ЛЬЮИС КЭРРОЛЛ

ИСТОРИЯ С УЗЕЛКАМИ, ИЛИ ВСЁ НЕ ТАК, КАК КАЖЕТСЯ

ЛЬЮИС КЭРРОЛЛ

ИСТОРИЯ С УЗЕЛКАМИ, ИЛИ ВСЁ НЕ ТАК, КАК КАЖЕТСЯ

Лекстор

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Банка «Новый Символ»
Москва 2017

УДК 51-8
ББК 22.1
К986

12+
Знак информационной продукции согласно Федеральному закону от 29.12.2010 г. № 436-ФЗ

Перевод с английского Ю. А. Данилова

Кэрролл Л.

К986 История с узелками, или Все не так, как кажется : Сборник / Льюис Кэрролл ; Пер. с англ. Ю. А. Данилова ; Под ред. Я. А. Смородинского. — М. : Лектор, 2017. — 208 с. : ил.

ISBN 978-5-906122-36-0

Математика интересовала Чарльза Доджсона (Льюиса Кэрролла) еще со школьной скамьи. Там, где другие дети видели одни сухие цифры, он замечал увлекательную игру. Так, в «Истории с узелками» в каждый узелок автор постарался как можно незаметнее вплести одну или несколько математических задачек для развлечения и, быть может, в назидание читателям.

Математику и писателю Льюису Кэрроллу приписывают несколько изобретений: книжную суперобложку, дорожные шахматы, трехколесный велосипед, электрическую ручку, мнемоническую систему для запоминания имен и дат. А еще никтографию — инструмент для писания в потемках. Сам никтограф (карточка с сеткой из 16 квадратных отверстий, через которые чертились придуманные символы) Кэрролл тоже изобрел сам — он использовал систему точек и штрихов с обязательной точкой в левом верхнем углу.

Не удивительно, что это изобретение принадлежит именно Льюису Кэрроллу: он страдал бессонницей. Пытаясь отвлечься от грустных мыслей и уснуть, он выдумывал математические головоломки, и сам же их решал. Так появился на свет сборник «Полуночные задачи», в котором Кэрролл собрал 72 задачи по тригонометрии, алгебре и планиметрии.

Настоящий перевод произведений Льюиса Кэрролла публикуется на основании договора с правообладателем.

Текст печатается по изданию: Кэрролл Льюис. История с узелками. / Льюис Кэрролл. – М. : «Мир», 1973. — 408 с. : ил.

В оформлении книги использованы рисунки Льюиса Кэрролла и Артура Б. Фроста.

УДК 51-8
ББК 22.1

ISBN 978-5-906122-36-0

Предисловие

Есть старая восточная притча. Трое слепых спорили о том, что такое слон.

«Слон похож на веревку», — утверждал слепой, ухвативший слона за хвост. «Нет, слон подобен стволу могучего дерева», — возражал другой, нащупавший ногу слона. «Вы оба заблуждаетесь. Слон похож на змею», — настаивал третий. Он держал слона за хобот.

С вероятностью, близкой к единице, нечто очень похожее на спор трех слепцов о слоне можно обнаружить, раскрыв наугад несколько книг или статей о Льюисе Кэрролле.

Одни авторы склонны видеть в нем лишь поэта, автора замечательных детских сказок об Алисе, поэмы «Охота на Снарка» и прочих «лепых нелепиц». Для других Кэрролл не более чем посредственный математик. Третьи видят в нем логика-самоучку, не сумевшего разобраться в традиционных теориях, и оценивают логические работы Кэрролла как своего рода курьез.

Но проходит время, и постепенно выясняется иная картина.

«Детские» сказки об Алисе особенно охотно цитируют в своих работах люди, которых менее всего можно упрекнуть в наивном восприятии действительности, ученые самых различных специальностей, в том числе и таких, которые не существовали во времена Кэрролла. «Изящные безделушки» на протяжении почти столетия таинственным образом не поддаются усилиям переводчиков, и трудности носят не только языковый характер. Более того, по мнению столь крупного авторитета, как Бертран Рассел, «Алиса в Стране Чудес» по обилию затрагиваемых в ней тонких логических и философских вопросов с полным основанием может быть отнесена к категории книг «Только для взрослых». Представители совсем молодых наук — семантики и семиотики необычайно высоко оценивают эксперименты Кэрролла с языком, а историки науки вынуждены признать, что логические работы Кэрролла скорее намного опережали свое время, чем отставали от него. Словом, выясняется, что Кэрролл похож только на Кэрролла так же, как слон похож только на слона.

Чарльз Лютвидж Доджсон (1832–1898) (ибо таково подлинное имя Кэрролла, которым он имел обыкновение подписывать свои математические работы) стал Льюисом Кэрроллом в 1856 г. В его «Дневниках» рождение псевдонима отмечено следующей записью:

> «11 февраля 1865 г.
>
> Написал мистеру Йетсу*, предложив ему на выбор псевдонимы: 1) Эдгар Катвеллис (имя Edgar Cuthwellis получается при перестановке букв из Charles Lutwidge); 2) Эдгар У. Ч. Вестхилл (рецепт получения тот же, что и в предыдущем случае); 3) Луис Кэрролл (Луис от Лютвидж — Людовик — Луис, Кэрролл — от Чарлза); 4) Льюис Кэрролл (по тому же принципу)».

1 марта 1856 г. в дневнике появилась еще одна строка: «Выбор пал на Льюиса Кэрролла».

Сочетание безупречной логики математика с беспредельной фантазией литератора создали неповторимое своеобразие кэрролловского стиля. И хотя скромный и несколько чопорный Доджсон во многом проигрывал при сравнении с ярким Кэрроллом, союз их был нерасторжим.

В следующих строках, заимствованных из предисловия к серьезной работе Ч. Л. Доджсона «Новая теория параллельных», явственно ощущается рука Льюиса Кэрролла:

> «Ни тридцать лет, ни тридцать столетий не оказывают никакого влияния на ясность или на красоту геометрических истин. Такая

* Эдмунд Йетс — английский романист и издатель журналов. Любопытно, что именно он помог Чарльзу Л. Доджсону выбрать ставший впоследствии знаменитым псевдоним Льюис Кэрролл. (*Прим. перев.*)

> теорема, как «квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов», столь же ослепительно прекрасна сегодня, как и в тот день, когда Пифагор впервые открыл ее, отпраздновав, по преданию, свое открытие закланием сотни быков. Такой способ выражать свое почтение к науке мне всегда казался *слегка* преувеличенным и неуместным. Даже в наши дни всеобщего упадка можно представить себе, что некто, совершив блестящее научное открытие, пригласит одного или двух друзей, чтобы отметить это событие за бифштексом и бутылкой вина. Но приносить в жертву *сотню* быков! Это было бы слишком. Что бы мы стали делать с таким количеством мяса?»

И наоборот, мышление математика отчетливо проступает во многих, казалось бы, «невинных» местах «детских» сказок Кэрролла, придавая его творениям особый блеск и завершенность. Не нужно быть особенно искушенным в кэрролловедении, чтобы безошибочно определить автора следующих незабываемых строк.

«Как хорошо, что я не люблю спаржу, — сказала маленькая девочка своему заботливому Другу. — Ведь если бы я любила спаржу, мне пришлось бы ее есть, а я ее терпеть не могу».

Не будет преувеличением сказать, что литератор Кэрролл был лучшим математиком, чем преподаватель оксфордского колледжа Крайст-Черч Ч. Л. Доджсон.

Возможно, и в «Истории с узелками», и в «Полуночных задачах» кое-что покажется необычным современному читателю, однако мы не сочли возможным вносить какие-либо изменения в условия задач или в кэрролловские решения. Поразмыслив над тем, что покажется ему странным или даже неверным, читатель не только соединит приятное с полезным (осуществив таким образом на практике девиз «Dulce et utile»), но и проявит свои аналитические способности (в духе девиза «Ex ungue leonem» — «По когтям узнают льва», — открывающего вторую часть «Истории с узелками»).

...

Высочайшим достижением Кэрролла следует считать два логических парадокса — «Что черепаха сказала Ахиллу» и «Аллен, Браун и Карр», опубликованных в философском журнале «Mind».

В двуединстве математика и литератора Кэрролл-поэт оказался не только более ярким, но и более удачливым, чем Кэрролл-математик. Если «Алиса» переводится на русский язык почти сто лет (от первого перевода «Соня в царстве дива», вышедшего в 1879 г., до появившихся недавно перевода Н. М. Демуровой 1968 г. и пересказа Б. В. Заходера 1972 г.), то математические работы Кэрролла оставались почти неизвестными нашему читателю. Публикуя настоящий сборник, мы надеемся приоткрыть дверь в Страну Чудес, не менее удивительную, чем та, в которой побывала Алиса.

Ю. Данилов
Я. Смородинский
1973 г.

История с узелками

МОЕЙ ЛЮБИМОЙ УЧЕНИЦЕ

Друг мой! Знаешь ты уже
Вычитанье и сложе-,
Умноже-нье и деленье
Просто всем на удивленье.

Так дерзай! Пусть славы эхо
О твоих гремит успехах.
Станешь ты, хоть скромен вид,
Знаменитей, чем Евклид!

Узелок I

ПО ХОЛМАМ И ДОЛАМ

Злой гном, веди их по горам
то вверх, то вниз.

Угрюмые ночные тени уже начали сменять румяное зарево заката, когда вдали показались два путника, быстро — со скоростью 6 миль* в час — спускавшиеся по густо усеянному валунами склону горы. Молодой путник с ловкостью оленя перепрыгивал с камня на камень. Путник постарше, с трудом переставляя натруженные ноги, еле поспевал за ним, сгибаясь под тяжестью лат и кольчуги — обычного для тех мест одеяния туристов.

Как всегда бывает в подобных случаях, первым нарушил молчание молодой рыцарь.

— Неплохо идем! — воскликнул он. — Взбирались на гору мы куда медленнее!

— Идем мы действительно неплохо, — со стоном отозвался его спутник, — а на гору мы поднимались со скоростью 3 мили в час.

— Не скажешь ли ты, с какой скоростью мы идем по ровному месту? — спросил молодой рыцарь. Он не был силен в арифметике и имел обыкновение оставлять все детали такого рода на долю своего компаньона.

— Со скоростью 4 мили в час, — устало ответил другой рыцарь и добавил, со свойственной старческому возрасту любовью к метафорам: — Ровно 4 мили в час, ни на унцию** больше и ни на фартинг*** меньше!

* Миля — путевая мера длины; британская миля = 1609,3295 *м*. (*Прим. изд.*)

** Унция — это единица массы в системе английских мер, равная 31,1035 *г*. (*Прим. изд.*)

*** Фартинг — самая мелкая разменная английская монета, равная ¼ пенни (или пенс — одна сотая доля фунта стерлингов). (*Прим. изд.*)

Со скоростью 6 миль в час

— Мы вышли из гостиницы ровно в 3 часа пополудни, — задумчиво заметил молодой человек, — и, конечно, опоздаем к ужину. Хозяин может нам ничего не оставить!

— Да еще станет бранить нас за опоздание, — уныло подхватил старик, — но получит достойный отпор!

— Браво! Зададим ему перцу! — воскликнул юноша с веселым смехом. — Но боюсь, нам придется совсем не сладко, если мы решимся попросить у него хотя бы сладкое.

— К третьему блюду мы и так успеем, — вздохнул рыцарь постарше, не понимавший шуток и несколько раздосадованный неуместным, с его точки зрения, легкомыслием своего молодого друга.

— Когда мы доберемся до гостиницы, — добавил он тихо, — будет ровно 9 часов. Да, немало миль отмахали мы за день!

— А сколько? Сколько? — нетерпеливо воскликнул юноша, не упускавший случая расширить свои познания.

Старик помолчал.

— Скажи, — спросил он после небольшого раздумья, — в котором часу мы взобрались вон на ту вершину?

И, заметив на лице юноши возмущение нелепым вопросом, поспешно добавил:

— Мне не обязательно знать время с точностью до минуты. Достаточно, если ты назовешь момент восхождения с ошибкой на добрых полчаса. Ни о чем большем я и не думаю просить сына твоей матери. Зато в ответ я смогу указать с точностью до последнего дюйма, какое расстояние мы прошли с 3 часов пополудни до 9 часов вечера.

Лишь стон, вырвавшийся из уст молодого человека, был ему ответом. Искаженное страданием мужественное лицо и глубокие морщины, избороздившие широкий лоб юноши, свидетельствовали о глубине арифметической агонии, в которую вверг беднягу случайно заданный вопрос.

Узелок II

КОМНАТЫ СО ВСЕМИ УДОБСТВАМИ

Ступайте прямо по кривому переулку, а потом по замкнутому квадрату.

— Спросим у Бальбуса, — сказал Хью.

— Идет! — согласился Ламберт.

— Уж он-то что-нибудь придумает, — сказал Хью.

— Еще как! — воскликнул Ламберт.

Больше не было сказано ни слова: два брата прекрасно понимали друг друга.

Бальбус ожидал их в гостинице. Дорога, по его словам, была несколько утомительной, поэтому два юных воспитанника и отправились бродить по курортному местечку в поисках пансиона без своего престарелого наставника — неразлучного компаньона обоих братьев с самого раннего детства. Бальбусом братья прозвали его в честь героя одной книги — сборника упражнений по латинскому языку, который им приходилось штудировать. Сборник этот содержал невероятное количество историй о похождениях неутомимого героя — историй, в которых недостаток достоверных фактов с лихвой восполнялся блестящей манерой изложения. Против истории под названием «Как Бальбус одолел всех своих врагов» наставник сделал на полях пометку: «Доблесть, увенчанная победой». Он был искренне уверен, что подобные сентенции помогут его воспитанникам извлечь мораль из каждой истории. Порой эти пометки носили назидательный характер (так, против истории «Как Бальбус похитил здоровенного дракона и что из этого вышло» мудрый наставник начертал на полях: «Опрометчивость поступков»), порой — одобрительный (ибо что, кроме одобрения, звучит в словах «Совместные усилия как следствие взаимопонимания», украсивших поля страниц, на которых излагалась история «Как Бальбус помог своей теще убедить дракона»), а иногда сводились к одному-единственному слову (так, мораль, которую почтенный наставник юношества извлек из трогательной истории «Как Бальбус отрубил хвост дракону и ретировался», вылилась в лаконичную надпись: «Благоразумие»).

Чем короче была мораль, тем сильнее нравилась она братьям, ибо тем больше места оставалось на полях для иллюстраций. В последнем примере им понадобилось все пустое пространство, чтобы должным образом изобразить поспешность, с которой герой оставил поле битвы.

Вернувшись в гостиницу, Ламберт и Хью не смогли сообщить своему наставнику ничего утешительного. Модный курорт Литтл-Мендип, куда они прибыли на воды, по выражению братьев, «кишмя кишел» отдыхающими. Все же на одной площади, имевшей форму квадрата, братьям удалось заметить на дверях не менее четырех домов карточки, на которых огромными буквами значилось: «Сдаются комнаты со всеми удобствами».

— Выбор у нас, во всяком случае, большой, — подвел итог своим наблюдениям Хью, взявший на себя роль докладчика.

— Из сказанного тобой этого отнюдь не следует, — возразил Бальбус, поднимаясь с шаткого стульчика, на котором он сладко дремал над местной газетой. — В каждом доме может сдаваться лишь одна комната, а нам желательно снять три спальни и одну гостиную в одном доме, но взглянуть все же не мешает. Кстати, я буду рад немного поразмять ноги, а то здесь их просто негде вытянуть.

В ответ на последнее замечание непредвзято настроенный наблюдатель мог бы возразить, что вытягивать и без того длинные ноги — операция совершенно излишняя и что внешность тощего существа, высказавшего его, во многом бы выиграла, будь его нижние конечности покороче. Но, разумеется, любящим воспитанникам подобная мысль даже не могла прийти в голову. Пристроившись с флангов

Как Бальбус помог своей теще убедить дракона к своему наставнику, братья изо всех сил старались не отставать. Бальбус гигантскими шагами несся по улице. Хью на бегу не переставал бормотать фразу из письма, только что полученного от отца из-за границы. Фраза эта не давала покоя ни ему, ни Ламберту.

— Он пишет, что его друг — губернатор... Ламберт, как называется то место?

— Кговджни, — подсказал Ламберт.

— Ах да! Так вот. Губернатор этого самого... ну, как его... хочет созвать гостей на званый обед в очень тесном кругу и намеревается пригласить шурина своего отца, тестя своего брата, брата своего тестя и отца своего шурина. Отец хочет, чтобы мы отгадали, сколько гостей соберется у губернатора.

После легкого замешательства Бальбус наконец спросил:

— А отец не пишет, каких размеров пудинг собираются подавать на званом обеде? Если объем пудинга разделить на объем порции, которую может съесть один гость, то частное будет как раз равно...

— Нет, о пудинге в письме не говорится ни слова, — ответил Хью, — а вот и та самая квадратная площадь, о которой я говорил.

С этими словами вся троица свернула за угол, и взорам запыхавшихся путников открылся вид на площадь, где сдавались комнаты «со всеми удобствами».

— Да она *и в самом деле* имеет форму квадрата! — с восторгом воскликнул Бальбус, оглядевшись вокруг. — Потрясающе! Великолепно! Все стороны равны, и *даже* углы прямые!

Мальчики озирали площадь с меньшим энтузиазмом.

— Первое объявление о сдаче комнаты висит на доме номер 9, — заметил чуждый поэзии Ламберт, но заставить охваченного экстазом Бальбуса спуститься на землю было не так-то просто.

— Да вы только посмотрите! — кричал он в упоении. — Вдоль каждой из сторон по двадцать дверей! Какая симметрия! Каждая сторона разделена на двадцать одну равную часть! Просто чудо!

— Мне как, стучать или звонить? — спросил Хью, озадаченно глядя на квадратную медную табличку с лаконичной надписью «Звонить тоже».

— И то, и другое, — ответил Бальбус. — Это, мой мальчик, так называемый эллипс. Разве тебе прежде не приходилось встречать эллипс?

— Тут неразборчиво написано, — уклончиво сказал Хью. — И что толку от эллипса, если он у них не начищен до блеска?

— У меня сдается лишь одна комната, джентльмены, — объявила, приветливо улыбаясь, хозяйка дома, — и, надо прямо сказать, комната превосходная. Такой уютной задней комнатки вам нигде больше не найти.

— Позвольте посмотреть, — угрюмо прервал хозяйку Бальбус и, войдя вслед за ней в комнату, добавил: — Так я и знал! В каждом доме лишь по одной комнате! Вида из окна, разумеется, никакого?

— Наоборот, прекраснейший вид, джентльмены! — негодующе запротестовала хозяйка и, подняв шторы, указала на крохотный огородик на заднем дворе.

— Что это у вас там? — поинтересовался Бальбус. — Капуста? Ну, что ж, все-таки хоть какая-то зелень!

— Видите ли, сэр, — пояснила хозяйка, — в зеленной лавке овощи подчас бывают несвежими, а здесь все к вашим услугам и притом *высшего* качества.

— Окно открывается? — Этот вопрос Бальбус при подыскании квартиры обычно задавал первым. Вторым его вопросом был:

— А как у вас с печной тягой?

Получив на все вопросы удовлетворительные ответы, Бальбус сообщил хозяйке, что пока оставляет комнату за собой, и вместе с братьями направился к дому номер 25.

На этот раз хозяйка не улыбалась и держалась неприступно.

— У меня сдается лишь одна комната, — сказала она, — с окнами в сад на заднем дворе.

— Но капуста, надеюсь, в вашем саду растет? — задал наводящий вопрос Бальбус.

— Конечно, сэр! — с видимым облегчением ответила хозяйка. — Может, мне и не следовало бы так говорить, но капуста и в самом деле уродилась необыкновенная. На зеленную лавку надежда плоха, вот и приходится выращивать капусту самим!

— Капуста, действительно, необыкновенная, — подтвердил Бальбус и, задав обычные вопросы, направился со своими питомцами к дому номер 52.

— С радостью устроила бы вас всех вместе, если бы это было в моих силах, — такими словами встретили их там. — Но мы всего лишь простые смертные («Неважно, — пробормотал про себя Бальбус, — к делу не относится!»), и у меня осталась свободной только одна комната.

— Надеюсь, задняя? — спросил Бальбус. — С видом на капусту?

— Совершенно верно, сэр! — обрадовалась хозяйка. — Что бы ни говорили *некоторые*, *мы* выращиваем капусту сами. Ведь зеленные лавки...

— Очень предусмотрительно с вашей стороны, — прервал ее Бальбус. — Уж на качество собственной капусты можно положиться, не так ли? Кстати, окно открывается?

На обычные вопросы были даны исчерпывающие ответы, однако на этот раз Хью задал один вопрос собственного изобретения.

— Скажите, пожалуйста, ваша кошка царапается?

Хозяйка подозрительно оглянулась, словно желая удостовериться, что кошка не подслушивает.

— Не стану вас обманывать, джентльмены, — сказала она. — Кошка *царапается*, но лишь в том случае, если вы потянете ее за хвост. Если ее за хвост не тянуть, — проговорила хозяйка медленно, с видимым усилием припоминая точный текст соглашения, некогда подписанного ею и кошкой, — то она никогда *не* царапается!

— Многое простительно кошке, с которой обращаются столь неподобающим образом, — промолвил Бальбус, когда он и два брата, оставив присевшую в реверансе хозяйку (слышно было, как она продолжала невнятно бормотать, словно благословляя своих гостей: «...лишь в том случае, если вы потянете кошку за хвост!»), направились через площадь к дому номер 73.

