что в формуле присутствует $c$, а некоторые знаки обращены.

Давайте избавимся от $c$, оно нам не нужно, если мы хотим иметь удобное пространство, в котором $x$ и $t$ можно переставлять. Представьте, к какой путанице приведет измерение ширины по углу, под которым виден предмет, а толщины — по сокращению мышц при фиксировании глаза на предмет и выражение толщины в *метрах*, а ширины в *радианах*. При преобразованиях уравнений типа (17.2) тогда получится страшная неразбериха и ни за что не удастся разглядеть всю простоту и ясность предмета по той технической причине, что одно и то же будет измеряться двумя различными единицами. С помощью уравнений (17.1) и (17.3) природа говорит нам, что время равнозначно пространству; время становится пространством; *их надо измерять в одинаковых единицах*. Какое расстояние измеряет секунда? Из уравнения (17.3) это легко понять: секунда — это $3\cdot 10^8$ *м*, *расстояние, которое свет проходит за* 1 *сек*. Иначе говоря, если бы расстояния и время мы измеряли в одинаковых единицах (секундах), то единицей длины было бы $3\cdot 10^8$ *м* и уравнения упростились бы. А другой способ уравнять единицы — это измерять время в метрах. Чему равен метр времени? Метр времени — это время, за какое свет проходит расстояние в 1 *м*, т. е. $(1/3)\cdot 10^{-8}$ *сек*, или 3,3 миллиардных доли секунды! Иными словами, нам нужно записать все уравнения в системе единиц, где $c=1$. Когда время и пространство станут измеряться в одинаковых единицах, уравнения, естественно, упростятся:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t-ux}{\sqrt{1-u^2}}; \end{aligned} \tag{17.4}$$

$$t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=t^2-x^2-y^2-z^2. \tag{17.5}$$

Может быть, вы сомневаетесь в законности этого или вас «пугает», что, положив $c=1$, вы не сможете вернуться к правильным уравнениям? Напротив, без $c$ их гораздо легче запомнить, а $c$ легко поставить на нужные места, если присмотреться к размерностям. Скажем, в $\sqrt{1-u^2}$ мы видим, что из неименованного числа 1 приходится вычитать именованное (квадрат скорости $u^2$); естественно, этот квадрат нужно разделить на $c^2$, чтобы сделать вычитаемое безразмерным. Таким путем можно расставить $c$, где полагается.

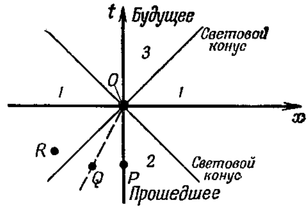
Очень интересно различие между пространством-временем и обыкновенным пространством, различие между интервалом и расстоянием. Посмотрите на формулу (17.5). Если два события произошли в какой-то системе координат в одно и то же время, но в разных точках пространства, то, поместив начало координат в точку, изображающую одно из событий, мы получим, что $t=0$, а, например, $x\neq0$. Значит, квадрат интервала получится отрицательным, а сам интервал — мнимым (корень квадратный из отрицательного числа). Интервалы в этой теории бывают и действительные, и мнимые, потому что их квадраты могут быть и положительными, и отрицательными (в отличие от расстояния, квадрат которого бывает только положительным). Когда интервал мнимый, говорят, что *интервал* между двумя событиями (точками) *пространственно-подобный* (а не мнимый), потому что такой интервал получался бы всегда, если бы весь мир застыл на одном времени. С другой стороны, если два предмета в данной системе координат попадают в одно и то же место в разные моменты времени, тогда $t\neq0$, а $x=y=z=0$ и квадрат интервала положителен; это называется *времени-подобным интервалом*. Далее, если провести на диаграмме пространства-времени две прямые под углом 45° (в четырех измерениях они обратятся в «конус», называемый световым), то точки на этих прямых будут отделены от начала координат нулевым интервалом. Куда бы из начала координат ни распространялся свет, все равно $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$, т. е. интервал между событием прихода света в любую точку и началом всегда равен нулю [как легко видеть из (17.5)]. Кстати, мы сейчас доказали, что скорость света в любых системах координат одинакова: ведь если интервал в обеих системах одинаков, то, будучи равен нулю в одной из них, он равен нулю и в другой, и квадрат скорости света — отношение $x'^2+y'^2+z'^2$ к $t'^2$— опять равен $c^2$.

Сказать, что скорость распространения света — инвариант,— это все равно, что сказать, что интервал равен нулю.

## § 3. Прошедшее, настоящее, будущее

Пространственно-временну́ю область, окружающую данную точку пространства-времени, можно разделить на три области, как показано на фиг. 17.3. В одной из них интервалы пространственно-подобны, в остальных двух — времени-подобны. Эти три области, на которые распадается окружающее точку пространство-время, в физическом отношении связаны с самой точкой очень интересно.

Из области *2* физический объект или сигнал, двигаясь со скоростью, меньшей скорости света, может прийти в точку *O*. Поэтому события в этой области могут воздействовать




*Фиг. 17.3. Область пространства-времени, окружающая начало координат.*

на событие в точке $O$, могут влиять на него из прошлого ($t<0$). Действительно, предмет в точке $P$ на оси отрицательных $t$ оказывается точно в «прошлом» по отношению к точке $O$; $P$ — это та же пространственно-временнáя точка $O$, но в более ранний момент времени. Что в ней когда-то случилось, теперь сказывается на точке $O$. (К сожалению, именно такова наша жизнь.) Другой предмет из $Q$ попадет в $O$, двигаясь с определенной скоростью, меньшей, чем $c$; значит, если бы этот предмет двигался в космическом корабле, он мог бы тоже оказаться прошлым той же точки $O$ пространства-времени. Это означает, что в какой-то другой системе координат ось времени могла бы пройти через $O$ и $Q$. Таким образом, все точки области *2* оказываются по отношению к $O$ в «прошлом»; все, что в этой области происходит, *может* сказаться на $O$. Поэтому область *2* можно назвать *воздействующим прошлым*; это геометрическое место всех событий, которые хоть каким-то образом могут повлиять на событие в точке $O$.

А зато область *3* — это та область, *на которую* в свою очередь могут повлиять события в $O$; в тела, расположенные внутри области *3*, можно «попасть пулей», скорость которой меньше скорости света. Это тот мир, чье будущее в наших руках (если мы сами находимся в точке $O$); область *3* можно назвать *воздействуемым будущим*. Остальное пространство-время (область *1*) интересно тем, что на события в нем из *точки* $O$ влиять нельзя и, обратно, ничто, происходящее в этой области, никак не может повлиять на положение *в точке* $O$, потому что ничто не может обогнать свет. Конечно, если что-то произойдет в точке $R$, это *может* сказаться *позднее*; если, например, Солнце «сию минуту» взорвется, то мы узнаем об этом лишь через 8 минут, и раньше этого времени взрыв никак отразиться на нас не может.

То, что происходит «сейчас», «сию минуту» — это на самом деле нечто таинственное; оно не поддается определению, не поддается и воздействию, однако несколько позже оно может воздействовать на нас (или мы на него, если какое-то время тому назад мы позаботились об этом). Когда мы смотрим на звезду Альфа Центавра, мы видим ее такой, какой она была 4 года тому назад;

нам может захотеться узнать, на что она похожа «сейчас». «Сейчас» — это значит в этот же момент в нашей системе координат. Альфу Центавра мы можем видеть только при помощи световых лучей, явившихся к нам из нашего прошлого, прошлого четырехлетней давности, но что́ на ней происходит «сейчас», мы не знаем. Происходящее на ней «сейчас» сможет воздействовать на нас только через четыре года. «Альфа Центавра сейчас» — это идея, или понятие, существующее в нашем мозге; никакого физического определения для такого понятия в этот момент нет, потому что надо подождать, прежде чем «сейчас» удастся увидеть; для Альфы Центавра даже правильное понятие «сейчас» не поддается определению сию минуту. Ведь «сейчас» зависит от системы координат. Если бы, к примеру, Альфа Центавра двигалась, то наблюдатель на ней не согласился бы с нашим пониманием его «сейчас», потому что его оси координат были бы повернуты на какой-то угол, а его «сейчас» было бы совсем *другим* временем. Мы уже говорили, что одновременность не определяется однозначно.

Встречаются порой предсказатели судьбы, гадалки, люди, утверждающие, что они могут узнавать будущее; немало чудесных историй рассказывается и о людях, которые внезапно видят перед собой свое воздействуемое будущее. От этого возникает множество парадоксов: ведь если мы знаем, что что-то случится, то наверняка сможем избежать этого, если захотим. На самом же деле ни один провидец будущего не способен узнать даже настоящее! Нам никто не скажет, что́ сию минуту происходит достаточно далеко от нас, потому что это ненаблюдаемо.

Напоследок я задам вопрос, ответить на который предоставляю вам самим. Если бы внезапно появилась возможность знать, что происходит в области *1* пространства-времени,— возник бы от этого парадокс или нет?

## § 4. *Еще о четырехвекторах*

Вернемся опять к аналогии между преобразованием Лоренца и вращением пространственных осей. Мы уже убедились, что полезно собирать воедино отличные от координат величины, которые преобразуются так же, как и координаты; эти соединенные величины называют *векторами*, или направленными отрезками. При обычных вращениях немало величин преобразуется в точности так же, как $x$, $y$, $z$ (например, скорость с тремя компонентами $x$, $y$, $z$); при переходе из одной системы координат в другую ни одна из компонент не остается прежней, все они приобретают новые значения. Но «сама» скорость, во всяком случае, более реальна, чем любая из ее компонент, и изображаем мы ее направленным отрезком.

Теперь мы спросим: существуют ли величины, которые преобразуются при переходе от неподвижной системы к движущейся так же, как и $x$, $y$, $z$, $t$? Наш опыт обращения с векторами подсказывает, что три из этих величин, подобно $x$, $y$, $z$, могли бы представлять собой три компоненты обычного пространственного вектора, а четвертая могла бы оказаться похожей на обычный скаляр относительно пространственных вращений: она бы не изменялась, пока мы не перейдем в движущуюся систему координат. Возможно ли, однако, связать с одним из известных «тривекторов» некоторый четвертый объект (который можно назвать «временно́й компонентой») таким образом, чтобы вся четверка «вращалась» точно так же, как изменяются пространство и время в пространстве-времени? Мы сейчас покажем, что действительно существует по крайней мере одна такая четверка (на самом деле далеко не одна): *три компоненты импульса и энергия в качестве временно́й компоненты преобразуются вместе* и образуют так называемый «четырехвектор». Доказывая это, мы избавимся от $c$ тем же приемом, какой употреблялся в уравнении (17.4). Например, энергия и масса отличаются только множителем $c^2$ и при надлежащем выборе единиц измерения энергия совпадет с массой. Вместо того чтобы писать $E=mc^2$, мы положим $E=m$. Если понадобится, в окончательных уравнениях можно опять расставить $c$ в нужных степенях.

Итак, уравнения для энергии и импульса имеют вид

$$E=m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}},\qquad \mathbf{p}=m\mathbf{v}=\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{17.6}$$

Значит, при таком выборе единиц получится

$$E^2-p^2=m_0^2. \tag{17.7}$$

Скажем, если энергия выражена в электронвольтах (*эв*), то чему равна масса в 1 *эв*? Она равна массе с энергией покоя 1 *эв*, т. е. $m_0c^2=1$ *эв*. У электрона, например, масса покоя равна $0{,}511\cdot10^6$ *эв*.

Как же будут выглядеть импульс и энергия в новой системе координат? Чтобы узнать это, надо преобразовать уравнения (17.6). Это преобразование легко получить, зная, как преобразуется скорость. Пусть некоторое тело имело скорость $v$, а мы наблюдаем за ним из космического корабля, который сам имеет скорость $u$, и обозначаем соответствующие величины штрихами. Для простоты сперва мы рассмотрим случай, когда скорость $v$ направлена по скорости $u$. (Более общий случай мы рассмотрим позже.) Чему равна скорость тела $v'$ по измерениям из космического корабля? Эта скорость равна «разности» между $v$ и $u$. По прежде полученному нами закону

$$v' = \frac{v-u}{1-uv}. \tag{17.8}$$

Теперь подсчитаем, какой окажется энергия $E'$ по измерениям космонавта. Он, конечно, воспользуется той же массой покоя, но зато скорость станет $v'$. Он возведет $v'$ в квадрат, вычтет из единицы, извлечет квадратный корень и найдет обратную величину

$$v'^2 = \frac{v^2-2uv+u^2}{1-2uv+u^2v^2},$$

$$1-v'^2 = \frac{1-2uv+u^2v^2-v^2+2uv-u^2}{1-2uv+u^2v^2} =$$

$$= \frac{1-v^2-u^2+u^2v^2}{1-2uv+u^2v^2} = \frac{(1-v^2)(1-u^2)}{(1-uv)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{1-v'^2}} = \frac{1-uv}{\sqrt{1-v^2}\,\sqrt{1-u^2}}. \tag{17.9}$$

Энергия $E'$ просто равна массе $m_0$, умноженной на это выражение. Но нам хочется выразить энергию через нештрихованные энергию и импульс. Мы замечаем, что

$$E' = \frac{m_0-m_0uv}{\sqrt{1-v^2}\,\sqrt{1-u^2}} = \frac{(m_0/\sqrt{1-v^2})-(m_0v/\sqrt{1-v^2})u}{\sqrt{1-u^2}},$$

или

$$E' = \frac{E-up_x}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{17.10}$$

Мы узнаем в этом выражении знакомое нам преобразование

$$t' = \frac{t-ux}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Теперь мы должны найти новый импульс $p_x'$. Он равен энергии $E'$, умноженной на $v'$, и так же просто выражается через $E$ и $p$:

$$p_x' = E'v' = \frac{m_0(1-uv)}{\sqrt{1-v^2}\,\sqrt{1-u^2}}\,\frac{v-u}{1-uv} = \frac{m_0v-m_0u}{\sqrt{1-v^2}\,\sqrt{1-u^2}}.$$

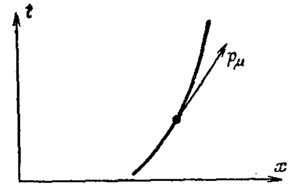
Итак,

$$p_x' = \frac{p_x-uE}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{17.11}$$

и мы опять распознаем в этой формуле знакомое нам

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2}}.$$

*Фиг. 17.4. Четырехвектор импульса частицы.*




Итак, преобразование старых энергии и импульса в новые энергию и импульс в точности совпало с преобразованием $t$ и $x$ в $t'$ и $x$ и $t$ в $x'$: если мы в уравнениях (17.4) будем писать $E$ каждый раз, когда увидим $t$, а вместо $x$ всякий раз будем подставлять $p_x$, то уравнения (17.4) превратятся в уравнения (17.10) и (17.11). Если все верно, то это правило предполагает добавочные равенства $p'_y = p_y$ и $p'_z = p_z$. Чтобы их доказать, надо посмотреть, как преобразуется движение вверх или вниз. Но как раз в предыдущей главе мы рассмотрели такое движение. Мы анализировали сложное столкновение и заметили, что поперечный импульс действительно не меняется при переходе в движущуюся систему координат. Стало быть, мы уже убедились, что $p'_y = p_y$ и $p'_z = p_z$. Итак, полное преобразование равно

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - uE}{\sqrt{1-u^2}}, \\ p'_y &= p_y, \\ p'_z &= p_z, \\ E' &= \frac{E - up_x}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned} \tag{17.12}$$

Таким образом, эти преобразования выявили четыре величины, которые преобразуются подобно $x$, $y$, $z$, $t$. Назовем их *четырехвектор импульса*. Так как импульс — это четырехвектор, его можно изобразить на диаграмме пространства-времени движущейся частицы в виде «стрелки», касательной к пути (фиг. 17.4). У этой стрелки временна́я компонента дает энергию, а пространственные — тривектор импульса; сама стрелка «реальнее», чем один только импульс или одна лишь энергия: ведь и импульс, и энергия зависят от нашей точки зрения.

## § 5. *Алгебра четырехвекторов*

Четырехвекторы обозначаются иначе, чем тривекторы. Например, тривектор импульса обозначают **p**. Если хотят дать более детальную запись, то говорят о трех компонентах $p_x$,

$p_y$, $p_z$; можно писать и короче $p_i$, оговаривая, что $i$ принимает три значения $x$, $y$ и $z$. Для четырехвекторов мы будем применять похожее обозначение: будем писать $p_\mu$, а $\mu$ пусть заменяет собой *четыре* направления $t$, $x$, $y$, $z$.

Конечно, можно пользоваться любыми обозначениями. Не улыбайтесь, что мы так много говорим об обозначениях; учитесь изобретать их: в них вся сила. Ведь и сама математика в значительной степени состоит в изобретении лучших обозначений. Идея четырехвектора — это тоже усовершенствование обозначений с таким расчетом, чтобы преобразования было легче запомнить.

Итак, $A_\mu$ — это общий четырехвектор, $p_\mu$ — четырехимпульс, $p_t$ — энергия, $p_x$ — импульс в направлении $x$, $p_y$ — в направлении $y$, $p_z$ — в направлении $z$. Складывая четырехвекторы, складывают их соответствующие компоненты.

Если четырехвекторы связаны каким-то уравнением, то это значит, что уравнение выполняется для *любой компоненты*. Например, если закон сохранения тривектора импульса соблюдается в столкновении частиц, т. е. сумма импульсов множества взаимодействующих или сталкивающихся частиц постоянна, то это означает, что сумма всех компонент импульсов постоянна и в направлении $x$, и в направлении $y$, и в направлении $z$. Сам по себе такой закон в теории относительности невозможен: *он неполон*; это все равно, что говорить только о двух компонентах тривектора. Неполон он потому, что при повороте осей разные компоненты смешиваются, значит, в закон сохранения должны войти все три компоненты. Таким образом, в теории относительности нужно дополнить закон сохранения импульса, включив в него сохранение временно́й компоненты. *Абсолютно необходимо*, чтобы сохранение первых трех компонент сопровождалось сохранением четвертой, иначе не получится релятивистской инвариантности. Четвертое уравнение — это как раз *сохранение энергии;* оно должно сопровождать сохранение импульса для того, чтобы четырехвекторные соотношения в геометрии пространства-времени были справедливы. Итак, закон сохранения энергии и импульса в четырехмерном обозначении таков:

$$\sum_{\substack{\text{Налетающие}\\ \text{частицы}}} p_\mu = \sum_{\substack{\text{Разлетающ.}\\ \text{частицы}}} p_\mu, \tag{17.13}$$

или в чуть измененных обозначениях

$$\sum_i p_{i\mu} = \sum_j p_{j\mu}, \tag{17.14}$$

где $i=1, 2, \ldots$ относится к сталкивающимся частицам, $j=1, 2, \ldots$ — к частицам, возникающим при столкновении, а $\mu=x$, $y$, $z$

или $t$. Вы спросите: «А что по осям координат?» Это неважно. Закон верен для любых компонент, при *любых* осях.

В векторном анализе нам встретилось одно понятие — скалярное произведение двух векторов. Что соответствует ему в пространстве-времени? При обычных вращениях неизменной остается величина $x^2+y^2+z^2$. В четырехмерном мире таким свойством при преобразованиях обладает величина $t^2-x^2-y^2-z^2$ [уравнение (17.3)]. Как можно это записать? Можно было бы, например, пользоваться значком наподобие $A_\mu \diamond B_\mu$, но обычно пишут

$$\sum_\mu{}' A_\mu A_\mu = A_t^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2. \tag{17.15}$$

Штрих при $\sum$ напоминает, что первый, «временнóй» член положителен, а остальные три отрицательны. Эта величина одна и та же в любой системе координат, и можно назвать ее квадратом длины четырехвектора. Чему равен, например, квадрат длины четырехвектора импульса отдельной частицы? *Ответ*: $p_t^2-p_x^2-p_y^2-p_z^2$, или, иначе, $E^2-p^2$, потому что $p_t$ это и есть $E$. Чему равно $E^2-p^2$? Должно по условию получиться что-то, что одинаково в любой системе координат, в частности и в системе координат, которая движется вместе с частицей, так что частица в этой системе покоится. Но если частица неподвижна, значит, у нее нет импульса. Значит, у нее остается только энергия, совпадающая в этом случае с ее массой. Итак, $E^2-p^2=m_0^2$, т. е. квадрат длины четырехвектора импульса равен $m_0^2$.

Пользуясь выражением для квадрата вектора, легко изобрести скалярное произведение двух четырехвекторов: если один из них $a_\mu$, а другой $b_\mu$, то скалярное произведение определяется так:

$$\sum{}' a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z\,. \tag{17.16}$$

Это выражение не меняется при преобразовании системы координат.

Следует еще упомянуть о частицах с нулевой массой покоя, например о фотоне — частице света. Фотон похож на частицу тем, что он переносит энергию и импульс. Энергия фотона равна произведению некоторой постоянной (постоянная Планка) на частоту света: $E=h\nu$. Такой фотон несет с собой и импульс, который (как у всякой частицы) равен постоянной $h$, деленной на длину волны света: $p=h/\lambda$. Но у фотона связь между частотой и длиной волны вполне определенна: $\nu=c/\lambda$. (Количество волн, проходящих за 1 *сек*, помноженное на их длину, даст расстояние, проходимое светом в 1 *сек*, т. е. $c$.) Мы сходу получаем, что энергия фотона равна его импульсу, умноженному на $c$, и, далее, полагая $c=1$, что *энергия равна импульсу*. Но это и значит, что масса покоя равна нулю. Давайте вдумаемся в это любопытное обстоятельство. Если фотон — частица с нулевой массой покоя, то что с ним бывает, когда он останавливается? *Но он никогда не останавливается*! Он всегда движется со скоростью $c$. Обычная формула для энергии — это $m_0/\sqrt{1-v^2}$. Можно ли утверждать, что при $m_0=0$ и $v=1$ энергия фотона равна нулю? Нет, нельзя; на самом деле фотон может обладать (и обладает) энергией, хоть и не имеет массы покоя, за счет того, что всегда движется со скоростью света!

Мы знаем также, что импульс любой частицы равен произведению полной энергии на скорость: $p=vE$ при $c=1$, или, в обычных единицах, $p=vE/c^2$. Для любой частицы, движущейся со скоростью света, $p=E$, если $c=1$. Формулы для энергии фотона в движущейся системе даются по-прежнему уравнением (17.12), но вместо импульса туда нужно подставить энергию, умноженную на $c$ (на 1). Изменение энергии при преобразовании означает изменение частоты света. Это явление называется эффектом Допплера; формулу для него легко получить из уравнения (17.12), положив $E=p$ и $E=h\nu$.

Как сказал Минковский: «Пространство само по себе и время само по себе погрузятся в реку забвенья, а останется жить лишь своеобразный их союз».

*Глава* 18

# ДВУМЕРНЫЕ ВРАЩЕНИЯ



## *§ 1. Центр масс*

В предыдущих главах мы изучали механику точек, или маленьких частиц, внутренняя структура которых нас совершенно не интересовала. В последующих нескольких главах мы изучим применение законов Ньютона к более сложным вещам. Но ведь чем сложнее объект, тем он интереснее, и вы сами увидите, что явления, связанные с такими более сложными объектами, поистине поразительны. Разумеется все эти явления не содержат ничего большего, чем комбинации законов Ньютона, однако временами просто трудно поверить, что все это произошло из $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$!

Что это за более сложные объекты, с которыми мы будем иметь дело в дальнейшем? Это может быть течение воды, вращение галактик и т. д. Но сначала давайте разберемся с наиболее простым из сложных объектов—*твердым телом.* Этим термином мы будем называть монолитный объект, который одновременно с изменением положения может еще и вращаться как целое. Впрочем, даже такой простой объект может двигаться достаточно сложно, поэтому давайте сначала рассмотрим наиболее простой случай движения, когда тело крутится вокруг *неподвижной оси*, причем каждая точка этого тела движется в плоскости, перпендикулярной к этой оси. Такое вращение тела вокруг неподвижной оси называется *плоским*, или *двумерным.* Позднее, когда мы обобщим наш результат на случай трех измерений, вы увидите, что вращение гораздо более хитрая штука, чем механика частицы, и без достаточного опыта в двух измерениях понять трехмерные вращения очень трудно.

К первой интересной теореме о движении сложного тела можно прийти следующим образом: попробуйте бросить какой-нибудь предмет, состоящий из множества скрепленных между собой кубиков и стержней. Вы знаете, конечно, что он полетит по параболе; это мы обнаружили еще, когда изучали движение точки. Однако теперь наш объект *не* точка. Он поворачивается, покачивается и все же летит по параболе; вы можете в этом убедиться. *Какая же точка* тела описывает параболу? Ну разумеется, не угол кубика, потому что он поворачивается, не конец стержня, не его середина и не центр кубика. Но все-таки *что-то* движется по параболе, существует некий эффективный «центр», который движется по параболе. Таким образом, первая теорема о сложных объектах говорит, что *существует* какая-то «средняя» точка, вполне определенная математически, которая движется по параболе. Точка эта не обязательно находится в самом теле, она может лежать и где-то вне его.

Это так называемая теорема о центре масс, и доказывается она следующим образом.

Любой объект можно рассматривать как множество маленьких частичек, атомов, связанных различными силами. Пусть $i$ обозначает номер одной из таких частиц (их страшно много, поэтому $i$ может быть равно, например, $10^{23}$). Сила, действующая на $i$-ю частицу, равна массе, умноженной на ускорение этой частицы:

$$\mathbf{F}_i = m_i\left(\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}\right). \tag{18.1}$$

В последующих главах наши движущиеся объекты и все их части будут двигаться со скоростями, много меньшими, чем скорость света, и поэтому для всех величин мы будем рассматривать только нерелятивистское приближение. Масса при этих условиях будет постоянна, так что

$$\mathbf{F}_i = \frac{d^2(m_i\mathbf{r}_i)}{dt^2}. \tag{18.2}$$

Если теперь сложить все силы, действующие на частицы, т. е. сложить все $\mathbf{F}_i$ со всеми значениями индекса, то в результате мы должны получить полную силу $\mathbf{F}$. Складывая же правые части уравнения (18.2) для всех частиц и вспоминая, что производная от суммы равна сумме производных, получаем

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} = \frac{d^2\left(\sum_i m_i\mathbf{r}_i\right)}{dt^2}. \tag{18.3}$$

Поэтому полная сила равна второй производной от суммы произведений масс частиц на их положение.

Но полная сила, действующая на все частицы,— это то же самое, что и внешняя сила. Почему? Да потому что, какие бы силы ни действовали между частицами, пусть это будет притяжение или отталкивание, или атомные силы, все равно, когда мы складываем их вместе и применяем Третий закон Ньютона, по которому силы действия и противодействия между любыми двумя частицами равны друг другу, то эти взаимные силы сокращаются друг с другом и в результате останутся только силы, действующие со стороны атомов, находящихся вне тела. Так что, если уравнение (18.3) представляет собой сумму по некоторому числу частиц, образующих наш объект, то *внешняя* сила, действующая на него, равна просто сумме всех сил, действующих на *все* частицы, образующие этот объект. Уравнение (18.3) неплохо было бы записать в виде полной массы тела, умноженной на какое-то ускорение. Сделать это можно. Пусть $M$ будет суммой масс всех частиц, т. е. полной массой тела. Если теперь *определить* вектор $\mathbf{R}$ как

$$\mathbf{R}=\frac{\sum\limits_i m_i\mathbf{r}_i}{M}, \tag{18.4}$$

то, поскольку $M$ постоянна, уравнение (18.3) перейдет в

$$\mathbf{F}=\frac{d^2(M\mathbf{R})}{dt^2}=M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}. \tag{18.5}$$

Таким образом, внешняя сила равна полной массе, умноженной на ускорение некоторой точки $\mathbf{R}$; эта точка и называется *центром масс* тела. Она расположена где-то в «середине» тела — некое среднее $\mathbf{r}$, в котором различные $\mathbf{r}_i$ учитываются в зависимости от их важности, т. е. в зависимости от того, какую долю вносят они в полную массу.

Мы подробно обсудим эту важную теорему несколько позднее, а сейчас остановимся на двух примерах. Пусть на тело не действуют никакие внешние силы, скажем, оно плавает где-то в пустом пространстве. Оно может делать все, что ему угодно: крутиться, покачиваться, изгибаться, но при этом его *центр масс*, эта искусственно выделенная нами математическая точка, *должен двигаться с постоянной скоростью*. В частности, если вначале этот центр покоился, то он так и будет покоиться все время. Поэтому если мы возьмем какой-то космический корабль со всеми его пассажирами, вычислим его центр масс и обнаружим, что он стоит на месте, то можно быть уверенным, что центр масс так и останется на месте, если только на корабль не будут воздействовать какие-то внешние силы. Сам корабль, конечно, может немного перемещаться, но это потому, что пассажиры внутри корабля ходят взад и вперед. Так, если все пассажиры одновременно перейдут в носовую часть, то корабль немного подастся назад, чтобы среднее положение всех масс осталось в точности на том же самом месте.

Означает ли это, что в результате неподвижности центра масс ракета не может двигаться вперед? Конечно, нет, но, чтобы продвинуть вперед интересующую нас часть ракеты, мы что-то должны выбросить назад. Иными словами, если вначале ракета покоилась, а затем выбросила из сопла некоторое количество газа, то газ этот полетит назад, а сама ракета полетит при этом вперед, однако центр масс останется точно на том же месте, где он был и раньше. Так что в ракете интересующая нас часть продвинется вперед за счет другой, которая улетит назад.

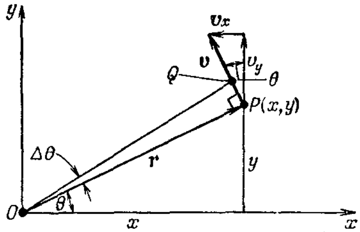
Второе замечание относительно движения центра масс. Его можно рассматривать отдельно от всех «внутренних» движений тела и, следовательно, его можно не учитывать при изучении вращения. Собственно поэтому мы начали изучать вращения с центра масс.

## § 2. *Вращение твердого тела*

Поговорим теперь о вращении. Как известно, обычные предметы не вращаются просто так: они колеблются, вибрируют, изгибаются. Поэтому, чтобы упростить рассуждения, рассмотрим движение несуществующего идеального объекта, который мы назвали *твердым телом*. В таком объекте связи между атомами столь сильны, что те небольшие силы, которые необходимы, чтоб привести его в движение, не могут деформировать тело. Форма его все время остается одной и той же. Если мы хотим изучить движение такого тела и условимся не принимать во внимание движение его центра масс, то ему остается лишь *вращаться*. Вот это вращение мы и должны описать. Каким образом? Предположим, что в теле существует какая-то воображаемая неподвижная линия (она может проходить через центр масс, а может и не проходить); вокруг этой линии, как вокруг оси, вращается наше тело. Но как все-таки определить, что такое вращение? Сделать это совсем просто. Отметив какую-то точку на теле, где угодно, только не на оси, и зная, куда она перешла через некоторый промежуток времени, мы точно можем сказать, в каком положении находится тело. Единственное, что нужно знать для описания положения точки,— это *угол*. Таким образом, изучение вращения заключается в изучении изменения угла со временем.

Чтобы описать вращение, измерим угол, на который поворачивается тело. Разумеется, речь идет не об угле между двумя точками *внутри* самого тела или *на* теле, а об *угловом изменении положения* всего тела как целого от одного момента времени до другого.

*Фиг. 18.1. Кинематика двумерного вращения.*




Сначала давайте разберемся с кинематикой вращения. Изменение угла со временем очень похоже на изменение положения при одномерном движении; для плоского вращения мы можем говорить об угловом положении и угловой скорости. Между этими двумя движениями — плоским вращением и одномерным перемещением — существует очень интересная связь: почти каждая величина в одном случае имеет свой аналог в другом. Прежде всего угол $\theta$, указывающий, насколько *повернулось* тело, соответствует пройденному точкой расстоянию $s$. Угловая скорость $\omega = d\theta/dt$, которая показывает, с какой быстротой изменяется угол, соответствует обычной скорости $v = ds/dt$, описывающей быстроту изменения положения. Если угол измеряется в радианах, то угловая скорость $\omega$ равна какому-то числу радиан в секунду. Чем больше угловая скорость, тем быстрее вращается объект и тем быстрее изменяется угол. Если продифференцировать угловую скорость по времени, то получим величину $\alpha = d\omega/dt$, которую мы будем называть угловым ускорением. Оно может служить аналогом обычного ускорения.

Теперь нам следует связать динамику вращения с динамикой частиц, из которых сделано тело, т. е. выяснить, как движется каждая данная частица, если угловая скорость составляет столько-то радиан в секунду. Для этого давайте возьмем какую-то частицу, расположенную на расстоянии $r$ от оси, и будем, как обычно, говорить, что в данный момент времени она находится в определенном положении $P(x, y)$ (фиг. 18.1). Через промежуток времени $\Delta t$ тело целиком повернется на угол $\Delta\theta$, а вместе с ним повернется и наша частица. Хотя расстояние от нее до оси вращения $O$ остается тем же самым, она уже переместится в другую точку, $Q$. Первое, что хотелось бы знать, это насколько изменятся расстояния $x$ и $y$. Если обозначить через $r$ длину $OP$, то длина $PQ$ будет равна $r\Delta\theta$ (просто по определению угла). Тогда изменение расстояния $x$ будет равно проекции $r\Delta\theta$ на ось $x$

$$\Delta x = -PQ \sin\theta = -r\Delta\theta \frac{y}{r} = -y\Delta\theta. \qquad (18.6)$$

Аналогично,

$$\Delta y = x\Delta\theta. \qquad (18.7)$$

Если тело вращается с угловой скоростью $\omega$, то, деля обе части равенства (18.6) и (18.7) на $\Delta t$, найдем компоненты скорости частицы

$$v_x = -\omega x \quad \text{и} \quad v_y = \omega y. \tag{18.8}$$

Если же нам требуется абсолютная величина скорости, то мы просто пишем

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2 x^2 + \omega^2 y^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega r. \tag{18.9}$$

Не удивительно, что абсолютная величина скорости получилась равной $\omega r$; это же очевидно; ведь полное пройденное расстояние равно $r\Delta\theta$, а поэтому расстояние, пройденное за 1 *сек*, будет $r\Delta\theta/\Delta t$, или $r\omega$.

Перейдем теперь к рассмотрению *динамики* вращения. Здесь следует ввести новое понятие — *силу*. Давайте посмотрим, нельзя ли изобрести нечто, играющее ту же роль, что и сила в линейном движении. Это нечто мы будем называть *моментом силы*, или просто *моментом*. Обычно под силой мы понимаем нечто, заставляющее покоящееся тело двигаться, а то, что заставляет тело вращаться, есть «вращающая», или «крутящая», сила; ее мы называем *моментом*. Таким образом, качественно момент силы — это кручение; но что такое момент силы количественно? Количественную теорию момента можно получить, изучая *работу*, затраченную на поворот тела. Этот подход очень хорош и для определения силы: если мы знаем, какая требуется работа, чтобы совершить данное перемещение, то знаем и силу. Чтобы продолжить соответствие между угловыми и линейными величинами, мы должны приравнять работу, которая производится при повороте тела на какой-то угол, к произведению *момента* на этот *угол*. Другими словами, при таком определении момента теорема о работе имеет абсолютный аналог: работа есть сила на перемещение, или момент на угол. Это сразу говорит нам, чтó такое момент количественно. Рассмотрим, например, твердое тело, вращающееся вокруг оси, на которое действуют различные силы. Сконцентрируем сначала наше внимание на одной силе, приложенной к некоторой точке $(x, y)$. Какую работу мы затрачиваем, поворачивая тело на некоторый малый угол $\Delta\theta$? Нетрудно понять, что она равна

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y. \tag{18.10}$$

Теперь нужно только подставить выражения (18.6) и (18.7) для $\Delta x$ и $\Delta y$ и получить

$$\Delta W = (xF_y - yF_x)\,\Delta\theta, \tag{18.11}$$

т. е. работа, которую мы проделали, равна углу, на который было повернуто тело, умноженному на какую-то странную комбинацию сил и расстояний. Эта «странная комбинация» и есть момент. Таким образом, определяя изменение работы как момент, умноженный на угол поворота, мы получаем формулу, выражающую момент через силы. (Это понятно. Поскольку момент не является полностью новым понятием, не зависящим от механики Ньютона, то он должен определенным образом выражаться через силу.)

