ПО СЛЕДАМ ПИФАГОРА

СТО ИСТОРИЧЕСКИХ ГОЛОВОЛОМОК

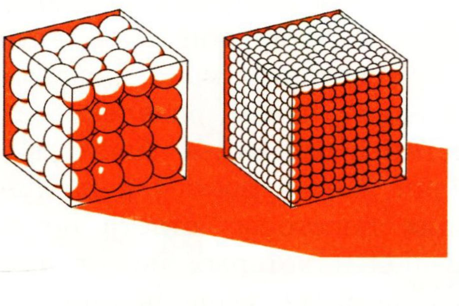
ЩЕПАН ЕЛЕНЬСКИЙ

качели
издательство

ЩЕПАН ЕЛЕНЬСКИЙ

ПО СЛЕДАМ ПИФАГОРА

СТО ИСТОРИЧЕСКИХ ГОЛОВОЛОМОК



Переводчик
ВЕРА ВИНОГОРОВА

Художник
СОФИЯ БЕРЛИНА

Санкт-Петербург
КАЧЕЛИ
2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АНЕКДОТЫ И АНЕКДОТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Есть великое множество математических историй и анекдотов, количество анекдотических задач неисчерпаемо. На что следовало ориентироваться при их выборе? В основе принципа отбора лежало стремление представить их наибольшее разнообразие.

Среди приводимых здесь задач, шуток и математических историй читатель найдет самые различные типы заданий: задачи на разделение, перестановки, разлив жидкостей, переправы, маневры и т. д. Представлены задачи разных эпох: созданные тысячи лет назад, сотни лет назад и совсем недавно; китайские, индийские, греческие, арабские, русские, французские; задачи великих математиков, таких как Бха́скара, Леонардо Пизанский, Баше́, Ньютон, Люка́ и другие, и задачи неизвестных авторов, передаваемые из поколения в поколение. А если говорить о темах, то почти все задачи — разные.

Все задачи просты, они доступны каждому, кто знает основы арифметики, алгебры и геометрии в элементарном объеме. Тот, кто уже подзабыл эти сведения, может использовать большинство приведенных здесь задач, чтобы, развлекаясь, освежить в памяти математические истины, освоенные много лет назад.

Для многих задач дается полное решение, для других дается только ответ, для некоторых ответа не дается — это задачи, самостоятельное решение которых может принести читателю не только пользу, но и немалое удовольствие.

Щепан Еленьский

1. НАСЛЕДСТВО АРАБА

Это одна из самых старых арабских задач, автор ее неизвестен.

Один араб оставил трем своим сыновьям в наследство стадо верблюдов, при этом завещал, что старший сын получает половину, средний — третью часть, а младший — девятую часть наследства. Однако в стаде оказалось 17 верблюдов.

Разделить верблюдов было трудно, поэтому наследники обратились к кадию (судье), известному своей мудростью на всю округу. Кадий нашел следующее решение: нужно одолжить одного верблюда и приступить к разделу, имея 18 верблюдов. Братья последовали его совету. Старшему при этом досталось 9 верблюдов, среднему — 6, младшему — 2, а позаимствованного верблюда вернули его владельцу. Три брата были очень довольны мудрым решением кадия, потому что в действительности каждый из них получил больше, чем назначил отец, а именно: один на $\frac{1}{2}$, второй на $\frac{1}{3}$, а третий на $\frac{1}{9}$ верблюда. Откуда взялись надбавки?

2. НАЙДЕННЫЙ КОШЕЛЕК

Е. И. Игнатьев в своем трехтомном сборнике занимательных математических задач «В царстве смекалки»[1] приводит аналогичную русскую задачу.

Случилось это в старой России. Четверо крестьян: Василий, Митрофан, Поликарп и Федор — возвращались из города и громко сетовали, что им не удалось ничего заработать.

— Хорошо бы было, — сказал Василий, — если бы я нашел на дороге кошелек с деньгами, я бы тогда оставил себе только третью часть, а остальное, даже вместе с кошельком, я отдал бы вам.

— А я, — сказал Митрофан, — разделил бы все на равные части.

— Мне хватило бы даже пятой части, — сказал Поликарп.

— А я и шестой частью был бы доволен, — добавил Федор. — Но что об этом говорить! Деньги на дороге не валяются!

И тут — о, чудо! — они увидели на дороге кошель! Путники подняли его и решили поделить найденную сумму так, как каждый предлагал, а именно: Василий получит третью часть, Митрофан — четвертую, Поликарп — пятую, а Федор — шестую часть найденных денег.

Они открыли кошель и сосчитали его содержимое. Оказалось, что в нем 8 банкнот: из них одна трехрублевая, а остальные — банкноты достоинством в один, пять и десять рублей. Никто не мог получить свою часть без размена денег на более мелкие. Тогда крестьяне решили попросить разменять деньги первого же человека, которого встретят на дороге. И тут их догоняет верховой. Путники задержали его:

— Мы нашли кошелек с деньгами, — говорят они, — и хотим вот таким-то способом поделить деньги. Просим поменять нам рубль на мелкие.

— Я не буду менять вам рубль, вы дайте мне кошелек с деньгами: я доложу туда свой рубль и из тех денег, которые там будут, выдам каждому его часть, а себе оставлю кошелек.

Крестьяне были рады такому предложению. Верховой добавил в кошель свой рубль, затем первому крестьянину вручил $\frac{1}{3}$, вто-

[1] Емельян Игнатьевич Игнатьев (1869–1923) — русский математик, учитель. В 1908 году издал трехтомник занимательных задач «В царстве смекалки». Самые интересные задачи опубликованы в сборнике «Математические игры» (издательство «Качели», 2022). — *Примеч. ред.*

рому — $\frac{1}{4}$, третьему — $\frac{1}{5}$, четвертому — $\frac{1}{6}$ всех денег, а кошелек спрятал за пазуху.

— Спасибо большое, ребята! И вы довольны, и я доволен дележом, — сказал на прощание незнакомец и вскоре скрылся из виду.

Последние слова верхового обеспокоили крестьян. За что он поблагодарил их?

— Братцы, а сколько у нас всего бумажек? — спросил Митрофан.

Они посчитали — оказалось 8.

— А у кого трехрублевка?

Ни у кого ее не было.

— А ведь он нас надул! Давайте быстро посчитаем, на сколько же он обманул каждого!

И тут раздался возглас удивления:

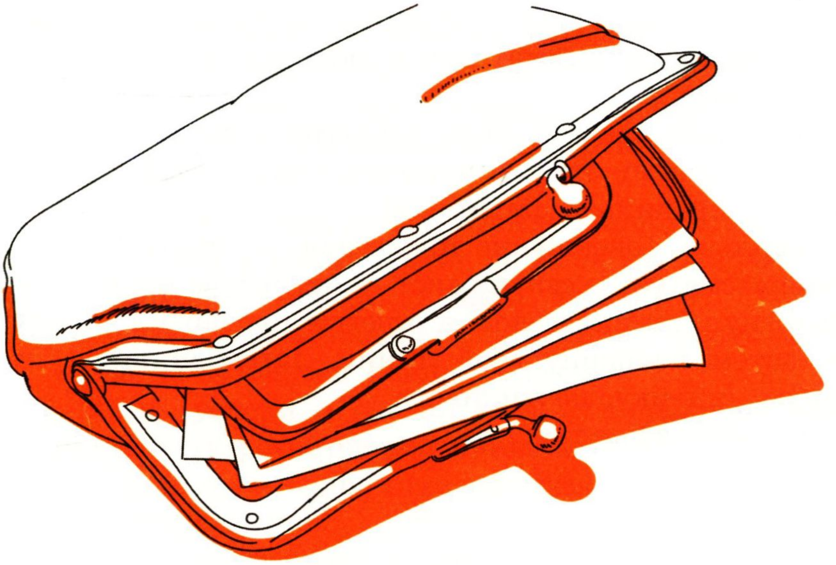
— Нет, ребята, я получил даже больше, чем мне полагалось! — воскликнул изумленный Василий.

— И я тоже! И я! — вторили ему Поликарп и Федор.

— И я получил на 25 копеек больше, — сказал Митрофан.

— Как же так? Он дал каждому больше, чем полагалось, а трехрублевка исчезла!

Сколько денег нашли крестьяне? Обманул ли их верховой? Какие банкноты он дал каждому?



3. КАК ГУСЬ И АИСТ РЕШАЛИ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ

Летела стая диких гусей. Навстречу им поднялся с пруда домашний гусь и закричал в восторге:

— Приветствую, приветствую вас, сотенная стая моих сородичей!

Гусак, вожак стаи, гагакнул в ответ:

— Нет, нас не сто гусей! Если бы нас было еще столько, да еще полстолько, да четверть столько, да ты вдобавок, то тогда была бы нас сотня. Ну а теперь, если хочешь, сосчитай, сколько нас в стае.

Домашний гусь опустился на воду пруда и задумался, сколько же гусей было в этой стае, пролетевшей над ним? Шутливый вопрос вожака не оставлял его в покое, но он не знал даже, с какой стороны приступить к решению загадки.

Тут он увидел на берегу пруда аиста; длинноногий вышагивал степенно, охотясь на лягушек. Аист пользуется в птичьем царстве славой прекрасного математика: не зря же он иногда часами неподвижно стоит на одной ноге и размышляет — несомненно, решает сложные задачи.

Обрадовался гусь, подплыл к аисту и рассказал ему о встрече со своими сородичами и о загадке, которую задал ему вожак, и в конце смиренно признался, что не знает, как приступить к ее решению.

— Хм, хм, — сказал аист. — Давай попробуем решить эту задачу вместе. Только будь внимателен и попытайся меня понять.

— Постараюсь!

— Что он тебе сказал? Если добавить к их стае еще столько, потом еще половину этого и четверть этого и тебя, гусь, то тогда будет сто. Я правильно запомнил?

— Правильно, совершенно правильно, — ответил гусь.

— Теперь смотри, — сказал аист, — что я тебе нарисую на песке.

Аист согнул длинную шею и клювом прочертил линию, рядом другую, затем половину этой линии, затем четверть, наконец, крошечную линейку, почти точку.

Рисунок выглядел так:

Гусь подплыл к самому берегу, вышел на песок и, переваливаясь с ноги на ногу, начал рассматривать рисунок, но ничего не мог понять.

— Понимаешь? — спросил аист.

— Еще нет! — ответил мрачно гусь.

— Ну, что же ты! То, что сказал тебе твой сородич, я нарисовал здесь. Если бы добавить к гусям, которых ты встретил, такую же стаю и еще половину стаи, и еще четверть стаи и еще одного гуся... Повтори, сколько тогда гусей должно было быть?

— Сто!

— А сколько будет без тебя?

— Девяносто девять.

— Хорошо! Уберем на нашем рисунке точку, которая обозначает тебя. Останется 99 гусей.

Аист постучал своим длинным клювом, и на песке остался такой рисунок:

— А теперь ты должен сам немного подумать. К четверти стаи если мы добавим половину стаи, сколько будет четвертей?

Гусь задумался, внимательно посмотрел на линии, нарисованные на песке, и сказал: «Половина и четверть — то же самое, что три четверти стаи».

— Да! Но у нас есть стая, и еще стая, и еще полстаи и четверть стаи — и это все дает в сумме число 99. Если мы все пересчитаем на четверти, сколько у нас будет таких четвертей?

Гусь, после некоторых колебаний, ответил: «Всех четвертей будет 11, и эти 11 четвертей равны 99 гусям».

— Ты делаешь успехи, — сказал аист. — Теперь повтори мне, к какому результату расчетов мы пришли.

— Мы определили, — бодро ответил гусь, — что в 11 четвертях стаи было бы 99 гусей.

— Так сколько гусей будет в одной четверти?

Гусь быстро разделил 99 на 11 и ответил: «В четверти стаи будет 9 гусей».

— А сколько во всей стае?

— Во всей стае четыре четверти. Эврика! — гагакнул изо всех сил гусь. — Есть решение загадки: я встретил стаю из 36 гусей!

И с большим восхищением и гордостью за свой род он начал думать о том, кто же лучший математик: аист, который сумел решить эту задачу, или тот гусак — вожак стаи, который смог ее так искусно составить...

4. Вычисление точного времени

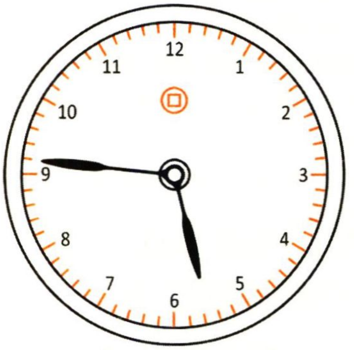
Когда мои карманные часы были в ремонте у часовщика, остановились настенные часы. Я пошел к знакомому, у которого, как мне известно, часы всегда идут очень точно, провел у него некоторое время, а когда пришел домой, совершенно точно установил свои настенные часы. Как я мог это сделать, если предварительно не знал, сколько времени потребуется, чтобы дойти из моей квартиры до квартиры моего приятеля?

Задача заключается в том, чтобы определить точное время моего возвращения домой. Для этого перед тем, как выйти из дома, я завел свои настенные часы, поставив стрелки на произвольное время; это время обозначим буквой A. Я сразу же пошел к своему знакомому и тут же по приходе записал, какое время показывают его часы; обозначим это время буквой B.

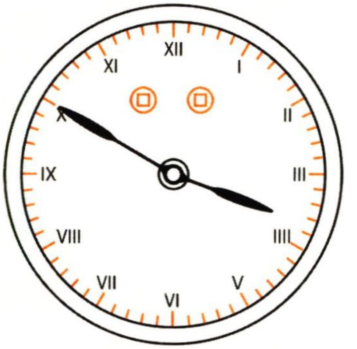
Время *A*
перед уходом из дома

Время *B*
у приятеля

Поговорив со знакомым (и выпив чашку кофе), перед тем как уйти, я снова посмотрел время на его часах; пусть это будет время C. Вернувшись домой, я зафиксировал, сколько времени показывают мои часы, поставленные наугад; обозначим это время D.



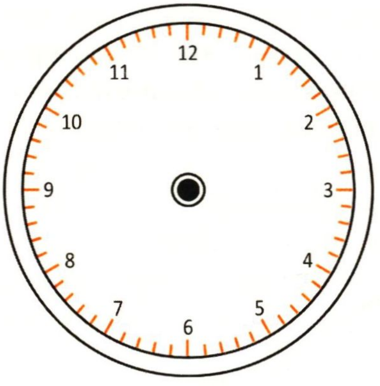
Время *C*
перед уходом домой



Время *D*
возвращение домой

По дороге домой я составил план действий, поэтому уже через минуту после моего возвращения настенные часы показывали правильное время; это было время E. Как я это сделал?

Время *E*
через минуту после возвращения на моих часах было точное время



5. КАК РАЗДЕЛИТЬ ЦИФЕРБЛАТ

A. Разделите циферблат линией на две части так, чтобы сумма чисел в обеих частях была одинаковой. Чему равна эта сумма?

B. Разделите циферблат двумя линиями на три части с равными суммами чисел.

C. Разделите циферблат на шесть таких частей.

6. НОВЫЙ ВАРИАНТ СТАРОГО ПАРАДОКСА ЗЕНО́НА

Точно в полночь или в полдень обе стрелки часов показывают 12. Час спустя часовая стрелка покажет цифру 1, а минутная стрелка — 12. Когда минутная стрелка достигнет 1, часовая стрелка переместится вперед на $\frac{5}{12}$ минутного деления; а когда минутная стрелка достигнет этой точки (через $5\frac{5}{12}$ мин. после начала часа), часовая стрелка уже продвинется дальше — и так до бесконечности.

Так что, по логике, минутная стрелка не должна опережать или даже догонять часовую стрелку!

Как объяснить этот парадокс?

7. ЕЩЕ НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ С ЧАСАМИ

A. Сколько раз в течение 12 часов минутная стрелка сравняется с часовой стрелкой?

B. Если настенные часы бьют 6 часов в течение шести секунд, то сколько секунд им понадобится, чтобы пробить 12 часов?

C. В какой-то из дней года трое городских часов пробили полдень — удивительно! — в одно и то же время. Оказывается, только одни из часов идут правильно, вторые спешат на 10 минут в день, а третьи каждый день опаздывают на 12 минут. Через сколько дней эти часы вновь одновременно пробьют двенадцать часов?

D. Часы A и часы B, бьющие одновременно, пробили 19 раз. Как определить время, которое они показывают, если известно, что начало боя на часах A запаздывает по отношению к часам B на две секунды, часы A бьют каждые три секунды, а часы B — каждые четыре секунды?

8. Как определить стороны света с помощью карманных часов

При помощи карманных часов можно в солнечный день достаточно точно определить четыре стороны света, то есть север, юг, восток и запад. Этот метод очень прост, и удивительно, что он не нашел широкого применения.

Чтобы определить направление, нужно, держа часы в руке, повернуть их так, чтобы часовая стрелка была направлена в сторону солнца. При этом точка, лежащая на обводе циферблата в середине между часовой стрелкой и числом XII, определит южное направление.

Если, например, часовая стрелка показывает время IV часа (как на нашем рисунке), то, направив часовую стрелку на солнце, мы увидим, что деление, среднее между делением IV и делением XII (то есть деление, обозначающее II часа), покажет нам направление на юг. В противоположном направлении будет север, налево будет восток, направо — запад.

Этот прием можно изменить следующим образом: нужно найти деление на циферблате посередине между делением, на которое указывает часовая стрелка, и числом XII и направить эту точку на солнце, тогда деление, соответствующее числу XII, покажет направление на юг.

Так, если часы показывают время IV часа, то на солнце следует направить деление на шкале, соответствующее цифре II. А линия, проведенная от центра часов к числу XII, покажет направление на юг.

Чтобы подтвердить вышесказанное, достаточно вспомнить, что в XII часов дня, в полдень, солнце, часовая стрелка и деление, соответствующее числу XII, лежат на одной линии, направленной к югу. Затем и солнце, и часовая стрелка будут двигаться в одном направлении, но часовая стрелка сделает полный оборот за 12 часов, а солнце — за 24 часа, то есть за вдвое больший промежуток времени. На этом и основан приведенный способ определения сторон света.

Следует добавить, что до полудня нужно искать среднюю точку между часовой стрелкой и цифрой XII в направлении вращения стрелок, а после полудня — в противоположном направлении.

Примечание. Найденное таким образом направление не будет абсолютно точным. Ошибка будет вызвана размещением часов в горизонтальной плоскости вместо плоскости небесного экватора. При этом также не учитывается разница между реальным солнечным временем и региональным временем, по которому идут наши часы. Но этот метод вполне пригоден для того, чтобы сориентироваться на местности.

Если стороны света нужно определить в Южном полушарии и часовая стрелка направлена на солнце, то линия, делящая пополам угол между часовой стрелкой и делением числа XII, будет указывать северное направление.

9. Как продать целые яйца, продавая по половинке яйца

Одна торговка рассказала такую, казалось бы, невероятную историю:

— Сегодня утром первая покупательница купила у меня сразу половину всех яиц и еще половину яйца, вторая тоже купила половину оставшихся яиц и половину яйца, третья снова купила половину оставшихся яиц и половину яйца — и то же самое было с четвертой, пятой и шестой покупательницами. И в корзине осталось всего одно яйцо.

— Вы рассказываете невероятные вещи! Кто бы стал покупать половину яйца?

— Но я никому не продавала половину яйца, только целые!

Здесь вмешался в разговор студент, сказав:

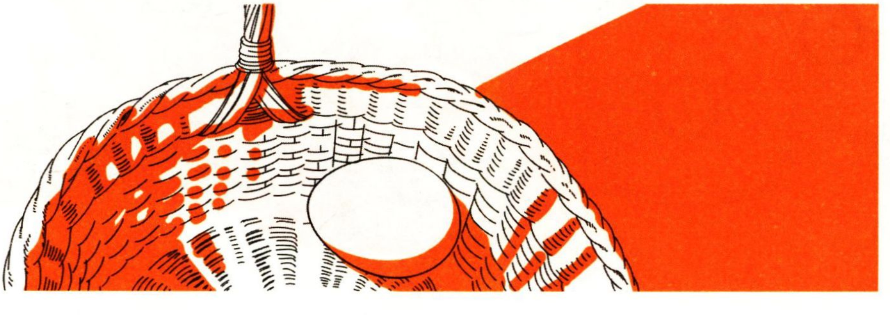
— Я был седьмым клиентом. Я купил половину оставшегося и еще половину яйца.

Торговка воскликнула:

— Я помню, так и было! Молодой человек купил последнее яйцо!

Весь секрет в том, что каждый раз в корзине было нечетное количество яиц.

Предположим, в какой-то момент в корзине было $2r + 1$ яйцо. Покупательница забрала половину этого запаса, или $r + \frac{1}{2}$ яйца, и еще $\frac{1}{2}$ яйца, то есть она взяла целые яйца — не половинки! В корзине осталось r яиц. Согласно истории, рассказанной торговкой, число оставшихся яиц снова должно быть нечетным. А теперь вопрос: сколько яиц было в корзинке у торговки в начале продажи?



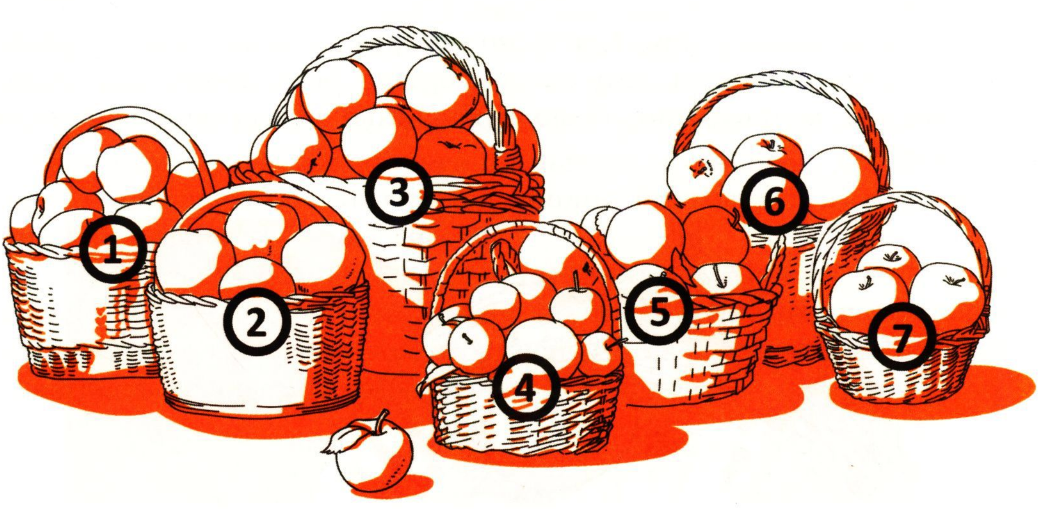
10. ЗАГАДОЧНЫЙ ПОЕЗД

Товарный поезд был отправлен по маршруту следования, при этом известно, что в нем было меньше сотни вагонов. На первой станции была отцеплена четвертая часть всего состава и еще половина вагона, а остальная часть поезда была отправлена дальше. На второй станции снова была отцеплена четвертая часть всех вагонов (их число уже было уменьшено на первой станции) и еще половина вагона, и поезд с оставшимися вагонами был отправлен по маршруту следования. На третьей станции была проделана точно такая же операция, а остальная часть поезда отправлена в пункт назначения.

Сколько вагонов было в составе, когда он покинул третью станцию?

11. ЯБЛОЧНАЯ ЗАДАЧКА

В семи корзинах находилось некоторое количество яблок. Если из первой корзины переложить в каждую иную корзину столько яблок, сколько в той уже имеется, и повторить то же самое по очереди с каждой последующей корзиной, то в итоге во всех корзинах окажется по 128 яблок. Можно ли рассчитать (без использования алгебры), сколько яблок изначально было в каждой корзине?



12. Сколько воды в бочке

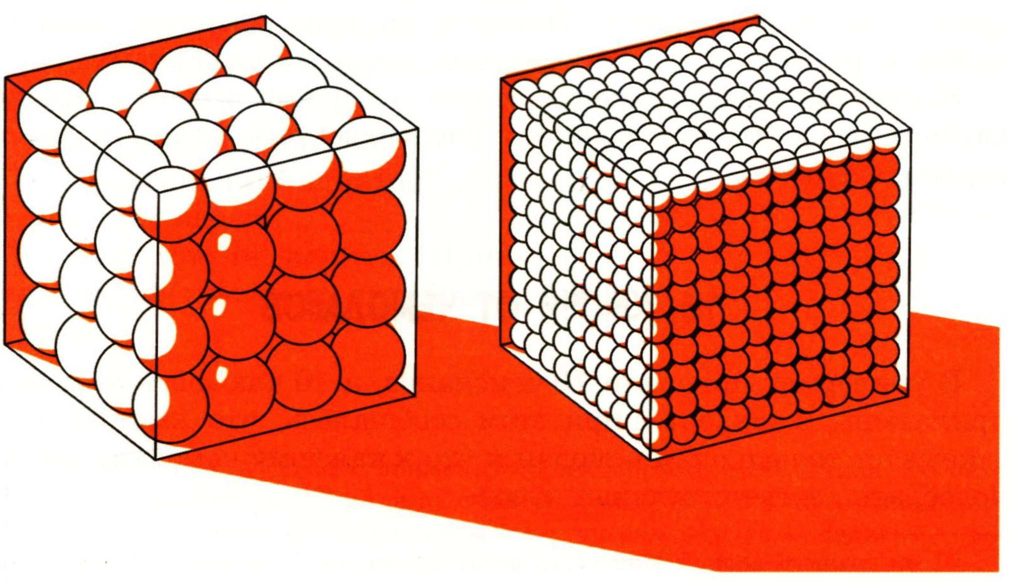
Два садовника спорили, сколько же воды в бочке, — им нужно было растворить калиевую соль для удобрения растений. Один из них утверждал, что воды в бочке больше половины, а другой настаивал, что ее меньше половины. Как можно узнать, кто из них прав, не используя ни палку, ни веревку, но что-либо другое, что можно применить для измерения уровня воды?

13. Ящики с шарами

Фабрика отправила заказчику ящик кубической формы со стальными шарами. Пустой ящик весил 2 кг, а его вес с шарами составлял 18 кг. В ящике было 64 одинаковых шара, расположенных в четыре слоя из четырех рядов по четыре шара.

В другом таком же ящике было 1000 шариков, уложенных в 10 слоев, и в каждом слое было 10 рядов по 10 шариков. Сколько весил второй ящик? И который из них весил больше?

А в заключение пусть читатель вычислит, сколько бы весил такой ящик с дробью, уложенной ровными слоями!



14. Горькое лекарство

Ребенок заболел. Врач прописал лекарство и велел давать больному от 15 до 20 граммов за прием.

Мать взяла рюмочку конусной формы, в которой помещалось как раз 20 мл[1] микстуры. Но лекарство было горькое, сынишка упирался и говорил, что выпьет только половину: «Вот досюда!» — и показал половину высоты рюмочки. Мать сначала уговаривала его, но после уступила, и ребенок выпил «половину» лекарства.

Врач на это сказал:

— Вот и хорошо! Скоро будет здоров!

Почему он так решил?

15. Как расставить охрану

Лейтенант с подразделением солдат вошел на квадратный двор арсенала, чтобы расставить охрану. Он поставил по четыре солдата вдоль каждой стены и ушел. Через некоторое время пришел капитан и, полагая, что охраны недостаточно, поставил вдоль стен по пять солдат. Наконец, во дворе арсенала появился майор и разместил по шесть солдат вдоль каждой стены.

Каким было расположение солдат в первом, втором и третьем случаях, если все три офицера распоряжались одним и тем же подразделением?

16. Ключи от чемоданов

В универмаг прислали 10 чемоданов, а 10 ключей к ним были приложены в конверте, при этом сообщалось, что каждый ключ открывает только один чемодан и что к каждому чемодану следует подобрать соответствующий ключ.

[1] 1 миллилитр водной микстуры весит примерно 1 грамм. — *Примеч. ред.*

Сотрудник, который получал эти чемоданы, вздохнул:

— Какая же предстоит морока с подбором ключей! Знаю я, как бывает: начнешь подбирать ключ к первому чемодану, и подойдет только десятый ключ! Десять попыток на каждый чемодан и 100 попыток на десять чемоданов!

Так ли это?

17. КАК БРОСАТЬ МЯЧИК В КРУГУ ИЗ 12 ЧЕЛОВЕК

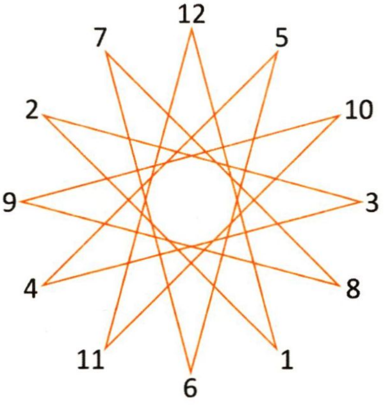
Двенадцать девочек встали в круг и начали бросать мяч. Мяч сначала бросали по кругу влево, затем вправо, но это было не очень интересно.

— Давайте бросать каждой второй, — предложила одна девочка, — будет сложнее поймать...

— Но нас 12, и в этом случае только половина будет играть с мячом, — возразила Ханка, которая ориентировалась в числовых комбинациях почти так же, как и сама Лилавати[1]...

— Ну, тогда каждой третьей!

— Еще хуже: только четверо будут играть, а остальные будут просто смотреть на них... Если мы хотим, чтобы играли все, то должны бросать мяч каждой пятой девочке. Другого пути нет.



— Почему? Почему? — стали спрашивать все. — А если седьмой?

— Будет так же, только в обратном порядке.

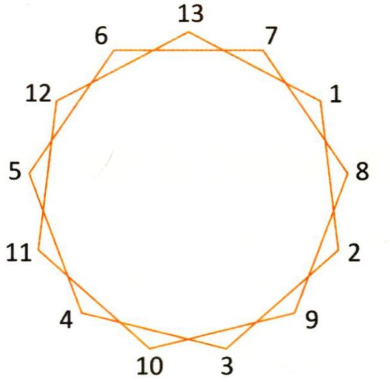
— А если одиннадцатой?

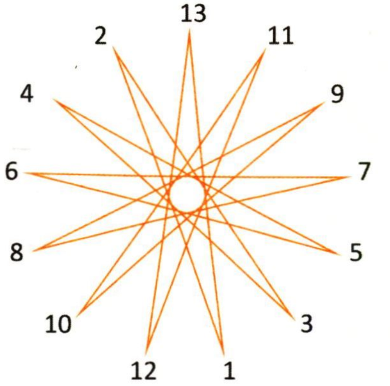
— Каждой одиннадцатой? Да ведь мы уже так играли...