В доме номер 73 они обнаружили лишь маленькую застенчивую девочку-служанку. Показывая им дом, она на все вопросы отвечала:

— Да, мэм!

— Передайте, пожалуйста, вашей хозяйке, — сказал Бальбус, — что мы снимем у нее комнату и что ее идея самостоятельно выращивать капусту ***выше всяких похвал***!

— Да, мэм! — сказала девочка и проводила наставника и его воспитанников до выхода.

— Итак, одна гостиная и три спальни! — подвел итоги Бальбус, вернувшись с мальчиками в гостиницу. — Гостиную мы устроим в том доме, до которого меньше всего ходьбы.

— А как его определить: ходить от двери к двери и считать шаги? — спросил Ламберт.

— Нет, зачем же ходить, когда все можно вычислить? Придется вам, мальчики, как следует пораскинуть мозгами, — весело воскликнул Бальбус и, положив перед своими не на шутку приунывшими подопечными бумагу, перья и чернильницу, вышел из комнаты.

— Вот так задача! Придется над ней поломать голову! — сказал Хью.

— Еще как! — согласился Ламберт.

Узелок III

БЕЗУМНАЯ МАТЕМАТИЛЬДА

Ждал я поезд.

— Называют меня Безумной потому, что, по-видимому, я и в самом деле немного не в своем уме, — сказала она в ответ на осторожный вопрос Клары о том, почему у нее такое странное прозвище. — Я никогда не делаю того, чего в наши дни ожидают от нормальных людей. Во-первых, не ношу платьев с длинными шлейфами. Они напоминают мне составы, тянущиеся за паровозом. Кстати, о поездах. Вон там (видишь?) находится вокзал Чаринг-Кросс. О нем я потом расскажу тебе *кое-что* интересное. Во-вторых, я не играю в лаун-теннис*, в-третьих, не умею жарить омлет. В-четвертых, я даже не умею наложить шины на сломанную руку или ногу. Как видишь, перед тобой круглая невежда!

Племянница Безумной Математильды Клара была на добрых двадцать лет моложе своей тетушки и училась еще в школе для девочек — учебном заведении, о котором Безумная Математильда отзывалась с нескрываемым отвращением.

— Женщина должна быть скромна и послушна! — говаривала она. — Все эти ваши школы не в моем вкусе!

Но сейчас настала пора каникул, Клара приехала погостить к тетушке, и Безумная Математильда показывала своей племяннице достопримечательности восьмого чуда света — Лондона!

— Вокзал Чаринг-Кросс! — продолжала она, широким жестом указывая на вход и как бы представляя племянницу

* Лаун-теннис – теннис на лужайке или травяном газоне. (*Прим. изд.*)

старому другу. — Бейсуотерскую и Бирмингемскую ветки дороги только что закончили строить, и теперь поезда могут непрерывно циркулировать по замкнутому маршруту, доходя на западе до границ Уэльса, на севере — до Йорка и возвращаясь вдоль восточного побережья назад в Лондон. Расписание поездов *не совсем* обычно: поезда, идущие в западном направлении, возвращаются на вокзал Чаринг-Кросс через 2 часа после отправления, поезда, идущие в восточном направлении, проходят весь путь за 3 часа. Но это еще не все. Составители расписания ухитрились сделать так, что каждые 15 минут отсюда, с вокзала Чаринг-Кросс, в противоположных направлениях отправляются два поезда!

— Они расстаются, чтобы затем встретиться вновь, — сказала Клара, и глаза ее при столь романтической мысли наполнились слезами.

— Не сто́ит плакать, — сухо заметила тетушка. — Встречаться-то они встречаются, но не на одной и той же колее железной дороги. Кстати, о встречах. Мне в голову пришла великолепная идея! — добавила она, со свойственной ей резкостью меняя тему разговора. — Давай сядем на поезда, идущие в противоположных направлениях, и посмотрим, кто из нас встретит больше поездов. Сопровождать тебя не нужно: в этих поездах, да будет тебе известно, есть специальные дамские купе. Итак, выбирай, в каком направлении тебе ехать, и мы побьемся об заклад относительно того, кто из нас выиграет.

— Я не бьюсь об заклад, — с мрачным видом заявила Клара. — Наша достопочтенная воспитательница неоднократно предостерегала нас от...

— Не вижу в этом ничего дурного! — перебила ее Безумная Математильда. — По-моему, лучше биться об заклад, чем бить баклуши, — хоть какая-то польза!

— Наша достопочтенная воспитательница настоятельно рекомендует нам не употреблять каламбуров, — заметила Клара и, быстро произведя в уме какие-то подсчеты, добавила:

— Если вы хотите, тетя, то мы можем устроить состязание. Я постараюсь выбрать поезд так, чтобы мне встретилось ровно в полтора раза больше поездов, чем вам.

— Это невозможно, если, конечно, ты будешь честно считать встречные поезда, — с присущей ей прямотой возразила Безумная Математильда. — Не забудь, что считать следует лишь те поезда, которые встречаются *в пути*. Поезд, который отправляется с вокзала Чаринг-Кросс или прибывает сюда одновременно с твоим поездом, в счет не идет.

— Если я и внесу поправку на эти правила, то число встреченных поездов изменится лишь *на единицу*, — сказала Клара, когда они с тетушкой вошли в здание вокзала. — Правда, мне никогда раньше не приходилось ездить одной. Некому будет даже помочь мне сойти с поезда, но все равно я согласна. Жаль только, что одна из нас выиграет, а другая...

— *Если* одна выиграет, то у другой дело — табак, — решительно отрубила Безумная Математильда.

Маленький оборванный мальчик, торговавший всякой мелочью, услышав последнее замечание, бросился за ними.

— Купите табачку, мисс! — предложил он, потянув Клару за бахрому шали. Клара остановилась.

— Я не курю, — сказала она робким, извиняющимся тоном. — Наша достопочтенная воспитательница...

Но Безумная Математильда нетерпеливо потащила Клару за собой, так и не дав ей договорить. Мальчик замер на месте, глядя на странную пару вытаращенными от изумления глазами.

Леди купили билеты и прошли на центральную платформу. Безумная Математильда, как всегда, болтала без умолку, Клара безмолвствовала, лихорадочно проверяя в уме вычисления, на которых зиждились все ее надежды на выигрыш.

— Смотри под ноги! — воскликнула тетушка как раз вовремя. — Еще шаг, и не миновать бы тебе холодного душа!

— Да, да, — пробормотала погруженная в свои размышления Клара, — душа холодная, надменная, черствая...

— Пассажиров просят занять места на трамплинах! — громко объявил дежурный.

— А для чего трамплины? — испуганным шепотом спросила Клара.

— Чтобы удобнее было садиться в поезд, — с невозмутимым видом человека, не видящего в происходящем ничего особенного, ответила Безумная Математильда. — Видишь ли, не много найдется людей, которые смогли бы без посторонней помощи сесть в вагон за 3 секунды, а поезд стоит лишь 1 секунду.

Тут раздался свисток, и на станцию с противоположных сторон влетели два поезда. Секундная пауза, и... оба поезда помчались дальше. Но и за столь малый промежуток времени несколько сот пассажиров успело впрыгнуть в вагоны (причем каждый из них со снайперской точностью попал на свое место!) и ровно столько же пассажиров умудрилось выпрыгнуть из вагонов на платформу.

Три часа спустя тетушка и племянница вновь встретились на платформе вокзала Чаринг-Кросс и сравнили свои подсчеты. Клара со вздохом отвернулась. Для столь юного и чувствительного сердца, как у нее, разочарование — пилюля неизменно горькая, и Безумная Математильда поспешила утешить племянницу.

— Попробуем еще раз, — ласково предложила она, — но правила слегка изменим. Начнем как прежде, но считать встречные поезда не будем до тех пор, пока наши поезда не повстречаются. Как только увидим друг друга из окон вагонов, скажем: «Раз!» — и будем продолжать счет встречных поездов до тех пор, пока не прибудем на вокзал Чаринг-Кросс.

Лицо Клары просветлело.

— Уж на этот раз я непременно выиграю, — радостно воскликнула она, — лишь бы мне было позволено снова выбирать поезд.

И снова раздался резкий свисток паровоза, снова ожидающие заняли места на трамплинах, снова живая лавина пассажиров чудом успела заполнить два пронесшихся мимо поезда, снова наши путешественницы расстались.

Каждая из них с нетерпением выглядывала из окна своего вагона, держа наготове платок, чтобы успеть подать сигнал, когда поезда поравняются друг с другом. Наконец под оглушительный стук колес и завывание ветра поезда встретились в туннеле, и путешественницы со вздохом — точнее с *двумя* вздохами — облегчения откинулись на спинки диванов в своих купе.

— Раз! — открыла счет Клара. Вскоре за первым встречным поездом последовал второй, за вторым — третий.

— Три! Уф, как я устала! — вздохнула Клара и тут же радостно встрепенулась:

— Три, уф! Звучит почти как триумф! Это — добрая примета: уж теперь-то я непременно выиграю!

Но... выиграла *ли* она?

Узелок IV

ИСКУССТВО СЧИСЛЕНИЯ

И снились мне ночью мешки золота.

В нескольких градусах от экватора в полдень даже в открытом море жара сто́ит совершенно невыносимая, и два уже знакомых нам путешественника, сбросив с себя кольчуги и латы, облачились в легкие, ослепительно белые полотняные костюмы. Латы, по мнению этих многоопытных людей, незаменимы в горах, где воздух, которым они еще так недавно наслаждались, свеж и прохладен, ибо предохраняют владельца не только от простуды, но и от кинжалов бандитов, в изобилии встречающихся в заоблачных высях. Закончив свое путешествие, оба туриста возвращались теперь домой на небольшом парусном судне, совершавшем раз в месяц рейсы между двумя самыми крупными портами того острова, который они столь успешно исследовали.

Сбросив латы, туристы перестали употреблять и те несколько архаичные обороты речи, которые так нравились им, пока они находились в рыцарском обличье, и вернулись к обычному лексикону провинциальных джентльменов девятнадцатого века.

Растянувшись на груде подушек под сенью огромного зонтика, они лениво наблюдали за несколькими рыбаками-туземцами, севшими на корабль во время последней стоянки. Поднимаясь на борт, каждый из рыбаков нес на плече небольшой, но тяжелый мешок. На палубе стояли огромные весы, на которых при погрузке обычно взвешивали принимаемые на борт грузы. Вокруг этих весов и собрались рыбаки. Возбужденно крича что-то на непонятном языке, они, по-видимому, намеревались взвесить свои мешки.

— Больше похоже на воробьиное чириканье, чем на человеческую речь, — заметил пожилой турист, обращаясь к сыну, который лишь слабо улыбнулся, не найдя в себе сил произнести хоть слово в ответ. Отец в поисках более отзывчивого слушателя обратил свой взор к капитану.

— Что там у них в мешках, капитан? — спросил он первого после бога человека на судне, когда тот, совершая свой бесконечный променад из конца в конец палубы, поравнялся с зонтом, под которым возлежали наши знакомые.

Капитан прервал свой марш и, высокий, строгий, весьма довольный собой, замер перед туристами, возвышаясь над ними, подобно величественному монументу.

— Рыбаки, — пояснил он, — частые пассажиры на моем судне. Эти пятеро из Мхрукси, ме́ста нашей последней стоянки. В мешках они везут деньги. Нужно сказать, джентльмены, что деньги этого острова тяжеловесны, но, как вы догадываетесь, малоценны. Мы покупаем их у туземцев на вес — по 5 шиллингов* за фунт**. Думаю, что все мешки, которые вы видите, можно купить за одну десятифунтовую банкноту.

Слушая капитана, пожилой джентльмен закрыл глаза — несомненно, лишь для того, чтобы как можно лучше сосредоточиться на сообщаемых ему интересных фактах, но капитан, не поняв истинных намерений своего собеседника, с недовольным ворчаньем возобновил прерванный было променад.

Между тем рыбаки, собравшиеся у весов, стали шуметь так отчаянно, что один из матросов счел нелишним принять меры предосторожности и унести все гири. Туземцам волей-неволей пришлось довольствоваться ручками от лебедок, кофель-нагелями*** и тому подобными тяжелыми предметами, которые им удалось отыскать. Предпринятый

* Шиллинг – английская монета; 1 шиллинг = 5 пенсов. (*Прим. изд.*)

** Фунт – основная единица в системе английских мер; 1 фунт = = 0,45359237 *кг*. (*Прим. изд.*)

*** Кофель-нагели – деревянные или металлические болты, прибитые к борту судна для укрепления некоторых снастей. (*Прим. изд.*)

матросом демарш возымел желаемое действие: шум вскоре прекратился. Тщательно спрятав мешки в складках кливера*, лежавшего на палубе невдалеке от наших туристов, рыбаки разбрелись кто куда.

Когда снова послышалась тяжелая поступь капитана, молодой человек приподнялся.

— Как вы назвали место, откуда эти туземцы, капитан? — поинтересовался он.

— Мхрукси, сэр.

— А как называется то место, куда мы направляемся?

Капитан набрал побольше воздуха в легкие, храбро нырнул в слово и с честью вынырнул из его глубин:

— Они называют его Кговджни, сэр!

— Кг... Не могу выговорить! — еле слышно отозвался молодой человек.

Дрожащей рукой он взял стакан воды со льдом, который за минуту до того принес ему сердобольный стюард, и сел, к несчастью оказавшись не в отбрасываемой зонтом тени, а на самом солнцепеке. Жара стояла убийственная, и молодой человек решил воздержаться от холодной воды. Немалую роль в столь самоотверженном решении сыграл утомительный, только что воспроизведенный разговор с капитаном. Совершенно обессилев, молодой человек вновь молча откинулся на подушки.

Отец вежливо попытался заменить сына в разговоре.

— Где мы сейчас находимся, капитан? — любезно осведомился он. — Имеете ли вы об этом хоть какое-нибудь представление?

Капитан бросил презрительный взгляд на погрязшую в невежестве «сухопутную крысу» и ответил тоном, преисполненным глубочайшего снисхождения:

— Я могу сообщить вам наши координаты, сэр, с точностью до дюйма**!

— Не может быть! — лениво удивился пожилой турист.

— Не только может, но так оно и есть! — настаивал капитан. — Как вы думаете, что бы стало с моим судном, если бы

* Кливер — треугольный косой парус в передней части судна. (*Прим. изд.*)

** Дюйм — неметрическая единица измерения расстояния и длины в некоторых системах мер; английский дюйм равен 2,54 *см*. (*Прим. изд.*)

я потерял долготу и широту? Имеет ли кто-нибудь из присутствующих хотя бы отдаленное представление о счислении?

— С уверенностью могу сказать: никто из присутствующих в счислении не смыслит, — откровенно признался сын; однако он несколько переусердствовал в своем правдолюбии.

— А между тем для тех, кто разбирается в подобных вещах, в счислении нет ничего сложного, — тоном оскорбленного достоинства заявил капитан. С этими словами он удалился, чтобы отдать необходимые распоряжения матросам, собиравшимся поднять кливер.

Наши туристы с таким интересом наблюдали за поднятием паруса, что ни один из них даже не вспомнил о мешках с туземными деньгами, спрятанных в его складках. В следующий момент ветер наполнил поднятый кливер, и все пять мешков, оказавшись за бортом, с тяжелым плеском упали в море.

Несчастным рыбакам забыть о своей собственности было не так просто. Они сгрудились у борта и с яростными криками, размахивая руками, указывали то на море, то на матросов, явившихся причиной несчастья.

Пожилой турист объяснил капитану, в чем дело.

— Позвольте мне возместить несчастным убытки, — добавил он в заключение. — Полагаю, что десяти фунтов будет достаточно? Ведь вы, кажется, называли именно эту сумму?

Но капитан отверг предложение.

— Нет, сэр! — сказал он с величественным видом. — Надеюсь, вы меня извините, но это — *мои* пассажиры. Происшествие случилось на борту вверенного мне судна и вследствие отданных *мной* приказаний. Поэтому и компенсацию за причиненный ущерб должен выплатить я.

И он обратился к разгневанным рыбакам на мхруксийском диалекте.

— Подойдите сюда и скажите, сколько весил каждый мешок. Я видел, как вы только что их взвешивали.

Не успел капитан закончить свою речь, как на палубе вновь началось воистину вавилонское столпотворение: все пятеро туземцев наперебой пытались объяснить капитану, что матрос унес гири и им пришлось взвешивать, пользуясь лишь «подручными средствами».

Под наблюдением капитана импровизированные гири — два железных кофель-нагеля, три блока, шесть камней для чистки палубы, четыре ручки от лебедок и большой молот были тщательно взвешены. Результаты взвешивания капитан аккуратно занес в свой блокнот. Однако на этом его неприятности не закончились. В последовавшей довольно жаркой дискуссии приняли участие и матросы, и пятеро туземцев. Наконец капитан с несколько растерянным видом подошел к нашим туристам, пытаясь легким смешком скрыть замешательство.

— Возникло нелепое затруднение, — сказал он. — Может быть, вы, джентльмены, подскажете выход из него. Дело в том, что туземцы, как я сейчас выяснил, взвешивали не по одному, а по два мешка!

— Если они произвели менее пяти взвешиваний, то, разумеется, оценить стоимость содержимого каждого мешка не представляется возможным, — поспешил вывести заключение молодой человек.

— Послушаем лучше, что известно о весе мешков, — осторожно заметил его отец.

— Туземцы произвели пять взвешиваний, — сообщил капитан. — Но у меня, — добавил он, поддавшись внезапному приступу откровенности, — просто голова идет кругом. Послушайте, что получилось. Первый и второй мешки весили 12 фунтов, второй и третий — 13,5 фунта, третий и четвертый — 11,5, четвертый и пятый — 8 фунтов. После этого, по утверждению туземцев, у них остался только тяжелый молот. Чтобы уравновесить его, понадобилось три мешка: первый, третий и пятый. Вместе они весят 16 фунтов. Вот так, джентльмены! Приходилось ли вам слышать что-либо подобное?

Пожилой турист смог лишь едва слышно пробормотать:

— Если бы моя сестра была здесь! — и безнадежно посмотрел на своего сына.

Пятеро туземцев с надеждой взирали на капитана. Капитан не смотрел ни на кого: глаза его были закрыты. Казалось, он тихо говорил, обращаясь к самому себе:

— Созерцайте друг друга, джентльмены, если это доставляет вам удовольствие. Я предпочитаю созерцать *самоё себя*!

Узелок V

КРЕСТИКИ И НОЛИКИ

Как вам нравится та картина? А эта?

— Что заставило тебя, глупышка, выбрать первый поезд? — спросила Безумная Математильда племянницу, когда они садились в кэб. — Неужели ты не могла придумать ничего лучше?

— Я рассмотрела предельный случай, — ответила Клара сквозь слезы. — Наша достопочтенная воспитательница всегда говорит нам: «Если вы сомневаетесь в чем-то, рассмотрите предельный случай», а я как раз была в сомнении.

— И что же, этот совет всегда помогает? — поинтересовалась тетушка.

Клара вздохнула.

— Не всегда, — неохотно призналась она, — хотя я никак не могу понять, в чем тут дело. Как-то раз наша достопочтенная воспитательница сказала девочкам из младших классов (они ведь всегда так ужасно шумят за столом!): «Чем больше вы будете шуметь, тем меньше получите варенья, и *vice versa**». Я подумала, что девочки не знают, что такое *vice versa*, и решила объяснить им. Я сказала: «Если вы будете шуметь бесконечно громко, то не получите варенья совсем. Если же вы совсем не будете шуметь, то полýчите бесконечно много варенья», а наша достопочтенная воспитательница сочла пример неудачным. Хотела бы я знать почему, — добавила Клара жалобно.

Тетушка уклонилась от прямого ответа.

* Наоборот (*лат.*).

— Твой пример, действительно, не может не вызвать возражений, — сказала она, — но мне любопытно знать, как ты перешла к пределу в задаче с поездами. Насколько мне известно, ни один поезд не движется бесконечно быстро.

— Одни поезда я назвала «зайцами», другие — «черепахами», — робко пояснила Клара, боясь, что ее поднимут на смех. — Я думала, что число «зайцев» и «черепах» на линии не может быть одинаковым, и взяла поэтому предельный случай: одного «зайца» и бесконечно много «черепах».

— Что и говорить, случай действительно предельный! — заметила крайне мрачным тоном Безумная Математильда. Ситуация предельно опасна!

— Подумав, я решила, — продолжала Клара, — что если я сяду на «черепаху», то встречу лишь одного «зайца»: ведь больше их и нет. Зато если я сяду на «зайца», то встречу целые толпы «черепах»!

— Ну что ж, идея не так уж плоха, — промолвила тетушка, когда они сошли с кэба у входа в Берлингтон-Хаус. — А сейчас тебе представится еще один удобный случай проявить свою смекалку. Мы будем состязаться в оценке картин.

Клара просияла.

— Я буду очень стараться, — воскликнула она, — и на этот раз буду осторожнее. А как мы будем играть?

На этот вопрос Безумная Математильда не ответила: она с деловым видом чертила какие-то линии на полях каталога.

— Взгляни, — сказала она Кларе минуту спустя. — Видишь, против названий картин, выставленных в большом зале, я начертила три графы. В них мы будем ставить крестики и нолики: крестик — вместо положительной оценки, нолик — вместо отрицательной. В первой графе мы будем ставить оценку за сюжет, во второй — за композицию и в третьей — за колористическое решение. Условия нашего состязания состоят в следующем. Ты должна поставить три крестика двум или трем картинам, два крестика — четырем или пяти картинам...

— Что вы имеете в виду, когда говорите о двух крестиках? — спросила Клара. — Картины, отмеченные только двумя крестиками, или также и картины, отмеченные тремя крестиками?