Пусть теперь на тело действует несколько сил. Тогда работа, производимая этими силами, равна сумме работ от каждой силы, так что $\Delta W$ будет иметь вид суммы множества членов: по одному для каждой из сил, однако *каждый из них пропорционален* $\Delta\theta$. Эту величину $\Delta\theta$ можно вынести за скобку и получить, что работа равна сумме моментов от всех действующих сил, умноженной на $\Delta\theta$. Эту сумму можно назвать полным моментом сил и обозначить $\tau$. Как видите, моменты складываются по обычным законам алгебры, однако, как вы узнаете после, это происходит из-за того, что мы ограничиваемся только плоскими вращениями. Эта ситуация напоминает одномерное движение, в котором силы просто складываются алгебраически; ведь все они в этом случае действуют вдоль одной и той же прямой. В трехмерном пространстве все более сложно. Таким образом, для двумерного вращения

$$\tau_i = x_i F_{yi} - y_i F_{xi} \tag{18.12}$$

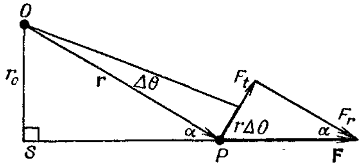
и

$$\tau = \sum \tau_i. \tag{18.13}$$

Нужно только помнить, что это справедливо лишь для вращения вокруг одной оси. Если брать различные оси, то все $x_i$ и $y_i$ изменятся, соответственно изменяются (обычно) и величины моментов.

Отвлечемся теперь на минуту и заметим, что предыдущий способ введения момента дает очень важный результат для тела, находящегося в равновесии: если сбалансированы все силы, действующие на объект, и перемещающие и вращающие, то нужно, чтобы не только *полная сила* была равна нулю, но и *полный момент*, так как при *малом перемещении объекта, находящегося в равновесии, никакой работы не производится*. Следовательно, из того, что $\Delta W = \tau\Delta\theta = 0$, можно заключить, что сумма всех моментов должна быть равна нулю. Таким образом, для равновесия необходимо выполнение двух условий: а) сумма всех сил равна нулю и б) сумма всех моментов тоже равна нулю. Попробуйте доказать сами, что в двумерном случае достаточно равенства нулю суммы моментов сил относительно какой-либо *одной* оси.

Вернемся теперь к случаю одной силы, действующей на тело, и попытаемся выяснить, что же геометрически означает




*Фиг. 18.2. Вращающий момент, создаваемый силой.*

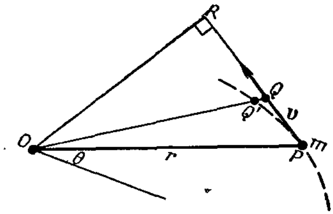
странное выражение $xF_y - yF_x$. На фиг. 18.2 вы видите силу $\mathbf{F}$, приложенную в точке $P$. Когда тело поворачивается на малый угол $\Delta\theta$, то естественно, что произведенная при этом работа равна составляющей в направлении перемещения, умноженной на величину перемещения. Иначе говоря, работает только тангенциальная составляющая силы, которая умножается на расстояние $r\Delta\theta$. Поэтому момент равен тангенциальной составляющей силы (перпендикулярной к радиусу), умноженной на радиус. Это хорошо согласуется с нашим первоначальным понятием момента, потому что полностью радиальная сила не может крутить тело. Крутящее действие силы, очевидно, происходит только от той ее части, которая не тянет тело от центра. Она и называется тангенциальной составляющей. Ясно, кроме того, что данная сила закручивает тело тем сильнее, чем дальше от центра она приложена. Попробуйте раскрутить тело давлением прямо *на* его ось! Таким образом, тот факт, что момент силы пропорционален как радиальному расстоянию, так и тангенциальной составляющей силы, имеет свой смысл.

Существует еще третье, очень интересное выражение для момента силы. Как вы только что узнали, момент силы равен силе, умноженной на радиус и на синус угла $\alpha$ (см. фиг. 18.2). Если теперь продолжить линию действия силы и провести прямую, перпендикулярную к ней, то нетрудно видеть, что длина $OS$ (она часто называется *плечом силы*) во столько раз короче радиуса, во сколько тангенциальная составляющая силы меньше полной ее величины. Поэтому можно записать, что момент равен произведению величины силы на длину ее плеча.

Мы не знаем точно, откуда произошел термин «момент силы» — по-видимому, от латинского *movimentum*, что означает способность силы двигать объект (используя какой-либо рычаг), тем более заметную, чем длинней плечо силы. Кстати, в математике слово «момент» означает усреднение с весом, в качестве которого взято расстояние до оси.

## § 3. *Момент количества движения*

Хотя до сих пор мы рассматривали только специальный случай твердого тела, свойства момента и его математическое выражение интересны даже тогда, когда тело не твердое. Можно дока-




*Фиг. 18.3. Движение частицы относительно оси вращения O.*

зать очень интересную теорему: подобно тому как внешняя сила равна скорости изменения величины $p$, которая называется полным импульсом системы частиц, так и момент силы равен скорости изменения некоторой величины $L$, называемой *моментом количества движения*, или *угловым моментом* группы частиц.

Чтобы доказать это, рассмотрим систему частиц, на которую действуют силы, и посмотрим, что произойдет с системой в результате действия вращающих моментов, созданных этими силами. Для начала давайте возьмем только *одну* частицу. Такая частица с массой $m$ и осью $O$ изображена на фиг. 18.3. Она не обязательно должна вращаться по окружности вокруг оси $O$, а может двигаться и по эллипсу, подобно планете вокруг Солнца, или по какой-нибудь другой кривой. Главное то, что она движется, что на нее действует сила, которая ускоряет ее в соответствии с обычными законами: $x$-компонента силы равна массе, умноженной на $x$-компоненту ускорения, и т. д. Но посмотрим теперь, как действует *момент силы*. Он, как вы знаете, равен $xF_y—yF_x$, а $x$- и $y$-компоненты силы в свою очередь равны массе, умноженной соответственно на $x$- и $y$-компоненту ускорения, так что

$$\tau = xF_y - yF_x = xm\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - ym\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right). \tag{18.14}$$

Хотя сразу и не видно, что это выражение является производной от какой-то простой величины, но на самом деле оно равно производной от $xm(dy/dt)—ym(dx/dt)$. Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left(xm\frac{dy}{dt} - ym\frac{dx}{dt}\right) = xm\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}m\frac{dy}{dt} -$$
$$- ym\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}m\frac{dx}{dt} = xm\frac{d^2y}{dt^2} - ym\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{18.15}$$

Оказывается, таким образом, что момент силы равен скорости изменения со временем некоторой величины! Давайте обратим внимание на эту величину и прежде всего дадим ей имя. Она будет называться моментом количества движения, или угловым моментом, и обозначаться буквой $L$

$$L = xm\frac{dy}{dt} - ym\frac{dx}{dt} = xp_y - yp_x. \tag{18.16}$$

Хотя во всех наших рассмотрениях мы не принимали в расчет теорию относительности, тем не менее второе выражение для $L$ верно и при учете ее. Итак, мы нашли, что у обычного импульса также существует вращательный аналог — угловой момент, который связан с компонентами импульса точно так же, как и момент силы связан с компонентами силы! Так что если мы хотим вычислить момент количества движения относительно какой-то оси, то должны взять тангенциальную составляющую импульса и умножить ее на радиус. Другими словами, угловой момент показывает, насколько быстро движется частица *вокруг* какого-то центра, ведь он учитывает только тангенциальную часть импульса. Более того, чем дальше от центра удалена линия, по которой направлен импульс, тем больше будет угловой момент. Точно так же, поскольку геометрия в этом случае та же, что и в случае момента силы, существует плечо импульса (оно, разумеется, *не совпадает* с плечом силы, действующей на частицу), которое равно расстоянию линии импульса от оси. Таким образом, угловой момент равен просто величине импульса, умноженного на его плечо. Точно так же, как и для момента силы, для углового момента мы можем написать следующие три формулы:

$$\begin{aligned} L &= xp_y - yp_x = \\ &= rp_{\text{танг}} = \\ &= p\cdot\text{Плечо импульса}. \end{aligned} \tag{18.17}$$

Момент количества движения, как и момент силы, зависит от положения оси, относительно которой он вычисляется.

Прежде чем перейти к рассмотрению более чем одной частицы, применим полученные выше результаты к движению планеты вокруг Солнца. В каком направлении действует сила? Конечно, по направлению к Солнцу. А какой при этом будет момент силы? Разумеется, все зависит от того, в каком месте мы выберем ось, однако результат получится совсем простым, если в качестве точки вращения выбрать само Солнце. Поскольку момент силы равен силе, умноженной на ее плечо, или компоненте силы, перпендикулярной к радиусу $r$, умноженной на $r$, то в этом случае нет никакой тангенциальной составляющей силы, а поэтому момент силы относительно оси, проходящей через Солнце, равен нулю. Следовательно, момент количества движения должен оставаться постоянным. Давайте-ка посмотрим, что это означает. Произведение тангенциальной компоненты скорости на массу и радиус, будучи моментом количества движения, должно оставаться постоянным, потому что скорость его изменения есть момент силы, который в нашем случае равен нулю. Это означает, что остается постоянным произведение тангенциальной компоненты скорости на радиус, поскольку масса-то уж, конечно, не изменяется. Но такая величина, характеризующая движение планеты, уже вычислялась нами раньше. Предположим, что мы взяли маленький промежуток времени $\Delta t$. Какое расстояние пройдет планета при своем движении из точки $P$ в точку $Q$ (фиг. 18.3)? Как велика *площадь* той области, которую «заметает» прямая, соединяющая планету с Солнцем? Пренебрегая площадью $QQ'P$, которая очень мала по сравнению с $OPQ$, находим, что площадь этой области равна половине основания $PQ$, умноженного на высоту $OR$. Другими словами, «заметенная» площадь равна половине произведения скорости на ее плечо. Так что скорость изменения этой площади пропорциональна моменту количества движения, который остается постоянным. Итак, мы получим, что закон Кеплера о равных площадях за равные промежутки времени является просто словесным описанием закона сохранения момента количества движения, когда моменты внешних сил отсутствуют.

## § 4. *Закон сохранения момента количества движения*

Посмотрим теперь, что получается в случае большого количества частиц, т. е. когда тело состоит из множества частичек со множеством сил, действующих между ними и извне. Разумеется, мы уже знаем, что момент силы, действующий на любую $i$-ю частицу (т. е. произведение силы, действующей на $i$-ю частицу, на ее плечо), равен скорости изменения момента количества движения этой частицы, а момент количества движения $i$-й частицы в свою очередь равен произведению импульса частицы на его плечо. Допустим теперь, что мы сложили моменты сил $\tau_i$ всех частиц и назвали это полным моментом сил $\tau$. Эта величина должна быть равна скорости изменения суммы моментов количества движения всех частиц $L_i$. Эту сумму можно принять за определение новой величины, которую мы назовем полным моментом количества движения $L$. Точно так же, как импульс тела равен сумме импульсов составляющих его частиц, момент количества движения тела тоже равен сумме моментов составляющих его частиц. Таким образом, скорость изменения полного момента количества движения $L$ равна полному моменту сил

$$\tau = \sum \tau_i = \sum \frac{dL_i}{dt} = \frac{dL}{dt}. \qquad (18.18)$$

С непривычки может показаться, что полный момент сил — ужасно сложная штука. Ведь нужно учитывать все внутренние и и внешние силы. Однако если мы вспомним, что по закону Ньютона силы действия и противодействия не только равны, но и (что особенно важно!) *действуют по одной и той же прямой в противоположных направлениях* (неважно, говорил ли об этом сам Ньютон или нет, неявно он подразумевал это), то два *момента* внутренних сил между двумя взаимодействующими частицами должны быть равны друг другу и направлены противоположно, поскольку для любой оси плечи их будут одинаковы. Поэтому все внутренние моменты сил взаимно сокращаются и получается замечательная теорема: *скорость изменения момента количества движения относительно любой оси равна моменту внешних сил относительно этой же оси*!

$$\tau = \sum \tau_i = \tau_{\text{внеш.}} = \frac{dL}{dt}. \tag{18.19}$$

Итак, мы получили в руки мощную теорему о движении большого коллектива частиц, которая позволяет нам изучать общие свойства движения, не зная деталей его внутреннего механизма. Эта теорема верна для любого набора частиц, независимо от того, образуют ли они твердое тело или нет.

Особенно важным частным случаем этой теоремы является *закон сохранения момента количества движения*, который гласит: если на систему частиц не действуют никакие внешние моменты сил, то ее момент количества движения остается постоянным.

Рассмотрим один очень важный частный случай набора частиц, когда они образуют твердое тело, т. е. объект, который всегда имеет определенную форму и геометрический размер и может только крутиться вокруг какой-то оси. Любая часть такого объекта в любой момент времени расположена одинаковым образом относительно других его частей. Попытаемся теперь найти полный момент количества движения твердого тела. Если масса $i$-й частицы его равна $m_i$, а положение ее $(x_i, y_i)$, то задача сводится к определению момента количества движения этой частицы, поскольку полный момент количества движения равен сумме моментов количества движения всех таких частиц, образующих тело. Для движущейся по окружности точки момент количества движения равен, конечно, произведению ее массы на скорость и на расстояние до оси вращения, а скорость в свою очередь равна угловой скорости, умноженной на расстояние до оси:

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega. \tag{18.20}$$

Суммируя $L_i$ для всех частиц, получаем

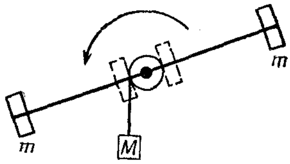
$$L = I\omega, \tag{18.21}$$

где

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \tag{18.22}$$

Это выражение очень похоже на формулу для импульса, который равен произведению массы на скорость. Скорость

Ф и г. 18.4. *Зависимость «инерции вращения» от плеча масс.*




при этом заменяется на угловую скорость, а масса, как видите, заменяется на некоторую новую величину, называемую *моментом инерции* $I$. Вот что играет роль массы при вращении! Уравнения (18.21) и (18.22) говорят нам, что инерция вращения тела зависит не только от масс составляющих его частичек, но и от того, *насколько далеко расположены они от оси.* Так что если мы имеем два тела равной массы, но в одном из них массы расположены дальше от оси, то его инерция вращения будет больше. Это легко продемонстрировать на устройстве, изображенном на фиг. 18.4. Масса $M$ в этом устройстве не может падать слишком быстро, потому что она должна крутить тяжелый стержень. Расположим сначала массы $m$ около оси вращения, причем грузик $M$ будет как-то ускоряться. Однако после того, как мы изменим момент инерции, расположив массы $m$ гораздо дальше от оси, мы увидим, что грузик $M$ ускоряется гораздо медленнее, чем прежде. Происходит это вследствие возрастания инертности вращения, которая составляет физический смысл момента инерции — суммы произведений всех масс на квадраты их расстояний от оси вращения.

Между массой и моментом инерции имеется существенная разница, которая проявляется удивительным образом. Дело в том, что масса объекта обычно не изменяется, тогда как момент инерции *легко* изменить. Представьте себе, что вы встали на стол, который может вращаться без трения, и держите в вытянутых руках гантели, а сами медленно вращаетесь. Можно легко изменить момент инерции, согнув руки; при этом наша масса останется той же самой. Когда мы проделаем все это, то закон сохранения момента количества движения будет творить чудеса, произойдет нечто удивительное. Если моменты внешних сил равны нулю, то момент количества движения равен моменту инерции $I_1$, умноженному на угловую скорость $\omega_1$, т. е. ваш момент количества движения равен $I_1\omega_1$. Согнув затем руки, вы тем самым уменьшили момент инерции до величины $I_2$. Но поскольку из-за закона сохранения момента количества движения произведение $I\omega$ должно остаться тем же самым, то $I_1\omega_1$ должно быть равно $I_2\omega_2$. Так что если вы *уменьшили* момент инерции, то ваша угловая скорость в результате этого должна *возрасти*.

3 Заказ № 2199 Вып 2

*Глава* 19

# ЦЕНТР МАСС; МОМЕНТ ИНЕРЦИИ



## *§ 1. Свойства центра масс*

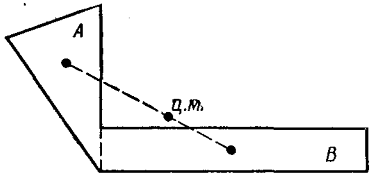
В предыдущей главе мы установили факт существования некоторой замечательной точки, называемой *центром масс.* Она замечательна тем, что если на частицы, образующие тело (неважно, будет ли оно твердым или жидким, звездным скоплением или чем-то другим), действует великое множество сил (конечно, имеются в виду только внешние силы, поскольку все внутренние силы компенсируют друг друга), то результирующая сила приводит к такому ускорению этой точки, как будто в ней сосредоточена вся масса тела $M$. Давайте теперь обсудим свойство центра масс несколько подробнее.

Положение центра масс (сокращенно ц. м.) определяется уравнением

$$\mathbf{R}_{\text{ц.м.}} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}. \qquad (19.1)$$

Это, разумеется, векторное уравнение, т. е. фактически три уравнения — по одному для каждого из трех направлений. Но мы будем рассматривать только $x$-направление; если вы поймете, чтó происходит в $x$-направлении, то поймете и два остальных. Что означает равенство $X_{\text{ц.м.}} = \sum m_i x_i / \sum m_i$? Предположим на минуту, что тело разделено на маленькие кусочки с одинаковой массой $m$, причем полная масса будет равна числу таких кусочков $N$, умноженному на массу одного кусочка, скажем 1 *г*, или какую-то другую единицу. Тогда наше уравнение просто означает, что нужно взять координаты $x$ всех кусочков, сложить их и результат разделить на число кусочков, т. е.

*Фиг. 19.1. Центр масс сложного тела лежит на линии, соединяющей центры масс двух составляющих его частей.*




$X_{\text{ц.м.}} = m\sum x_i / mN = \sum x_i / N$. Иными словами, если массы кусочков равны, то $X_{\text{ц.м.}}$ будет просто средним арифметическим $x$-координат всех кусочков. Но предположим, что один из кусочков вдвое тяжелее, чем каждый из остальных. Тогда в нашу формулу его координата будет входить с коэффициентом 2, т. е. в суммах ее нужно учитывать дважды. Нетрудно понять, почему это происходит. Ведь тяжелый кусочек можно представить себе как бы состоящим из двух легких, таких же, как и все остальные, так что, когда мы вычисляем среднее, его координату $x$ нужно учитывать дважды: ведь кусочков-то в этом месте два. Таким образом, $X_{\text{ц.м.}}$ равно просто среднему арифметическому $x$-координат всех масс, причем каждая координата считается некоторое число раз, пропорциональное массе, как будто она разделена на маленькие кусочки единичной массы. Исходя из этого, легко доказать, что $X_{\text{ц.м.}}$ должна находиться где-то между самой близкой и самой далекой частичкой. Вообще центр масс должен лежать где-то внутри многогранника, проведенного через крайние точки тела. Однако вовсе не обязательно, чтобы центр масс находился в самом теле; ведь могут быть тела, подобные окружности, например обруч, центр масс которого находится в геометрическом центре, а не на самом обруче.

Конечно, если объект симметричен, например прямоугольник, обладающий линией симметрии, то его центр масс должен лежать где-то на этой линии. Кстати, прямоугольник имеет еще одну линию симметрии и это однозначно определяет положение его центра масс. Для просто симметричного объекта центр масс должен лежать где-то на оси симметрии: ведь отрицательных $x$ в этом случае ровно столько же, сколько и положительных.

Существует еще один очень забавный способ нахождения центра масс. Вообразите себе тело, состоящее из двух кусков $A$ и $B$ (фиг. 19.1). Центр масс в этом случае можно найти следующим образом. Находим сначала отдельно центры масс составных частей $A$ и $B$ и их полные массы $M_A$ и $M_B$. После этого находим центр масс двух точечных тел, одно из которых имеет массу $M_A$ и расположено в центре масс части $A$, а другое — массу $M_B$ и расположено в центре масс части $B$. Полученная точка и будет центром масс всего тела. Другими словами, если нам известны центры масс всех частей сложного тела, то, чтобы найти его центр масс, не нужно повторять все сначала, а достаточно просто найти центр масс системы точечных тел с массами, равными массам каждой из частей и расположенными в их центрах масс. Посмотрим, как это получается.

Пусть мы хотим определить центр масс сложного тела, одни из частиц которого принадлежат части $A$, а другие — части $B$. При этом мы можем разбить полную сумму $\sum m_i x_i$ на сумму по части $A$, т. е. $\sum_A m_i x_i$, и сумму по части $B$, т. е. $\sum_B m_i x_i$. Если бы мы находили центр масс только части $A$, то нам потребовалась бы первая из этих сумм, которая, как вы знаете, равна $M_A X_A$, т. е. полной массе части $A$ на $x$-координату ее центра масс: это просто следствие теоремы о центре масс, примененной к части $A$. То же самое можно сказать и о части $B$. Сумма $\sum_B m_i x_i$ должна быть равна $M_B X_B$. Сложив эти два результата, мы, конечно, должны получить $MX$, т. е.

$$MX_{\text{ц.м.}} = \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i = M_A X_A + M_B X_B. \qquad (19.2)$$

Полная же масса $M$, очевидно, равна $M_A + M_B$, так что выражение (19.2) представляет собой не что иное, как определение центра масс двух точек, одна из которых имеет массу $M_A$ и координату $X_A$, а другая — массу $M_B$ и координату $X_B$.

Теорема о движении центра масс интересна не только сама по себе, она еще играет очень важную роль в развитии нашего понимания физики. Если мы предположим, что законы Ньютона верны только для маленьких частей, составляющих большое тело, то эта теорема показывает, что они верны также и для большого тела. Мы можем не знать его детального строения и нам известны лишь общая масса и полная сила, действующая на него. Другими словами, законы Ньютона имеют ту особенность, что если они справедливы в малом масштабе, то справедливы и в большом. Нет никакой нужды рассматривать футбольный мяч как ужасно сложную вещь, состоящую из мириада взаимодействующих частиц, а достаточно изучить только движение его центра масс под действием внешней силы $\mathbf{F}$, чтобы получить $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — ускорение центра масс, а $m$ — полная масса мяча. Итак, закон $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ воспроизводит сам себя в большом масштабе. (Наверное, должно быть какое-нибудь хорошее греческое слово, которым можно было бы назвать подобные воспроизводящие себя в большом масштабе законы.)

Нетрудно, конечно, догадаться, что первый открытый человеком закон должен быть именно таким законом, воспроизводящим самого себя в большом масштабе. Почему? Да просто потому, что истинный размер фундаментальных «винтиков и колесиков» Вселенной есть атомный размер, который настолько меньше размеров окружающих нас вещей, что только сейчас начинает входить в обычную жизнь. Итак, первая открытая человеком закономерность не могла иметь отношения к размерам атомного масштаба. Если бы законы для малых частиц не воспроизводили себя в большом масштабе, то открыть их было бы не так-то легко. А что можно сказать об обратной проблеме? Должны ли законы микромира быть теми же самыми, что и для больших тел? Никакой необходимости в этом, конечно, нет.

Давайте, однако, предположим, что истинное движение атомов описывается неким странным уравнением, которое *не воспроизводит* себя при переходе к большему масштабу. Вместо этого оно обладает тем свойством, что при таком переходе его можно *приближенно заменить каким-то выражением*, которое при все большем и большем увеличении масштаба воспроизводит само себя. Это вполне может случиться, и в действительности так оно и происходит. Законы Ньютона являются как бы «кончиком хвоста» атомных законов, продолженных до очень больших размеров. Истинные законы движения частиц очень малых размеров весьма специфичны, но если мы возьмем большое число частиц и скомбинируем законы их движения, то приближенно, *и только приближенно*, получим законы Ньютона. После этого законы Ньютона позволяют нам двигаться ко все большим размерам, оставаясь при этом теми же самыми законами. В сущности, при переходе ко все большим и большим размерам они все точнее и точнее описывают природу. Так что факт самовоспроизводимости законов Ньютона — отнюдь не фундаментальное свойство природы, а важная историческая особенность.

Основываясь на своих первых наблюдениях, мы никоим образом не смогли бы открыть фундаментальные атомные законы, поскольку наблюдения эти были слишком грубыми. Действительно, фундаментальные атомные законы, которые мы называем квантовой механикой, так сильно отличаются от законов Ньютона, что понять их не просто. Ведь у нас есть только опыт обращения с телами больших размеров, а крохотные атомы ведут себя совершенно невиданным для таких тел образом. Мы не можем сказать: «Электроны в атомах напоминают планеты, крутящиеся вокруг Солнца», или что-то в этом роде. Они не похожи *ни на что* известное нам, ибо мы не видим *ничего похожего на них*. Если мы применяем квантовую механику ко все большим и большим объектам, то законы поведения такого коллектива атомов *не воспроизводят* поведения одного атома, а дают *новый закон* — закон Ньютона, который уже воспроизводит сам себя, начиная с объектов весом в 1 миллионную микрограмма, содержащих еще миллиарды и миллиарды атомов, и вплоть до тел величиной с Землю и даже еще больших.

Вернемся, однако, к центру масс. Часто его называют *центром тяжести*, так как во многих случаях для силы тяготения можно провести точно такие же рассуждения, как и для масс. Если размеры достаточно малы, то силу тяжести можно считать не только пропорциональной массе, но и направленной всюду параллельно некоторой фиксированной линии.

Возьмем тело, в котором сила тяжести действует на каждую из составляющих его частей, а $m_i$ — масса одной из этих частей. Действующая на нее сила тяжести будет тогда равна произведению $m_i$ на $g$. Возникает вопрос: в какой точке нужно приложить одну-единственную силу, чтобы сбалансировать притяжение всего тела так, чтобы оно (если это твердое тело) не вращалось? *Ответ:* сила должна проходить через центр масс. Доказывается это следующим образом. Чтобы тело не вращалось, сумма моментов всех сил должна быть равна нулю, ибо если нет момента сил, то нет и изменения момента количества движения, а поэтому нет и вращения. Таким образом, мы должны подсчитать сумму всех моментов, действующих на все частицы, и посмотреть, какой получится полный момент относительно любой данной оси: он должен быть равен нулю, если ось проходит через центр масс. Направив ось $x$ горизонтально, а ось $y$ вертикально, мы найдем, что моменты сил равны силам, направленным вниз, умноженным на плечо $x$ (т. е. сила на плечо относительно той оси, для которой измеряется момент силы). Полный же момент равен сумме

$$\tau = \sum m_i g x_i = g \sum m_i x_i. \tag{19.3}$$

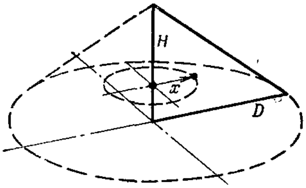
Чтобы полный момент отсутствовал, сумма $\sum m_i x_i$ должна быть равна нулю. Но эта сумма равна $MX$ — полной массе, умноженной на расстояние от оси $x$ до центра масс. Итак, это расстояние должно быть равно нулю.

Разумеется, мы провели проверку только для $x$-направления, однако если мы действительно взяли центр масс, то тело должно быть уравновешено в любом положении, поэтому, повернув его на 90°, мы вместо оси $x$ получим ось $y$. Другими словами, если держать тело за центр масс, то параллельное гравитационное поле не дает никакого момента сил. Если же объект настолько велик, что становится существенной непараллельность сил притяжения, то точку, в которой должна быть приложена уравновешивающая сила, описать не просто: она несколько отклоняется от центра масс. Вот почему нужно помнить, что центр масс и центр тяжести — разные вещи. Тот факт, что тело, поддерживаемое точно за центр масс, уравновешено в любом положении, имеет еще одно интересное следствие. Если вместо гравитационных сил взять инерционные псевдосилы, возникающие вследствие ускорения, то, чтобы найти точку, уцепившись за которую мы уравновесим все моменты этих сил, можно использовать ту же самую математическую процедуру. Предположим, что мы заключили тело внутрь ящика, который ускоряется вместе со всем его содержимым. Тогда, с точки зрения наблюдателя, сидящего в этом ящике, на тело вследствие инерции будет действовать некая эффективная сила. Иначе говоря, чтобы заставить тело двигаться вместе с ящиком, нужно подталкивать и ускорять его. Эта сила «уравновешивается силой инерции», которая равна массе тела, умноженной на ускорение ящика. Наблюдателю в ящике будет казаться, будто тело находится в однородном гравитационном поле, величина $g$ которого равна ускорению ящика $a$. Таким образом, инерционные силы, возникающие вследствие ускорения тела, не имеют момента относительно центра масс.

Этот факт имеет очень интересное следствие. В инерционной системе, движущейся без ускорения, момент сил всегда равен скорости изменения момента количества движения. Однако равенство момента силы и скорости изменения момента количества движения *остается справедливым* даже для ускоряющегося тела, если взять ось, проходящую через центр масс. Таким образом, теорема о равенстве момента сил скорости изменения момента количества движения верна в двух случаях: 1) ось фиксирована — в инерциальной системе; 2) ось проходит через центр масс — даже когда тело ускоряется.

## § 2. *Положение центра масс*

Математическая техника вычисления центра масс относится к области курсов математики; там подобные задачи служат хорошими примерами по интегральному исчислению. Но, даже умея интегрировать, полезно знать некоторые трюки для вычисления положения центра масс. Один из таких трюков основан на использовании так называемой теоремы Паппа, которая работает следующим образом. Если мы возьмем какую-то замкнутую фигуру и образуем твердое тело, вращая эту фигуру в пространстве так, чтобы каждая точка двигалась перпендикулярно к плоскости фигуры, то объем образующегося при этом тела равен произведению площади фигуры на расстояние, пройденное ее центром тяжести! Разумеется, эта теорема верна и в том случае, когда плоская фигура движется по прямой линии, перпендикулярной к ее площади, однако если мы движем ее по окружности или какой-то другой кривой, то при этом получается гораздо более интересное тело. При движении по кривому пути внутренняя часть фигуры продвигается меньше, чем внешняя, и эти эффекты компенсируют друг друга. Так что если мы хотим определить центр масс плоской фигуры с однородной плотностью, то нужно помнить, что объем, образуемый вращением его относительно оси, равен расстоянию, которое проходит центр масс, умноженному на площадь фигуры.




*Фиг. 19.2. Прямоугольный треугольник и прямой круговой конус, образованный вращением этого треугольника.*

Например, если нам нужно найти центр масс прямоугольного треугольника с основанием $D$ и высотой $H$ (фиг. 19.2), то это делается следующим образом. Вообразите себе ось, проходящую вдоль $H$, и поверните треугольник на 360° вокруг этой оси. Это дает нам конус. Расстояние, которое проходит $x$-координата центра масс, равно $2\pi x$, а площадь области, которая двигалась, т. е. площадь треугольника, равна $^1/_2HD$. Произведение расстояния, пройденного центром масс, на площадь треугольника равно объему конуса, т. е. $^1/_3\pi D^2H$. Таким образом, $(2\pi x)(^1/_2HD)={}^1/_3\pi D^2H$, или $x=D/3$. Совершенно аналогично вращением вокруг второго катета или просто по соображениям симметрии находим, что $y=H/3$. Вообще центр масс любого однородного треугольника находится в точке пересечения трех его медиан (линий, соединяющих вершину треугольника с серединой противоположной стороны), которая отстоит от основания на расстоянии, равном $^1/_3$ длины каждой медианы.

Как это увидеть? Рассеките треугольник линиями, параллельными основанию, на множество полосок. Заметьте теперь, что медиана делит каждую полоску пополам, следовательно, центр масс должен лежать на медиане.

Возьмем теперь более сложную фигуру. Предположим, что требуется найти положение центра масс однородного полукруга, т. е. круга, разрезанного пополам. Где будет находиться центр масс в этом случае? Для полного круга центр масс расположен в геометрическом центре, но для полукруга найти его положение труднее. Пусть $r$ — радиус круга, а $x$ — расстояние центра масс от прямолинейной границы полукруга. Вращая его вокруг этого края как вокруг оси, мы получаем шар. При этом центр масс проходит расстояние $2\pi x$, а площадь полукруга равна $^1/_2\pi r^2$ (половине площади круга). Так как объем шара равен, конечно, $4\pi r^3/3$, то отсюда находим

$$(2\pi x)\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right)=\frac{4\pi r^3}{3},$$

или

$$x=\frac{4r}{3\pi}.$$

Существует еще другая теорема Паппа, которая фактически является частным случаем сформулированной выше теоремы, а потому тоже справедлива. Предположим, что вместо твердого полукруга мы взяли полуокружность, например кусок проволоки в виде полуокружности с однородной плотностью, и хотим найти ее центр масс. Оказывается, что *площадь*, которая «заметается» плоской кривой при ее движении, аналогичном вышеописанному, равна расстоянию, пройденному центром масс, умноженному на *длину* этой кривой. (Кривую можно рассматривать как очень узкую полоску и применять к ней предыдущую теорему.)

## § 3. *Вычисление момента инерции*

Рассмотрим теперь проблему определения *момента инерции* различных тел. Общая формула для нахождения момента инерции объекта относительно оси $z$ имеет вид

$$I=\sum m_i(x_i^2+y_i^2),$$

или

$$I=\int(x^2+y^2)\,dm=\int(x^2+y^2)\,\varrho dv. \qquad (19.4)$$

Иными словами, нужно сложить все массы, умножив каждую из них на квадрат ее расстояния до оси $(x_i^2+y_i^2)$. Заметьте, что это верно даже для трехмерного тела, несмотря на то, что расстояние имеет такой «двумерный вид». Впрочем, в большинстве случаев мы будем ограничиваться двумерными телами.

В качестве простого примера рассмотрим стержень, вращающийся относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярной к нему (фиг. 19.3). Нам нужно просуммировать теперь все массы, умноженные на квадраты расстояния $x$ (в этом случае все $y$ — нулевые). Под суммой, разумеется, я имею в виду интеграл от $x^2$, умноженный на «элементики» массы. Если мы разделим стержень на кусочки длиной $dx$, то соответствующий элемент массы будет пропорционален $dx$, а если бы $dx$ составляло длину всего стержня, то его масса была бы равна $M$. Поэтому

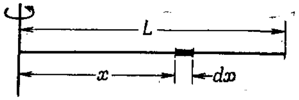
$$dm=\frac{M\,dx}{L}$$

и

$$I=\int_0^L x^2\frac{M\,dx}{L}=\frac{M}{L}\int_0^L x^2dx=\frac{ML^2}{3}. \qquad (19.5)$$

Размерность момента инерции всегда равна массе, умноженной на квадрат длины, так что единственная существенная величина, которую мы вычислили, это множитель $1/3$.

А чему будет равен момент инерции $I$, если ось вращения проходит через середину стержня? Чтобы найти его, нам снова



*Фиг. 19.3. Прямой стержень, вращающийся вокруг оси, проходящей через один из его концов.*

нужно взять интеграл, но уже в пределах от $-\frac{1}{2}L$ до $+\frac{1}{2}L$. Заметим, однако, одну особенность этого случая. Такой стержень с проходящей через центр осью можно представлять себе как два стержня с осью, проходящей через конец, причем масса каждого из них равна $M/2$, а длина равна $L/2$. Моменты инерции двух таких стержней равны друг другу и вычисляются по формуле (19.5). Поэтому момент инерции всего стержня равен

$$I=\frac{2(M/2)(L/2)^2}{3}=\frac{ML^2}{12}. \qquad (19.6)$$

Таким образом, стержень гораздо легче крутить за середину, чем за конец.

Можно, конечно, продолжить вычисление моментов инерции других интересующих нас тел. Но поскольку такие расчеты требуют большого опыта в вычислении интегралов (что очень важно само по себе), они как таковые не представляют для нас большого интереса. Впрочем, здесь имеются некоторые очень интересные и полезные теоремы. Пусть имеется какое-то тело и мы хотим узнать его момент инерции относительно какой-то оси. Это означает, что мы хотим найти его инертность при вращении вокруг этой оси. Если мы будем двигать тело за стержень, подпирающий его центр масс так, чтобы оно не поворачивалось при вращении вокруг оси (в этом случае на него не действуют никакие моменты сил инерции, поэтому тело не будет поворачиваться, когда мы начнем двигать его), то для того, чтобы повернуть его, понадобится точно такая же сила, как если бы вся масса была сосредоточена в центре масс и момент инерции был бы просто равен $I_1=MR^2_{\text{ц.м.}}$, где $R_{\text{ц.м.}}$ — расстояние от центра масс до оси вращения. Однако формула эта, разумеется, неверна. Она не дает правильного момента инерции тела. Ведь в действительности при повороте тело вращается. Крутится не только центр масс (что давало бы величину $I_1$), само тело тоже должно поворачиваться относительно центра масс. Таким образом, к моменту инерции $I_1$ нужно добавить $I_{\text{ц}}$ — момент инерции относительно центра масс. Правильный ответ состоит в том, что момент инерции относительно любой оси равен

$$I=I_{\text{ц}}+MR^2_{\text{ц.м.}}. \qquad (19.7)$$

Эта теорема называется *теоремой о параллельном переносе оси*. Доказывается она очень легко. Момент инерции относительно любой оси равен сумме масс, умноженных на сумму квадратов $x$ и $y$, т. е. $I = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$. Мы сейчас сосредоточим наше внимание на $x$, однако все в точности можно повторить и для $y$. Пусть координата $x$ есть расстояние данной частной точки от начала координат; посмотрим, однако, как все изменится, если мы будем измерять расстояние $x'$ от центра масс вместо $x$ от начала координат. Чтобы это выяснить, мы должны написать

$$x_i = x_i' + X_{\text{ц.м.}}.$$

Возводя это выражение в квадрат, находим

$$x_i^2 = x_i'^2 + 2X_{\text{ц.м.}}x_i' + X_{\text{ц.м.}}^2.$$

Что получится, если умножить его на $m_i$ и просуммировать по всем $i$? Вынося постоянные величины за знак суммирования, находим

$$I_x = \sum m_i x_i'^2 + 2X_{\text{ц.м.}} \sum m_i x_i' + X_{\text{ц.м.}}^2 \sum m_i.$$

Третью сумму подсчитать легко; это просто $MX_{\text{ц.м.}}^2$. Второй член состоит из двух сомножителей, один из которых $\sum m_i x_i'$; он равен $x'$-координате центра масс. Но это должно быть равно нулю, ведь $x'$ *отсчитывается* от центра масс, а в этой системе координат среднее положение всех частиц, взвешенное их массами, равно нулю. Первый же член, очевидно, представляет собой часть $x$ от $I_{\text{ц}}$. Таким образом, мы и приходим к формуле (19.7).