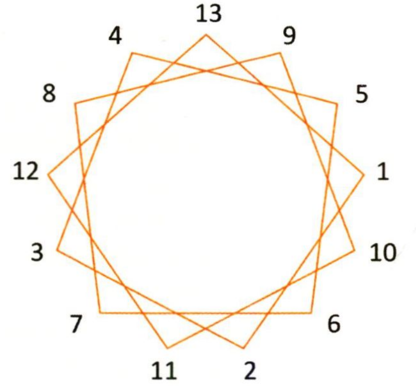
Не все хотели верить. Пришлось убеждать на рисунках, что Ханка была права.

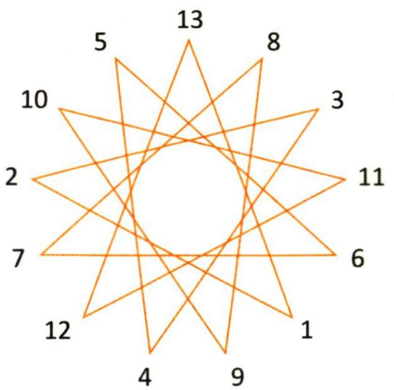
[1] Лилавати — имя дочери знаменитого индийского математика XII века Бхáскары, называемого Асари, что означает «мудрец», и в то же время это название первой части его великого математического труда «Сиддханта», посвященного дочери.

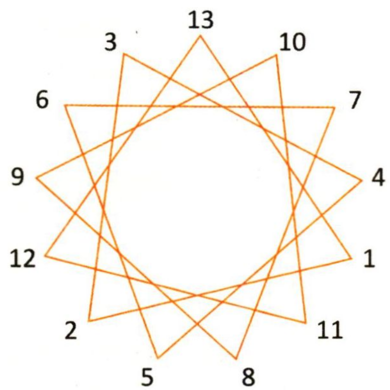
Если бы для игры встали 13 девочек, то можно было бы кидать мячик каждой второй или третьей, четвертой, пятой, шестой. А если бы стали кидать каждой седьмой, то было бы впечатление, что мячик обегает круг в обратном направлении.











18. АВТОМОБИЛИ И САМОЛЕТ

Расстояние между Варшавой и Познанью — 300 км. В один и тот же день, в один и тот же час, минуту и секунду два автомобилиста выехали из этих городов навстречу друг другу со скоростью 50 км/ч. Одновременно с ними из Варшавы вылетел самолет со скоростью 100 км/ч. Самолет, миновав автомобиль, едущий из Варшавы, полетел навстречу второму, выехавшему из Познани. Повстречав его, самолет немедленно развернулся и полетел навстречу первому автомобилю, а достигнув его, снова развернулся и направился навстречу второму — так самолет продолжает свой полет вперед и назад, пока автомобилисты не встретятся. Сколько километров пролетел самолет?

19. ЗАВЕЩАНИЕ МАХАРАДЖИ

Один индийский махараджа оставил в наследство своим шести сыновьям шкатулку с крупными алмазами одинаковой стоимости и распорядился, чтобы первый сын взял один алмаз и $\frac{1}{7}$ остальных, второй — два алмаза и $\frac{1}{7}$ оставшихся и т. д. После проведенного таким образом раздела оказалось, что каждый сын получил одинаковое количество алмазов. Сколько же было всего алмазов?

20. ХОЖДЕНИЕ ПО ЛЕСТНИЦЕ

Одна организация имеет отделы доставки на каждом этаже семиэтажного дома. С этажа на этаж ведут лестницы по 18 ступеней, а к входной двери с улицы ведут еще шесть ступеней.

Однажды курьер должен был доставить посылки одинакового размера в каждый отдел, причем он мог унести за один раз только одну посылку. По скольким ступеням он должен будет подняться и спуститься, чтобы доставить все посылки к месту назначения?

21. ШЕЛКОВАЯ НИТЬ

Один оригинал сделал интересный расчет на основе данных, которые — это следует признать — проверить достаточно трудно.

Фабрики города Лиона, известного производством шелковых тканей, используют ежегодно один миллион килограммов шелка. Один грамм шелка прядут четыре шелковичных червя, а это значит, чтобы обеспечить шелковую промышленность Лиона, требуется четыре миллиарда шелковичных червей. Один шелковичный червь вырабатывает нить длиной 500 метров, поэтому четыре миллиарда этих маленьких прях спрядут нить длиной 2000 миллиардов метров, то есть два миллиарда километров.

Длина этой нити в 13 раз больше расстояния от Земли до Солнца и в 5200 раз больше расстояния от Земли до Луны. Этой нитью можно обмотать Землю по экватору 25 000 раз, а Луну — 92 000 раз.

22. ПОТЕРЯННЫЕ ДЕНЬГИ

Один человек потерял мешочек с двадцатикопеечными монетами. Он не знал точно, сколько монет было в мешочке, помнил только, что когда он пересчитывал монеты по две, по три, а потом по пять штук, у него всегда оставалась одна монетка, а когда он сосчитал их по семь штук, у него ничего не осталось. Сколько денег было в этом мешочке?

Приведем еще одну подобную задачу, чтобы читатель мог решить ее самостоятельно (это очень старая задача, передаваемая через многие поколения).

В корзине были яйца. Их подсчитывали по-разному: то по две штуки, то по три, четыре, пять или даже по шесть штук, и всегда оставалось одно яйцо. И только когда было посчитано по семь яиц, ничего не осталось.

Сколько яиц было в корзине?

23. ТУРИСТЫ И ВАРЕНИКИ

Трое туристов, уставших и голодных, пришли на турбазу, чтобы отдохнуть и перекусить. Они заказали вареники и попросили принести их в комнату, где они поселились. В ожидании этих вареников туристы уснули. Когда вареники были сварены, их принесли в комнату и поставили на стол, не разбудив спящих.

Один из туристов, проснувшись, увидел вареники, сосчитал их, съел третью часть и улегся спать.

Затем проснулся второй турист, сосчитал вареники, съел третью часть и тоже пошел спать.

Наконец третий турист проснулся и сделал то же самое.

Осталось восемь вареников. Как сосчитать, сколько вареников принесли туристам? Кому должны достаться оставшиеся вареники, чтобы всем было поровну?

24. ФОРМИРОВАНИЕ СОСТАВОВ

Железнодорожная станция должна была отправить 11 поездов по 35 угольных вагонов в каждом составе. Чтобы освободить несколько локомотивов для другой работы, машинисты решили прицепить к каждому поезду столько раз по пять вагонов, сколько локомотивов будет отправлено по другим маршрутам. Таким образом, все угольные вагоны были прицеплены к меньшему числу локомотивов.

Сколько локомотивов было освобождено для другой работы?

25. ТРИ БОЧОНКА С ВОДОЙ

Прошлые века оставили нам много задач по переливанию жидкостей. Однако это не задачи типа «из пустого в порожнее»!

Вот одна из таких задач.

Было три одинаковых бочонка, но в них было разное количество воды. Из первого бочонка во второй и третий было перелито столько воды, сколько в них было до этого. Затем из второго бочонка перелили в третий и в первый бочонок столько воды, что количество воды в каждом из них удвоилось. Наконец, из третьего бочонка перелили в первый и второй столько, сколько в каждом из них уже было, в результате в каждом бочонке оказалось по 24 литра воды. Во время переливания только однажды один из бочонков был заполнен до краев.

Нужно найти вместимость бочонков и рассчитать, сколько литров воды было в каждом из них изначально.

26. СБОР ГРИБОВ

Дед с четырьмя внуками отправился в лес по грибы. В лесу в поисках грибов они разошлись в разные стороны. А через полчаса дедушка сел под деревом, чтобы отдохнуть; посчитал собранные грибы, и оказалось, что нашел он 45 грибов. Вскоре прибежали внуки — все с пустыми руками; никто не нашел ни одного гриба.

— Дедушка, — попросил один, — дай мне немного своих грибов, это принесет мне удачу!

— И мне, дедушка!

— И мне дай!

Дед дал грибов каждому внуку и в итоге раздал все свои грибы. Мальчики снова разбежались по лесу в поисках грибов, но результаты были разные. Один мальчик нашел два гриба, второй, наоборот, два гриба потерял, третий нашел столько же, сколько получил от деда, а четвертый потерял половину данных дедом грибов.

Но когда мальчики пришли домой и посчитали свою добычу, оказалось, что у всех одинаковое количество грибов.

Сколько грибов получил каждый мальчик от своего дедушки и сколько каждый принес домой?

27. Обмен зайцев на кур

Ефим Войтяховский[1], русский математик, в своей книге, изданной более ста лет назад, приводит такую задачу.

Крестьянин обменивал зайцев на кур, причем за трех кур он давал двух зайцев. Число яиц, которые снесла каждая курица, составляло третью часть всех полученных кур. Крестьянин, продавая яйца, брал за каждые девять яиц столько копеек, сколько каждая курица снесла яиц, и за все он получал 24 алтына[2].

Сколько было кур и сколько зайцев?

28. Первые проблески гениальности

Интересный случай из детских лет известного математика Карла Гаусса[3] приводят его биографы.

Когда Карлу исполнилось семь лет, его отдали, как полагается, в начальную школу. Арифметику в этой школе преподавал пожилой учитель, известный своей строгостью. Иногда, чтобы иметь возможность проверить работы учеников других классов, он давал мальчикам чуть более сложное задание, которое дети должны были самостоятельно решать в полной тишине. Было заведено, что каждый мальчик, решив задачу, относит свою тетрадь учителю и кладет ее на кафедру.

На одном уроке учитель продиктовал ученикам следующее задание: «Найти сумму всех чисел от 1 до 40». Учитель был уверен, что бóльшую часть урока ученики будут заняты этим подсчетом. Как же он был удивлен, когда вскоре он услышал веселый крик: «Я уже решил!» В ту же минуту перед учителем оказалась тетрадь, подписанная: *Карл Гаусс*. Наконец, когда после долгих подсчетов все ученики положили свои тетрадки на кафедру, учитель начал их проверять. Большинство учеников, несмотря на старательные

---

[1] Ефим Дмитриевич Войтяховский — русский математик, учитель. В конце XVIII века издал «Теоретический и практический курс чистой математики». Почти полвека учебник оставался одним из самых распространенных математических пособий для русской средней школы. — *Примеч. ред.*

[2] Алтын — старое название российской трехкопеечной монеты. — *Примеч. ред.*

[3] Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — немецкий математик, механик, физик, астроном. Один из величайших математиков всех времен. — *Примеч. ред.*

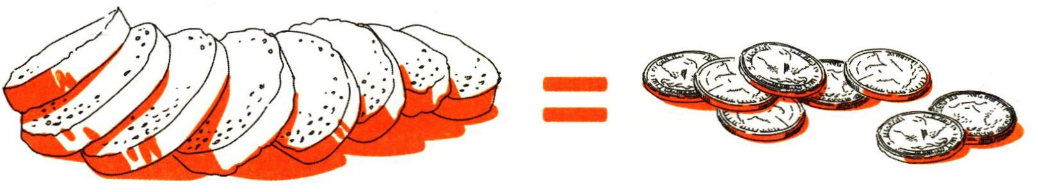
вычисления, получили неверный результат, в то время как в тетради Гаусса было написано только одно число — и это был правильный ответ.

Как ему удалось найти ответ так быстро?

29. СПРАВЕДЛИВАЯ ОПЛАТА

Два араба продвигались через пустыню. До ближайшего оазиса оставалось еще полдня пути. В их запасах продовольствия оставалось только восемь сухарей: у одного было три сухаря и пять — у другого. По дороге им встретился одинокий путник, измученный голодом, они сжалились над ним и на привале разделили с ним свои запасы. В благодарность при расставании этот путник дал своим спасителям восемь одинаковых золотых монет.

Как путешественники должны были поделить эти деньги?



Вот два других варианта той же самой задачи.

I

Два мальчика, Михаил и Павел, собирали в лесу хворост, устали и решили поесть. У Михаила было четыре ломтика хлеба, а у Павла — семь. В этот момент к ним подошел путник и обратился со словами:

— Ребята, я долго проблуждал в лесу, а до деревни еще далеко. Голод меня замучил, поделитесь со мной тем, что у вас есть!

— Хорошо, садись! Чем богаты — тем и рады.

После еды путник достал из кармана рубль и десятикопеечную монету. Вручая деньги мальчикам, он сказал:

— Вы поделились со мной всем своим хлебом, я тоже отдам вам все, что у меня есть.

Когда путник ушел, мальчики начали спорить.

— По-моему, — заявил Михаил, — мы должны разделить деньги пополам.

А Павел не соглашался:

— За 11 кусочков хлеба нам заплатили 1 рубль 10 копеек. Так что на один ломтик приходится 10 копеек. У тебя было четыре, за это тебе приходится только 40 копеек, у меня было семь ломтиков, так что мне полагается 70 копеек.

Кто из мальчиков был прав?

II

Два ночных сторожа решили приготовить на ужин кашу; один насыпал в горшок 200 граммов крупы, а второй — 300 граммов. Когда каша была готова, к ним подошел третий сторож и попросил разрешение поучаствовать в ужине за плату. Поев, он заплатил 75 копеек.

Как разделить полученные деньги между двумя владельцами крупы?

30. ПАРОХОД И ПЛОТЫ

Пароход идет от Варшавы до Гданьска два дня. Тот же пароход с такой же осадкой идет из Гданьска в Варшаву три дня. Сколько дней из Варшавы в Гданьск плывут плоты?

Можно подумать, что эта задача не может быть решена, потому что данных слишком мало: неизвестно расстояние от Варшавы до Гданьска по Висле и с какой скоростью плыли плоты. И все же...

И все же можно решить эту задачу.

31. РЕГЛАМЕНТИРОВАННОЕ ВОЖДЕНИЕ

Автомобилист принял участие в конкурсе «регламентированного вождения». Согласно регламенту он должен проехать определенный участок дороги со средней скоростью 48 км/ч. Между тем он проехал полпути со скоростью 60 км/ч. До какого значения он должен уменьшить скорость автомобиля на второй половине пути, чтобы средняя скорость упала до 48 км/ч?

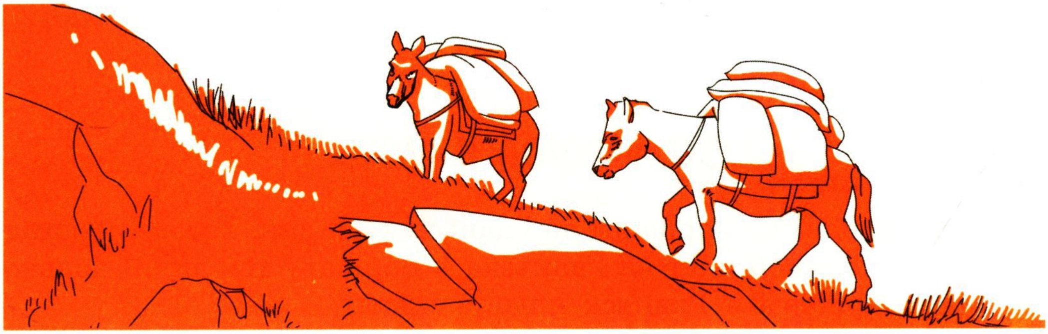
Если читатель считает, что другую половину дороги ему придется ехать со скоростью 36 км/ч, то ошибается, хотя $\dfrac{60 + 36}{2} = 48$.

32. Осел и мул

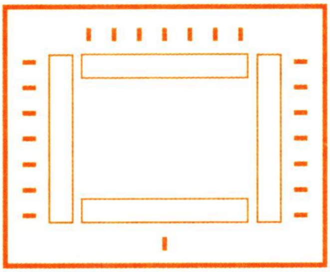
Осел и мул, навьюченные мешками, с трудом поднимались в гору. Осел начал жаловаться мулу на непосильную тяжесть, которую человек взвалил на него. Но мул ответил ему:

— Ленивое животное, как ты можешь жаловаться! Если бы я взял один из твоих мешков, у меня было бы их в два раза больше, чем у тебя, а если бы ты взял один из моих, тогда мешков у нас было бы поровну.

Сколько мешков несло каждое животное?



33. Хитроумные туристы



В обеденном зале придорожной гостиницы вдоль стен стояли четыре стола. Вошла группа голодных туристов, вернувшихся из похода, всего их было 21 человек. Они заказали обед и пригласили хозяина составить им компанию, пообедать с ними. Все они расположились за столиками так, что туристы сидели за тремя столами по семь человек за каждым, а за четвертым столом сидел хозяин гостиницы.

Туристы среди разговоров и шуток предложили хозяину, что заплатит за всех тот, кто останется последним при счете по кругу «семерками». Хозяин неосмотрительно согласился. Стали считать всех, включая хозяина, по ходу часовой стрелки. Каждый седьмой вставал и покидал гостиницу. Последним остался, к его неудовольствию, сам хозяин.

С кого начали отсчет?

34. НЕОСТОРОЖНОЕ ГОСТЕПРИИМСТВО

В старинной, 1677 года, математической книге Г. Харсдёрффера[1] *Delicae mathematicae* («Математические развлечения») приведена следующая задача.

Один человек, пригласив своих шестерых приятелей на дружеский ужин и беседу, настоял, чтобы они пообещали ему, что будут приходить к нему на ужин столько раз подряд, сколько раз все, включая его самого, смогут сменить порядок мест за круглым столом. Сколько лет его друзья будут ежедневно посещать гостеприимный дом неосторожного хозяина?

35. ПУТЬ ДО ШКОЛЫ

Мальчик жил далеко от школы и ездил на занятия на велосипеде. Он был великим педантом и везде применял «число и меру».

Однажды он проехал полпути со скоростью, при которой велосипедное колесо совершало два оборота в секунду, а вторую половину дороги он проехал со скоростью, при которой велосипедное колесо совершало три оборота за две секунды. Вся дорога заняла у него при этом 35 минут. Мальчик подумал, что если он половину дороги проехал со скоростью два оборота колеса в секунду, а вторую половину со скоростью три оборота колеса в течение двух секунд, то средняя скорость составляла пять оборотов в течение трех секунд — и именно с такой скоростью он поехал

---

[1] Георг Филипп Харсдёрффер (1607–1658) — немецкий писатель, переводчик, эрудит. — *Примеч. ред.*

домой. Однако оказалось, что обратная поездка заняла 36 минут, а не 35, как он ожидал.

Мальчик подумал, что он, вероятно, незаметно замедлил темп и поэтому потерял одну минуту.

На другой день мальчик проехал полпути со скоростью два оборота колеса в секунду, а вторую половину пути со скоростью три оборота в секунду, и тогда оказалось, что вся дорога заняла 25 минут. Мальчик решил, что на обратном пути он будет ехать со скоростью пять оборотов колеса за две секунды, или $2\frac{1}{2}$ оборота в секунду. Но вместо ожидаемых 25 минут он ехал всего 24 минуты.

И снова он подумал, что, вероятно, невольно ускорил темп и именно поэтому он сэкономил одну минуту. Но его удивило, что когда вчера он ехал медленно, то еще больше замедлился, а сегодня — при быстрой езде — еще больше ускорился.

Тогда он решил все посчитать, чтобы понять, в чем причина несоответствия реального времени пути и предполагаемого.

Он измерил длину окружности велосипедного колеса — она составляла 2,25 м. В первый день он возвращался домой со скоростью пять оборотов колеса за три секунды; было нетрудно сосчитать, что скорость составляла 3,75 м/с, или 225 м/мин. А поскольку обратный путь занял 36 минут, длина пути составляет 8100 м.

А как прошла поездка в школу? Первую половину дороги, то есть 4050 м, он двигался со скоростью два оборота в секунду, то есть 4,5 м/с. Эта первая половина пути заняла $4050 : 4{,}5 = 900$ секунд, или 15 минут. Вторую половину пути он ехал со скоростью три оборота в две секунды, то есть 3,375 м/с; вторая половина пути заняла у него $4050 : 3{,}375 = 1200$ секунд, или 20 минут. Итого: весь маршрут занял $15 + 20 = 35$ минут, а не 36 минут!

Куда, скажите на милость, подевалась минута?

36. Это невозможно!

Некая итальянка, отправляя на рынок трех дочерей с апельсинами, дала самой старшей 50 штук, средней 30 штук, а младшей, которая была еще ребенком, положила в корзинку только 10 апельсинов. Она приказала продавать апельсины как можно выгоднее, но по одной и той же цене, чтобы они не составляли друг другу конкуренции.

Каково же было изумление матери, когда девочки вернулись и сказали, что они все сделали так, как она им приказала, и что все трое получили от продажи равные суммы.

— Как так может быть, что, продавая по одинаковым ценам, вы получили одинаковые суммы за 50, 30 и 10 апельсинов?! Это невозможно! Вы шутите!

И все же это вполне возможно: девочки продали самые красивые апельсины по 15 сольдо, а остальные по 5 сольдо за 7 штук. У младшей из них было три больших красивых апельсина, у средней сестры — два, а у самой старшей — только один.

37. Изобретательные торговцы

Ирландский ученый монах Алкуин, современник Карла Великого, в своей рукописи, озаглавленной *Propositiones ad acuendos juvenes* («Задачи для оттачивания молодого ума»), приводит такую парадоксальную задачу.

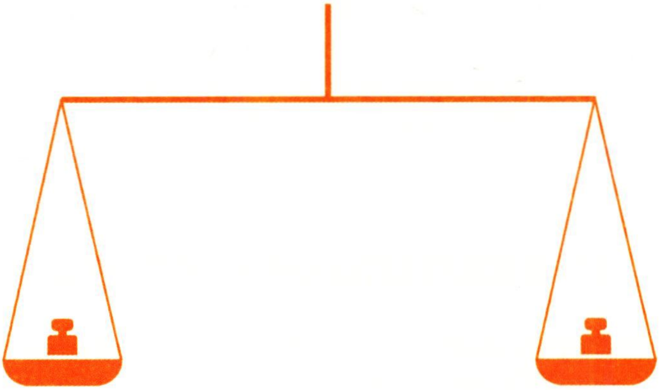
Два торговца купили совместно стадо свиней и заплатили 100 монет, называемых солидами (от латинского *solidus*). Когда они начали продавать свиней, никто не хотел давать им больше, чем цена, за которую они купили сами, то есть по два солида за пять штук. Но как же продавать, не получая прибыли? Подумав, они решили разделить стадо на две части. Так они и сделали и продали свиней по цене два солида за пять штук, но при этом они не только вернули свои деньги, но и получили прибыль.

Как можно разрешить этот парадокс?

38. ЗАТРУДНЕНИЕ ПРОДАВЦА

Один продавец заметил, что у рычажных весов, которыми он пользовался, одно плечо длиннее, поэтому они не показывают правильный вес. Он решил отправить весы для регулировки, но так сложилось, что ему сначала пришлось отвесить определенное количество товара покупателю. Не желая отпускать товара ни слишком много, ни слишком мало, он решил взвесить половину товара на одной тарелке, а вторую — на другой.

Когда он похвастался своей остроумной идеей знакомому математику, тот после минутного размышления разочаровал его, указав на неправильность его суждений. Честный продавец отвесил товара больше, чем следовало.



39. ТРАНСПОРТ С УГЛЕМ

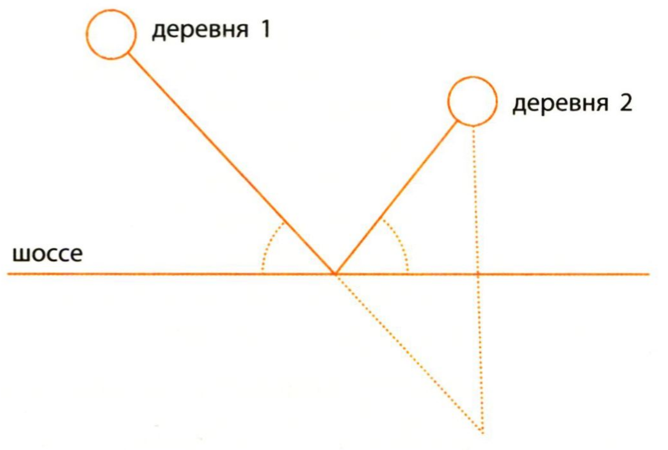
На электростанцию прибыло 500 тонн угля в 18 вагонах. Вагоны вмещали по 15, 20 и 30 тонн угля. Сколько вагонов каждого типа было в составе?

40. ГДЕ СЛЕДУЕТ ЖДАТЬ ПОЧТУ?

На некотором расстоянии от прямолинейного шоссе находятся две деревни. По этому шоссе раз в день проезжает почтовая машина. Деревенские почтальоны договорились, что по очереди (в один день почтальон из одной деревни, а на второй день — из другой) будут выходить на шоссе и забирать почту. Причем почтальон, забирающий почту, отнесет газеты и письма сначала в соседнюю деревню, а затем с остальной корреспонденцией вернется к себе.

В каком месте на шоссе должен ждать почтальон, чтобы маршрут его передвижений был наикратчайшим?

Эта проблема является достаточно существенной, ведь даже лишние 100 метров в день составят для почтальонов в течение года $36\frac{1}{2}$ ненужных километра, а также потерю сил и времени.



41. Неродившиеся наследники

Молодой мужчина серьезно заболел. Чувствуя приближение смерти и зная, что у его жены скоро родится ребенок, он вызвал нотариуса, чтобы написать завещание. Муж распорядился своим имуществом таким образом: если родится сын, то мать получит только половину того, что будет принадлежать сыну, а если дочь, мать получит сумму, вдвое большую, чем дочь. Но родились... близнецы: сын и дочь. Как должно быть разделено наследство?

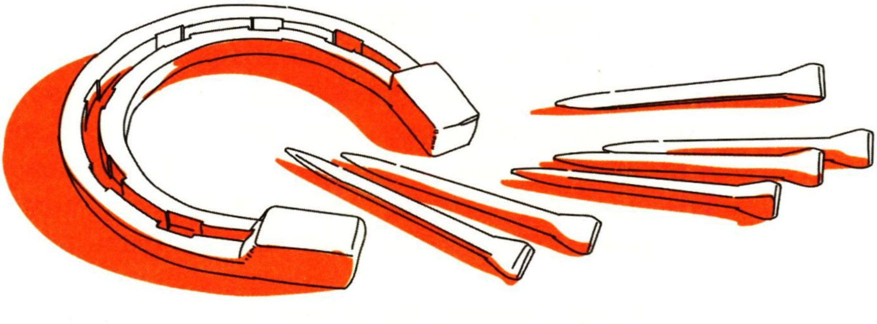
Вышеприведенная задача является вариантом очень старой, известной с римских времен юридической проблемы, которая звучала так.

Некто, умирая, оставил свою жену в ожидании ребенка; он сделал завещание, по которому в случае появления на свет ребенка мужского пола сын получил бы $\frac{2}{3}$ наследства, а его мать $\frac{1}{3}$; а если бы родилась дочь, то она унаследовала бы $\frac{2}{3}$ часть, а ее мать — $\frac{1}{3}$ оставленной собственности. Родились близнецы. Как исполнить волю завещателя?

42. Сколько стоят гвозди в подковах?

В учебнике русского математика Л. Магницкого, изданном в 1703 году[1], мы находим следующий математический анекдот.

Некий торговец продал лошадь за 156 рублей. Но вскоре после этой сделки крестьянин передумал и начал приставать к торговцу, чтобы тот забрал лошадь и вернул ему деньги, потому что эта лошадь не стоит такой большой суммы. Тогда торговец предложил ему другую сделку: «Если считаешь, что лошадь слишком дорогая, я отдаю ее тебе бесплатно, а ты купишь у меня только гвозди в ее подковах. Ты заплатишь мне дешево: за первый гвоздь — полушку (полушка = $\frac{1}{4}$ копейки), за второй гвоздь — две полушки, за третий — копейку и т. д.» Крестьянин подумал, что не может в таком случае стоимость всех гвоздей[2] превысить каких-нибудь 10 рублей, и охотно согласился на такое предложение. Крестьянин обманулся? На сколько рублей?



[1] Леонтий Филиппович Магницкий (1669–1739) — русский математик, учитель, автор первого в России учебного пособия по математике «Арифметика, сиречь наука числительная». — *Примеч. ред.*

[2] В одной подкове шесть гвоздей. — *Примеч. ред.*

43. Выцветшие рукописи

Были найдены очень ценные старинные математические рукописи, которые из-за неправильного хранения выцвели настолько, что различимы были только контуры некоторых цифр.

Нечитаемые цифры обозначены звездочками. На их место следует вставить цифры, которые там были первоначально. Известно, что в первом ряду примеров было сделано сложение, а во втором — вычитание.

$$\begin{array}{r} * \; 8 \; 4 \; * \\ +\; 2 \; * \; * \; 3 \\ \hline 6 \; 5 \; 2 \; 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \; * \; 5 \\ +\; * \; * \; 1 \; 7 \\ +\; 5 \; 8 \; * \; * \\ \hline * \; 0 \; 8 \; 4 \; 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \; * \; 1 \; 7 \\ +\; * \; 4 \; * \; 8 \\ \hline 6 \; 8 \; 1 \; * \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \; * \; * \; 7 \\ -\; * \; 3 \; 5 \; * \\ \hline 6 \; 1 \; 7 \; 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \; * \; 5 \; 7 \\ -\; * \; 9 \; 8 \; * \\ \hline 4 \; * \; 6 \end{array}$$

Воссоздание этих цифр не представляет большого труда. Более сложной будет задача восстановления цифр в тех местах рукописи, где производилось умножение или деление.

$$\begin{array}{r} * \; * \; * \\ \times \quad 4 \; 5 \; 7 \\ \hline * \; * \; * \; * \\ 1 \; 7 \; 0 \; 5 \; \\ * \; * \; * \; * \;\; \\ \hline * \; * \; * \; * \; * \; * \end{array} \qquad \begin{array}{r} * \; * \; * \; 3 \\ \times \quad * \; * \; * \\ \hline * \; 7 \; 0 \; * \\ * \; 2 \; 1 \; 3 \; \\ * \; * \; * \; 9 \;\; \\ \hline * \; * \; * \; * \; * \; * \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} * \; * \; 8 \; * & * \; * \; * \\ \hline * \; * \; * \; * \; * \; * & \\ \underline{* \; * \; *} & \\ 3 \; 0 \; 2 \; * & \\ \underline{* \; 6 \; 9 \; 5} & \\ * \; * \; 1 \; 1 & \\ 3 \; * \; 8 \; * & \\ 2 \; * \; 1 \; * & \\ \underline{* \; * \; * \; *} & \end{array}$$

Есть еще более сложные задачи с двумя выцветшими рукописями, которые приводят американские математики. Первая известна как *проблема четырех четверок*, вторая — *проблема семи семерок*. Вот они.

```
      * 4 * * | * * *
--------------------
* * * * * * 4 |
  * * *
  -----
  * * 4 *
  * * * *
  -------
    * * * *
      * 4 *
      -----
      * * * *
      * * * *
      -------
```

```
          * * 7 * * | * * * * * 7 *
-----------------------------------
* * 7 * * * * * * * |
* * * * * *
-----------
* * * * * 7 *
* * * * * * *
-------------
    * 7 * * * *
    * 7 * * * *
    -----------
    * * * * * * *
    * * * * 7 * *
    -------------
        * * * * * *
        * * * * * *
        -----------
```

Еще одна задача с пострадавшей рукописью. Найдена запись деления, которая была до такой степени испорчена, что разобрать удалось только одну цифру. И все-таки удалось восстановить запись полностью!

```
    * * * * * 8 * * | ?
-----------------------
* * * * * * * * * * |
* * *
-----
    * * *
    * * *
    -----
      * * *
      * * * *
      -------
            * *
            * *
            ---
              * * *
              * * *
              -----
```

44. Расшифровка

Такие задачи очень похожи на задачи по восстановлению выцветших цифр.

```
   I C C          I N U        E M A | M A
×    I N       ×    N U     ---------+-----
  -------      --------     U E M A  |
   N T T          L N U     M A
 I C C          N U S       ---
 -------        -------       T M
 I A N T        O I N U       A S
                              ---
                              E M A
                              E M A
                              -----
```

Буквы означают цифры; в каждом отдельном примере одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, но не во всех трех, вместе взятых.