— Картины, получившие три крестика, разумеется, можно считать получившими два крестика, — ответила тетушка. — Ведь о всяком, у кого есть три глаза, можно сказать, что уж два-то глаза у него заведомо есть, не так ли?

С этими словами тетушка устремила задумчивый взгляд на переполненный публикой зал картинной галереи. Клара с опаской посмотрела в ту же сторону, боясь увидеть трехглазого посетителя.

— Девяти или десяти картинам ты должна поставить один крестик, — продолжала перечислять условия состязания Безумная Математильда.

— А кто же выигрывает? — спросила Клара, тщательно записывая все сказанное на чистом листе каталога.

— Тот, кто поставит оценки наименьшему числу картин.

— А если мы поставим оценки одинаковому числу картин?

— Тогда тот, кто поставит больше оценок.

Клара задумалась.

— Это состязание совсем нетрудное, — сказала она. — Я поставлю оценки девяти картинам. Трем из них я поставлю по три крестика, двум другим — по два крестика, а остальным — по одному крестику.

— Нетрудное состязание, говоришь? — спросила тетушка. — Подожди, пока не узнаешь все условия, нетерпеливое дитя! Одной или двум картинам ты должна поставить три нолика, трем или четырем картинам — по два нолика и восьми или девяти картинам — по одному нолику. И не будь слишком строгой к картинам членов Королевской академии изобразительных искусств!

Записав новые условия, Клара почти лишилась дара речи.

— Это похуже периодических дробей, — вздохнула она, но я все равно должна выиграть!

Тетушка зловеще улыбнулась.

— Отсюда мы и начнем, — сказала она, когда они подошли к картине огромных размеров, значившейся в каталоге под названием «Портрет лейтенанта Брауна верхом на любимом слоне».

— Какой у него самодовольный вид, — воскликнула Клара. — Не думаю, чтобы он был любимым лейтенантом бедного слона. Картина просто ужасна и к тому же занимает столько места, что его хватило бы на двадцать картин!

— Подумай, что ты говоришь! — прервала Клару тетушка. — Ведь автор этой картины член Королевской академии!

Но Клара была непреклонна.

— Мне все равно, кто ее автор! — упрямо сказала она. — Я поставлю ей три плохие оценки.

Тетушка и племянница вскоре потеряли друг друга в толпе, и в течение ближайшего получаса Клара трудилась в поте лица, ставя оценки, вновь стирая их и упорно разыскивая подходящие картины. Последнее оказалось труднее всего.

— Никак не могу найти того, что мне нужно! — воскликнула она наконец, чуть не плача с досады.

— Что ты хочешь найти, деточка? — раздался за спиной Клары незнакомый, но такой ласковый и приятный голос, что Клара, еще не видя произнесшего эти слова, почувствовала к нему горячую симпатию. Обернувшись, она увидела двух ласково улыбавшихся старушек небольшого роста с круглыми морщинистыми лицами, очень похожих друг на друга. Они выглядели так сиротливо и бесприютно, что Клара (как она потом призналась тетушке) еле удержалась, чтобы не обнять их.

— Я ищу картину, — сказала она, — написанную на хороший сюжет, с хорошей композицией, но с плохим колористическим решением.

Маленькие старушки тревожно переглянулись.

— Успокойся, деточка, — сказала та из них, которая уже обращалась к Кларе, — и попытайся припомнить, что изображено на картине, каков ее сюжет.

— Не изображен ли на ней, например, слон? — спросила вторая старушка.

С того места, где стояли Клара и старушки, нетрудно было заметить лейтенанта Брауна.

— Не знаю, — нетерпеливо ответила Клара. — Мне совсем неважно, каков сюжет картины, лишь бы он был хорошим!

Старушки снова тревожно переглянулись, и одна из них что-то прошептала на ухо другой. Клара смогла уловить лишь одно слово «...безумна».

— Ну, конечно, они имеют в виду мою тетю Математильду, — подумала она про себя, полагая по своей наивности, что в Лондоне, как и в ее родном городке, все знают друг друга.

— Если вы хотите видеть мою тетю, — добавила она вслух, — то она стоит вон там, через три картины от лейтенанта Брауна.

— Очень хорошо, деточка! Тебе лучше пойти к ней, — успокаивающе сказала новая знакомая Кларе. — Уж она-то сумеет найти картину, которая так тебе нужна. До свиданья, бедняжка!

— До свиданья, бедняжка! — как эхо, отозвалась другая сестра. — Постарайся больше не терять свою тетю.

И обе старушки, мелко семеня, вышли из зала. Клара, очень удивленная их поведением, посмотрела им вслед.

— Какие они милые! — подумала она. — Интересно, почему они так жалели меня?

И она отправилась вновь бродить по выставке, бормоча себе под нос:

— Нужно найти картину с двумя хорошими и одной...

Узелок VI

ЕЕ БЛИСТАТЕЛЬСТВО

Я твой совсем не понимай,
Но твой поймешь все вдруг,
Когда изведаешь, сагиб,
По пяткам ты бамбук.

Едва путешественники высадились на берег, как их повели во дворец. На полпути вновь прибывших гостей повстречал губернатор, приветствовавший наших знакомых на английском языке — к великому их облегчению, ибо, как выяснилось, приставленный к ним гид говорил лишь на кговджнийском диалекте.

— Не нравятся мне ухмылки этих туземцев, — прошептал пожилой путешественник на ухо сыну. — Что они на нас так уставились? И почему без конца повторяют «бамбук»?

— Они имеют в виду местный обычай, — пояснил губернатор, случайно услышавший вопрос. — Те, кто каким-либо образом осмелится вызвать неудовольствие Ее Блистательства, подвергаются наказанию: их бьют бамбуковыми палками по пяткам.

Пожилой путешественник поежился.

— Какой варварский обычай! Мне он очень не нравится! — заметил он, делая особое ударение на «мне» и «не нравится». — Очень сожалею, что мы вообще сошли здесь на берег! Норман, взгляни вот на этого дикаря. Что он так скалит зубы? Не иначе, как хочет нас съесть!

Норман обратился к шедшему рядом губернатору.

— Как часто здесь принято съедать знатных чужестранцев? — спросил он самым безразличным тоном, на который только был способен.

И почему без конца повторяют «бамбук»?

— Не очень часто. Во всяком случае, не всегда, — послышался успокоительный ответ. — Знатные путешественники не слишком съедобны. То ли дело свиньи: они так жирны! А этот почтенный старец, например, тощ.

— Весьма рад этому обстоятельству, — пробормотал пожилой путешественник. — Бамбуковых палок нам не миновать, но все же утешительно сознавать, что ты будешь лишь поколочен, а не проглочен. Мой мальчик! Ты только взгляни на этих павлинов!

Наши друзья теперь шли между двумя идеально ровными рядами павлинов. Каждого павлина за цепочку, прикрепленную к золотому ошейнику, держал чернокожий раб, стоявший несколько позади, так чтобы не мешать любоваться великолепным хвостом с синими глазками и отливающими зеленым золотом перьями.

Губернатор с гордостью улыбнулся.

— Это в вашу честь, — пояснил он. — Ее Блистательство, помимо обычных, приказала выстроить еще десять тысяч павлинов. Она, несомненно, осыплет вас милостями и на прощанье наградит вас орденом Звезды с Павлиньими Перьями.

— Боюсь, как бы дождь наград не сменился на град побоев! — усомнился один из слушателей губернатора.

— Пойдем! Не падай духом, — ободрил его другой, — здесь очень мило!

— Ты молод, Норман, — вздохнул его отец, — молод и легкомыслен. Я не разделяю твоего восторга. Мне все время мерещится, будто нас уже ведут в острог.

— Престарелый чужеземец чем-то опечален? — с некоторым беспокойством заметил губернатор. — Может быть, на его совести тяжкое преступление?

— Моя совесть чиста, — поспешно воскликнул пожилой джентльмен. — Скажи ему, Норман, что я не совершал никаких преступлений.

— Пока еще не совершал, — веско подтвердил Норман, и губернатор тоном глубочайшего удовлетворения повторил:

— Пока еще не совершал.

— Страна, из которой вы прибыли, — поистине страна чудес, — продолжал, немного помолчав, губернатор. — Как раз недавно я получил письмо от одного моего друга, купца, из Лондона. Год назад он отправился туда вместе с братом, причем у каждого из них было с собой по 1000 фунтов стерлингов. И что ж? Сейчас братьям осталось совсем немного до 60 000 фунтов!

— Как им это удалось? — воскликнул искренне заинтересованный Норман, и даже его отец слегка оживился.

Губернатор протянул Норману письмо.

«Всякий может достичь того же, нужно только знать, как взяться за дело, — гласил этот красноречивый документ. — Мы не должны ни пенса и не украли ни пенса. Год назад у каждого из нас было по 1000 фунтов стерлингов, а сегодня мы уже, как никогда, близки к 60 000 фунтов стерлингов — 60 000 золотых соверенов!»

Возвращая письмо, Норман был угрюм и задумчив. Отец его рискнул высказать догадку:

— Может быть, ваши друзья выиграли эту огромную сумму в карты?

— Кговджнийцы никогда не играют в карты, — сурово отверг нелепое предположение губернатор, вводя наших путешественников в ворота дворца.

В полном молчании отец и сын проследовали за своим провожатым по длинному коридору и вскоре оказались в величественном зале, все стены которого были сплошь покрыты павлиньими перьями. Ее Блистательство — полная дама крохотного росточка — в мантии из зеленого шелка, сплошь усыпанной серебряными звездами, восседала в центре зала на груде алых подушек. Ее маленькая фигурка была почти незаметна. Бледное круглое лицо ее на миг озарилось отдаленным подобием улыбки, когда путешественники склонились в низком поклоне, и вновь обрело полную неподвижность восковой маски, когда она еле слышным голосом обронила несколько слов на кговджнийском диалекте.

— Ее Блистательство приветствует вас, — перевел губернатор, — и отмечает Невозмутимое Спокойствие старости и Незрелую Поспешность юности.

Тут маленькая властительница хлопнула в ладоши. Как из-под земли появилась целая армия слуг с подносами, уставленными чашечками кофе и сластями. Слуги наперебой принялись угощать путешественников, опустившихся по знаку губернатора на ковер.

— Леденцы! — пробормотал отец. — Я чувствую себя так, словно попал в кондитерскую! Попроси сладкую булочку за один пенс, Норман!

— Не так громко! — прошептал сын. — Скажем ей какой-нибудь комплимент!

Губернатор явно ожидал ответной речи.

— Мы благодарим Ее Недосягаемое Всемогущество, — дрожащим голосом начал престарелый путешественник, — чья улыбка согревает нас, подобно...

— Слова старцев слабы! — недовольно прервал его губернатор. — Пусть скажет юноша!

— Передайте ей, — воскликнул Норман в необычайном порыве красноречия, — что в присутствии Ее Многозвездного Всесокрушительства мы особенно остро ощущаем свое ничтожество, подобно двум жалким козявкам, попавшим в жерло клокочущего вулкана.

— Неплохо сказано, — одобрил губернатор и перевел речь Нормана на кговджнийский.

— А теперь я сообщу вам, — продолжал он, — что угодно Ее Блистательству потребовать от вас, прежде чем вы покинете этот дворец.

— Только что закончился ежегодный конкурс на замещение должности Придворной Вязальщицы Шарфов. Вы назначаетесь судьями. Вынося свое решение, вы должны принять во внимание, насколько быстро связан шарф, насколько он легок и хорошо ли он греет. Обычно участницы конкурса расходились лишь по одному из трех пунктов. Например, в прошлом году Фифи и Гого в течение испытательного срока — недели — успели связать одинаковое количество одинаково теплых шарфов, но шарфы, связанные Фифи, оказались вдвое теплее, чем шарфы, связанные Гого, поэтому Фифи и сочли вдвое лучшей вязальщицей, чем Гого. Но в этом году — о горе мне! — рассудить, кто из вязальщиц лучше, выше человеческих сил. В конкурсе приняли участие три вязальщицы, и связанные ими шарфы отличаются по всем трем пунктам! Ее Блистательство уполномочила меня заявить, что на время разбора столь сложного казуса вы будете расквартированы — разумеется, бесплатно — в лучшей темнице и будете в изобилии получать лучший хлеб и воду.

Пожилой путешественник, услышав страшную весть, застонал.

— Все пропало! — воскликнул он в отчаянии.

Норман повел себя иначе: вытащив из кармана блокнот, он спокойно принялся записывать данные об участницах конкурса.

— Их трое: Лоло, Мими и Зузу, — сообщил губернатор. — За то время, которое требуется Мими, чтобы связать 2 шарфа, Лоло успевает связать 5 шарфов, но пока Лоло вяжет 3 шарфа, Зузу успевает связать 4 шарфа! И это не всё! Шарфы, связанные Зузу, легче пуха — 5 ее шарфов весят не больше, чем один шарф, связанный Лоло, — но шарфы Мими еще легче! 5 шарфов Мими весят столько же, сколько 3 шарфа Зузу! Но и это еще не все! Один шарф Мими греет так же, как 4 шарфа Зузу, а один шарф Лоло так же, как 3 шарфа Мими!

Тут маленькая леди еще раз хлопнула в ладоши.

— Аудиенция окончена! — поспешно сказал губернатор. — Вы должны подарить Ее Блистательству прощальные комплименты и выйти из зала, не показав ей спину!

Идти — единственное, на что еще был способен турист постарше. Норман просто сказал:

— Передайте Ее Блистательству, что мы оцепенели при виде Ее Лучезарного Сверкательства и из последних сил шлем свой прощальный привет Ее Августейшей Сметанности!

— Ее Блистательство выражает свое удовлетворение, — сообщил губернатор после тщательного перевода прощального комплимента Нормана. — Она озаряет вас взглядом Своих Царственных Глаз и выражает уверенность, что вы можете поймать этот взгляд!

— Хоть эта задача нам по силам! — в отчаянии простонал старший из путешественников.

Они еще раз низко поклонились и, выйдя из зала, по винтовой лестнице спустились в Собственную Ее

Блистательства Темницу, которая оказалась выложенной разноцветным мрамором, освещалась через крышу и была великолепно, хотя и без излишней роскоши, обставлена одной-единственной скамьей из полированного малахита.

— Надеюсь, вы не станете затягивать свое решение, — сказал губернатор, вводя отца и сына в темницу с соблюдением всех правил придворного этикета. — Должен предупредить вас, что у тех несчастных, которые не слишком торопились исполнить повеления Ее Блистательства, возникали различные неприятности, подчас большие и серьезные. В подобных случаях Ее Блистательство действует весьма решительно. Она говорит: «Что должно быть совершено, да свершится!» — и приказывает дать еще десять тысяч ударов бамбуковыми палками сверх обычного наказания.

С этими словами губернатор покинул путешественников, и они услышали, как за дверью лязгнул засов и щелкнул замóк.

— Говорил я тебе: добром это не кончится! — простонал, ломая в отчаянии руки, пожилой путешественник. В своих страданьях он забыл, что сам выбрал маршрут путешествия и никогда ничего подобного не пророчил. — О, если бы нам только благополучно разделаться с этим проклятым конкурсом!

— Не падай духом! — бодро воскликнул молодой человек. — *Haec olim meminisse juvabit**! Вот увидишь, все будет хорошо! Слава еще увенчает нас розами!

— Розами с «г» после «з»! — вот все, что мог вымолвить несчастный отец, в отчаянии раскачиваясь взад и вперед на малахитовой скамье. — С «г» после «з»!

* Когда-нибудь об этом будет приятно вспомнить (*лат.*).

Узелок VII

МЕЛКИЕ РАСХОДЫ

Раб, который еще должен платить. Какая низость!

— Тетя Математильда!

— Что, милая?

— Не могли бы вы записать расходы сразу? Если вы их сейчас не запишете, я непременно забуду.

— Подожди хотя бы, пока кэб остановится. Не могу же я писать, когда так трясет!

— Ну, тетя, пожалуйста! А то я действительно забуду.

В голосе Клары зазвучали просительные нотки, против которых тетушка не могла устоять. Достав со вздохом свой блокнот — несколько табличек небольшого формата из слоновой кости, — она приготовилась внести в него те суммы, которые Клара только что израсходовала в кондитерской. Платила за все, разумеется, тетушка, но бедная девочка отлично знала, что рано или поздно Безумная Математильда потребует от нее подробный отчет о каждом израсходованном пенсе, и поэтому сейчас с плохо скрываемым нетерпением ждала, пока тетушка найдет среди своих табличек ту, которая была озаглавлена «Мелкие расходы».

— Вот она, — сказала наконец тетушка. — Последняя запись относится к вчерашнему завтраку. Один стакан лимонада (Почему ты не можешь пить простую воду, как я?), три бутерброда (Горчицы, конечно, в них нет и в помине. Я прямо так и сказала девушке за прилавком, а она в ответ лишь вздернула подбородок. Удивительная дерзость!)

и семь бисквитов. Итого 1 шиллинг и 2 пенса*. Итак, что ты заказывала сегодня?

— Один стакан лимонада...— начала было перечислять Клара, но тут кэб неожиданно остановился, и стоявший у входа в вокзал швейцар с отменными манерами помог растерявшейся девочке выйти из экипажа прежде, чем она успела закончить фразу.

Тетушка немедленно захлопнула свой блокнот.

— Дело прежде всего, — сказала она. — Удовольствия (а деньги на мелкие расходы, что бы ты там ни говорила, — всего лишь одна из разновидностей удовольствий) могут подождать.

И Безумная Математильда начала рассчитываться с кэбменом, отдавать подробнейшие и пространнейшие распоряжения относительно багажа, не обращая никакого внимания на мольбы несчастной племянницы записать и остальную часть расходов на завтрак.

— Милая моя, да тебе и впрямь следует развивать свою память, чтобы она стала более емкой, — таково было единственное изречение, которым тетушка соблаговолила утешить свою племянницу. — Неужели скрижали твоей памяти недостаточно широки для того, чтобы удержать расходы на один-единственный завтрак?

— Конечно, недостаточно! И вполовину не так широки, как надо бы! — послышался возмущенный ответ.

Слова достаточно точно подходили по смыслу, но произнесший их голос не был голосом Клары, и тетя и племянница в удивлении обернулись, чтобы посмотреть, кто это так внезапно вмешался в их разговор.

Толстенькая старушка суетилась у дверцы, помогая кэбмену извлечь из кабины свою точную копию. Решить, кто из двух старушек полнее и добродушнее, было не так-то просто.

---

* 1 фунт стерлингов содержит 20 шиллингов, а 1 шиллинг — 12 пенсов. Во времена Кэрролла в обращении находились следующие серебряные монеты: крона (достоинством в 5 шиллингов), полкроны (2½ шиллинга), двойной флорин (4 шиллинга), флорин (2 шиллинга) и монеты достоинством в 6 шиллингов, 3 шиллинга и ¼ шиллинга. Кроме того, имели хождение 3 медные монеты достоинством в 1 пенс, ½ пенса и ¼ пенса (последняя монета называлась фартингом). (***Прим. перев***).

— Говорю вам: эта дверь и вполовину не так широка, как должна была бы быть! — повторила старушка, когда ее сестра была, наконец, извлечена из кэба (совместными усилиями кэбмена и старушки пленница вылетела из места своего невольного заточения, как пробка из духового ружья).

— Не правда ли, девочка? — обратилась она за поддержкой к Кларе, тщетно пытаясь грозно нахмуриться.

— Некоторые пассажиры слишком широки для кэба, — проворчал возница.

— Не выводите меня из себя! — воскликнула старушка, охваченная тем, что у нее должно было означать приступ ярости. — Еще одно слово, и я привлеку вас к ответственности за нарушение *Habeas Corpus**.

Кэбмен прикоснулся к шляпе и отошел, улыбаясь.

— Чтобы поставить на место зарвавшегося грубияна, моя милая, лучше всего сослаться на какой-нибудь пусть даже плохонький закон, — доверительно заметила старушка, обращаясь к Кларе. — Ты видела, как он сразу струсил, когда я упомянула *Habeas Corpus*? Хотя я и не имею ни малейшего понятия о том, что это значит, но звучит все равно здóрово, правда?

— Мне как-то не по себе от этого *Habeas Corpus*, — несколько туманно возразила Клара.

— Еще бы, — воскликнула старушка. — Нас и вывели из себя, не так ли, сестрица?

— Никогда в жизни я не была так выведена из себя! — подтвердила, лучезарно улыбаясь, более толстая сестра.

Только теперь Клара узнала в сестрах старушек, с которыми познакомилась в картинной галерее. Отведя в сторону тетушку, она торопливо прошептала ей на ухо:

— Я впервые встретилась с ними в Королевской академии изобразительных искусств. Они были так любезны со мной, а сегодня они завтракали за соседним столом. Они пытались помочь мне найти картину, которую я искала. По-моему, они очень симпатичные старушки!

— Так ты говоришь, что это твои друзья? — переспросила Безумная Математильда. — Ну что ж, они производят

* Начальные слова закона о неприкосновенности личности, принятого английским парламентом в 1679 г.

приятное впечатление. Можешь побеседовать с ними, пока я куплю билеты. Постарайся только следить за своей речью и располагать мысли в более строгом хронологическом порядке!

Вскоре все четверо — две сестры и тетушка с племянницей — сидели на одной скамейке и в ожидании поезда вели непринужденный разговор, словно уже давно знали друг друга.

— Какое замечательное совпадение! — воскликнула та из сестер, которая была поменьше ростом и поразговорчивей (именно ее познания в юриспруденции обратили в бегство кэбмена). — Мы не только ждем один и тот же поезд на одном и том же вокзале — что достаточно любопытно само по себе, — но и ждем в один и тот же день и в один и тот же час! Это меня особенно поражает!