Давайте проверим формулу (19.7) на одном примере. Просто проверим, будет ли она применима для стержня. Мы уже нашли, что момент инерции стержня относительно его конца должен быть равен $ML^2/3$. А центр масс стержня, разумеется, находится на расстоянии $L/2$. Таким образом, мы должны получить, что $ML^2/3 = ML^2/12 + M(L/2)^2$. Так как одна четвертая + одна двенадцатая = одной третьей, то мы не сделали никакой грубой ошибки.

Кстати, чтобы найти момент инерции (19.5), вовсе не обязательно вычислять интеграл. Можно просто предположить, что он равен величине $ML^2$, умноженной на некоторый неизвестный коэффициент $\gamma$. После этого можно использовать рассуждения о двух половинках и для момента инерции (19.6) получить коэффициент $^1/_4\gamma$. Используя теперь теорему о параллельном переносе оси, докажем, что $\gamma = {}^1/_4\gamma + {}^1/_4$, откуда $\gamma = {}^1/_3$. Всегда можно найти какой-нибудь окольный путь!

При применении теоремы о параллельных осях важно помнить, что ось $I_{\text{ц}}$ *должна быть параллельна* оси, относительно которой мы хотим вычислять момент инерции.

Стоит, пожалуй, упомянуть еще об одном свойстве, которое часто бывает очень полезно при нахождении момента инерции некоторых типов тел. Оно состоит в следующем: если у нас есть *плоская фигура* и тройка координатных осей с началом координат, расположенным в этой плоскости, и осью $z$, направленной перпендикулярно к ней, то момент инерции этой фигуры относительно оси $z$ равен сумме моментов инерции относительно осей $x$ и $y$. Доказывается это совсем просто. Заметим, что

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i y_i^2$$

(поскольку все $z_i = 0$). Аналогично,

$$I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = \sum m_i x_i^2,$$

но

$$I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = I_x + I_y.$$

Момент инерции однородной прямоугольной пластинки, например с массой $M$, шириной $w$ и длиной $L$ относительно оси, перпендикулярной к ней и проходящей через ее центр, равен просто

$$I = \frac{M(w^2 + L^2)}{12},$$

поскольку момент инерции относительно оси, лежащей в плоскости пластинки и параллельной ее длине, равен $Mw^2/12$, т. е. точно такой же, как и для стержня длиной $w$, а момент инерции относительно другой оси в той же плоскости равен $ML^2/12$, такой же, как и для стержня длиной $L$.

Итак, перечислим свойства момента инерции относительно данной оси, которую мы назовем осью $z$:

1. Момент инерции равен

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int (x^2 + y^2)\, dm.$$

2. Если предмет состоит из нескольких частей, причем момент инерции каждой из них известен, то полный момент инерции равен сумме моментов инерции этих частей.
3. Момент инерции относительно любой данной оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение полной массы на квадрат расстояния данной оси от центра масс.
4. Момент инерции плоской фигуры относительно оси, перпендикулярной к ее плоскости, равен сумме моментов инерций относительно любых двух других взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости фигуры и пересекающихся с перпендикулярной осью.

*Таблица 19.1* • ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

| Предмет | Ось $z$ | $I_z$ |
|---|---|---|
| Тонкий стержень длиной $L$ | Проходит через центр перпендикулярно к стержню | $ML^2/12$ |
| Тонкое концентрическое кольцо с радиусами $r_1$ и $r_2$ | Проходит через центр кольца перпендикулярно к плоскости кольца | $M(r_1^2+r_2^2)/2$ |
| Сфера радиуса $r$ | Проходит через центр | $2Mr^2/5$ |

В табл. 19.1 приведены моменты инерции некоторых элементарных фигур, имеющих однородную плотность масс, а в табл. 19.2 — моменты инерции некоторых фигур, которые могут быть получены из табл. 19.1 с использованием перечисленных выше свойств.

*Таблица 19.2* • МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ, ПОЛУЧЕННЫЕ ИЗ ТАБЛ. 19.1

| Предмет | Ось $z$ | $I_z$ |
|---|---|---|
| Прямоугольник со сторонами $a$ и $b$ | Проходит через центр параллельно $b$ | $Ma^2/12$ |
| Прямоугольник со сторонами $a$ и $b$ | Проходит через центр перпендикулярно к плоскости | $M(a^2+b^2)/12$ |
| Тонкое концентрическое кольцо с радиусами $r_1$ и $r_2$ | Любой диаметр | $M(r_1^2+r_2^2)/4$ |
| Прямоугольный параллелепипед со сторонами $a$, $b$ и $c$ | Проходит через центр параллельно $c$ | $M(a^2+b^2)/12$ |
| Прямоугольный круговой цилиндр радиуса $r$, длиной $L$ | Проходит через центр параллельно $L$ | $Mr^2/2$ |
| Прямоугольный круговой цилиндр радиуса $r$, длиной $L$ | Проходит через центр перпендикулярно к $L$ | $M(r^2/4+L^2/12)$ |

## § 4. *Кинетическая энергия вращения*

Продолжим изучение динамики вращения. При обсуждении аналогии между линейным и угловым движением в гл. 18 мы использовали теорему о работе, но ничего не говорили о кинетической энергии. Какова будет кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\omega$? Используя нашу аналогию, можно немедленно угадать правильный ответ. Момент инерции соответствует массе, угловая скорость соответствует обычной скорости, так что кинетическая энергия должна быть равна $\frac{1}{2} I\omega^2$. Так оно и есть на самом деле, и сейчас мы покажем это. Предположим, что тело вращается вокруг некоторой оси, так что каждая точка движется со скоростью $\omega r_i$, где $r_i$ — расстояние от данной точки до оси. Если масса этой точки равна $m_i$, то полная кинетическая энергия всего тела равна просто сумме кинетических энергий всех частиц

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum m_i (r_i \omega)^2,$$

а поскольку $\omega$ — постоянная, одна и та же для всех точек, то

$$T=\frac{1}{2}\omega^2\sum m_i r_i^2=\frac{1}{2}I\omega^2. \qquad (19.8)$$

В конце гл. 18 мы отмечали, что существуют очень интересные явления, связанные с вращением не абсолютно твердого тела, способного изменять свой момент инерции. Именно, в примере с вращающимся столом у нас был момент инерции $I_1$ и угловая скорость $\omega_1$ при вытянутых руках. Согнув руки, мы изменили момент инерции до $I_2$, а угловую скорость — до $\omega_2$. Так как у нас нет никаких моментов сил относительно оси вращения стола, то момент количества движения должен остаться постоянным. Это означает, что $I_1\omega_1=I_2\omega_2$. А что можно сказать об энергии? Это очень интересный вопрос. Согнув руки, мы начинаем вращаться быстрее, но момент инерции при этом уменьшается и может показаться, что кинетическая энергия должна остаться той же самой. Это, однако, неверно, потому что в действительности *сохраняется* $I\omega$, а не $I\omega^2$. Сравним теперь кинетические энергии в начале и в конце. В начале кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}I_1\omega^2{}_1=\frac{1}{2}L\omega_1$, где $L=I_1\omega_1=I_2\omega_2$— момент количества движения. Точно таким же образом кинетическая энергия в конце равна $T=\frac{1}{2}L\omega_2$, а поскольку $\omega_2>\omega_1$, то кинетическая энергия в конце оказывается большей, чем в начале. Итак, вначале, когда руки были вытянуты, мы вращались с какой-то кинетической энергией, затем, согнув руки, мы стали вращаться быстрее и наша кинетическая энергия возросла. А как быть с законом сохранения энергии? Ведь должен же кто-то произвести работу, чтобы увеличить энергию? Это сделали мы сами! Но когда, в какой момент? Когда мы держим гантели горизонтально, то никакой работы не производим. Выпрямляя руки в стороны и сгибая их, мы тоже не можем произвести никакой работы. Это, однако, верно только, пока нет никакого вращения! При *вращении* же на гантели действует центробежная сила. Они стремятся вырваться из наших рук, так что, сгибая во время вращения руки, мы преодолеваем противодействие центробежной силы. Работа, которая на это затрачивается, и составляет разницу в кинетических энергиях вращения. Вот откуда берется этот добавок.

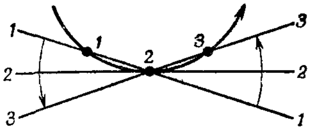
Существует еще одно очень интересное явление, которое мы рассмотрим только описательно, чтобы просто иметь о нем представление. Хотя изучение этого явления требует несколько большего опыта, но упомянуть о нем стоит, ибо оно очень любопытно и дает много интересных эффектов.

Возьмем снова эксперимент с вращающимся столиком. Рассмотрим отдельно тело и руки, с точки зрения человека, вращающегося на столике. Согнув руки с гантелями, мы стали вращаться быстрее, но заметьте, что тело при этом *не изменило своего момента инерции*; тем не менее оно стало вращаться быстрее, чем прежде. Если бы мы провели вокруг тела окружность и рассмотрели только предметы внутри этой окружности, то *их* момент количества движения *изменился* бы; они закрутились бы быстрее. Следовательно, когда мы сгибаем руки, на тело должен действовать момент силы. Однако центробежная сила не может дать никакого момента, так как она направлена по радиусу. Это говорит о том, что среди сил, возникающих во вращающейся системе, центробежная сила не одинока: *есть еще и другая сила*. Эта другая сила носит название *кориолисовой силы*, или *силы Кориолиса*. Она обладает очень странным свойством: оказывается, что если мы во вращающейся системе двигаем какой-то предмет, то она толкает его вбок. Как и центробежная сила, эта сила кажущаяся. Но если мы живем во вращающейся системе и хотим что-то двигать по радиусу, то для этого мы должны тянуть его несколько вбок. Именно эта «боковая» сила создает момент, который раскручивает наше тело.

Перейдем теперь к формулам и покажем, как кориолисова сила работает на практике. Пусть Мик сидит на карусели, которая кажется ему неподвижной. С точки зрения Джо, который стоит на земле и знает истинные законы механики, карусель крутится. Предположим, что мы провели радиальную прямую на карусели и пусть Мик двигает прямо по этой линии какую-то массу. Я хочу показать, что для того, чтобы все было так, как мы описали, необходима боковая сила. Это можно увидеть, обратив внимание на момент количества движения вращающейся массы. Она крутится все время с одной и той же угловой скоростью $\omega$, поэтому ее момент количества движения равен

$$L = mv_{\text{танг}}r = m\omega r \cdot r = m\omega r^2.$$

Если масса расположена близко к центру, то он сравнительно мал, но если мы передвигаем ее в новое положение и если мы увеличиваем $r$, то масса $m$ приобретает больший момент коли-




*Фиг. 19.4. Три последовательных положения движущейся по радиусу точки вращающегося столика.*

чества движения, т. е. во время движения по радиусу на нее *должен действовать некоторый момент силы.* (Чтобы на карусели двигаться по радиусу, нужно наклониться и толкаться вбок. Попробуйте как-нибудь сами проделать это.) Поскольку момент силы равен скорости изменения $L$ во время движения массы $m$ по радиусу, то

$$\tau = F_{\text{К}} r = \frac{dL}{dt} = \frac{d\,(m\omega r^2)}{dt} = 2m\omega r\,\frac{dr}{dt},$$

где через $F_{\text{К}}$ обозначена сила Кориолиса. В действительности мы хотели узнать, какую боковую силу должен прилагать Мик, чтобы двигать массу $m$ со скоростью $v_r = dr/dt$. Как видите, она равна $F_{\text{К}} = \tau/r = 2m\omega v_r$.

Теперь, имея формулу для кориолисовой силы, давайте рассмотрим несколько более подробно всю картину в целом. Как можно понять причину возникновения этой силы из элементарных соображений? Заметьте, что кориолисова сила не зависит от расстояния до оси и поэтому действует даже на оси! Оказывается, что легче всего понять именно силу, действующую на оси вращения. Для этого нужно просто посмотреть на все происходящее из инерциальной системы Джо, который стоит на земле. На фиг. 19.4 показаны три последовательных положения массы $m$, которая при $t=0$ проходит через ось. Из-за вращения карусели масса, как мы видим, движется не по прямой линии, а по некоторому *кривому пути*, касающемуся диаметра в точке $r=0$. Но для того чтобы она двигалась по кривому пути, должна действовать ускоряющая сила. Это и есть кориолисова сила.

Однако с кориолисовой силой мы встречаемся не только в подобных ситуациях. Можно показать, что если предмет движется с постоянной скоростью по краю диска, то на него тоже действует кориолисова сила. Почему? Мик видит предмет движущимся со скоростью $v_{\text{М}}$, а Джо видит его движущимся по окружности со скоростью $v_{\text{Д}} = v_{\text{М}} + \omega r$, поскольку предмет вдобавок переносится каруселью. Как мы уже знаем, действующая в этом случае сила будет, в сущности, полностью центробежной силой скорости $v_{\text{Д}}$, равной $mv_{\text{Д}}^2/r$. Но, с точки зрения Мика, она должна состоять из трех частей. Все это можно записать в следующем виде:

$$F_r = -\frac{mv_{\text{Д}}^2}{r} = -\frac{mv_{\text{М}}^2}{r} - 2mv_{\text{М}}\omega - m\omega^2 r.$$

Итак, $F_r$ — это сила, которую измеряет Мик. Попытаемся понять, откуда что берется. Может ли Мик признать первый член? «Конечно,— сказал бы он,— даже если бы я не вращался, то такая центробежная сила должна возникнуть, если побежать по кругу со скоростью $v_{\text{М}}$». Итак, это просто центробежная сила, появления которой Мик ожидает и которая не имеет ничего общего с вращением карусели. Вдобавок Мик думает, что должна быть еще одна центробежная сила, действующая даже на неподвижные предметы на его карусели. Это дает третий член. Однако в дополнение к ним существует еще один член — второй, который опять равен $2\,m\omega v_{\text{М}}$. Раньше, при радиальной скорости, кориолисова сила $F_{\text{К}}$ была тангенциальна. Теперь же, при тангенциальной скорости, она радиальна. В самом деле, одно выражение отличается от другого только знаком. Сила всегда имеет одно и то же направление по отношению к скорости независимо от того, куда направлена скорость. Она действует под прямым углом к скорости и равна по величине $2m\omega v$.

*Глава* 20

# ВРАЩЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ



## § 1. *Моменты сил в трехмерном пространстве*

В этой главе мы рассмотрим одно из наиболее замечательных и забавных следствий законов механики — поведение крутящегося колеса. Для этого нам прежде всего нужно расширить математическое описание вращения, понятие момента количества движения, момента силы и т. д. на трехмерное пространство. Однако мы не будем *использовать* эти уравнения во всей их общности и изучать все следствия, ибо это займет многие годы, а нас ждут другие разделы, к которым мы вскоре должны перейти. В вводном курсе можно остановиться только на основных законах и их приложениях к весьма ограниченному числу особенно интересных случаев.

Прежде всего хочу отметить, что для вращения в трех измерениях твердого тела или какого-то иного объекта остается верным все, что мы получили для двух измерений. Иначе говоря, $xF_y-yF_x$ так и остается моментом силы «в плоскости $xy$», или моментом силы «относительно оси $z$». Остается справедливым также, что этот момент силы равен скорости изменения величины $xp_y-yp_x$; если вы вспомните вывод уравнения (18.15) из законов Ньютона, то увидите, что фактически мы не использовали того обстоятельства, что движение плоское, и просто дифференцировали величину $xp_y-yp_x$ и получали $xF_y-yF_x$, так что эта теорема остается верной. Величину $xp_y-yp_x$ мы называли моментом количества движения в плоскости $xy$, или моментом количества движения относительно оси $z$. Кроме плоскости $xy$, можно использовать другие пары осей и получить другие уравнения. Возьмем, например, плоскость $yz$. Уже из симметрии ясно, что если мы просто подставим $y$ вместо $x$, а $z$ вместо $y$, то для момента силы получим выражение $yF_z-zF_y$ и $yp_z-zp_y$ будет угловым моментом в этой плоскости. Разумеется, можно еще взять и плоскость $zx$ и получить для нее

$$zF_x-xF_z=\frac{d}{dt}(zp_x-xp_z).$$

Совершенно ясно, что для движения одной частицы мы получаем и три уравнения для трех плоскостей. Более того, если мы складывали такие величины, как $xp_y-yp_x$, для многих частиц и называли это полным угловым моментом, то теперь у нас есть три сорта подобных выражений для трех плоскостей: $xy$, $yz$ и $zx$, а сделав то же самое с моментами сил, мы можем также говорить и о полных моментах сил в этих плоскостях. Таким образом, появляются законы о том, что внешний момент сил в некоторой плоскости равен скорости изменения углового момента в той же плоскости. Это просто обобщение того, что писалось для двух измерений.

Однако теперь можно сказать: «Но ведь есть еще и другие плоскости. Разве нельзя в конце концов взять плоскость под каким-то углом и вычислять действующие в ней моменты сил. Для каждого такого случая нужно писать другие системы уравнений, так что в результате их наберется масса!» Здесь следует отметить очень интересное обстоятельство. Оказывается, что если мы в комбинации $x'F_{y'}-y'F_{x'}$ для «косой» плоскости выразим величины $x'$, $F_{y'}$ и т. д. через их компоненты, то результат можно записать в виде некоторой *комбинации* трех моментов в плоскостях $xy$, $yz$ и $zx$. В этом нет ничего нового. Другими словами, если нам известны три момента сил в плоскостях $xy$, $yz$ и $zx$, то момент сил в любой другой плоскости, как и угловой момент, может быть записан в виде их комбинации: скажем, 6% одного, 92% другого и т. д. Этим свойством мы сейчас и займемся.

Пусть Джо для своих координатных осей $x$, $y$, $z$ определял все моменты сил и все угловые моменты во всех плоскостях. Однако Мик направил свои оси $x'$, $y'$, $z'$ по-другому. Чтобы немного облегчить задачу, предположим, что повернуты только оси $x$ и $y$. Мик выбрал другие оси $x'$ и $y'$, а его ось $z$ осталась той же самой. Это означает, что плоскости $yz$ и $zx$ у него новые, а поэтому моменты сил и угловые моменты у него тоже окажутся новыми. Например, его момент сил в плоскости $x'y'$ окажется равным $x'F_{y'}-y'F_{x'}$ и т. д. Следующая задача — найти связь между новыми и старыми моментами сил. Ее вполне можно решить, установив связь одного набора осей с другим. «Да это же напоминает то, что мы делали с векторами»,— скажете вы. Действительно, я собираюсь делать в точности то же самое. «А не вектор ли он, этот момент сил?» — спросите вы. *Действи-*

*тельно*, он — вектор, однако этого нельзя сказать просто так, без всякого математического анализа. Так что следующим этапом должен быть анализ. Однако мы не будем подробно обсуждать каждый шаг, а только покажем, как это все работает. Моменты сил, вычисленные Джо, равны

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= xF_y - yF_x, \\ \tau_{yz} &= yF_z - zF_y, \\ \tau_{zx} &= zF_x - xF_z. \end{aligned} \tag{20.1}$$

• • •

В этом месте мы сделаем отступление и заметим, что в подобных случаях, если оси координат выбраны неправильно, для некоторых величин получается неверный знак. Почему бы не написать $\tau_{yz} = zF_y - yF_z$? Этот вопрос связан с тем обстоятельством, что система координат может быть либо «левая», либо «правая». Однако выбрав (произвольно) знак, скажем, у $\tau_{xy}$, можно всегда определить правильное выражение для остальных двух величин путем замены по какой-либо из двух схем:

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ z \arrow[ur] & & y \arrow[ll] \end{tikzcd} \quad \text{или} \quad \begin{tikzcd} & x \arrow[dl] & \\ z & & y \arrow[ll] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

• • •

Теперь Мик подсчитывает моменты сил в своей системе

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= x'F_{y'} - y'F_{x'}, \\ \tau_{y'z'} &= y'F_{z'} - z'F_{y'}, \\ \tau_{z'x'} &= z'F_{x'} - x'F_{z'}. \end{aligned} \tag{20.2}$$

Пусть одна система координат повернута на угол $\theta$ по отношению к другой, так что ось $z$ осталась той же самой. (Угол $\theta$ ничего не имеет общего с вращением объекта или с чем-то происходящим внутри системы координат. Это просто связь между осями, используемыми одним человеком, и осями, используемыми другим. Мы предполагаем, что он остается постоянным.) При этом координаты в двух системах связаны так:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{20.3}$$

Точно таким же образом, поскольку сила является вектором, она преобразуется в новой системе координат так же, как $x$, $y$ и $z$. Просто, по определению, объект называется вектором тогда и только тогда, когда различные его компоненты преобразуются как $x$, $y$ и $z$

$$
\begin{aligned}
F_{x'} &= F_x \cos\theta + F_y \sin\theta, \\
F_{y'} &= F_y \cos\theta - F_x \sin\theta, \\
F_{z'} &= F_z.
\end{aligned}
\tag{20.4}
$$

Теперь можно определить, как преобразуется момент силы. Для этого в уравнение (20.2) нужно просто подставить вместо $x'$, $y'$ и $z'$ выражение (20.3), а для $F_{x'}$, $F_{y'}$ и $F_{z'}$ — выражение (20.4). В результате для $\tau_{x'y'}$ получается длинный ряд членов, но оказывается (и на первый взгляд это удивительно), что все сводится просто к выражению $xF_y - yF_x$, которое, как известно, является моментом силы в плоскости $xy$:

$$
\begin{aligned}
\tau_{x'y'} = {} & (x\cos\theta + y\sin\theta)(F_y\cos\theta - F_x\sin\theta) - \\
& - (y\cos\theta - x\sin\theta)(F_x\cos\theta + F_y\sin\theta) = \\
= {} & xF_y(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - yF_x(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \\
& + xF_x(-\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta) + \\
& + yF_y(\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta) = \\
= {} & xF_y - yF_x = \tau_{xy}.
\end{aligned}
\tag{20.5}
$$

Результат совершенно ясен: ведь мы только повернули оси, лежащие *в плоскости* $xy$, при этом момент относительно оси $z$ в этой плоскости не отличается от прежнего: ведь плоскость-то осталась той же самой! Более интересно выражение для $\tau_{y'z'}$. Здесь уже мы имеем дело с новой плоскостью. Если теперь повторить то же самое с плоскостью $y'z'$, то получим

$$
\begin{aligned}
\tau_{y'z'} &= (y\cos\theta - x\sin\theta)F_z - z(F_y\cos\theta - F_x\sin\theta) = \\
&= (yF_z - zF_y)\cos\theta + (zF_x - xF_z)\sin\theta = \\
&= \tau_{yz}\cos\theta + \tau_{zx}\sin\theta.
\end{aligned}
\tag{20.6}
$$

И наконец, для плоскости $z'x'$

$$
\begin{aligned}
\tau_{z'x'} &= z(F_x\cos\theta + F_y\sin\theta) - (x\cos\theta + y\sin\theta)F_z = \\
&= (zF_x - xF_z)\cos\theta - (yF_z - zF_y)\sin\theta = \\
&= \tau_{zx}\cos\theta - \tau_{yz}\sin\theta.
\end{aligned}
\tag{20.7}
$$

Мы хотели найти правило для определения момента сил в новой системе через момент сил в старой и нашли его. Как можно запомнить это правило? Если внимательно посмотреть на уравнения (20.5)—(20.7), то нетрудно увидеть, что между ними и уравнениями для $x$, $y$ и $z$ существует тесная связь. Если каким-то образом мы бы могли назвать $\tau_{xy}$ $z$-компонентой чего-то, скажем $z$-компонентой вектора $\boldsymbol{\tau}$, то все было бы в порядке:

уравнение (20.5) мы бы понимали как преобразование вектора $\tau$, ибо $z$-компонента его, как это и должно быть, оставалась бы неизменной. Аналогично, если связать плоскость $yz$ с $x$-компонентой новоиспеченного вектора, а плоскость $zx$ с $y$-компонентой, то закон преобразования будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \tau_{z'} &= \tau_z, \\ \tau_{x'} &= \tau_x \cos\theta + \tau_y \sin\theta, \\ \tau_{y'} &= \tau_y \cos\theta - \tau_x \sin\theta, \end{aligned} \tag{20.8}$$

что в точности соответствует закону преобразования векторов.

Мы, следовательно, доказали, что комбинацию $xF_y - yF_x$ можно отождествить с тем, что обычно называется $z$-компонентой некоторого искусственно введенного вектора. Хотя момент сил является своего рода «кручением» в плоскости и, казалось бы, не имеет векторного характера, математически он все-таки ведет себя как вектор. Этот вектор направлен под прямым углом к плоскости кручения, а его длина пропорциональна силе кручения. Три компоненты такой величины будут преобразовываться при вращении как самый настоящий вектор.

Итак, мы представляем момент силы в виде вектора. Согласно правилу, с каждой плоскостью, в которой он действует, мы связываем прямую, перпендикулярную к этой плоскости. Однако перпендикулярность к плоскости оставляет неопределенный знак вектора. Чтобы определить его, необходимо еще одно дополнительное правило, которое говорило бы нам, что если момент силы действует определенным образом в плоскости $xy$, то соответствующий ему вектор направлен «вверх» по оси $z$. Это означает, что предварительно кто-то должен сказать нам, где «право», а где «лево». Предположим, что система координат $xyz$ правосторонняя; тогда правило должно быть таким: если представить себе кручение как ввертывание болта с правовинтовой резьбой, то направление вектора, связанного с этим кручением, определяется поступательным движением болта.

Почему же момент можно отождествить с вектором? А это счастливая случайность: с каждой плоскостью можно связать только одну ось и, следовательно, с моментом можно связать только один вектор. Это свойство — особенность трехмерного пространства. В двумерном пространстве, например, момент — самый обычный скаляр, не нуждающийся в направлении. В трехмерном пространстве он — вектор. Если бы у нас было четыре измерения, то возникло бы большое затруднение, ибо (если, например, в качестве четвертого измерения взять время) дополнительно к трем плоскостям $xy$, $yz$ и $zx$ появятся также плоскости $tx$, $ty$ и $tz$. Всего, следовательно, получается *шесть* плоскостей, а представить шесть величин в виде одного четырехмерного вектора невозможно.

Однако нам еще долго предстоит оставаться в трехмерном пространстве, поэтому стоит отметить, что в предыдущих математических рассмотрениях совершенно не существенно то, что $x$ — координата, а $F$ — сила, а существен только закон преобразования векторов. Поэтому не будет никакой разницы, если мы вместо координаты $x$ подставим $x$-компоненту любого другого вектора. Иначе говоря, если мы хотим вычислить величину $a_x b_y - a_y b_x$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы, и назвать ее $z$-компонентой некоторой новой величины $c_z$, то эта величина будет вектором $\mathbf{c}$. Было бы хорошо для такой связи трех компонент нового вектора $\mathbf{c}$ с векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ придумать какое-то математическое обозначение. Для такой связи пользуются обозначением: $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Таким образом, в дополнение к обычному скалярному произведению в векторном анализе мы получили произведение нового сорта, так называемое *векторное произведение*. Итак, запись $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ это то же самое, что

$$\begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y, \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z, \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \tag{20.9}$$

Если переменить порядок векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т. е. вместо $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ взять $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, то знак вектора $\mathbf{c}$ при этом изменится, ибо $c_z$ равно $b_x a_y - b_y a_x$. Векторное произведение поэтому не похоже на обычное умножение, для которого $ab=ba$. Для векторного произведения $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Отсюда немедленно следует, что если $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, то векторное произведение равно нулю, т. е. $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$.

Векторное произведение очень хорошо передает свойство вращения, поэтому важно понимать геометрическую связь векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Связь между компонентами определяется уравнениями (20.9), исходя из которых можно получить следующие геометрические соотношения. Во-первых, вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен как к вектору $\mathbf{a}$, так и к вектору $\mathbf{b}$. (Попробуйте вычислить $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ и вы увидите, что в результате получится нуль.) Во-вторых, величина вектора $\mathbf{c}$ оказывается равной произведению абсолютных величин векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$, умноженному на синус угла между ними. А куда направлен вектор $\mathbf{c}$? Вообразите, что мы доворачиваем вектор $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$ в направлении угла, меньшего 180°; если крутить в ту же сторону болт с правовинтовой резьбой, то он должен двигаться в направлении вектора $\mathbf{c}$. То, что мы берем *право*винтовой болт, а не *лево*винтовой,— простая договоренность, которая постоянно напоминает нам, что в отличие от настоящих, «честных» векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вектор нового типа $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ по своему характеру слегка отличается от них, ибо строится он искусственно, по особому рецепту. У обычных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, кроме того, есть специальное название: мы называем их *полярными векторами*. Примерами таких векторов служат координата $\mathbf{r}$, сила $\mathbf{F}$, импульс $\mathbf{p}$, скорость $\mathbf{v}$, электрическое поле $\mathbf{E}$ и т. д. Все это обычные полярные векторы. Векторы же, содержащие одно векторное произведение обычных векторов, называются *аксиальными векторами*, или *псевдовекторами*. Примерами псевдовекторов, несомненно, могут служить момент силы $\boldsymbol{\tau}$ и момент импульса $\mathbf{L}$. Кроме того, оказывается, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, как и магнитное поле $\mathbf{B}$, тоже псевдовектор.

Чтобы расширить наши сведения о математических свойствах векторов, нужно знать все правила их умножения, как векторного, так и скалярного. В настоящий момент нам нужны лишь очень немногие из них, однако в целях полноты мы выпишем все правила с участием векторного произведения. Впоследствии мы будем ими пользоваться. Эти правила таковы:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c},\\
&\text{б)}\quad (\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),\\
&\text{в)}\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c},\\
&\text{г)}\quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),\\
&\text{д)}\quad \mathbf{a}\times\mathbf{a}=0,\\
&\text{е)}\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0.
\end{aligned}\tag{20.10}$$

## § 2. *Уравнения вращения в векторном виде*

Возникает вопрос: можно ли с помощью векторного произведения записать какое-нибудь уравнение физики? Да, конечно, с его помощью записываются очень многие уравнения. Сразу же видно, например, что момент силы равен векторному произведению радиус-вектора на силу

$$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}.\tag{20.11}$$

Это просто краткая запись трех уравнений: $\tau_x=yF_z-zF_y$ и т. д. С помощью того же символа можно представить момент количества движения одной частицы в виде векторного произведения вектора расстояния от начала координат (радиус-вектора) на вектор импульса

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}.\tag{20.12}$$

Векторная форма динамического закона вращения в трехмерном пространстве напоминает уравнение Ньютона $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$; именно вектор момента силы равен скорости изменения со временем вектора момента количества движения

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}.\tag{20.13}$$

Если мы сложим (20.13) для многих частиц, то получим, что внешний момент сил, действующий на систему, равен скорости изменения полного момента количества движения

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{вн}} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{полн.}}}{dt}. \qquad (20.14)$$

Еще одна теорема: если полный момент внешних сил равен нулю, то вектор полного момента количества движения системы остается постоянным. Эта теорема называется *законом сохранения момента количества движения.* Если на данную систему не действуют никакие моменты сил, то ее момент количества движения не изменяется.

А что можно сказать об угловой скорости? Вектор ли она? Мы уже рассматривали вращение твердого тела вокруг некоторой фиксированной оси, а теперь давайте на минуту предположим, что оно одновременно вращается вокруг *двух* осей. Тело может находиться, например, в коробке и вращаться там вокруг некоторой оси, а сама коробка в свою очередь вращается вокруг какой-то другой оси. Результатом же такого сложного движения будет вращение тела вокруг некоторой новой оси. Самое удивительное здесь то, что эта новая ось может быть найдена следующим образом. Если вращение в плоскости $xy$ представить как вектор, направленный вдоль оси $z$, длина которого равна скорости вращения, а в виде другого вектора, направленного вдоль оси $y$, изобразить скорость вращения в плоскости, то, сложив их по правилу параллелограмма, получим результат, величина которого говорит о скорости вращения тела, а направление определяет плоскость вращения. Попросту говоря, угловая скорость *в самом деле* есть вектор, для которого скорость вращения в трех плоскостях представляет прямоугольные проекции на эти плоскости *.

В качестве простого примера с использованием вектора угловой скорости подсчитаем мощность, затрачиваемую моментом сил, действующим на твердое тело. Так как мощность — это скорость изменения работы со временем, то в трехмерном пространстве она оказывается равной $P = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

Все формулы, которые мы писали для плоского вращения, могут быть обобщены на три измерения. Если взять, например, твердое тело, вращающееся вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то можно спросить: «Чему равна скорость точки с радиус-вектором $\mathbf{r}$?» В качестве упражнения попытайтесь доказать, что скорость частицы твердого тела задается выраже-

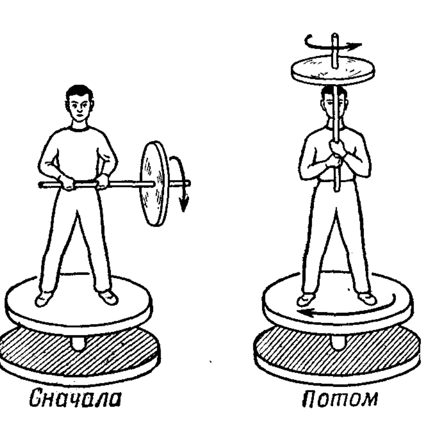
* Что это действительно так, доказывается с помощью рассмотрения перемещения частиц твердого тела за бесконечно малый промежуток времени $\Delta t$. Это не самоочевидно, и я предоставляю тем, кто интересуется, доказать это.

нием $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, а $\mathbf{r}$ — положение частицы. Другим примером векторного произведения служит формула для кориолисовой силы, которую можно записать как $\mathbf{F}_К=2m\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}$. Иначе говоря, если в системе координат, вращающейся со скоростью $\boldsymbol{\omega}$, частица движется со скоростью $\mathbf{v}$ и мы все хотим описать через величины этой вращающейся системы, то необходимо добавлять еще псевдосилу $\mathbf{F}_К$.

## § 3. *Гироскоп*

Вернемся теперь снова к закону сохранения момента количества движения. Его можно продемонстрировать с помощью быстро вращающегося колеса, или гироскопа (фиг. 20.1). Если стать на крутящийся стул и держать вращающееся колесо в горизонтальном положении, то его момент количества движения будет направлен горизонтально. Момент количества движения относительно *вертикальной* оси нельзя изменить из-за фиксированного направления оси стула (трением пренебрегаем). Если теперь повернуть ось с колесом вертикально, то колесо приобретет момент количества движения относительно вертикальной оси. Однако *система* в целом (колесо, вы сами и стул) *не может иметь* вертикальной компоненты, поэтому вы вместе со стулом должны крутиться в направлении, обратном вращению колеса, чтобы скомпенсировать его.