Решение таких задач сравнительно несложно. Нетрудно придумать похожие задачи, и даже еще более сложные и интересные.

45. Залитый чернилами счет

При просмотре записной книжки умершего купца была обнаружена следующая запись:

*От продажи … оставшихся рулонов сукна по 49 злотых 36 грошей за каждую штуку получено всего * * * 7 злотых 28 грошей*[1].

Эта запись в некоторых местах была залита чернилами, так что ни количество проданных рулонов сукна, ни первые три цифры полученной суммы нельзя было разобрать. Можно ли на основании известных цифр восстановить количество проданных рулонов сукна и общую сумму, полученную от их продажи?

[1] Злотый — основная денежная единица Польши, в одном злотом 100 грошей. — *Примеч. ред.*

46. ОШИБОЧНОЕ, НО ВМЕСТЕ С ТЕМ ПОУЧИТЕЛЬНОЕ УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ

Учитель математики дал ученику задание на умножение двух чисел, в котором один множитель больше другого на 202. После умножения учитель велел проверить полученный результат, разделив найденное произведение на второй множитель. Полученное частное составляло 288, и еще был остаток, равный 67; отсюда следует, что умножение было выполнено неправильно.

Обнаружив ошибку, ученик признал:

— Добавляя очередное неполное произведение, я посчитал на одну единицу меньше.

— Тут речь идет не о единице, а о тысяче, которая была тобой потеряна, — поправил учитель.

Исходя из вышеизложенного, давайте найдем оба числа, взятых для умножения.

Вот еще один подобный пример: учитель дал ученику задачу на деление двух чисел. Ученик получил частное 57 и 52 в остатке. Он сделал попытку проверить свой результат, умножив частное на делитель и добавив остаток. Он получил число 17 380, но это число не было равно делимому. Ошибка ученика состояла в том, что при умножении ученик считал вторую цифру справа в делителе как 0, но это было 6. Какие числа для деления дал ученику учитель?

Ответ таков: требовалось 20 800 разделить на 364. Но как прийти к этому ответу?

47. КАК РАЗДЕЛИТЬ ВИНО?

Двое друзей купили восьмилитровый бочонок вина. Тот из них, кто привез вино, должен был забрать себе половину вина вместе с бочонком. А у его приятеля имелись только две бутыли, в которых он обычно хранил вино: одна емкостью 5 литров, другая — 3 литра. Как можно разделить вино, пользуясь этим бочонком и двумя бутылями?

К этому же типу принадлежат следующие задачи, решение которых — может, несколько более сложное — мы предоставим читателю.

1. Вместимость полного бочонка — 16 литров, пустых сосудов — 11 и 6 литров соответственно.

2. Вместимость полного бочонка — 42 литра, пустых сосудов — 27 и 12 литров.

Задачу потруднее на ту же тему приводит У. У. Роуз Болл[1] в своей работе *Mathematical Recreations and Essays* («Математические развлечения и очерки»).

Имеются четыре бутыли: одна 24-литровая, полная вина, вторая 13-литровая, третья 11-литровая и четвертая 5-литровая, последние три бутыли пустые. Следует перелить вино так, чтобы в каждой из первых трех бутылей было по 8 литров, используя при разливе и четвертую бутыль.

К этому типу задач можно отнести и следующую, в которой речь идет о разделе не только вина, но и бочонков.

Три человека должны поделить между собой поровну 21 бочонок вина, из которых 7 полных, 7 заполненных наполовину и 7 пустых. Нужно определить, как эти люди могут разделить все так, чтобы у каждого было одинаковое количество вина и одинаковое количество бочонков, — без переливания вина из бочонка в бочонок. Следует учесть, что все бочонки — полные, заполненные наполовину и пустые — имеют одинаковую емкость.

Понятно, что каждый должен получить 7 бочонков. Давайте посчитаем, сколько вина должно достаться каждому.

---

[1] Уолтер Уильям Роуз Болл (1850–1925) — британский математик. — *Примеч. ред.*

48. Волк, коза и капуста

Это одна из самых популярных, а также старейших задач на «переправу». Эта задача приводится уже в VIII веке в работе Алкуина *Propositiones ad acuendos juvenes* («Задачи для оттачивания молодого ума»). И, вероятно, выдающийся сподвижник Карла Великого почерпнул ее из еще более старых преданий или книг.

Сельский житель должен перевезти через реку волка, козу и капусту. Лодка, однако, настолько мала, что в ней может поместиться только крестьянин и один из трех «пассажиров». Если он оставит волка с козой, то волк задерет козу; если оставит козу с капустой, то коза съест капусту. Как крестьянину справиться с этой проблемой?

49. Долгая переправа

Отряд солдат подошел к реке, через которую предстояло переправиться. Мост после недавнего наводнения разрушен, а река слишком глубока, чтобы попытаться перейти ее вброд. Два мальчика играют в маленькой лодке у берега реки. Лодка настолько мала, что в ней может поместиться только один солдат или два мальчика. Тем не менее именно на этой лодке, с активным участием мальчиков, весь отряд солдат переправился на другой берег реки.

Как это было сделано?

50. Ревнивые мужья

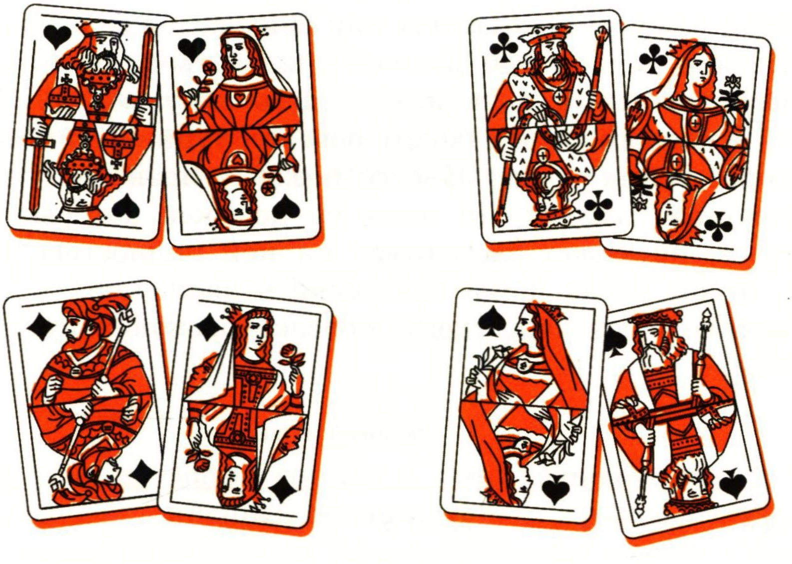
Математический анекдот о трех ревнивых мужьях приведен уже в рукописи XIII века, в которой два немецких студента Фирри и Тирри предлагают друг другу для решения веселые задачи. Позднее задача цитируется выдающимся французским математиком XV века Николя́ Шюке́ в его книге «Наука чисел в трех частях» (1484), которая считается старейшим памятником французской математики. Эту задачу приводит также выдающийся итальянский математик-самоучка XVI века Никко́ло Фонтана, более известный под именем Тарта́лья.

Содержание задачи следующее.

Три ревнивых мужа хотят переправиться через реку со своими женами; в их распоряжении лодка без гребца, такая маленькая, что в ней могут разместиться только два человека. Нужно решить, каким образом они могут переправиться, чтобы при этом ни одна из женщин в отсутствие своего мужа не оставалась в компании других мужчин.

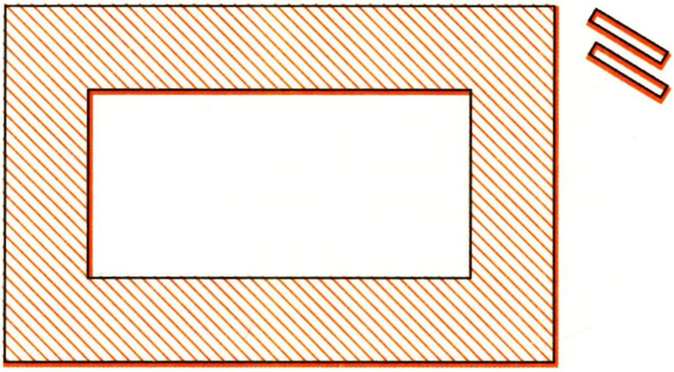
Эта смешная задача наглядно и весело решается с помощью карт, при этом роль этих ревнивых мужей отводится королям, а их жен — дамам.

Стоит попытаться решить ту же задачу с четырьмя королями и дамами. Можно переправить всех при том же условии, что ни одна из женщин не останется без мужа в присутствии других джентльменов, если взять лодку, в которой могут разместиться три человека. Переправа осуществляется за пять поездок.



51. ПЕРЕПРАВА ЧЕРЕЗ РОВ

Прямоугольное поле окружено по периметру рвом, имеющим на всем протяжении равную ширину. В распоряжении есть две доски, длина которых равна ширине рва. Нужно при помощи этих досок построить переправу через ров.



52. МАНЕВРЫ ПОЕЗДОВ

I

Поезд B приближается к небольшому полустанку, и из-за необходимости ремонта локомотива ему приходится задержаться; его догоняет поезд A, который должен следовать дальше. Отметим, что железнодорожный путь имеет здесь одну колею. На полустанке от основного пути отходит боковая тупиковая ветка, куда на некоторое время можно завести поезд с главного пути, но эта ветка короткая, так что ни один из поездов, которые должны разминуться, не может уместиться на ней полностью. Как действовать, чтобы поезд A мог продолжить движение?

На рисунке I показана схема железнодорожного пути на этом полустанке.

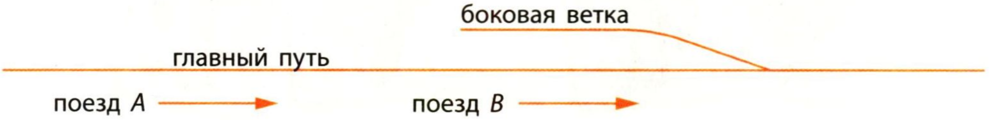


Рис. I

По главному пути в направлении стрелки следует поезд B, а следом за ним поезд A, который необходимо пропустить вперед. На боковой ветке, как было указано, может поместиться только часть вагонов поезда B. Какие маневры необходимо совершить, чтобы поезд A пропустить вперед?

II

На некоторой станции рядом с главной колеей находится боковой путь, но не тупиковый, а соединенный с обоих концов стрелками с основной магистралью.

Два поезда подходят к станции с противоположных сторон. Поездам нужно разминуться (рисунок II), но оба поезда длиннее, чем боковая ветка. Как поездам разъехаться с наименьшим количеством маневров?

Рис. II

III

Поезд, состоящий из локомотива $Л$, грузовых вагонов $Г$ и пассажирских вагонов $П$, находится на станции, где кроме магистрального пути есть боковая колея и тупиковый путь $Т$, на котором стоят грузовые вагоны $Г_1$ (рисунок III).

Рис. III

Необходимо грузовые вагоны $Г$ поставить в тупик, а стоящие там вагоны $Г_1$ прицепить на их место к поезду между вагонами $П$ и локомотивом $Л$. При маневрировании нельзя оставлять на главном пути вагоны без локомотива, поскольку вскоре ожидается прохождение скорого поезда.

IV

На отрезке железнодорожной магистрали с двумя колеями, обозначенными на рисунке IV линиями AB и CD, грузовой поезд, состоящий из 21 вагона, идет по пути AB в направлении стрелки.

Этот поезд должен оставить на товарной станции G девятый и двенадцатый вагоны, считая от головы поезда.

Как сделать это с наименьшим количеством ходов?

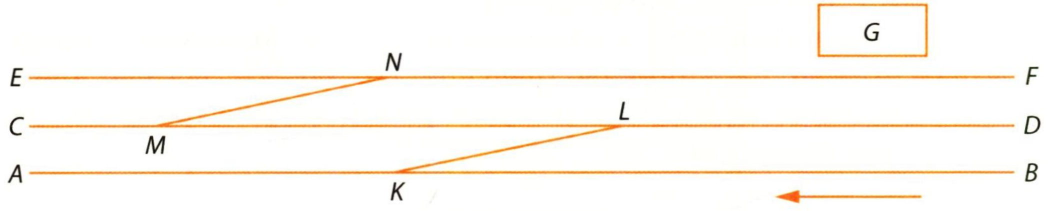


Рис. IV

V

На линии $ABCD$ находится локомотив $Л$ с двумя вагонами B_1 и B_2 (рисунок V). Нужно изменить порядок состава на противоположный, чтобы локомотив был первым в направлении от пункта A к D, а вагоны были за ним.

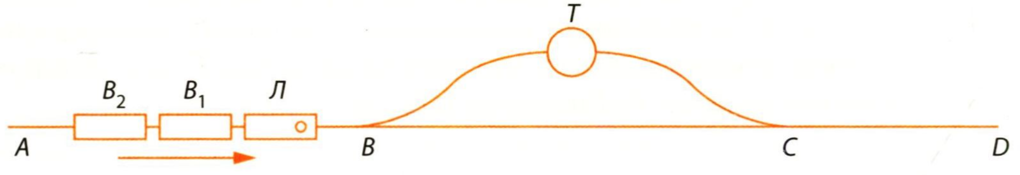


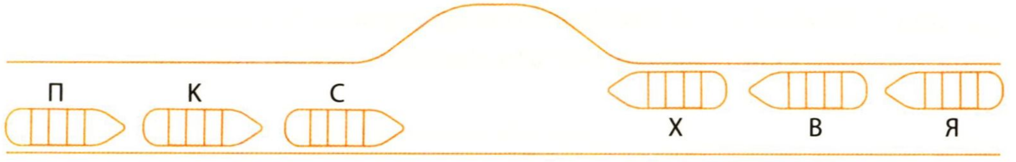
Рис. V

В пункте T есть поворотный круг, на котором может уместиться вагон, но не помещается локомотив. Необходимо найти решение с минимальным числом маневров.

53. КАК РАЗВЕСТИ СУДА

По каналу один за другим идут три теплохода: «Силезия», «Кашуб» и «Полония». Им навстречу один за другим также идут три теплохода: «Хробры», «Варшава» и «Ядвига». Ширина канала не позволяет разойтись двум кораблям, но на одной стороне канала есть специальное расширение — небольшая стоянка, в которой может разместиться один корабль. Могут ли корабли разминуться?

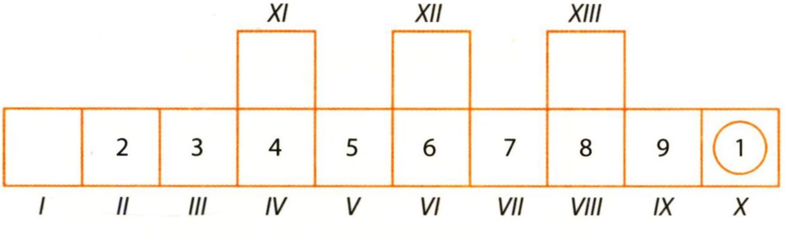
Вот схема расположения кораблей, канала и стоянки.



54. В ОКОПАХ

В окопе на фронте перед лицом врага находились девять солдат с офицером, который в укрытии оказался на правом фланге. По ряду причин ему необходимо быть на месте крайнего левого. Траншея настолько узкая, что и двум людям не разойтись. Выйти из окопа невозможно из-за постоянного обстрела противника. К счастью, в траншее есть три ниши, куда на время может втиснуться один человек.

Как должны перемещаться солдаты, чтобы офицер мог пройти вдоль всего окопа и встать с левой стороны ряда?



55. ЭПИТАФИЯ ДИОФАНТА

На могильной плите великого греческого математика александрийской эпохи Диофанта была эпитафия, составленная Евтропием.

Странник! Под этим камнем покоится прах Диофанта, умершего в глубокой старости.

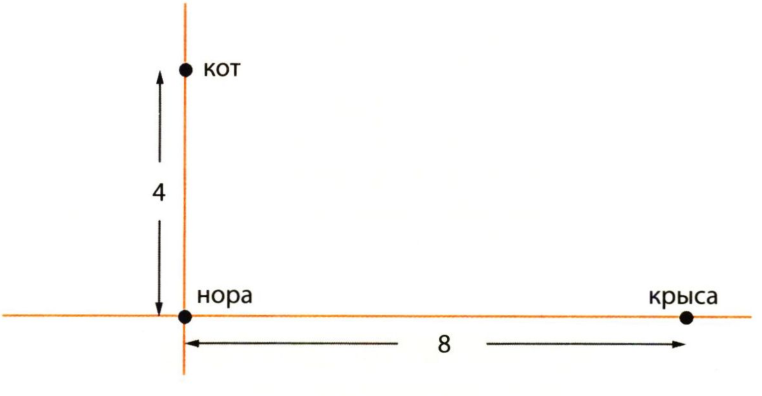
Шестую часть своей долгой жизни он был ребенком и двенадцатую — юношей. Он не был женат в течение следующей седьмой части своей жизни. Через пять лет после женитьбы родился сын, который прожил жизнь вдвое короче, чем отец. Спустя четыре года уснул вечным сном Диофант, оплакиваемый близкими.

Скажи, если умеешь считать, сколько лет он прожил?

56. КОТ И КРЫСА

(Индийская задача VII века)

Кот забрался на стену высотой 4 локтя[1], откуда заметил крысу в 8 локтях от стены. Крыса также увидела кота и бросилась к своей норе в основании стены. Кот спрыгнул со стены и пролетел по воздуху наклонно на то же расстояние, которое крыса успела пробежать по земле. Коту удалось поймать крысу. В какой точке из этих восьми локтей была поймана крыса, какое расстояние при этом пролетел в прыжке кот и успела пробежать крыса? Найди ответ, дорогой читатель, если ты знаком с расчетом окружности.



[1] Локоть — старинная единица измерения длины, примерно соответствующая расстоянию от локтевого сустава до конца вытянутого среднего пальца руки. В разных странах использовались локти разной длины. — *Примеч. ред.*

57. Кот и мышь

Лука Пачоли[1] в своей книге *Summa de arithmetica* («Сумма арифметики, геометрии, отношений и пропорций», 1494) приводит следующую задачу.

На вершине дерева высотой 60 локтей сидит мышь; на земле у ствола сидит кот. Мышь опускается каждый день на $\frac{1}{2}$ локтя вниз, а каждую ночь на $\frac{1}{6}$ локтя вновь карабкается вверх. В течение дня кот поднимается на 1 локоть вверх, а каждую ночь спускается вниз на $\frac{1}{4}$ локтя. Дерево растет так, что каждый день оно вытягивается в высоту на $\frac{1}{4}$ локтя, а ночью оно теряет в высоте $\frac{1}{8}$ локтя.

Когда кот доберется до мыши и какой высоты будет в этот момент дерево?

58. Сломанный бамбук

(Из «Лилавати», XII век)

Ствол бамбука высотой 32 локтя, возвышавшийся на равнине, был в одном месте сломан ветром; вершина коснулась земли в 16 локтях от основания. Скажи мне, искусный математик, на какой высоте был сломан ствол бамбука?

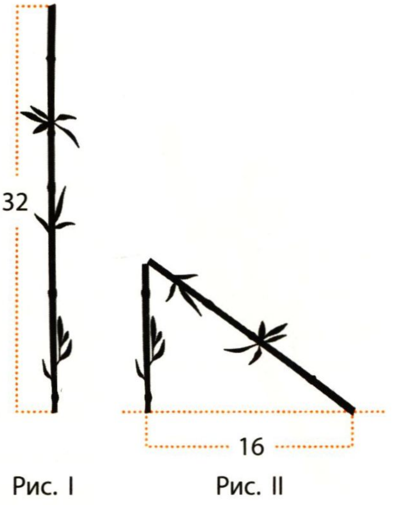


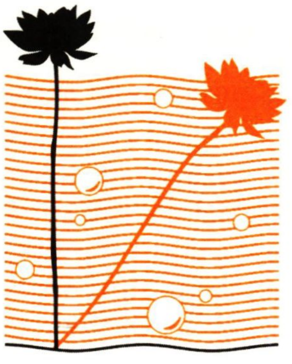
Рис. I Рис. II

[1] Фра Лука Бартоломео де Пачоли (1445–1517) — итальянский математик. — *Примеч. ред.*

59. СТЕБЕЛЬ ЛОТОСА

(Из «Лилавати», XII век)

Над поверхностью озера, возле которого обитают многочисленные стаи фламинго и журавлей, возвышается цветок лотоса, стебель которого на пол-локтя поднимается над уровнем воды. Под давлением ветра стебель постепенно наклоняется и погружается в воду, пока наконец не исчезает под водой в двух локтях от того места, где находился первоначально. Вычисли быстро, смекалистый математик, глубину воды в озере.



Другой, несколько более сложный вариант приведенной выше задачи — древнекитайская задача следующего содержания.

В середине 10-футового[1] квадратного пруда растет куст водяной лилии, цветок которой на фут возвышается над поверхностью воды. Когда он наклоняется к центру любого берега, то прячется под водой. Насколько глубока вода?

60. ПРЫЖОК ОБЕЗЬЯНЫ

(Из «Лилавати», XII век)

На дереве сидели две обезьяны: одна на самом верху, другая на высоте 10 локтей от земли. Вторая обезьяна, захотев напиться воды из источника, находившегося в 40 локтях, слезла с дерева; в это же время первая обезьяна прыгнула с вершины прямо к этому источнику по наклонной. Обезьяны при этом преодолели равное расстояние. Скажи мне быстро, просвещенный человек, с какой высоты прыгнула первая обезьяна, и я посмотрю, насколько правильно ты умеешь вычислять.

[1] Фут — единица измерения длины, равная примерно 30 см. — *Примеч. ред.*

61. Очень китайская задача

Следующую задачу приводит великий китайский математик Цинь Цзюшао[1] в работе *Chiu chang suan shu*, что означает «Математика в девяти книгах».

В трех бочках хранилось равное количество риса. Воры забрались в кладовую и украли почти все содержимое каждой бочки. Неизвестно, сколько риса было изначально; однако известно, что осталось:

в 1-й бочке	1 цо
во 2-й бочке	1 шао и 1 цо
в 3-й бочке	1 цо

Когда воров поймали, один из них сознался, что он черпал из первой бочки черпаком, другой из второй бочки — деревянным сабо, а третий из третьей бочки — миской. Было установлено, что

черпак	вмещает	1 шао и 1 цо
сабо	»	1 шао и 7 цо
миска	»	1 шао и 3 цо

и что каждая бочка вмещает не более 3 шэн. Наконец, известно, что 10 цо = 1 шао, 10 шао = 1 гэ, 10 гэ = 1 шэн[2].

Сколько каждый из воров забрал риса?

62. Грации и музы

(Древнегреческая задача)

Три грации несли яблоки, причем у всех было равное количество яблок. Они повстречали девять муз и по их просьбе дали каждой музе одинаковое количество яблок. После того как грации поделились яблоками, оказалось, что яблок у всех богинь поровну.

Сколько яблок было у каждой грации изначально?

---

[1] Цинь Цзюшао (1208–1261) — китайский математик, великий алгебраист. — *Примеч. ред.*

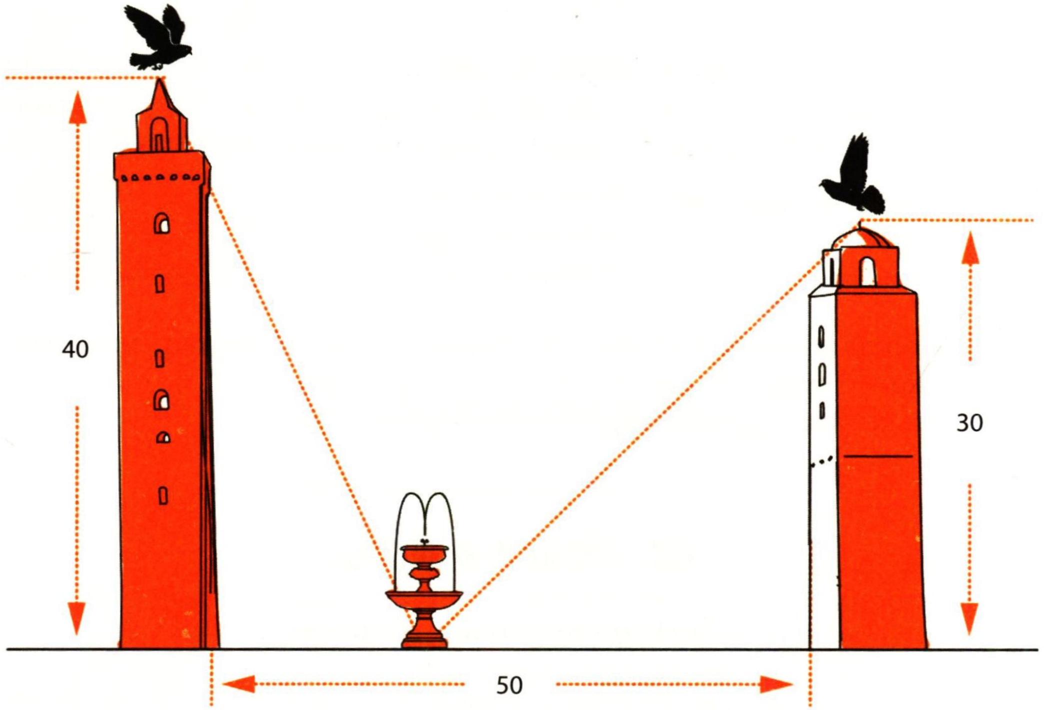
[2] Цо, шао, гэ, шэн — китайские единицы измерения объема, которые использовали для определения количества зерна. — *Примеч. ред.*

63. ПРОБЛЕМА ЛЕОНАРДО ИЗ ПИЗЫ[1]

(Из Liber Abaci, XIII век)

Две башни, одна высотой 30 футов, другая — 40 футов, находятся на расстоянии 50 футов друг от друга. Между ними расположен фонтан, к которому две птицы летят с вершин обеих башен; двигаясь с одинаковой скоростью, они подлетают к фонтану одновременно. На каком расстоянии по горизонтали от каждой из башен находится фонтан?

Решение простое. Изложите его ход.



[1] Речь идет о Леонардо Пизанском, более известном как Фибона́ччи, — крупнейшем математике средневековой Европы. — *Примеч. ред.*

64. НЬЮТОНОВЫ ВОЛЫ

В течение двух недель три вола съели траву с двух моргов[1] луга, а также траву, которая выросла на этих двух моргах за то время.

Два вола в течение четырех недель съели траву с двух моргов луга и траву, которая выросла на этих двух моргах в течение четырех недель.

Сколько волов потребуется, чтобы съесть траву на шести моргах и траву, которая выросла бы на этих шести моргах в течение шести недель?

Предположим, что трава растет везде одинаково и что все волы поедают траву с одинаковой скоростью.

65. КАВЕРЗНАЯ ЗАДАЧА ЛЮКА

Во время научного конгресса за завтраком, в котором приняли участие многие известные математики из разных стран, французский математик Эдуард Люка́[2] задал своим коллегам весьма каверзную задачу.

> Допустим, что каждый день в полдень из Гавра в Нью-Йорк отправляется судно и в то же время судно той же компании отправляется из Нью-Йорка в Гавр. Плавание и в ту и в другую сторону длится семь дней. Сколько судов этой же компании, идущих навстречу, встретит судно, выходящее сегодня в полдень из Гавра?

Как рассказывает Люка в своем четырехтомнике *Récréations mathématiques* («Математические развлечения»), некоторые из присутствующих, известные ученые в области математики, без особых размышлений воскликнули: «Семь!». Однако большинство молчало. Никто не дал правильного ответа. Но если призвать на помощь графическое изображение задачи, решение представится со всей очевидностью.

---

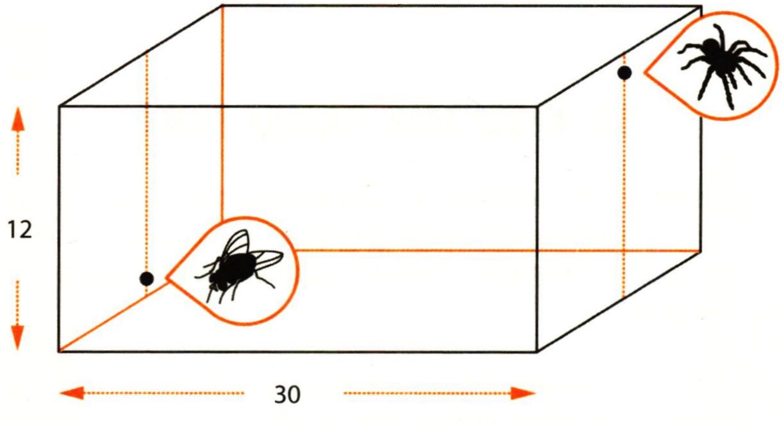
[1] Морг (от нем. *Morgen*, утро) — примерно 0,56 гектара, изначально так называли площадь, которую человек может вспахать с раннего утра до полудня. — *Примеч. ред.*

[2] Франсуа Эдуард Анатоль Люка (1842–1891) — французский математик, профессор. — *Примеч. ред.*

66. Паук и муха

Длина комнаты — 30 футов, а ширина комнаты равна высоте и составляет 12 футов. На вертикальной линии, проходящей через центр одной из более коротких стен, на расстоянии одного фута от потолка, находится паук; на вертикальной линии, проходящей через центр противоположной стены, на высоте 1 фута от пола сидит муха. Пауку удается поймать муху, которая, парализованная страхом, даже не пытается улететь.

Требуется найти кратчайший путь, который должен преодолеть паук, стремясь к своей жертве.



67. Феноменальные мнемонисты

Практически во всех странах психологи с большим интересом изучают проявления необычайной памяти, особенно памяти математической.

В своей интересной книге, озаглавленной *Mathematiques et mathematiciens* («Математика и математики»), опубликованной в Париже в 1890-х годах, Альфонс Ребьер[1] представляет одного из самых известных мнемонистов — знаменитого Жака Иноди́[2].