Она взглянула на свою более толстую и более молчаливую сестру, основное предназначение которой в жизни состояло в том, чтобы поддерживать единство семейного мнения. Сестра тотчас же смиренно откликнулась:

— Меня тоже, сестрица!

— Эти совпадения не являются независимыми, — начала было Безумная Математильда, но Клара рискнула прервать ее.

— Здесь не трясет, — умоляюще сказала она. — Может быть, мы запишем расходы?

Таблички слоновой кости снова были извлечены на свет.

— Итак, что мы заказывали? — спросила тетушка.

— Стакан лимонада, один бутерброд, один бисквит. Ой, что же мне делать? — с отчаяньем в голосе вдруг воскликнула Клара.

— У тебя что, зубы разболелись? — спокойно спросила тетушка, записывая названное Кларой меню. Обе сестры тотчас же открыли сумочки и достали два различных болеутоляющих лекарства (на каждой коробочке было написано: «Самое лучшее»).

— Нет! — удрученно сказала Клара. — Просто я не могу вспомнить, сколько истратила на завтрак.

— Постарайся вычислить, если не помнишь, — предложила тетушка. — Что ты заказывала на завтрак вчера, тебе

Говорю вам: эта дверь и вполовину не так широка, как должна была бы быть!

известно. А вот запись о том, что ты заказывала позавчера — в первый день, когда мы отправились завтракать в кондитерскую: один стакан лимонада, четыре бутерброда, десять бисквитов. Итого 1 шиллинг и 5 пенсов.

С этими словами тетушка передала свои таблички Кларе. Сквозь слезы Клара даже не сразу разглядела, что держит таблички вверх ногами.

Две сестры с глубочайшим интересом прислушивались к разговору между тетей и племянницей. Видя, что Клара очень расстроена, меньшая из сестер ласково положила ей руку на плечо.

— Знаешь, деточка, — сказала она успокаивающе, — мы с сестрой находимся в таком же затруднительном положении! Ну просто точь-в-точь таком же! Правда, сестрица?

— В совершенно и абсолютно та...— начала более полная старушка, но масштабы задуманного ею предложения были слишком грандиозны, а ее сестре поменьше ростом некогда было ждать, пока она кончит.

— Дело в том, деточка, — продолжала меньшая из сестер, — что мы сегодня завтракали в той же кондитерской, где завтракали вы с тетей, и заказали два стакана лимонада, три бутерброда и пять бисквитов, но ни одна из нас не имеет ни малейшего понятия о том, сколько мы заплатили. Правда, сестрица?

— Совершенно и абсолютно...— пробормотала вторая старушка, очевидно полагая, что она отстала ровно на одно предложение, и считая необходимым выполнить уже взятое обязательство, прежде чем брать на себя новое. Но тут первая старушка вновь прервала ее, и вторая старушка, потерпев в разговоре сокрушительное фиаско, смолкла.

— Ты сосчитаешь для нас, сколько мы заплатили? — попросила Клару первая старушка.

— Надеюсь, ты не забыла арифметику? — с легким беспокойством спросила тетушка. Клара рассеянно перебирала таблички, тщетно пытаясь собраться с мыслями. В голове у нее было пусто. Лицо быстро утрачивало осмысленное выражение.

Наступило угрюмое молчание.

Узелок VIII

DE REBUS OMNIBUS*

Этот поросенок
отправился на рынок.
Этот поросенок
остался дома.

— По повелению Ее Блистательства, — сказал губернатор, провожая путешественников с последней Высочайшей аудиенции, — я буду иметь несравненное удовольствие проводить вас до наружных ворот Военного плаца, на котором должна произойти агония прощания, — разумеется, если у нас хватит сил вынести столь сильное потрясение! Грурмстиптсы отправляются от ворот каждые четверть часа в обе стороны.

— Простите, не могли бы вы повторить это слово, — попросил Норман. — Грурм... Как дальше?

— Грурмстиптсы, — повторил губернатор. — У себя в Англии вы называете их омнибусами. Они отправляются в обе стороны, и на любом из них вы сможете добраться до порта.

Пожилой путешественник с облегчением вздохнул. Четырехчасовая придворная церемония утомила его: он все время боялся допустить какую-нибудь оплошность, которая привела бы в действие десять тысяч бамбуковых палок (сверх обычной нормы).

Через минуту наши знакомые вышли на огромный четырехугольный плац, вымощенный мрамором. Четыре свинарника, возведенные по углам, радовали глаз изяществом пропорций. Солдаты, державшие на руках поросят,

* В данном случае «О загадке омнибуса», буквально — «О всеобщей загадке» (*лат.*).

маршировали по плацу во всех направлениях. В центре плаца стоял офицер огромного роста и громовым голосом, перекрывавшим поросячий визг, отдавал приказания.

— Верховный Главнокомандующий! — поспешно прошептал губернатор своим спутникам, которые последовали его примеру и простерлись ниц перед великим человеком. Главнокомандующий мрачно поклонился в ответ. С головы до ног он был расшит золотыми галунами. На лице отважного воина застыло выражение глубокой скорби. Под мышкой Главнокомандующий держал черного поросенка. Отдавая ежеминутно приказания солдатам, доблестный защитник Кговджни все же ухитрился выкроить время, чтобы в отменных выражениях попрощаться с отъезжающими гостями.

— Прощай, о старый чужестранец!.. Этих трех отнести в южный угол!.. Прощай и ты, юный чужестранец!.. Этого жирного поросенка положить поверх других поросят в западном свинарнике!.. Пусть ваши тени никогда не станут короче!.. Горе мне! Опять не так! Очистить все свинарники и начать все сначала!

И закаленный в боях воин, опершись на меч, смахнул слезу.

— Он в глубоком отчаянии, — пояснил губернатор, когда наши путешественники покинули плац. — Ее Блистательство повелела ему разместить в четырех угловых свинарниках 24 поросенка так, чтобы при обходе плаца число поросят в очередном свинарнике неизменно оказывалось ближе к 10, чем число поросят в предыдущем.

— Считает ли Ее Блистательство, что 10 ближе к 10, чем 9? — спросил Норман.

— О да! — подтвердил губернатор. — Ее Блистательство не только считает, что 10 ближе к 10, чем 9, но и выражает уверенность в том, что 10 ближе к 10, чем 11.

— Тогда, я полагаю, поросят можно разместить требуемым образом, — сказал Норман.

Губернатор покачал головой.

— В течение вот уже четырех месяцев Главнокомандующий только тем и занимается, что пробует расположить поросят в свинарниках то так, то этак, но — увы! — все его попытки ни к чему не привели, — заметил губернатор. — Судите сами, осталась ли еще хоть какая-то надежда. Ее Блистательство уже повелела отпустить сверх обычной нормы десять тысяч...

— Поросята, по-видимому, отнюдь не в восторге от этих бесконечных переездов, — поспешно перебил губернатора отец Нормана. Он не любил разговоров о бамбуковых палках.

— Но ведь они переезжают лишь временно, — возразил губернатор. — В большинстве случаев их тотчас же отправляют обратно, стало быть, им нужно просто запастись терпением и не обращать внимания на переезды. Кроме того, переезд вряд ли причиняет им беспокойство: все тщательно предусмотрено и производится под личным наблюдением Верховного Главнокомандующего.

— Ее Блистательство, разумеется, намеревалась обойти все четыре свинарника лишь один раз? — спросил Норман.

— Увы, нет! — вздохнул провожатый. — Она намеревалась обойти их несколько раз, круг за кругом. Круг за кругом. Это собственные слова Ее Блистательства. Но... о горе, о агония расставания! Вот наружные ворота. Здесь мы должны проститься.

Губернатор зарыдал, с чувством пожал руки отцу и сыну и проворно зашагал назад.

— Мог бы хоть раз оглянуться на прощанье! — сказал отец с сожалением.

— И не начинать свистеть с того самого момента, как он повернулся к нам спиной, — сурово произнес сын. — Но посмотри! Эти две штуки... как их... кажется, отправляются!

К сожалению, в омнибусе, отправляющемся прямо в порт, свободных мест уже не было.

— Неважно! — беззаботно воскликнул Норман. — Пойдем по дороге, а следующий омнибус подберет нас.

Некоторое время отец и сын шли молча, размышляя над проблемой, возникшей перед Главнокомандующим вооруженных сил Кговджни. Вдали показался шедший навстречу им омнибус. Когда он поравнялся с путешественниками, отец достал свои карманные часы.

— Прошло двенадцать с половиной минут с того момента, как мы отошли от наружных ворот дворца, — рассеянно заметил он. Внезапно скучное выражение его лица сменилось радостной улыбкой: отца озарила идея!

— Сын мой! — вскричал он, с такой силой кладя свою руку на плечо Норману, что на какое-то мгновенье вывел центр тяжести последнего за точку опоры.

Застигнутый врасплох молодой человек чуть было не полетел вверх тормашками с явным намерением оставить позади значительную часть расстилавшейся перед ним дороги, но вовремя спохватился и не без изящества принял обычное положение.

— Задача о прецессии и нутации, — заметил он тоном, в котором сыновья почтительность едва скрывала тень беспокойства.

— Что случилось? — поспешно добавил он, опасаясь, что отец его заболел. — Не угодно ли глоточек бренди?

— Когда следующий омнибус подберет нас? Когда? Когда? — продолжал кричать отец, приходя во все большее и большее возбуждение.

Норман помрачнел.

— Минутку, — сказал он, — дай подумать.

Наступила тишина — тишина, нарушаемая лишь доносившимся издали визгом несчастных поросят, которых временно переносили из одного свинарника в другой под личным наблюдением Верховного Главнокомандующего.

Узелок IX

ЗМЕЯ С УГЛАМИ

Все вода, вода повсюду,
А попить — и капли нет.

— Еще один камешек, и оно утонет!

— Хотел бы я знать, что это ты делаешь с ведерками?

Действующие лица: Хью и Ламберт. Место действия: пляж в Литтл-Мендип. Время действия: 1 час 30 минут пополудни. Хью пускал маленькое ведерко плавать внутри другого, несколько бóльших размеров, пытаясь определить, сколько камешков можно положить в первое ведерко, прежде чем оно потонет. Ламберт лежал на спине и предавался безделью.

Несколько минут Хью сидел молча, что-то обдумывая, а затем, вскочив на ноги, закричал:

— Ламберт, что я тебе сейчас покажу! Ни за что не догадаешься!

— Если оно живое, покрытое слизью и с ножками, то и смотреть не стану, — ответствовал Ламберт.

— Да нет, не то! Помнишь, что Бальбус говорил нам сегодня утром? Тело, полностью погруженное в воду, вытесняет количество жидкости, равное его объему. Верно? — спросил Хью.

— Что-то в этом роде Бальбус действительно говорил, — неуверенно согласился Ламберт.

— А теперь взгляни сюда! Видишь: маленькое ведерко почти полностью погружено в воду. Следовательно, оно должно вытеснять количество воды, равное своему объему. Я беру и — раз, два, три! — вынимаю его из большого ведерка.

С этими словами Хью вынул маленькое ведерко, а большое передал Ламберту.

— Видишь? Воды в большом ведерке чуть-чуть на донышке. Неужели ты думаешь, что это ничтожное количество воды равно по объему маленькому ведерку?

— Оно должно быть равно, — сказал Ламберт.

— А вот и нет! — торжествующе воскликнул Хью и перелил воду из большого ведерка в маленькое. — Видишь: ведерко наполнилось меньше чем наполовину.

— Это его дело, как оно наполнилось, — сказал Ламберт. — Раз Бальбус сказал, что объемы равны, значит, они равны. Можешь не сомневаться.

— А я не верю, что это так, — возразил Хью.

— Можешь не верить, — ответил Ламберт. — Кроме того, пора обедать. Пошли.

Бальбус уже ждал их, чтобы вместе идти к столу. Хью сразу же поведал ему о возникшем затруднении.

— Сначала поешь, потом поговорим, — сказал Бальбус, ловко отрезав и подложив на тарелку Хью кусок жаркого. — Ты ведь знаешь старую поговорку: «Сначала — баранина, потом — механика».

Такой поговорки мальчики не знали, однако в существовании ее ничуть не усомнились, как не сомневались ни в какой информации, когда-либо исходившей от столь непререкаемого авторитета, как их наставник. Обед прошел в полной тишине. Когда со стола было убрано, Хью достал чернила, ручки и бумагу, и Бальбус приступил к формулировке задачи, которую он приготовил для дневных занятий.

— У одного моего друга был сад с чудесными цветами — прекраснейший сад, хотя и небольших размеров...

— Каких именно? — спросил Хью.

— Именно это вы и должны будете определить, — весело ответил Бальбус. — Скажу лишь, что сад имел форму вытянутого прямоугольника — был ровно на пол-ярда* больше в длину, чем в ширину, и что посыпанная гравием дорожка шириной в 1 ярд, начинаясь в одном углу, шла вокруг всего сада.

---

* Ярд – единица длины в английской системе мер, равная 3 футам, или 91,44 *см*. (*Прим. изд.*)

— Дорожка была замкнутой? — поинтересовался Хью.

— Нет, молодой человек, концы дорожки не смыкались. Каждый раз, когда дорожке уже, казалось, не оставалось ничего другого, как сомкнуться, она поворачивала и вновь шла вокруг всего сада рядом со своим первым отрезком, потом снова поворачивала и снова шла вокруг всего сада вдоль предыдущего отрезка и так до тех пор, пока в саду не осталось ни клочка земли.

— Дорожка извивалась, как змея с углами? — спросил Ламберт.

— Совершенно так же! И если пройти вдоль всей дорожки до последнего дюйма, держась ее середины, то длина пройденного пути окажется равной $2^1/_8$ мили. А пока вы найдете длину и ширину сада, я поразмыслю над тем, почему объем воды в большом ведерке оказался меньше объема маленького ведерка.

— Вы, кажется, сказали, что у вашего друга в саду росли чудеснейшие цветы? — спросил Хью, когда Бальбус уже выходил из комнаты.

— Сказал, — ответил Бальбус.

— А где же они росли? — удивился Хью, но Бальбус сделал вид, что не расслышал вопроса. Предоставив мальчикам ломать голову над заданной задачей, он уединился у себя в комнате, чтобы поразмыслить над обнаруженным Хью механическим парадоксом.

— Для простоты предположим, — бормотал он, расхаживая взад и вперед по комнате и глубоко засунув руки в карманы, — что у нас имеется цилиндрический стеклянный сосуд, на поверхности которого через каждый дюйм нанесены метки, и мы заполним его водой до десятой метки. Условимся считать, что каждое деление на стенке сосуда соответствует одной пинте* воды. Возьмем теперь сплошной цилиндр, каждый дюйм которого имеет объем в полпинты воды, и погрузим его на 4 дюйма в воду, налитую в первый цилиндр. Дно сплошного цилиндра достигнет отметки 6 дюймов на стенке первого цилиндра. При этом сплошной цилиндр вытеснит 2 пинты воды. Что станет с этими двумя пинтами?

* Пинта – единица объема в английской системе мер; 1 пинта = = 0,56826125 *л*. (*Прим. изд.*)

Если бы сплошной цилиндр не выступал над поверхностью воды, то эти две пинты преспокойно расположились бы сверху, заполнив наружный цилиндр до отметки 12 дюймов. Но, к несчастью, сплошной цилиндр выступает над поверхностью воды, занимая половину объема, который мог бы вместиться между отметками 10 и 12 дюймов. Следовательно, оставшаяся часть пространства может вместить лишь одну пинту. А что же станется со второй? Если бы сплошной цилиндр не выступал над поверхностью воды, эта пинта преспокойно могла бы разместиться сверху, заполнив наружный цилиндр до отметки 13 дюймов. Но, к сожалению... О, тень великого Ньютона! — воскликнул Бальбус в ужасе. — Что же сможет остановить непрестанно поднимающийся уровень воды?

И тут его осенила блестящая идея.

— Напишу-ка я обо всем этом небольшой трактат.

Трактат, написанный Бальбусом

Известно, что тело, погруженное в жидкость, вытесняет часть жидкости, объем которой равен объему тела. При этом уровень жидкости поднимается ровно настолько, насколько он поднялся бы, если бы к уже имеющейся жидкости добавили количество жидкости, объем которого равен объему погруженного тела. Ларднер обнаружил, что частичное погружение тела сопровождается точно такими же явлениями: количество вытесненной жидкости в этом случае равно по объему погруженной части тела, а уровень жидкости поднимается ровно настолько, насколько он поднялся бы от прибавления объема жидкости, равного объему погруженной части тела.

Предположим, что на поверхности жидкости каким-либо образом удерживается частично погруженное в нее тело. Поскольку часть жидкости вытесняется, уровень жидкости поднимается. Вследствие повышения уровня какая-то новая часть тела оказывается погруженной, вытесняет новую порцию жидкости, что приводит

Человек этот стои́т прочно и неподвижно...

к новому повышению уровня. В свою очередь новое повышение уровня вызывает дальнейшее погружение тела, что приводит к вытеснению еще одной порции жидкости и т. д. Ясно, что весь этот процесс должен продолжаться до тех пор, пока в жидкость не погрузится все тело, после чего начнет погружаться то, что его удерживало (будучи соединенным с телом, это нечто может рассматриваться, по крайней мере при решении интересующей нас задачи, как часть тела). Так, если вы возьмете шест длиной в 6 футов, опустите его конец в бушующие воды и подождете достаточно долго, вы в конце концов погрузитесь в воду. Вопрос о том, откуда берется вода (относящийся к высшим разделам математики и потому не рассматриваемый в данной работе), не имеет отношения к морю. Представим себе человека, стоящего во время прилива у самой воды с шестом в руках, который частично погружен в море. Человек этот сто́ит прочно и неподвижно, и мы все знаем, что он непременно утонет. Люди, каждый день во множестве погибающие таким образом, дабы удостовериться в философской истине, люди, чьи тела безрассудные волны мрачно выносят на наши неблагодарные берега, имеют большее право называться мучениками науки, чем Галилей или Кеплер. Если воспользоваться проникновенным высказыванием Кошута, именно этих людей следовало бы назвать безвестными полубогами нашего девятнадцатого века.

— Должно быть, в мои рассуждения где-то вкралась ошибка, — сонно пробормотал Бальбус, вытягивая свои длинные ноги на софе. — Надо проверить их еще раз.

Очевидно, для того чтобы лучше сосредоточиться, он закрыл глаза. В течение ближайшего часа или около того его медленное мерное дыхание свидетельствовало о глубоком внимании, с которым он изучал новый и несколько парадоксальный взгляд на интересовавший его предмет.

Узелок X

ПИРОЖКИ

Пирожки, пирожки,
горячие пирожки!

— Ох как грустно! — воскликнула Клара, и глаза ее наполнились слезами.

— Грустно, но с точки зрения арифметики весьма любопытно, — последовал менее романтический ответ ее тетушки. — Одни из них потеряли на службе родине руку, другие — ногу, третьи — ухо, четвертые — глаз...

— А некоторые лишились всего сразу! — задумчиво прошептала Клара, когда они с тетушкой проходили мимо длинных рядов нежившихся на солнце загорелых и обветренных ветеранов. — Тетя, вы видите того старика с красным лицом? Он что-то чертит на песке своей деревянной ногой, а остальные внимательно его слушают. Должно быть, он чертит схему какого-нибудь сражения...

— Сражения при Трафальгаре! Ясно, как дважды два — четыре! — тотчас же перебила Клару тетушка.

— Вряд ли, — робко возразила племянница. — Если бы он принимал участие в сражении при Трафальгаре, его бы давно уже не было в живых.

— Не было бы в живых! — презрительно повторила тетушка. — Да он живее нас с тобой, вместе взятых! По-твоему, рисовать на песке да еще деревянной ногой не значит быть в живых? Хотела бы я знать, что тогда по-твоему означает быть в живых!

Клара растерянно промолчала: она никогда не была особенно сильна в логике.

— Вернемся-ка мы лучше к арифметике, — продолжала Безумная Математильда. Эксцентричная старая леди не упускала случая дать своей племяннице какую-нибудь задачку. — Как ты думаешь, какая часть ветеранов потеряла и ногу, и руку, и глаз, и ухо?

— Я... я не знаю. Откуда я могу знать? — с трудом произнесла оробевшая девочка: кому-кому, а ей хорошо было известно, что последует дальше.

— Разумеется, без необходимых исходных данных ты ничего узнать не сможешь, но я сейчас дам тебе...

— Дайте ей пирожок, миссис! Только у нас в Челси умеют печь такие пирожки. Девочки их очень любят, — раздался вдруг приятный голос, и разносчик пирожков, проворно приподняв край белоснежной салфетки, показал аккуратно уложенные в корзине пирожки, выглядевшие весьма соблазнительно. Пирожки были квадратной формы, щедро смазаны яйцом, румяны и блестели на солнце.

— Нет, сэр! Я не имею обыкновения давать своей племяннице такую гадость. Убирайтесь прочь! — и старая леди угрожающе взмахнула зонтиком. На добродушного разносчика эта гневная тирада, казалось, не произвела ни малейшего впечатления. Прикрыв пирожки салфеткой, он удалился, напевая.

— Пирожки эти — просто яд! — сказала старая леди. — То ли дело арифметика. Уж она-то всегда полезна!

Клара, вздохнув, проводила голодным взглядом быстро уменьшавшуюся вдали корзину с пирожками и стала послушно внимать своей неутомимой тетушке, которая тут же начала излагать условие задачи, производя все вспомогательные подсчеты на пальцах.

— Скажем, так: 70% ветеранов лишились гла́за, 75 — у́ха, 80 — руки́ и 85 — ноги́. Просто великолепно! Спрашивается, чему равна наименьшая часть ветеранов, лишившихся одновременно гла́за, у́ха, руки́ и ноги́?