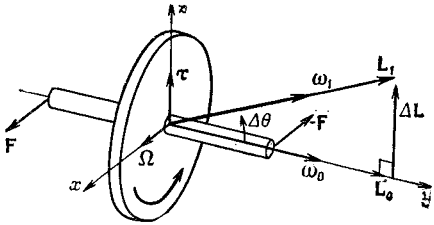
Прежде всего давайте более подробно проанализируем явление, которое мы только что описали. Самое удивительное, в чем нам следует разобраться, это откуда берутся силы, раскручивающие нас вместе со стулом, когда мы поворачиваем ось гироскопа вертикально. На фиг. 20.2 показано колесо, быстро вращающееся вокруг оси $y$, т. е. его угловая скорость направлена по этой оси. В ту же сторону направлен и момент количества движения. Предположим теперь, что мы хотим вращать колесо




*Фиг. 20.1. Быстро вращающийся гироскоп.*

*а — ось направлена горизонтально, момент количества движения относительно вертикальной оси равен нулю; б — ось направлена вертикально, момент количества движения относительно вертикальной оси должен остаться равным нулю; человек и стул крутятся в направлении, противоположном вращению колеса.*

*Фиг. 20.2. Гироскоп.*



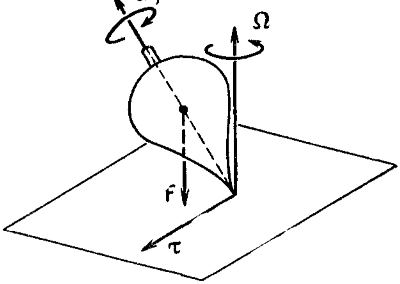

относительно оси $x$ с малой угловой скоростью $\Omega$; какая сила для этого требуется? Через малый промежуток времени $\Delta t$ ось займет новое положение, отклонившись от горизонтального положения на угол $\Delta\theta$. Поскольку основная часть момента количества движения происходит от вращения колеса (медленное вращение вокруг оси $x$ дает очень малый вклад), мы видим, что вектор момента количества движения изменяется. Каково же изменение этого вектора? Он остается тем же самым *по величине*, однако *направление* его меняется на угол $\Delta\theta$. Величина вектора $\Delta L$ поэтому равна $\Delta L = L_0\Delta\theta$; в результате возникает момент силы, равный скорости изменения момента количества движения $\tau = \Delta L/\Delta t = L_0(\Delta\theta/\Delta t) = L_0\Omega$. Учитывая направление различных величин, мы видим, что

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_0. \qquad (20.15)$$

Таким образом, если $\boldsymbol{\Omega}$ и $\mathbf{L}_0$ направлены горизонтально, как это показано на фигуре, то $\boldsymbol{\tau}$ направлен *вертикально*. Чтобы уравновесить такой момент, к концам оси в горизонтальном направлении должны быть приложены силы $\mathbf{F}$ и $-\mathbf{F}$. Откуда берутся эти силы, кто их прикладывает? Да мы сами, собственными руками, когда стараемся повернуть ось колеса в вертикальное положение. Но Третий закон Ньютона требует, чтобы равные и противоположно направленные силы (и равный, но противоположно направленный *момент*) действовали на нас. Они и заставляют нас крутиться вокруг вертикальной оси $z$ в противоположном направлении.

Этот результат можно обобщить на быстро вращающийся волчок. В обычном вращающемся волчке сила тяжести, действующая на его центр масс (ц. м.), создает момент относительно точки соприкосновения волчка с полом (фиг. 20.3). Этот момент действует в горизонтальном направлении и заставляет волчок прецессировать, т. е. ось его будет описывать круговой конус вокруг вертикальной оси. Если $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость прецессии (направленная вертикально), то мы снова находим

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_0.$$



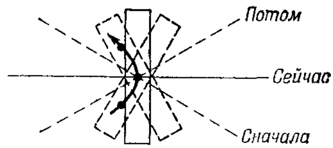

*Фиг. 20.3. Быстро вращающийся волчок.*

*Заметьте, что направление вектора момента силы совпадает с направлением прецессии.*

Таким образом, если к быстро вращающемуся волчку приложить момент сил, то возникнет прецессия в направлении этого момента, т. е. под прямым углом к силам, создающим момент.

Итак, теперь мы можем утверждать, что поняли прецессию гироскопа, и математически мы действительно поняли ее. Однако вся эта математика может показаться нам в каком-то смысле «колдовством». Между прочим, по мере углубления во все более сложную физику многие простые вещи легче вывести математически, чем действительно понять их фундаментальный или простой смысл. По мере того как вы будете переходить ко все более и более современным работам по физике, то обнаружите одно странное обстоятельство: математика дает результаты, которые *никто* не может понять непосредственно. В качестве примера можно взять уравнение Дирака, которое получается очень просто и красиво, но понять его следствия трудновато. В нашем частном случае прецессия волчка кажется чудом, каким-то тайнодействием с прямыми углами, окружностями, крутящимися силами и правовинтовыми болтами. Но давайте все-таки попытаемся понять ее физическую сущность.

Как можно объяснить этот момент сил с помощью реально действующих сил и ускорений? Заметьте, что, когда колесо прецессирует, частицы колеса в действительности не движутся уже в одной плоскости (фиг. 20.4). Мы показали ранее (см. фиг. 19.4, стр. 80), что частица, которая пересекает ось прецессии, движется по *кривому пути*. Но для этого требуется какая-то боковая сила, которая возникает благодаря производимому нами давлению на ось колеса. Это давление по спицам передается частицам обода. «Постойте,— скажете вы,— а как относительно частиц на другой стороне колеса, которые движутся в обратном направлении?» Нетрудно догадаться, что действующие на них силы должны быть *направлены в противоположную сторону*, поэтому полная сила должна быть равна нулю. Таким образом, силы уравновешиваются, но одна из них приложена на одной стороне колеса, а другая — на другой. Эти силы можно было бы приложить непосредственно к колесу, однако из-за того, что колесо твердое, их можно приложить к оси, а через спицы они передаются на колесо.



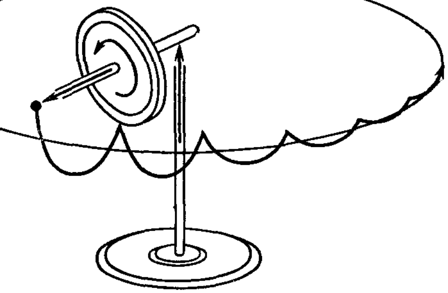

*Ф и г. 20.4. Движение частицы вращающегося колеса, показанного на фиг. 20.2.*

*При повороте оси эти частицы движутся по кривой линии.*

До сих пор мы доказали, что, если колесо прецессирует, оно может скомпенсировать моменты сил, вызванные силой притяжения или какой-то другой причиной. Однако мы только показали, что прецессия есть одно из возможных решений уравнения. Другими словами, только при том условии, что действует момент и *колесо запущено правильно*, мы получим чистую прецессию. Но мы не доказали (и это вообще неверно), что чистая прецессия — *наиболее общее* движение вращающегося тела под действием момента сил. Общее движение включает, кроме того, какие-то колебания и отклонения от главной прецессии. Эти колебания называются *нутацией*.

Кое-кто любит говорить, что когда на гироскоп действует момент, то он поворачивается и прецессирует, что момент сил *приводит* к прецессии. Кажется очень странным, что, будучи запущенным, гироскоп *не падает* под действием силы тяжести, а движется вбок! Как это может случиться, что направленная *вниз* сила тяжести, которую мы хорошо знаем и чувствуем, заставляет его двигаться *вбок*? Ни одна из формул в мире, подобная (20.15), не скажет нам этого, потому что формула (20.15) — это особый случай, верный только тогда, когда прецессия гироскопа уже установилась. Если же говорить о деталях, то в действительности происходит следующее. Когда мы держим гироскоп за ось, так что он никак не может прецессировать (но сохраняет свое вращение), то на него не действуют никакие моменты сил, даже момент силы тяжести, поскольку своими пальцами мы компенсируем его. Но стоит только освободить ось, как в тот же момент на нее подействует момент силы тяжести. По простоте душевной каждый решит, что конец оси должен при этом падать, и он действительно начинает падать. Это можно просто видеть, если гироскоп вращается не слишком быстро.

Итак, как и ожидается, конец оси гироскопа действительно начинает падать. Но поскольку он падает, то, стало быть, он вращается и тем самым создает момент сил. Это сообщает оси гироскопа движение вокруг вертикальной оси такое же, как и при постоянной прецессии. Однако вскоре скорость начинает превышать скорость при постоянной прецессии, поэтому ось начинает подниматься вверх до прежнего уровня. В результате конец оси описывает циклоиду (кривую, которую описывает



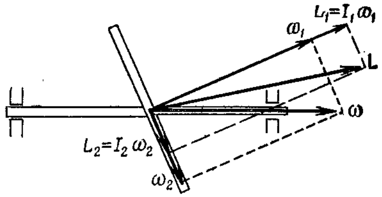
*Фиг. 20.5. Истинное движение конца оси гироскопа под действием силы тяжести тотчас же после его освобождения.*

камень, застрявший в шине автомобиля). Обычно это очень быстрое, незаметное для глаз движение, к тому же оно скоро затухает благодаря трению в подшипниках, а выживает только «чистая» прецессия (фиг. 20.5). Однако чем медленнее крутится колесо, тем нутация более заметна.

После того как движение устанавливается, ось гироскопа оказывается несколько ниже, чем она была вначале. Почему? (Это более сложная деталь, и мы упоминаем о ней только для того, чтобы не оставлять у читателя впечатления, что гироскоп — это чудо. Он действительно удивительная штука, но все же не чудо.) Если мы держали ось абсолютно горизонтально, а затем внезапно отпустили ее, то с помощью уравнения прецессии мы можем установить, что ось начинает прецессировать, т. е. двигаться по кругу в горизонтальной плоскости. Но это невозможно! Хотя мы и не обращали на это внимания раньше, колесо обладает *каким-то* моментом инерции относительно прецессирующей оси, и если оно даже медленно вращается вокруг этой оси, то оно имеет слабый момент количества движения. Отчего это происходит? Ведь если опора идеальная (т. е. если нет никакого трения), то относительно вертикальной оси никакого момента сил не может возникнуть. Тогда каким же образом прецессия все же возникает, если нет никаких моментов? *Ответ:* движение по циклоиде конца оси стремится к среднему стационарному движению, которое эквивалентно движению центра катящегося колеса, т. е. он устанавливается несколько ниже горизонтали. По этой причине собственный угловой момент гироскопа имеет небольшую вертикальную компоненту, которая в точности компенсирует момент количества движения прецессии. Как видите, ось должна немного опуститься, немного поддаться силе тяжести, чтобы иметь возможность крутиться вокруг вертикальной оси. Так работает гироскоп.

## § 4. Момент количества движения твердого тела

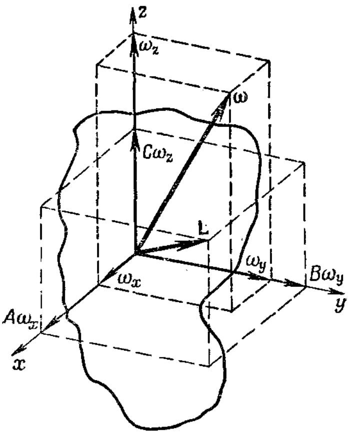
Прежде чем расстаться с вопросом о вращении в трехмерном пространстве, обсудим еще, хотя бы качественно, некоторые неочевидные явления, возникающие при трехмерных вращениях.




*Ф и г. 20.6. Момент количества движения вращающегося тела не обязательно параллелен угловой скорости.*

Главное из них: момент количества движения твердого тела *не обязательно* направлен в ту же сторону, что и угловая скорость. Рассмотрим колесо, прикрепленное наклонно к оси, однако ось по-прежнему проходит через его центр тяжести (фиг. 20.6). Если вращать колесо вокруг оси, то всем известно, что из-за наклонной посадки оно будет трясти подшипники. Качественно мы знаем, что при вращении на колесо должна действовать центробежная сила, которая старается оттянуть его массу подальше от оси. Она старается выпрямить плоскость колеса так, чтобы оно было перпендикулярно к оси. Чтобы уравновесить это стремление, в подшипниках должен возникнуть момент сил. Но если в подшипниках возникает момент сил, то должна быть какая-то скорость изменения момента количества движения. Как может изменяться момент количества движения, если колесо просто вращается вокруг оси? Предположим, что мы разбили угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ на компоненты $\omega_1$ и $\omega_2$ — перпендикулярную и параллельную плоскости колеса. Чему при этом будет равен момент количества движения? Так как моменты инерции относительно этих двух осей различны, то отношение компонент момента количества движения, которые (при таком частном выборе осей) равны произведениям моментов инерции на соответствующие компоненты угловых скоростей, отличается от отношения компонент угловой скорости. Поэтому вектор момента количества движения не направлен вдоль оси. Поворачивая вал, мы должны поворачивать и вектор момента количества движения, что приводит к возникновению момента силы, действующего на ось.

Момент инерции имеет еще одно очень важное и интересное свойство (я не буду доказывать его здесь, так как это очень сложно), которое легко описать и использовать. Наше предыдущее рассмотрение основано именно на этом свойстве. Оно состоит в следующем: любое твердое тело, даже неправильной формы, как, например, картошка, имеет такие три взаимно перпендикулярные проходящие через центр масс оси, что момент инерции относительно одной из них имеет наибольшую возможную величину из всех осей, проходящих через центр масс, а момент инерции относительно другой оси имеет наименьшую величину. Момент инерции относительно третьей имеет




*Фиг. 20.7. Угловая скорость и момент количества движения твердого тела ($A>B>C$).*

какую-то промежуточную величину между двумя первыми или равную одной из них. Эти оси, называемые *главными осями* тела, обладают тем важным свойством, что, если тело вращается вокруг одной из них, его момент количества движения имеет то же направление, что и угловая скорость. Если тело имеет оси симметрии, то направление главных осей совпадает с осями симметрии.

Если в качестве осей $x$, $y$ и $z$ выбрать главные оси тела и назвать соответствующие моменты инерции через $A$, $B$ и $C$, то нетрудно подсчитать момент количества движения и кинетическую энергию вращения тела при любой угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (фиг. 20.7). Разлагая $\boldsymbol{\omega}$ на компоненты $\omega_x$, $\omega_y$ и $\omega_z$ по осям $x$, $y$ и $z$ и используя направленные вдоль этих осей единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, можно записать момент количества движения в виде

$$\boldsymbol{L} = A\omega_x\mathbf{i} + B\omega_y\mathbf{j} + C\omega_z\mathbf{k}, \tag{20.16}$$

причем кинетическая энергия будет равна

$$\text{к.э.} = \frac{1}{2}\left(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2\right) = \frac{1}{2}\,\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{20.17}$$

*Глава* 21

# ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР



## § 1. *Линейные дифференциальные уравнения*

Обычно физику как науку делят на несколько разделов: механику, электричество и т. п., и мы «проходим» эти разделы один за другим. Сейчас, например, мы «проходим» в основном механику. Но то и дело происходят странные вещи: переходя к новым разделам физики и даже к другим наукам, мы сталкиваемся с уравнениями, почти не отличающимися от уже изученных нами ранее. Таким образом, многие явления имеют аналогию в совсем других областях науки. Простейший пример: распространение звуковых волн во многом похоже на распространение световых волн. Если мы достаточно подробно изучим акустику, то обнаружим потом, что «прошли» довольно большую часть оптики. Таким образом, изучение явлений в одной области физики может оказаться полезным при изучении других ее разделов. Хорошо с самого начала предвидеть такое возможное «расширение рамок раздела», иначе могут возникнуть недоумения, почему мы тратим столько времени и сил на изучение небольшой задачи механики.

Гармонический осциллятор, к изучению которого мы сейчас переходим, будет встречаться нам почти всюду; хотя мы начнем с чисто механических примеров грузика на пружинке, малых отклонений маятника или каких-то других механических устройств, на самом деле мы будем изучать некое *дифференциальное уравнение*. Это уравнение непрестанно встречается в физике и в других науках и фактически описывает столь многие явления, что, право же, стоит того, чтобы изучить его получше. Такое уравнение описывает колебания грузика на пружинке, колебания заряда, текущего взад и вперед по электрической цепи, колебания камертона, порождающие звуковые волны, аналогичные колебания электронов в атоме, порождающие световые волны. Добавьте сюда уравнения, описывающие действия регуляторов, например поддерживающих заданную температуру термостата, сложные взаимодействия в химических реакциях и (уже совсем неожиданно) уравнения, относящиеся к росту колонии бактерий, которых одновременно и кормят и травят ядом, или к размножению лис, питающихся кроликами, которые в свою очередь едят траву, и т. д.

Мы привели очень неполный список явлений, которые описываются почти теми же уравнениями, что и механический осциллятор. Эти уравнения называются *линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами*. Это уравнения, состоящие из суммы нескольких членов, каждый из которых представляет собой производную зависимой величины по независимой, умноженную на постоянный коэффициент. Таким образом,

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \qquad (21.1)$$

называется линейным дифференциальным уравнением $n$-го порядка с постоянными коэффициентами (все $a_n$ — постоянные).

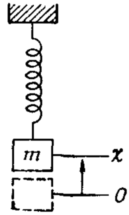
## § 2. *Гармонический осциллятор*

Пожалуй, простейшей механической системой, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, является масса на пружинке. После того как к пружинке подвесят грузик, она немного растянется, чтобы уравновесить силу тяжести. Проследим теперь за вертикальными отклонениями массы от положения равновесия (фиг. 21.1). Отклонения вверх от положения равновесия мы обозначим через $x$ и предположим, что имеем дело с абсолютно упругой пружиной. В этом случае противодействующие растяжению силы прямо пропорциональны растяжению. Это означает, что сила равна $-kx$ (знак минус напоминает нам, что сила противодействует смещениям). Таким образом, умноженное на массу ускорение должно быть равно $-kx$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \qquad (21.2)$$

Для простоты предположим, что вышло так (или мы нужным образом изменили систему единиц), что $k/m=1$. Нам предстоит решить уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x. \qquad (21.3)$$




*Ф и г. 21.1. Грузик, подвешенный на пружинке.*

*Простой пример гармонического осциллятора.*

После этого мы вернемся к уравнению (21.2), в котором $k$ и $m$ содержатся явно.

Мы уже сталкивались с уравнением (21.3), когда только начинали изучать механику. Мы решили его численно [см. вып. 1, уравнение (9.12)], чтобы найти движение. Численным интегрированием мы нашли кривую (см. фиг. 9.4, вып. 1), которая показывает, что если частица $m$ в начальный момент выведена из равновесия, но покоится, то она возвращается к положению равновесия. Мы не следили за частицей после того, как она достигла положения равновесия, но ясно, что она на этом не остановится, а будет *колебаться* (*осциллировать*). При численном интегрировании мы нашли время возврата в точку равновесия: $t=1{,}570$. Продолжительность полного цикла в четыре раза больше: $t_0=6{,}28$ «*сек*». Все это мы нашли численным интегрированием, потому что лучше решать не умели. Но математики дали в наше распоряжение некую функцию, которая, если ее продифференцировать дважды, переходит в себя, умножившись на $-1$. (Можно, конечно, заняться прямым вычислением таких функций, но это много труднее, чем просто узнать ответ.)

Эта функция есть: $x=\cos t$. Продифференцируем ее: $dx/dt=-\sin t$, а $d^2x/dt^2=-\cos t=-x$. В начальный момент $t=0$, $x=1$, а начальная скорость равна нулю; это как раз те предположения, которые мы делали при численном интегрировании. Теперь, зная, что $x=\cos t$, найдем *точное* значение времени, при котором $x=0$. *Ответ*: $t=\pi/2$, или 1,57108. Мы ошиблись раньше в последнем знаке, потому что численное интегрирование было приближенным, но ошибка очень мала!

Чтобы продвинуться дальше, вернемся к системе единиц, где время измеряется в настоящих секундах. Что будет решением в этом случае? Может быть, мы учтем постоянные $k$ и $m$, умножив на соответствующий множитель $\cos t$? Попробуем. Пусть $x=A\cos t$, тогда $dx/dt=-A\sin t$ и $d^2t/dt^2=-A\cos t=-x$. К нашему огорчению, мы не преуспели в решении уравнения (21.2), а снова вернулись к (21.3). Зато мы открыли важнейшее свойство линейных дифференциальных уравнений: *если умножить решение уравнения на постоянную, то мы снова получим решение*. Математически ясно — почему. Если $x$ есть решение уравнения, то после умножения обеих частей уравнения на $A$ производные тоже умножатся на $A$ и поэтому $Ax$ так же хорошо удовлетворит уравнению, как и $x$. Послушаем, что скажет по этому поводу физик. Если грузик растянет пружинку вдвое больше прежнего, то вдвое возрастет сила, вдвое возрастет ускорение, в два раза больше прежней будет приобретенная скорость и за то же самое время грузик пройдет вдвое большее расстояние. Но это вдвое большее расстояние — как раз то самое расстояние, которое *надо* пройти грузику до положения равновесия. Таким образом, чтобы достичь равновесия, требуется *столько же времени* и оно не зависит от начального смещения. Иначе говоря, если движение описывается линейным уравнением, то независимо от «силы» оно будет развиваться во времени одинаковым образом.

Ошибка пошла нам на пользу — мы узнали, что, умножив решение на постоянную, мы получим решение прежнего уравнения. После нескольких проб и ошибок можно прийти к мысли, что вместо манипуляций с $x$ надо изменить шкалу *времени*. Иначе говоря, уравнение (21.2) должно иметь решение вида

$$x = \cos \omega_0 t. \tag{21.4}$$

(Здесь $\omega_0$ — вовсе не угловая скорость вращающегося тела, но нам не хватит всех алфавитов, если каждую величину обозначать особой буквой.) Мы снабдили здесь $\omega$ индексом 0, потому что нам предстоит встретить еще много всяких омег: запомним, что $\omega_0$ соответствует естественному движению осциллятора. Попытка использовать (21.4) в качестве решения более успешна, потому что $dx/dt = -\omega_0 \sin \omega_0 t$ и $d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 x$. Наконец-то мы решили то уравнение, которое и хотели решить. Это уравнение совпадает с (21.2), если $\omega_0^2 = k/m$.

Теперь нужно понять физический смысл $\omega_0$. Мы знаем, что косинус «повторяется» после того, как угол изменится на $2\pi$. Поэтому $x = \cos \omega_0 t$ будет периодическим движением; полный цикл этого движения соответствует изменению «угла» на $2\pi$. Величину $\omega_0 t$ часто называют *фазой* движения. Чтобы изменить $\omega_0 t$ на $2\pi$, нужно изменить $t$ на $t_0$ (*период* полного колебания); конечно, $t_0$ находится из уравнения $\omega_0 t_0 = 2\pi$. Это значит, что $\omega_0 t_0$ нужно вычислять для одного цикла, и все будет повторяться, если увеличить $t$ на $t_0$; в этом случае мы увеличим фазу на $2\pi$. Таким образом,

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{21.5}$$

Значит, чем тяжелее грузик, тем медленнее пружинка будет колебаться взад и вперед. Инерция в этом случае будет больше, и если сила не изменится, то ей понадобится большее время для разгона и торможения груза. Если же взять пружинку пожестче, то движение должно происходить быстрее; и в самом деле, период уменьшается с увеличением жесткости пружины.

Заметим теперь, что период колебаний массы на пружинке не зависит от того, *как* колебания начинаются. Для пружинки как будто безразлично, насколько мы ее растянем. Уравнение движения (21.2) определяет *период* колебаний, но ничего не говорит об амплитуде колебания. Амплитуду колебания, конечно, определить можно, и мы сейчас займемся этим, но для этого надо задать *начальные условия*.

Дело в том, что мы еще не нашли самого общего решения уравнения (21.2). Имеется несколько видов решений. Решение $x=a\cos\omega_0 t$ соответствует случаю, когда в начальный момент пружинка растянута, а скорость ее равна нулю. Можно иначе заставить пружинку двигаться, например улучить момент, когда уравновешенная пружинка покоится ($x=0$), и резко ударить по грузику; это будет означать, что в момент $t=0$ пружинке сообщена какая-то скорость. Такому движению будет соответствовать другое решение (21.2) — косинус нужно заменить на синус. Бросим в косинус еще один камень: если $x=\cos\omega_0 t$ — решение, то, войдя в комнату, где качается пружинка, в тот момент (назовем его «$t=0$»), когда грузик проходит через положение равновесия ($x=0$), мы будем вынуждены заменить это решение другим. Следовательно, $x=\cos\omega_0 t$ не может быть общим решением; общее решение должно допускать, так сказать, перемещение начала отсчета времени. Таким свойством обладает, например, решение $x=a\cos\omega_0(t-t_1)$, где $t_1$ — какая-то постоянная. Далее, можно разложить

$$\cos(\omega_0 t+\Delta)=\cos\omega_0 t\cos\Delta-\sin\omega_0 t\sin\Delta$$

и записать

$$x=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t,$$

где $A=a\cos\Delta$ и $B=-a\sin\Delta$. Каждую из этих форм можно использовать для записи общего решения (21.2): любое из существующих в мире решений дифференциального уравнения $d^2x/dt^2=-\omega_0^2 x$ можно записать в виде

$$x=a\cos\omega_0(t-t_1), \tag{21.6а}$$

или

$$x=a\cos(\omega_0 t+\Delta), \tag{21.6б}$$

или

$$x=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t. \tag{21.6в}$$

Некоторые из встречающихся в (21.6) величин имеют названия: $\omega_0$ называют *угловой частотой*; это число радианов, на которое фаза изменяется за 1 *сек*. Она определяется дифференциальным уравнением. Другие величины уравнением не определяются, а зависят от начальных условий. Постоянная $a$ служит мерой максимального отклонения груза и называется *амплитудой* колебания. Постоянную $\Delta$ иногда называют *фазой* колебания, но здесь возможны недоразумения, потому что другие называют фазой $\omega_0 t+\Delta$ и говорят, что фаза зависит от времени. Можно сказать, что $\Delta$ — это *сдвиг фазы* по сравнению с некоторой, принимаемой за нуль. Не будем спорить о словах. Разным $\Delta$ соответствуют движения с разными фазами. Вот это верно, а называть ли $\Delta$ фазой или нет — уже другой вопрос.

## § 3. Гармоническое движение и движение по окружности

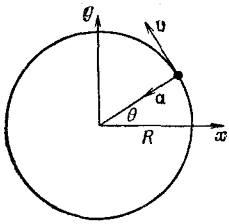
Косинус в решении уравнения (21.2) наводит на мысль, что гармоническое движение имеет какое-то отношение к движению по окружности. Это сравнение, конечно, искусственное, потому что в линейном движении неоткуда взяться окружности: грузик движется строго вверх и вниз. Можно оправдаться тем, что мы уже решили уравнение гармонического движения, когда изучали механику движения по окружности. Если частица движется по окружности с постоянной скоростью $v$, то радиус-вектор из центра окружности к частице поворачивается на угол, величина которого пропорциональна времени. Обозначим этот угол $\theta=vt/R$ (фиг. 21.2). Тогда $d\theta/dt=\omega_0=v/R$. Известно, что ускорение $a=v^2/R=\omega_0^2 R$ и направлено к центру. Координаты движущейся точки в заданный момент равны

$$x=R\cos\theta, \qquad y=R\sin\theta.$$

Что можно сказать об ускорении? Чему равна $x$-составляющая ускорения, $d^2x/dt^2$? Найти эту величину можно чисто геометрически: она равна величине ускорения, умноженной на косинус угла проекции; перед полученным выражением надо поставить знак минус, потому что ускорение направлено к центру:

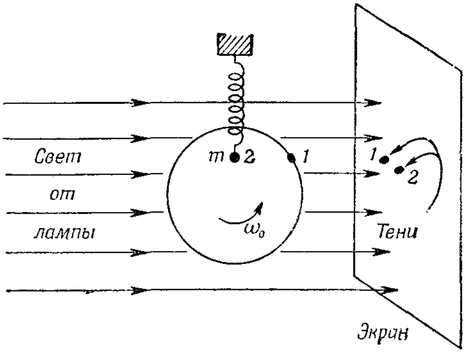
$$a_x=-a\cos\theta=-\omega_0^2 R\cos\theta=-\omega_0^2 x. \qquad (21.7)$$

Иными словами, когда частица движется по окружности, горизонтальная составляющая движения имеет ускорение, пропорциональное горизонтальному смещению от центра. Конечно, мы знаем решения для случая движения по окружности: $x=R\cos\omega_0 t$. Уравнение (21.7) не содержит радиуса окружности; оно одинаково при движении по любой окружности при одинаковой $\omega_0$.




*Фиг. 21.2. Частица, движущаяся по кругу с постоянной скоростью.*

*Фиг. 21.3. Демонстрация эквивалентности простого гармонического движения и равномерного движения по окружности.*




Таким образом, имеется несколько причин, по которым следует ожидать, что отклонение грузика на пружинке окажется пропорциональным $\cos\omega_0 t$ и движение будет выглядеть так, как если бы мы следили за $x$-координатой частицы, движущейся по окружности с угловой скоростью $\omega_0$. Проверить это можно, поставив опыт, чтобы показать, что движение грузика вверх-вниз на пружинке в точности соответствует движению точки по окружности. На фиг. 21.3 свет дуговой лампы проектирует на экран тени движущихся рядом воткнутой во вращающийся диск иголки и вертикально колеблющегося груза. Если вовремя и с нужного места заставить грузик колебаться, а потом осторожно подобрать скорость движения диска так, чтобы частоты их движений совпали, тени на экране будут точно следовать одна за другой. Вот еще способ убедиться в том, что, находя численное решение, мы почти вплотную подошли к косинусу.

Здесь можно подчеркнуть, что поскольку математика равномерного движения по окружности очень сходна с математикой колебательного движения вверх-вниз, то анализ колебательных движений очень упростится, если представить это движение как проекцию движения по окружности. Иначе говоря, мы можем дополнить уравнение (21.2), казалось бы, совершенно лишним уравнением для $y$ и рассматривать оба уравнения совместно. Проделав это, мы сведем одномерные колебания к движению *по окружности*, что избавит нас от решения дифференциального уравнения. Можно сделать еще один трюк — ввести комплексные числа, но об этом в следующей главе.

## § 4. Начальные условия

Давайте выясним, какой смысл имеют $A$ и $B$ или $a$ и $\Delta$. Конечно, они показывают, как началось движение. Если движение начнется с малого отклонения, мы получим один тип колебаний; если слегка растянуть пружинку, а потом ударить по грузику — другой. Постоянные $A$ и $B$ или $a$ и $\Delta$, или какие-нибудь две другие постоянные определяются обстоятельствами, при которых началось движение, или, как обычно говорят, *начальными условиями*. Нужно научиться определять постоянные, исходя из начальных условий. Хотя для этого можно использовать любое из соотношений (21.6), лучше всего иметь дело с (21.6в). Пусть в начальный момент $t=0$ грузик смещен от положения равновесия на величину $x_0$ и имеет скорость $v_0$. Это самая общая ситуация, какую только можно придумать. (Нельзя задать начального *ускорения*, потому что оно зависит от свойств пружины; мы можем распорядиться только величиной $x_0$.) Вычислим теперь $A$ и $B$. Начнем с уравнения для

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t;$$

поскольку нам понадобится и скорость, продифференцируем $x$ и получим

$$v = -\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t.$$

Эти выражения справедливы для всех $t$, но у нас есть дополнительные сведения о величинах $x$ и $v$ при $t=0$. Таким образом, если положить $t=0$, мы должны получить слева $x_0$ и $v_0$, ибо это то, во что превращаются $x$ и $v$ при $t=0$. Кроме того, мы знаем, что косинус нуля равен единице, а синус нуля равен нулю. Следовательно,

$$x_0 = A\cdot 1 + B\cdot 0 = A$$

и

$$v_0 = -\omega_0 A\cdot 0 + \omega_0 B\cdot 1 = \omega_0 B.$$

Таким образом, в этом частном случае

$$A = x_0,\quad B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Зная $A$ и $B$, мы можем, если пожелаем, найти $a$ и $\Delta$.

Итак, задача о движении осциллятора решена, но есть одна интересная вещь, которую надо проверить. Надо выяснить, сохраняется ли энергия. Если нет сил трения, то энергия должна сохраняться. Сейчас нам удобно использовать формулы

$$x = a\cos(\omega_0 t + \Delta)$$

и

$$v = -\omega_0 a\sin(\omega_0 t + \Delta).$$

Давайте найдем кинетическую энергию $T$ и потенциальную энергию $U$. Потенциальная энергия в произвольный момент времени равна $\frac{1}{2}kx^2$, где $x$ — смещение, а $k$ — постоянная упругости пружинки. Подставляя вместо $x$ написанное выше выражение, найдем

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_0 t + \Delta).$$

Разумеется, потенциальная энергия зависит от времени; она всегда положительна, это тоже понятно: ведь потенциальная энергия — это энергия пружины, а она изменяется вместе с $x$. Кинетическая энергия равна ½ $mv^2$; используя выражение для $v$, получаем

$$T=\frac{1}{2}\,mv^2=\frac{1}{2}\,m\omega_0^2a^2\sin^2(\omega_0t+\Delta).$$

Кинетическая энергия равна нулю при максимальном $x$, ибо в этом случае грузик останавливается; когда же грузик проходит положение равновесия ($x=0$), то кинетическая энергия достигает максимума, потому что именно тогда грузик движется быстрее всего. Изменение кинетической энергии, таким образом, противоположно изменению потенциальной энергии. Полная энергия должна быть постоянной. Действительно, если вспомнить, что $k=m\omega_0^2$, то

$$T+U=\frac{1}{2}\,m\omega_0^2a^2\,[\cos^2(\omega_0t+\Delta)+\sin^2(\omega_0t+\Delta)]=\frac{1}{2}\,m\omega_0^2a^2.$$

Энергия зависит от квадрата амплитуды: если увеличить амплитуду колебания вдвое, то энергия возрастет вчетверо. *Средняя* потенциальная энергия равна половине максимальной и, следовательно, половине полной; средняя кинетическая энергия также равна половине полной энергии.

## § 5. Колебания под действием внешней силы

Нам остается рассмотреть *колебания гармонического осциллятора* под действием внешней силы. Движение в этом случае описывается уравнением

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+F(t). \tag{21.8}$$

Давайте подумаем, как будет вести себя грузик при этих обстоятельствах. Внешняя движущая сила может зависеть от времени каким угодно образом. Начнем с простейшей зависимости. Предположим, что сила осциллирует

$$F(t)=F_0\cos\omega t. \tag{21.9}$$

Обратите внимание, что $\omega$ — это не обязательно $\omega_0$: будем считать, что можно изменять $\omega$, заставляя силу действовать с разной частотой. Итак, надо решить уравнение (21.8) в случае специально подобранной силы (21.9). Каким будет решение (21.8)? Одно из частных решений (общим решением мы еще займемся) выглядит так:

$$x=C\cos\omega t, \tag{21.10}$$

где постоянную $C$ еще надо определить. Иначе говоря, пытаясь найти решение в таком виде, мы предполагаем, что, если тянуть грузик взад и вперед, он в конце концов начнет качаться взад и вперед с частотой действующей силы. Проверим, может ли это быть. Подставив (21.10) в (21.9), получим

$$-m\omega^2 C\cos\omega t=-m\omega_0^2 C\cos\omega t+F_0\cos\omega t. \qquad (21.11)$$

Мы уже заменили $k$ на $m\omega_0^2$, потому что удобнее сравнивать две частоты. Уравнение (21.11) можно поделить на содержащийся в каждом члене косинус и убедиться, что при правильно подобранном значении $C$ выражение (21.10) будет решением. Эта величина $C$ должна быть такой:

$$C=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}. \qquad (21.12)$$

Таким образом, грузик $m$ колеблется с частотой действующей на него силы, но амплитуда колебания зависит от соотношения между частотой силы и частотой свободного движения осциллятора. Если $\omega$ очень мала по сравнению с $\omega_0$, то грузик движется вслед за силой. Если же чересчур быстро менять направление толчков, то грузик начинает двигаться в противоположном по отношению к силе направлении. Это следует из равенства (21.12), которое говорит нам, что величина $C$ отрицательна, если $\omega$ больше *собственной* частоты гармонического осциллятора $\omega_0$. (Мы будем называть $\omega_0$ собственной частотой гармонического осциллятора, а $\omega$ — приложенной частотой.) При очень высокой частоте знаменатель становится очень большим и грузик практически не движется.

Найденное нами решение справедливо только в том случае, когда уже установилось равновесие между осциллятором и действующей силой; это происходит после того, как вымрут другие движения. Эти вымирающие движения называют *переходным* откликом на силу $F(t)$, а движение, описываемое (21.10) и (21.12),— *равновесным* откликом.

Приглядевшись к формуле (21.12), мы заметим любопытную вещь: если частота $\omega$ почти равна $\omega_0$, то $C$ приближается к бесконечности. Таким образом, если настроить силу «в лад» с собственной частотой, отклонения грузика достигнут гигантских размеров. Об этом знает всякий, кому когда-либо приходилось раскачивать ребенка на качелях. Это довольно трудно сделать, если закрыть глаза и беспорядочно толкать качели. Но если найти правильный ритм, то раскачать качели легко, однако, как только мы опять собьемся с ритма, толчки начнут тормозить качели и от такой работы будет мало проку.

Если частота $\omega$ будет в точности равна $\omega_0$, то амплитуда должна стать *бесконечной*, что, разумеется, невозможно. Мы ошиблись, потому что решали не совсем верное уравнение. Составляя уравнение (21.8), мы забыли о силе трения и о многих других силах. Поэтому амплитуда никогда не достигнет бесконечности; пожалуй, пружинка порвется гораздо раньше!