---

[1] Альфонс Ребьер (1842–1900) — французский адвокат. Больше известна его книга *Les Femmes dans la science* («Женщины в науке»), революционная для своего времени. — *Примеч. ред.*

[2] Джакомо Иноди (1867–1950) — итальянский феноменальный счетчик и мнемонист (человек, способный запоминать необычайно длинные списки данных). — *Примеч. ред.*

Иноди охотно участвовал в многочисленных показательных сеансах. У него была феноменальная память, причем не зрительная (что более распространено), а слуховая. Он вызвал на одном из сеансов настоящий восторг слушателей — профессоров парижской Политехнической школы и Академии наук. Большой эффект произвело вычитание двух чисел, каждое из которых состояло из 21 цифры (!). Эти числа не давались в письменном виде, а только были произнесены. Интересной особенностью было то, что Иноди мог с одинаковой скоростью назвать результат как в обычном порядке, то есть начиная с сотен триллионов[1], так и в обратном порядке, начиная от единиц. Без долгих размышлений он называл день недели любой заданной даты, например 16 июня 1862 года. Вычислительные способности у Иноди дополнялись просто феноменальной памятью на цифры. Так, в конце одного сеанса он повторил по памяти все числа, которыми оперировал за время этого сеанса, а представляли они весьма длинный список.

Способ, которым пользовался Иноди, умножая в уме большие числа, можно показать на следующем примере:

$$532 \times 468$$

$$500 \times 400 = 200\,000$$

$$500 \times 68 = 34\,000$$

$$30 \times 468 = 14\,040$$

$$2 \times 468 = 936$$

$$248\,976$$

В первой четверти XX века среди мнемонистов, пользовавшихся всемирной славой, был поляк Н. Липовский[2], имевший необычайный успех в Лондоне. Самые сложные задачи он решал без малейшего напряжения и в мгновение ока. Известный английский психолог Спирмен взял Липовского под наблюдение и провел с ним ряд экспериментов. Например, он собрал несколько десятков человек в комнате, написал их имена на листе бумаги и один раз

---

[1] В отличие от Еленьского, мы бы сказали «с сотен квинтиллионов» — то есть с самого первого разряда числа из 21 цифры. Дело в том, что существует две разные системы наименования больших чисел со схожими названиями, отчего порой может возникнуть путаница. — *Примеч. ред.*

[2] Вероятно, имеется в виду Нохем Липовский (1874–1928). — *Примеч. ред.*

зачитал их Липовскому, который повторил это немедленно, причем в обратном порядке. Липовский, как и Иноди, мог молниеносно установить день недели для каждой заданной ему даты, поэтому ему не нужно было пользоваться календарем, ведь он мог назвать любой день прошедшего и наступающего года в течение секунды.

Добавим, что когда Липовский приехал в Лондон, он не знал ни слова по-английски. Через несколько дней он начал говорить, используя слова, которые услышал и понял в течение этого короткого времени.

Мозг Липовского — и всех феноменальных мнемонистов в целом — похож на фотокамеру. Он фиксирует все, что отразилось в нем, и надолго удерживает.

В детстве Гаусс[1] и Ампер[2] также отличались своей феноменальной памятью на числа и исключительной скоростью расчетов. С возрастом, когда оба великих математика погрузились в научные исследования, эти способности снизились.

68. ТАИНСТВЕННЫЕ НОМЕРА ТЕЛЕФОНОВ

Один венский математик попросил молодую даму дать ему номер телефона, по которому можно было бы с ней поговорить. Дама, не желающая этого разговора, игриво ответила, что в бюро, где она работает, есть четыре телефона; в каждом телефонном номере все цифры разные, но эти четыре номера имеют некоторые общие свойства, а именно: сумма цифр каждого из них равна 10, к тому же если к каждому из этих номеров прибавить номер, содержащий те же самые цифры, но в обратном порядке, то получатся одинаковые числа, выраженные одинаковыми цифрами. «Надеюсь, вам этого будет достаточно», — добавила она с иронией и попрощалась.

Она была убеждена, что никто не сможет по таким расплывчатым данным установить номер телефона, но, к великому удивлению неблагосклонной молодой леди, однажды в телефоне

---

[1] Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — великий немецкий математик. — *Примеч. ред.*

[2] Андре-Мари Ампер (1775–1836) — французский математик, физик и естествоиспытатель. — *Примеч. ред.*

раздался голос этого скучного джентльмена. Как он мог угадать эти загадочные цифры?

Математик знал, что все венские телефоны имеют номера от 20 000 до 99 999.

69. СТРАННОЕ СОВПАДЕНИЕ...

Девять номеров от 1 до 9 были написаны на девяти карточках и розданы трем людям. Каждый участник игры сложил из полученных карточек как можно меньшее трехзначное число, то есть на место сотен поставил самую маленькую из имеющихся цифр, на место десятков — более крупную, а на место единиц — самую большую. После того как числа были сложены, все три участника прочитали их вслух и записали. Тогда оказалось, что сумма цифр всех трех чисел, как ни странно, была одинаковой.

Карточки затем были смешаны и снова розданы по три. Каждый участник этой игры случайно получил одну из ранее принадлежавших ему карточек и две новые. И опять-таки, как ни странно, суммы цифр у всех были одинаковыми, и, что еще более интересно, у каждого участника ранее составленное число и новое число при сложении давали одну и ту же сумму — 516.

Какие цифры были у каждого при первой и второй раздаче?

70. ЕЖИ И ЧЕРЕПАХИ

Два ежа устроили соревнование по бегу. Один на своем пути не встретил никаких препятствий, зато другой встретил двух огромных черепах: нужно было или обежать их, или пробежать по ним. Еж решился на последнее. Первая черепаха длиной в один метр двигалась навстречу ежу, проходя 6 см в секунду; вторая черепаха, длиной полметра, шла в том же направлении, что и еж, со скоростью 18 см в секунду.

Оба ежика прибыли на финиш одновременно. Как определить, кто был лучшим бегуном?

71. НЕТЕРПЕЛИВЫЙ ПРОХОЖИЙ

Прохожий обходил очень медленно движущиеся возы, нагруженные бревнами. На одном из возов лежали огромной длины пихтовые стволы. Его заинтересовало, сколько шагов может составлять длина такого ствола. Другой человек дождался бы момента, когда повозки остановятся хотя бы на короткое время, и быстро удовлетворил бы свое любопытство. Но прохожий был математиком, не отличался терпеливостью и решил сделать желаемое измерение по-другому. Он начал идти мимо воза и подсчитывал, сколько шагов он сделает, переместившись от одного конца пихты до другого, оказалось 112 шагов. Затем он повернул назад и пошел в противоположном направлении: в этот раз ствол «закончился» через 16 шагов. Имея эти два числа, математик уже мог получить желаемый результат при помощи несложного алгебраического решения.

72. О НАИБОЛЕЕ ВЫГОДНОМ СПОСОБЕ ПОСАДКИ КАРТОФЕЛЯ

Чтобы картофель приносил максимальный урожай, его следует сажать на определенном равном расстоянии, установленном на основе многолетних наблюдений. Вопрос заключается в том, каким будет наиболее выгодное расположение лунок на поле. И в этом вопросе должна помочь не только агрономия, но и математика.

Известно, что существует три многоугольника, на которые можно без пропусков разбить плоскость: равносторонний треугольник, квадрат и правильный шестиугольник. Таким образом, принимаем по внимание только эти три типа взаиморасположения лунок.

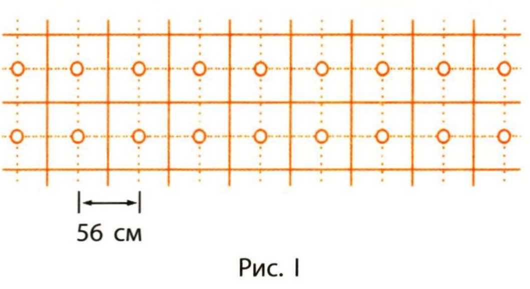


Рис. I

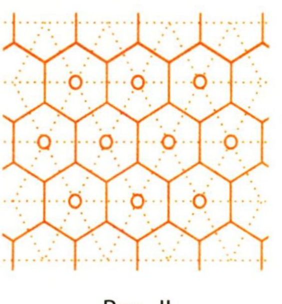


Рис. II

Рассмотрим для начала посадку в квадрат. В каждом квадрате разместим посередине одну лунку, причем выберем размеры прямоугольников таким образом, чтобы между ближайшими растениями соблюдалось предписанное расстояние, например $d = 56$ см. (Если кто-то хочет выполнить вычисления для другого значения d, у него не будет особых проблем.)

При посадке картофеля в квадрат, как показано на рисунке I, мы должны расположить ряды с интервалом 56 см и в каждом ряду посадить растения на расстоянии 56 см друг от друга. В этом случае на каждое растение придется $56 \times 56 = 3136$ см^2 почвы, а на одной сотке (10×10 м) могут быть высажены $1\,000\,000 : 3136 = 319$ растений.

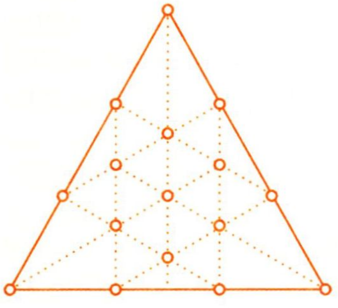
Рассмотрим способ посадки картофеля в вершинах равносторонних треугольников (рисунок II).

При таком способе посадки каждое растение будет находиться в центре правильного шестиугольника, в котором расстояние от центра до сторон будет 28 см. Весь правильный шестиугольник можно разбить на шесть равносторонних треугольников. В каждом из этих треугольников высота составляет 28 см, а стороны — как легко подсчитать — около 32 см. Площадь такого маленького треугольника составляет $\frac{1}{2} \times 32 \times 28 = 448$ см^2, а площадь всего шестиугольника равна $6 \times 448 = 2688$ см^2. Значит, при этом способе посадки $1\,000\,000 : 2688 = 372$ растения могут быть посажены на одну сотку, что больше, чем при посадке картофеля по квадратам.

73. ПРОДАЖА СТАРЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Владелец сада решил продать часть старых груш на вырубку. Он выделил большой квадрат, содержащий 49 деревьев, и заключил с покупателем договор, в котором говорилось, что покупатель оставит по четыре дерева в пяти рядах, а остальные деревья он может спилить и выкорчевать. Владелец сада думал, что ему останется 20 груш. Между тем умный покупатель, не нарушая договора, вырубил 39 деревьев, оставив только 10. Как он это сделал?

Хозяин заметил это слишком поздно, и спорить было бесполезно: покупатель выполнил условия договора, только интерпретировал их по-своему.



74. ДЕРЕВЬЯ В ПАРКАХ

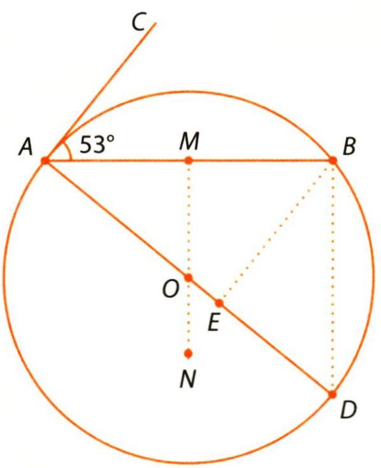
В одном парке 16 красивых дубов образовывали 12 рядов по 4 дерева в ряд, как показано на рисунке.

А как посадить то же самое количество — 16 дубов — так, чтобы они образовали 15 рядов по 4 дерева в каждом ряду?

75. ФОРМА ЗРИТЕЛЬНОГО ЗАЛА

Какую форму следует придать театральному залу, чтобы зрители, сидящие вдоль его стен, могли видеть сцену со всех мест под одним и тем же углом?

Пусть отрезок AB обозначает край сцены. Из точки A мы рисуем прямую AC так, чтобы угол BAC был равен 53°, — именно он считается углом, наиболее удобным для обзора сцены. Через



точку A проводим линию AD перпендикулярно линии AC, а через центр M отрезка AB проводим линию MN перпендикулярно линии AB. Точка O, то есть пересечение прямых AD и MN, будет центром окружности, которая проходит через точки A и B и касательной к которой является прямая AC. Дуга ADB определит искомую форму зала, потому что все углы, вершины которых лежат на этой дуге и стороны которых проходят через точки A и B, будут равны углу ADB — и углу BAC, что видно из рассмотрения треугольника ABD, а именно: если прямая BE перпендикулярна прямой AD, то $\angle ADB = \angle ABE = \angle BAC$.

76. Математические супруги

На Познаньскую ярмарку приехали трое дальних родственников одного старого математика — Антон, Ян и Карл с женами Анной, Яниной и Натальей. После визита, который молодые пары нанесли престарелому родственнику, он никак не мог вспомнить, кто на ком был женат. Однако он вспомнил, что когда они рассказывали о покупках, сделанных на ярмарке, оказалось, что каждый из шести человек за каждый приобретенный товар заплатил столько злотых, сколько всего предметов купил. Удивительно, но мужья потратили больше, чем их супруги, и — что еще более странно — каждый из них потратил ровно на 63 злотых больше, чем его жена. Причем Антон купил на 23 вещи больше, чем Янина, а Ян на 11 предметов больше, чем Анна. Основываясь на этих скудных данных и призвав на помощь свои когда-то обширные математические знания, старичок точно рассчитал, женой какого его родственника была каждая из трех дам. Как он мог это сделать?

77. Мельничные розыгрыши

На мельницу привезли девять мешков зерна, пронумерованных по порядку от 1 до 9, и поставили их у стены.

Когда мельник обратил на них внимание, он заметил, что поставленные в случайном порядке мешки сгруппировались интересным образом. По краям ряда стояло по одному мешку, рядом с ними — две пары, а посередине сгрудились три мешка.

Что еще интереснее, умножение цифры, написанной на самом левом мешке, на число, состоящее из двух цифр соседней пары мешков, давало число, записанное на средней группе из трех мешков, а именно $7 \times 28 = 196$. Мельник был очень удивлен, посчитал это для себя хорошим предзнаменованием и решил сыграть в лотерею, используя число 728 196.

Подручный предложил ему совместное участие, но мельник не согласился, не захотел делиться верным выигрышем. Тогда веселый подмастерье решил подшутить над мельником и ночью переставил мешки так, чтобы на этот раз с обеих сторон произведение цифр на одиночных мешках и чисел на соседних парах равнялось числу на средних мешках. Эта комбинация была еще более необычной. Мельник утром долго стоял перед мешками в большой задумчивости. Он увидел числа:

4 39 156 78 2

Перемножил: $4 \times 39 = 156$ и $2 \times 78 = 156$. Какое из этого можно получить предзнаменование? Он уже засомневался в первом пророчестве, потому что здесь было что-то совсем необычное...

На второй день мельник увидел на мешках совсем другой расклад, но снова произведения крайних цифр на соседние двузначные числа давали число на средних мешках. Возможны ли другие подобные расстановки? Попробуйте на это ответить сами.

78. Китайские концессии[1]

В один китайский город, окруженный стеной, пять железнодорожных компаний намеревались провести свои пути и построить вокзалы. Все концессии были выданы при условии точного соблюдения указов местного мандарина[2] насчет расположения ворот, через которые железнодорожные пути пройдут сквозь городскую стену, а также мест расположения вокзалов.

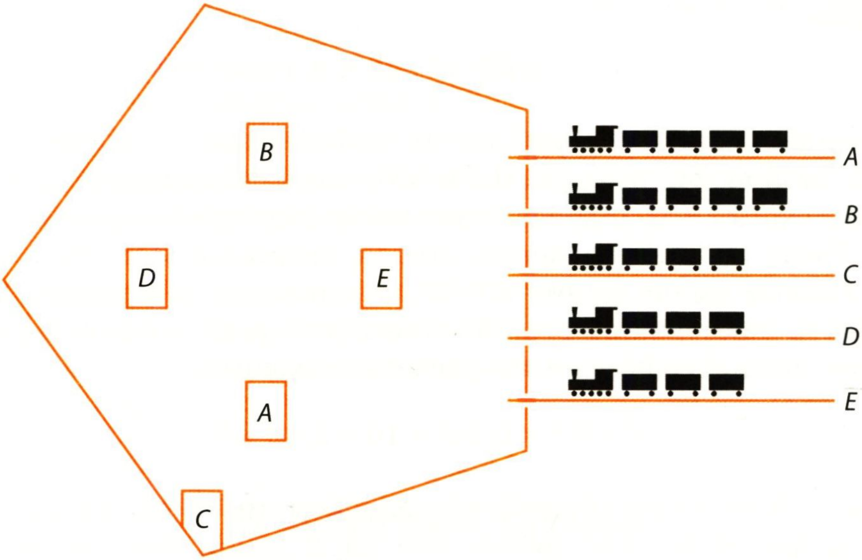
---

[1] Концессия — вид договора, при котором государство позволяет частным фирмам строить и эксплуатировать объекты, остающиеся в собственности государства. — *Примеч. ред.*

[2] Так европейцы называли китайских чиновников и государственных деятелей. — *Примеч. ред.*

На рисунке соответствующие буквы обозначают железнодорожные пути и вокзалы каждой из строительных компаний. Трудно было составить проект прохождения путей по городу, тем более что мандарин категорически потребовал, чтобы никакая железнодорожная линия не проходила через «чужой» вокзал и не пересекалась с другой линией.

Предложите кому-нибудь решить эту проблему, и вы обнаружите, что перед инженерами была поставлена нелегкая задача.



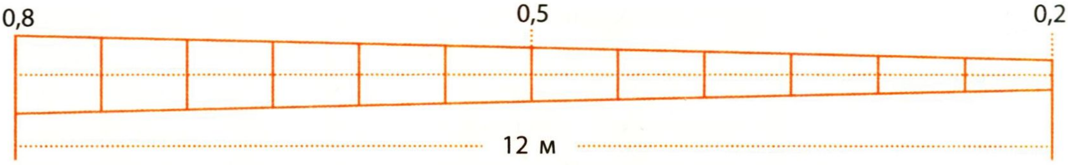
79. УДИВИТЕЛЬНЫЙ СТВОЛ ДЕРЕВА

В лесном хозяйстве объем спиленного ствола рассчитывается так, как если бы это был цилиндр, а диаметр этого цилиндра измеряется посередине ствола. Таким образом, если мы обозначим длину ствола дерева через h, а диаметр в середине длины обозначим через d, то объем такого ствола вычисляется по формуле:

$$V = \frac{\pi}{4}d^2h, \text{ или } V = 0{,}785d^2h.$$

Обычно приближенно берется: $V = 0{,}8d^2h$.

На лесопилке продавался ствол дерева длиной 12 метров. Ствол был равномерно сужен, как показано на рисунке. Толстый конец бревна имел диаметр 0,8 м, а тонкий — 0,2 м.



Пришел покупатель, который хотел купить это бревно, и попросил рассчитать его объем.

Средний диаметр ствола составлял 0,5 м. Рассчитываем по формуле объем ствола:

$$V = 0{,}8 \times 0{,}5^2 \times 12 = 2{,}4 \text{ м}^3.$$

Стоимость была 100 рублей за кубический метр, то есть все бревно стоило 240 рублей. Но в этот момент покупатель передумал. Он сказал, что в действительности ему нужно бревно длиной 10 м. Тогда от тонкого конца ствола отпилили 2 м. Оставшаяся часть бревна имела длину $h = 10$ м, а диаметр в середине длины $d = 0{,}55$ м. Рассчитали новый объем, который должен был быть меньше предыдущего, но из расчета выходило:

$$V = 0{,}8 \times 0{,}55^2 \times 10 = 2{,}42 \text{ м}^3.$$

При той же цене 100 рублей за кубометр ствол, укороченный на 2 метра, стоил 242 рубля, что на 2 рубля больше, чем при первоначальной длине.

А еще остался обрезок длиной 2 м со средним диаметром 0,25 м. Объем этого обрезка равнялся:

$$V = 0{,}8 \times 0{,}25^2 \times 2 = 0{,}1 \text{ м}^3.$$

А его стоимость составляла 10 рублей. Откуда эти чудеса?

80. Сообразительная сорока

В жаркий день одной мудрой сороке захотелось пить. Она нашла в саду вкопанную в землю детскую лейку, в которой было немного чистой воды. Но воды в лейке было слишком мало, и сорока, несмотря на все усилия, не могла до нее достать.

«Если бы поднять уровень воды на четверть дюйма[1], — подумала сорока (она не знала метрических единиц), — я бы напилась чистой холодной воды».

Она обошла лейку и примерилась. Отверстие в лейке составляло полтора дюйма в диаметре, а дно — три дюйма. Лейка была четыре с половиной дюйма высоты, но воды в ней было только на два дюйма.

Сорока вспомнила, что в дупле старого дерева у нее спрятан клад из блестящих монет. Каждая монета имеет толщину в 1 линию (линия является двенадцатой частью дюйма) и диаметр, равный 1,6 линии. Такая монета свободно пройдет через отверстие в лейке и упадет в воду.

Сорока начала приносить из дупла монеты и бросать их в воду, каждый раз пытаясь дотянуться клювом до воды. Между тем мы можем посчитать, сколько монет должна принести сорока, чтобы утолить жажду.

81. НУМЕРАЦИЯ СТРАНИЦ

При нумерации страниц рукописи было всего написано 4989 цифр. Можно ли определить, сколько страниц содержал этот манускрипт?

82. ВЕС ВАГОНА

Для перевозки газа на железных дорогах имеются специальные грузовые вагоны в форме больших цилиндров. Собственный вес таких вагонов составляет около 10 тонн, вместимость — 50 кубометров. Предположим, вагон был заполнен водородом, кубический метр которого весит около 100 граммов. Сколько будет весить вагон вместе с грузом?

---

[1] Один дюйм равен 2,54 см. Впрочем, это знание необязательно читателю для решения задачи. — *Примеч. ред.*

83. САМАЯ ДЕШЕВАЯ БРИЧКА

Житель небольшого городка был известен своей скупостью. Когда у него были дела в уездном городе, расположенном в 25 километрах, он искал, нет ли там кого из соседей, чтобы подвезли его до дома.

Однажды он ходил по городскому рынку в поисках того, кто мог бы отвезти его домой за «спасибо».

Там никого знакомых не оказалось, поэтому ему пришлось взять платную повозку. Он обошел всех извозчиков, узнавая цену: один хотел 50, другой — 40, третий — 30 рублей. Все эти цены показались скупому господину неприемлемыми. Наконец он дошел до крестьянина, стоявшего в сторонке с его жалкой бричкой и тощей лошадкой. Когда скупец спросил его, сколько он хочет за поездку, тот посмотрел в землю, почесал голову и наконец ответил:

— За первый километр вы дадите мне копейку, это будет не слишком много. За второй — две, потому что дорога там трудная; на третьем километре дорога идет в гору, вы дадите мне четыре копейки, а там уж и лошадь будет уставшая и гора будет еще круче, вы снова дадите мне в два раза больше, и так уж до конца.

— Вот тупой мужик, — подумал горожанин, едва сдерживая смех, — оценивает дорогу на копейки. Ну, не мне его учить.

Он поспешно забрался в бричку:

— Согласен! — крикнул он. — Поехали!

Они поехали, а когда приехали, то оказалось, что скупой горожанин должен отдать «глупому мужику» все свое хозяйство, все, что у него было, и самому стать у мужика батраком, чтобы отработать долг. Действительно, «самая дешевая бричка» обошлась ему в 335 544 рубля и 31 копейку.

Если не верите, посчитайте, помня, что в геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8, ... сумма первых 24 членов ряда равна двадцать пятому члену, уменьшенному на единицу.

84. ПОПАСТЬ В ТОЧКУ

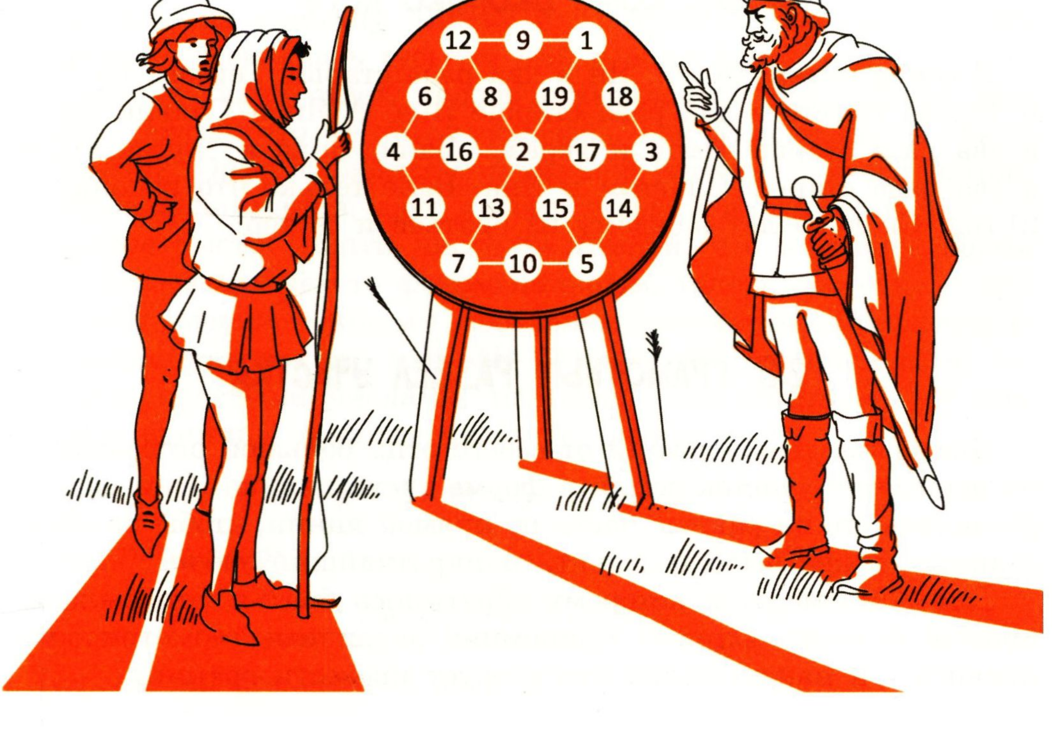
В Англии в прошлые века были известны союзы лучников, которые славились не только меткостью своих мастеров, но и оригинальностью или древним происхождением щитов, которые служили мишенью для показательных выступлений и соревнований.

Когда в союз принимали молодого стрелка, его наставник обычно долго беседовал с ним о великом достоинстве щита их союза. Щиты были самые разные. Например, этот союз славился щитом с набором чисел: сумма трех чисел в любом направлении была одной и той же.

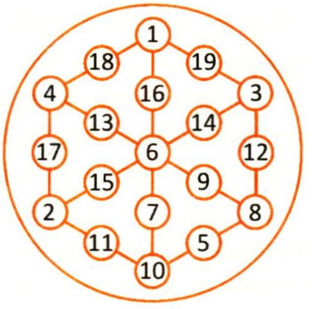
Один стрелок, желавший быть принятым в союз, отчаянно «мазал»: стрелы шли в землю или, самое лучшее, в опоры щита.

— Из тебя ничего не получится, — сказал наставник и добавил, что в такой достойный щит, какого больше в мире нет и быть не может, не дозволяется стрелять кому попало.

— Иди, учись стрелять в заборы. Через год придешь, тогда посмотрим.



Молодой человек смиренно выслушал отповедь, ушел, но вернулся во время ближайших стрельбищ этого союза, без лука, но со вторым щитом, не хуже того, в который ему запретили стрелять, хотя и с другой системой чисел.



Стрелок убедил своего наставника в том, что и тот тоже «промазал», сказав, что в мире не может быть другого такого щита.

А могут ли быть другие варианты «достойных щитов»? Поищите!

85. Кому сколько лет?

В семье пятеро детей. Ян в два раза старше Терезы, но Неля и Тереза вместе в два раза старше Яна. А Ян и Славик вместе в два раза старше Нели и Терезы. Валя, Неля и Тереза вместе в два раза старше Славика и Яна. Вале только что исполнился 21 год. Сколько лет каждому из братьев и сестер?

86. Грамотный раздел участка

Два брата унаследовали от своего отца большой огороженный по периметру участок земли в форме треугольника. Они решили разделить его на равные части по прямой линии, чтобы по общей границе можно было поставить наикратчайший забор.

Для землемера, к которому обратились братья, это было непростое задание. Однако, припомнив различные геометрические правила, он нашел место, где следует провести границу.

87. Феноменальный шевалье

Когда-то во Франции пользовался славой один шевалье, который, независимо от числа участников веселой кавалькады, сразу же мог сказать, сколькими разными способами наездники могли сгруппироваться в равные шеренги, выстраиваясь по два, три, четыре в ряд без остатка.

В те дни, бывало, съезжались десятки, а то и пара сотен рыцарей и дам, и не было случая, чтобы этот шевалье допустил ошибку в своих суждениях.

Однажды во время парада военной кавалерии его подозвал король и спросил:

— В этом отделении 1260 человек. Сколькими способами можно их расположить равными рядами?

— 34 способами, Ваше Величество.

— А вот в том, 7560?

Задание было намного сложнее, поэтому шевалье задумался на какое-то время, но вскоре ответ был готов: 62 способами!

— Как вы это делаете, мой славный рыцарь?

— О, нет ничего проще, Ваше Величество: каждый из показателей степени делителей, являющихся простыми числами, увеличиваю на единицу, множу и вычитаю двойку, потому что невозможно всем ехать гуськом или в один ряд.

Услышав такой ответ, король отказался от дальнейших расспросов, потому что не хотел показать, как мало понял в таком объяснении. Он попрощался с шевалье и ускакал со своей свитой, не обращая внимания, едут ли они гуськом или в один ряд.

Умение быстро найти число делителей, что в давнее время могло показаться чем-то феноменальным, теперь доступно — при некотором умении — многим любителям математических расчетов.

Правило таково, что если $N = a^p \times b^q \times c^r$ ..., причем a, b, c... являются простыми числами, то число всех делителей (то есть включая единицу, а также число N) равно

$$(p + 1) \times (q + 1) \times (r + 1) \ \ldots$$

Так, например,

$$7560 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7.$$

Показатели степеней: 3, 3, 1, 1.

Число распределений:

$$(3 + 1) \times (3 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 64.$$

Этот феноменальный шевалье исключил езду гуськом и в один ряд, поэтому его ответ был 62.

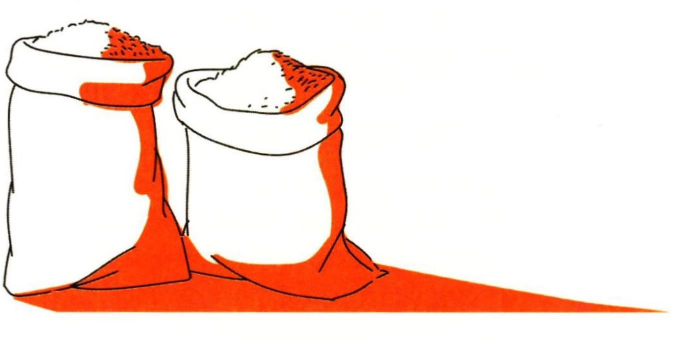
88. НАХОДЧИВЫЙ ФЕРМЕР

В не очень богатом хозяйстве фермер хотел взвесить пять мешков зерна. Весы с десятичной шкалой у него были, но не хватало некоторых гирь, так что вес меньше центнера[1], но превышающий его половину точно взвесить было нельзя. Мешки весили чуть больше 50 кг.