Больше ни тетушка, ни племянница не произнесли ни слова, если не считать восклицания «Пирожки!», вырвавшегося у Клары, когда разносчик со своей корзиной скрылся за углом. В полном молчании обе леди — старая и молодая — дошли до старинного особняка, в котором остановился вместе с тремя сыновьями и их почтенным наставником отец Клары.

Бальбус, Хью и Ламберт опередили тетушку и племянницу лишь на несколько минут. Они вернулись с прогулки, во время которой Хью умудрился задать головоломку, не только безнадежно испортившую настроение Ламберту, но и поставившую в тупик самого Бальбуса.

— Если я не ошибаюсь, четверг наступает после среды ровно в полночь? — начал Хью.

— Иногда наступает, — осторожно заметил Бальбус.

— Не иногда, а всегда! — решительно заявил Ламберт.

— Иногда, — мягко настаивал Бальбус. — В шести случаях из семи в полночь наступает не четверг, а какой-нибудь другой день недели.

— Я хочу лишь сказать, — пояснил Хью, — что когда вслед за средой наступает четверг, то происходит это в полночь и только в полночь.

— Безусловно, — подтвердил Бальбус. Ламберт счел за лучшее промолчать.

— Прекрасно. Предположим теперь, что здесь, в Челси, сейчас как раз полночь. Тогда к западу от Челси (например, в Ирландии или в Америке), где полночь еще не наступила, на календаре среда, а к востоку от Челси (например, в Германии или в России), где полночь наступила раньше, — четверг. Я рассуждаю правильно?

— Да, вполне, — вновь подтвердил Бальбус, и даже Ламберт соизволил кивнуть головой.

— Но если в Челси сейчас полночь, то к востоку и к западу от него смена дат происходить, казалось бы, не может. Тем не менее на земном шаре непременно найдется место, по одну сторону от которого будет среда, а по другую — четверг. И что хуже всего: люди, живущие в этом месте, считают дни недели в обратном порядке! Да и как им считать иначе, если к востоку от того места на календарях стоит «среда», а к западу — «четверг». Ведь это означает, что после четверга наступает среда!

— А я знаю! А я знаю! — закричал Ламберт. — Эту головоломку мне задавали и раньше, только формулировали ее иначе. — Моряки уходят в кругосветное плавание, огибают земной шар с востока на запад, возвращаются домой и тут обнаруживают, что у них пропал один день. Им кажется, что они вернулись домой в среду, а все вокруг говорят, что это четверг, и все потому, что у тех, кто оставался дома, полночь наступала на один раз больше, чем у тех, кто плавал. А если бы моряки плыли с запада на восток, то один день у них оказался бы лишним.

— Все это мне известно, — возразил Хью в ответ на несколько сумбурное объяснение Ламберта, — но к делу не относится. Ведь сутки для корабля имеют неодинаковую продолжительность. Когда корабль плывет в одну сторону, сутки на нем продолжаются более 24 часов, когда же он плывет в другую сторону — менее 24 часов. Отсюда и происходит путаница с днями недели: ведь у людей, живущих на суше на одном и том же месте, сутки длятся ровно 24 часа.

— Мне кажется, — задумчиво проговорил Бальбус, — что место, о котором говорит Хью, на земном шаре действительно существует, хотя мне и не приходилось слышать о нем раньше. Людям, живущим там, должно быть странным видеть вчерашний день к востоку от себя, а завтрашний — к западу. Особенно трудно понять, что происходит, когда наступает полночь: ведь в этом странном месте на смену «сегодня» приходит не «завтра», а «вчера». Тут есть над чем задуматься!

О том, как подействовал этот обмен мнениями на наших друзей, мы уже говорили: входя в дом, Бальбус усиленно размышлял над головоломкой, а Ламберт был погружен в мрачное раздумье.

— Добро пожаловать, м'м, милости просим! — приветствовал тетушку представительный дворецкий. (Заметим кстати, что произнести подряд три «м», не вставив между ними ни единого гласного, может далеко не всякий. Это под силу лишь дворецкому, искушенному во всех тонкостях своей профессии.) — Вас уже ожидают в библиотеке. Полный аншлаг!

— Как он смеет говорить о твоем отце «дуршлаг», да к тому же «полный»! — негодующе прошипела на ухо племяннице Безумная Математильда, когда они пересекали просторную гостиную.

— Да нет же, тетя, он просто хотел сказать, что все в сборе, — едва успела прошептать в ответ Клара, как дворецкий ввел их в библиотеку.

При виде открывшегося перед ней зрелища Клара лишилась дара речи. За столом в торжественном молчании сидели пять человек: отец, Хью, Ламберт, Норман и Бальбус.

Во главе стола восседал отец. Не нарушая тишины, он молча указал Кларе и Безумной Математильде на пустые кресла справа и слева от него. Стол был сервирован, как для банкета, с той лишь разницей, что вместо привычных приборов на нем были разложены письменные принадлежности. По всему было видно, что дворецкий вложил много выдумки в эту злую шутку. Вместо тарелок перед каждым из присутствовавших был положен лист бумаги, вместо ложки и вилки слева и справа от каждого прибора лежали ручка с пером и карандаш. Роль ломтика хлеба исполняла перочистка, а там, где обычно стои́т бокал для вина, красовалась чернильница. Украшением стола — главным блюдом — служила обтянутая зеленым сукном шкатулка. Когда пожилой джентльмен, сидевший во главе стола, встряхивал ее, а делал он это беспрерывно, она издавала мелодичный звон, словно внутри ее находилось бесчисленное множество золотых гиней.

— Сестра! Дочь моя! Сыновья! И... и Бальбус! — начал пожилой джентльмен столь неуверенно, что Бальбус счел необходимым заявить о полном согласии со сказанным, а Хью — забарабанить кулаками по столу. Столь лестные знаки внимания окончательно сбили с толку неопытного оратора.

— Сестра! — начал он снова, затем помолчал и, встряхнув шкатулку, продолжил с лихорадочной поспешностью: — Сегодня я... некоторым образом... э... собрал вас... э... по поводу знаменательного события... В этом году... одному из моих сыновей исполняется...— тут он снова умолк в полном замешательстве, ибо достиг середины речи намного раньше намеченного времени, но возвращаться было уже поздно.

— Совершенно верно! — воскликнул Бальбус.

— Вот именно! — ответствовал пожилой джентльмен, который понемногу начал приходить в себя. — Мысль о том, чтобы ежегодно дарить каждому из сыновей столько гиней, сколько ему лет исполняется в текущем году, пришла мне в голову в весьма знаменательное время. Надеюсь, мой друг Бальбус поправит меня («Еще как поправит! Ремнем!» — прошептал Хью, но его никто не услышал, кроме Ламберта, который нахмурился и укоризненно покачал головой), если я ошибаюсь. Так вот, эта мысль, повторяю, пришла мне в голову именно в тот год, когда, как сообщил мне Бальбус, сумма возрастов двух из вас была равна возрасту третьего. По этому случаю, как вы все, конечно, помните, я произнес речь...

Бальбус счел, что настал подходящий момент для того, чтобы вставить несколько слов, и начал:

— Это была самая...

— Произнес речь, — уколол его предостерегающим взглядом пожилой джентльмен. — Несколько лет назад Бальбус сообщил мне...

— Совершенно верно, — подтвердил Бальбус.

— Вот именно, — ответил благодарный оратор и продолжал: — Я говорю, сообщил мне о другом не менее знаменательном событии: сумма возрастов двух из вас в тот год оказалась вдвое больше возраста третьего. По этому поводу я тоже произнес речь, — разумеется, не ту, что в первом случае.

В этом году — как утверждает Бальбус — мы присутствуем при третьем знаменательном событии, и я... (тут Безумная Математильда многозначительно посмотрела на часы) ...я тороплюсь изо всех сил, — воскликнул пожилой джентльмен, демонстрируя ясность духа и полное самообладание, — и перехожу к существу дела. Число лет, протекших со времени первого знаменательного события, составляет ровно две третьих от числа гиней, которые я вам тогда подарил. Мальчики! Пользуясь этими данными, вычислите свой возраст, и вы получите от меня ежегодный подарок!

— Но мы и так знаем свой возраст! — воскликнул Хью.

— Замолчите, сэр! — вне себя от негодования вскричал отец, выпрямляясь во весь рост (составлявший ровно пять футов и пять дюймов). — Я сказал, что при решении вы имеете право пользоваться только данными задачи, а не гадать о том, сколько кому лет.

Он захлопнул шкатулку и удалился, ступая неверными шагами и сгибаясь под ее тяжестью.

— Ты также получишь от меня такой же подарок, как мальчики, если сумеешь решить задачу, — шепнула Безумная Математильда племяннице и вышла вслед за братом.

Перо бессильно передать, с какой торжественностью встали из-за стола брат и сестра. Мог ли, спрашиваем мы, отец хитро улыбнуться в такую минуту при виде своих удрученных сыновей? Могла ли, спрашиваем мы, тетушка лукаво подмигнуть своей приунывшей племяннице? Были ли похожи на сдавленный смех те звуки, которые раздались, когда Бальбус, выйдя из комнаты вслед за хозяином дома и его сестрой, прикрывал за собой дверь? Нет, нет и нет! И все же дворецкий рассказал потом кухарке, что... Впрочем, не станем же мы повторять всякие сплетни.

Ночные тени сжалились над молчаливой мольбой несчастных и «не сомкнулись над ними» (поскольку дворецкий внес лампу). «Во тьме ночной» (те же услужливые тени, но в концентрированном виде) «было слышно порой, как где-то залает собака» (на заднем дворе всю ночь напролет пес выл на луну). Но ни «когда утро настало», ни позже сестра и трое братьев «не воспрянули духом» — они так и не смогли обрести былое душевное спокойствие, навсегда покинувшее их после того, как все эти задачи обрушились на них и увлекли на путь нескончаемых страданий.

— Вряд ли честно, — пробормотал Хью, — задавать нам такие головоломные задачи.

— Нечего сказать — честно! — с горечью подхватила Клара.

Всем моим читателям я могу лишь повторить слова Клары и честно признаться:

— Больше мне сказать нечего! До свиданья!

Ответы

*— Узелок, — сказала Алиса. —
Позвольте, я помогу вам
развязать его!*

УЗЕЛОК I

Задача. Два путешественника выходят из гостиницы в 3 часа дня и возвращаются в нее в 9 часов вечера. Маршрут их проходит то по ровному месту, то в гору, то под гору. По ровному месту путешественники идут со скоростью 4 мили в час, в гору — со скоростью 3 мили в час и под гору — со скоростью 6 миль в час. Найти расстояние, пройденное путешественниками с момента выхода из гостиницы до момента возвращения, а также (с точностью до получаса) момент восхождения на вершину горы.

Ответ: 24 мили; 6 часов 30 минут вечера.

Решение. Одну милю пути по ровной местности путешественники проходят за $1/4$ часа. Поднимаясь в гору, они преодолевают одну милю за $1/4$ часа, а спускаясь с горы, — за $1/6$ часа. Следовательно, на то, чтобы пройти туда и обратно одну милю, независимо от того, пролегает ли их путь по долине или по склону горы, у наших путешественников всегда уходит $1/2$ часа. Таким образом, за 6 часов (с 3 до 9) они прошли 12 миль в одну сторону и 12 миль — в другую. Если бы 12 миль почти целиком проходили по местности без подъемов и спусков, то у наших путешественников на преодоление их ушло немногим больше 3 часов. Если путь в 12 миль почти все время шел в гору, на него ушло бы немногим меньше 4 часов. Следовательно, $3\,1/2$ часа — это время, которое не больше чем на $1/2$ часа отличается от времени, прошедшего с момента выхода из гостиницы до подъема на вершину. Поскольку путешественники вышли из гостиницы в 3 часа дня, они достигли вершины горы в 6 часов 30 минут (время дано с точностью до получаса).

Я получил много ответов на эту задачу, среди них особенно любопытны одно дополнение и одно решение в стихах.

В присланном дополнении я изменил одно или два слова. Надеюсь, автор его не будет за это в обиде, поскольку в исправленных местах он допустил некоторые неточности.

> — Постой, постой! — сказал молодой рыцарь, и слабый отблеск вдохновенья озарил черты его лица, с которого начало исчезать выражение глубокого отчаяния. — Когда мы взошли на вершину горы и тем самым достойно увенчали тяготы нашего пути, как мне кажется, роли не играет. В самом деле, за то время, пока мы взбираемся на одну милю по склону горы и проходим ее на обратном пути, мы по ровному месту могли бы пройти вдвое больше. Отсюда неопровержимо следует, что за битых 6 часов, которые мы находимся в пути, нигде не останавливаясь, чтобы перевести дух или полюбоваться природой, будет пройдено 24 мили.
>
> — Великолепно! — воскликнул пожилой рыцарь. — Двенадцать миль туда и двенадцать миль обратно. На вершину горы мы взобрались где-то между 6 и 7 часами. А теперь послушай, что говорят старшие! Сколько раз по 5 минут прошло с 6 часов до того момента, когда мы достигли вершины горы, столько миль мы взбирались по ее мрачному склону!
>
> Молодой рыцарь застонал и со всех ног бросился бежать в гостиницу.

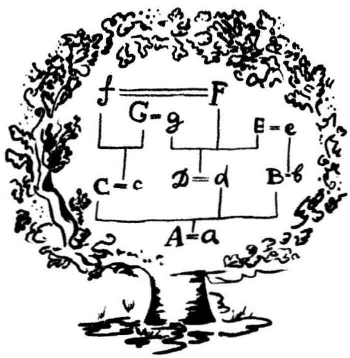
Читательницы, скрывшиеся за псевдонимами *Простушка Сюзанна* и *Добрая примета,* изложили ход своих рассуждений в следующих стихах.

Лишь три пробило на часах,
Пустились в путь тернистый
Те, кто не ведал слова «страх», —
Два рыцаря-туриста.
Один был молод и силен,
Другой был стар и сед.
Один был прям, другой — согбен
Под грузом лат и лет.
Сначала по равнине шли,
Шагая в ногу дружно,
Но сколько миль они прошли —
Об этом знать не нужно.
Известна лишь скорость,
С которой брели
Они по равнинной
Дороге в пыли:
Хоть миля длинна,
Каждый час проходили
Герои-туристы
По дважды две мили.
Но то по равнине.
По склонам же горным
Туристы взбирались
Не столь уж проворно,
Но все же неплохо:
Три мили за час
Они проходили в горах
Всякий раз.
И вдвое быстрее
Спускались с горы,
Желая успеть
До вечерней зари.
В три вышли,
А в девять вернулись назад,
Преодолев
Сто препон и преград.
Длину маршрута даже дети
Сумеют вычислить, заметив,
Что милю любую всего в полчаса
Туристы успеют пройти до конца,
Затем повернуть и дойти до начала.
Хоть сказано этим, казалось бы, мало,
Но можно задачу решенной считать
И наш узелок до конца развязать.

УЗЕЛОК II

Задача 1. Званый обед у губернатора. Губернатор Кговджни хочет пригласить гостей на обед в узком кругу и приглашает шурина своего отца, тестя своего брата, брата своего тестя и отца своего шурина. Найти число гостей на званом обеде.

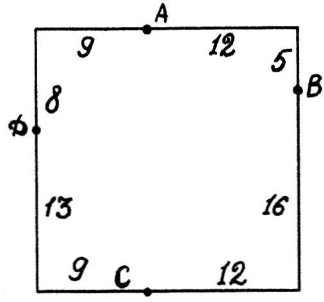
Ответ. Один гость.



На этом генеалогическом древе мужчины обозначены заглавными, а женщины — строчными буквами. Губернатор обозначен буквой *E*, а его гость — буквой *C*.

Задача 2. Комнаты с удобствами. В каждой стороне квадрата находится по 20 дверей, делящих ее на 21 равную часть. Все двери перенумерованы по кругу, начиная с некоторой вершины квадрата. Какая из четырех дверей — № 9, 25, 52 или 73 — обладает тем свойством, что сумма расстояний от нее до трех остальных дверей наименьшая?

Ответ. Дверь № 9.



Обозначим девятую дверь через A, двадцать пятую — через B, пятьдесят вторую — через C и семьдесят третью — через D.

Тогда

$$AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$
$$AC = 21$$
$$AD = \sqrt{9^2 + 8^2} = \sqrt{145} = 12, \ldots$$

(12, ... означает «между 12 и 13»);

$$BC = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20$$
$$BD = \sqrt{3^2 + 21^2} = \sqrt{450} = 21, \ldots$$
$$CD = \sqrt{9^2 + 13^2} = \sqrt{250} = 15, \ldots$$

Таким образом, сумма расстояний до 3 других дверей для A заключена между 46 и 47, для B — между 54 и 55, для C — между 56 и 57 и для D — между 48 и 51. (Почему не «между 48 и 49»? Постарайтесь разобраться сами.) Следовательно, сумма расстояний минимальна для двери A.

В задаче 2 я молчаливо предполагал, что нумерация домов начинается с одной из вершин квадрата. Подавляющее большинство читателей в своих решениях исходили из того же предположения. Однако *один* из читателей в своем письме сообщает иное: «Если предположить, что в середине каждой из сторон квадрата на площадь выходит некая улица (такое предположение *не* противоречит условиям задачи!), то вполне допустимо, что нумерация домов на площади начинается где-то на улицах и лишь продолжается на площади». Возможно, бывает и так, но не естественнее ли встать на точку зрения, разделяемую автором и большинством читателей?

УЗЕЛОК III

Задача 1. Два путешественника садятся на поезда, идущие в противоположных направлениях по одному и тому же замкнутому маршруту и отправляющиеся в одно и то же время. Поезда отходят от станции отправления каждые 15 минут в обоих направлениях. Поезд, идущий на восток, возвращается через 3 часа, поезд, идущий на запад, — через 2. Сколько поездов встретит каждый из путешественников в пути (поезда, которые отбывают со станции отправления и прибывают на нее одновременно с поездом, которым следует путешественник, встречными не считаются)?

Задача 2. Путешественники следуют по тому же маршруту, что и раньше, но начинают считать встречные поезда лишь с момента встречи их поездов. Сколько поездов встретится каждому путешественнику?

Ответы. 1) 19 поездов. 2) Путешественник, следующий восточным поездом, встретит 12 поездов, его напарник — 8.

Решение. С момента отправления до возвращения в исходный пункт у одних поездов проходит 180 минут, у других — 120. Возьмем наименьшее общее кратное 180 и 120 (оно равно 360) и разделим весь маршрут на 360 частей (будем называть каждую часть просто единицей). Тогда поезда, идущие в одном направлении, будут следовать со скоростью 2 единицы в минуту, а интервал между ними будет составлять 30 единиц. Поезда, идущие в другом направлении, будут следовать со скоростью 3 единицы в минуту, а интервал между ними будет равен 45 единицам. В момент отправления восточного поезда расстояние между ним и первым встречным поездом составляет 45 единиц. Восточный поезд проходит $^2/_5$ этого расстояния, встречный — остальные $^3/_5$, после чего они встречаются в 18 единицах от станции отправления. Все последующие поезда восточный поезд встречает на расстоянии 18 единиц от места предыдущей встречи. В момент отправления западного поезда первый встречный поезд находится от него на расстоянии 30 единиц. Западный поезд проходит $^3/_5$ этого расстояния, встречный — остальные $^2/_5$, после чего они встречаются на расстоянии 18 единиц от станции отправления. Каждая последующая встреча западного поезда с восточными происходит на расстоянии 18 единиц от места предыдущей встречи. Следовательно, если вдоль всего замкнутого маршрута мы расставим 19 столбов, разделив его тем самым на 20 частей по 18 единиц в каждой, то поезда будут встречаться у каждого столба. При этом в первом случае (задача 1) каждый путешественник, вернувшись на станцию отправления, проедет мимо 19 столбов, а значит, встретит 19 поездов. Во втором случае (задача 2) путешественник, едущий на восток, начинает считать поезда лишь после того, как он проедет $2/5$ всего пути, то есть доедет до восьмого столба, и таким образом успевает сосчитать лишь 12 столбов (или, что то же самое, поездов). Его конкурент сосчитает лишь 8. Встреча их поездов происходит в конце $2/5$ от 3 часов, или $3/5$ от 2 часов, то есть спустя 72 минуты после отправления.

УЗЕЛОК IV

Задача. Имеются 5 мешков. Первый и пятый мешки вместе весят 12 фунтов, второй и третий — $13\frac{1}{2}$ фунтов, третий и четвертый — $11\frac{1}{2}$ фунтов, четвертый и пятый — 8 фунтов, первый, третий и пятый — 16 фунтов. Требуется узнать, сколько весит каждый мешок.

Ответ. $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, 7, $4\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{2}$ фунта.

Решение. Сумма результатов всех пяти взвешиваний равна 61 фунту, при этом вес третьего мешка входит в 61 фунт трижды, а вес всех остальных мешков лишь дважды. Вычитая из 61 фунта удвоенную сумму результатов первого и четвертого взвешиваний, получаем, что утроенный вес третьего мешка равен 21 фунту. Следовательно, третий мешок весит 7 фунтов. Из результатов второго и третьего взвешиваний (с учетом того, что вес третьего мешка нам уже известен) находим вес второго и четвертого мешков: второй мешок весит $6\frac{1}{2}$ фунтов, четвертый — $4\frac{1}{2}$. Наконец, из результатов первого и четвертого взвешиваний получаем для первого и пятого мешков $5\frac{1}{2}$ фунтов и $3\frac{1}{2}$ фунта.