*Глава* 22

# АЛГЕБРА



## *§ 1. Сложение и умножение*

Изучая осциллятор, нам придется воспользоваться одной из наиболее замечательных, пожалуй самой поразительной из формул, какие можно найти в математике. Физик обычно расправляется с этой формулой примерно за две минуты, даже не обратив на нее внимания. Но наука ведь не только приносит практическую пользу, а служит источником удовольствия, поэтому давайте не будем торопиться проходить мимо этой драгоценности, а посмотрим, как она выглядит в великолепном окружении, которое обычно называют элементарной алгеброй.

Вы можете спросить: «Зачем нужна математика в книге по физике?» Вот несколько уважительных причин: прежде всего математика— очень важный рабочий инструмент, но этим можно оправдать затрату всего лишь двух минут на вывод этой формулы. Однако при изучении теоретической физики мы обнаруживаем, что все физические законы можно записать в виде математических формул, именно это придает законам простоту и красоту. Таким образом, глубокое понимание математических соотношений в конце концов необходимо для понимания природы. Но главная причина — это красота темы: ведь хотя люди разрезали природу на много кусков и продолжают кромсать ее, изучая очень много предметов на различных факультетах, такое разделение искусственно, и мы всегда будем получать наслаждение, собирая вместе отдельные куски.

Еще одна причина, по которой следует заняться поглубже алгеброй: хотя многие из вас уже знакомились с алгеброй в средней школе, но это было только первым знакомством и многие формулы еще непривычны, поэтому стоит еще раз вспомнить алгебру, чтобы не тратить на формулы столько же сил, сколько их уйдет на изучение самой физики.

То, чем мы займемся, с точки зрения математики, не будет настоящей алгеброй. Математик главным образом интересуется тем, как изложить то или иное математическое утверждение и какие предположения обязательны при выводе теоремы, а какие нет. Для нас важнее результат доказательства. Например, теорема Пифагора интересна для нас потому, что в ней сообщается, что сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы; это очень интересный факт, и мы будем использовать его, не заботясь о том, действительно ли это доказанная Пифагором теорема или просто аксиома. В том же самом духе мы изложим элементарную алгебру, по возможности чисто качественно. Мы говорим *элементарная* алгебра потому, что существует ветвь математики, называемая *высшей* алгеброй, где может оказаться неверным, что $ab=ba$, но таких вещей мы касаться не будем.

Изучение алгебры начнем с середины. Предположим, что нам уже известно, что существуют целые числа, что есть нуль и чтó значит увеличить число на единицу. Не говорите, пожалуйста: «Вот так середина!», потому что для математика это середина, ведь он знает теорию множеств и может *вывести* все эти свойства целых чисел. Но мы не будем вторгаться в область философии математики и математической логики, а ограничимся предположением, что нам известны целые числа и мы умеем считать. Если взять целое число $a$ и прибавить к нему $b$ раз по единице, мы получим число $a+b$; этим определяется *сложение* целых чисел.

Определив сложение, проделаем вот что: начнем с нуля и прибавим к нему $b$ раз число $a$; таким образом мы определим *умножение* целых чисел и будем называть результат *произведением* $a$ на $b$.

Теперь можно проделать ряд *последовательных умножений*: если умножить единицу $b$ раз на число $a$, то мы *возведем $a$ в степень $b$* и запишем результат в виде $a^b$.

Исходя из этих определений, легко доказать такие соотношения:

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{а)} & a+b=b+a & \text{ж)} & a^b a^c = a^{(b+c)} \\
\text{б)} & a+(b+c)=(a+b)+c & \text{з)} & (a^b)^c = a^{(bc)} \\
\text{в)} & ab=ba & \text{и)} & a+0=a \\
\text{г)} & a(b+c)=ab+ac & \text{к)} & a\cdot 1=a \\
\text{д)} & (ab)c=a(bc) & \text{л)} & a^1=a \\
\text{е)} & (ab)^c=a^c b^c & &
\end{array}\right\} \quad (22.1)$$

Эти результаты хорошо известны, мы не хотим долго на них останавливаться, а выписаны они больше для порядка. Конечно, 1 и 0 обладают особыми свойствами, например $a+0=a$, $a\cdot 1=a$ и $a$ в первой степени равно $a$.

Составляя табличку формул (22.1), мы пользовались такими свойствами, как непрерывность и соотношение порядка; дать им определение очень трудно: для этого создана целая наука. Кроме того, мы выписали, конечно, слишком много «правил»; некоторые из этих правил можно вывести из других, но не будем на этом останавливаться.

## § 2. *Обратные операции*

Кроме прямых операций сложения, умножения и возведения в степень, существуют *обратные* операции. Их можно определить так. Предположим, что нам заданы $a$ и $c$; как найти $b$, удовлетворяющее уравнениям $a+b=c$, $ab=c$, $b^a=c$? Если $a+b=c$, то $b$ определяется при помощи *вычитания*: $b=c-a$. Столь же проста операция *деления*: если $ab=c$, то $b=c/a$; это решение уравнения $ab=c$ «задом наперед». Если вам встретится степень: $b^a=c$, то надо запомнить, что $b$ называется корнем $a$-й степени из $c$. Например, на вопрос: «Какое число, будучи возведенным в куб, дает 8?» — следует отвечать: «*Кубический корень* из 8, т. е. 2». Обратите внимание, что, когда дело доходит до степени, появляются *две* обратные операции. Действительно, ведь раз $a^b$ и $b^a$ — различные числа, то можно задать и такой вопрос: «В какую степень надо возвести 2, чтобы получить 8?» В этом случае приходится брать *логарифм*. Если $a^b=c$, то $b=\log_a c$. Не надо пугаться громоздкой записи числа $b$ в этом случае; находить его так же просто, как и результаты других обратных операций. Хотя логарифм «проходят» гораздо позже корня, это такая же простая вещь: просто-напросто это разного сорта решения алгебраических уравнений. Выпишем вместе прямые и обратные операции:

| | | |
|---|---|---|
| а) сложение $a+b=c$ | а′) вычитание $b=c-a$ | (22.2) |
| б) умножение $ab=c$ | б′) деление $b=\dfrac{c}{a}$ | |
| в) возведение в степень $b^a=c$ | в′) извлечение корня $b=\sqrt[a]{c}$ | |
| г) возведение в степень $a^b=c$ | г′) взятие логарифма $b=\log_a c$ | |

В чем же идея? Выписанные соотношения верны для целых чисел, потому что они выводятся из определений сложения, умножения и возведения в степень. Подумаем, *нельзя ли расширить класс объектов, которые по-прежнему будут обозначаться буквами $a$, $b$ и $c$ и для которых по-прежнему будут верны все сформулированные нами правила*, хотя сложение уже нельзя будет понимать как последовательное увеличение числа на единицу, а возведение в степень — как последовательное перемножение целых чисел.

## § 3. *Шаг в сторону и обобщение*

Если кто-нибудь, усвоив наши определения, приступит к решению алгебраических уравнений, он быстро натолкнется на неразрешимые задачи. Решите, например, уравнение $b=3-5$. Вам придется в соответствии с определением вычитания найти число, которое дает 3, если к нему добавить 5. Перебрав все целые положительные числа (а ведь в правилах говорится только о таких числах), вы скажете, что задача не решается. Однако можно сделать то, что потом станет системой, великой идеей: наткнувшись на неразрешимую задачу, надо сначала *отойти в сторону, а затем обобщить*. Пока алгебра состоит для нас из правил и целых чисел. Забудем о первоначальных определениях сложения и умножения, но сохраним правила (22.1) и (22.2) и предположим, что они верны *вообще* не только для целых положительных чисел (для них эти правила были выведены), а для более широкого класса чисел. Раньше мы записывали целые положительные числа в виде символов, чтобы вывести правила; теперь правила будут определять символы, а символы будут представителями каких-то более общих чисел. Манипулируя правилами, можно показать, что $3-5=0-2$. Давайте определим новые числа: $0-1$, $0-2$, $0-3$, $0-4$ и т. д. и назовем их *целыми отрицательными числами*. После этого мы сможем решить *все* задачи на вычитание. Теперь вспомним и о других правилах, например $a(b+c)=ab+ac$; это даст нам правило умножения отрицательных чисел. Перебрав все правила, мы увидим, что они верны как для положительных, так и для отрицательных чисел.

Мы значительно расширили область действия наших правил, но достигли этого ценой изменения смысла символов.

Уже нельзя, например, сказать, что умножить 5 на $-2$ значит сложить 5 минус два раза. Эта фраза бессмысленна. Тем не менее, пользуясь правилами, вы всегда получите верный результат.

Возведение в степень приносит новые хлопоты. Кто-нибудь обязательно захочет узнать, что означает символ $a^{(3-5)}$. Мы знаем, что $3-5$ это решение уравнения $(3-5)+5=3$. Следовательно, мы знаем, что $a^{(3-5)}a^5=a^3$. Теперь можно разделить на $a^5$, тогда $a^{(3-5)}=a^3/a^5$. Еще одно усилие, и вот окончательный результат: $a^{(3-5)}=1/a^2$. Таким образом, мы установили, что возведение числа в отрицательную степень сводится к делению единицы на число, возведенное в положительную степень. Все было бы хорошо, если бы $1/a^2$ не было бессмысленным символом. Ведь $a$ — это целое положительное или отрицательное число, значит, $a^2$ больше единицы, а мы не умеем делить единицу на числа, большие чем единица!

Система так система. Натолкнувшись на неразрешимую задачу, надо расширить царство чисел. На этот раз нам трудно делить: нельзя найти целого числа ни положительного, ни отрицательного, которое появилось бы в результате деления 3 на 5. Так назовем это и другие подобные ему числа рациональными дробями и предположим, что дроби подчиняются тем же правилам, что и целые числа. Тогда мы сможем оперировать дробями так же хорошо, как и целыми числами.

Еще один пример на степень: что такое $a^{3/5}$? Мы знаем только, что $(^3/_5)\ 5=3$, ибо это определение числа $^3/_5$, и еще, что $(a^{3/5})^5=a^{(3/5)\,5}$, ибо это одно из правил. Вспомнив определение корня, мы получим $a^{(3/5)}=\sqrt[5]{a^3}$. Определяя таким образом дроби, мы не вводим никакого произвола. Сами правила следят за тем, чтобы подстановка дробей вместо написанных нами символов не была бессмысленной процедурой. Замечательно, что эти правила справляются с дробями так же хорошо, как и с целыми числами (положительными и отрицательными)!

Пойдем дальше по пути обобщения. Существуют ли еще уравнения, которых мы не научились решать? Конечно. Например, нам не под силу уравнение $b=2^{1/2}=\sqrt{2}$. Невозможно найти *рациональную* дробь, квадрат которой равен 2. В наше время это выяснить довольно просто. Мы знаем десятичную систему и не пугаемся бесконечной десятичной дроби, которую можно использовать для приближения корня из двух. Хотя идея такого приближения появилась еще у древних греков, однако усваивалась она с большим трудом. Чтобы точно сформулировать суть такого приближения, надо постичь такие высокие материи, как непрерывность и соотношения порядка, а это очень трудный шаг. Это сделал Дедекинд очень точно и очень формально. Однако, если не заботиться о математической строгости, легко понять, что числа типа $\sqrt{2}$ можно представить в виде целой последовательности десятичных дробей (потому что если остановиться на какой-нибудь десятичной дроби, то получится рациональное число), которая все ближе и ближе подходит к желанному результату. Этих знаний нам вполне достаточно; они позволят свободно обращаться с иррациональными числами и вычислять числа типа $\sqrt{2}$ с нужной точностью.

## § 4. *Приближенное вычисление иррациональных чисел*

Теперь такой вопрос: как возвести число в иррациональную степень? Например, нам хочется узнать, что такое $10^{\sqrt{2}}$. Ответ в принципе очень прост. Возьмем вместо $\sqrt{2}$ его приближение в виде конечной десятичной дроби — это рациональное число. Возводить в рациональную степень мы умеем; дело сводится к возведению в целую степень и извлечению корня. Мы получим *приближенное значение* числа $10^{\sqrt{2}}$. Можно взять десятичную дробь подлиннее (это снова рациональное число). Тогда придется извлечь корень большей степени; ведь знаменатель рациональной дроби увеличится, но зато мы получим более точное приближение. Конечно, если взять приближенное значение $\sqrt{2}$ в виде очень длинной дроби, то возведение в степень будет делом очень трудным. Как справиться с этой задачей?

Вычисление квадратных корней, кубичных корней и других корней невысокой степени — вполне доступный нам арифметический процесс; вычисляя, мы последовательно, один за другим, пишем знаки десятичной дроби. Но для того, чтобы возвести в иррациональную степень или взять логарифм (решить обратную задачу), нужен такой труд, что применить прежнюю процедуру уже не просто. На помощь приходят таблицы. Их называют таблицами логарифмов или таблицами степеней, смотря по тому, для чего они предназначены. Они экономят время: чтобы возвести число в иррациональную степень, мы не вычисляем, а только перелистываем страницы.

Хотя вычисление собранных в таблицы значений — процедура чисто техническая, а все же дело это интересное и имеет большую историю. Поэтому посмотрим, как это делается. Мы вычислим не только $x=10^{\sqrt{2}}$, но решим и другую задачу: $10^x=2$, или $x=\log_{10}2$. При решении этих задач мы не откроем новых чисел; это просто вычислительные задачи. Решением будут иррациональные числа, бесконечные десятичные дроби, а их как-то неудобно объявлять новым видом чисел.

Подумаем, как решить наши уравнения. Общая идея очень проста. Если вычислить $10^1$ и $10^{4/10}$, и $10^{1/100}$, и $10^{4/1000}$, и т. д., а затем перемножить результаты, то мы получим $10^{1,414\dots}$, или $10^{\sqrt{2}}$. Поступая так, мы решим любую задачу такого рода. Однако вместо $10^{4/10}$ и т. д. мы будем вычислять $10^{1/2}$, $10^{1/4}$ и т. д. Прежде чем начинать вычисления, объясним еще, почему мы обращаемся к числу 10 чаще, чем к другим числам. Мы знаем, что значение таблиц логарифмов выходит далеко за рамки математической задачи вычисления корней, потому что

$$\log_b(ac)=\log_b a+\log_b c. \tag{22.3}$$

Это хорошо известно всем, кто пользовался таблицей логарифмов, чтобы перемножить числа. По какому же основанию $b$ брать логарифмы? Это безразлично; ведь в основу таких вычислений положен только принцип, общее свойство логарифмической функции. Вычислив логарифмы один раз по какому-нибудь произвольному основанию, можно перейти к логарифмам по другому основанию при помощи умножения. Если умножить уравнение (22.3) на 61, то оно останется верным, поэтому если перемножить все числа в таблице логарифмов по основанию $b$ на 61, то можно будет пользоваться и такой таблицей. Предположим, что нам известны логарифмы всех чисел по основанию $b$. Иначе говоря, можно решить уравнение $b^a=c$ для любого $c$; для этого существует таблица. Задача состоит в том, как найти логарифм этого же числа $c$ по другому основанию, например $x$. Нам нужно решить уравнение $x^{a'}=c$. Это легко сделать, потому что $x$ всегда можно представить так: $x=b^t$. Найти $t$, зная $x$ и $b$, просто: $t=\log_b x$. Подставим теперь $x=b^t$ в уравнение $x^{a'}=c$; оно перейдет в такое уравнение: $(b^t)^{a'}=b^{ta'}=c$. Иными словами, произведение $ta'$ есть логарифм $c$ по основанию $b$. Значит, $a'=a/t$. Таким образом, логарифмы по основанию $x$ равны произведениям логарифмов по основанию $b$ на постоянное число $1/t$. Следовательно, все таблицы логарифмов эквивалентны с точностью до умножения на число $1/\log_b x$. Это позволяет нам выбрать для составления таблиц любое основание, но мы решили, что удобнее всего взять за основание число 10. (Может возникнуть вопрос: не существует ли все-таки какого-нибудь естественного основания, при котором все выглядит как-то проще? Мы попытаемся ответить на этот вопрос позднее. Пока все логарифмы будут вычисляться по основанию 10.)

Теперь посмотрим, как составляют таблицу логарифмов. Работа начинается с последовательных извлечений квадратного корня из 10. Результат можно увидеть в табл. 22.1. Показатели степеней записаны в ее первом столбце, а числа $10^s$— в третьем. Ясно, что $10^1=10$. Возвести 10 в половинную степень легко — это квадратный корень из 10, а как извлекать квадратный корень из любого числа, знает каждый *. Итак, мы нашли первый квадратный корень; он равен 3,16228. Что это дает? Кое-что дает. Мы уже можем сказать, чему равно $10^{0,5}$, и знаем по крайней мере *один* логарифм. Логарифм числа 3,16228

---

* Квадратный корень лучше всего извлекать не тем способом, которому обычно учат в школе, а немного иначе. Чтобы извлечь квадратный корень из числа $N$, выберем достаточно близкое к ответу число $a$, вычислим $N/a$ и среднее $a'={}^1/_2[a+(N/a)]$; это среднее будет новым числом $a$, новым приближением корня из $N$. Этот процесс очень быстро приводит к цели: число значащих цифр удваивается после каждого шага.

*Таблица 22.1* • ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ 10

| Показатель степени $s$ | $1024\,s$ | $10^s$ | $(10^s-1)/s$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1024 | 10,00000 | 9,00 |
| 1/2 | 512 | 3,16228 | 4,32 |
| 1/4 | 256 | 1,77828 | 3,113 |
| 1/8 | 128 | 1,33352 | 2,668 |
| 1/16 | 64 | 1,15478 | 2,476 |
| 1/32 | 32 | 1,074607 | 2,3874 |
| 1/64 | 16 | 1,036633 | 2,3445 |
| 1/128 | 8 | 1,018152 | $2{,}3234^{211}$ |
| 1/256 | 4 | 1,0090350 | $2{,}3130^{104}$ |
| 1/512 | 2 | 1,0045073 | $2{,}3077^{53}$ |
| 1/1024 | 1 | 1,0022511 | $2{,}3051^{26}_{26}$ |
| $\Delta/1024$ $(\Delta\to 0)$ | $\Delta$ | $1+0{,}0022486\Delta$ $\left(=1+2{,}3025\,\dfrac{\Delta}{1024}\right)$ | $\downarrow$ $\leftarrow 2{,}3025$ |

очень близок к 0,50000. Однако нужно еще приложить небольшие усилия: нам нужна более подробная таблица. Извлечем еще один квадратный корень и найдем $10^{1/4}$, что равно 1,77828. Теперь мы знаем еще один логарифм: 1,250 — это логарифм числа 17,78; кроме того, мы можем сказать, чему равно $10^{0,75}$: ведь это $10^{(0,5+0,25)}$, т. е. произведение второго и третьего чисел из третьего столбца табл. 22.1. Если сделать первый столбец таблицы достаточно длинным, то таблица будет содержать почти все числа; перемножая числа из третьего столбца, мы получаем 10 почти в любой степени. Такова основная идея таблиц. В нашей таблице содержится десять последовательных корней из 10; основной труд по составлению таблицы вложен в вычисления этих корней.

Почему же мы не продолжаем повышать точность таблиц дальше? Потому что мы кое-что уже подметили. Возведя 10 в очень малую степень, мы получаем единицу с малой добавкой. Это, конечно, происходит потому, что если возвести, например, $10^{1/1000}$ в 1000-ю степень, то мы снова получим 10; ясно, что $10^{1/1000}$ не может быть большим числом: оно очень близко к единице. Более того, малые добавки к единице ведут себя так, будто их каждый раз делят на 2; поглядите-ка на таблицу повнимательнее: 1815 переходит в 903, потом в 450, 225 и т. д. Таким образом, если вычислить еще один, одиннадцатый, квадратный корень, *он с большой точностью будет равен* 1,00112, и этот результат мы *угадали* еще до вычисления. Можно ли сказать, какова будет добавка к единице, если возвести 10 в степень

$\Delta/1024$, когда $\Delta$ стремится к нулю? Можно. Добавка будет приблизительно равна $0{,}0022511\Delta$. Конечно, не в точности $0{,}0022511\Delta$; чтобы вычислить эту добавку поточнее, делают такой трюк: вычитают из $10^s$ единицу и делят разность на показатель степени $s$. Отклонения полученного таким образом частного от его точного значения одинаковы для любой степени $s$. Видно, что эти отношения (см. четвертый столбец табл. 22.1) примерно равны. Сначала они все-таки сильно отличаются друг от друга, но потом все ближе подходят друг к другу, явно стремясь к какому-то числу. Что это за число? Проследим, как меняются числа четвертого столбца, если опускаться вниз по столбцу. Сначала разность двух соседних чисел равна 0,0211, потом 0,0104, потом 0,0053 и, наконец, 0,0026. Разность каждый раз убывает наполовину. Сделав еще один шаг, мы доведем ее до 0,0013, потом до 0,0007, 0,0003, 0,0002 и, наконец, примерно до 0,0001; надо последовательно делить 26 на 2. Таким образом, мы спустимся еще на 26 единиц и найдем для предела 2,3025. (Позднее мы увидим, что правильнее было бы взять 2,3026, но давайте возьмем то, что у нас получилось.) Пользуясь этой таблицей, можно возвести 10 в любую степень, если ее показатель каким угодно способом выражается через 1/1024.

Теперь легко составить таблицу логарифмов, потому что все необходимое для этого мы уже припасли. Процедура этого изображена в табл. 22.2, а нужные числа берутся из второго и третьего столбцов табл. 22.1.

*Таблица 22.2* • ВЫЧИСЛЕНИЯ $\log_{10}2$

$$2 : 1{,}77828 = 1{,}124682$$

$$1{,}124682 : 1{,}074607 = 1{,}046598 \text{ и т. д.}$$

$$2 = (1{,}77828)\,(1{,}074607)\,(1{,}036633)\,(1{,}090350)\,(1{,}000573)$$

$$= 10\left[\frac{1}{1024}\,(256+32+16+4+0{,}254)\right] = 10\left[\frac{308{,}254}{1024}\right]$$

$$= 10^{0{,}30103} \qquad \left(\frac{0{,}00573\cdot 1024}{2{,}3025} = \frac{573}{2249} = 0{,}254\right)$$

Следовательно, $\log_{10}2 = 0{,}30103$

Предположим, что мы хотим знать логарифм 2. Это значит, что мы хотим знать, в какую степень надо возвести 10, чтобы получить 2. Может быть, возвести 10 в степень ½? Нет, получится слишком большое число. Глядя на табл. 22.1, можно сказать, что нужное нам число лежит между ¼ и ½. Поиск его начнем с ¼; разделим 2 на 1,788..., получится 1,124...; при делении мы отняли от логарифма двух 0,250000, и теперь нас интересует логарифм 1,124.... Отыскав его, мы прибавим к результату $^1/_4=256/1024$. Найдем в табл. 22.1 число, которое бы при движении по третьему столбцу сверху вниз стояло сразу за 1,124... . Это 1,074607. Отношение 1,124... к 1,074607 равно 1,046598. В конце концов мы представим 2 в виде произведения чисел из табл. 22.1:

$$2=(1{,}77828)\cdot(1{,}074607)\cdot(1{,}036633)\cdot(1{,}0090350)\cdot(1{,}000573).$$

Для последнего множителя (1,000573) в нашей таблице места не нашлось; чтобы найти его логарифм, надо представить это число в виде $10^{\Delta/1024}\approx 1+2{,}3025\Delta/1024$. Отсюда легко найти, что $\Delta=0{,}254$. Таким образом, наше произведение можно представить в виде десятки, возведенной в степень $1/1024\ (256+32+16+4+0{,}254)$. Складывая и деля, мы получаем нужный логарифм: $\log_{10} 2=0{,}30103$; этот результат верен до пятого десятичного знака!

Мы вычисляли логарифмы точно так же, как это делал мистер Бриггс из Галифакса в 1620 г. Закончив работу, он сказал: «Я вычислил последовательно 54 квадратных корня из 10». На самом деле он вычислил только 27 первых корней, а потом сделал фокус с $\Delta$. Вычислить 27 раз квадратный корень из 10, вообще-то говоря, немного сложнее, чем 10 раз, как это сделали мы. Однако мистер Бриггс сделал гораздо большее: он вычислял корни с точностью до шестнадцатого десятичного знака, а когда опубликовал свои таблицы, то оставил в них лишь 14 десятичных знаков, чтобы округлить ошибки. Составить таблицы логарифмов с точностью до четырнадцатого десятичного знака таким методом — дело очень трудное. Зато целых 300 лет спустя составители таблиц логарифмов занимались тем, что уменьшали таблицы мистера Бриггса, выкидывая из них каждый раз разное число десятичных знаков. Только в последнее время при помощи электронных вычислительных машин оказалось возможным составить таблицы логарифмов независимо от мистера Бриггса. При этом использовался более эффективный метод вычислений, основанный на разложении логарифма в ряд.

Составляя таблицы, мы натолкнулись на интересный факт: если показатель степени $\varepsilon$ очень мал, то очень легко вычислить $10^{\varepsilon}$; это просто $1+2{,}3025\varepsilon$. Это значит, что $10^{n/2{,}3025}=1+n$ для очень малых $n$. Кроме того, мы говорили с самого начала, что вычисляем логарифмы по основанию 10 только потому, что у нас на руках 10 пальцев и по десяткам нам считать удобнее. Логарифмы по любому другому основанию получаются из логарифмов по основанию 10 простым умножением. Теперь настало время выяснить, не существует ли математически выделенного основания логарифмов, выделенного по причинам, не имеющим ничего общего с числом пальцев на руке. В этой естественной *шкале* формулы с логарифмами должны выглядеть проще. Составим новую таблицу логарифмов, умножив все логарифмы по основанию 10 на 2,3025... . Это соответствует переходу к новому основанию — *натуральному*, или основанию $e$. Заметим, что $\log_e(1+n)\approx n$ или $e^n\approx 1+n$, когда $n\to 0$.

Легко найти само число $e$; оно равно $10^{1/2,3025}$ или $10^{0,434294\ldots}$. Это 10 в иррациональной степени. Для вычисления $e$ можно воспользоваться таблицей корней из 10. Представим 0,434294... сначала в виде 444,73/1024, а числитель этой дроби в виде суммы $444,73=256+128+32+16+2+0,73$. Число $e$ поэтому равно произведению чисел

$$(1,77828)\cdot(1,33352)\cdot(1,074607)\cdot(1,036633)\cdot(1,018152)\times \times(1,009035)(1,001643)=2,7184.$$

(Числа 0,73 нет в нашей таблице, но соответствующий ему результат можно представить в виде $1+2,3025\Delta$ и вычислить, чему равна $\Delta$.) Перемножив все 7 сомножителей, мы получим 2,7184 (на самом деле должно быть 2,7183, но и этот результат хорош). Используя такие таблицы, можно возводить число в иррациональную степень и вычислять логарифмы иррациональных чисел. Вот как надо обращаться с иррациональностями.

## § 5. *Комплексные числа*

Хотя мы хорошо поработали, все-таки *есть еще* уравнения, которые нам не под силу! Например, чему равен квадратный корень из —1? Предположим, что это $x$, тогда $x^2=-1$. Нет ни рационального, ни иррационального числа, квадрат которого был бы равен —1. Придется снова пополнить запас чисел. Предположим, что уравнение $x^2=-1$ все же имеет решение, и обозначим это решение буквой $i$; число $i$ имеет пока только одно свойство: будучи возведенным в квадрат, оно дает —1. Вот пока и все, что можно о нем сказать. Однако уравнение $x^2=-1$ имеет два корня. Буквой $i$ мы обозначили один из корней, но кто-нибудь может сказать: «А я предпочитаю иметь дело с корнем $-i$; моя буква $i$ просто минус ваша $i$». Возразить ему нечего, потому что число $i$ определяется соотношением $i^2=-1$; это соотношение останется верным, если изменить знак $i$. Значит, любое уравнение, содержащее какое-то количество $i$, останется верным, если сменить знаки у всех $i$. Такая операция называется *комплексным сопряжением*. Далее, ничто не мешает нам получать новые числа вот так: сложить $i$ несколько раз, умножить $i$ на какое-нибудь наше старое число, прибавить результат умножения к старому числу и т. д. Все это можно сделать, не нарушая ранее установленных правил. Таким образом мы приходим к числам, которые можно записать в виде $p+iq$, где $p$ и $q$ — числа, с которыми мы имели дело ранее, их называют *действительными* числами. Число $i$ называют *мнимой единицей*, а произведение действительного числа на мнимую единицу — *чисто мнимым* числом. Самое общее число $a$ имеет вид $a=p+iq$, и его называют *комплексным числом*. Обращаться с комплексными числами несложно; например, нам надо вычислить произведение $(r+is)(p+iq)$. Вспомнив о правилах, мы получим

$$\begin{aligned}(r+is)(p+iq) &= rp+r(iq)+(is)p+(is)(iq)= \\ &= rp+i(rq)+i(sp)+(ii)(sq)= \\ &= (rp-sq)+i(rq+sp),\end{aligned} \tag{22.4}$$

потому что $ii=i^2=-1$. Теперь мы получили общее выражение для чисел, удовлетворяющих правилам (22.1).

Умудренные опытом, полученным в предыдущих разделах, вы скажете: «Рано говорить об общем выражении, надо еще определить, например, возведение в мнимую степень, а потом можно придумать много алгебраических уравнений, ну хотя бы $x^6+3x^2=-2$, для решения которых потребуются новые числа». В том-то и дело, что, кроме действительных чисел, *достаточно изобрести только одно число* — квадратный корень из $-1$, после этого *можно решить любое алгебраическое уравнение*! Эту удивительную вещь должны доказывать уже математики. Доказательство очень красиво, очень интересно, но далеко не самоочевидно. Действительно, казалось бы, естественнее всего ожидать, что по мере продвижения в дебри алгебраических уравнений придется изобретать снова, снова и снова. Но самое чудесное, что больше ничего не надо изобретать. Это последнее изобретение. Изобретя комплексные числа, мы установим правила, по которым с этими числами надо обращаться, и больше ничего изобретать не будем. Мы научимся возводить комплексные числа в комплексную степень и выражать решение любого алгебраического уравнения в виде конечной комбинации уже известных нам символов. К новым числам это не приведет. Например, квадратный корень из $i$, или $i^i$ — опять те же комплексные числа. Сейчас мы рассмотрим это подробнее.

Мы уже знаем, как надо складывать и умножать комплексные числа; сумма двух комплексных чисел $(p+iq)+(r+is)$ — это число $(p+r)+i(q+s)$. Но вот *возведение комплексных чисел в комплексную степень* — уже задача потруднее. Однако она оказывается не труднее задачи о возведении в комплексную степень действительных чисел. Посмотрим поэтому, как возводится в комплексную степень число 10, не в иррациональную, а комплексную; нам надо знать число $10^{(r+is)}$. Правила (22.1) и (22.2) несколько упрощают задачу

$$10^{(r+is)}=10^r10^{is}. \tag{22.5}$$

Мы знаем, как вычислить $10^r$, перемножить числа мы тоже умеем, не умеем только вычислить $10^{is}$. Предположим, что это комплексное число $x+iy$. Задача: дано $s$, найти $x$ и $y$. Если

$$10^{is}=x+iy,$$

то должно быть верным и комплексно сопряженное уравнение

$$10^{-is}=x-iy.$$

(Некоторые вещи можно получить и без вычислений, надо просто использовать правила.) Перемножая эти равенства, можно получить еще один интересный результат

$$10^{is}10^{-is}=10^0=1=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2. \qquad (22.6)$$

Если мы каким-то образом найдем $x$, то определить $y$ будет очень легко.

Однако *как* все-таки возвести 10 в мнимую степень? Где искать помощи? Правила нам уже не помогут, но утешает вот что: если удастся возвести 10 в какую-нибудь одну мнимую степень, то ничего не стоит возвести 10 уже в любую степень. Если известно $10^{is}$ для одного значения $s$, то вычисление в случае вдвое большего $s$ сводится к возведению в квадрат и т. д. Но как же возвести 10 в хотя бы одну мнимую степень? Для этого сделаем дополнительное предположение; его, конечно, нельзя ставить в один ряд с правилами (22.1) и (22.2), но оно приведет к разумным результатам и позволит нам шагнуть далеко вперед. Предположим, что «закон» $10^\varepsilon=1+2{,}3025\varepsilon$ (когда $\varepsilon$ очень мало) верен не только для действительных, *но и для комплексных* $\varepsilon$. Если это так, то $10^{is}=1+2{,}3025\cdot is$ при $s\to 0$. Предполагая, что $s$ очень мало (скажем, равно 1/1024), мы получаем хорошее приближение числа $10^{is}$.

Теперь можно составить таблицу, которая позволит вычислить *все* мнимые степени 10, т. е. найти числа $x$ и $y$. Надо поступить так. Начнем с показателя 1/1024, который мы считаем равным примерно $1+2{,}3025\ i/1024$. Тогда

$$10^{i/1024}=1{,}00000+0{,}0022486i. \qquad (22.7)$$

Умножая это число само на себя много раз, мы дойдем до степеней более высоких. Мы просто-напросто перевернули процедуру составления таблицы логарифмов и, вычислив квадрат, 4-ю степень, 8-ю степень и т. д. числа (22.7), составили табл. 22.3. Интересно, что сначала все числа $x$ были положительными, а потом вдруг появилось отрицательное число. Это значит, что существует число $s$, для которого действительная часть $10^{is}$ равна *нулю*. Значение $y$ в этом случае равно $i$, т. е. $10^{is}=i$, или $is=\log_{10}i$. В качестве примера (см. табл. 22.3) вычислим с ее помощью $\log_{10}i$. Процедура поиска $\log_{10}i$ в точности повторяет то, что мы делали, вычисляя $\log_{10}2$.

*Таблица 22.3* • ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТОВ

$$10^{i/1024}=1+0{,}0022486\,i$$

| Степень $is$ | $1024s$ | $10^{is}$ |
|---|---|---|
| $i/1024$ | 1 | $1{,}00000+0{,}00225^{*}i$ |
| $i/512$ | 2 | $1{,}00000+0{,}00450\,i$ |
| $i/256$ | 4 | $0{,}99996+0{,}00900\,i$ |
| $i/128$ | 8 | $0{,}99984+0{,}01800\,i$ |
| $i/64$ | 16 | $0{,}99936+0{,}03599\,i$ |
| $i/32$ | 32 | $0{,}99742+0{,}07193\,i$ |
| $i/16$ | 64 | $0{,}98967+0{,}14349\,i$ |
| $i/8$ | 128 | $0{,}95885+0{,}28402\,i$ |
| $i/4$ | 256 | $0{,}83872+0{,}54467\,i$ |
| $i/2$ | 512 | $0{,}40679+0{,}91365\,i$ |
| $i/1$ | 1024 | $-0{,}66928+0{,}74332\,i$ |

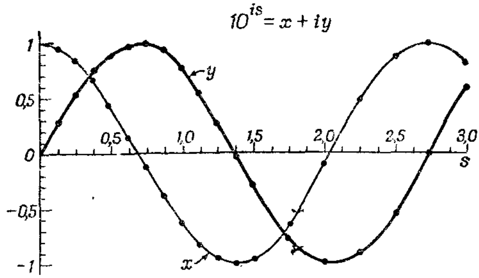
* Должно быть $0{,}0022486i$.

Произведение каких чисел из табл. 22.3 равно чисто мнимому числу? После нескольких проб и ошибок мы найдем, что лучше всего умножить «512» на «128». Их произведение равно $0{,}13056+0{,}99144i$. Приглядевшись к правилу умножения комплексных чисел, можно понять, что надежду на успех сулит умножение этого числа на число, мнимая часть которого приблизительно равна действительной части нашего числа. Мнимая часть «64» равна $0{,}14349$, что довольно близко к $0{,}13056$. Произведение этих чисел равно $-0{,}01350+0{,}99993i$. Мы перескочили через нуль, поэтому результат нужно *разделить* на $0{,}99996+0{,}00900\ i$. Как это сделать? Изменим знак $i$ и умножим на $0{,}99996-0{,}00900\ i$ (ведь $x^2+y^2=1$). В конце концов обнаружим, что если возвести 10 в степень $i(1/1024)\ (512+128+ +64-4-2+0{,}20)$ или $698{,}20i/1024$, то получится мнимая единица. Таким образом, $\log_{10}\ i=0{,}068226i$.

## § 6. *Мнимые экспоненты*

Чтобы лучше понять, что́ такое число в мнимой степени, вычислим *последовательные степени* десяти. Мы не будем каждый раз удваивать степень, чтобы не повторять табл. 22.3, и посмотрим, что́ случится с действительной частью после того, как она станет отрицательной. Результат можно увидеть в табл. 22.4.

В этой таблице собраны последовательные произведения числа $10^{i/8}$. Видно, что $x$ уменьшается, проходит через нуль, достигает почти $-1$ (в промежутке между $p=10$ и $p=11$ величина




*Фиг. 22.1. Вещественная и мнимая части функции $10^{is}$.*

точно равна —1) и возвращается назад. Точно так же величина $y$ ходит взад-вперед.