Как бы вы поступили в этой ситуации?

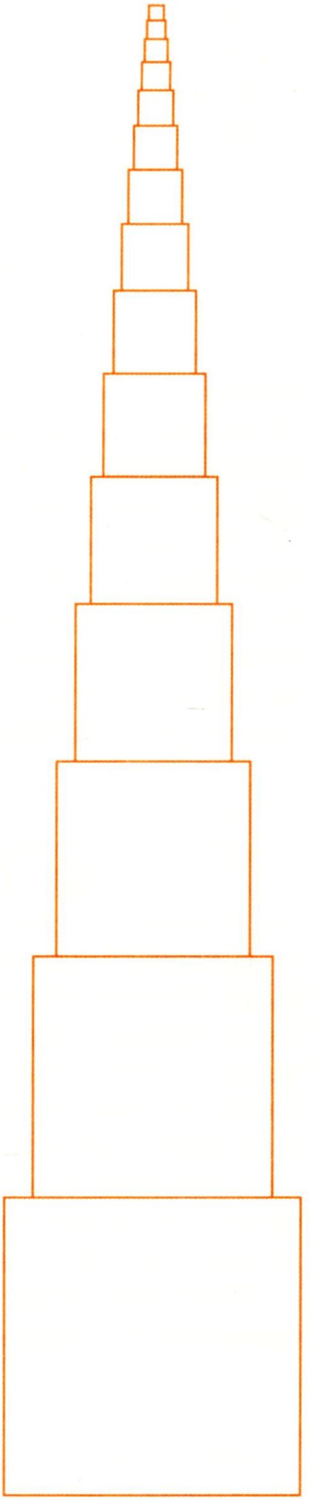
Можно по-разному выйти из положения: разделить содержимое мешков, отсыпать излишек и т. д. Но этот фермер предпочел способ наиболее... математический. Он пронумеровал мешки и взвесил их по два во всех возможных комбинациях пар. Таких комбинаций было 10; фермер получил десять значений веса, которые записал в порядке возрастания: 110 кг, 112 кг, 113 кг, 114 кг, 115 кг, 116 кг, 117 кг, 118 кг, 120 кг и 121 кг. С этой записью он пошел домой и там спокойно и без труда вычислил вес каждого мешка.

Вам интересно, как он это сделал? Попробуйте решить эту задачу самостоятельно, а если не получится, посмотрите на объяснение, приведенное в разделе ответов.



[1] В одном центнере 100 кг. — *Примеч. ред.*

89. ЭМБЛЕМА ВЫСТАВКИ



Предполагалось открытие выставки. Руководство объявило конкурс на ее эмблему.

Среди представленных проектов были два весьма похожих. В одном из этих проектов было предложено, чтобы эмблемой выставки была пирамида, сложенная из кубов: на самом огромном кубе с ребром $a = 25$ м должен быть помещен куб с ребром на 20% меньше, а на нем новый куб с ребром на 20% меньше ребра предыдущего куба и т. д.

Второй проект также предлагал пирамиду, в основании которой куб с ребром $a = 25$ м, на нем должен быть куб с ребром $\frac{1}{2}a$, потом куб с ребром $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$ и т. д. Какая из этих пирамид будет выше?

90. ГОД РОЖДЕНИЯ СЫНА И ГОД РОЖДЕНИЯ ОТЦА

В одном из номеров журнала *Parametr* опубликован такой разговор между сыном и отцом.

Сын: «Папа, сегодня первый день нового года, а также мой и твой день рождения. Знаешь, папа, сумма цифр нового года показывает, сколько мне сегодня исполнилось лет, а в прошлом году так не было. А у тебя было когда-нибудь такое совпадение?».

Отец задумался и ответил: «Нет, у меня такого совпадения не было».

Сын: «А в каком году ты родился?».

Отец: «Если тебе нравятся загадки, я скажу тебе только, что сумма цифр года моего рождения делится на 9».

В каком году родился отец и в каком году родился сын?[1] А когда состоялся их разговор?

91. Логическая головоломка

На одном острове жили люди двух внешне малоразличимых национальностей: фитумиту и байтата. При этом каждый фитумиту всегда говорил только правду, но ни один байтата никогда не говорил правды. Приезжий иностранец спросил одного из прохожих (P) о его национальной принадлежности, но не расслышал ответа; он обратился к двум стоящим рядом аборигенам (A и B) и спросил, что сказал прохожий. На это A заявил, что прохожий назвал себя байтата, а B заявил, что прохожий сказал: фитумиту. Когда иностранец спросил, не лгал ли прохожий, оба собеседника A и B заявили, что прохожий сказал правду. К какой национальности принадлежали аборигены A и B и прохожий P?

92. Еще одна логическая задача

В коробке лежат шляпы: две белые и три черные. Три шляпы были надеты на головы трех джентльменов A, B и C, которые были поставлены друг за другом таким образом, что A видел перед собой B и C, B видел только C, а C не видел ни A, ни B. Никто из них не видел своей шляпы, не оборачивался на других и не видел двух шляп, оставшихся в коробке. Мистера A спросили о его шляпе; он сказал, что не знает. Мистер B дал такой же ответ. Тогда мистер C сказал: «По ответам A и B я знаю, какая на мне шляпа» — и привел объяснение своего вывода.

Пусть читатель (с часами в руке) попробует восстановить рассуждения мистера C.

---

[1] Напомним читателю, что эта книга впервые была опубликована в XX веке. — *Примеч. ред.*

93. КРОЛИКИ И КУРЫ

В одной загородке, рассказывает старая китайская задача, были кролики и куры. Всего у них было 35 голов и 94 ноги. Сколько там было кур и сколько кроликов?

Эта задача легко решается с помощью алгебры.

94. БОРЗАЯ И ЗАЯЦ

Уже упоминаемый нами Алкуин является автором такой задачи.

Борзая преследует зайца, который опережает ее на 150 футов. Прыжок зайца составляет 7 футов, а борзая прыгает за то же время на 9 футов.

После скольких прыжков борзая догонит зайца?

95. ЗАДАЧА ЧЕШСКОЙ ПРИНЦЕССЫ

Старая легенда гласит, что чешская принцесса Либуша пообещала свою руку тому из трех рыцарей, кто первый решит такую задачу.

Сколько слив помещается в корзину, из которой половину всего содержимого и одну сливу отдадут первому, второму — половину оставшейся части и одну сливу, и, наконец, третьему — половину оставшихся и три сливы, после чего корзина будет пуста.

96. ПОСЛЕДНИЙ ДЕСЯТОК

Крестьянка принесла яйца на рынок. Первой покупательнице она продала половину всего количества и одно яйцо, второй — половину оставшихся и одно яйцо, третьей — снова половину оставшихся яиц и одно яйцо. После этого у нее в корзинке осталось 10 яиц. Сколько яиц у нее было изначально?

97. ДЕТИ И ЯБЛОКИ

Девять детей поделили между собой имеющиеся яблоки. Первый взял одно яблоко и $\frac{1}{10}$ оставшегося, второй — 2 яблока и $\frac{1}{10}$ остатка, третий — 3 яблока и $\frac{1}{10}$ остатка и т. д. Оказалось, что все они получили одинаковое количество яблок. Сколько именно?

98. КОГДА РОДИЛСЯ?

Это было в XIX веке. Одного господина спросили, когда он родился.

— Мне было полных x лет в году x^2.

Этот господин родился в 1806 году:

$$1806 + 43 = 43^2$$

В XX веке было бы такое решение:

$$1892 + 44 = 44^2$$

Но как найти эти решения?

99. КОРОЛЬ И ПОЧТМЕЙСТЕР

А это было в давние времена, когда не знали ни автомобилей, ни железных дорог, тогда даже короли ездили на перекладных.

Одного почтмейстера спросили, сколько лошадей король заказал для смены упряжек. Почтмейстер ответил: «Половина заказанных лошадей предназначена для самого короля, половина остальных — для его министра, половина оставшихся лошадей и еще половина лошади — для свиты, а оставшиеся — форейтору».

Сколько лошадей было заказано?

100. ПРУД С РЯСКОЙ

Пруд зарастает ряской. Каждые два дня поверхность, заросшая ряской, удваивается. Весь пруд зарос за 64 дня. За сколько дней ряской заросла четверть пруда?

ОТВЕТЫ

1. Наследство араба

Кадий нашел следующее решение: нужно одолжить одного верблюда и приступить к разделу, имея 18 верблюдов. Братья последовали его совету. Старшему при этом досталось 9 верблюдов, среднему — 6, младшему — 2, а позаимствованного верблюда вернули его владельцу. Три брата были очень довольны мудрым решением кадия, потому что в действительности каждый из них получил больше, чем назначил отец, а именно: один на $\frac{1}{2}$, второй на $\frac{1}{3}$, а третий на $\frac{1}{9}$ верблюда.

На первый взгляд, результат парадоксален. Однако из суммы частей, на которые отец наказал сыновьям разделить все наследство,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$$

видно, что если бы раздел наследства был сделан точно в соответствии с завещанием, то $\frac{1}{18}$ наследства просто не была бы учтена. Отсюда и «надбавки», которые наследники, к своей радости, так неожиданно получили.

2. Найденный кошелек

Крестьяне не умели правильно складывать дроби. Действительно, если сложить все части, на которые они хотели разделить найденные деньги, получится:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}.$$

Из этого следует, что они хотели разделить между собой меньше, чем нашли $\left(\frac{60}{60}\right)$. Найденные деньги вместе с деньгами верхового были поделены на 60 частей; из них $\frac{57}{60}$ получили путники, а $\frac{3}{60}$, или $\frac{1}{20}$, наездник забрал себе.

Мы знаем, что наездник присвоил себе трехрублевку. Если $\frac{1}{20}$ денег составляет 3 рубля, то всех денег было 60 рублей. Митрофан получил $\frac{1}{4}$ этих денег — 15 рублей, но если бы верховой не добавил свой рубль, Митрофан должен был получить на 25 копеек меньше, то есть 15 руб. – 25 коп. = 14 руб. 75 коп. Это составляло $\frac{1}{4}$ всех найденных денег. Из этого мы делаем вывод, что было найдено 59 рублей. Вместе с деньгами верхового — 60 рублей. Незнакомец доложил рубль, а забрал себе 3 рубля, таким образом, на остроумном разделе денег он заработал два рубля.

Какие банкноты были в кошельке? Пять бумажек по 10 рублей, одна пятирублевка, одна трехрублевка и одна банкнота достоинством в один рубль. Василий получил от верхового 20 рублей: две десятирублевки; Митрофан — 15 рублей: десятирублевку и пятирублевку; Поликарп — 12 рублей: десятирублевку и две рублевые бумажки (одна найдена, другая от верхового), Федор — последние 10 рублей. А трехрублевку вместе с кошельком незнакомец забрал себе.

4. Вычисление точного времени

Вот расчеты.

Разница $D - A$ показывает, сколько времени я находился вне дома: $D - A$ = 3 ч. 50 мин. – 3 ч. 00 мин. = 50 мин.

Разница $C - B$ показывает, сколько времени я провел у знакомого: $C - B$ = 5 ч. 46 мин. – 5 ч. 12 мин. = 34 мин.

Разница $(D - A) - (C - B)$ показывает, сколько времени я потратил на дорогу из моего дома к знакомому и обратно:

$$(D - A) - (C - B) = 50\text{ мин.} - 34\text{ мин.} = 16\text{ мин.}$$

Я пытался идти равномерно в обе стороны, поэтому могу предположить, что половина этого времени потрачена на обратный путь:

$$\frac{(D - A) - (C - B)}{2} = 8\text{ мин.}$$

Добавив эти минуты ко времени C, я получил время моего возвращения домой:

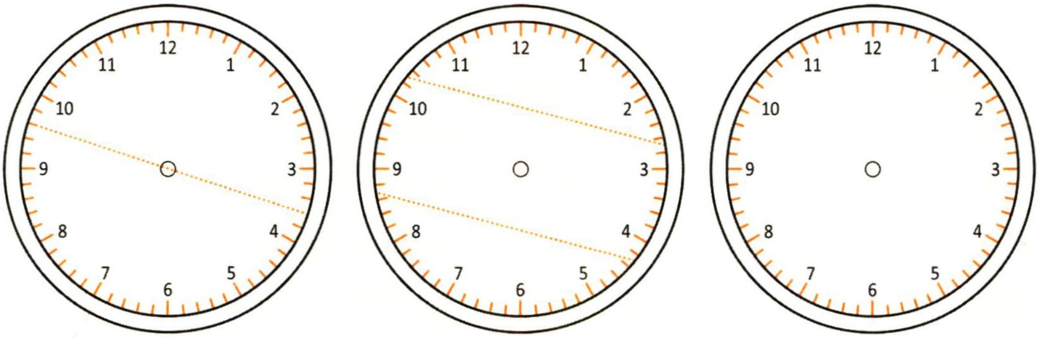
$$5\text{ ч. } 46\text{ мин.} + 8\text{ мин.} = 5\text{ ч. } 54\text{ мин.}$$

Я добавил еще одну минуту, потраченную на вычисления, и получил точное время!

5. Как разделить циферблат

На рисунке показано решение первых двух заданий.

Пусть читатель попытается найти третье решение самостоятельно.



6. Новый вариант старого парадокса Зенона

В этих «догонялках» стрелок, как и в задаче про состязание Ахилла и черепахи, суть состоит в том, что очередные продвижения минутной стрелки дают бесконечно убывающий геометрический ряд, а именно:

$$5 + 5 \times \frac{1}{12} + 5 \times \left(\frac{1}{12}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{12}\right)^3 + \ldots$$

Первым членом этого ряда является $a = 5$, шаг $q = \frac{1}{12}$. Сумма бесконечно убывающего геометрического ряда определяется по формуле:

$$S = \frac{a}{1 - q},$$

отсюда

$$S = \frac{5}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}.$$

Следовательно, в 1 час $5\frac{5}{11}$ минуты стрелки впервые совпадут в этот день, считая от полудня или полуночи.

Но есть еще одно подтверждение этому выводу: допустим, что минутная стрелка догонит часовую стрелку во время x минут после 1-го часа. Путь, который за это время пройдет часовая стрелка, равен $\frac{x}{12}$. Угол, на который повернется минутная стрелка, будет на 5 минут больше угла, пройденного часовой стрелкой. Отсюда

$$x - \frac{x}{12} = 5, \text{ поэтому } x = 5 \times \frac{12}{11} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}.$$

7. Еще несколько задач с часами

A. Двенадцать раз? Нет, только одиннадцать! Впервые минутная стрелка догонит часовую в 1 час и $5\frac{5}{11}$ минуты. В каждый последующий час минутная стрелка должна будет пробежать весь циферблат и еще $5\frac{5}{11}$ минуты. Вторая встреча состоится в 2 часа и $10\frac{10}{11}$ минуты, третья в 3 часа и $16\frac{4}{11}$ минуты и т. д., и наконец, одиннадцатая — в 11 часов и $59\frac{11}{11}$ минуты, или ровно в 12 часов ночи.

B. Напрашивается ответ, что часам для этого понадобится двенадцать секунд, но не следует забывать, что между первым и шестым ударами пять пауз, а между шестым и двенадцатым ударами таких пауз шесть. Таким образом, часы будут бить двенадцать часов в течение $13\frac{1}{5}$ секунды. При этом мы полагаем, что удары часов не длятся, а происходят мгновенно, моментально.

C. Через 360 дней.

D. Предположим, что первый раз совпадут n-й удар часов A и n-й удар часов B. До этого момента часы A били в течение $(n-1) \times 3$ секунды, а часы B били в течение $(n-1) \times 4$ секунды.

Мы получим уравнение

$$(n-1) \times 4 - (n-1) \times 3 = 2,$$

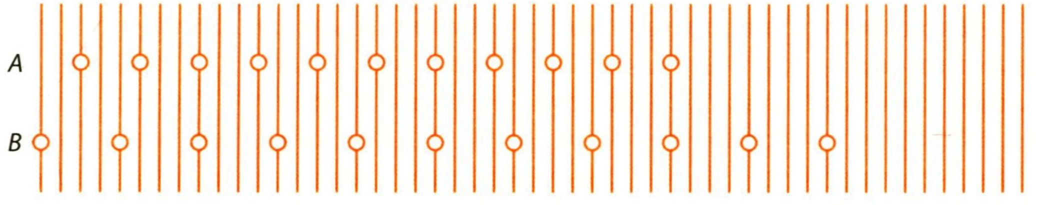
из которого находим $n = 3$.

Итак, третий удар часов A совпадает с третьим ударом часов B, а до этого можно было услышать два удара часов B и два слегка запаздывающих удара часов A. Если бы часы били, например, три часа, то всего можно было бы услышать пять ударов.

В течение следующих 12 секунд часы A пробьют четыре раза, а часы B — только три раза, причем в течение этих 12 секунд мы услышим три отдельных удара часов A и два отдельных удара часов B и один совместный удар; этот седьмой удар часов A совпадет с шестым ударом часов B. Всего в течение 12 секунд мы услышим $3 + 2 + 1 = 6$ ударов, которые с предыдущими пятью ударами дают 11 ударов.

Но нам нужно «добраться» до 19 ударов. Дальнейшие 12 секунд дают нам снова три отдельных удара часов A, два отдельных удара часов B и один совместный удар; причем часы A будут бить одиннадцатый раз, а часы B пока только девятый раз. Вместе с предыдущими 11 ударами мы услышим 17 ударов часов, а затем еще два опаздывающих удара часов B через 4 секунды каждый: десятый и одиннадцатый. Так что было одиннадцать часов.

Вот распределение ударов обоих часов во времени.



9. Как продать целые яйца, продавая по половинке яйца

Давайте решим эту задачу, двигаясь от конца к началу. Мы знаем, что каждый покупатель обнаруживал в корзинке $2r + 1$ яйцо, покупал $r + 1$ яйцо и оставлял r яиц. Давайте составим таблицу.

Покупатель	Оставил	Купил	Было в наличии
Седьмой	0	1	1
Шестой	1	2	3
Пятый	3	4	7
Четвертый	7	8	15
Третий	15	16	31
Второй	31	32	63
Первый	63	64	127

В начале торговли в корзинке было 127 яиц.

Эта задача может быть выражена через число покупателей n. Тогда изначально яиц было $2^n - 1$ яйцо.

Если, например, покупателей было 7 ($n = 7$), то получим, что изначально в корзинке было $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$ яиц.

10. Загадочный поезд

Казалось бы, задача неразрешима, потому что неизвестно, сколько вагонов было в составе в самом начале (известно только, что в нем было меньше ста вагонов). Но мы все же можем решить эту задачу.

Чтобы не отрезать «половину вагона», следует предположить, что в исходном составе было $4n + 2$ вагона. На первой станции была отцеплена четвертая часть состава, то есть $n + \frac{1}{2}$ вагона и еще $\frac{1}{2}$, всего $n + 1$ вагон, а дальше отправились $3n + 1$ вагон.

Исходное число вагонов $4n + 2$ имеет такое свойство, что при делении на 4 дает остаток 2. Чтобы число $3n + 1$ имело то же самое свойство, мы должны представить n как $n = 4n' + 3$. Тогда $4n + 2 = 16n' + 14$; $3n + 1 = 12n' + 10$. Таким образом, на вторую станцию прибыло $12n' + 10$ вагонов, там была отцеплена четвертая часть состава, то есть $3n' + 2\frac{1}{2}$ вагона, и еще $\frac{1}{2}$ вагона, всего $3n' + 3$ вагона, а дальше отправились $9n' + 7$ вагонов.

Если мы хотим, чтобы число $9n' + 7$ имело то же свойство: при делении на 4 давало в остатке 2, то должны подставить $n' = 4n'' + 3$. Тогда $4n + 2 = 64n'' + 62$, $3n + 1 = 48n'' + 46$, $9n' + 7 = 36n'' + 34$. Таким образом, $36n'' + 34$ вагона прибыли на третью станцию; четвертая часть состава, или $9n'' + 8\frac{1}{2}$ вагона, и еще $\frac{1}{2}$ вагона, всего $9n'' + 9$ вагонов были отцеплены, а дальше отправились $27n'' + 25$ вагонов.

Теперь мы уже близки к решению поставленной задачи. Мы знаем, что изначально поезд имел $64n'' + 62$ вагона, но мы также знаем, что количество вагонов было меньше 100. Следовательно, мы приходим к выводу, что $n'' = 0$. Первоначально поезд состоял из 62 вагонов, после первой остановки дальше отправился состав из 46 вагонов, после второй станции — состав из 34 вагонов, после третьей станции — из 25 вагонов.

11. Яблочная задачка

Можно. Только вычисления нужно вести с конца.

Если после седьмой «раздачи» в каждой корзине оказалось 128 яблок, то это означает, что в первых шести корзинах до этого перекладывания было по 64 яблока, а в седьмой корзине было $128 + 6 \times 64 = 512$. Теперь, рассуждая аналогичным образом, мы найдем, сколько яблок было в корзинах до шестого, пятого, четвертого, третьего, второго и, наконец, до первого перекладывания яблок.

128	128	128	128	128	128	128
64	64	64	64	64	64	512
32	32	32	32	32	480	256
16	16	16	16	464	240	128
8	8	8	456	232	120	64
4	4	452	228	116	60	32
2	450	226	114	58	30	16
449	225	113	57	29	15	8

Оказывается, первоначально в корзинах было следующее количество яблок: 449, 225, 113, 57, 29, 15, 8.

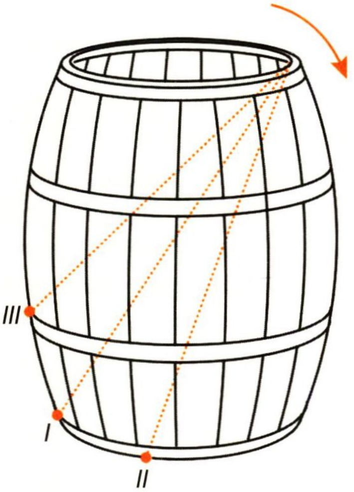
Стоит отметить закономерность возникновения этих чисел:

$$a_1 = 8$$
$$a_2 = 2 \times a_1 - 1 = 15$$
$$a_3 = 2 \times a_2 - 1 = 29$$
$$a_4 = 2 \times a_3 - 1 = 57$$
$$\ldots$$

12. Сколько воды в бочке

Это не математическая шутка, а реальная геометрическая задача, хотя ее решение до смешного просто.

Если бы бочка была действительно заполнена водой ровно наполовину, то, наклонив бочку так, чтобы вода достигла края, мы бы увидели, что у дна бочки вода также достигает верхнего края (уровень I на рисунке). Это связано с тем, что поверхность, проходящая через диаметрально противоположные точки верхнего и нижнего обвода, делит объем бочки на две равные части.



Если воды в бочке меньше, чем половина, то при наклоне вода не будет достигать верхнего края дна (уровень II). Наконец, если воды больше половины, то дно будет полностью скрыто водой (уровень III).

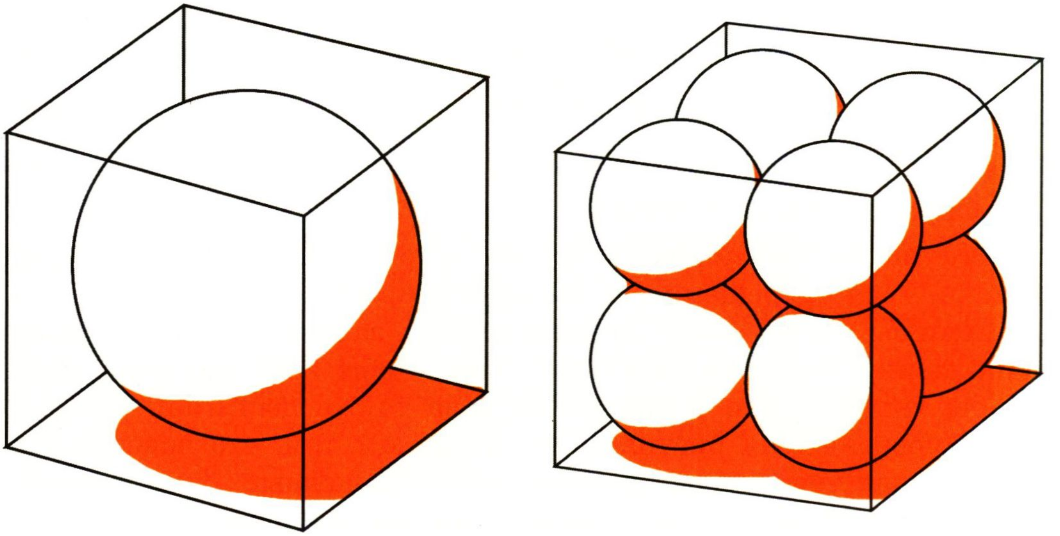
Таким образом можно получить точный ответ без каких-либо измерений.

13. Ящики с шарами

Шары в первом ящике весили 16 кг, а так как шаров было 64, то каждый из них весил по 0,25 кг.

А сколько бы весил один большой шар, который касался бы всех шести стенок ящика? Такой шар имел бы диаметр в четыре раза больший, чем любой из 64 шаров, лежавших в первом ящике. Вес этого шара был бы в $4 \times 4 \times 4 = 64$ раза больше, чем вес одного из этих 64 шаров, то есть один большой шар весил бы ровно столько, сколько весили 64 шара из первого ящика, а именно — 16 кг.

Если теперь возьмем шар с диаметром в два раза меньшим диаметра большого шара, то в ящике поместится $2 \times 2 \times 2 = 8$ шаров, общий вес которых будет равен весу одного большого шара!



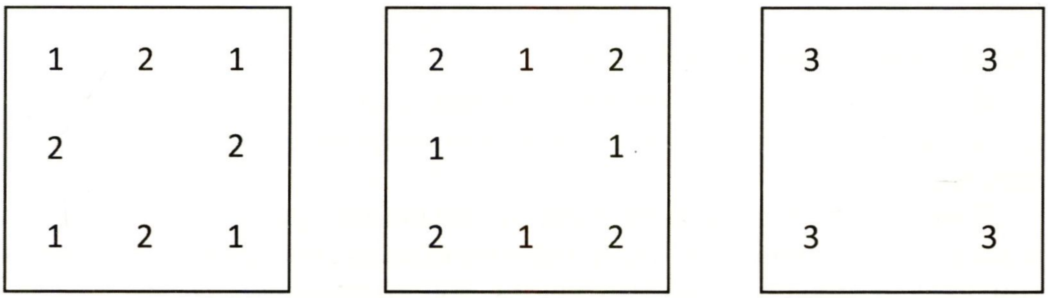
Если бы мы взяли шар с диаметром в три раза меньшим, чем диаметр большого шара, то таких шаров в ящике поместилось бы $3 \times 3 \times 3 = 27$, а общий вес их остался бы тем же самым. Теперь мы можем ответить на вопрос, сколько весит ящик с тысячей шариков: 16 кг нетто и 18 кг брутто[1].

14. Горькое лекарство

Остаток микстуры по высоте в два раза меньше целой рюмочки, но по объему меньше в восемь раз. Малыш оставил всего 2,5 грамма лекарства, а выпил 17,5.

15. Как расставить охрану

Простое решение видно из рисунка.



16. Ключи от чемоданов

Сотрудница, которой не раз приходилось иметь дело с подбором ключей, сказала:

— Все не так уж плохо! Только с первым чемоданом у вас может быть десять попыток. Ко второму нужно будет попробовать только девять ключей, и количество ключей будет продолжать уменьшаться. А если посчитать попытки, то получится

$$10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55.$$

— Значит, мне грозит не более 55 попыток!

Но тут коллега посоветовала:

— Прежде всего, не перебирайте ключи один за другим, пытаясь открыть один чемодан, а берите любой ключ и попробуйте

---

[1] Не́тто и бру́тто означают соответственно массу товара без упаковки и вместе с ней. — *Примеч. ред.*

открыть все чемоданы по очереди. Во-первых, так будет быстрее и ключи не будут у вас путаться, а во-вторых, с первым же ключом вам угрожают не десять, а максимум девять попыток, потому что, если девять попыток не удались, ключ можно смело прикреплять к десятому чемодану. Со вторым ключом — максимум восемь попыток, с третьим — семь попыток... с девятым — одна попытка, а для десятого ключа останется только один чемодан, и вам не нужно будет пытаться его открыть!

— Ну, тогда всего будет не более 45 попыток!

— Да, но это будет в худшем случае — когда каждый ключ подойдет к замку только после всех возможных попыток. Вполне вероятно, что общее число попыток будет вдвое меньше максимального, не исключено, что будет достаточно 22 или 23 попыток.

18. Автомобили и самолет

Можно запутаться в очень сложных расчетах: где встретил самолет машину из Познани, где потом встретил машину, которую опередил, и т. д.

Между тем задача решается чрезвычайно просто: автомобили встретились через три часа, следовательно, самолет тоже летал три часа и проделал за это время 300 километров.

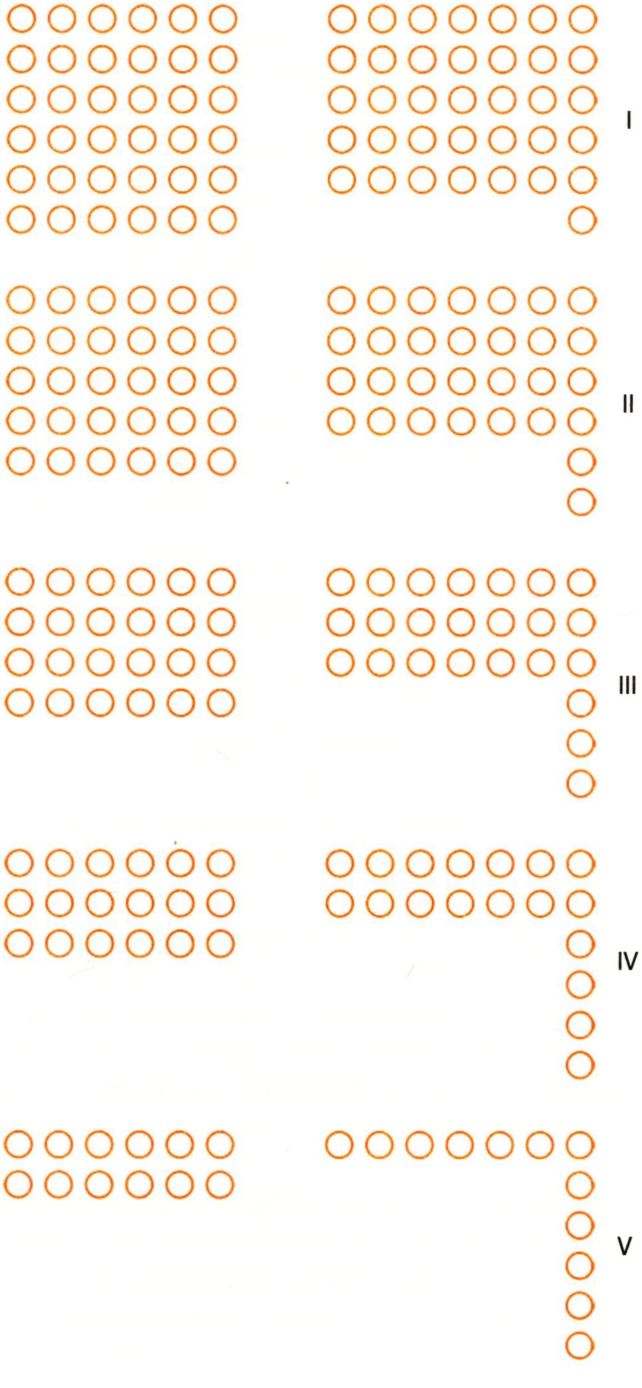
19. Завещание махараджи

Алгебраическое решение этой задачи несложно. Однако метод, приведенный ниже, является более доступным и интересным, к тому же он имеет индийское происхождение.