Задача об определении веса мешков, как ясно с первого взгляда любому алгебраисту, сводится к решению системы линейных уравнений. Однако она без труда решается и с помощью одной лишь арифметики, и поэтому использование более сложных методов я считаю дурным тоном.

УЗЕЛОК V

Задача. Требуется поставить 3 крестика двум или трем картинам, 2 крестика четырем или пяти картинам и один крестик — девяти или десяти картинам, отмечая одновременно тремя ноликами 1 или 2 картины, двумя ноликами

3 или 4 картины и одним ноликом 8 или 9 картин так, чтобы число картин, получивших оценки, было наименьшим из возможных, а отмеченные картины получили как можно большее число оценок.

Ответ. 10 картин получают 29 оценок, распределенных следующим образом:

× × × × × × × × × ○
× × × × ×   ○ ○ ○ ○
× × ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Решение. Расставив все крестики и заключив в скобки те из них, которые по условиям задачи необязательны, мы получим 10 картин, оценки которых распределены так:

× × × × × × × × × (×)
× × × × (×)
× × (×)

Расставив все нули (но не от начала к концу, как крестики, а в обратном направлении — от конца к началу), мы получим 9 картин с оценками, распределенными так:

(○) ○
(○) ○ ○ ○
(○) ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Единственное, что еще необходимо сделать после этого, — вдвинуть оба клина как можно плотнее друг в друга, чтобы число отмеченных картин было минимальным. Если та или иная необязательная оценка мешает нам загонять клин в клин, мы ее стираем, если же не мешает — оставляем в целости и сохранности. В первом и третьем рядах оказывается по 10 обязательных оценок, а в середине — лишь 7. Следовательно, необходимо стереть все необязательные оценки в первом и третьем рядах обоих клиньев и оставить все необязательные оценки, стоящие в середине.

УЗЕЛОК VI

Задача 1. В начале года у каждого из братьев *A* и *B* было по 1000 фунтов стерлингов. Через год братья в своем письме губернатору Кговджни уведомляют его, что в день отправления письма они, как никогда, близки к 60 000 фунтов стерлингов. Каким образом им это удалось?

Решение. В день отправления письма братья впервые решили прогуляться близ Английского банка, в подвалах которого хранилась указанная сумма.

На эту задачу было получено 2 в высшей степени замечательных ответа. Читатель, у которого *Сумбур в голове* (это его псевдоним), заставил братьев занять 0 пенсов и украсть 0 пенсов, а затем приписать обе «добытые» цифры справа от 1000 фунтов. В результате столь невинной операции у братьев оказывается 100 000 фунтов, что значительно превышает те 60 000, о которых идет речь в задаче. *At Spes Infracta** нашел еще более остроумное решение: пользуясь взятым взаймы нулем, этот читатель превращает 1, с которой начинается 1000 фунтов одного брата, в 9, прибавляет «добычу» к исходной 1000 фунтов другого брата, получая в результате 10 000 фунтов. С помощью «украденного» нуля *At Spes Infracta* превращает 1 в 6 и тем самым достигает требуемой в условии задачи суммы в 60 000 фунтов.

Задача 2. Лоло (*Л*) успевает связать 5 шарфов за то время, пока Мими (*М*) вяжет 2. Зузу (*З*) успевает связать 4 шарфа за то время, пока Лоло вяжет 3. Пять шарфов Зузу весят столько же, сколько один шарф Лоло. Пять шарфов Мими весят столько же, сколько 3 шарфа Зузу. Один шарф Мими греет так же, как 4 шарфа Зузу, а один шарф Лоло — как 3 шарфа Мими. Какая из трех вязальщиц лучше, если быстроту вязки, легкость шарфа и его способность сохранять тепло оценивать одинаково?

Ответ. Места на конкурсе вязальщиц шарфов распределились следующим образом: 1) *М*, 2) *Л*, 3) *З*.

Решение. При прочих равных условиях *Л* превосходит *М* по быстроте вязки в $5/2$ раза, а *З* превосходит *Л* в $4/3$ раза. Чтобы найти 3 числа, удовлетворяющих этим условиям, проще всего принять скорость, с которой вяжет *Л* (ибо *Л* непосредственно связана и с *М*, и с *З*), за 1, а скорость, с которой вяжут ее конкурентки, выразить в виде дробей. В этих единицах качество работы *Л*, *М* и *З* оценивается числами 1, $2/5$ и $4/3$.

* Надежде вопреки (*лат.*).

Для оценки *легкости* шарфа следует иметь в виду, что, чем больше вес, тем менее искусной следует считать вязальщицу. Следовательно, качество шарфов *З* относится к качеству шарфов *Л*, как 5 к 1. Таким образом, при оценке легкости шарфов *Л*, *М* и *З* получают оценки $^1/_5$, $^5/_3$ и 1. Аналогичным образом оценивается и умение *Л*, *М* и *З* вязать теплые шарфы: 3, 1 и $^1/_4$. Чтобы получить окончательный результат, необходимо *перемножить* три оценки, полученные *Л*, и проделать ту же операцию с оценками *М* и *З*. В итоге мы получим: $1 \times {}^1/_5 \times 3$, $^2/_5 \times {}^5/_3 \times 1$, $^4/_3 \times 1 \times {}^1/_4$, то есть $^3/_5$, $^2/_3$ и $^1/_3$. Умножив все три числа на 15 (отчего *отношение* любых из них не изменится), мы получим оценки 9, 10 и 5. Следовательно, лучшей вязальщицей необходимо признать *М*, затем идет *Л* и, наконец, *З*.

Почему оценки претенденток надлежит именно перемножать, а не складывать, подробно объясняется во многих учебниках, и я не буду занимать здесь место повторением избитых истин. Однако *проиллюстрировать* необходимость умножения можно очень легко на примере длины, ширины и глубины. Представим себе, что два землекопа *А* и *В* пожелали узнать, кто из них более искусен в своем ремесле. Оба копают ямы в форме прямоугольного параллелепипеда. Количество проделанной работы измеряется числом кубических футов* вынутой земли. Предположим, что *А* выкопал яму длиной 10, шириной 10 и глубиной 2 фута, а *В* выкопал яму длиной 6, шириной 5 и глубиной 10 футов. Объем первой ямы равен 200, а второй — 300 кубическим футам. Следовательно, *В* справляется со своим делом в $^3/_2$ раза лучше, чем *А*. А теперь попробуйте оценить по десятибальной системе длину, ширину и глубину каждой из ям, а затем сложить оценки. Что у вас получится?

Некоторые письма, полученные в связи с узелком VI, навели меня на мысль о желательности дополнительных объяснений.

Первая задача, разумеется, не более чем шутка, основанная на игре слов. Я считал, что подобная вольность вполне

* Фут – единица длины в английской системе мер, равная 12 дюймам, или 0,3048 *м*. (*Прим. изд.*)

допустима в серии задач, призванной не столько поучать, сколько развлекать. Однако двое моих корреспондентов, полагающих, что Аполлон должен всегда быть начеку и не ослаблять тетивы своего разящего лука, обрушились на задачку о 60 000 фунтов стерлингов с уничтожающей критикой. Кстати сказать, ни один из них не смог решить задачу, но такова уж человеческая натура.

Как-то раз (для желающих я могу назвать точную дату: 31 сентября) я встретил своего старого друга Брауна и загадал ему только что услышанную загадку. Мощным усилием своего колоссального интеллекта Браун разгадал ее. «Правильно!» — сказал я, услышав ответ. «Очень хорошая загадка, — похвалил меня Браун, — не всякий ее разгадает. Нет, что и говорить, загадка — просто прелесть!» Не успел я распрощаться с Брауном, как через несколько шагов налетел на Смита и задал ему ту же загадку. Тот на минуту наморщил лоб, а потом махнул рукой. Дрожащим голосом я робко пролепетал ответ. «Дурацкая загадка, сэр! — недовольно проворчал Смит на прощание. — Глупее не придумаешь! Удивляюсь, как вы решаетесь повторять подобную чепуху!» Тем не менее есть все основания считать, что Смит по уму не только не уступает Брауну, но и, быть может, даже превосходит его!

Вторая задача представляет собой пример на обычное тройное правило. Сущность его сводится к следующему. Результат зависит от нескольких изменяющихся параметров, которые связаны между собой так, что если бы все параметры, кроме одного, имели постоянные значения, то результат изменялся бы пропорционально параметру, оставшемуся свободным; поскольку же варьируются все параметры, то результат изменяется пропорционально их произведению. Так, например, объем ямы, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда при постоянной длине и ширине, изменяется пропорционально глубине ямы, а при переменной длине, ширине и глубине — пропорционально произведению всех трех измерений.

При иной связи результата с исходными данными тройное правило перестает действовать, и задача нередко становится чрезвычайно сложной.

Приведем несколько примеров. Предположим, что на конкурсном экзамене по французскому, немецкому и итальянскому языку за право получать некую стипендию борются два кандидата: A и B.

а. Согласно правилам, которыми руководствуется экзаменационная комиссия, результат экзамена зависит от *относительного* уровня знаний кандидатов по каждому языку. Это означает, что независимо от того, получит ли A по французскому языку 1, а B — 2 или же A получит 100, а B — 200, результат экзамена будет одним и тем же. Кроме того, правилами предусмотрено, что если по двум языкам оба кандидата получат одинаковые оценки, то их общие оценки должны находиться одна к другой в таком же отношении, в каком находятся оценки, полученные кандидатами по третьему языку. При этих условиях исход экзамена удовлетворяет тройному правилу. Дабы получить окончательное представление о шансах кандидатов на стипендию, мы должны перемножить 3 оценки, полученные A, и сравнить произведение с произведением очков, набранных B. Обратите внимание на то, что если A получит хоть один «нуль», то его итоговой оценкой также будет «нуль», даже если по двум остальным языкам он получит наивысший балл, а B выйдет в победители, набрав всего лишь по одному очку за каждый язык. Разумеется, A оказывается в очень невыгодном положении, хотя решение комиссии будет абсолютно правильным с точки зрения существующих правил.

б. Результат экзамена, как и прежде, зависит от *относительного* уровня знаний кандидатов, но оценку по французскому языку по новым правилам при выведении общей оценки надлежит учитывать с вдвое большим весом, нежели оценки по немецкому или итальянскому языку. Поскольку такая постановка задачи необычна, я сформулирую ее еще раз несколько подробнее. Итоговая оценка по новым правилам должна быть ближе к отношению оценок за французский язык, чем в случае *а*, причем ближе настолько, что для получения итоговой оценки, выведенной комиссией в случае *а*, каждый из сомножителей, отвечающих относительному уровню знаний кандидатов по немецкому и итальянскому языкам, надлежит возвести в квадрат. Например, если относительный уровень знания кандидатами французского языка оценен в $^9/_{10}$, а двух других языков — в $^4/_9$ и $^1/_9$, то итоговая оценка, вычисляемая по методу *а*, была бы равна $^2/_{45}$, а по методу *б* — $^1/_5$, то есть ближе к $^9/_{10}$, чем $^2/_{45}$. При вычислении итоговой оценки по методу *б* я извлек из $^4/_9$ и $^1/_9$ квадратный корень, то есть «учел» их с вдвое меньшим весом по сравнению с оценкой за французский язык.

в. Результат экзамена должен зависеть не от *относительного*, а от *абсолютного* уровня знаний каждого кандидата и оцениваться по *сумме* баллов, полученных по всем трем языкам. Здесь мы должны остановиться и уточнить правила, задав целый ряд вопросов.

1) Что принять за единицу измерения («эталон») знаний по каждому языку?

2) Должны ли все эти единицы иметь одинаковое или различное значение при выводе общей оценки за экзамен?

Обычно за «эталон» знаний принимается умение правильно ответить на все вопросы экзаменационного билета. Если эту высшую оценку принять, например, за 100, то все остальные оценки будут колебаться между 0 и 100. В предположении, что все единицы равны, мы найдем общую оценку за экзамен для *A* и *B*, сложив баллы, полученные каждым из кандидатов за французский, немецкий и итальянский языки.

г. Условия те же, что и в случае *в*, но с одним изменением: оценку по французскому языку при выводе окончательной оценки надлежит засчитывать с удвоенным весом. В этом случае, прежде чем подсчитывать сумму баллов, необходимо сначала еще умножить оценку по французскому языку на 2.

д. Оценку по французскому языку при выводе итоговой оценки надлежит брать таким образом, чтобы при одинаковых оценках по немецкому и итальянскому языкам итоговая оценка совпадала с оценкой по французскому (таким образом, нуль по французскому означает, что получивший его кандидат окончательно выбывает из игры). При различных оценках по немецкому и итальянскому языкам они обе должны влиять на окончательный итог экзамена лишь в сумме, каждая — в той же мере, что и другая. В этом случае я бы сложил оценки, полученные, например, *A* по немецкому и итальянскому языкам, а сумму умножил на оценку по французскому языку.

Вряд ли нужно продолжать примеры: данную задачу, очевидно, можно формулировать по-разному и каждый тип условий требует своего метода решения. Задача из узелка VI по замыслу автора должна была принадлежать к классу *а*. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, я специально вложил в уста губернатора следующие слова: «Обычно участницы конкурса расходились лишь по одному из трех пунктов. Например, в прошлом году Фифи и Гого в течение испытательного срока — недели — успели связать одинаковое количество одинаково легких шарфов, но шарфы, связанные Фифи, оказались вдвое теплее, чем шарфы, связанные Гого, поэтому Фифи и сочли вдвое лучшей вязальщицей, чем Гого».

УЗЕЛОК VII

Задача. Стакан лимонада, 3 бутерброда и 7 бисквитов стóят 1 шиллинг 2 пенса. Стакан лимонада, 4 бутерброда и 10 бисквитов стóят 1 шиллинг 5 пенсов. Найти, сколько стóят: 1) стакан лимонада, бутерброд и бисквит; 2) 2 стакана лимонада, 3 бутерброда и 5 бисквитов.

Ответ. 1) 8 пенсов; 2) 1 шиллинг 7 пенсов.

Решение. Эту задачу лучше всего решать алгебраически. Пусть x — стоимость (в пенсах) одного стакана лимонада, y — стоимость бутерброда и z — бисквита. Тогда по условию задачи $x + 3y + 7z = 14$ и $x + 4y + 10z = 17$. Требуется вычислить, чему равны $x + y + z$ и $2x + 3y + 5z$. Располагая лишь *двумя* уравнениями, мы не можем найти значения *каждого* из *трех* неизвестных *в отдельности*, но вычислить значения некоторых *комбинаций* неизвестных в наших силах. Известно также, что с помощью двух данных уравнений мы можем исключить два из трех неизвестных, после чего искомые выражения будут зависеть лишь от одного неизвестного. Значения искомых выражений могут быть вычислены лишь в том случае, если единственное неизвестное, оставшееся неисключенным, само собой уничтожается. В противном случае задача не имеет решения.

Исключим лимонад и бутерброды и сведем все к бисквитам — ситуации еще более удручающей, нежели та, о которой говорится в проникновенных строках:

«Ну, скажи на милость,
Кто бы думать мог?
Все вдруг превратилось
В яблочный пирог».

Для этого вычтем первое уравнение из второго, исключив тем самым лимонад, и получим $y + 3z = 3$. Подставляя $y = 3 - 3z$ в первое уравнение, найдем: $x - 2z = 5$, или, что то же, $x = 5 + 2z$. Если теперь мы подставим выражения для x и y в те выражения, значения которых нам необходимо вычислить, то первое из них превратится в $(5 + 2z) + (3 - 3z) + z = 8$, а второе — в $2(5 + 2z) + 3(3 - 3z) + 5z = 19$. Следовательно, стоимость первого набора составляет 8 пенсов, а второго — 1 шиллинг 7 пенсов.

Изложенный нами метод *универсален*. Иными словами, он абсолютно во всех случаях позволяет либо получить ответ, либо доказать, что решения не существует. Разумеется, следовать ему отнюдь не обязательно. Искомые величины можно, например, найти, комбинируя величины, значения которых известны. Такой способ решения требует лишь остроумия и известного «везения». Я не могу оценивать его столь же высоко, как и универсальный метод, поскольку он не гарантирует от неудач даже в том случае, когда решение существует, и оказывается совершенно бесполезным, когда требуется доказать, что задача не имеет решения. Кроме того, составление нужных комбинаций, даже если оно и приводит к успеху, может оказаться довольно утомительным занятием.

Здесь мне хочется остановиться подробно на разборе одного из присланных решений, принадлежащего читателю, скрывающемуся под псевдонимом *Бальбус*, ибо речь пойдет о вещах, достаточно важных для всех читателей.

Бальбус решил считать стоимость любого завтрака окончательно установленной лишь в том случае, если «два разных предположения приводят к одинаковой сумме» (израсходованной на завтрак). Приняв два предположения — согласно первому бутерброд ничего не сто́ит, согласно второму — бисквит выдается в виде бесплатного приложения к лимонаду и бутербродам (если бы хоть одно из этих предположений соответствовало действительности, в кондитерскую нельзя было бы пробиться!), *Бальбус* получает, что завтрак Клары стоил 8 пенсов, а завтрак старушек — 19 пенсов независимо от принятой гипотезы. Отсюда в соответствии со своим правилом *Бальбус заключил*, что «обнаруженное совпадение доказывает правильность полученных результатов». Я опровергну правило *Бальбуса*, указав всего лишь *один* пример, в котором это правило нарушается. Для того чтобы опровергнуть любое утверждение, одного противоречащего примера вполне достаточно. Если воспользоваться специальной логической терминологией, то можно сказать, что для опровержения общеутвердительного суждения достаточно опровергнуть противоположное ему частноотрицательное суждение. (Здесь необходимо остановиться и совершить небольшой экскурс в логику вообще и в женскую логику в частности. Общеутвердительное суждение «Все говорят, что такой-то и такой-то — мокрая курица» мгновенно опровергается доказательством истинности частноотрицательного суждения «Питер говорит, что такой-то и такой-то — гусь лапчатый», эквивалентного суждению «Питер *не* говорит, что такой-то и такой-то — мокрая курица». Общеотрицательное суждение «Никто не бывает у нее» великолепно парируется частноутвердительным суждением «Я был у нее вчера». Короче говоря, любое из двух противоположных суждений опровергает другое. Отсюда мораль: поскольку доказать частное суждение гораздо легче, чем общее, в разговоре с дамой разумно ограничивать собственные высказывания частными суждениями, предоставляя своей собеседнице доказывать, если это в ее силах, *общие* суждения. Тем самым вы всегда сможете обеспечить себе *логическую* победу. Особенно рассчитывать на то, что вам *практически* удастся одержать верх над вашей собеседницей, не следует, поскольку она всегда может отступить, сделав обескураживающее заявление: «*Это* к делу не относится!» Ни одному мужчине еще не удавалось удовлетворительным образом парировать подобный ход. А теперь вернемся к *Бальбусу*.) Частноотрицательное суждение, на котором я хочу проверить его правило, можно сформулировать так. Предположим, что два счета за завтрак гласят: «2 булочки с изюмом, 1 пирожок, 2 сосиски и бутылка лимонада. Итого: 1 шиллинг 9 пенсов» и «1 булочка с изюмом, 2 пирожка, 1 сосиска и бутылка лимонада. Итого: 1 шиллинг 4 пенса». Предположим также, что Клара заказала себе на завтрак 3 булочки с изюмом, 1 пирожок, 1 сосиску и 2 бутылки лимонада, а две сестры-старушки довольствовались 8 булочками с изюмом, 4 пирожками, 2 сосисками и 6 бутылками лимонада (бедняжки, как им захотелось пить!). Если *Бальбус* любезно согласится испытать свое правило «двух разных предположений» на этом «суждении» и предположит сначала, что булочка с изюмом стóит 1 пенс, а пирожок 2 пенса, а затем — что булочка с изюмом и пирожок стóят по 3 пенса, то за первый счет ему придется «уплатить» 1 шиллинг 9 пенсов, а за второй — 4 шиллинга 10 пенсов независимо от предположения. Полное согласие результатов, скажет он, «доказывает их правильность». Между тем булочка с изюмом в действительности стоила 2 пенса, пирожок 3 пенса, сосиска 6 пенсов, а бутылка лимонада — 2 пенса. Поэтому третий завтрак обошелся Кларе в 1 шиллинг 7 пенсов, а ее умирающим от жажды приятельницам в 4 шиллинга 4 пенса!

Я хотел бы процитировать и кратко прокомментировать еще одно замечание *Бальбуса*, ибо, как мне кажется, некоторые читатели могли бы извлечь из него мораль. Вот что он пишет: «В сущности безразлично, будем ли мы при решении данной задачи пользоваться словами и называть это арифметикой или прибегнем к буквам и символам и назовем его алгеброй». Оба определения (и арифметики, и алгебры) мне представляются неверными. Арифметический метод решения задачи является чисто синтетическим: от одного известного факта он переходит к другому до тех пор, пока желанная цель не будет достигнута. Алгебраический же метод решения по своей природе аналитический: он начинает с конца и, обозначив цель поиска условным символом, устремляется к началу и влечет за собой свою жертву-инкогнито до тех пор, пока не выходит на ослепительный свет известных фактов, срывает с нее маску и говорит: «Я тебя знаю!»

Чтобы не быть голословным, приведу пример. Представьте себе, что к вам в дом забрался грабитель и, похитив какие-то вещи, скрылся. Вы зовете на помощь дежурного полисмена. Отчет о дальнейших событиях в устах полисмена мог бы звучать, например, так:

— Да, мэм, я видел, как какой-то верзила перелез через забор вашего сада, но от меня это было далековато и сразу схватить я его не мог. А что, думаю, если я побегу ему наперерез? И точно, только я выбежал на соседнюю улицу, гляжу — из-за угла на всех парах катит Билл Сайкс собственной персоной. Я его цап за воротник:

— Ага, голубчик, попался! Тебя-то мне и надо!