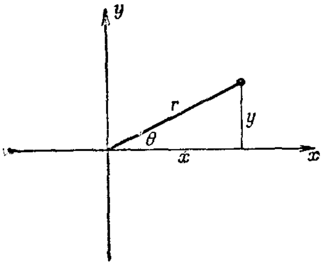
Точки на фиг. 22.1 соответствуют числам, приведенным в табл. 22.4, а соединяющие их линии помогают следить за изменением $x$ и $y$. Видно, что числа $x$ и $y$ осциллируют; $10^{is}$ *повторяет себя*. Легко объяснить, почему так происходит.

*Таблица 22.4* • ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧИСЛА $10^{i/8}$

| $p$=Степень·8$i$ | $10^{ip/8}$ | $p$=Степень·8$i$ | $10^{ip/8}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $1,00000+0,00000\,i$ | 10 | $-0,96596+0,25880\,i$ |
| 1 | $0,95882+0,28402\,i$ | 11 | $-0,99969-0,02620\,i$ |
| 2 | $0,83867+0,54465\,i$ | 12 | $-0,95104-0,30905\,i$ |
| 3 | $0,64944+0,76042\,i$ | 14 | $-0,62928-0,77717\,i$ |
| 4 | $0,40672+0,91356\,i$ | 16 | $-0,10447-0,99453\,i$ |
| 5 | $0,13050+0,99146\,i$ | 18 | $+0,45454-0,89098\,i$ |
| 6 | $-0,15647+0,98770\,i$ | 20 | $+0,86648-0,49967\,i$ |
| 7 | $-0,43055+0,90260\,i$ | 22 | $+0,99884+0,05287\,i$ |
| 8 | $-0,66917+0,74315\,i$ | 24 | $+0,80890+0,58836\,i$ |
| 9 | $-0,85268+0,52249\,i$ | | |

Ведь $i$ в четвертой степени — это $i^2$ *в квадрате*. Это число равно единице; следовательно, если $10^{0,68i}$ равно $i$, то, возведя это число в четвертую степень, т. е. вычислив $10^{2,72i}$, мы получим $+1$. Если нужно получить, например, $10^{3,00i}$, то нужно умножить $10^{2,72i}$ на $10^{0,28i}$. Иначе говоря, функция $10^{is}$ повторяется, имеет период. Мы уже знаем, как выглядят такие кривые! Они похожи на график синуса или косинуса, и мы назовем их на время алгебраическим синусом и алгебраическим косинусом. Теперь перейдем от основания 10 к натуральному основанию. Это только изменит масштаб горизонтальной оси; мы обозначим $2,3025s$ через $t$ и напишем $10^{is}=e^{it}$, где $t$ — действительное число. Известно, что $e^{it}=x+iy$, и мы запишем это число в виде

$$e^{it}=\underline{\cos}\,t+i\,\underline{\sin}\,t. \tag{22.8}$$




*Фиг. 22.2. Комплексное число как точка на плоскости.*

Каковы свойства алгебраического косинуса $\cos t$ и алгебраического синуса $\sin t$? Прежде всего $x^2+y^2=1$; это мы уже доказали, и это верно для любого основания, будь то 10 или $e$. Следовательно, $\cos^2 t+\sin^2 t=1$. Мы знаем, что $e^{it}=1+it$ для малых $t$; значит, если $t$ — близкое к нулю число, то $\cos t$ близок к единице, а $\sin t$ близок к $t$. Продолжая дальше, мы придем к выводу, что *все свойства этих замечательных функций*, получающихся в результате возведения в мнимую степень, *в точности совпадают со свойствами тригонометрического синуса и тригонометрического косинуса.*

А как обстоит дело с периодом? Давайте найдем его. В какую степень надо возвести $e$, чтобы получить $i$? Иными словами, чему равен логарифм $i$ по основанию $e$? Мы вычислили уже логарифм $i$ по основанию 10; он равен $0{,}68226i$; чтобы перейти к основанию $e$, мы умножим это число на 2,3025 и получим 1,5709. Это число можно назвать «алгебраическим $\pi/2$». Но поглядите-ка, оно отличается от настоящего $\pi/2$ всего лишь последним десятичным знаком, и это просто-напросто следствие наших приближений при вычислениях! Таким образом, чисто алгебраически возникли две новые функции — синус и косинус; они принадлежат алгебре и только алгебре. Мы пошли по их следам и обнаружили, что это те же самые функции, которые так естественно возникают в геометрии. Мы отыскали мост между алгеброй и геометрией.

Подводя итог нашим поискам, мы напишем одну из самых замечательных формул математики

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta. \tag{22.9}$$

Вот она, наша жемчужина.

Связь между алгеброй и геометрией можно использовать для изображения комплексных чисел на плоскости; точка на плоскости определяется координатами $x$ и $y$ (фиг. 22.2). Представим каждое комплексное число в виде $x+iy$. Если расстояние точки от начала координат обозначить через $r$, а угол радиуса-вектора точки с осью $x$ — через $\theta$, то выражение $x+iy$ можно представить в виде $re^{i\theta}$. Это следует из геометрических соотношений между $x$, $y$, $r$ и $\theta$. Таким образом, мы объединили алгебру и геометрию.

Начиная эту главу, мы знали только целые числа и умели их считать. Зато у нас была небольшая идея о могуществе шага в сторону и обобщения. Используя алгебраические «законы», или свойства чисел, сведенные в уравнения (22.1), и определения обратных операций (22.2), мы смогли создать не только новые числа, но и такие полезные вещи, как таблицы логарифмов, степеней и тригонометрические функции (они возникли при возведении действительных чисел в мнимые степени), и все это удалось сделать, извлекая много раз квадратный корень из десяти!

*Глава* 23

# РЕЗОНАНС

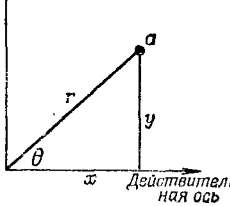


## § 1. *Комплексные числа и гармоническое движение*

Мы снова будем говорить в этой главе о гармоническом осцилляторе, особенно об осцилляторе, на который действует внешняя сила. Для анализа этих задач нужно развить новую технику. В предыдущей главе мы ввели понятие комплексного числа, которое состоит из действительной и мнимой частей и которое можно изобразить на графике. Действительная часть числа будет изображаться абсциссой, а мнимая — ординатой. Комплексное число $a$ можно записать в виде $a=a_r+ia_i$; при такой записи индекс $r$ отмечает действительную часть $a$, а индекс $i$ — мнимую. Взглянув на фиг. 23.1, легко сообразить, что комплексное число $a=x+iy$ можно записать и так: $x+iy=r\exp(i\theta)$, где $r^2=x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)=aa^*$ ($a^*$ — это комплексно сопряженное к $a$ число; оно получается из $a$ изменением знака $i$). Итак, комплексное число можно представить двумя способами: явно выделить его действительную и мнимую части или задать его модулем $r$ и фазовым углом $\theta$. Если заданы $r$ и $\theta$, то $x$ и $y$ равны $r\cos\theta$ и $r\sin\theta$, и, наоборот, исходя из числа $x+iy$, можно найти $r=\sqrt{x^2+y^2}$ и угол $\theta$; $\operatorname{tg}\theta$ равен $y/x$ (т. е. отношению мнимой и действительной частей).

Чтобы применить комплексные числа к решению физических задач, проделаем такой трюк. Когда мы изучали осциллятор, то имели дело с внешней силой, пропорциональной $\cos\omega t$. Такую силу $F=F_0\cos\omega t$ можно рассматривать как действительную часть комплексного числа $F=F_0\exp(i\omega t)$, потому что $\exp(i\omega t)=\cos\omega t+i\sin\omega t$. Такой переход удобен: ведь иметь дело с экспонентой легче, чем

*Фиг. 23.1. Комплексное число, изображенное точкой на «комплексной плоскости».*




с косинусом. Итак, трюк состоит в том, что все относящиеся к осциллятору функции рассматриваются как действительные части каких-то комплексных функций. Найденное нами комплексное число $F$, разумеется, не настоящая сила, ибо физика не знает комплексных сил: все силы имеют только действительную часть, а мнимой части взяться просто неоткуда. Тем не менее мы будем говорить «сила» $F_0\exp(i\omega t)$, хотя надо помнить, что речь идет лишь о *действительной* ее части.

Рассмотрим еще один пример. Как представить косинусоидальную волну, фаза которой сдвинулась на $\Delta$? Конечно, как действительную часть $F_0\exp[i(\omega t-\Delta_2)]$; экспоненту в этом случае можно записать в виде $\exp[i(\omega t-\Delta)]=\exp(i\omega t)\exp(^{-}i\Delta)$. Алгебра экспонент гораздо легче алгебры синусов и косинусов; вот почему удобно использовать комплексные числа. Часто мы будем писать так:

$$F=F_0e^{-i\Delta}\,e^{i\omega t}=\hat{F}e^{i\omega t}. \qquad (23.1)$$

Шляпка над буквой будет указывать, что мы имеем дело с комплексным числом, т. е.

$$\hat{F}=F_0e^{-i\Delta}.$$

Однако пора начать решать уравнения, используя комплексные числа, тогда мы увидим, как надо применять комплексные числа в реальных обстоятельствах. Для начала попытаемся решить уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{kx}{m}=\frac{F}{m}=\frac{F_0}{m}\cos\omega t, \qquad (23.2)$$

где $F$ — действующая на осциллятор сила, а $x$ — его смещение. Хотя это и абсурдно, предположим, что $x$ и $F$ — комплексные числа. Тогда $x$ состоит из действительной части и умноженной на $i$ мнимой части; то же самое касается и $F$. Уравнение (23.2) в этом случае означает

$$\frac{d^2(x_r+ix_i)}{dt^2}+\frac{k(x_r+ix_i)}{m}=\frac{F_r+iF_i}{m}$$

или

$$\frac{d^2x_r}{dt^2}+\frac{kx_r}{m}+i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{kx_i}{m}\right)=\frac{F_r}{m}+\frac{iF_i}{m}.$$

Комплексные числа равны, когда равны их действительные и мнимые части; следовательно, *действительная часть $x$ удовлетворяет уравнению, в правой части которого стоит действительная часть силы*. Оговорим с самого начала, что такое разделение действительных и мнимых частей возможно *не всегда*, а только в случае *линейных* уравнений, т. е. уравнений, содержащих $x$ лишь в нулевой и первой степенях. Например, если бы уравнение содержало член $\lambda x^2$, то, сделав подстановку $x_r+ix_i$, мы получили бы $\lambda(x_r+ix_i)^2$, и выделение действительной и мнимой частей привело бы нас к $\lambda(x_r^2-x_i^2)$ и $2i\lambda x_r x_i$. Итак, мы видим, что действительная часть уравнения содержит в этом случае член $-\lambda x_i^2$. Мы получили совсем не то уравнение, какое собирались решать.

Попытаемся применить наш метод к уже решенной задаче о вынужденных колебаниях осциллятора, т. е. об осцилляторе, на который действует внешняя сила. Как и раньше, мы хотим решить уравнение (23.2), но давайте начнем с уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{kx}{m}=\hat{F}e^{i\omega t}, \qquad (23.3)$$

где $\hat{F}e^{i\omega t}$ — комплексное число. Конечно, $x$ — тоже комплексное число, но запомним правило: чтобы найти интересующие нас величины, надо взять действительную часть $x$. Найдем решение (23.3), описывающее вынужденные колебания. О других решениях поговорим потом. Это решение имеет ту же частоту, что и внешняя (приложенная) сила. Колебание, кроме того, характеризуется амплитудой и фазой, поэтому если представить смещение числом $\hat{x}$, то модуль его скажет нам о размахе колебаний, а фаза комплексного числа — о временно́й задержке колебания. Воспользуемся теперь замечательным свойством экспоненты: $(d/dt)[\hat{x}\exp(i\omega t)]=i\omega\hat{x}\exp(i\omega t)$. Дифференцируя экспоненциальную функцию, мы опускаем вниз экспоненту, делая ее простым множителем. Дифференцируя еще раз, мы снова приписываем такой же множитель, поэтому очень просто написать уравнение для $\hat{x}$: каждое дифференцирование по времени надо заменить умножением на $i\omega$. (Дифференцирование становится теперь столь же простым, как и умножение! Идея использовать экспоненциальные функции в линейных дифференциальных уравнениях почти столь же грандиозна, как изобретение логарифмов, которые заменили умножение сложением. Здесь дифференцирование заменяется умножением.) Таким образом, мы получаем уравнение

$$(i\omega)^2\hat{x}+\frac{k\hat{x}}{m}=\frac{\hat{F}}{m}. \qquad (23.4)$$

[Мы опустили общий множитель $e^{i\omega t}$.] Смотрите, как все просто! Дифференциальное уравнение немедленно сводится к чисто алгебраическому; сразу же можно написать его решение

$$\hat{x}=\frac{\hat{F}/m}{(k/m)-\omega^2},$$

поскольку $(i\omega)^2=-\omega^2$. Решение можно несколько упростить, подставив $k/m=\omega_0^2$, тогда

$$\hat{x}=\frac{\hat{F}}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}. \tag{23.5}$$

Это, конечно, то же самое решение, которое уже было нами получено ранее. Поскольку $m(\omega_0^2-\omega^2)$ — действительное число, то фазовые углы $\hat{F}$ и $\hat{x}$ совпадают (или отличаются на 180°, если $\omega^2>\omega_0^2$). Об этом тоже уже говорилось. Модуль $\hat{x}$, который определяет размах колебаний, связан с модулем $\hat{F}$ множителем $1/m(\omega_0^2-\omega^2)$; этот множитель становится очень большим, если $\omega$ приближается к $\omega_0$. Таким образом, можно достичь очень сильного отклика, если приложить к осциллографу нужную частоту $\omega$ (если с нужной частотой толкать подвешенный на веревочке маятник, то он поднимается очень высоко).

## § 2. *Вынужденные колебания с торможением*

Итак, мы можем решить задачу о колебательном движении, пользуясь изящной математикой. Однако изящество немногого стоит, когда задача и так решается просто; математику надо использовать тогда, когда решаются более сложные задачи. Перейдем поэтому к одной из таких задач, которая, кроме того, ближе к действительности, чем предыдущая. Из уравнения (23.5) следует, что, если $\omega$ в точности равна $\omega_0$, амплитуда колебания становится бесконечной. Этого, конечно, не может быть, потому что многие вещи, например трение, ограничивают амплитуду, а мы их не учитывали. Изменим теперь (23.2) так, чтобы учесть трение.

Сделать это обычно довольно трудно, потому что силы трения очень сложны. Однако во многих случаях можно считать, что сила трения *пропорциональна скорости* движения объекта. Именно такое трение препятствует медленному движению тела в масле или другой вязкой жидкости. Когда предмет стоит на месте, на него не действуют никакие силы, но чем скорее он движется и чем быстрее масло должно обтекать этот предмет, тем больше сопротивление. Таким образом, мы предположим, что в (23.2), кроме уже написанных членов, существует еще один — сила сопротивления, пропорциональная скорости: $F_f=-c(dx/dt)$. Удобно записать $c$ как произведение $m$ на другую постоянную $\gamma$; это немного упростит уравнение.

Мы уже проделывали такой фокус, когда заменяли $k$ на $m\omega_0^2$, чтобы упростить вычисления. Итак, наше уравнение имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F, \tag{23.6}$$

или, если положить $c=m\gamma$ и $k=m\omega_0^2$ и поделить обе части на $m$,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F}{m}. \tag{23.6a}$$

Это самая удобная форма уравнения. Если $\gamma$ очень мало, то мало и трение, и, наоборот, большие значения $\gamma$ соответствуют громадному трению. Как решать это новое линейное уравнение? Предположим, что внешняя сила равна $F_0\cos(\omega t+\Delta)$; можно было бы подставить это выражение в (23.6а) и попытаться решить полученное уравнение, но мы применим наш новый метод. Представим $F$ как действительную часть $\hat{F}\exp(i\omega t)$, а $x$ — как действительную часть $\hat{x}\exp(i\omega t)$ и подставим эти комплексные числа в (23.6а). Собственно говоря, и подставлять-то нечего; внимательно посмотрев на (23.6а), вы тут же скажете, что оно превратится в

$$e^{i\omega t}\,[(i\omega)^2\hat{x}+\gamma(i\omega)\,\hat{x}+\omega_0^2\hat{x}]=\frac{\hat{F}}{m}e^{i\omega t}. \tag{23.7}$$

[Если бы мы попытались решить (23.6а) старым прямолинейным способом, то оценили бы по достоинству магический «комплексный» метод.] Поделив обе части уравнения на $\exp(i\omega t)$, найдем отклик осциллятора $\hat{x}$ на силу $\hat{F}$.

$$\hat{x}=\frac{\hat{F}}{m\left(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega\right)}. \tag{23.8}$$

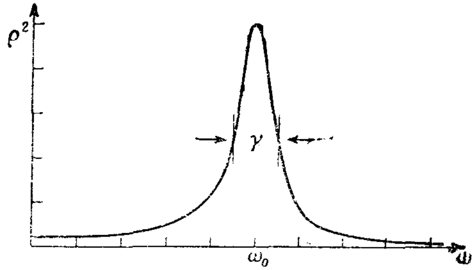
Итак, отклик $\hat{x}$ равен силе $\hat{F}$, умноженной на некоторый множитель. Этот множитель не имеет ни названия, ни какой-то своей собственной буквы, и мы будем обозначать его буквой $R$:

$$R=\frac{1}{m\left(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega\right)};$$

тогда

$$\hat{x}=\hat{F}R. \tag{23.9}$$

Этот множитель можно записать либо как $p+iq$, либо как $\rho\exp(i\theta)$. Запишем его в виде $\rho\exp(i\theta)$ и посмотрим, к чему это приведет. Внешняя сила — это действительная часть числа $F_0\exp(i\Delta)\exp(i\omega t)$, она равна $F_0\cos(\omega t+\Delta)$. Уравнение (23.9) говорит нам, что отклик $\hat{x}$ равен $\hat{F}R$; мы условились




*Фиг. 23.2. График зависимости $\rho^2$ от $\omega$.*

писать $R$ в виде $R=\rho\exp(i\theta)$; следовательно,

$$\hat{x}=R\hat{F}=\rho e^{i\theta}F_0e^{i\Delta}=\rho F_0e^{i(\theta+\Delta)}.$$

Вспомним (об этом уже говорилось), что физическое значение $x$, равное действительной части комплексного числа $\hat{x}$, равно действительной части $\rho F_0\exp[i(\theta+\Delta)]\exp(i\omega t)$. Но $\rho$ и $F_0$ — действительны, а действительная часть $\exp[i(\theta+\Delta+\omega t)]$ — это просто $\cos(\omega t+\Delta+\theta)$. Таким образом,

$$x=\rho F_0\cos(\omega t+\Delta+\theta). \tag{23.10}$$

Это значит, что амплитуда отклика равна амплитуде силы $F$, умноженной на коэффициент усиления $\rho$; мы нашли «размах» колебаний. Но это еще не все: видно, что $x$ колеблется не в такт с силой; фаза силы равна $\Delta$, а у $x$ она сдвинута на дополнительную величину $\theta$. Следовательно, $\rho$ и $\theta$ — это величина и фазовый сдвиг отклика.

Найдем теперь значение $\rho$. Квадрат модуля любого комплексного числа равен произведению этого числа на комплексно сопряженное, т. е.

$$\rho^2=\frac{1}{m^2\left(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega\right)\left(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega\right)}=$$

$$=\frac{1}{m^2\left[\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right]}. \tag{23.11}$$

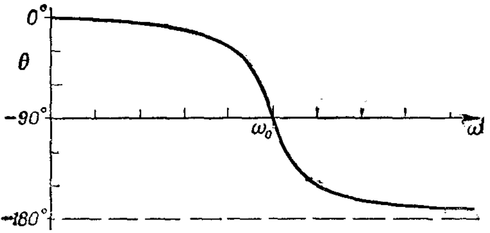
Можно найти и фазовый угол $\theta$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\rho e^{i\theta}}=\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}=m\left(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega\right);$$

значит,

$$\operatorname{tg}\theta=-\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{23.12}$$

Знак минус возник оттого, что $\operatorname{tg}(-\theta)=-\operatorname{tg}\theta$. Угол $\theta$ отрицателен при всех значениях $\omega$, т. е. смещение $x$ отстает по фазе от силы $F$.




*Фиг. 23.3. График зависимости* $\theta$ *от* $\omega$.

На фиг. 23.2 показано, как изменяется $\rho^2$ при изменении частоты ($\rho^2$ для физика интереснее, чем $\rho$, потому что $\rho^2$ пропорционально квадрату амплитуды, а значит, и той *энергии*, которую передает осциллятору внешняя сила). Очевидно, что если $\gamma$ мало, то основной член в (23.11) — это $1/(\omega_0^2-\omega^2)^2$, и отклик стремится к бесконечности, если $\omega$ приближается к $\omega_0$. Но эта «бесконечность» — не настоящая бесконечность, потому что даже если $\omega=\omega_0$, то все еще остается слагаемое $1/\gamma^2\omega^2$. Зависимость сдвига фазы от частоты изображена на фиг. 23.3.

Иногда приходится иметь дело с формулой, немного отличающейся от (23.8); она тоже называется «резонансной» и, несмотря на некоторое отличие от (23.8), описывает те же самые явления. Дело в том, что если значение $\gamma$ очень мало, то наиболее интересная область резонансной кривой лежит около частоты $\omega=\omega_0$, а здесь при малых $\gamma$ формулу (23.8) с большой степенью точности можно заменить приближенной формулой. Поскольку $\omega_0^2-\omega^2=(\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega)$, то для $\omega$, очень близких к $\omega_0$, разность квадратов почти равна $2\omega_0(\omega_0-\omega)$, а $\gamma\omega$ можно заменить на $\gamma\omega_0$. Значит, $\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega\approx 2\omega_0(\omega_0-\omega+i\gamma/2)$ и

$$\hat{x}\approx\frac{\hat{F}}{2m\omega_0(\omega_0-\omega+i\gamma/2)},\quad \text{если } \gamma\ll\omega_0 \text{ и } \omega\approx\omega_0. \qquad (23.13)$$

Легко найти и $\rho^2$:

$$\rho^2\approx\frac{1}{4m^2\omega_0^2\,[(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2/4]}.$$

А теперь решите сами такую задачу: с увеличением частоты значение $\rho^2$ сначала растет, достигает при $\omega_0$ максимума, а потом снова убывает. На каком расстоянии от $\omega_0$ расположены частоты, которым соответствуют значения $\rho^2$, вдвое меньшие максимального? Покажите, что при очень малом $\gamma$ эти точки отстоят друг от друга на расстояние $\Delta\omega=\gamma$. Это значит, что резонанс делается более острым по мере того, как влияние трения становится все слабее и слабее.

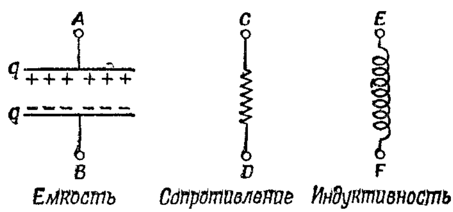
Другой мерой ширины резонанса может служить «добротность» $Q=\omega_0/\gamma$ (чем у́же резонанс, тем больше $Q$); если $Q=1000$, то по шкале частот ширина резонансной кривой равна всего 0,001. Резонансной кривой на фиг. 23.2 соответствует $Q=5$.

Явление резонанса важно потому, что оно проявляется довольно часто; описанию некоторых видов этих проявлений мы посвятим остаток главы.

## § 3. *Электрический резонанс*

Простейшие и самые широкие технические применения резонанс нашел в электричестве. Имеется довольно много устройств, из которых собираются электрические цепи. Их часто называют *пассивными элементами цепи*, и бывают они трех типов, хотя в каждый элемент одного типа всегда примешано чуточку элементов других типов. Прежде чем подробно описать эти элементы, заметим, что наше представление о механическом осцилляторе как о массе, подвешенной к концу пружины, всего лишь приближение. В «массе» сосредоточена вовсе не вся масса системы: пружина тоже обладает какой-то массой, пружина тоже инерционна. Точно так же «пружина» не состоит из одной пружины, масса тоже немного упруга, а не *абсолютно* тверда, как это может показаться. Подпрыгивая вверх и вниз, она слегка изгибается под толчками пружины. Так же обстоит дело и в электричестве. Расположить все предметы по «элементам цепи» с чистыми, идеальными характеристиками можно только приближенно. Так как у нас нет времени обсуждать пределы таких приближений, мы просто предположим, что они допустимы.

Итак, о трех элементах цепи. Первый называется *емкостью* (фиг. 23.4); в качестве примера емкости могут служить две металлические пластинки, разделенные тонким слоем диэлектрика. Если пластинки зарядить, то между ними возникает разность потенциалов. Та же самая разность потенциалов будет между точками $A$ и $B$, потому что при любой дополнительной разности потенциалов вдоль соединительных проводов заряды стекут по проводам. Таким образом, заданной разности потенциалов $V$ между пластинками соответствуют определенные заряды $+q$ и $-q$ на каждой пластинке. Между пластинками существует некое электрическое поле; мы даже вывели соот-




*Фиг. 23.4. Три пассивных элемента цепи.*

ветствующую формулу для него (см. гл. 13 и 14)

$$V=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}=\frac{qd}{\varepsilon_0 A}, \tag{23.14}$$

де $d$ — расстояние между пластинками, $A$ — площадь пластинок. Заметим, что разность потенциалов линейно зависит от заряда. Если построить емкость не из параллельных пластин, а придать отдельным электродам какую-нибудь другую форму, разность потенциалов будет по-прежнему пропорциональна заряду, но постоянную пропорциональности не так-то легко будет рассчитать. Однако надо знать только одно: разность потенциалов между концами емкости *пропорциональна заряду* $V=q/C$; множитель пропорциональности равен $1/C$ ($C$ и есть *емкость* объекта).

Второй элемент цепи называется *сопротивлением*; этот элемент оказывает сопротивление текущему через него электрическому току. Оказывается, что все металлические провода, а также многие другие материалы сопротивляются току одинаково; если к концам куска такого материала приложить разность потенциалов, то электрический ток в куске $I=dq/dt$ будет пропорционален приложенной разности потенциалов

$$V=RI=R\frac{dq}{dt}. \tag{23.15}$$

Коэффициент пропорциональности называют *сопротивлением* $R$. Соотношение между током и разностью потенциалов вам, наверное, уже известно. Это закон Ома.

Если представлять себе заряд, сосредоточенный в емкости, как нечто аналогичное смещению механической системы $x$, то электрический ток $dq/dt$ аналогичен скорости, сопротивление $R$ аналогично коэффициенту сопротивления $\gamma$, а $1/C$ аналогично постоянной упругости пружины $k$. Самое интересное во всем этом, что существует элемент цепи, аналогичный *массе*! Это спираль, порождающая внутри себя магнитное поле, когда через нее проходит ток. *Изменение* магнитного поля порождает на концах спирали разность потенциалов, пропорциональную $dI/dt$. (Это свойство спирали используется в трансформаторах.) Магнитное поле пропорционально току, а наведенная разность потенциалов (так ее называют) пропорциональна скорости изменения тока

$$V=L\frac{dI}{dt}=L\frac{d^2q}{dt^2}. \tag{23.16}$$

Коэффициент $L$ — это коэффициент *самоиндукции*; он является электрическим аналогом массы.

Предположим, мы собираем цепь из трех последовательно соединенных элементов (фиг. 23.5); приложенная между точками *1* и *2* разность потенциалов заставит заряды двигаться по цепи, тогда на концах каждого элемента цепи тоже возникает разность потенциалов: на концах индуктивности $V_L=L(d^2q/dt^2)$, на сопротивлении $V_R=R(dq/dt)$, а на емкости $V_C=q/C$. Сумма этих напряжений дает нам полное напряжение $V$:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V(t). \qquad (23.17)$$

Мы видим, что это уравнение в точности совпадает с механическим уравнением (23.6); будем решать его точно таким же способом. Предположим, что $V(t)$ осциллирует; для этого надо соединить цепь с генератором синусоидальных колебаний. Тогда можно представить $V(t)$ как комплексное число $\hat{V}$, помня, что для определения настоящего напряжения $V(t)$ это число надо еще умножить на $\exp(i\omega t)$ и взять действительную часть. Аналогично можно подойти и к заряду $q$, а поэтому напишем уравнение, в точности повторяющее (23.8): вторая производная $\hat{q}$ — это $(i\omega)^2\hat{q}$, а первая — это $(i\omega)q$. Уравнение (23.17) перейдет в

$$\left[L(i\omega)^2+R(i\omega)+\frac{1}{C}\right]\hat{q}=\hat{V}, \quad \text{или} \quad \hat{q}=\frac{\hat{V}}{L(i\omega)^2+R(i\omega)+\frac{1}{C}};$$

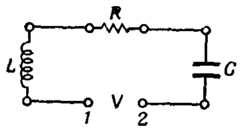
последнее равенство запишем в виде

$$\hat{q}=\frac{\hat{V}}{L(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}, \qquad (23.18)$$

где $\omega_0^2=1/LC$, а $\gamma=R/L$. Мы получили тот же знаменатель, что и в механической задаче, со всеми его резонансными свойствами! В табл. 23.1 приведен перечень аналогий между электрическими и механическими величинами.

*аблица 23.1* • МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

| Общие характеристики | Величины | |
|---|---|---|
| | механические | электрические |
| Независимая переменная | Время ($t$) | Время ($t$) |
| Зависимая переменная | Положение ($x$) | Заряд ($q$) |
| Инерция | Масса ($m$) | Индуктивность ($L$) |
| Сопротивление | Коэффициент трения ($c=\gamma m$) | Сопротивление ($R=\gamma L$) |
| Жесткость | Жесткость ($k$) | (Емкость)$^{-1}$ ($1/C$) |
| Резонансная частота | $\omega_0^2=k/m$ | $\omega_0^2=1/LC$ |
| Период | $t_0=2\pi\sqrt{m/k}$ | $t_0=2\pi\sqrt{LC}$ |
| Добротность | $Q=\omega_0/\gamma$ | $Q=\omega_0 L/R$ |



*Фиг. 23.5. Электрический колебательный контур, состоящий из сопротивления, индуктивности и емкости.*

Еще одно чисто техническое замечание. В книгах по электричеству используют другие обозначения. (Очень часто в книгах на одну и ту же тему, написанных людьми разных специальностей, используются различные обозначения.) Во-первых, для обозначения $\sqrt{-1}$ используют букву $j$, а не $i$ (через $i$ должен обозначаться ток!). Во-вторых, инженеры предпочитают соотношение между $\hat{V}$ и $\hat{I}$, а не между $\hat{V}$ и $\hat{q}$. Они так больше привыкли. Поскольку $\hat{I}=d\hat{q}/dt=i\omega\hat{q}$, то вместо $\hat{q}$ можно подставить $\hat{I}/i\omega$, и тогда

$$\hat{V}=\left(i\omega L+R+\frac{1}{i\omega C}\right)\hat{I}=\hat{Z}\hat{I}. \qquad (23.19)$$

Можно слегка изменить исходное дифференциальное уравнение (23.17), чтобы оно выглядело более привычно. В книгах часто попадается такое соотношение:

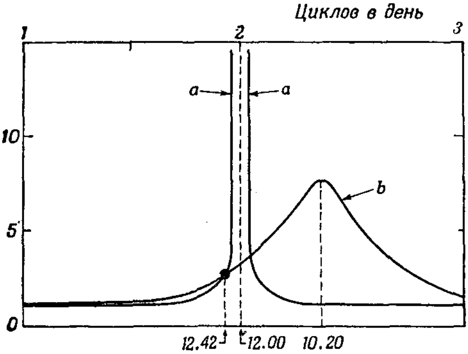
$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int^{t} I\,dt=V(t). \qquad (23.20)$$

Во всяком случае, мы находим, что соотношение (23.19) между напряжением $\hat{V}$ и током $\hat{I}$ то же самое, что и (23.18), и отличается только тем, что последнее делится на $i\omega$. Комплексное число $R+i\omega L+1/i\omega C$ инженеры-электрики часто называют особым именем: *комплексный импеданс* $\hat{Z}$. Введение новой буквы позволяет просто записать соотношение между током и сопротивлением в виде $\hat{V}=\hat{Z}\hat{I}$. Объясняется это пристрастие инженеров тем, что в юности они изучали только цепи постоянного тока и знали только сопротивления и закон Ома: $V=RI$. Теперь они более образованы и имеют уже цепи переменного тока, но хотят, чтобы уравнения были те же самые. Вот они и пишут $\hat{V}=\hat{Z}\hat{I}$, и единственная разница в том, что теперь сопротивление заменено более сложной вещью: комплексным числом. Они настаивают на том, что они не могут использовать принятого во всем мире обозначения для мнимой единицы и пишут $j$; поистине удивительно, что они не требуют, чтобы вместо буквы $Z$ писали букву $R$! (Много волнений доставляют им разговоры о плотности тока; ее они тоже обозначают буквой $j$. Сложности науки во многом связаны с трудностями в обозначениях, единицах и прочих выдумках человека, о чем сама природа и не подозревает.)

## § 4. *Резонанс в природе*

Хотя мы детально разобрали вопрос о резонансе в электрических цепях, можно приводить пример за примером из любых наук и отыскивать в них резонансные кривые. В природе очень часто что-нибудь «колеблется» и так же часто наступает резонанс. Об этом уже говорилось в одной из предыдущих глав; приведем теперь некоторые примеры. Зайдите в библиотеку, возьмите с полки несколько книг, полистайте их; вы обнаружите кривые, похожие на кривые фиг. 23.2, и уравнения, похожие на уравнения, приведенные в этой главе. Много ли найдется таких книг? Для убедительности возьмем всего пять-шесть книг, и они обеспечат вас полным набором примеров резонансов.

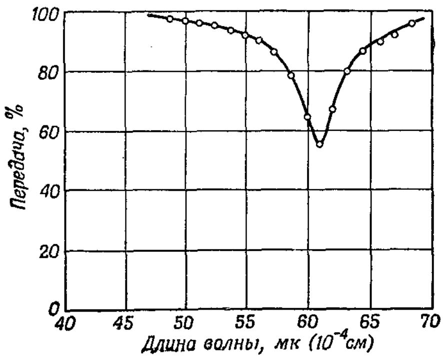
Первые два относятся к механике. Самый первый грандиозен — речь идет о колебаниях атмосферы. Если бы атмосфера, которая, по нашим представлениям, шарообразна и обволакивает нашу Землю равномерно со всех сторон, под влиянием Луны вытянулась бы в одну сторону, то атмосфера приняла бы форму вытянутой дыни. Если предоставить атмосферу, имеющую форму дыни, самой себе, то возникнут колебания. Так получается осциллятор. Этими колебаниями *управляет* Луна, которая вращается вокруг Земли. Чтобы понять, как это происходит, представим себе, что Луна стоит неподвижно на каком-то расстоянии от Земли, а Земля вращается вокруг своей оси. Поэтому проекция силы, скажем, на ось $x$ имеет периодическую составляющую. Отклик атмосферы на приливно-отливные толчки Луны будет обычным откликом осциллятора на периодическую силу. Кривая $b$ на фиг. 23.6 изображает ожидаемый отклик атмосферы (кривая $a$ приведена на заимствованном нами рисунке из книги Мунка и Мак-Дональда по другому поводу и нас не касается). Может показаться странным, что удалось начертить эту кривую: ведь Земля вращается с постоянной скоростью, и поэтому можно получить только одну точку на кривой — точку, приблизительно соответствующую периоду 12 — 12,7 *час* (приливы бывают дважды в сутки) плюс еще немного, потому что надо учесть движение Луны. Но, измеряя *величину* атмосферных приливов и время их задержки — *фазу*, можно найти обе характеристики отклика $\rho$ и $\theta$. По ним можно вычислить $\omega_0$ и $\gamma$, а затем начертить уже всю кривую! Вот пример чистой науки. Из двух чисел получают два числа, по этим двум числам чертят очень красивую кривую, которая, конечно, проходит через ту же точку, по которой построена кривая! Кривая эта, конечно, бесполезна, *пока нельзя измерить еще чего-нибудь*, а в геофизике сделать это зачастую очень трудно. В нашем случае тем, что нужно было бы еще измерить, могут служить колебания атмосферы с собственной частотой $\omega_0$; необходимо




*Фиг. 23.6. Влияние внешнего возбуждения на атмосферу.*

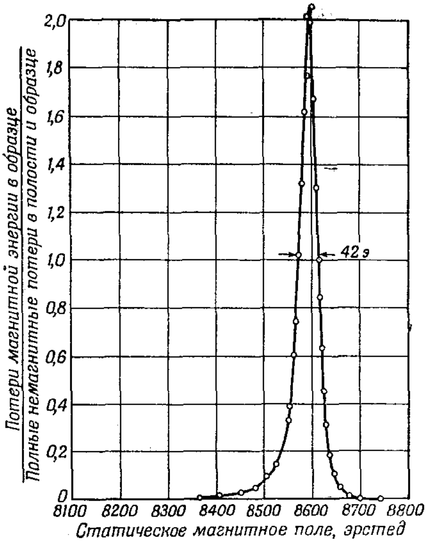
какое-то возмущение, которое бы заставило атмосферу колебаться с частотой $\omega_0$. Такой случай однажды представился. В 1883 г. произошло извержение вулкана Кракатау, в результате которого в атмосферу взлетело пол-острова. Взрыв был такой, что удалось измерить период колебаний атмосферы. Он оказался равным 10½ *час*. Собственная частота $\omega_0$, полученная из кривой фиг. 23.6, была равна 10 *час* 20 *мин*; таким образом было получено по крайней мере хоть одно подтверждение правильности наших представлений об атмосферных приливах.