Из текста задания легко сделать вывод, что каждый из сыновей мог получить не менее шести алмазов.

Давайте представим алмазы в виде кружков и начнем с квадрата, в котором 6 рядов по 6 алмазов в ряду. Переместим один ряд алмазов, как показано на рисунке I. После того, как отдадим старшему брату один бриллиант, выступающий в перемещенном ряду, нужно будет отдать ему остальные 5 алмазов этого ряда в качестве седьмой части оставшегося количества алмазов.

Первый сын получил 6 алмазов, и их осталось 30. Повторив аналогичную манипуляцию с прямоугольником из 30 кружков, мы получим рисунок II. Когда мы удалим два выступающих алмаза из последнего ряда, у нас будет еще четыре алмаза, которые также составят седьмую часть оставшихся алмазов. Таким образом, мы убедимся, что каждый из шести сыновей получит 6 алмазов.



Данное решение имеет слабое место: оно фактически начинается с результата и заканчивается им же: мы выбираем квадрат из 36 кружков, потому что знаем, что их и должно быть столько. Между тем алгебраическое решение протекает обычным образом: от известного к неизвестному. В любом случае вышеприведенная процедура, хотя и является искусственным решением, представляет интерес.

Решение не изменится, если вместо $\frac{1}{7}$ мы возьмем любую другую дробь, обозначив ее $\frac{1}{n}$. Количество сыновей в этом случае должно быть $n-1$, а количество алмазов $(n-1)^2$.

20. Хождение по лестнице

Чтобы доставить первую посылку на первый этаж, курьер должен подняться на 6 ступеней; чтобы доставить вторую на второй этаж: $6 + 18$ ступеней; третью на третий этаж: $6 + 2 \times 18$ ступеней... И наконец, чтобы доставить седьмую посылку на седьмой этаж: $6 + 6 \times 18 = 114$ ступеней.

Курьер поднимется на число ступеней, равное сумме арифметического ряда из семи членов, первый член которого равен 6, а разница между ними равна 18.

Рассчитать эту сумму можно по формуле:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n,$$

где n — количество членов арифметического ряда, a_1 — первый член ряда, a_n — последний. Мы получим:

$$S = \frac{6 + 114}{2} \times 7 = 420 \text{ ступеней.}$$

Спускаясь вниз, он прошагает по такому же числу ступеней, то есть всего ему предстоит преодолеть $420 \times 2 = 840$ ступеней. В это число включены и те ступени, которые курьер пройдет, спускаясь с седьмого этажа после того, как доставит последнюю посылку.

Как это часто бывает в формулировке развлекательных задач, здесь может быть некоторая двойственность толкования. В момент, когда курьер доставит последнюю посылку, он будет находиться на высоте седьмого этажа... То есть, строго говоря, на этот момент он поднимется и спустится по $840 - 114 = 726$ ступеням. Поэтому, если кто-то скажет, что курьер должен был пройти 840 ступеней, ему можно возразить «во имя точности».

22. Потерянные деньги

Согласно приведенным выше данным, количество потерянных монет кратно 7; это число, уменьшенное на единицу, становится кратным 2, 3 и 5. Но поскольку эти числа являются простыми числами, количество потерянных монет, уменьшенное на единицу, должно быть кратным $2 \times 3 \times 5 = 30$.

А из чисел, кратных 30, следует выбрать такое число, которое, увеличенное на единицу, будет делиться на 7 без остатка. Таким требованиям соответствует число 90. В мешочке была 91 монета. Следовательно, потеряно 18 рублей 20 копеек.

Кроме числа 91 условиям задачи отвечают числа: $91 + 210 = 301$, $301 + 210 = 511$, $511 + 210 = 721$ и т. д. Но уже 301 монета будет весить 903 грамма, что слишком много для мешочка с деньгами...

23. Туристы и вареники

Начнем с конца: третий турист оставил своим друзьям 8 вареников, то есть по 4 штуки на каждого, значит, сам он тоже съел 4 вареника; отсюда вывод, что, проснувшись, он обнаружил 12 вареников, которые оставил второй турист. Оставив по 6 вареников для каждого своего спутника, второй турист сам тоже съел 6 вареников; выходит, что после пробуждения он обнаружил 18 вареников.

Теперь легко сосчитать, что если первый турист оставил для двух друзей 18 вареников, по 9 на каждого, то сам он тоже съел 9 вареников, поэтому изначально было 27 вареников.

Как следует поделить оставшиеся 8 вареников? Конечно, первый турист уже съел свою порцию: 9 вареников. Второй турист съел только 6 вареников, поэтому ему причитается еще 3 вареника, а третий турист съел всего 4 вареника — ему по праву принадлежат еще 5.

24. Формирование составов

Всего угольных вагонов было $11 \times 35 = 385$. Число 385 нужно разложить на множители таким образом, чтобы одним множителем было число n, меньше 11, а другим множителем было число $(35 + n \times 5)$.

Разложим число 385 на простые множители:

$$385 = 5 \times 7 \times 11$$

и запишем все делители этого числа в порядке возрастания:

$$1,\ 5,\ 7,\ 11,\ 35,\ 55,\ 77,\ 385.$$

Из этих делителей можно создать следующие пары, дающие произведение 385:

$$1 \times 385 = 5 \times 77 = 7 \times 55 = 11 \times 35.$$

Следовательно, вместо 11 составов по 35 вагонов можно отправить 7 составов по 55 вагонов. Это освобождает 4 локомотива. К каждому составу следовало дополнительно присоединить 4 раза по 5 вагонов, что соответствует условиям задачи.

Можно решить эту задачу и при помощи уравнения.

Пусть x — количество локомотивов, отправленных по другим маршрутам. Останется $11 - x$ локомотивов, и каждый локомотив должен будет взять $(35 + x \times 5)$ вагонов. Отсюда получаем уравнение

$$(11 - x)(35 + x \times 5) = 385.$$

После алгебраических преобразований мы получим уравнение $20x - 5x^2 = 0$, где

$$x(4 - x) = 0.$$

Это уравнение имеет два решения: $x = 0$ (это было в первоначальном варианте, когда все локомотивы должны были идти с угольными вагонами) или $x = 4$ (то есть были освобождены 4 локомотива).

25. Три бочонка с водой

Задачу следует решать с конца.

После третьего переливания количество воды в каждом бочонке было следующим:

$$\text{I} — 24,\ \text{II} — 24,\ \text{III} — 24.$$

До третьего переливания было:

$$\text{I} — 12,\ \text{II} — 12,\ \text{III} — 48.$$

До второго переливания:

I — 6, II — 42, III — 24.

До первого переливания:

I — 39, II — 21, III — 12.

Таким образом, в первом бочонке вначале было 39 литров воды, во втором — 21 литр и 12 литров в третьем. Наибольшее количество воды, которое было в каком-либо бочонке, — 48 литров. В этом случае бочонок был заполнен до краев, а поскольку бочонки одинаковые, они все имеют вместимость 48 литров.

Можно решить эту задачу, используя уравнения. Для этого мы составим таблицу.

	Количество литров воды в бочке		
	I	II	II
Исходное состояние	x	y	z
После I переливания	$x-y-z$	$2y$	$2z$
После II переливания	$2x-2y-2z$	$3y-z-x$	$4z$
После III переливания	$4x-4y-4z$	$6y-2z-2x$	$7z-x-y$

Сложив эти уравнения, мы получим

$$x+y+z=72$$

Из первого уравнения мы имеем $x-y-z=6$. Прибавив $x+y+z=72$, мы получим $2x=78$, откуда $x=39$.

Из второго уравнения имеем $3y-z-x=12$. Прибавив $x+y+z=72$, получим $4y=84$, откуда $y=21$.

Из третьего уравнения мы имеем $7z-x-y=24$. Прибавив $x+y+z=72$, мы получим $8z=96$, откуда $z=12$.

26. Сбор грибов

Нетрудно заметить, что дедушка дал третьему внуку наименьшее количество грибов, так как ему нужно было собрать еще столько же, чтобы он мог сравняться со своими братьями. Для простоты скажем, что дедушка дал своему третьему внуку горсть грибов. Сколько он дал таких горстей своему четвертому внуку?

Получается, третий внук принес домой две горсти, потому что он собрал столько же грибов, сколько дал ему дедушка. Четвертый внук принес домой столько же грибов, сколько и третий, то есть тоже две горсти; но мы помним, что четвертый внук потерял по дороге половину грибов, а это значит, что он получил от деда четыре горсти.

Первый внук принес домой две горсти, но сам нашел два гриба, а это значит, что дед подарил ему две горсти без двух грибов. Второй внук принес домой две горсти, но по дороге потерял два гриба, таким образом, он получил от деда две горсти грибов и еще два гриба.

Всего дедушка дал внукам грибов: 1 горсть + 4 горсти + 2 горсти без 2 грибов + 2 горсти и 2 гриба, то есть всего 9 полных горстей. В 9 равных горстях было 45 грибов, поэтому в каждой горстке было $45 : 9 = 5$ грибов.

Итак, теперь у нас есть ответ: дедушка дал своему третьему внуку одну горсть, то есть 5 грибов; четвертому он дал четыре горсти, то есть $4 \times 5 = 20$ грибов; первому — две горсти без двух грибов, то есть $2 \times 5 - 2 = 8$ грибов, наконец, второму он дал две горсти и два гриба, то есть $2 \times 5 + 2 = 12$ грибов.

27. Обмен зайцев на кур

12 зайцев и 18 кур.

28. Первые проблески гениальности

Маленький Гаусс, услышав данное учителем задание, быстро понял ход решения. Вот схематическое представление процесса рассуждения, которое происходило в юной, но гениальной голове:

$$
\begin{array}{r}
1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ldots,\ 20 \\
+\ 40,\ 39,\ 38,\ \ldots,\ 21 \\
\hline
41,\ 41,\ 41,\ \ldots,\ 41
\end{array}
$$

Наибольшие и наименьшие числа ряда дают в сумме число 41. В результате этого наблюдения мальчик умножил 20 на 41 и написал единственное число: 820.

Учитель был разумным человеком. Он понял, что перед ним ребенок с удивительными способностями, и занимался с ним с полной самоотдачей, но вскоре ему пришлось признать, что ученик уже ничему больше не может научиться у своего учителя.

29. Справедливая оплата

При разделе арабы поссорились. Араб, у которого было пять сухарей, потребовал для себя пять золотых монет, а его спутник хотел получить половину — четыре монеты, не безосновательно утверждая, что они оба спасли жизнь голодному путнику.

Не придя к согласию, после прибытия в оазис они обратились к местному судье с просьбой разрешить их спор. Решение судьи было для обоих неожиданным.

«Вы оба неправы, — сказал судья с улыбкой. — Предположим, вы разделили каждый сухарь на три части; таким образом, вы получили 24 части. Полагаю, что вы все поделили поровну, и каждый из вас съел по 8 частей. Тот, у кого было пять сухарей, то есть 15 частей, отдал третьему путешественнику 7 частей, а его спутник из его трех сухарей отдал только 1 часть. Из этого следует, что монеты должны быть разделены таким образом: 7 монет принадлежат одному из вас и только одна — другому».

30. Пароход и плоты

Предположим, что протяженность Вислы от Варшавы до Гданьска составляет 450 км. Получаем, что пароход проходит за один день 225 км вниз по реке, а вверх по течению всего 150 км в день. Разница в скорости в 75 км в день объясняется тем, что при движении вниз по реке течение воды увеличивает скорость движения корабля, а при движении против течения — уменьшает.

Это позволяет определить: скорость течения реки составляет $75 : 2 = 37\frac{1}{2}$ км в день, а собственная скорость парохода (на стоячей воде) составляет $187\frac{1}{2}$ км в день.

То есть пароход по течению будет проходить $187\frac{1}{2} + 37\frac{1}{2} = 225$ км, а против течения $187\frac{1}{2} - 37\frac{1}{2} = 150$ км в сутки.

Плоты, идущие со скоростью, равной скорости течения воды в Висле, дойдут от Варшавы до Гданьска за $450 : 37\frac{1}{2} = 12$ дней.

Эта задача также может быть решена без учета какого-либо конкретного расстояния между Варшавой и Гданьском. Достаточно учесть, что пароход по течению проходит за сутки $\frac{1}{2}$ пути, а вверх по течению — $\frac{1}{3}$. Таким образом, если бы не было течения, пароход проходил бы в день $\frac{5}{12}$ расстояния, а вода в Висле проходит в течение дня $\frac{1}{12}$ этого же расстояния, и из этого следует, что плоты будут плыть из Варшавы в Гданьск со скоростью воды в течение 12 дней.

31. Регламентированное вождение

Предположим, что весь отрезок дороги составляет 120 км. Время на преодоление этого пути по условиям конкурса $120 : 48 = 2{,}5$ часа — ни меньше, ни больше. Раз водитель проехал первую половину дороги, или 60 км, за 1 час, у него оставалось $1\frac{1}{2}$ часа на преодоление второй половины маршрута, поэтому он должен был двигаться со скоростью $60 : 1\frac{1}{2} = 40$ км/ч.

Давайте рассмотрим этот вопрос более отвлеченно. Предположим, что вся длина маршрута составляет $2d$ и что автомобилист проехал первую половину дороги со скоростью v_1, а вторую половину со скоростью v_2. Определим, какова была средняя скорость v автомобиля.

Автомобилист на первую половину дороги затратил времени $\frac{d}{v_1}$, а на вторую половину $\frac{d}{v_2}$, то есть весь маршрут он преодолел за $\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}$. С другой стороны, на дорогу $2d$ при скорости v потребуется времени $\frac{2d}{v}$. Мы получаем уравнение:

$$\frac{2d}{v} = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2},$$

которое после сокращения на d и деления на 2 дает следующее равенство:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

Оказывается, что значение обратной величины скорости v является средним арифметическим обратных величин скоростей v_1 и v_2. В этом случае мы говорим, что скорость v является *средней гармонической* между скоростями v_1 и v_2.

В нашей задаче у нас есть вводные данные: $v = 48$ и $v_1 = 60$, и нам нужно определить v_2.

Из полученного выше уравнения рассчитываем

$$\frac{1}{v_2} = \frac{2}{v} - \frac{1}{v_1}$$

и, подставляя значения $v = 48$, $v_1 = 60$, получаем

$$\frac{1}{v_2} = \frac{2}{48} - \frac{1}{60} = \frac{1}{40},$$

отсюда $v_2 = 40$.

32. Осел и мул

Если бы осел взял один из мешков мула, он бы нес столько же мешков, что и мул; из этого следует, что количество мешков, которые нес мул, должно было быть на два больше, чем количество мешков, которые нес осел.

Если бы осел сбросил один из своих мешков на дорогу, то, поскольку у мула раньше было на два мешка больше, теперь у него было бы уже на три мешка больше, чем у осла; если бы брошенный мешок был навьючен на мула, он имел бы на четыре мешка больше, чем осел.

И тогда у мула было бы — как он говорит — вдвое больше мешков, чем у осла. Это означает, что после передачи одного мешка мулу у осла осталось бы четыре мешка.

В итоге имеем: мул нес семь мешков, а осел — пять.

33. Хитроумные туристы

Эту задачу можно решить, начав с конца. Чтобы упростить вычисления, можно для наглядности использовать домино, спички или монеты.

Пусть монета *22* будет хозяином, который останется в гостинице один после того, как его гости будут «сосчитаны». Размещаем монеты *21* и *20*, как показано на рисунке I.

Начиная с монеты *20* проведем подсчет против часовой стрелки:

7	6	5	4	3	2	1
20	22	21	20	22	21	20

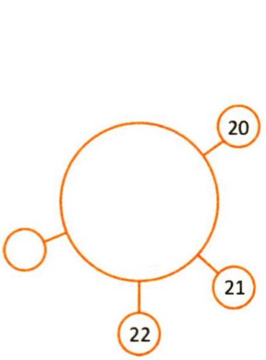


Рис. I

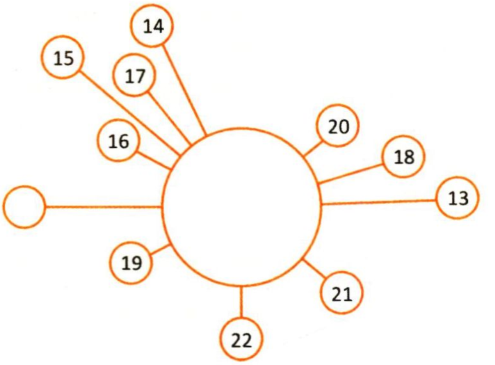


Рис. II

Число 1 выпало на монетку *20*; двигаясь в том же направлении, мы поместим монету *19* в пустой кружок на рисунке I.

И таким способом мы будем размещать все новые монеты.

На рисунке II мы видим, что уже выложена монета *13*. Сосчитаем в обратном порядке, начиная с числа 7 и монеты *13*:

7	6	5	4	3	2	1
13	18	20	14	17	15	16

После монеты *16*, на которую выпало число 1, мы помещаем монету *12* в пустой кружок на рисунке II.

Когда, действуя таким способом, мы выложим на стол все монеты, получим такую картину.

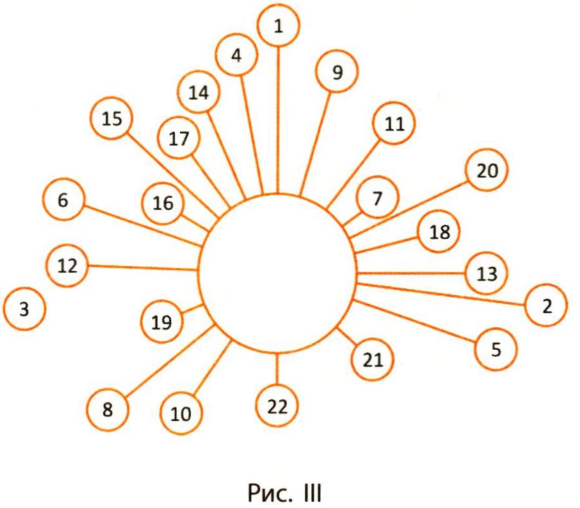


Рис. III

Но это еще не конец наших действий, нужно еще раз отсчитать семь монет, чтобы выявить то место, с которого был начат счет.

7	6	5	4	3	2	1
1	4	14	17	15	16	6

Оказывается, чтобы розыгрыш удался, нужно было начинать счет с места, обозначенного цифрой 6.

А как решить эту задачу более простым способом?

34. Неосторожное гостеприимство

Приглашение будет действовать более 13 лет!

Оказывается, семь человек делают возможными $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ перестановок.

Какой совет следовало бы дать этому опрометчивому человеку, если бы он попросил нас спасти его от разорительного обязательства? Прежде всего, он мог бы прибегнуть к помощи двух довольно простых оговорок.

Первая: что не будет учитываться такая смена мест, которая заключалась бы в поочередном сдвиге всех на одно, два и т. д. вплоть до семи мест вправо (или влево). Это уменьшит количество неизбежных ужинов в семь раз, то есть с 5040 до 720. Вторая: не должна учитываться такая смена мест, когда каждый сосед справа становится соседом слева. Это уменьшило бы количество ужинов до 360.

Но почти год гостеприимный хозяин должен принимать гостей каждый день. Даже математика не может ему в этом помочь.

35. Путь до школы

Давайте вспомним, как мальчик рассчитывал среднюю скорость:

$$\begin{array}{c} \text{2 оборота за 1 секунду} \\ \text{3 оборота за 2 секунды} \\ \hline \text{5 оборотов за 3 секунды,} \end{array}$$

или 1 оборот за $\dfrac{3}{5}$ секунды.

А теперь давайте посчитаем среднюю скорость по-другому. В первой половине дороги мальчик ехал со скоростью 2 оборота в секунду, или 1 оборот в $\frac{1}{2}$ секунды, а во второй половине дороги он ехал со скоростью 3 оборота в 2 секунды, то есть 1 оборот в $\frac{2}{3}$ секунды. В среднем он совершал 2 оборота за $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$, или 1 оборот за $\frac{7}{12}$ секунды.

Вся дорога составляет 8100 м, или $8100 : 2{,}25 = 3600$ оборотов колеса, а поскольку 1 оборот длился $\frac{7}{12}$ секунды, то для 3600 оборотов потребовалось $3600 \times \frac{7}{12} = 2100$ секунд, или 35 минут.

Все прекрасно сходится! Нужно только правильно рассчитать среднюю скорость.

Теперь давайте сделаем расчеты для второго дня.

Первая половина дороги со скоростью 2 оборота в секунду, то есть 4,50 м/с, заняла $4050 : 4{,}50 = 900$ секунд, то есть 15 минут. Вторая половина дороги со скоростью 3 оборота в секунду, то есть 6,75 м/с, заняла $4050 : 6{,}75 = 600$ секунд, или 10 минут. Вся поездка заняла $10 + 15 = 25$ минут.

Рассчитаем среднюю скорость по нашему новому методу.

$$\begin{array}{c} 1 \text{ оборот в } \frac{1}{2} \text{ секунды} \\ 1 \text{ оборот в } \frac{1}{3} \text{ секунды} \\ \hline 2 \text{ оборота в } \frac{5}{6} \text{ секунды,} \end{array}$$

или 1 оборот за $\frac{5}{12}$ секунды.

Уже известно, что на всю дорогу потребовалось 3600 оборотов колеса, что при одном обороте за $\frac{5}{12}$ секунды требуется 1500 секунд, то есть 25 минут — в полном соответствии с прогнозом.

37. Изобретательные торговцы

Торговцы разделили стадо так, что один забрал всех самых лучших свиней, а другой забрал остальных. Первый продавал 2 свиней за 1 солид, второй — 3 свиней за 1 солид.

Таким образом, свиньи были проданы по закупочной цене, то есть по 2 солида за 5 штук. Первый, продав 120 свиней, получил 60 солидов, в то время как второй за то же самое количество менее упитанных свиней получил только 40 солидов, вместе они вернули стоимость покупки 100 солидов. Но у них же осталось еще десять свиней!

38. Затруднение продавца

Обозначим различные длины плеч весов через a и b.

При первом взвешивании (рисунок I) вместо фактического веса товара P покупатель получил

$$c_1 = \frac{a}{b} \times P,$$

при втором взвешивании (рисунок II) он получил вес

$$c_1 = \frac{b}{a} \times P.$$

Всего продавец отвесил товара

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)P,$$

а оплату взял при этом за $2P$. Если соотношение

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2,$$

продавец отвесил товара больше, чем следовало.

Так получилось, потому что если $a \neq b$, то $(a - b)^2 > 2$, отсюда $a^2 + b^2 > 2$, или

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} > 2,$$

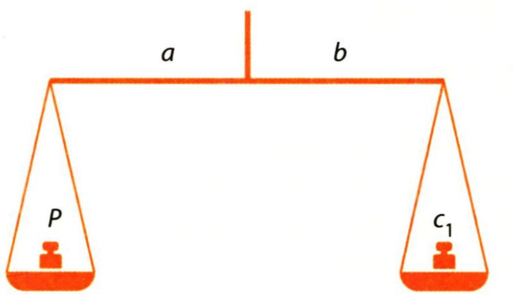


Рис. I

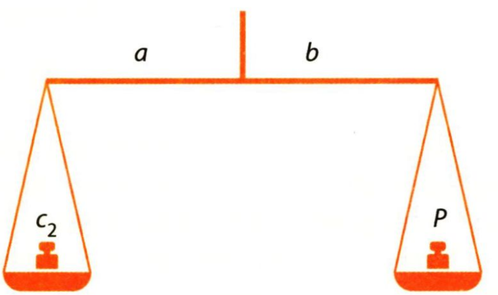


Рис. II

и, наконец, имеем

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$$

Только в случае, когда a равно b, продавец отпустит среднее количество товара. Таким образом, на неправильно отрегулированных весах можно или получить нечестную прибыль, или честно... понести убыток.

39. Транспорт с углем

Если мы предположим, что было x 15-тонных вагонов, y 20-тонных вагонов и z вагонов по 30 тонн, то мы сможем написать два уравнения:

$$\begin{cases} 15x+20y+30z=500 \\ x+y+z=18 \end{cases}$$

У нас есть два уравнения с тремя неизвестными. И все же мы можем решить эту задачу, потому что неизвестные выражены натуральными числами.

Разделив все выражения первого уравнения на 5, получим

$$3x+4y+6z=100.$$

Умножив все выражения второго уравнения на 6, получим

$$6x+6y+6z=108.$$

Проведем вычитание первого уравнения из второго:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 6x+6y+6z=108 \\ 3x+4y+6z=100 \end{array} \\ \hline 3x+2y=8 \end{array}$$

Мы получили уравнение $3x+2y=8$, которое в натуральных числах имеет единственное решение: $x=2$, $y=1$. (Решение $x=0$, $y=4$ следует отклонить, потому что тогда не будет вагонов 15 тонн.)

Теперь легко написать ответ:

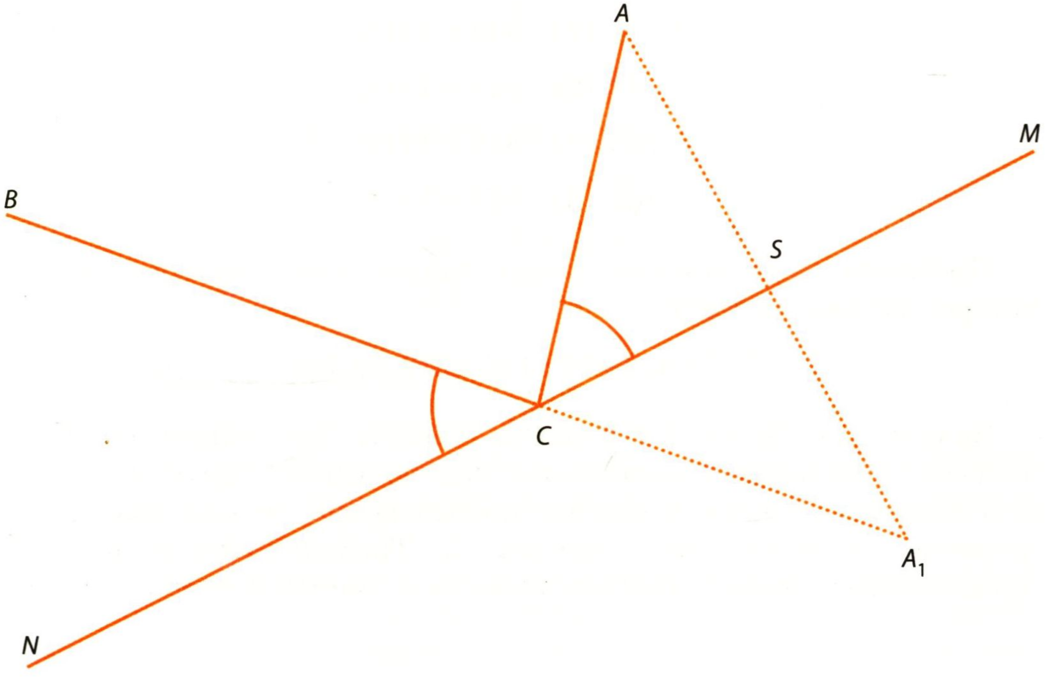
2 вагона по 15 тонн	30 тонн
1 вагон по 20 тонн	20 »

15 вагонов по 30 тонн	450	»
18 вагонов	500	»

40. Где следует ждать почту?

Если мы обозначим дорогу линией MN, а деревни — точками A и B, то для того, чтобы найти нужную точку на шоссе, нужно из точки A провести линию, перпендикулярную к MN, и от точки пересечения с MN (точка S) отложить отрезок $SA_1 = SA$, затем соединить прямой линией B с A_1. Тогда пересечение этой линии с шоссе даст искомую точку C.

Это можно наглядно представить таким образом: предположим, что вдоль дороги находится огромное зеркало, обращенное к деревням. Тогда почтальон, покидающий B, должен идти по прямой линии к отражению деревни A в зеркале — и наоборот: почтальон из A должен идти к деревне B, видимой в зеркале. В этом случае они оба достигают искомой точки C.



41. Неродившиеся наследники

Известный римский юрист Сальвиан Юлиан решил этот правовой вопрос так: наследство должно быть разделено на семь частей.

Из этого $\frac{4}{7}$ должен получить сын, $\frac{2}{7}$ — мать и $\frac{1}{7}$ — дочь. Римляне были слабыми математиками, но несравненными юристами.

42. Сколько стоят гвозди в подковах?

В каждой подкове шесть гвоздей, поэтому задача состоит в том, чтобы вычислить сумму геометрической прогрессии, состоящей из 24 членов ряда:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{23}.$$

Столько требуется заплатить полушек[1]. А это составляет «всего» 41 943 рубля и 3 копейки. При такой цене гвоздей можно добавить лошадь, а к ней и упряжь, бесплатно.

43. Выцветшие рукописи

Проблема четырех четверок имеет четыре возможных решения:

$$1\,337\,174 : 943 = 1418,$$

$$1\,343\,784 : 949 = 1416,$$

$$1\,200\,474 : 846 = 1419,$$

$$1\,202\,464 : 848 = 1418.$$

Проблема семи семерок имеет только одно решение, найти которое весьма непросто:

$$7\,375\,428\,413 : 125\,473 = 58\,781.$$

Задачу Дж. Деграции удалось решить вот каким образом: частное от деления записывается над делимым. Число 8 в частном дает двухзначное неполное произведение; отсюда вывод, что делитель не может быть больше 12. Трехзначному неполному произведению может соответствовать в частном только цифра

---

[1] Напомним читателю, что сумма такой числовой последовательности может быть посчитана по формуле 224 – 1. При этом мы получим только число полушек, а чтобы узнать сумму в копейках, нужно еще умножить полученное число на $\frac{1}{4}$. — *Примеч. ред.*

9, и в этом случае делитель не может быть меньше 12. Таким образом, делителем является число 12.