Больше я ему ничего не сказал. А он мне в ответ:

— Ладно, — говорит, — фараон, твоя взяла. Веди в участок, ничего не попишешь!

Так действовал бы *арифметический* полисмен. А вот другой отчет о тех же событиях:

— Вижу, кто-то бежит. Что делать? Пуститься за ним вслед? Не имеет смысла: больно далеко он ушел, все равно не догонишь. Вот я и решил осмотреть сад. Гляжу — на клумбе, где этот парень помял все ваши цветы, следы остались: такие, знаете, ясные, четкие отпечатки его ножищ. Пригляделся повнимательнее — так и есть: левый каблук везде отпечатался глубже, чем правый. Тут я и говорю себе: «Парень, что их оставил, должно быть, высокого роста и хром на левую ногу». Провел я рукой по стене в том месте, где он перелез, и вижу: на руке сажа. Я и подумал: «Где я мог видеть здоровенного парня, трубочиста, да к тому же хромого на левую ногу?» И тут меня как громом ударило: «Да ведь это же Билл Сайкс!»

Так действовал бы *алгебраический* полисмен — на мой взгляд, более интеллектуальный тип полисмена, чем первый.

УЗЕЛОК VIII

Задача 1. Расположить 24 поросенка в четырех свинарниках так, чтобы при обходе свинарников по кругу число поросят в очередном свинарнике неизменно оказывалось ближе к 10, чем число поросят в предыдущем свинарнике.

Ответ. В первом свинарнике должно находится 8 поросят, во втором — 10 и в четвертом — 6. Ничего не должно находиться в третьем свинарнике: он должен быть пуст. Совершаем контрольный обход свинарников. Десять ближе к 10, чем 8. Что может быть ближе к 10, чем 10? Ничто! Но именно «ничто» и находится в третьем свинарнике. Шесть ближе к 10, чем 0 (арифметический псевдоним «ничего»), 8 ближе к 10, чем 6. Условия задачи выполнены.

Задача 2. Из некоторого пункта в обе стороны каждые 15 минут отправляются омнибусы. Пешеход выходит из того же пункта в момент отправления омнибусов и встречает первый омнибус через $12\frac{1}{2}$, минут. Когда пешехода нагонит первый омнибус?

Ответ. Через $6\frac{1}{4}$ минуты после встречи с первым омбусом.

Решние. Пусть a — расстояние, проходимое омнибусом за 15 минут, а x — расстояние от пункта отправления до того места, где омнибус нагонит пешехода. Поскольку встреченный пешеходом омнибус прибывает в пункт отправления через $2\frac{1}{2}$ минуты после встречи, он за эти $2\frac{1}{2}$ минуты проезжает расстояние, на преодоление которого у пешехода ушло $12\frac{1}{2}$ минут. Следовательно, скорость омнибуса в 5 раз превышает скорость пешехода. Омнибус, который нагонит пешехода в тот момент, когда пешеход пускается в путь, находится на расстояния a от пункта отправления. Следовательно, к тому моменту, когда путешественник проходит расстояние x, омнибус успевает проехать расстояние $a + x$. Учитывая соотношение скоростей, получаем $a + x = 5x$, то есть $4x = a$, откуда $x = a/4$. Это расстояние омнибус преодолевает за $^{15}/_{4}$ минуты. Следовательно, пешеход проходит его за $5 \times {}^{15}/_{4}$ минут. Таким образом, омнибус нагоняет пешехода через $18\frac{3}{4}$ минуты после того, как тот отправится в путь, или (что то же) через $6\frac{1}{4}$ минуты после встречи с первым омнибусом.

УЗЕЛОК IX

Задача 1. В учебниках физики говорится, что тело, полностью погруженное в жидкость, вытесняет столько жидкости, что ее объем равен объему самого тела. Справедливо ли это утверждение для маленького ведерка, плавающего в другом ведерке несколько бо́льших размеров?

Решение. Говоря о теле, «вытесняющем жидкость», авторы учебников имеют в виду, что оно «занимает пространство, которое можно заполнить жидкостью, не вызывая каких-либо изменений в окружающей среде». Если уничтожить ту часть меньшего ведерка, которая выступает над поверхностью воды в большем ведерке, а вместо остальной части ведерка взять столько воды, сколько оно вмещает, то уровень воды в большем ведерке в полном соответствии с учебниками физики останется неизменным.

Задача 2. Из рассуждений, приводимых в трактате *Бальбуса*, следует, что при погружении тела в сосуд с водой уровень воды последовательно поднимается на 2 дюйма, 1 дюйм, $1/2$ дюйма и т. д. *Бальбус* считает ряд, образуемый приращениями уровня, бесконечным и заключает отсюда, что уровень воды должен неограниченно возрастать. Правильно ли такое заключение?

Решение. Нет, неправильно. Сумма всех приращений уровня никогда не достигает 4 дюймов, ибо, сколько бы членов ряда мы ни взяли, от отметки 4 дюйма нас будет отделять расстояние, равное последнему взятому члену ряда.

Задача 3. Сад имеет форму «вытянутого» прямоугольника, длина которого на $1/2$ ярда больше ширины. Дорожка шириной в 1 ярд и длиной в 3630 ярдов, усыпанная гравием и закрученная спиралью, заполняет весь сад. Найти длину и ширину сада.

Ответ. Ширина сада 60 ярдов, длина — $60\,1/2$ ярдов.

Решение. Разделим дорожку на прямые участки и «повороты» — квадраты размером 1×1 ярд в «углах». Число полных ярдов и их долей, пройденных вдоль прямых участков дорожки, очевидно, равно площади прямых участков дорожки, измеряемой в квадратных ярдах. Расстояние, проходимое на каждом «повороте», равно 1 ярду, а площадь «уголка» также равна 1 ярду (но уже квадратному). Таким образом, площадь сада равна 3630 квадратным ярдам. Если x — ширина сада в ярдах, то $x\,(x + 1/2) = 3630$. Решая это квадратное уравнение, получаем $x = 60$. Следовательно, ширина сада равна 60 ярдам, а его длина — $60\,1/2$ ярдам.

УЗЕЛОК X

Задача 1. 70 процентов инвалидов потеряли глаз, 75 процентов — ухо, 80 процентов — руку и 85 процентов — ногу. Каков процент ветеранов, лишившихся одновременно гла́за, у́ха, руки́ и ноги́?

Ответ. 10 процентов.

Решение. Предположим, что инвалидов ровно 100 человек. Общее число всех увечий равно 70 + 75 + 80 + 85 = 310. Следовательно, на каждого инвалида приходится по 3 увечья, а десятерым особенно не повезло: они получили все 4 увечья. Таким образом, наименьшая доля инвалидов, лишившихся гла́за, у́ха, руки́ и ноги́, равна 10 процентам.

Задача 2. Решение географической задачи — о смене дат — я вынужден отложить на неопределенный срок отчасти потому, что я не знаю, как ее решить*.

Задача 3. Некогда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего сына. Через несколько лет сумма возрастов стала равна удвоенному возрасту третьего сына. Когда число лет, прошедших с тех пор, когда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего, составит $^2/_3$ от суммы возрастов всех трех сыновей, третьему сыну исполнится 21 год. Сколько лет будет двум другим сыновьям?

Ответ. 15 и 18 лет.

Решение. Обозначим возраст сыновей в момент первого знаменательного события x, y и $(x + y)$. Заметим, что если $a + b = 2c$, то $(a - n) + (b - n) = 2\,(c - n)$ при любых n. Следовательно, последнее соотношение, коль скоро оно выполняется *хоть когда-нибудь*, выполняется *всегда*, в частности в момент первого знаменательного события. Но по условию задачи сумма возрастов двух сыновей (x и y) в этот момент равна возрасту третьего и, следовательно, не может быть вдвое больше возраста третьего. Следовательно, условие должно выполняться для суммы возраста третьего сына $(x + y)$ и возраста какого-нибудь из первых двух сыновей, то есть x или y (какого именно, безразлично).

* См. также «Трудность первую». (*Прим. перев.*) (Стр. 211 в книге «Символическая логика, или Безупречная бессмыслица», М. : Лектор, 2017. — *Прим. изд.*)

Предположим, например, что $(x + y) + x = 2y$, тогда $y = 2x$. Таким образом, в момент первого знаменательного события возрасты сыновей образуют арифметическую прогрессию x, $2x$, $3x$, а число лет, прошедших с тех пор, составляет $2/3$ от $6x$, то есть равно $4x$. Итак, в момент, когда отец произносил свою последнюю торжественную речь, его сыновьям исполнилось по $5x$, $6x$ и $7x$ лет. Возраст любого из сыновей выражается целым числом. Об этом свидетельствует то место в речи отца, где говорится: «В этом году одному из моих сыновей исполняется...» Поэтому $7x = 21$, $x = 3$, $5x = 15$ и $6x = 18$.

Один из читателей обратил внимание на допущенную мной неточность. Я упустил из виду, что, хотя одному из сыновей «в этом году исполняется» 21 год, ниоткуда не следует, что он *уже* достиг этого возраста, ибо его день рождения мог прийтись и на более позднюю дату. В день же, когда все герои собрались у отца, сыну *могло* быть еще 20 лет. Отсюда возникает второе решение: 20 лет, 24 года и 28 лет.

Пользуясь случаем, я благодарю всех, кто выразил свое сожаление по поводу того, что узелок X был не только десятым, но и последним, или просьбу пересмотреть мои намерения и продолжить публикацию «Узелков». Я чрезвычайно признателен за любезные слова и добрые пожелания, но все же считаю наиболее разумным закончить на этом то, что в лучшем случае можно было бы назвать не слишком удачной попыткой. «Размеренный ритм античной песни» недосягаем для меня. Куклы, послушно игравшие в «Узелках» отведенные им роли, не заняли (в отличие от тех, кому я адресую эти строки) заметного места в моей жизни и не стали (подобно Алисе и Морскому Деликатесу*) живыми существами вне ее. И все же, дорогой читатель, сейчас, когда я откладываю перо и возвращаюсь к тихой жизни, мне приятно думать, что меня провожает ваша незримая улыбка, и ощущать дружеские пожатие вашей бесплотной руки. Итак, доброй ночи! Грусть расставания настолько приятна, что я буду повторять до самого утра: «Доброй ночи!»

---

* Так назван один из персонажей «Алисы в Стране Чудес» — Mock Turtle в пересказе Бориса Заходера. — «Пионер», № 12 (1971) — 3 (1972). (*Прим. перев.*)

Полуночные задачи, придуманные в часы бессонницы

Я рискну на миг обратиться к читателю в более серьезном тоне и указать на муки разума, гораздо более тягостные, чем просто назойливые мысли. Целительным средством от них также служит занятие, способное поглотить внимание.

Первоначально эта книга называлась «Полуночные задачи, придуманные бессонными ночами», однако со второго издания «бессонные ночи» сменились «часами бессонницы».

Это изменение было внесено для успокоения любезных друзей, которые в многочисленных письмах выражали свое сочувствие по поводу плохого состояния моего здоровья. Они полагали, что я страдаю хронической бессонницей и рекомендую математические задачи как средство от этой изнурительной болезни.

Боюсь, что первоначальный вариант названия был выбран необдуманно и действительно *допускал* толкование, которое я отнюдь не имел в виду, а именно, что я часто не смыкаю глаз в течение *всей* ночи. К счастью, предположение моих доброжелателей не отвечает действительности: я никогда не страдал бессонницей, и если мне и случалось провести несколько бессонных часов, то лишь потому, что перед этим я изрядно подремал вечером. Математические задачи я предлагал не как средство от *бессонницы*, а как способ избавиться от *навязчивых мыслей*, которые легко овладевают праздным умом. Надеюсь, что новое название более ясно выражает тот смысл, который я намеревался в него вложить.

Мои друзья *полагают*, будто я (если воспользоваться логическим термином) стою перед дилеммой: либо обречь себя на длинную бессонную ночь, либо, приняв то или иное лекарство, вынудить себя заснуть. Насколько я могу судить, опираясь на *собственный* опыт, ни одно лекарство от бессонницы не оказывает ни малейшего действия до тех пор, пока вы сами не захотите спать. Что же касается математических выкладок, то они скорее способны разогнать сон, нежели приблизить его наступление.

Л. Кэрролл

Предисловие

Почти все 72 задачи, собранные в этой книжке, вполне заслуживают названия «полуночных»: я решал их «в уме», лежа в постели в часы бессонницы. Отдельные задачи были решены при свете дня во время одиноких прогулок, но и в этих случаях я, прежде чем делать чертеж или записать хотя бы единое слово, доводил решение до конца «в уме». Обычно я сначала записывал ответ и лишь *затем* условие задачи и ее решение. Например, когда я размышлял над задачей 70, то первая запись выглядела так: «1) заднее ребро, проходимое сначала сверху вниз, затем снизу вверх и т. д.; 2) на расстоянии, равном примерно 0,7 длины ребра (расстояние отсчитывается от верхней вершины тетраэдра); 3) около 18° 18'; 4) около 14". Эти ответы не совсем правильны, но по крайней мере *честны*, ибо они были получены *в уме* без помощи карандаша и бумаги. «Хоть плохонький, сударь, да свой!»

Мотивом, которым я руководствовался при публикации этих задач с их решениями, найденными без помощи карандаша и бумаги силой чистого разума, было *отнюдь* не желание продемонстрировать свои способности к устному счету. Я совершенно уверен в том, что мои способности в этой области оставляют желать много лучшего, и найдется немало математиков, которые сумеют придумать более короткие и изящные решения, не прибегая к карандашу и бумаге. Моя книжка предназначается не для них. Я адресую ее гораздо более широкому кругу людей с *обыкновенными* математическими способностями, которые время от времени испытывали потребность чем-то занять свой ум, но не догадывались воспользоваться открытым мной источником. Я надеюсь, что мой пример поощрит их; они, увидев, чего может достичь после небольшой практики человек *средних* математических способностей, попытаются испробовать свои силы и найдут новое занятие столь же увлекательным и успокоительным, каким нашел его я.

Может быть, определение «успокоительное» в связи с чисто *интеллектуальным* занятием звучит несколько неуместно, но многим из тех, кто знает, что такое навязчивые мысли, неотступно преследующие тебя днем и ночью, оно придется по душе. Не раз говорил я себе, отправляясь спать после дневных неприятностей и огорчений: «Хватит! Не буду больше думать об этом! Все неприятное уже позади. Стóит ли вновь возвращаться к нему? Подумаю лучше о чем-нибудь другом!» А через каких-то десять минут я вновь ловил себя на том, что незаметно вернулся в самую гущу неприятных воспоминаний и бесцельно мучаю себя, предаваясь горестным размышлениям о событиях минувшего дня.

В настоящее время невозможно (и я думаю, что все психологи согласятся с этим) никаким усилием воли выполнить принятое самим собой решение «*Не буду* больше думать о том-то и том-то». (Свидетельство тому — известная шутка, которую разыгрывают над ребенком. «Я дам тебе пенс, — говорят ему, — если ты сможешь выстоять в углу пять минут, ни разу не подумав о клубничном варенье!» Ни одно дитя человеческое не способно выстоять против такого искушения!) Однако вполне возможно (и я очень рад, что мне довелось узнать об этом) выполнить решение «*Буду* думать о том-то и том-то!». Стóит лишь сосредоточить свое внимание на избранном объекте, и неприятная тема, от которой вам хотелось избавиться, практически *исчезает* из ваших мыслей. Время от времени она может возвращаться, чтобы, так сказать, заглянуть к вам в дверь. Но поскольку она встретит холодный прием и ей почти не будет уделено внимания, то вскоре она исчезнет совсем.

Я рискну на миг обратиться к читателю в более серьезном тоне и указать на муки разума, гораздо более тягостные, чем просто назойливые мысли. Целительным средством от них также служит занятие, способное поглотить внимание.

Мысли бывают скептическими, и порой кажется, что они способны подорвать самую твердую веру. Мысли бывают богохульными, незванно проникающими в самые благочестивые души, нечестивыми, искушающими своим ненавистным присутствием того, кто дал обет блюсти чистоту. И от всех этих бед самым действенным лекарством служит какое-нибудь *активное* умственное занятие. Нечистый дух из сказки, приводивший с собой семерых еще более порочных, чем он сам, духов, делал так лишь потому, что находил «комнату чисто прибранной», а хозяина — праздно сидящим сложа руки. Если бы его встретил «деловой шум» активной *работы*, то такой прием и ему, и семерым его собратьям пришелся бы весьма не по вкусу!

Моя цель (а я намеревался поощрить других) не была бы достигнута, если бы я, записывая решения, позволил себе вносить *улучшение* в ту часть работы, которая была проделана в уме. Я считал гораздо более важным зафиксировать *полученный результат в его первозданном виде*, чем приводить более краткие и изящные решения, получить которые без карандаша и бумаги было бы намного труднее. Например, при умножении столбиком (скажем, двух семизначных чисел) *на бумаге* сложение промежуточных результатов удобнее начинать с единиц, выписывая семь столбиков цифр и складывая их, как обычно. Но проделать такую операцию *в уме* чрезвычайно трудно (а для *меня* просто невозможно). Единственный шанс на успех заключается, по-видимому, в том, чтобы начать с *миллионов* и сгруппировать их подходящим образом, затем перемножить сотни тысяч, прибавить их к ранее полученному результату и т. д. Нередко оказывается, что решение, необычайно легко и просто получаемое *в уме*, на бумаге становится неуклюжим и длинным.

Когда я впервые приступил к осуществлению своего замысла, мне по силам были лишь простые геометрические задачи, и, даже решая их, я вынужден был время от времени останавливаться, чтобы сделать чертеж и разобраться, где «зарыта собака». Алгебраических задач я поначалу старался избегать по простой причине: стóит хотя бы одному коэффициенту выпасть из памяти, как решение алгебраической задачи приходится начинать с самого начала. Но вскоре я преодолел обе трудности и научился запоминать громоздкие коэффициенты и удерживать перед своим мысленным взором сложные чертежи настолько ясно, что мог *свободно переходить от одной их части к другой*. Труднее всего было запоминать буквы на чертежах, и я научился почти не пользоваться ими, а вместо этого отличал точки лишь по их расположению. В моих рукописных заметках к задаче 53 можно найти следующие строки: «Я никогда не задавал себе этой задачи до недели, закончившейся 6 апреля 1889 г. Две или три ночи я пытался решить ее в уме, пока, наконец, не решил в ночь с 6 на 7 апреля. Все рассуждения я провел в уме, без чернил и бумаги. Решая задачи, я не обозначал буквами никаких точек, кроме *A*, *B*, *C* и *P*, а, думая о них, указывал их положение (например, „основание перпендикуляра, опущенного из точки *P* на *BC*“)».

Если кто-нибудь из читателей захочет упрекнуть меня в том, что я действовал слишком однообразно, избрал область слишком известную и ни разу не рискнул покинуть торный путь, то я с гордостью укажу на мою задачу из «трансцендентной теории вероятности» — области, в которой, по моему убеждению, даже самым дерзким математикам до сих пор удалось достичь *весьма* немногих результатов. Случайному читателю эта задача может показаться ненормальной и даже парадоксальной, но я бы хотел, чтобы он честно спросил себя: «А разве сама жизнь — не парадокс?»

Чтобы читатель мог создать себе некоторое представление о том, как я придумывал свои задачи, я приведу «биографию» задачи 63. Ее история типична для большинства задач.

Началась история в ночь с 3 на 4 сентября 1890 г. и завершилась следующей ночью. Незадолго до этого мне пришло в голову, что область, которую я назову «геометрией частично правильных тел», может быть достаточно интересной. Число правильных тел вызывающе мало. Безнадежно пытаться найти хоть один связанный с ними вопрос, который бы не был уже исчерпывающим образом проанализирован. Некоторые из «частично правильных» тел (например, ромбоидальные кристаллы), по-видимому, можно было бы рассматривать с помощью тех же методов, что и правильные тела. В то же время в отличие от правильных тел ничто не мешает строить новые частично правильные тела.

В соответствии с этим я придумал тело, ограниченное сверху и снизу двумя равными и параллельными квадратами, центры которых расположены на одной вертикали, причем верхний квадрат повернут так, что его стороны параллельны диагоналям нижнего. Затем я представил себе, что расстояние между верхним и нижним квадратами увеличивается до тех пор, пока вершины верхнего квадрата не становятся вершинами четырех равносторонних треугольников, основаниями которых служат стороны нижнего квадрата. Гранями получившегося тела служат два квадрата и 8 равносторонних треугольников. Задача, которую я себе поставил, заключалась в вычислении *объема* такого тела.

Без особого труда удалось показать, что расстояние между квадратами (сторона которых считается равной 2) равно $2^{3}/_{4}$. Но когда я попытался вычислить объем с помощью тригонометрии, меня очень скоро охватило отчаяние! Я видел, как можно было бы вырезать из *середины* тела призму, объем которой вычисляется совсем просто, но вычисление объема «обрезков» оставалось для меня непосильной задачей. Некоторое время спустя мне пришла в голову счастливая идея воспользоваться аналитической геометрией и рассматривать каждую грань тела как основание пирамиды с вершиной в центре тела, который я выбрал за начало координат. Я сразу же увидел, что смогу вычислить координаты вершин, затем вывести уравнения плоскостей, содержащих грани, и найти расстояния от них до начала координат, равные высотам вспомогательных пирамид. Кроме того, стало ясно, что вычисления достаточно проделать лишь для одной пирамиды, поскольку они все одинаковы. В первую же ночь мне удалось вычислить объем, но затем все запуталось, и я вскоре убедился, что мое решение было неправильным.