Во втором примере речь пойдет о совсем малых колебаниях. Мы рассмотрим кристалл хлористого натрия, который состоит из расположенных друг возле друга ионов натрия и хлора (мы об этом говорили ранее). Ионы эти несут электрический заряд: первый — положительный, второй — отрицательный. Посмотрим, какие интересные колебания могут возникнуть в кристалле. Если отодвинуть все положительные заряды вправо, а отрицательные — влево и предоставить их самим себе, то они начнут колебаться взад и вперед: решетка ионов натрия против решетки ионов хлора. Но как растащить эти заряды? Очень просто: если внести кристалл в электрическое поле, оно



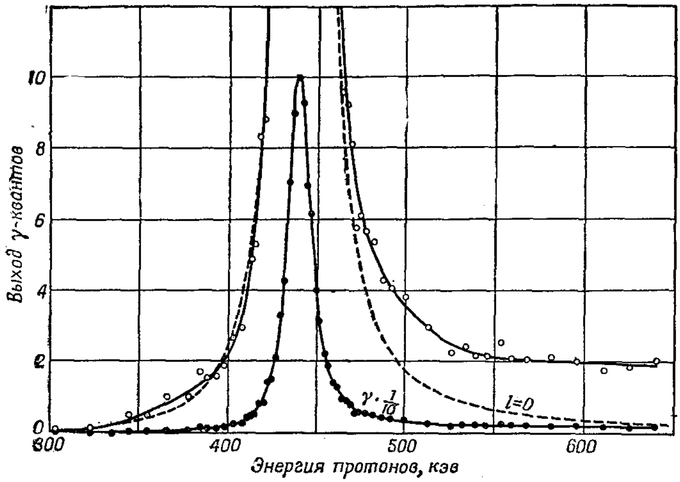

*Фиг. 23.7. Прохождение инфракрасного излучения через тонкую (0,17 мк) пленку поваренной соли.*

*Фиг. 23.8. Зависимость потери магнитной энергии в парамагнитном органическом соединении от напряженности приложенного поля.*




отодвинет положительные заряды в одну сторону, а отрицательные — в другую! Значит, имея внешнее электрическое поле, можно, пожалуй, вызвать колебания кристалла. Но для этого частота электрического поля должна быть столь большой, что она соответствует *инфракрасному излучению*! Таким образом попытаемся построить резонансную кривую, измеряя поглощение инфракрасного света хлористым натрием. Такая кривая изображена на фиг. 23.7. По абсциссе отложена не частота, а длина волны, но это техническая деталь; между частотой и длиной волны существует строго определенное соотношение, так что мы все-таки имеем дело со шкалой частот, и одна из этих частот— резонансная частота.

Ну, а что можно сказать о ширине резонансной кривой? Чем эта ширина определяется? Очень часто кривая выглядит гораздо шире, чем ей предписывается теоретическим значением $\gamma$ (эта ширина называется естественной шириной). Есть две причины уширения резонансной кривой. Мы наблюдаем колебания многих осцилляторов сразу, а их частоты могут немного отличаться. К этому приводят, например, натяжения в отдельных частях кристалла. Поэтому мы видим сразу много резонансных кривых, проходящих рядом. Они сливаются в одну кривую с большей шириной. Вторая причина очень проста — не всегда можно точно измерить частоту. Сколько со спектрометром ни возись, он всегда зарегистрирует не одну частоту, а целый спектр частот $\Delta\omega$. Поэтому может оказаться, что разрешающая сила спектрометра недостаточна для определения точной формы кривой. Так или иначе, но, глядя на фиг. 23.7, трудно сказать, что там за ширина — естественная или та, что соответствует неоднородностям кристалла или разрешающей силе спектрометра.




*Фиг. 23.9. Зависимость интенсивности γ-излучения лития от энергии налетающих протонов.*

*Пунктирная кривая — теоретическая, вычисленная для протонов с моментом количества движения $l=0$.*

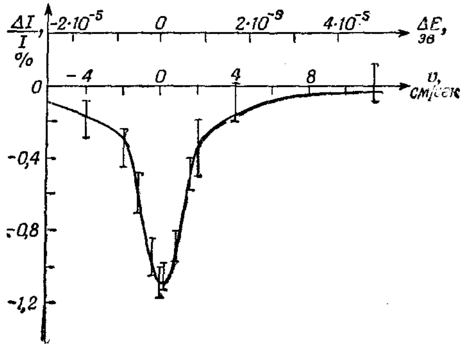
Еще один пример — более хитрый. Посмотрим, как качается магнит. Если поместить магнит в постоянное магнитное поле, то северный полюс захочет повернуться в одну сторону, а южный — в другую, и если магнит может поворачиваться вокруг оси, он будет колебаться около положения равновесия, как это делает стрелка компаса. Однако магниты, о которых пойдет речь,— это *атомы*. Они обладают моментом количества движения, и вращение порождает не простое движение в направлении поля, а *прецессию*. Посмотрим со стороны на какую-нибудь составляющую «шатаний», а потом возмутим колебания или попробуем управлять ими, чтобы затем измерить поглощение.

На фиг. 23.8 изображена кривая поглощения — типично резонансная кривая. Только получена она немного не так, как предыдущая. Частота горизонтального поля, управляющего колебаниями, все время остается постоянной, хотя, казалось бы, экспериментатор, чтобы получить кривую, должен менять частоту. Можно поступить и так, но технически легче оставить $\omega$ неизменной, а менять напряженность постоянного поля, что соответствует изменению $\omega_0$ в нашей формуле. Таким образом мы имеем дело с резонансной кривой для $\omega_0$. Тем не менее мы получаем резонанс с определенными $\omega_0$ и $\gamma$.

Пойдем дальше. Следующий наш пример связан с атомным ядром. Движение протонов и нейтронов в ядре — в некотором смысле колебательное движение. Убедиться в этом можно при помощи такого эксперимента: давайте обстреливать ядра лития протонами. Мы обнаружим, что в ядрах при этом будут происходить какие-то реакции, в результате которых возникает $\gamma$-излучение. Кривая, изображающая количество испущенного излучения, имеет очень острый, типично резонансный максимум. Это изображено на фиг. 23.9. Однако приглядитесь к рисунку повнимательнее: на горизонтальной шкале отложена не частота, как обычно, а *энергия*! Дело в том, что та величина, которую в классической физике мы привыкли считать энергией, в квантовой механике оказывается определенным образом связанной с частотой некоторой волны. Если в привычной нам крупномасштабной физике при анализе какого-нибудь явления приходится иметь дело с частотой, то в квантовомеханических явлениях, связанных с атомным веществом, аналогичные кривые будут зависеть от энергии. Кривая на фиг. 23.9 иллюстрирует эту связь. Размышляя над этой кривой, можно прийти к мысли, что частота и энергия имеют глубокую взаимосвязь; так оно и есть на самом деле.

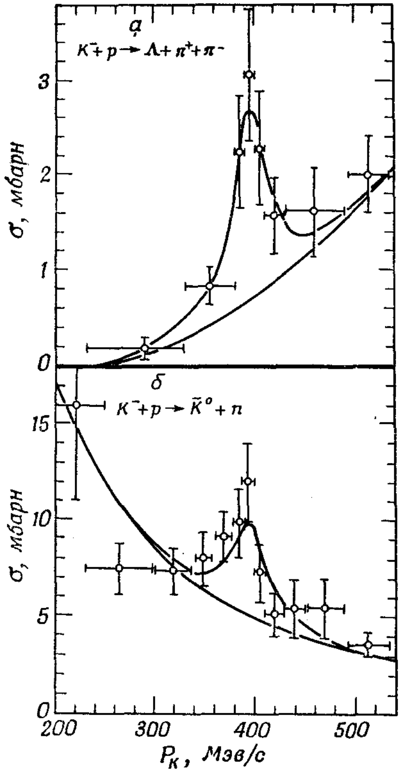
Вот еще одна резонансная кривая, полученная в результате опытов с атомными ядрами; она очень узкая, у́же всех предыдущих. На фиг. 23.10 величина $\omega_0$ соответствует энергии 10 000 *эв*, а ширина $\gamma$ равна приблизительно $10^{-5}$ *эв*; иначе говоря, $Q=10^{10}$! Построив такую кривую, экспериментатор измерил $Q$ самого добротного из ныне известных осцилляторов. Это проделал Р. Мёссбауэр, получивший за свои работы Нобелевскую премию. На горизонтальной шкале отложена скорость, потому что для сдвига частоты использовался эффект Допплера, получающийся в результате относительного движения источника и поглотителя. Цифры дают некоторое представление о тонкости эксперимента — пришлось измерять скорости в несколько сантиметров в секунду! Если продолжить горизонтальную шкалу влево, то нулевую частоту мы найдем на расстоянии $10^{10}$ *см*! Страницы для этого, пожалуй, не хватит!

Наконец, возьмем какой-нибудь выпуск журнала Physical Review, скажем, за 1 января 1962 г. Найдется ли в нем резонан-




*Фиг. 23.10. Кривая поглощения $\gamma$-излучения, полученная Р. Мёссбауэром.*

5*




*Фиг. 23.11. Зависимость эффективных сечений реакций от величины момента количества движения.*

*а* — $K^- + p \rightarrow \Lambda + \pi^+ + \pi^-$;
*б* — $K^- + p \rightarrow K^0 + n$.

*Нижняя кривая описывает нерезонансный фон; верхняя кривая показывает, что на этот фон наложено резонансное сечение.*

сная кривая? Резонансные кривые имеются непременно в каждом выпуске этого журнала, и на фиг. 23.11 изображена одна из таких кривых. Это очень интересная кривая. Она соответствует резонансу в реакциях со странными частицами ($K^-$-мезоны и протоны). Резонанс был обнаружен при измерении количества частиц разных сортов, получающихся в результате реакции. Разным продуктам реакции соответствуют разные кривые, но в каждой из них при одной и той же энергии есть пики примерно одинаковых очертаний. Значит, при определенной энергии $K^-$-мезона существует резонанс. При столкновении $K^-$-мезонов и протонов, наверное, создаются благоприятные для резонанса условия, а может быть, даже новая частица. Сегодня мы еще не можем сказать, что такое эти выбросы в кривых — «частица» или просто резонанс. Очень *узкий* резонанс соответствует очень *точно отмеренному количеству энергии*; это бывает тогда, когда мы имеем дело с частицей. Когда резонансная кривая уширяется, то становится трудно сказать, с чем мы имеем дело — с частицей, которая живет очень мало, или просто с резонансом в реакции. В гл. 2 мы отнесли эти резонансы к частицам, но когда писалась та глава, об этом резонансе еще не было известно, поэтому нашу таблицу элементарных частиц можно дополнить!

*Глава* 24

# ПЕРЕХОДНЫЕ РЕШЕНИЯ



## *§ 1. Энергия осциллятора*

Хотя глава названа «Переходные решения», речь здесь все еще в основном идет об осцилляторе, на который действует внешняя сила. Мы еще ничего не говорили об *энергии* колебаний. Давайте займемся ею.

Чему равна кинетическая энергия осциллятора? Она пропорциональна квадрату скорости. Здесь мы затронули важный вопрос. Предположим, что мы изучаем свойства некоторой величины $A$; это может быть скорость или еще что-нибудь. Мы обратились к помощи комплексных чисел: $A=\hat{A}\exp(i\omega t)$, но в физике праведна и чтима только *действительная* часть комплексного числа. Поэтому если вам для чего-нибудь понадобится получить *квадрат* $A$, то не возводите в квадрат комплексное число, чтобы потом выделить его действительную часть.

Действительная часть квадрата комплексного числа не равна квадрату действительной части, она содержит еще и *мнимую* часть первоначального числа. Таким образом, если мы захотим найти энергию и посмотреть на ее превращения, нам придется на время забыть о комплексных числах.

Итак, истинно физическая величина $A$ — это действительная часть $A_0\exp[i(\omega t+\Delta)]$, т. е. $A=A_0\cos(\omega t+\Delta)$, а комплексное число $\hat{A}$ — это $A_0\exp(i\Delta)$. Квадрат этой физической величины равен $A_0^2\cos^2(\omega t+\Delta)$. Он изменяется от нуля до максимума, как это предписывается квадратом косинуса. Максимальное значение квадрата косинуса равно 1, минимальное равно 0, а его среднее значение — это $1/2$.

Зачастую нас совсем не интересует энергия в каждый данный момент колебания; во многих случаях достаточно знать лишь среднюю величину $A^2$ (*среднее значение* квадрата $A$ в течение времени, много большего, чем период колебаний). При этих условиях можно усреднить квадрат косинуса и доказать теорему: если $A$ представляется комплексным числом, то среднее значение $A^2$ равно $\frac{1}{2}A_0^2$. Здесь $A_0^2$ — это квадрат модуля комплексного числа $\hat{A}$. (Квадрат модуля $\hat{A}$ записывают по-разному: $|\hat{A}|^2$ или $\hat{A}\hat{A}^*$ — в виде произведения числа $\hat{A}$ на комплексно сопряженное.) Эта теорема пригодится нам еще много раз.

Итак, речь идет об энергии осциллятора, на который действует внешняя сила. Движение такого осциллятора описывается уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\gamma\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2x=F(t). \tag{24.1}$$

Мы, конечно, предполагаем, что $F(t)$ пропорциональна $\cos\omega t$. Выясним теперь, много ли приходится этой силе работать. Работа, произведенная силой в 1 *сек*, т. е. мощность, равна произведению силы на скорость. [Мы знаем, что работа, совершаемая за время $dt$, равна $Fdx$, а мощность равна $F(dx/dt)$.] Значит,

$$P=F\frac{dx}{dt}=m\left[\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\omega_0^2x\frac{dx}{dt}\right]+\gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{24.2}$$

Как легко проверить простым дифференцированием, первые два члена можно переписать в виде $(d/dt)[\frac{1}{2}m(dx/dt)^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2]$. Выражение в квадратных скобках — производная по времени суммы двух членов. Это понятно; ведь первый член суммы — кинетическая энергия движения, а второй — потенциальная энергия пружины. Назовем эту величину *запасенной энергией*, т. е. энергией, накопленной при колебаниях. Давайте усредним мощность по многим циклам, когда сила включена уже давно и осциллятор изрядно наколебался. Если пробег длится долго, запасенная энергия не изменяется; производная по времени дает эффект, в среднем равный нулю. Иными словами, если усреднить затраченную за долгое время мощность, то *вся энергия поглотится из-за сопротивления, описываемого членом* $\gamma m(dx/dt)^2$. Определенную часть энергии осциллятор, конечно, запасет, но если усреднять по многим циклам, то количество ее не будет меняться со временем. Таким образом, средняя мощность $\langle P\rangle$ равна

$$\langle P\rangle=\left\langle\gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\rangle. \tag{24.3}$$

Применяя метод комплексных чисел и нашу теорему о том, что $\langle A^2\rangle=\frac{1}{2}A_0^2$, легко найти эту среднюю мощность. Так как

$x=\hat{x}\exp(i\omega t)$, то $dx/dt=i\omega\hat{x}\exp(i\omega t)$. Следовательно, средняя мощность равна

$$\langle P\rangle=\frac{1}{2}\gamma m\omega^2 x_0^2\ . \tag{24.4}$$

Если перейти к электрическим цепям, то $dx/dt$ надо заменить на ток $I$ ($I$ — это $dq/dt$, где $q$ соответствует $x$), а $m\gamma$ — на сопротивление $R$. Значит, скорость потери энергии (мощности силы) в электрической цепи равна произведению сопротивления на средний квадрат силы тока

$$\langle P\rangle=R\,\langle I^2\rangle=R\,\frac{1}{2}I_0^2\ . \tag{24.5}$$

Энергия, естественно, переходит в тепло, выделяемое сопротивлением; это так называемые тепловые потери, или джоулево тепло.

Интересно разобраться также в том, много ли энергии может *накопить* осциллятор. Не путайте этого вопроса с вопросом о средней мощности, ибо хотя выделяемая силой мощность сначала действительно накапливается осциллятором, потом на его долю остается лишь то, что не поглотило трение. В каждый момент осциллятор обладает вполне определенной энергией, поэтому можно вычислить среднюю запасенную энергию $\langle E\rangle$. Мы уже вычислили среднее значение $(dx/dt)^2$, так что

$$\begin{aligned}\langle E\rangle&=\frac{1}{2}m\left\langle\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\rangle+\frac{1}{2}m\omega_0^2\langle x^2\rangle\ ,\\&=\frac{1}{2}m\,(\omega^2+\omega_0^2)\,\frac{1}{2}\,x_0^2.\end{aligned} \tag{24.6}$$

Если осциллятор достаточно добротен и частота $\omega$ близка к $\omega_0$, то $|\hat{x}|$ — большая величина, запасенная энергия очень велика и можно накопить очень много энергии за счет небольшой силы. Сила производит большую работу, заставляя осциллятор раскачиваться, но после того, как установилось равновесие, вся сила уходит на борьбу с трением. Осциллятор располагает большой энергией, если трение очень мало, и потери энергии невелики даже при очень большом размахе колебаний. Добротность осциллятора можно измерять величиной запасенной энергии по сравнению с работой, совершенной силой за период колебания.

Что это за величина — накопленная энергия по сравнению с работой силы за цикл? Ее обозначили буквой $Q$. Величина $Q$ — это умноженное на $2\pi$ отношение средней запасенной энергии к работе силы за один цикл (можно рассматривать работу не за цикл, а за *радиан*, тогда в определении $Q$ исчезнет $2\pi$)

$$Q=2\pi\frac{{}^1/{}_2 m\,(\omega^2+\omega_0^2)\,\langle x^2\rangle}{\gamma m\omega^2\langle x^2\rangle\,\dfrac{2\pi}{\omega}}=\frac{\omega^2+\omega_0^2}{2\gamma\omega}\ . \tag{24.7}$$

Пока $Q$ не слишком велика — это плохая характеристика системы, если же $Q$ довольно большая величина, то можно сказать, что это мера добротности осциллятора. Многие пытались дать самое простое и полезное определение $Q$; разные определения немногим отличаются друг от друга, но если $Q$ очень велика, то все они согласуются друг с другом. При самом общем определении по формуле (24.7) $Q$ зависит от $\omega$. Если мы имеем дело с хорошим осциллятором вблизи резонансной частоты, то (24.7) можно упростить, положив $\omega=\omega_0$, тогда $Q=\omega_0/\gamma$; такое определение $Q$ было дано в предыдущей главе.

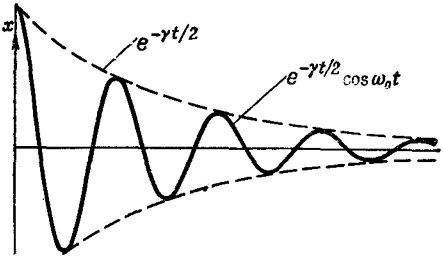
Что такое $Q$ для электрической цепи? Чтобы найти эту величину, надо заменить $m$ на $L$, $m\gamma$ на $R$ и $m\omega_0^2$ на $1/C$ (см. табл. 23.1). Тогда $Q$ в точке резонанса равна $L\omega/R$, где $\omega$ — резонансная частота. В цепи с большой $Q$ запасенная цепью энергия велика по сравнению с работой за один цикл, производимой поддерживающей колебания в цепи машиной.

## § 2. *Затухающие колебания*

Вернемся к основной теме — переходным решениям. *Переходными решениями* называются решения дифференциального уравнения, соответствующие ситуации, когда внешняя сила не действует, но система тем не менее не находится в покое. (Конечно, лучше всего решать задачу, когда сила не действует, а система покоится, покоится — ну и пусть покоится!) Соответствующие переходным решениям колебания можно вызвать так: заставить силу поработать, а потом выключить ее. Что тогда случится с осциллятором? Сначала подумаем, как будет вести себя система с очень большой $Q$. Если сила действовала долго, то запасенная энергия была постоянной и работа тратилась лишь для того, чтобы поддержать ее. Предположим теперь, что мы выключили силу, тогда трению, которое раньше поглощало энергию поставщика, питаться больше нечем — кормильца-то *нет*. И трение начинает пожирать запасенную осциллятором энергию. Пусть добротность системы $Q/2\pi=1000$. Это значит, что работа, произведенная за цикл, равна 1/1000 запасенной энергии. Пожалуй, разумно предположить, что при не поддерживаемых внешней силой колебаниях за каждый цикл будет теряться одна тысячная часть имеющейся к началу цикла энергии. Будем считать, что при больших $Q$ изменение энергии описывается угаданным нами приближенным уравнением (мы еще вернемся к этому уравнению и сделаем его совсем верным!)

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{\omega E}{Q}. \qquad (24.8)$$

Уравнение это приближенное, потому что оно справедливо только для больших $Q$. За каждый радиан система теряет $1/Q$




*Фиг. 24.1. Затухающие колебания.*

часть запасенной энергии $E$. Значит, за промежуток времени $dt$ энергия уменьшится в $\omega dt/Q$ раз (частота появляется при переводе радианов в настоящие секунды). А какая это частота? Предположим, что система устроена очень жестко, поэтому даже при действии силы она сколько-нибудь заметно колеблется только со своей собственной частотой. Поэтому будем считать, что $\omega$ — это резонансная частота $\omega_0$. Таким образом, из уравнения (24.8) следует, что запасенная энергия меняется следующим образом:

$$E = E_0 e^{-\omega_0 t/Q} = E_0 e^{-\gamma t}. \tag{24.9}$$

Теперь нам известно значение *энергии* в любой момент. Какой будет приближенная формула, определяющая амплитуду колебаний как функцию времени? Той же самой? Нет! Потенциальная энергия пружины изменяется как *квадрат смещения*, кинетическая энергия — как *квадрат скорости;* это приводит к тому, что полная энергия пропорциональна квадрату смещения. Таким образом, смещение (амплитуда колебаний) будет уменьшаться с половинной скоростью. Иначе говоря, мы ожидаем, что решение в случае затухающего переходного движения будет выглядеть как колебание с частотой, близкой к резонансной частоте $\omega_0$; амплитуда этого колебания будет уменьшаться как $\exp(-\gamma t/2)$

$$x = A_0 e^{-\gamma t/2} \cos \omega_0 t. \tag{24.10}$$

Эта формула и фиг. 24.1 дают представление о том, чего следует ожидать, а теперь приступим к *точному* анализу движения, т. е. к решению дифференциального уравнения движения.

Как же решить уравнение (24.1), если выкинуть из него внешнюю силу? Будучи физиками, мы интересуемся не столько *методом*, сколько самим *решением*. Поскольку мы люди уже опытные, попытаемся представить решение в виде экспоненциальной кривой, $x = A\exp(i\alpha t)$. (Почему мы так поступили? Оттого, что экспоненту легче всего дифференцировать!) Подставим это выражение в (24.1), помня о том, что каждое дифференцирование

$x$ по времени сводится к умножению на $i\alpha$ [напомним, что $F(t)=0$]. Сделать это очень легко, и наше уравнение примет вид

$$(-\alpha^2+i\gamma\alpha+\omega_0^2)Ae^{i\alpha t}=0. \qquad (24.11)$$

Левая часть равенства должна быть равна нулю *все время*, но это возможно только в двух случаях: а) $A=0$, однако это даже и не решение: ведь тогда все покоится, или б)

$$-\alpha^2+i\alpha\gamma+\omega_0^2=0. \qquad (24.12)$$

Если мы сможем решить это уравнение и найти $\alpha$, то мы найдем и решение, амплитуда которого $A$ не обязательно равна нулю!

$$\alpha=\frac{i\gamma}{2}\pm\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}. \qquad (24.13)$$

Чтобы не думать о том, как извлечь квадратный корень, предположим, что $\gamma$ меньше $\omega_0$, и поэтому $\omega_0^2-\gamma^2/4$ — положительная величина. Беспокоит другое: почему мы получили *два* решения! Им соответствуют

$$\alpha_1=\frac{i\gamma}{2}+\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}=\frac{i\gamma}{2}+\omega_\gamma \qquad (24.14)$$

и

$$\alpha_2=\frac{i\gamma}{2}-\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}=\frac{i\gamma}{2}-\omega_\gamma. \qquad (24.15)$$

Займемся пока первым решением, предположив, что мы ничего не знаем о том, что квадратный корень принимает два значения. В этом случае смещение $x$ равно $x_1=A\exp(i\alpha_1 t)$, где $A$ — произвольная постоянная. Чтобы сократить запись, введем специальное обозначение для входящего в $\alpha_1$ квадратного корня: $\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2/4}=\omega_\gamma$.

Так, $i\alpha_1=-\gamma/2+i\omega_\gamma$ и $x=A\exp[-(\gamma/2-i\omega_\gamma)t]$, или, если воспользоваться замечательным свойством экспоненты,

$$x_1=Ae^{-\gamma t/2}e^{i\omega_\gamma t}. \qquad (24.16)$$

Итак, система осциллирует с частотой $\omega_\gamma$, которая *в точности* не равна частоте $\omega_0$, но практически близка к ней, если система достаточно добротна. Кроме того, амплитуда колебаний экспоненциально затухает! Если взять действительную часть (24.16), то мы получим

$$x_1=Ae^{-\gamma t/2}\cos\omega_\gamma t. \qquad (24.17)$$

Это решение очень напоминает угаданное нами решение (24.10), вот только частота немного другая, $\omega_\gamma$. Но это лишь небольшая поправка, значит, первоначальная идея была правильной.

И все-таки *не все* благополучно! А не благополучно то, что *существует второе решение.*

Этому решению соответствует $\alpha_2$, и оно отличается от первого лишь знаком $\omega_\gamma$

$$x_2 = Be^{-\gamma t/2}e^{-i\omega_\gamma t}. \tag{24.18}$$

Что все это значит? Скоро мы докажем, что если $x_1$ и $x_2$— возможные решения (24.1) при $F(t)=0$, то $x_1+x_2$— тоже решение этого уравнения! Таким образом, общее решение имеет вид

$$x = e^{-\gamma t/2}\left(Ae^{i\omega_\gamma t} + Be^{-i\omega_\gamma t}\right). \tag{24.19}$$

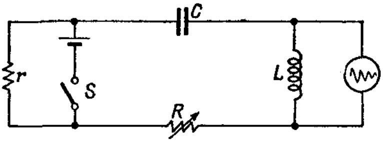
Теперь можно спросить: «А, собственно, зачем нам беспокоить себя еще одним решением, если нас вполне устраивало первое? К чему эти дополнительные решения, если мы все равно должны взять только действительную часть?» Мы знаем, что нужно взять действительную часть, но откуда *математика* знает, что мы хотим взять действительную часть? Когда у нас была внешняя сила $F(t)$, то мы ее дополнили *искусственной* силой, и она каким-то образом управляла *мнимой* частью уравнения. Но когда мы положили $F(t)\equiv 0$, то соглашение о том, что, каково бы ни было $x$, нужно взять только его действительную часть, стало нашим личным делом, и математическое уравнение об этом ничего не знало. В мире физики *есть* только действительные решения, но решение, которому мы так радовались, *комплексно*. Уравнению не известно, что мы делаем совершенно неожиданный шаг и отбираем только действительную часть, и оно предлагает нам еще, так сказать, комплексно сопряженное решение, чтобы, сложив оба решения, мы получили *настоящее действительное решение*; вот для чего мы взяли еще и $\alpha_2$. Чтобы $x$ было действительным, $B\exp(-i\omega_\gamma t)$ должно быть комплексно сопряженным к $A\exp(i\omega_\gamma t)$ числом, тогда мнимая часть исчезнет. Таким образом, $B$ должно быть комплексно сопряжено с $A$, поэтому наше решение имеет вид

$$x = e^{-\gamma t/2}\left(Ae^{i\omega_\gamma t} + A^*e^{-i\omega_\gamma t}\right). \tag{24.20}$$

Значит, наши колебания — это колебания с *фазовым сдвигом* и, как полагается, с затуханием.

## *§ 3. Переходные колебания в электрических цепях*

Посмотрим, как выглядят переходные колебания. Для этого соберем цепь, изображенную на фиг. 24.2. В этой цепи разность потенциалов между концами индуктивности $L$ поступает в осциллоскоп. Неожиданное включение рубильника $S$ включает дополнительное напряжение и вызывает в осцилляторной цепи пере-



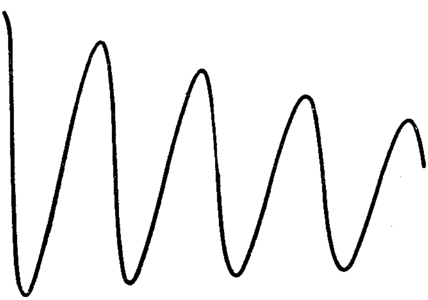
*Фиг. 24.2. Электрическая цепь для демонстраций переходных колебаний.*

ходные колебания. Эти колебания аналогичны колебаниям механического осциллятора, вызванными неожиданным ударом. Сама цепь представляет собой электрический аналог механического осциллятора с затуханием, и мы можем наблюдать колебания при помощи осциллоскопа. Он покажет нам кривые, анализом которых мы и займемся. На фиг. 24.3—24.6 представлены кривые затухающих колебаний, полученные на экране осциллоскопа. На фиг. 24.3 показаны затухающие колебания в цепи с большой $Q$, т. е. с малым значением $\gamma$. В такой цепи колебания затухают не очень быстро; мы видим довольно длинную синусоиду с медленно убывающим размахом.

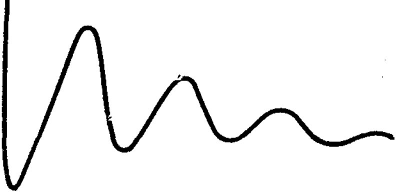
Теперь давайте посмотрим, что произойдет, если мы будем уменьшать $Q$, так что колебания должны затухать быстрее. Чтобы уменьшить $Q$, увеличим сопротивление цепи $R$. При повороте ручки сопротивления колебания действительно затухают скорее (фиг. 24.4). Если еще увеличить сопротивление, то колебания затухнут еще быстрее (фиг. 24.5). Но если сопротивление увеличить сверх некоторого предела, колебаний мы вообще не увидим. А может быть, нам просто отказывают глаза? Увеличим еще сопротивление и получим тогда кривую, представленную на фиг. 24.6; по ней можно лишь с натяжкой сказать, что в цепи произошли колебания, ну разве что одно. Можем ли мы математически объяснить это явление?

Сопротивление механического осциллятора, конечно, пропорционально $\gamma$. В нашем случае $\gamma$ — это $R/L$. Теперь, если увеличивать $\gamma$, то в столь приятных нам решениях (24.14) и (24.15) наступает беспорядок; когда $\gamma/2$ становится больше $\omega_0$, решения приходится записывать по-другому:

$$\frac{i\gamma}{2}+i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2} \qquad \text{и} \qquad \frac{i\gamma}{2}-i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\,.$$



*Фиг. 24.3. Затухающие колебания.*



*Фиг. 24.4. Колебания затухают быстрее.*

Это снова два решения, которые приводят нас к решениям $\exp(i\alpha_1 t)$ и $\exp(i\alpha_2 t)$. Подставив теперь $\alpha_1$, получим

$$x = Ae^{-\left(\gamma/2 + \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}\right)t}.$$

Никаких колебаний. Чисто экспоненциальное убывание. То же самое дает и второе решение

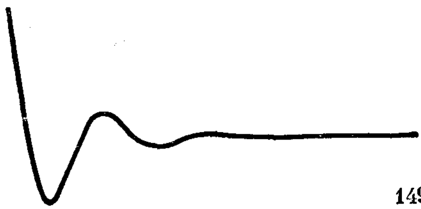
$$x = Be^{-\left(\gamma/2 - \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}\right)t}.$$

Заметим, что квадратный корень не может превысить $\gamma/2$; даже если $\omega_0 = 0$, оба члена равны. Если же $\omega_0^2$ отличается от $\gamma^2/4$, то квадратный корень меньше $\gamma/2$ и выражение в круглых скобках всегда положительно. Это очень хорошо! Почему? Да потому что если бы это выражение было отрицательным, то $e$ пришлось бы возводить в *положительную* степень и мы получили бы возрастающее со временем решение. Но при увеличении в цепи сопротивления колебания не могут возрастать, значит, мы избегли противоречия. Итак, мы получили два решения; оба решения экспоненциально затухают, но одно из них стремится «умереть» гораздо скорее. Общее решение, конечно, представляет собой комбинацию обоих решений, а значения коэффициентов $A$ и $B$ зависят от того, как начинаются колебания, каковы начальные условия. В нашей цепи случилось так, что $A$ — отрицательное число, а $B$ — положительное, поэтому на экране осциллоскопа мы увидели разность двух экспонент.

Давайте обсудим, как найти коэффициенты $A$ и $B$ (или $A$ и $A^*$), если известны начальные условия. Предположим, что в момент $t = 0$ нам известны смещение $x = x_0$ и скорость $dx/dt = v_0$. Если в соотношения

$$x = e^{-\gamma t/2}\,(Ae^{i\omega_\gamma t} + A^* e^{-i\omega_\gamma t}),$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\gamma t/2}\left[\left(-\frac{\gamma}{2} + i\omega_\gamma\right)Ae^{i\omega_\gamma t} + \left(-\frac{\gamma}{2} - i\omega_\gamma\right)A^* e^{-i\omega_\gamma t}\right]$$



*Фиг. 24.5. Колебания почти исчезли.*

*Фиг. 24.6. Колебаний нет.*

подставить значения $t=0$, $x=x_0$, $dx/dt=v_0$ и воспользоваться тем, что $e^0=e^{i0}=1$, то мы получим

$$x_0=A+A^*=2A_R,$$

$$v_0=-\frac{\gamma}{2}(A+A^*)+i\omega_\gamma(A-A^*)=-\frac{\gamma x_0}{2}+i\omega_\gamma(2iA_I),$$

где $A=A_R+iA_I$, $A^*=A_R-iA_I$. Значит,

$$A_R=\frac{x_0}{2} \quad \text{и} \quad A_I=\frac{v_0+\frac{\gamma x_0}{2}}{2\omega_\gamma}. \tag{24.21}$$

Таким образом, зная начальные условия, мы полностью определили $A$ и $A^*$, а значит, и кривую переходного решения. Можно записать решение и по-другому. Вспомним, что

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta \quad \text{и} \quad e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta,$$

тогда

$$x=e^{-\gamma t/2}\left[x_0\cos\omega_\gamma t+\frac{v_0+\frac{\gamma x_0}{2}}{\omega_\gamma}\sin\omega_\gamma t\right], \tag{24.22}$$

где $\omega_\gamma=+\sqrt{\omega_0^2-(\gamma^2/4)}$. Мы получили формулу затухающих колебаний. Такая формула нам не понадобится, однако отметим ее особенности, справедливые и в более общих случаях.

Прежде всего поведение системы, на которую не действует внешняя сила, описывается суммой (суперпозицией) временны́х экспонент [мы записали их в виде $\exp(i\alpha t)$]. Такое решение хорошо передает истинное положение вещей. В общем случае $\alpha$ — это комплексное число, и его мнимая часть соответствует затуханию колебаний. Наконец, тесная математическая связь синусоидальных и экспоненциальных функций, о которой говорилось в гл. 22, физически часто проявляется в переходе от колебаний к чисто экспоненциальному затуханию при критических значениях некоторых параметров системы (в нашем случае это было сопротивление $\gamma$).

*Глава* 25

# ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ И ОБЗОР



## § 1. *Линейные дифференциальные уравнения*

В этой главе мы снова вернемся к некоторым аспектам наших колебательных систем, только постараемся теперь увидеть нечто более общее, стоящее за спиной каждой частной системы. Изучение каждой колебательной системы сводилось к решению дифференциального уравнения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma m\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2x=F(t). \qquad (25.1)$$

Эта комбинация «операций» над переменной $x$ обладает интересным свойством: если вместо $x$ подставить $(x+y)$, получится сумма одинаковых операций над $x$ и $y$, а умножение $x$ на число $a$ сводится к умножению на это число первоначальной комбинации. Это легко доказать. Чтобы не переутомиться, записывая все буквы, вошедшие в (25.1), давайте введем «скорописные» обозначения. Обозначим всю левую часть уравнения (25.1) символом $\underline{L}(x)$. Увидев такой символ, вы должны мысленно представить себе левую часть уравнения (25.1). Поэтому, согласно этой системе, символ $\underline{L}(x+y)$ будет означать следующее:

$$\underline{L}(x+y)=m\frac{d^2(x+y)}{dt^2}+\gamma m\frac{d(x+y)}{dt}+m\omega_0^2(x+y). \qquad (25.2)$$

(Подчеркнем букву $\underline{L}$, чтобы не спутать этот символ с обычной функцией.) Иногда мы будем употреблять термин *операторная запись*, но совершенно безразлично, какими словами это называть, просто-напросто это «скоропись».