Теперь можем легко определить все цифры в записи деления, начиная с последнего неполного произведения и последней цифры частного:

```
1 0 9 1 8 8 9 7 0 8  12
1 0 8               |9 0 9 9 0 8 0 9
-----               |
    1 1 8           |
    1 0 8
    -----
      1 0 8
      1 0 8
      -----
            9 7
            9 6
            ---
              1 0 8
              1 0 8
              -----
```

44. Расшифровка

Вот ответы на три приведенных задания:

$$144 \times 12 = 1728$$

$$125 \times 25 = 3125$$

$$3125 : 25 = 125$$

45. Залитый чернилами счет

Задача может быть решена следующим образом.

Согласно полученным данным, общая сумма не превышает 10 000 злотых. Таким образом, количество проданных рулонов составляет не более 203.

Последняя цифра неизвестного количества рулонов должна быть такой, чтобы при умножении на 6 получилось произведение, в котором последняя цифра — 8; такое число может быть только 3 или 8.

Предположим, что последняя цифра неизвестного количества рулонов была 3. Стоимость трех рулонов составила бы 14 808 грошей. Вычитая это число из полученной суммы, указанной в записи, мы получим число, заканчивающееся на 920.

Вторая цифра, обозначающая десятки в количестве оставшихся рулонов, может быть либо 2, либо 7, потому что только эти цифры, умноженные на 6, дадут произведение, заканчивающееся на 2.

Давайте предположим, что неизвестное число проданных рулонов сукна заканчивается на 23. Вычитая стоимость 23 рулонов ткани из общей суммы, полученной от продажи, мы получаем число, заканчивающееся на 200. Третья цифра (сотни) в числе рулонов может быть либо 2, либо 7; но поскольку это число не должно превышать 203, наше предположение следует отклонить.

Если предположить, что неизвестное число заканчивается на 73, то третье число будет 4 или 9; это предположение также неверно.

Таким образом, 3 не может быть последней цифрой в количестве рулонов. Предположим тогда, что это 8. Рассуждения, аналогичные предыдущим, покажут нам, что вторая цифра может быть 4 или 9; из этих двух предположений приемлемо только второе.

Имеется единственно верное решение задачи: было продано 98 рулонов сукна, общая сумма — 4837 злотых 28 грошей.

Такой тип задач также может быть решен алгебраическим способом.

46. Ошибочное, но вместе с тем поучительное умножение и деление

Произведение, полученное при умножении 288 на некий множитель, на $1000 + 67 = 1067$ меньше точного результата умножения.

Другими словами, произведение множителя на 288, увеличенное на 1067, равно искомому произведению. Отсюда следует, что 1067 полностью делится на множитель. Этот множитель должен быть больше, чем остаток, полученный при проверочном делении, то есть больше 67. Раскладываем число 1067 на составляющие: $1067 = 11 \times 97$. Отсюда делаем вывод, что первый множитель должен быть равен 97. Тогда второй множитель будет равен $97 + 202 = 299$, точный результат умножения — 29 003, а неправильное произведение, полученное учеником, — 28 003.

47. Как разделить вино?

Решение этой задачи состоит в том, что из полного восьмилитрового бочонка следует отливать вино в пустые бутыли, а из них вновь выливать в бочонок, и так до получения нужного результата.

Задача имеет два решения; приводим их в двух таблицах, которые показывают, сколько вина останется в каждом сосуде после каждого разлива.

Решение I

	Бочонок 8 литров	Бутыль 5 литров	Бутыль 3 литра
Начальное состояние	8	0	0
После 1-го разлива	3	5	0
» 2-го »	3	2	3
» 3-го »	6	2	0
» 4-го »	6	0	2
» 5-го »	1	5	2
» 6-го »	1	4	3
» 7-го »	4	4	0

Решение II

	Бочонок 8 литров	Бутыль 5 литров	Бутыль 3 литра
Начальное состояние	8	0	0
После 1-го разлива	5	0	3
» 2-го »	5	3	0
» 3-го »	2	3	3
» 4-го »	2	5	1
» 5-го »	7	0	1
» 6-го »	7	1	0
» 7-го »	4	1	3
» 8-го »	4	4	0

Вот схема решения **задачи Роуза Болла**:

Сосуд	I	II	III	IV
Емкость	24	13	11	5
(1)	24	0	0	0
(2)	13	0	11	0

(3)	8	0	11	5
(4)	0	8	11	5
(5)	11	8	0	5
(6)	16	8	0	0
(7)	16	0	8	0
(8)	3	13	8	0
(9)	3	8	8	5
(10)	8	8	8	0

Задача о разделе бочонков. Есть семь полных и семь пустых бочонков. Если бы можно было перелить из полных бочонков половину вина в пустые, то мы бы получили 21 бочонок, наполненный наполовину вином, и на долю каждого приходилось бы по 7 заполненных до половины бочонков вина. Поняв это, мы можем легко разделить вино на равные части следующим образом.

	Полный бочонок	Полупустой бочонок	Пустой бочонок
Первый человек	2	3	2
Второй »	2	3	2
Третий »	3	1	3

Вот еще одно решение этой задачи.

	Полный бочонок	Полупустой бочонок	Пустой бочонок
Первый человек	3	1	3
Второй »	3	1	3
Третий »	1	5	1

48. Волк, коза и капуста

Конечно, следует начать с козы. Крестьянин перевозит козу, затем возвращается за волком, а переправив его на другой берег реки, он забирает козу обратно, оставляет ее на берегу, забирает капусту и, наконец, возвращается за козой. Таким образом переправа пройдет успешно.

49. Долгая переправа

Мальчики вдвоем переправляются на противоположный берег. Один остается там, другой в лодке возвращается к солдатам. Затем переправляется один солдат, и мальчик с противоположного берега доставляет лодку обратно, берет своего спутника, отвозит его на другой берег реки и снова возвращает лодку, теперь второй солдат переправляется через реку. Таким образом, за два рейса туда и обратно переправляется один солдат. Это повторяется до тех пор, пока все солдаты и офицеры не будут перевезены на другой берег реки, что хотя теоретически и возможно, на практике заняло бы достаточно много времени.

50. Ревнивые мужья

Пометим королей заглавными буквами A, B, C, а их жен — строчными буквами a, b, c.

Изначально все находятся на одном берегу реки:

$$Aa,\ Bb,\ Cc.$$

Но вот начинается переправа.

I. Первыми переправляются две дамы:

$$\begin{array}{ccc|ccc} A & B & C & - & - & - \\ a & - & - & - & b & c \end{array}$$

II. Одна дама возвращается и перевозит третью:

$$\begin{array}{ccc|ccc} A & B & C & - & - & - \\ - & - & - & a & b & c \end{array}$$

III. Одна из дам возвращается, остается с мужем, а двое других мужчин переправляются к своим женам

$$\begin{array}{ccc|ccc} A & - & - & - & B & C \\ a & - & - & - & b & c \end{array}$$

IV. Муж и жена возвращаются на первый берег. Муж оставляет там жену и берет с собой друга

$$\begin{array}{ccc|ccc} - & - & - & A & B & C \\ a & b & - & - & - & c \end{array}$$

V. С другого берега дама возвращается на первый и перевозит приятельницу на другой берег:

$$\begin{array}{ccc} - - - & \Bigg\} & A\ B\ C \\ a - - & & -\ b\ c \end{array}$$

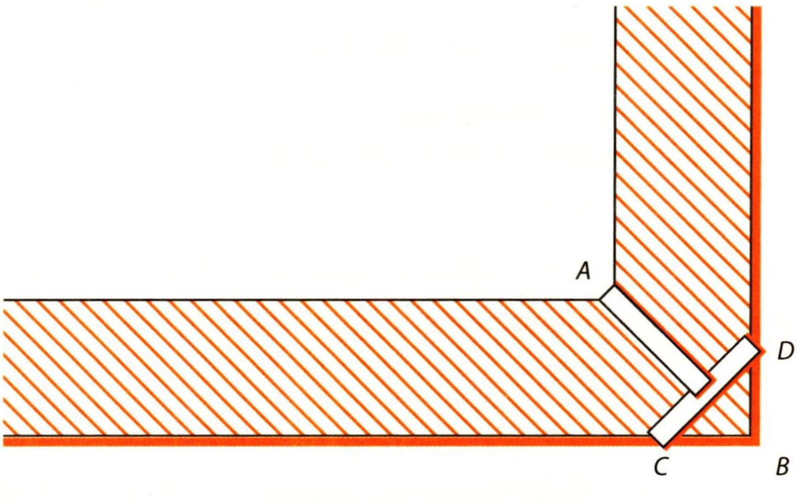
VI. Наконец, муж оставшейся леди возвращается на первый берег и перевозит ее через реку:

$$\begin{array}{ccc} - - - & \Bigg\} & A\ B\ C \\ - - - & & a\ b\ c \end{array}$$

Таким образом, переправа закончилась к общему удовольствию.

51. Переправа через ров

На рисунке наглядно показано решение задачи.



Математическое доказательство возможности создания такой переправы вытекает из неравенства

$$\sqrt{2} < 1\frac{1}{2}.$$

Если за единицу длины мы примем ширину рва, то расстояние AB будет выражаться числом $\sqrt{2}$, то есть около 1,414. Длина доски в точности равна ширине рва, поэтому она выражается числом 1. Если одну доску положить как гипотенузу угла B, то получится равнобедренный прямоугольный треугольник BCD

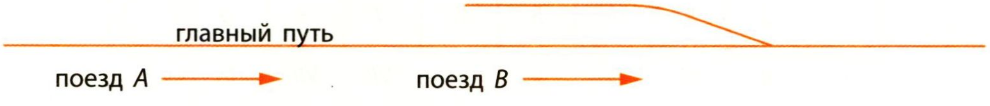
и край доски будет находиться от угла A на расстоянии $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$, то есть на расстоянии 0,914 длины. Отсюда делается вывод, что на эту доску можно положить вторую доску, достающую до угла A, и для опоры на обоих концах доски останется еще по 0,086 единицы длины (например, доски длиной 3 м будут иметь для опоры концы более 25 см).

52. Маневры поездов

Вот решение задачи: поезд B идет по главному пути, минуя боковую ветку. Затем он обратным ходом заводит на ветку и оставляет там столько вагонов, сколько позволит длина бокового пути; остаток поезда B вместе с локомотивом снова движется вперед по основному пути и удаляется на значительное расстояние от боковой ветки. Поезд A следует за ним; как только он проходит начало тупиковой ветки, вагоны поезда B, оставленные здесь, прикрепляются к последнему вагону поезда A, и поезд A выводит их из тупика, а затем задним ходом возвращается с ними к полустанку, чтобы дать доступ к боковому пути остальной части поезда B.

После того как главный путь перед поездом A будет освобожден, вагоны поезда B от него отцепляют, и поезд A с удвоенной скоростью движется к следующей станции. Поезд B с передними вагонами выходит из тупика на главный путь, возвращается к полустанку, к нему вновь цепляют оставленные вагоны, и он медленно движется за поездом A.

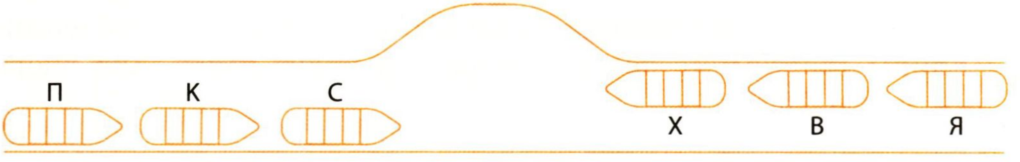
Попробуйте найти другое решение! Можно ли вместо поезда B разделить на две части поезд A?



53. Как развести суда

Корабли «Кашуб» и «Полония» отходят (на рисунке — влево), а «Силезия» заходит на стоянку. «Хробры», «Варшава» и «Ядвига» проходят вперед и минуют «Силезию». Затем «Силезия» покидает стоянку и идет в своем направлении (на рисунке — вправо). «Ядвига», «Варшава» и «Хробры» возвращаются на свои прежние места (справа), а «Кашуб» выполняет маневр «Силезии», затем таким же образом проходит «Полония».

Корабли теперь могут спокойно идти к месту назначения.

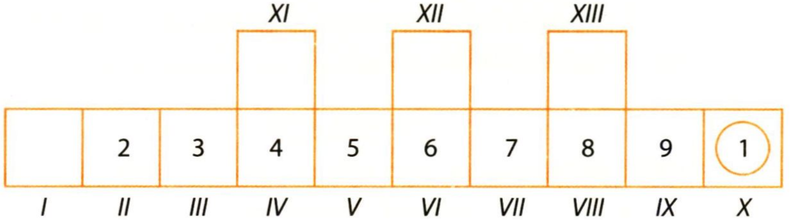


54. В окопах

Оказывается, солдатам и офицеру придется сделать не менее 28 перемещений. Вот их последовательность.

2 — I	9 — VII	5 — VII	3 — III
3 — II	1 — XIII	1 — XI	4 — IV
4 — III	9 — X	4 — XII	5 — V
5 — XI	8 — IX	3 — VI	6 — VI
6 — IV	1 — XII	2 — V	7 — VII
7 — V	7 — XIII	1 — I	8 — VIII
8 — VI	6 — VIII	2 — II	9 — IX

А может, можно найти более короткое решение? Попробуйте сделать это, нарисовав на листе бумаги соответствующие клеточки и расположив в них вырезанные кружочки.



55. Эпитафия Диофанта

До женитьбы Диофант прожил $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12}$ своей жизни, что составляет $\frac{33}{84}$. С сыном он прожил половину своей жизни, что есть $\frac{42}{84}$. Часть жизни, которая прошла от женитьбы до рождения сына и от смерти сына до смерти самого Диофанта, равна $\frac{9}{84}$ и составляет $5 + 4 = 9$ лет. Диофант прожил 84 года.

56. Кот и крыса

Обозначим как A и C точки, в которых первоначально находились кот и крыса; через AB обозначим вертикальную стенку; через BC — расстояние по горизонтали от крысы до стены; точка O — точка захвата. Мы также знаем, что $AO = OC$. Точка O, положение которой необходимо определить, является центром круга, проходящего через точки A и C.

Точку, в которой эта окружность пересекает линию BC, обозначим как D.

Треугольник CAD, вписанный в полукруг, является прямоугольным, а в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный на противоположную сторону, является средним геометрическим отрезком гипотенузы:

$$AB^2 = BD \times BC,$$

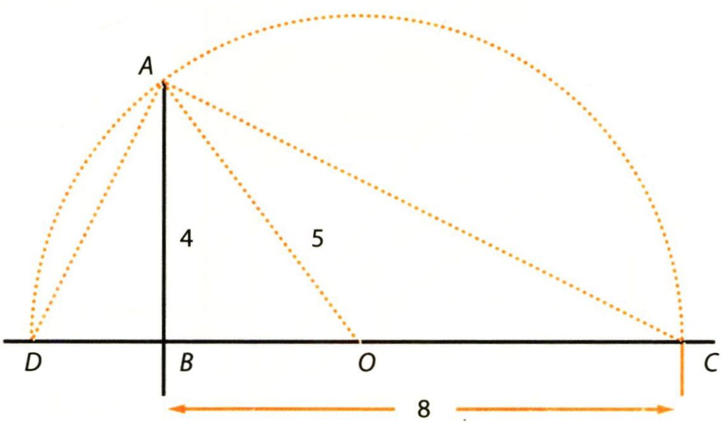
или

$$BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{4^2}{8} = 2.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$DC = 2 + 8 = 10,\ \ OC = 5\ \text{ и }\ OB = 3.$$

Таким образом, крыса пробежала 5 локтей перед роковой встречей.



57. Кот и мышь

Ответ: в течение 63 дней. Дерево тогда будет 68 локтей в высоту. (Остается только гадать, чем питались животные в течение девяти недель и не надоело ли им это занятие?)

58. Сломанный бамбук

Допустим, что ствол был сломан на высоте x локтей над землей. Для прямоугольного треугольника с катетами x и 16 и гипотенузой $32 - x$ можем составить уравнение:

$$(32 - x)^2 = x^2 + 16^2.$$

Это квадратное уравнение, но x можно вычислить, не прибегая к обычным приемам решения таких уравнений.

Запишем приведенное выше уравнение в виде:

$$(32 - x)^2 - x^2 = 16^2.$$

На рисунке III построим квадрат $MNOP$, сторона которого будет равна $32 - x$. Поместим в него квадрат $SNQR$ со стороной x, что можно сделать, потому что из рисунка I (условия задачи) следует, что x меньше $(32 - x)$. Согласно нашему уравнению незаштрихованная часть квадрата $MNOP$ на рисунке III составляет 16^2.

Рис. I

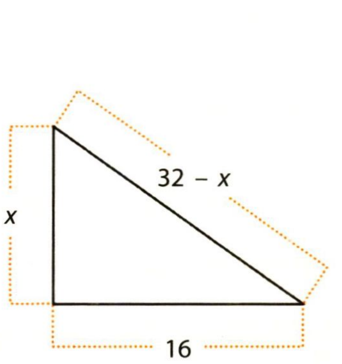


Рис. II

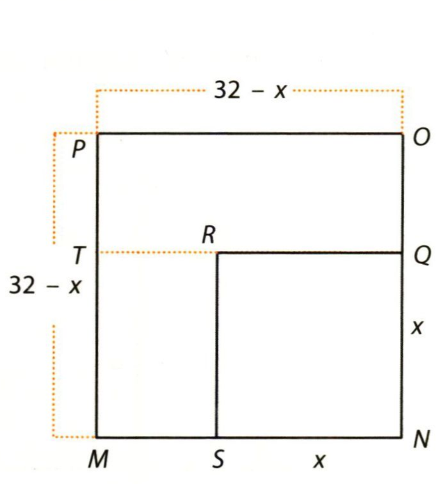


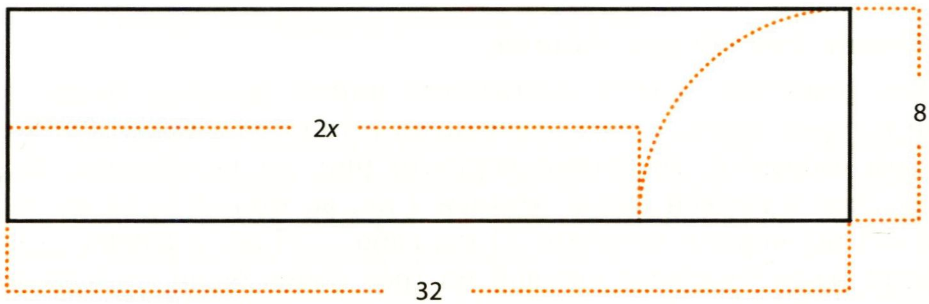
Рис. III

Эта поверхность состоит из двух прямоугольников: прямоугольника $MSRT$ со сторонами x и $(32-2x)$ и прямоугольника $TQOP$ со сторонами $(32-x)$ и $(32-2x)$. Эти два прямоугольника можно заменить на прямоугольник с высотой $(32-2x)$ и основанием $x+(32-x)$, то есть равным 32.

Этот прямоугольник эквивалентен квадрату 16×16 и, следовательно, эквивалентен прямоугольнику 32×8.

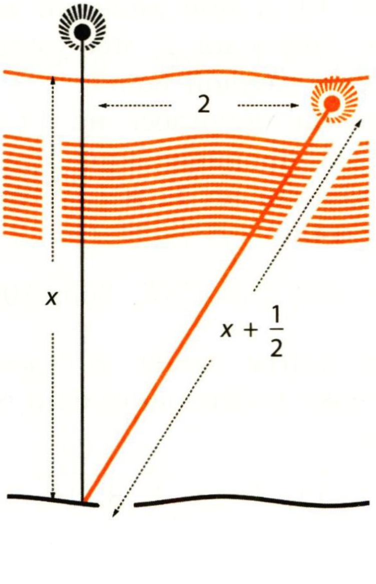
Из равенства прямоугольников с одинаковым основанием (равным 32) мы заключаем, что высоты $(32-2x)$ и 8 должны быть равны, а из рисунка IV видим, что $2x$ равно $32-8$, то есть равно 24, а следовательно, $x=12$.

Бамбук сломался на высоте 12 локтей над землей.



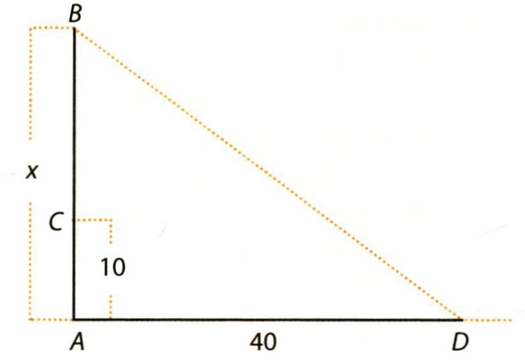
59. Стебель лотоса

Глубина воды в первом задании составляет 3 локтя, во втором — 12 футов.



60. Прыжок обезьяны

Обезьяна прыгнула с высоты 30 локтей.



61. Очень китайская задача

Для решения задачи достаточно найти, сколько было в каждой из трех бочек. Итак, пересчитав оставшееся количество риса и объем емкостей, которыми черпали рис, на количество цо, мы видим, что в первой бочке остался 1 цо, во второй — 11 цо, в третьей —1 цо; черпак вмещает 11 цо, сабо — 17 цо, а миска — 13 цо.

Если бы содержимое каждой из трех бочек было на 1 цо меньше, то первый вор с черпаком, вмещающим 11 цо, вычерпал бы первую бочку до дна, а третий вор своей миской емкостью 13 цо исчерпал бы до дна третью бочку. Второй вор, орудуя деревянным сабо, вмещающим 17 цо, оставил бы во второй бочке 10 цо риса. Таким образом, нам нужно найти число, которое делится полностью на 11 и на 13, а при делении на 17 дает остаток 10. Увеличив полученное число на 1, мы узнаем, сколько риса изначально содержалось в каждой бочке.

Чтобы число полностью делилось на 11 и на 13, оно должно делиться полностью на произведение 11×13, то есть на 143. Каждое кратное 143 делится на 11 и 13. Запишем последовательность чисел, кратных 143:

$$143,\ 286,\ 429,\ 572,\ 715,\ 858,\ 1001,\ 1144,$$

и в этом ряду нужно найти число, которое при делении на 17 дает остаток 10. Поделим последовательно числа нашего ряда на 17 и запишем остатки:

$$7,\ 14,\ 4,\ 11,\ 1,\ 8,\ 15,\ 5.$$

Этого достаточно. Число 1144 дает остаток 5, поэтому число $1144 + 1144 = 2288$ даст остаток $5 + 5 = 10$. Таким образом, мы нашли число, которое делится на 11 и на 13, а при делении на 17 дает остаток 10.

Каждая из трех бочек содержала $2288 + 1$, или 2289 цо риса.

Это первое из чисел, которые соответствуют условиям, указанным выше. Однако нам не нужно искать других, бóльших, поскольку мы знаем, что ни одна из бочек не может вместить более 3000 цо, или 3 шэн.

Каждая бочка содержала 2289 цо риса, и поэтому первый и третий воры украли $2289 - 1 = 2288$ цо, или 2 шэн 2 гэ 8 шао и 8 цо. Второй вор украл 2278 цо, или 2 шэн 2 гэ 7 шао и 8 цо.

Первый зачерпнул совком 208 раз, второй — деревянным сабо 134 раза, третий зачерпнул миской 176 раз.

62. Грации и музы

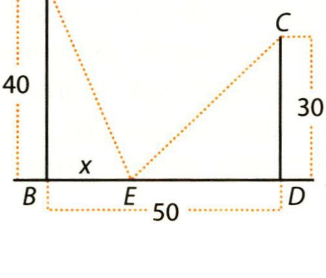
Все богини, а их было 12, имели в итоге одинаковое количество яблок, поэтому общее количество яблок должно быть кратным 12, что означает, что каждая из трех граций имела до встречи с музами количество яблок, делимое на 4.

Мы также знаем, что каждая грация дала девяти музам одинаковое количество яблок, то есть общее количество до этого должно быть не менее 9. Первое кратное числа 4, большее 9, равно 12. Это и будет искомое число, потому что если каждая грация даст одно яблоко каждой музе, то у каждой грации останется три яблока и каждая из муз получит три яблока — по одному от каждой грации.

Условиям задачи соответствуют все числа, кратные 12, то есть 24, 36 и т. д.

63. Проблема Леонардо из Пизы

$BE = 18$, $ED = 32$.



64. Ньютоновы волы

В своей работе *Arithmetica universalis* («Всеобщая арифметика», 1707) Ньютон приводит эту оригинальную задачу, а затем ее решение. Однако мы не приводим здесь решение известного математика, потому что оно слишком сложное. Мы даже, придерживаясь основного принципа, немного изменили условие задачи, чтобы облегчить ее решение.

Возьмем для простоты за «единицу прироста» количество травы, которое вырастает на одном морге в течение одной недели. Тогда задачу можно будет представить следующим образом:

(1) 3 вола за 2 недели съедают траву
с 2 моргов и 4 единицы прироста,

(2) 2 вола съедают за 4 недели траву
с 2 моргов и 8 единиц прироста.

Сколько волов за 6 недель съедят траву

с 6 моргов и 36 единиц прироста?

Из условия (2) можно сделать вывод, что

1 вол съест за 4 недели траву
с 1 морга и 4 единицы прироста,

и далее:

3 вола съедят за 4 недели траву
с 3 моргов и 12 единиц прироста.

Удваивая период времени в условии (1), мы получаем, что

3 вола съедят за 4 недели траву
с 4 моргов и 8 единиц прироста.

Следует отметить, что в этом случае волы не съедят всего прироста травы на четырех моргах.

Сопоставление условий (3) и (4) показывает, что трава 1 морга эквивалентна 4 единицам прироста. Используя это преобразование, мы можем условие (1) представить в виде:

3 вола в течение 2 недель съедят $2 \times 4 + 4$, или 12 единиц прироста, отсюда следует: для одного вола необходимы 2 единицы прироста в неделю.

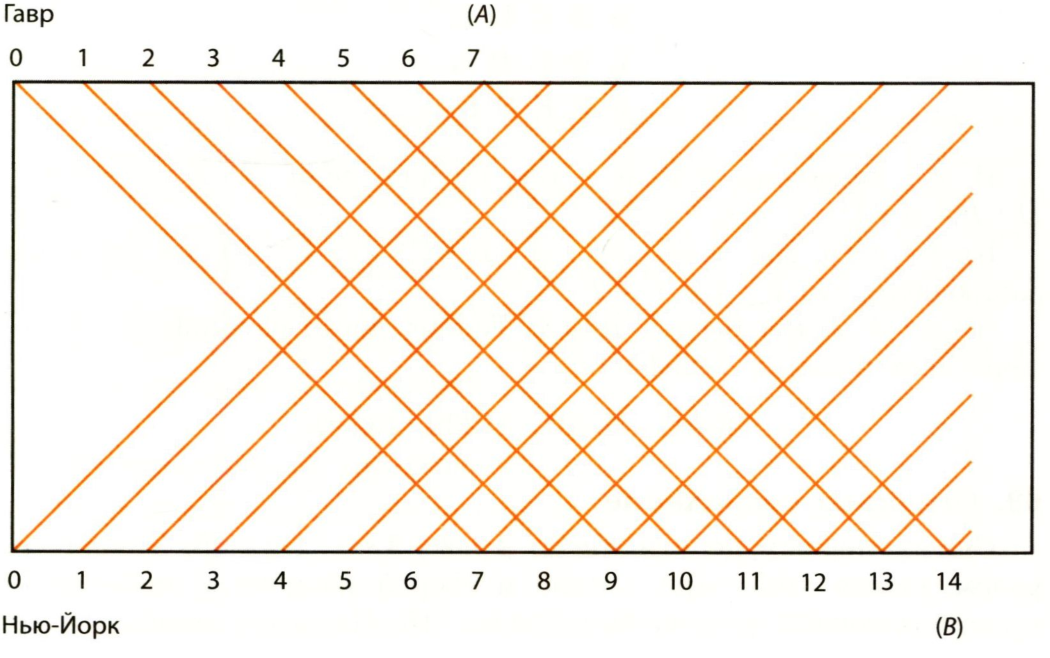
Тот же самый результат можем получить из условия (2). Задача состоит в том, чтобы подсчитать, сколько волов в течение 6 недель съедят траву на 6 моргах и 36 единиц прироста. Пересчитав всю траву в единицах прироста, мы получаем $6 \times 4 + 36 = 60$ единиц прироста. Это 10 единиц в неделю, а с этим объемом травы справятся 5 волов.

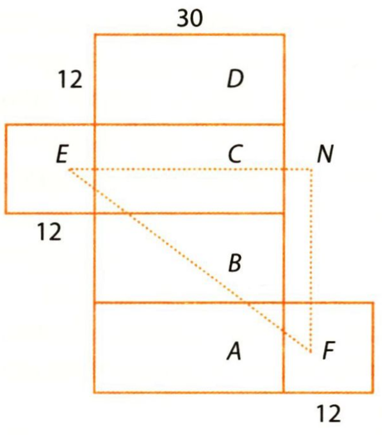
65. Каверзная задача Люка

Собравшиеся за столом математики, отвечая на вопрос Люка, брали в расчет только суда, которые собирались отправиться в путь, забыв о тех, что уже были в пути.

Схема наглядно показывает, что судно, путь которого обозначен линией AB, встретит в море 13 судов и еще одно, которое входило в порт Гавр во время его отплытия, и еще то, которое покидает Нью-Йорк во время его прибытия, то есть всего 15 судов. Диаграмма также показывает, что данное судно встречает судно своей компании каждый день в полдень и полночь.

Если кто-то сомневается в огромных преимуществах графиков, приведенное выше решение задачи должно показать их широкие возможности. При графическом представлении сложная проблема становится простой, можно сказать очевидной.





66. Паук и муха

Наиболее быстро эта задача решается графическим методом. Вот схема, отражающая ее решение.

Прямоугольник A обозначает пол, B и D — более длинные боковые стены, C — потолок, E и F — точки, где первоначально находились паук и муха на двух более коротких стенах.

Линия EF, по которой движется паук, является гипотенузой в прямоугольном треугольнике EFN, отсюда: $EF^2 = NF^2 + NE^2$.

Расстояния NF и NE легко вычислить; они равны 24 и 32 футам. Следовательно, $EF = 40$ футов.

68. Таинственные номера телефонов

Предположим, что один из телефонов бюро имеет номер $ABCDE$, где буквами обозначены последовательные цифры. В соответствии с условием задачи сумма данного числа и числа с обратным порядком цифр должна быть числом с одинаковыми цифрами:

$$\begin{array}{r} \mathrm{A\ B\ C\ D\ E} \\ +\ \underline{\mathrm{E\ D\ C\ B\ A}} \\ \mathrm{F\ F\ F\ F\ F} \end{array}$$

И это возможно только в том случае, если $E + A = A + E = F$, $D + B = B + D = F$ и $C + C = F$.