Наше первое утверждение, что

$$\underline{L}(x+y)=\underline{L}(x)+\underline{L}(y), \qquad (25.3)$$

следует из соотношений $a(x+y)=ax+ay$, $d(x+y)/dt=dx/dt+dy/dt$ и т. д.

Легко доказать, что для постоянного $a$

$$\underline{L}(ax)=a\underline{L}(x). \tag{25.4}$$

[Соотношения (25.3) и (25.4) тесно связаны одно с другим, потому что, подставив в (25.3) $x+x$, мы получим (25.4) для частного значения $a=2$ и т. д.]

Решая более сложные задачи, можно получить $\underline{L}$, в котором содержится больше членов и более высокие производные. Обычно первым делом интересуются, справедливы ли соотношения (25.3) и (25.4). Если они выполняются, то задачу называют *линейной*. В этой главе мы изучим некоторые свойства систем, следующие только из того факта, что система линейная. Это поможет нам понять общность некоторых свойств изученных ранее частных систем.

Давайте изучим некоторые свойства линейных дифференциальных уравнений, причем полезно помнить о хорошо знакомом нам частном уравнении (25.1). Первое интересное свойство: предположим, что мы решаем дифференциальное уравнение для переходных движений: свободных колебаний без действия внешних сил. Нам предстоит решить уравнение

$$\underline{L}(x)=0. \tag{25.5}$$

Предположим, что мы как-то исхитрились одолеть это уравнение и нашли его частное решение $x_1$. Это значит, что нам известна функция $x_1$, для которой $\underline{L}(x_1)=0$. После этого можно заметить, что $ax_1$ — тоже решение нашего уравнения; можно умножить частное решение уравнения на любую постоянную и получить новое решение. Иначе говоря, если какое-либо решение позволяет частице продвинуться на определенное расстояние, то она может совершить и более длинный рейс. *Доказательство*: $\underline{L}(ax_1)=a\underline{L}(x_1)=a\cdot 0=0$.

Предположим теперь, что нам удалось все-таки найти не *одно* частное решение $x_1$, но и второе $x_2$ (напомним, что когда мы в поисках переходного решения подставляли $x=\exp(i\alpha t)$, то мы нашли *два* значения $\alpha$, т. е. два решения: $x_1$ и $x_2$). Покажем теперь, что комбинация $x_1+x_2$ — тоже решение. Иными словами, если положить $x=x_1+x_2$, то $x$ — это опять решение уравнения. Почему? Потому что если $\underline{L}(x_1)=0$ и $\underline{L}(x_2)=0$, то $\underline{L}(x_1+x_2)=\underline{L}(x_1)+\underline{L}(x_2)=0+0=0$. Таким образом, мы вправе складывать отдельные решения, описывающие движения линейной системы.

Продолжая в том же духе, мы можем сложить шесть первых и два вторых решения; ведь если $x_1$ есть решение, то $\alpha x_1$ — тоже решение. Другими словами, любая сумма двух решений, например $\alpha x_1+\beta x_2$, удовлетворяет уравнению. Если нам посчастливится найти три решения, то мы увидим, что любая комбинация трех решений снова удовлетворяет уравнению, и т. д. Поток таких решений можно ограничить *независимыми решениями* *; в случае осциллятора мы получили только *два* таких решения. Число независимых решений в общем случае зависит от того, что называется числом *степеней свободы*. Мы не будем сейчас подробно обсуждать этот вопрос, но в случе дифференциального уравнения второго порядка имеются лишь два независимых решения. Если мы найдем оба эти решения, то можно построить общее решение уравнения.

Посмотрим, что будет, когда на систему действует внешняя сила. Предположим, что нам встретилось уравнение

$$\underline{L}(x)=F(t) \qquad (25.6)$$

и мы нашли его частное решение. Назовем его решением Джо $x_{Д}$, т. е. $\underline{L}(x_{Д})=F(t)$. Хотелось бы найти еще одно решение этого уравнения. Добавим к решению Джо какое-нибудь решение свободного уравнения (25.5), например $x_1$. Тогда, вспомнив о (25.3), получим

$$\underline{L}(x_{Д}+x_1)=\underline{L}(x_{Д})+\underline{L}(x_1)=F(t)+0=F(t). \qquad (25.7)$$

Следовательно, добавив к решению уравнения (25.6) любое «свободное» решение, мы получим новое решение. Свободное решение называют еще *переходным* решением.

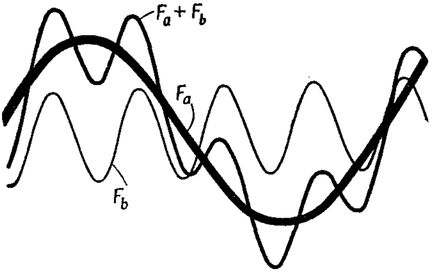
Если неожиданно включить внешнюю силу, то движение осциллятора не сразу будет описываться равновесным (синусоидальным) решением: сначала к нему будут примешиваться переходные решения, которые, если подождать подольше, в конце концов «вымрут». Равновесное решение «выживет», потому что только оно соответствует внешней силе. В конце концов это будет единственным решением, но начальные движения системы зависят от того, какие обстоятельства сопутствуют включению силы.

## § 2. *Суперпозиция решений*

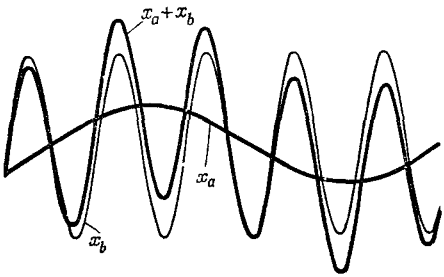
Перейдем теперь к другой интересной проблеме. Предположим, что нам задана какая-нибудь внешняя сила $F_a$ (например, периодическая сила с частотой $\omega=\omega_a$, но наши выводы будут верны для любой зависимости силы от времени) и мы нашли движение, соответствующее этой силе (переходные движения

---

* Решения, которые нельзя выразить линейно одно через другое, называются независимыми решениями.




*Фиг. 25.1. Пример принципа суперпозиции для линейных систем.*




можно учитывать или не учитывать, это неважно). Предположим, что мы решили еще одну задачу — нашли движение в случае действия силы $F_b$. После этого предположим, что кто-то вбежал в комнату и сказал: «На контрольной задают задачу с силой $F_a+F_b$. Что нам делать?» Конечно, мы решим эту задачу — ведь мы сразу обнаружим одно замечательное свойство: сумма решений $x_a$ и $x_b$, получаемых в том случае, если брать силы по отдельности, будет решением новой задачи. Для этого надо только вспомнить о (25.3):

$$\underline{L}(x_a+x_b)=\underline{L}(x_a)+\underline{L}(x_b)=F_a(t)+F_b(t). \tag{25.8}$$

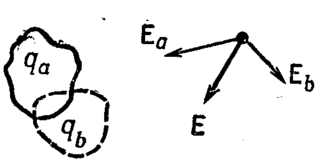
Это пример того, что называют *принципом суперпозиции* для линейных систем, и это очень важная вещь. Дело обстоит так: если мы сможем представить сложную силу в виде суммы нескольких более простых сил и сможем решить уравнение для каждой силы в отдельности, то мы сможем решить и первоначальное уравнение, потому что для этого надо просто объединить куски *решения* так же, как мы объединяли отдельные силы, чтобы получить *полную силу* (фиг. 25.1).

Еще один пример принципа суперпозиции. В гл. 12 (вып. 1) говорилось об одном из важнейших фактов, вытекающих из законов электричества. Если нам задано распределение зарядов $q_a$, можно найти электрическое поле $\mathbf{E}_a$, порождаемое этими зарядами в точке $P$. Другое распределение зарядов $q_b$ порождает в этой же точке поле $\mathbf{E}_b$. Оба эти распределения, действуя вместе, породят в точке $P$ поле $\mathbf{E}$, которое представляет собой *сумму* полей $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{E}_b$. Иначе говоря, поле, соответствующее совокупности многих зарядов,— это векторная сумма полей, соответствующих отдельным зарядам. Аналогия с предыдущим примером бросается в глаза: ведь если мы знаем результат действия отдельных сил, то отклик на силу, являющуюся суммой этих сил, будет суммой отдельных откликов.

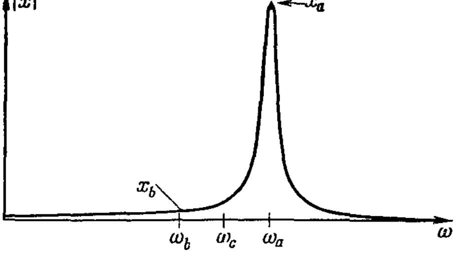
Причина справедливости принципа суперпозиции в электричестве состоит в том, что основные законы электричества, определяющие электрическое поле (уравнения Максвелла),— это *линейные* дифференциальные уравнения, обладающие свойством (25.3). Силам в этих уравнениях соответствуют *заряды*, порождающие электрическое поле, а уравнения, определяющие электрическое поле по заданным зарядам,— линейные уравнения.

Чтобы придумать еще один пример принципа суперпозиции, спросите себя, как вам удается настроить свой радиоприемник на определенную радиостанцию, хотя одновременно работает очень много станций. Сигналы радиостанций — это колеблющиеся электрические поля очень высокой частоты, действующие на антенну радиоприемника. Амплитуда этих колебаний, правда, меняется, их модулирует голос диктора, но скорость этих изменений очень мала и об этом можно пока забыть. Когда вы слышите: «Станция работает на частоте 780 килогерц», это значит, что частота излучаемого антенной радиостанции электромагнитного поля равна 780 000 колебаний в секунду и это поле с точно такой же частотой раскачивает электроны в антенне вашего приемника. Но ведь в то же самое время поблизости может работать и другая радиостанция на другой частоте, скажем на частоте 550 *кгц*. Эта станция тоже раскачивает электроны вашей антенны. Как же отделяются сигналы, поступающие в приемник с частотой 780 *кгц*, от сигналов, имеющих частоту 550 *кгц*? Ведь вы же не слышали голоса обоих дикторов одновременно.

Первая часть электрической цепи радиоприемника — это линейная цепь. По принципу суперпозиции ее отклик на электрическое поле $F_a+F_b$ равен $x_a+x_b$. По всему выходит, что нам придется слушать обоих дикторов сразу. Но вспомним, что в *резонансной* цепи кривая отклика $x$ на единичную силу $F$ зависит от частоты примерно так, как это изображено на фиг. 25.3. В цепи с очень большим значением $Q$ отклик имеет очень острый максимум. Предположим, что обе станции имеют примерно одинаковую мощность, поэтому обе *силы* имеют примерно одинаковую амплитуду. *Отклик* равен сумме откликов $x_a$ и $x_b$, но на фиг. 25.3 $x_a$ громаден, а $x_b$ очень мал. Таким образом, хотя оба сигнала одинаковы по силе, в приемнике они проходят через остро резонансную цепь, настроенную на частоту $\omega_a$ (частоту




*Фиг. 25.2. Принцип суперпозиции в электростатике.*




*Фиг. 25.3. Резонансная кривая с острым максимумом.*

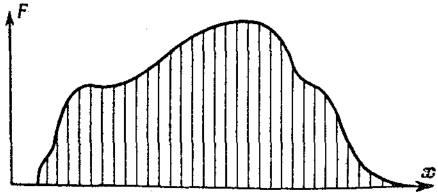
передач одной из станций), и отклик на эту частоту (станцию) значительно больше отклика на все остальные. Поэтому, несмотря на то что на антенну действуют оба сигнала, полный отклик почти целиком составлен из частоты $\omega_a$, и мы можем выбрать ту станцию, какую пожелаем.

Несколько слов о механизме настройки. Как мы настраиваем радиоприемник? Мы изменяли частоту $\omega_0$, меняя $L$ или $C$ цепи, потому что частота цепи зависит от комбинации $L$ и $C$. Большинство радиоприемников устроено так, что в них меняется значение $C$. Поворачивая ручку настройки приемника, мы изменяем собственную частоту цепи. Пусть какому-то положению ручки соответствует частота $\omega_c$; если нет радиостанций, работающих на этой частоте, приемник молчит. Вы продолжаете изменять емкость $C$ цепи, пока не построите кривую отклика с резонансом при частоте $\omega_b$, тогда вы услышите другую станцию. Вот так и настраивается радиоприемник; все дело в принципе суперпозиции, в сочетании с резонансным откликом *.

Чтоб закончить обсуждение, давайте подумаем, как поступить при анализе линейных задач с заданной силой, когда сила очень *сложно зависит от времени*. Можно поступать по-разному, но есть два особенно удобных общих метода решения таких задач. Первый метод: предположим, что мы можем решить задачу в некоторых частных случаях, например в случае синусоидальных сил разных частот. Решать линейные уравнения в таких случаях — детская забава. Пусть нам и встретился этот «детский» случай. Теперь встает вопрос, нельзя ли представить любую силу в виде суммы двух или более «детских» сил? Мы уже показали на фиг. 25.1 довольно хитрую зависимость силы от времени; если туда добавить еще несколько синусоид, то результирующая кривая будет выглядеть еще сложнее. Таким образом, простенькие «детские» силы могут породить очень сложную силу. Верно и обратное: практически каждая кривая

* В новейших супергетеродинных приемниках дело, конечно, обстоит сложнее. Усилители приемника настроены на определенную промежуточную частоту; осциллятор с переменной настраивающейся частотой связан с входным сигналом *нелинейной* связью, порождая новую частоту (равную разности частот сигнала и осциллятора) — промежуточную частоту, которая и усиливается. Об этом мы поговорим в гл. 50 (вып. 4).

*Фиг. 25.4. Сложную силу можно представить как последовательность коротких импульсов.*




может быть представлена в виде *бесконечной суммы* синусоидальных волн разной длины волн (или частоты). Таким образом, мы знаем, как представить заданную силу $F$ в виде синусоидальных волн, поэтому решение $x$ можно представить в виде суммы $F$ синусоидальных волн, каждая из которых умножается на эффективное отношение $x$ к $F$. Такой метод решения называют методом *преобразования Фурье*, или *анализом* (*разложением*) *Фурье*. Мы не будем сейчас делать такого разложения; пока достаточно только идеи.

Очень интересен другой способ решения сложных задач. Предположим, что кто-то после больших умственных усилий решил заданную нам задачу в случае одной частной силы — *импульсной*. Сила внезапно и быстро действует на систему, затем выключается и все опять спокойно. Нам теперь достаточно решить такую задачу лишь в случае единичной силы, потом умножением на подходящее число мы сможем получить любые силы. Мы знаем, что осциллятор откликается на импульсную силу затухающими колебаниями. А как быть в случае другой силы, например силы, изображенной на фиг. 25.4?

Такую силу можно представить в виде последовательных ударов молотком. Сначала всюду стоит тишина, потом кто-то берет в руки молоток и внезапно раздаются равномерные удары — удар, удар, удар, удар, ... и опять все тихо. Иначе говоря, непрерывно действующую силу можно представить в виде ряда последовательных импульсов, быстро следующих один за другим. Мы знаем последствия одного импульса, а последствием серии импульсов будет ряд затухающих колебаний; нарисуйте кривую колебаний для первого импульса, затем, немного отступя, такие же кривые для второго импульса, третьего и т. д. Потом сложите все кривые. Таким образом математически можно представить полное решение в случае произвольной силы, если можно решить задачу для импульса. Ответ для любой силы можно получить путем интегрирования. Это *метод функции Грина*. Функция Грина — это отклик системы на отдельный импульс, а метод функции Грина — это метод анализа действия силы суммированием откликов на импульсы.

Физические принципы, лежащие в основе обоих методов, очень просты; они просто напрашиваются, если понять смысл линейного уравнения, но *математические* методы содержат довольно сложные интегрирования и т. д.; мы мало подготовлены, чтобы прямо атаковать эти методы. К этому вы еще вернетесь, когда поднабьете руку в математике. Но сама *идея* методов, право, очень проста.

Наконец, скажем еще, почему *линейные* системы так важны. Ответ прост: потому что мы умеем решать линейные уравнения! Поэтому бóльшую часть времени мы будем решать линейные задачи. Вторая (и главная) причина заключается в том, что *основные законы физики часто линейны*. Например, уравнения Максвелла для законов электромагнетизма — линейные уравнения. Великие законы квантовой механики, насколько нам они известны, тоже сводятся к линейным уравнениям. Вот почему мы так много времени уделяем линейным уравнениям: если мы поняли линейные уравнения, мы готовы в принципе понимать очень многие вещи.

Упомянем еще другие ситуации, когда возникают линейные уравнения. Когда отклонения малы, многие функции можно *приближенно* заменить линейными. Например, точное уравнение движения маятника гласит

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta. \tag{25.9}$$

Это уравнение решается при помощи эллиптических функций, но легче его решить численно, как мы это делали в гл. 9 (вып. 1) при изучении ньютоновых законов движения. Большинство нелинейных уравнений вообще можно решить лишь *численно*. Для малых углов $\sin\theta$ практически равен $\theta$, и в этом случае можно перейти к линейному уравнению. На этом примере можно сообразить, что есть много обстоятельств, при которых малые эффекты линейны (здесь это отклонения маятника на малые углы). Другой пример: если на пружине качается небольшой грузик, сила пропорциональна растяжению пружины. Если сильно потянуть за пружину, она может и порваться, значит, в этом случае сила совсем иначе зависит от расстояния! Линейные уравнения очень важны. Они *настолько* важны, что физики и инженеры, пожалуй, половину своего времени тратят на решение линейных уравнений.

## § 3. *Колебания в линейных системах*

Давайте вспомним, о чем мы говорили в нескольких последних главах. Физику колебательных движений очень легко затемнить математикой. На самом-то деле здесь физика очень проста, и если на минуту забыть математику, то мы увидим, что понимаем почти все, что происходит в колебательной системе.

Во-первых, если мы имеем дело только с пружинкой и грузиком, то легко понять, почему система колеблется — это следствие инерции. Мы оттянули массу вниз, а сила тянет ее назад; наступает момент, когда сила равна нулю, но грузик не может остановиться мгновенно: у него есть импульс, который заставляет его двигаться. Теперь пружинка тянет грузик в другую сторону, грузик начинает двигаться взад и вперед. Итак, если бы не было трения, то, несомненно, получилось бы колебательное движение, и так оно и есть на самом деле. Но достаточно незначительного трения, чтобы размах следующих колебаний стал меньше, чем раньше.

Что случится потом, после многих циклов? Это зависит от характера и величины трения. Предположим, что мы придумали такое устройство, что при изменении амплитуды сила трения оказывается пропорциональной другим силам — инерции и натяжению. Иначе говоря, при малых колебаниях трение слабее, чем при колебаниях с большой амплитудой. Обычно сила трения таким свойством не обладает, так что можно предположить, что в нашем случае действуют силы трения особого рода — силы, пропорциональные скорости; тогда для больших колебаний эти силы будут больше, а для малых — меньше. Если у нас именно такой вид трения, то в конце каждого цикла система будет находиться в тех же условиях, что и в начале цикла, только всего будет меньше. Все силы будут меньше в тех же пропорциях: сила пружинки немного ослабнет, инерциальные эффекты будут меньше. Ведь теперь и ускорения грузика будут меньше, и сила трения ослабеет (об этом мы позаботились, создавая наше устройство). Если бы мы имели дело с такими силами трения, то увидели бы, что каждое колебание в точности повторяет первое, только амплитуда его стала меньше. Если после первого цикла амплитуда составляла, например, 90% первоначальной, то после второго цикла она будет равна 90% от 90% и т. д., т. е. *размах колебаний после каждого цикла уменьшается в одинаковое число раз.* Кривая, ведущая себя таким образом,— это экспоненциальная функция. Она изменяется в одинаковое число раз на любых интервалах одинаковой длины. Иначе говоря, если отношение амплитуды одного цикла к амплитуде предыдущего равно $a$, то такое же отношение для второго цикла равно $a^2$, затем $a^3$ и т. д. Таким образом, амплитуда колебаний после $n$ циклов равна

$$A = A_0 a^n. \qquad (25.10)$$

Но, конечно, $n \sim t$, поэтому общее решение будет произведением какой-нибудь периодической функции $\sin\omega t$ или $\cos\omega t$ на амплитуду, которая ведет себя примерно как $b^t$. Если $b$ положительно и меньше единицы, то его можно записать в виде $e^{-c}$.

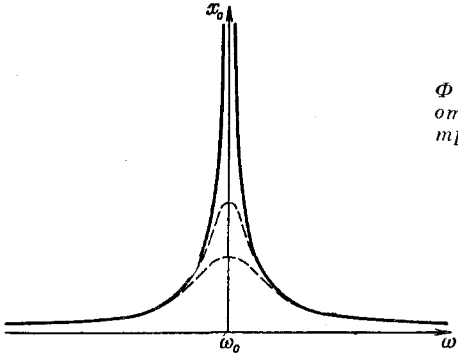
Вот почему решение задачи о колебаниях при учете трения будет выглядеть примерно как $\exp(-ct)\cos\omega t$. Это очень просто.

Что случится, если трение не будет таким искусственным; например обычное трение о стол, когда сила трения постоянна по величине, не зависит от размаха колебаний и меняет свое направление каждые полпериода? Тогда уравнения движения станут нелинейными; решить их трудно, поэтому придется прибегнуть к описанному в гл. 2 численному решению или рассматривать по отдельности каждую половину периода. Самым мощным, конечно, является численный метод; с его помощью можно решить любое уравнение. Математический анализ используется лишь для решения простых задач.

Надо сказать, что математический анализ вообще не такое уж могучее средство исследования; с его помощью можно решить лишь простейшие возможные уравнения. Как только уравнение чуть усложняется, его уже нельзя решить аналитически. Численный же метод, с которым мы познакомились в начале курса, позволяет решить любое уравнение, представляющее физический интерес.

Пойдем дальше. Что можно сказать о резонансной кривой? Как объяснить резонанс? Представим сначала, что трения нет и мы имеем дело с чем-то, что может колебаться само по себе. Если подталкивать маятник каждый раз, когда он пройдет мимо нас, то очень скоро маятник начнет раскачиваться, как сумасшедший. А что случится, если мы закроем глаза и, не следя за маятником, начнем толкать его с произвольной частотой, с какой захотим? Иногда наши толчки, попадая не в ритм, будут замедлять маятник. Но когда нам посчастливится найти верный темп, каждый толчок будет достигать маятника в нужный момент и он будет подниматься все выше, выше и выше. Таким образом, если не будет трения, то для зависимости амплитуды от частоты внешней силы мы получим кривую, которая выглядит, как сплошная линия на фиг. 25.5. Качественно мы поняли резонансную кривую; чтобы найти ее точные очертания, пожалуй, придется прибегнуть к помощи математики. Кривая стремится к бесконечности, если $\omega \to \omega_0$, где $\omega_0$ — собственная частота осциллятора.

Предположите, что существует слабое трение. Тогда при незначительных отклонениях осциллятора влияние трения сказывается слабо и резонансная кривая вдали от максимума не изменяется. Однако около резонанса кривая уже не уходит в бесконечность, а просто поднимается выше, чем в остальных местах. Когда амплитуда колебаний достигает максимума, работа, совершенная нами в момент толчка, полностью компенсирует потери энергии на трение за период. Таким образом, вершина кривой закруглена, и она уже не уходит в бесконечность. Чем больше трение, тем больше сглажена вершина кривой. Кто-




*Фиг. 25.5. Резонансная кривая, отражающая разнообразные виды трения.*

нибудь может сказать: «Я думал, что ширины резонансных кривых зависят от трения». Так можно подумать, потому что резонансные кривые рисуют, принимая за единицу масштаба вершину кривой. Однако если нарисовать все кривые в одном масштабе (это прояснит дело больше, чем изучение математических выражений), то окажется, что трение срезает вершину кривой! Если трение мало, мы можем подняться высоко по резонансной кривой; когда трение сгладит кривую, мы на том же интервале частот поднимаемся на меньшую высоту, и это создает ощущение ширины. Таким образом, чем выше пик кривой, тем ближе к максимуму точки, где высота кривой равна половине максимума.

Наконец, подумаем, что произойдет при очень большом трении. Ясно, что, если трение очень велико, система вообще не осциллирует. Энергии пружинки едва-едва хватит на борьбу с силами трения, и грузик будет медленно ползти к положению равновесия.

## § 4. *Аналогии в физике*

Продолжая обзор, заметим, что массы и пружинки — это не единственные линейные системы; есть и другие. В частности, существуют электрические системы (их называют линейными цепями), полностью аналогичные механическим системам. Мы не старались до конца выяснить, *почему* каждая часть электрической цепи работает так, а не иначе; это нам еще трудно понять. Можно просто поверить, что то или иное поведение каждого элемента цепи можно подтвердить экспериментально.

Возьмем для примера простейшее устройство. Приложим к куску проволоки (сопротивлению) разность потенциалов $V$. Это значит, что если от одного конца проволоки до другого проходит заряд $q$, то при этом совершается работа $qV$. Чем выше разность потенциалов, тем большая работа совершается при «падении» заряда с высокопотенциального конца проволоки на низкопотенциальный. Заряды, проходя с одного конца проволоки на другой, выделяют энергию. Но зарядам не так-то просто плыть вдоль проволоки: атомы проволоки оказывают сопротивление потоку, и это сопротивление подчиняется закону, справедливому почти для всех *обычных* материалов: ток $I$ пропорционален приложенной к проволоке разности потенциалов. Иначе говоря, число зарядов, проходящих через проволоку за 1 *сек*, пропорционально силе, с которой их толкают:

$$V = IR = R\frac{dq}{dt}. \tag{25.11}$$

Коэффициент $R$ называют *сопротивлением*, а само уравнение — *законом Ома*. Единица сопротивления — *ом*; он равен отношению одного вольта (1 *в*) к одному амперу (1 *а*). В механических устройствах очень трудно отыскать силу трения, пропорциональную скорости, а в электрических цепях — это дело обычное и закон Ома справедлив для большинства металлов с очень высокой точностью.

Нас интересует, много ли совершается работы за 1 *сек* при прохождении зарядов по проволоке (эту же величину можно назвать потерей мощности или выделяемой зарядами энергией)? Чтобы прогнать заряд $q$ через разность потенциалов $V$, надо совершить работу $qV$; таким образом, работа за 1 *сек* равна $V(dq/dt)$, или $VI$. Это выражение можно записать иначе: $IR \cdot I = I^2R$. Эту величину называют *тепловыми потерями*; вследствие закона сохранения энергии, такое количество теплоты производит в 1 *сек* сопротивление проволоки. Эта теплота накаляет проволоку электрической лампы.

У механических устройств есть, конечно, и другие интересные свойства, например, такие, как масса (инерция). В электрических цепях, оказывается, тоже существуют аналоги инерции. Можно построить прибор, называемый *индуктором*, а свойство, которым он обладает, носит название *индуктивность*. Ток, попадающий в такой прибор, *не хочет останавливаться*. Чтобы изменить ток, к этому прибору нужно приложить разность потенциалов. Если по прибору течет постоянный ток, то падения потенциалов нет. Цепи с постоянным током ничего «не знают» об индуктивности; эффекты индуктивности обнаруживаются только при *изменениях* тока. Описывающее эти эффекты уравнение гласит:

$$V = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}, \tag{25.12}$$

а индуктивность измеряется в единицах, которые называются *генри* (*гн*). Приложенная к прибору с индуктивностью в 1 *гн* разность потенциалов в 1 *в* изменяет ток на 1 *а/сек*. Уравнение

(25.12), если хотите,— электрический аналог закона Ньютона: $V$ соответствует $F$, $L$ соответствует $m$, а $I$ — скорости!

Все последующие уравнения, описывающие обе системы, выводятся одинаково, потому что мы просто можем заменить буквы в уравнении для одной системы и получить уравнение для другой системы; любой вывод, сделанный при изучении одной системы, будет верен и для другой системы.

Какое электрическое устройство соответствует пружинке, в которой сила пропорциональна растяжению? Если начать с $F=kx$ и заменить $F$ на $V$, а $x$ на $q$, то получим $V=\alpha q$. Мы уже знаем, что такое устройство существует; более того, это единственный из трех элементов цепи, работу которого мы понимаем. Мы уже знакомились с парой параллельных пластинок и обнаружили, что если зарядить пластинки равными, но противоположными по знаку зарядами, то поле между пластинками будет пропорционально величине заряда. Работа, совершаемая при переносе единичного заряда через щель от одной пластинки к другой, прямо пропорциональна заряду пластинок. Эта работа служит *определением* разности потенциалов и равна линейному интегралу электрического поля от одной пластинки к другой. По исторически сложившимся причинам постоянную пропорциональности называют не $C$, а $1/C$, т. е.

$$V=\frac{q}{C}\,. \tag{25.13}$$

Единица емкости называется *фарадой* (*ф*); заряд в 1 *кулон*, помещенный на каждой пластинке конденсатора емкостью в 1 *ф*, создает разность потенциалов в 1 *в*. Вот все нужные аналогии. Теперь можно, заменив $m$ на $L$, $q$ на $x$ и т. д., написать уравнение для резонансной цепи

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma m\frac{dx}{dt}+kx=F, \tag{25.14}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V. \tag{25.15}$$

Все, что мы знаем об уравнении (25.14), можно применить и к уравнению (25.15). Переносится каждое *следствие*; аналогов так много, что с их помощью можно сделать замечательные вещи.

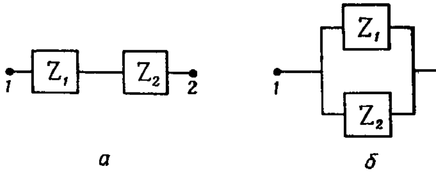
Предположим, что мы натолкнулись на очень сложную механическую систему: имеется не одна масса на пружинке, а много масс на многих пружинках, и все это перепутано. Что нам делать? Решать уравнения? Можно и так. Но попробуем собрать *электрическую* цепь, которая будет описываться теми же уравнениями, что и механическое устройство! Если мы собрались анализировать движение массы на пружинке, почему бы нам не собрать цепь, в которой индуктивность пропорциональна массе, сопротивление пропорционально $m\gamma$, $1/C$ пропорционально $k$? Тогда электрическая цепь, конечно, будет точным аналогом механического устройства в том смысле, что любой отклик $q$ на $V$ ($V$ соответствует действующей силе) в точности соответствует отклику $x$ на силу! Перепутав в цепи великое множество сопротивлений, индуктивностей и емкостей, можно получить цепь, *имитирующую* сложнейшую механическую систему. Что в этом хорошего? Каждая задача, механическая или электрическая, столь же трудна (или легка), как и другая: ведь они в точности эквивалентны. Открытие электричества не помогло решить *математические уравнения*, но дело в том, что всегда легче *собрать* электрическую цепь и *изменять* ее параметры.

Предположим, что мы построили автомобиль и хотим узнать, сильно ли его будет трясти на ухабах. Соберем электрическую цепь, в которой индуктивности скажут нам об инерции колес, об упругости колес представление дадут емкости, сопротивления заменят амортизаторы и т. д. В конце концов мы заменим элементами цепи все части автомобиля. Теперь дело за ухабами. Хорошо, подадим на схему *напряжение* от генератора — он сможет изобразить любой ухаб; измеряя заряд на соответствующем конденсаторе, мы получаем представление о раскачке колеса. Измерив заряд (это сделать легко), мы решим, что автомобиль трясет слишком сильно. Надо что-то сделать. То ли ослабить амортизаторы, то ли усилить их. Неужели придется переделывать автомобиль, снова проверять, как его трясет, а потом снова переделывать? Нет! Просто нужно повернуть ручку сопротивления: сопротивление номер 10 — это амортизатор номер 3; так можно усилить амортизацию. Трясет еще сильнее — не страшно, мы ослабим амортизаторы. Все равно трясет. Изменим упругость пружины (ручка номер 17). Так мы всю наладку произведем с помощью *электричества*, многократным поворотом ручек.

Вот вам *аналоговая вычислительная машина*. Так называют устройства, которые имитируют интересующие нас задачи, описываемые теми же уравнениями, но совсем другой природы. Эти устройства легко построить, на них легко провести измерения, отладить их, и... разобрать!

## *§ 5. Последовательные и параллельные сопротивления*

Обсудим, наконец, еще один важный вопрос, хотя он не совсем подходит по теме. Что делать с электрической цепью, если в ней много элементов? Например, когда индуктивность, сопротивление и емкость соединены, как показано на фиг. 24.2 (стр. 148), то все заряды проходят через каждый из трех элементов так, *Фиг. 25.6. Импедансы, соединенные последовательно (а) и параллельно (б).*




что связывающий элементы ток во всех точках цепи одинаков. Поскольку ток всюду одинаков, падение напряжения на сопротивлении равно $IR$, на индуктивности равно $L(dI/dt)$ и т. д. Полное падение напряжения получается суммированием частичных падений, и мы приходим к уравнению (25.15). Используя комплексные числа, мы решили это уравнение в случае равновесного отклика на синусоидальную силу. Мы нашли, что $\hat{V}=\hat{Z}\hat{I}$ ($\hat{Z}$ называется *импедансом* цепи). Зная импеданс, легко найти ток в цепи $\hat{I}$, если к цепи приложено синусоидальное напряжение $\hat{V}$.

Предположим, что нужно собрать более сложную цепь из двух кусков, импедансы которых равны $\hat{Z}_1$ и $\hat{Z}_2$; соединим их *последовательно* (фиг. 25.6, *а*) и приложим напряжение. Что случится? Задача немного сложнее предыдущей, но разобраться в ней нетрудно: если через $\hat{Z}_1$ течет ток $\hat{I}_1$, то падение напряжения на $\hat{Z}_1$ равно $\hat{V}_1=\hat{I}\hat{Z}_1$, а падение напряжения на $\hat{Z}_2$ будет $\hat{V}_2=\hat{I}\hat{Z}_2$. *Через оба элемента цепи течет одинаковый ток*. Полное падение напряжения вдоль такой цепи равно $\hat{V}=\hat{V}_1+\hat{V}_2=(\hat{Z}_1+\hat{Z}_2)\hat{I}$. Таким образом, падение напряжения в такой цепи можно записать в виде $\hat{V}=\hat{I}\hat{Z}_s$, а $\hat{Z}_s$— импеданс системы, составленной из двух последовательно соединенных элементов, равен сумме импедансов отдельных элементов

$$\hat{Z}_s=\hat{Z}_1+\hat{Z}_2. \tag{25.16}$$

Но это не единственный способ решения вопроса. Можно соединить отдельные элементы *параллельно* (фиг. 25.6,*б*). При таком соединении, если соединительные провода считать идеальными проводниками, к обоим элементам приложено одинаковое внешнее напряжение, а сила тока в каждом элементе не зависит от другого элемента. Ток через $\hat{Z}_1$ равен $\hat{I}_1=\hat{V}/\hat{Z}_1$, ток в $\hat{Z}_2$ равен $\hat{I}_2=\hat{V}/\hat{Z}_2$. Напряжение в обоих случаях *одинаково*. Полный ток через концы цепи равен сумме токов в отдельных частях цепи: $\hat{I}=V/\hat{Z}_1+\hat{V}/\hat{Z}_2$. Это можно записать и так:

$$\hat{V}=\frac{\hat{I}}{(\hat{1}/\hat{Z}_1)+(\hat{1}/\hat{Z}_2)}=\hat{I}\,/\hat{Z}_p.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\hat{Z}_p}=\frac{1}{\hat{Z}_1}+\frac{1}{\hat{Z}_2}. \tag{25.17}$$

Многие сложные цепи иногда становятся более понятными, если расчленить их на куски, выяснить, чему равны импедансы отдельных частей, а затем шаг за шагом следить за соединением частей, помня о только что выведенных правилах. Если мы собрали цепь из большого числа произвольно соединенных элементов и создаем в этой цепи разности потенциалов при помощи небольших генераторов, импедансом которых можно пренебречь (когда заряд проходит через генератор, то потенциал возрастает на $V$), то при анализе цепи можно использовать такие правила:

1) сумма токов, протекающих через любое соединение, равна нулю; ведь притекший к любому соединению ток должен обязательно вытечь из него;
2) если заряд, двигаясь по замкнутой петле, вернулся в то место, откуда начал путешествие, полная работа должна быть равна нулю.

Эти правила называются *законами Кирхгофа*. Систематическое применение этих правил часто облегчает анализ работы сложных цепей. Мы к ним вернемся, когда будем говорить о законах электричества.