Кроме того, мы знаем, что $A + B + C + D + E = 10$, из этого мы заключаем, что $F = 4$ и $C = 2$.

Число A может быть 3 или 4. Теперь легко расшифровать номера всех четырех телефонов:

30241, 34201, 41230, 43210.

69. Странное совпадение

Сумма первых девяти чисел $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$. Таким образом, сумма цифр при первой и второй раздаче у каждого из присутствующих должна быть равна 15. На месте единиц в искомых числах не могут стоять цифры 1, 2, 3, 4 или 5, потому что тогда даже самое большое трехзначное число, которое может быть составлено в соответствии с данными правилами (345), дает сумму цифр 12.

Сумма двух составленных игроками чисел (516) заканчивается на 6, поэтому единицы в суммируемых числах должны были быть представлены цифрами 7 и 9 или 8 и 8. Для десятков и сотен остаются числа от 1 до 6.

Учтем, что $7 + 9 = 8 + 8 = 16$; $516 - 16 = 500$. Таким образом, сумма десятков, которую мы ищем, дает 0, то есть место десятков должны занимать 4 и 6 или 5 и 5. Следовательно, сумма сотен равна 4, поэтому на месте сотен могут быть 1 и 3 или 2 и 2.

Для каждого участника одна цифра повторяется в обоих числах: если повторяется 8, то десятками могут быть только 4 и 6, а сотнями 3 и 1; отсюда возможные числа: 348 и 168. Если у второго человека повторилась 5, то только 7 и 9 могут быть единицами, а 1 и 3 — сотнями; отсюда числа 159 и 357. У третьего участника повторилась 2, поэтому десятками были 4 и 6, единицами — 9 и 7; его числа соответственно: 267 и 249.

Давайте составим список чисел:

в первый раз	348	159	267
во второй раз	168	357	249
всего	516	516	516

70. Ежи и черепахи

Первая черепаха, конечно, задержала бег ежа, потому что, пока он пробегал по ее спине, что длилось t секунд, черепаха продвинулась в обратном направлении на $6t$ сантиметров. По второй черепахе еж пробежал за t секунд и выиграл некоторое расстояние, так как черепаха продвинула его вперед: он выиграл $18 \times t = 9t$ см. В целом второй ежик выиграл на обеих черепахах $3t$ сантиметра. Следовательно, лучшим бегуном был еж, у которого по пути не было препятствий.

71. Нетерпеливый прохожий

Если обозначить длину ствола через x, а путь, который проходит воз за время каждого шага путника, через y, то расстояние, которое он должен был пройти, минуя всю длину движущегося вперед ствола, будет равно $x + 112y$, что равно 112 его шагам.

Когда путник двигался в обратном направлении, за время каждого его шага воз продвигался вперед на такое же расстояние y. Значит, длина ствола x будет равна 16 шагам + 16 y. Из двух уравнений

$$\begin{cases} x + 112y = 112 \\ x = 16 + 16y \end{cases}$$

можно вычислить, что искомая длина ствола составляет 28 шагов.

73. Продажа старых деревьев

Умный покупатель вырубил 39 деревьев, как показано на рисунке. Хозяин заметил это слишком поздно, и спорить было бесполезно: покупатель выполнил условия договора, только интерпретировал их по-своему...

74. Деревья в парках

См. рисунок.

76. Математические супруги

Старичок обозначил количество предметов, приобретенных одним из молодых людей, буквой x; значит, тот потратил x^2 злотых.

Если его жена купила y вещей, то она заплатила за них y^2 злотых. Разница $x^2 - y^2 = 63$ может быть представлена в следующем виде:

$$63 = (x + y) \times (x - y).$$

Чтобы найти $(x + y)$ и $(x - y)$, нужно разложить 63 на два множителя. Это можно сделать тремя способами:

$$63 = 63 \times 1 = 21 \times 3 = 7 \times 9.$$

Это дает следующие варианты:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 63 \\ x_1 - y_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 + y_2 = 21 \\ x_2 - y_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 + y_3 = 9 \\ x_3 - y_3 = 7 \end{cases}$$

Решая эти уравнения, математик получил все возможные значения для x и y, а именно $x_1 = 32$, $y_1 = 31$; $x_2 = 12$, $y_2 = 9$; $x_3 = 8$, $y_3 = 1$.

Осталось теперь найти такие пары значений, при которых $x - y = 23$ и $x - y = 11$. Тогда из разности $x_1 - y_2 = 23$ следует, что x_1 — это количество товара, купленного Антоном, y_2 — количество товаров, купленных Яниной, а из разности $x_2 - y_3 = 11$ получается, что x_2 — товар, купленный Яном, а y_3 — купленный Анной.

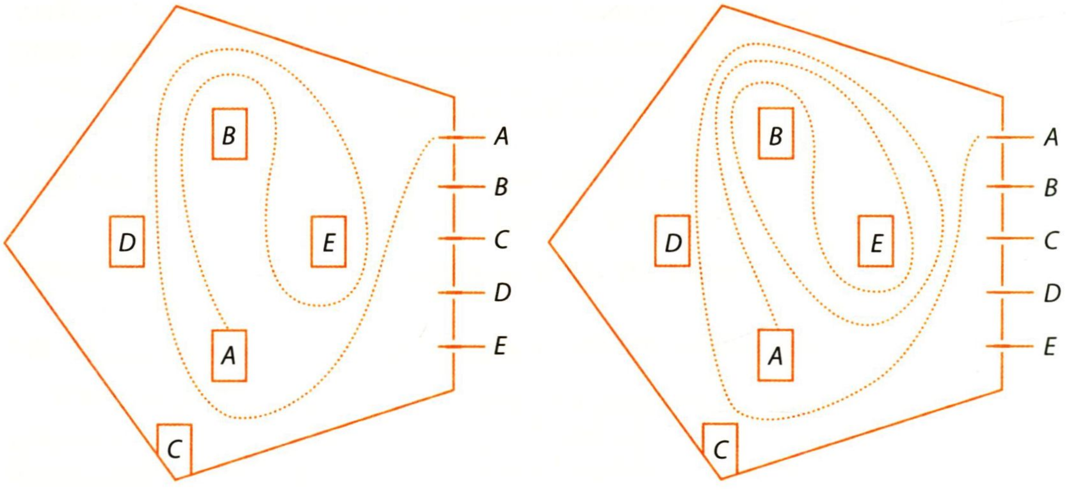
С понятным триумфом старичок записал окончательный результат своих расчетов:

Антон	Ян	Карл
Наталья	Янина	Анна

и дописал: «Математические супруги».

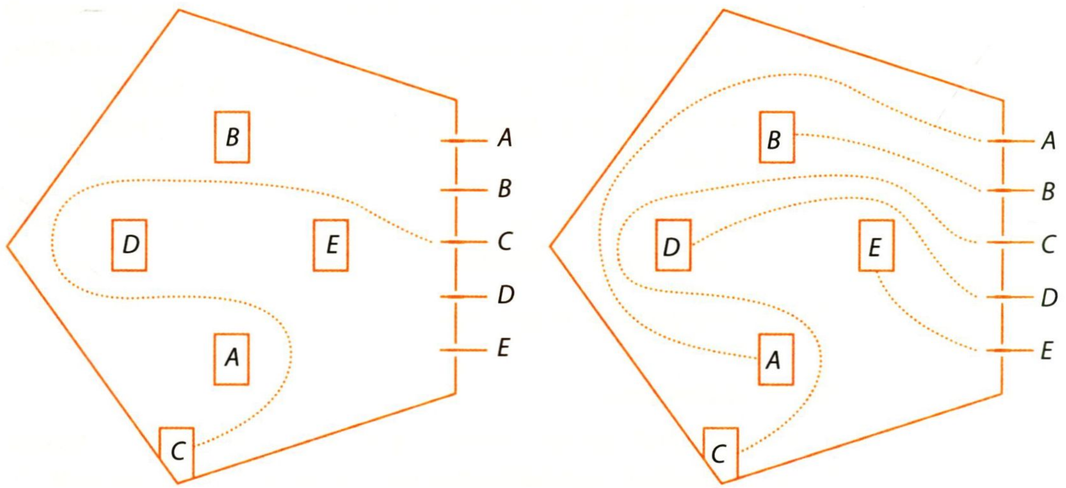
78. Китайские концессии

Любой, кто попробует разрешить проблему, начнет, скорее всего, рисовать различные замысловатые варианты от линии A, как, например, на рисунках I a и b. Между тем, чтобы достичь относительно простого результата, нужно начинать от линии C и привести ее к вокзалу C так, чтобы вокзалы B и A оставались справа от этой линии, а вокзалы D и E слева — как на рисунках II a и b.



a *b*

Рис. I



a *b*

Рис. II

79. Удивительный ствол дерева

Виновата формула, используемая для расчета объема ствола дерева. Она недостаточно точная. Для более точного расчета объема ствола следует использовать формулу

$$V = \frac{\pi}{4} \times \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{3} \times h,$$

где d_1 и d_2 — диаметры ствола на обоих его концах, а h — длина ствола. Согласно этой формуле весь ствол стоил 263,76 рубля, укороченный ствол — 253,82 рубля, а отрезок ствола — 9,94 рубля.

80. Сообразительная сорока

Нарисуем схему лейки.

Отложим отрезок FD, равный отрезку AB; тогда прямая AF будет параллельна прямой BD. Вода была на уровне KM, и сорока хотела поднять ее до уровня NQ.

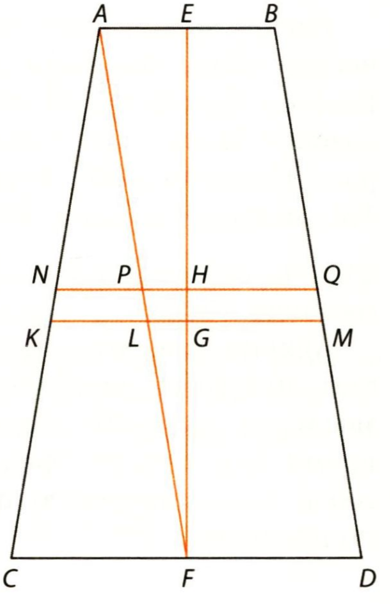
Рассчитаем отрезки в линиях:

$$CF = 18,\ EF = 54,\ EG = 30,\ EH = 27.$$

У нас есть пропорции:

$$\frac{KL}{CF} = \frac{EG}{EF},\ \text{где}\ KL = 10,$$

$$\frac{NP}{CF} = \frac{EH}{EF},\ \text{где}\ NP = 9.$$



Данные, необходимые нам для расчета объема воды между уровнем KM и уровнем NQ:

$$d_1 = KM = 28,\ d_2 = NQ = 27,\ h = GH = 3.$$

Вычисляем объем по следующей формуле:

$$V = \frac{\pi}{4} \times \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{3} \times h.$$

Объем слоя воды $KNQM$ составляет около 1781 кубической линии, а одна монета имеет объем около 201 кубической линии; из этого следует, что только девятая монета позволит сороке достать клювом уровня воды, но для утоления жажды сороке придется утопить еще одну, десятую, монету.

81. Нумерация страниц

Для написания первых 999 целых чисел необходимо $9 \times 321 = 2889$ цифр. После 999-й страницы начнется нумерация четырехзначными цифрами. Из всех 4989 цифр на эти страницы придется $4989 - 2889 = 2100$ цифр. Достаточно просто разделить 2100 на 4, чтобы узнать, что помимо 999 страниц рукопись имела еще $2100 : 4 = 525$ страниц. Таким образом, в общей сложности рукопись содержала 1524 страницы.

Это была солидная рукопись!

82. Вес вагона

Оказывается, вагон, наполненный таким «грузом», будет весить меньше, чем пустой вагон!

Для того, чтобы наполнить цистерну водородом, необходимо сначала удалить из нее воздух, 50 кубических метров которого весят около 65 кг, а 50 м^3 водорода — всего 4,5 кг. Вагон с «грузом» станет легче на $65 - 4{,}5 = 60{,}5$ кг.

85. Кому сколько лет?

Расчет может быть легко выполнен, если мы используем в качестве меры возраста возраст Терезы, обозначим его буквой t. Возраст Яна будет $2t$. Возраст Нели и Терезы вместе — 4t, значит возраст Нели — $3t$. Славику и Яну вместе будет $8t$, отсюда возраст Славика — $6t$. Валя, Неля и Тереза вместе имеют возраст $16t$, поэтому возраст Вали составляет $12t$. Мы знаем, что Вале 21 год, поэтому $12t = 21$, а $t = \frac{3}{4}$. Дальнейшие расчеты уже не составят труда.

Можно отметить, что возраст трех самых младших детей представляет собой арифметический ряд (с разницей в год и девять месяцев), который сохранится по мере взросления детей, в то время как возраст трех старших, начиная с Нели, представляет собой геометрическую прогрессию, которая быстро станет недействительной.

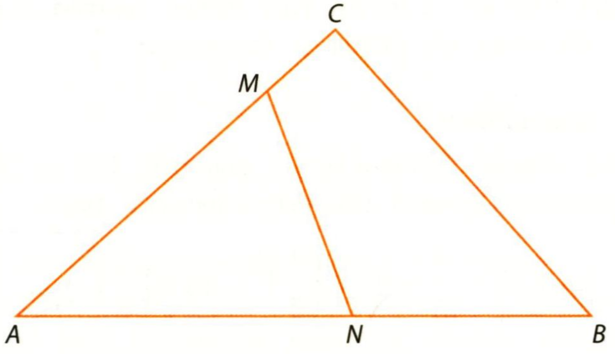
Возраст Терезы $1\frac{3}{4}$ года, Яна — $3\frac{1}{2}$ года, Нели — $5\frac{1}{4}$, Славика — $10\frac{1}{2}$ и Вали — 21 год.

86. Грамотный раздел участка

Вот ход рассуждений землемера.

Из всех треугольников с заданным основанием и заданным углом вершины треугольника наибольшую площадь будет иметь равнобедренный треугольник, поскольку геометрическим местом вершин таких треугольников будет дуга, замыкающая данный угол, а наивысшая точка дуги лежит в ее центре. Наоборот, можно сказать, что из всех треугольников, имеющих данную площадь и заданный угол вершины, равнобедренный треугольник имеет наименьшее основание. А из всех равнобедренных треугольников, имеющих данную площадь, тот будет иметь наименьшее основание, у которого угол вершины будет наименьшим.

Из элементарной геометрии также известно, что площади двух треугольников, имеющих один общий угол, так относятся друг к другом, как относятся друг к другу произведения сторон, образующих этот общий угол.



Исходя из вышеизложенного, на треугольном участке ABC (см. рисунок) необходимо было из вершины наименьшего угла A отложить вдоль прилежащих сторон отрезки $AM = AN$, равные среднему пропорциональному между одной из сторон AB или AC и половиной другой стороны. Линия MN будет линией границы, которую следовало определить, потому что

$$\triangle AMN : \triangle ABC = (AM \times AN) : (AC \times AB),$$

это значит

$$\triangle AMN : \triangle ABC = \frac{1}{2},$$

поэтому треугольник AMN — это половина треугольника ABC.

88. Находчивый фермер

Прежде всего, необходимо сложить вес всех пар: он составит 1156 кг. В этом весе каждый мешок был взят четыре раза; таким образом, общий вес всех пяти мешков был $1156 : 4 = 289$ кг.

Обозначим буквой A самый легкий мешок, более тяжелый — буквой B, а буквами C, D и E — мешки по мере увеличения веса.

Самый малый вес, 110 кг, мог соответствовать только самым легким мешкам $(A + B)$, следующий вес 112 кг соответствовал мешкам $(A + C)$. Самый большой вес в 121 кг должен был соответствовать самым тяжелым мешкам, то есть $(D + E)$, в то время как второй с конца вес 120 кг был получен при взвешивании мешков $(C + E)$.

Просуммировав самый маленький и самый большой вес: $(A + B) + (D + E)$, мы получим $110 + 121 = 231$ кг. Если мы вычтем это число из общего веса всех пяти мешков (289 кг), то получим вес мешка $C = 289 - 231 = 58$ кг. Теперь так легко найти вес всех других мешков, что... об этом не стоит и говорить.

89. Эмблема выставки

Оказывается, первая башня будет высотой 125 м. Действительно, ее высоту определит сумма геометрического ряда

$$25 + 25 \times \frac{4}{5} + 25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \ldots$$

Как известно, эта сумма выражается формулой

$$\mathrm{S} = \frac{a}{1 - q},$$

где a обозначает первый член ряда, q — его частное. В данном случае мы имеем $a = 25$, $q = \frac{4}{5}$, отсюда $S = 125$.

Для расчета высоты второй башни необходимо найти сумму следующего ряда:

$$a+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{4}+\frac{a}{5}\ldots$$

Такой ряд называется *гармоническим*. Это расходящийся ряд, так как сумма его членов, взятых в достаточном количестве, может превышать любое большое заранее заданное число.

В этом можно убедиться на основании своеобразного рассуждения. Члены этого ряда можно объединить в такие группы:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots.$$

Если мы знаменатели всех дробей, содержащихся в скобках, заменим знаменателем, наибольшим в данной скобке, то получим ряд

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots,$$

который можно записать в виде

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Сравнивая ряды:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots,$$

мы находим, что каждое выражение в скобках в первом ряду больше, чем соответствующее выражение в скобках во втором ряду. Но второй ряд является расходящимся, значит, и первый ряд является расходящимся.

Итак, мы видим, что башню в соответствии с этим действительно впечатляющим проектом нужно было бы тянуть ввысь бесконечно, но при этом есть риск достичь высоты, на которой центробежная сила вращения Земли превысит силу притяжения…

90. Год рождения сына и год рождения отца

Вот решение.

Обозначим числом n год, в котором впервые произошло такое совпадение, когда возраст сына был равен сумме цифр числа n. Если из числа n вычесть возраст сына, мы получим год его рождения. Но разница между любым числом и суммой его цифр всегда делится на 9. Отсюда делается вывод, что год рождения сына делится на 9. Это был не 1935 или 1926 год, потому что для этих лет совпадения произошли только в 1950 и 1940 году соответственно. Так что это был 1917 год, и совпадение произошло в 1930 году. Это совпадение повторялось в течение десятилетия вплоть до 1939 года.

Не каждый год рождения, делимый на 9, обуславливает совпадение возраста с суммой цифр календарного года. Хотя его отец родился в год, делимый на 9, у него не было такого совпадения. В XIX веке был только один такой год, а именно 1881. Если человек родился в 1881 году, то до 1899 года его возраст был все время меньше суммы цифр календарного года, а с 1900 года — все время больше.

Итак, отец родился в 1881 году, сын родился в 1917 году. Разговор состоялся 1 января 1930 года.

91. Логическая головоломка

Если бы прохожий был фитумиту, он ответил бы на вопрос иностранца: фитумиту. Если бы он принадлежал к байтата, он на вопрос иностранца не признался бы, что он байтата. Никто из жителей острова не мог сказать о себе: байтата. Отсюда вывод: абориген A солгал и, следовательно, принадлежит к байтата, а абориген B сказал правду и поэтому принадлежит к фитумиту.

На второй вопрос иностранца правдивый абориген заверил, что прохожий не солгал; поэтому мы должны предположить, что случайный прохожий P принадлежал к фитумиту.

Как мы можем объяснить, что на второй вопрос иностранца абориген A (байтата) дал тот же ответ, что и B (фитумиту)?

Если бы A заявил, что прохожий солгал, то он бы опроверг *ложную* информацию, которую дал ранее, о том, что прохожий P принадлежит к байтата, и, таким образом, невольно дал бы правдивое свидетельство. Байтата A запутался в своей собственной лжи, и, желая продолжать лгать «последовательно», он должен был, как и фитумиту B, подтвердить, что прохожий сказал о себе правду, только это подтверждение относилось к лживо переданному ответу прохожего.

Если бы иностранец сначала спросил аборигенов, сказал ли прохожий о себе правду, а затем признался, что не расслышал ответа прохожего, и попросил повторить его, то ответ правдивого фитумиту B никак не изменился бы. В то время как байтата A в ответ на первый вопрос уверил бы, что прохожий солгал, а на второй вопрос — узнав, что иностранец не расслышал ответа прохожего, и желая лгать «последовательно», чтобы ввести иностранца в заблуждение — должен был дать тот же ответ, что и фитумиту B, а именно что прохожий называл себя фитумиту.

В этом случае ложь байтата A была бы успешной: ни иностранец, ни читатель журнала *Parametr* (из которого мы взяли эту задачу, подписанную буквами М. Х.) не могли бы решить загадку. На этом примере мы видим, что для разоблачения лжеца бывает важен порядок задаваемых вопросов.

93. Разное

12 кроликов и 23 курицы.

94.

После 75 прыжков.

95.

30 слив.

96.

94 яйца.

97.

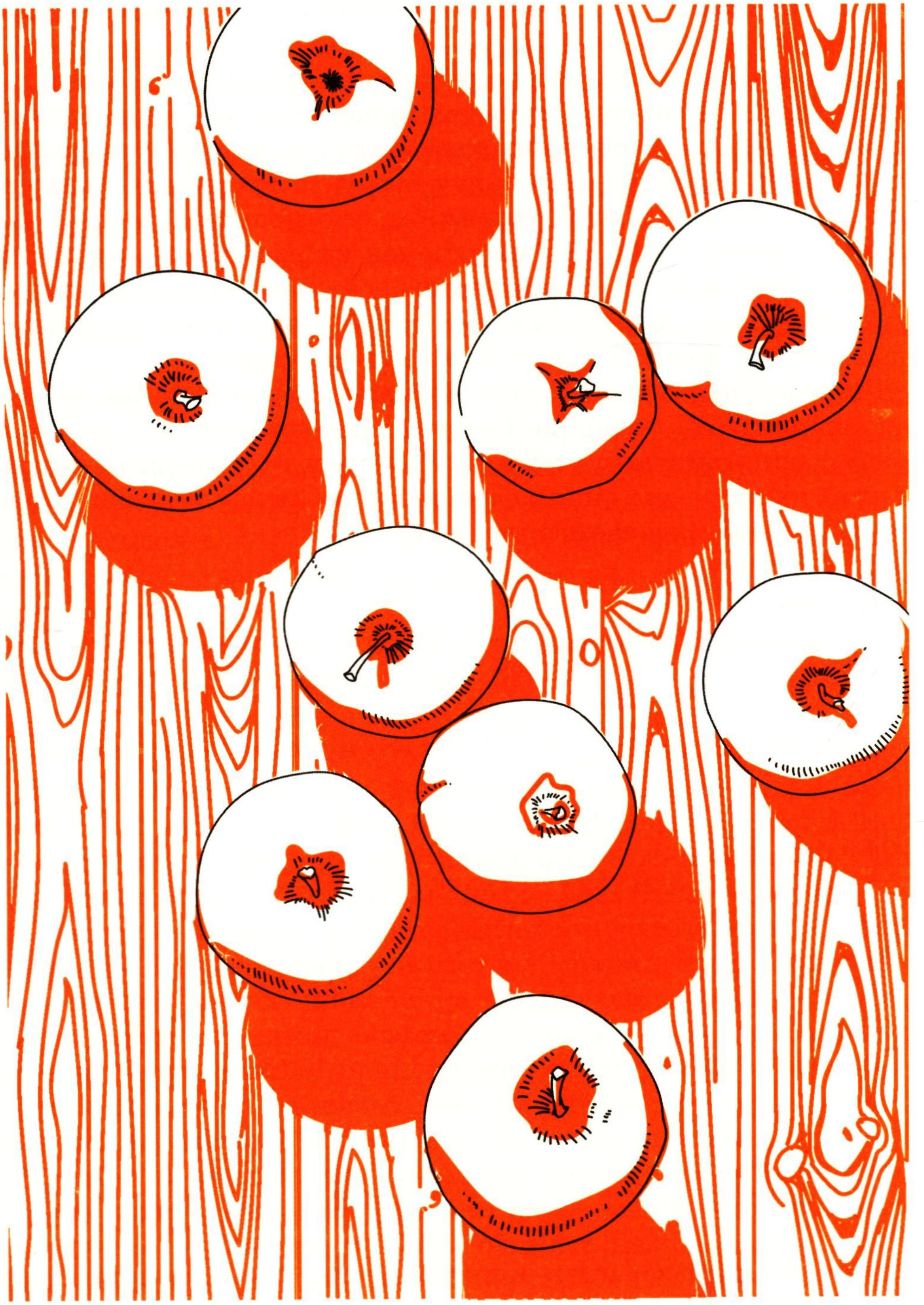
По девять яблок.

99.

12 лошадей.

100.

Через 60 дней зарастет четверть пруда, через 62 дня — половина, а через 64 дня — весь пруд.



ОГЛАВЛЕНИЕ

Математические анекдоты и анекдотические задачи 2

1. Наследство араба 3
2. Найденный кошелек 4
3. Как гусь и аист решали математическую задачу 6
4. Вычисление точного времени 8
5. Как разделить циферблат 10
6. Новый вариант старого парадокса Зенона 10
7. Еще несколько задач с часами 10
8. Как определить стороны света с помощью карманных часов 11
9. Как продать целые яйца, продавая по половинке яйца 13
10. Загадочный поезд 14
11. Яблочная задачка 14
12. Сколько воды в бочке 15
13. Ящики с шарами 15
14. Горькое лекарство 16
15. Как расставить охрану 16
16. Ключи от чемоданов 16
17. Как бросать мячик в кругу из 12 человек 17
18. Автомобили и самолет 19
19. Завещание махараджи 19
20. Хождение по лестнице 19
21. Шелковая нить 20
22. Потерянные деньги 20
23. Туристы и вареники 21
24. Формирование составов 21
25. Три бочонка с водой 21
26. Сбор грибов 22
27. Обмен зайцев на кур 23
28. Первые проблески гениальности 23
29. Справедливая оплата 24
30. Пароход и плоты 25

31. Регламентированное вождение ... 25
32. Осел и мул ... 26
33. Хитроумные туристы ... 26
34. Неосторожное гостеприимство ... 27
35. Путь до школы ... 27
36. Это невозможно! ... 29
37. Изобретательные торговцы ... 29
38. Затруднение продавца ... 30
39. Транспорт с углем ... 30
40. Где следует ждать почту? ... 30
41. Нeродившиеся наследники ... 31
42. Сколько стоят гвозди в подковах? ... 32
43. Выцветшие рукописи ... 33
44. Расшифровка ... 35
45. Залитый чернилами счет ... 35
46. Ошибочное, но вместе с тем поучительное умножение и деление ... 36
47. Как разделить вино? ... 36
48. Волк, коза и капуста ... 38
49. Долгая переправа ... 38
50. Ревнивые мужья ... 38
51. Переправа через ров ... 39
52. Маневры поездов ... 40
53. Как развести суда ... 42
54. В окопах ... 43
55. Эпитафия Диофанта ... 43
56. Кот и крыса ... 44
57. Кот и мышь ... 45
58. Сломанный бамбук ... 45
59. Стебель лотоса ... 46
60. Прыжок обезьяны ... 46
61. Очень китайская задача ... 47
62. Грации и музы ... 47
63. Проблема Леонардо из Пизы ... 48
64. Ньютоновы волы ... 49
65. Каверзная задача Люка ... 49
66. Паук и муха ... 50
67. Феноменальные мнемонисты ... 50
68. Таинственные номера телефонов ... 52
69. Странное совпадение... ... 53

70. Ежи и черепахи 53
71. Нетерпеливый прохожий 54
72. О наиболее выгодном способе посадки картофеля 54
73. Продажа старых деревьев 55
74. Деревья в парках 56
75. Форма зрительного зала 56
76. Математические супруги 57
77. Мельничные розыгрыши 57
78. Китайские концессии 58
79. Удивительный ствол дерева 59
80. Сообразительная сорока 60
81. Нумерация страниц 61
82. Вес вагона 61
83. Самая дешевая бричка 62
84. Попасть в точку 63
85. Кому сколько лет? 64
86. Грамотный раздел участка 64
87. Феноменальный шевалье 65
88. Находчивый фермер 66
89. Эмблема выставки 67
90. Год рождения сына и год рождения отца 67
91. Логическая головоломка 68
92. Еще одна логическая задача 68
93. Кролики и куры 69
94. Борзая и заяц 69
95. Задача чешской принцессы 69
96. Последний десяток 69
97. Дети и яблоки 70
98. Когда родился? 70
99. Король и почтмейстер 70
100. Пруд с ряской 70

Ответы 71

УДК 087.5
ББК 22.1
Е50

Научно-популярное издание для детей среднего школьного возраста

Серия «В кубе»

Щепан Еленьский

ПО СЛЕДАМ ПИФАГОРА
СТО ИСТОРИЧЕСКИХ ГОЛОВОЛОМОК

Перевод с польского Веры Виногоровой

Художник София Берлина

Генеральный директор *Мария Смирнова*
Руководитель проекта *Наталия Смирнова*
Ведущий редактор *Мария Прилуцкая*
Художественный редактор *Татьяна Гамзина-Бахтий*

Подписано в печать 17.03.2022. Формат 70×100 1/16. Объем 8 печ. л. Печать офсетная. Тираж 5000 экз. Заказ № 2202520.
Дата изготовления тиража 28.04.2022

ООО «Издательство Качели»
Телефон редакции: (812) 401-62-67
Адрес для писем: 197022, СПб., а/я 6;
e-mail: info@kachellybook.ru

Заказ книг в интернет-магазине: www.labirint.ru
По вопросам, связанным с приобретением книг издательства, обращаться в компанию «Лабиринт»:
тел. +7(495)780-00-98
www.labirint.org

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в ООО «Ярославский полиграфический комбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, д. 97.

ISBN 978-5-907544-08-6

Произведено в Российской Федерации

Срок годности не ограничен

ЗНАК ИНФОРМАЦИОННОЙ ПРОДУКЦИИ 6+

ЕАС

β КУБЕ

Польский математик и инженер, популяризатор науки Щепан Еленьский, автор знаменитых книг «Лилавати» и «По следам Пифагора», отобрал интереснейшие задачи, головоломки, математические истории и анекдоты разных эпох и культур, которые и представлены в этой книге. Одни появились сотни и даже тысячи лет назад, другие возникли при жизни автора. Среди них есть загадки китайские и индийские, греческие и арабские, английские и французские, польские и русские. Некоторые головоломки созданы великими математиками, авторство других затерялось в толще времен. Задачи эти увлекательные, но несложные, решение их требует не багажа математических знаний, а любопытства и логического мышления, поэтому разгадывание доставит смелому читателю немалое удовольствие!

6+

Все книги издательства «Качели»
на www. labirint.ru
тел. +7 (495) 745-95-25
Бесплатный телефон для регионов РФ:
8-800-500-9525

КАЧЕЛИ
издательство