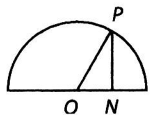
На следующую ночь я вновь принялся за решение, начав его с самого начала. Наутро я вспомнил *ответ* и сразу же записал его. Что же касается условия задачи и решения, то я записал их лишь на следующий день после того, как с удовлетворением убедился, что доказательство на бумаге подтверждает результат, полученный ранее во тьме ночи.

Пользуясь случаем, я хочу объяснить, *почему* я избрал для обозначения синуса и косинуса соответственно символы ⌒ и ⌓.

Необходимость использования *каких-то* символов для обозначения синуса и косинуса вряд ли нуждается в более подробном обосновании, чем использование знаков «+» и «−» для обозначения «плюса» и «минуса».

Что же касается выбранных мной обозначений, то они заимствованы из старой тригонометрии, в которой синусы, косинусы и т. д. были реальными *линиями*.

Так, на приведенном здесь рисунке (радиус *OP* считается равным единице) отрезок *PN* есть *синус* угла *NOP*, а отрезок *ON* — *косинус* того же угла.



В каждом из выбранных мной обозначений я сохранил полуокружность: в символе ⌒ я лишь сдвинул отрезок *PN* в середину, а в символе ⌓ слегка удлинил отрезок *ON*, продолжив его за полуокружность, чтобы мое обозначение косинуса не смешивали с встречающимся иногда обозначением для полуокружности.

При подготовке задач к печати мне и моим друзьям удалось обнаружить многочисленные и подчас весьма серьезные ошибки в решениях. Я не льщу себя надеждой, что нам удалось выловить все ошибки.

Вполне возможно, что какие-то ошибки ускользнули от меня и еще ожидают проницательного взгляда какого-нибудь критически настроенного читателя. Я надеюсь, что радость открытия ошибок и испытанное при этом чувство интеллектуального превосходства над автором в какой-то мере вознаградят счастливца за потерю времени и беспокойство, которое могло доставить ему внимательное чтение этой книжки.

Предметный указатель задач

Глава I

ЗАДАЧИ*

1

Найти общую формулу для двух чисел, сумма квадратов которых равна 2.

2

В данном треугольнике провести прямую, параллельную основанию, так, чтобы сумма отрезков боковых сторон, заключенных между этой прямой и основанием, была равна основанию.

3

Доказать, что если стороны четырехугольника проходят через вершины параллелограмма и три вершины делят проходящие через них стороны пополам, то и четвертая вершина параллелограмма также делит проходящую через нее сторону четырехугольника пополам.

4

В данный остроугольный треугольник вписать треугольник, стороны которого (при каждой из его вершин) образуют равные углы со сторонами данного треугольника.

5

Урна содержит один шар, о котором известно, что он либо белый, либо черный. В урну кладут белый шар, после чего ее содержимое перемешивают и вытаскивают наудачу

* Ответы см. на стр. 112, решения — на стр. 118.

один шар, который оказывается белым. Какова после этого вероятность вытащить белый шар?

6

Даны длины медиан треугольника. Найти стороны и углы треугольника.

7

Даны длины двух смежных сторон четырехугольника и заключенный между ними угол. Кроме того, известно, что углы четырехугольника, прилежащие к каждой из этих сторон, прямые. Найти: 1) остальные стороны четырехугольника; 2) его площадь.

8

Несколько человек сидят по кругу так, что у каждого из них имеется по одному соседу справа и слева. Каждый из сидящих располагает определенным количеством шиллингов. У первого на 1 шиллинг больше, чем у второго, у второго на 1 шиллинг больше, чем у третьего, и т. д. Первый из сидящих отдает 1 шиллинг второму, второй — 2 шиллинга третьему и т. д. Каждый отдает следующему на 1 шиллинг больше, чем получил сам, до тех пор, пока это возможно. В результате у одного из сидящих шиллингов оказывается в 4 раза больше, чем у его соседа. Сколько всего было людей и сколько шиллингов было сначала у са́мого бедного из них?

9

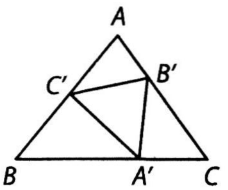
Даны две пересекающиеся прямые и точка внутри образованного ими угла. Через эту точку требуется провести две прямые под прямым углом одна к другой так, чтобы вместе с данными прямыми и прямой, соединяющей точку пересечения последних с данной точкой, они образовывали два равных треугольника.

10

Треугольный бильярдный стол имеет три лузы — по одной в каждому углу. В одной лузе умещается лишь один шар, в двух других — по два шара. На столе находятся 3 шара, в каждом из которых спрятано по монете. Стол наклоняют так, что все шары скатываются в один угол, но в какой именно — неизвестно. Полное математическое ожидание «начинки» шаров (или шара), попавших в лузу, составляет 2 шиллинга 6 пенсов*. Монеты какого достоинства спрятаны в шарах?

11

В треугольник ABC вписан другой треугольник $A'B'C'$ так, что $\angle BA'C' = \angle CB'A' = \angle AC'B' = \theta$ и, следовательно, треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны. Найти отношение длин соответственных сторон. Решить ту же задачу для случая $\theta = 90°$.



Подобие треугольников можно доказать следующим образом:

$$\angle C'A'B' + \angle B'A'C = 180° - \theta,$$

$$\angle B'A'C + \angle A'CB' = 180° - \theta.$$

Следовательно,

$$\angle C'A'B' + \angle B'A'C = \angle B'A'C + \angle A'CB',$$

откуда

$$\angle C'A'B' = \angle C.$$

Но тогда

$$\angle A'B'C' = \angle A \text{ и } \angle B'C'A' = \angle B.$$

Пусть $C'A' = ka$ и, следовательно, $A'B' = kb$, $B'C' = kc$. Требуется найти k.

12

Даны полупериметр и площадь треугольника, а также объем прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны сторонам треугольника. Найти сумму квадратов сторон треугольника.

* См. примечание на стр. 42.

13

Даны радиусы двух пересекающихся окружностей и расстояние между их центрами. Найти площадь четырехугольника, образованного касательными, проведенными к окружностям в точках пересечения.

14

Доказать, что утроенную сумму трех квадратов можно представить в виде суммы четырех квадратов.

15

Доказать, что если фигура обладает тем свойством, что сумма противоположных углов любого вписанного в нее четырехугольника равна 180°, то эта фигура — окружность.

16

Имеются две урны. В одной из них находится шар, о котором известно, что он либо белый, либо черный. В другой урне находятся 1 белый и 2 черных шара. В первую урну кладут белый шар, после чего ее хорошенько встряхивают и извлекают из нее один шар, который оказывается белым. Как следует действовать, чтобы вероятность извлечь белый шар после проделанных операций была наибольшей: тащить шар, не зная, из какой урны мы его извлекаем, или сначала пересыпать содержимое одной урны в другую и лишь затем тащить шар?

17

В данном треугольнике провести прямую, параллельную основанию, так, чтобы длина отрезка, отсекаемого на ней боковыми сторонами, была равна сумме длин отрезков прямых, проведенных через его концы параллельно боковым сторонам до пересечения с основанием треугольника.

18

На основании данного треугольника найти такую точку, чтобы прямая, соединяющая основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на боковые стороны треугольника, была параллельна его основанию. Дать тригонометрическое (1) и геометрическое (2) решения задачи.

19

Имеются 3 урны. В одной из них содержится 1 белый и 1 черный шар, в другой — 2 белых и 1 черный шар и в третьей — 3 белых и 1 черный шар. В каком именно порядке расставлены урны, неизвестно. Из первой урны извлекают белый шар, из второй — черный. Какова вероятность вытащить из оставшейся урны белый шар?

20

На основании данного треугольника найти такую точку, чтобы длина восставленного из нее перпендикуляра к основанию была равна длине перпендикуляра, опущенного из нее на левую боковую сторону треугольника.

21

Найти сумму: 1) n членов; 2) 100 членов ряда $1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + \ldots$

22

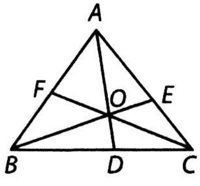
Даны 3 высоты треугольника. Найти его стороны (1); углы (2); площадь (3).

23

Урна содержит 2 шара. Относительно каждого из них известно, что он либо черный, либо белый. В урну кладут еще 2 белых и 1 черный шар. Затем в урну кладут 1 белый шар и извлекают 1 белый шар. Какова вероятность того, что в урне осталось 2 белых шара?

24

Из вершин треугольника ABC проведены прямые AD, BE и CF, пересекающиеся в точке O. Выразить отношение DO/DA через два отношения: EO/EB и FO/FC.



25

Пусть ε, α и λ — правильные дроби, и пусть в некотором госпитале ε-я доля всех пациентов потеряла глаз, α-я — руку и λ-я — ногу. Чему равна наименьшая доля пациентов, лишившихся одновременно глаза, руки и ноги?

26

Внутри данного треугольника расположить подобный ему треугольник (отношение площадей внутреннего и наружного треугольников задано и выражается числом, меньшим единицы) так, чтобы стороны треугольников были параллельны, а вершины внутреннего треугольника были равноудалены от вершин внешнего треугольника.

27

Имеются 3 урны, в каждой из которых содержится по 6 шаров. В одной урне находятся 5 белых шаров и 1 черный, в другой — 4 белых и 2 черных шара и в третьей — 3 белых и 3 черных шара. Из двух урн (из каких именно, неизвестно) извлекли 2 шара, оказавшиеся черным и белым. Какова вероятность вытащить из оставшейся урны белый шар?

28

Стороны данного треугольника разделены в крайнем и среднем отношении, и точки деления соединены отрезками прямых. Найти отношение площади образовавшегося при этом треугольника к площади исходного треугольника.

29

Доказать, что сумму квадратов двух различных чисел, умноженную на сумму квадратов двух различных чисел, можно представить в виде суммы квадратов двух чисел двумя различными способами.

30

В данном треугольнике провести прямую, параллельную его основанию, так, чтобы длина отрезка, отсекаемого на ней боковыми сторонами, была вдвое меньше суммы длин отрезков прямых, проведенных через его концы параллельно боковым сторонам до пересечения с основанием треугольника.

31

1 июля, когда на моих карманных часах было 8 *ч* утра, стенные часы показывали 8 *ч* 4 *мин*. Взяв с собой карманные часы, я отправился в Гринвич и обнаружил, что, когда они показывают полдень, точное время в действительности равно 12 *ч* 5 *мин*. Вечером того же дня, когда на моих карманных часах было ровно 6 *ч*, стенные часы показывали 5 *ч* 59 *мин*.

30 июля в 9 *ч* утра по моим карманным часам стенные часы показывали 8 *ч* 57 *мин*. В Гринвиче, когда мои карманные часы показывали 12 *ч* 10 *мин*, точное время было 12 *ч* 5 *мин*. Вечером того же дня карманные часы уже показывали 7 *ч*, когда на стенных еще было 6 *ч* 58 *мин*.

Карманные часы я завожу лишь при поездке в Гринвич. В течение суток они идут равномерно. Настенные часы идут всегда, причем идут равномерно.

Каким образом мне узнать, когда наступает полдень (по *точному* времени) 31 июля?

32

Найти сумму: 1) n членов; 2) 100 членов ряда $1\cdot 5 + 2\cdot 6 + \ldots$

33

В данную окружность вписать четырехугольник наибольшей площади с двумя параллельными сторонами, из которых одна вдвое больше другой.

34

Из данной точки провести 2 прямые, одна из которых проходит через центр данной окружности, а другая отсекает от этой окружности сегмент, вмещающий угол, равный углу между прямыми.

35

Провести окружность, пересекающую каждую из сторон данного треугольника в двух точках и такую, что стороны треугольника делят перпендикулярные к ним радиусы в данных отношениях.

36

Точку, лежащую на одной боковой стороне данного треугольника, соединить отрезком прямой с точкой, лежащей на другой боковой стороне, так, чтобы сам отрезок был перпендикулярен к одной из этих сторон, а его длина была равна сумме отрезков сторон, заключенных между его концами и основанием треугольника.

37

Две окружности пересекаются так, что их общая хорда стягивает центральные углы в 30 и 60°. Какая часть круга, ограниченного меньшей окружностью, находится внутри большего круга?

38

Имеются три урны A, B и C. Урна A содержит 3 красных шара, урна B — 2 красных и 1 белый и урна C — 1 красный и 2 белых шара. Две урны выбраны наудачу, и из каждой извлечено по одному шару. Оба шара оказались красными. Шары вернули в те урны, из которых их вытащили, после чего весь эксперимент повторили заново с теми же двумя урнами. Известно, что один из вытащенных во второй раз шаров красный. Какова вероятность того, что и другой шар тоже красный?

39

Два пешехода A и B пускаются в путь ровно в 6 *ч* утра в один и тот же день. Оба идут по одной дороге и в одном направлении. Пешеход B сначала опережает пешехода A на 14 миль. Оба идут с 6 утра до 6 вечера. В первый день пешеход A, двигаясь с постоянной в течение дня скоростью, проходит 10 миль, во второй — 9, в третий — 8 миль и т. д. Пешеход B, двигаясь также с постоянной в течение дня скоростью, проходит в первый день 2 мили, во второй — 4, в третий — 6 и т. д. Где и когда пешеход *A* нагонит пешехода *B*?

40

Из основания данного треугольника с острыми углами при основании восставить два перпендикуляра до пересечения с боковыми сторонами так, чтобы сумма их длин была равна высоте, опущенной из вершины треугольника на основание, и при этом:

1) восставленные перпендикуляры были равноудалены от высоты;

2) отстояли на равные расстояния от концов основания треугольника.

41

Мой друг принес мне урну с четырьмя шарами. Известно, что каждый из них может быть либо черным, либо белым. По его просьбе я вынул из урны 2 шара, которые оказались белыми. Затем он произнес: «Я забыл предупредить тебя заранее, что по крайней мере 1 шар в урне белый. Впрочем, теперь тебе это и так известно. Вытащи, пожалуйста, еще 1 шар».

1. Какова вероятность того, что я теперь вытащу белый шар?

2. Чему была бы равна эта вероятность, если бы мой товарищ ничего не сказал?

42

Через вершины данного треугольника перпендикулярно его биссектрисам проведены прямые, которые пересеклись, образовав новый треугольник. Найти отношение площади нового треугольника к площади данного треугольника.

43

Из концов основания данного треугольника провести две прямые, пересекающиеся внутри его и образующие равнобедренный треугольник при основании и равновеликий этому треугольнику четырехугольник при вершине.

44

Доказать, что если a и b — взаимно-простые числа, то всегда можно найти такое n, при котором число $(a^n - 1)$ будет делиться на b.

45

Предположим, что бесконечно много палок ломают на две части. Чему равна вероятность того, что по крайней мере одна палка будет переломана точно посредине?

46

На основании треугольника выбрана точка. Требуется вписать в него другой треугольник, углы при вершинах которого равны трем наперед заданным углам, так, чтобы заранее указанная его вершина находилась в выбранной точке.

47

Решить систему двух неопределенных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} &= x - z \qquad (1) \\ \frac{x}{z} &= x - y \qquad (2) \end{aligned}\right\}$$

и установить пределы (если таковые существуют), в которых изменяются ***вещественные*** значения неизвестных.

48

На сторонах данного треугольника, как на диаметрах, во внешнюю сторону построены полуокружности. Длины общих касательных к этим полуокружностям равны соответственно α, β и γ. Доказать, что величина

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

равна полупериметру треугольника.

49

Четыре равносторонних треугольника сделаны боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды. Найти отношение объема этой пирамиды к объему тетраэдра, составленного из тех же 4 треугольников.

50

В каждой из двух урн *H* и *K* находится по 2 шара. Известно, что каждый шар либо белый, либо черный. В урну *H* добавляют белый шар, тщательно перемешивают ее содержимое, после чего извлекают из нее один шар и, не глядя, переносят его в урну *K*. Затем то же самое проделывают с урной *K* (с той лишь разницей, что шар-«инкогнито» перекладывается теперь в урну *H*). Чему равна в результате вероятность вытащить белый шар из урны *H*?

51

Из точки, лежащей на боковой стороне данного треугольника, провести прямую так, чтобы длина отрезка ее, заключенного внутри треугольника, была равна сумме длин перпендикуляров, опущенных из концов этого отрезка на основание треугольника.

52

Пять нищих уселись в круг, и каждый из них положил перед собой небольшую кучку пенсов, которые ему удалось насобирать за день. Все пять кучек оказались одинаковыми.

Затем поднялся самый старый и мудрый из нищих и, развернув пустой мешочек, который был у него в руках, сказал:

— Друзья мои, я хочу научить вас одной забавной игре! Прежде всего я назову себя № 1, соседа справа — № 2 и т. д. до № 5. Затем я высыплю в мешочек весь свой дневной «улов» и передам его тому, кто сидит через одного человека слева от меня, то есть № 3. Его роль в игре сводится к тому, чтобы вынуть из мешочка и отдать своим соседям столько пенсов, сколько им причитается в соответствии с их номерами (иначе говоря, он должен дать 4 пенса № 4 и 2 пенса № 2), затем добавить в мешочек половину того количества пенсов, которое было в мешочке, когда № 3 получил его, и передать мешочек, как сделал я, тому, кто сидит через одного человека слева, то есть № 5. № 5 проделывает все то же, что и № 3, и вручает мешочек № 2, от которого мешочек переходит к № 4 и попадает снова ко мне. Если у того, кто держит мешочек в руках, не осталось ни одного пенса, поскольку он всю свою кучку уже высыпал в мешочек, то он имеет право взять нужное ему количество пенсов из любой кучки, *кроме моей*!

Нищие с восторгом принялись за игру. По прошествии определенного времени мешочек вернулся к № 1. Тот положил в него полученные за время игры 2 пенса, тщательно завязал мешочек веревочкой и со словами: «Игра и впрямь *чрезвычайно* забавна, не так ли?» — поднялся и поспешил прочь. Остальные нищие печально переглянулись. Ни у одного из них не осталось ни единого пенса!

Сколько пенсов было у каждого из нищих до «игры»?

53

Положение точки на треугольном бильярдном столе задается ее треугольными координатами. Шар выходит из заданной точки и, ударившись о три стенки стола, возвращается в исходную точку. Выразить координаты точки, в которой шар отражается от второй стенки, через треугольные координаты исходной точки и углы треугольника.

54

От данного треугольника прямыми, параллельными его сторонам, отрезать три треугольника так, чтобы оставшийся шестиугольник был равносторонним. Выразить сторону полученного шестиугольника через стороны исходного треугольника и найти, в каком отношении вершины шестиугольника делят стороны исходного треугольника.

55

На плоскости расставлены три цилиндрические башни. Найти точку плоскости, из которой их ширина будет казаться одинаковой.

56

Построить треугольник по трем высотам.

57

На сторонах треугольника, внутри его, построить три квадрата, верхние стороны которых образуют треугольник. Задачу требуется решить геометрически (1); тригонометрически (2).

58

На бесконечной плоскости случайным образом выбраны три точки. Найти вероятность того, что они являются вершинами тупоугольного треугольника.

59

В тетраэдре противоположные ребра попарно равны, вследствие чего все грани снаружи выглядят одинаково. Выразить объем тетраэдра через длины ребер.

60

В треугольнике ABC точка D делит основание BC в отношении m к n. Найти углы BAD и CAD.

61

Докажите, что если взять любые три числа, не являющиеся последовательными членами арифметической прогрессии и такие, что их сумма делится на 3, то сумму их квадратов можно представить в виде суммы квадратов трех других чисел, причем обе суммы не будут иметь ни одного общего слагаемого.

62

Внутри угла, образуемого двумя пересекающимися прямыми, дана точка. Провести через эту точку прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

63

Два равных квадрата лежат в различных горизонтальных плоскостях так, что центры их расположены на одной вертикали и стороны одного параллельны диагоналям другого. Расстояние между плоскостями выбрано так, что, соединив соседние вершины квадратов, мы получим 8 равносторонних треугольников. Вычислить объем тела, ограниченного квадратами и треугольниками.

64

Точка внутри треугольника выбрана так, что расстояние от нее до одной из сторон меньше, чем расстояние от нее до любой из двух других сторон. Провести окружность с центром в этой точке так, чтобы из отрезков сторон треугольника, высекаемых окружностью, можно было построить прямоугольный треугольник.

65

Сколько существует различных форм треугольников, все углы которых представимы в виде $360°/n$, где n — целое число?

66

В урне лежат 2 шара, относительно которых первоначально известно лишь, что каждый из них либо белый, либо черный. Было проведено испытание. Из урны несколько раз подряд извлекали по 1 шару, смотрели, какого он цвета и затем снова возвращали его в урну. Результаты оказались следующими: все вытащенные шары были белыми, а вероятность вытащить белый шар стала равной $\alpha/(\alpha+\beta)$. Испытание было повторено еще m раз. Вытащенные шары всякий раз оказывались белыми. Чему равна вероятность вытащить белый шар после $m+1$ испытаний?

67

Правильный тетраэдр помещен вершиной вниз в углубление, точно повторяющее его форму, после чего приподнят ровно настолько, чтобы его можно было повернуть, повернут на 120° и отпущен. Повернутый тетраэдр снова плотно заполнил углубление. Найти геометрическое место одной из «повернувшихся» вершин тетраэдра.

68

Пятеро друзей решили на паях организовать компанию по торговле вином. Каждый из них внес в фонд компании одинаковое количество бутылок вина, купленного по одной цене. Один из друзей на общем собрании «акционеров» был избран казначеем, другой — продавцом. В обязанность продавцу вменялось продавать вино с 10%-й надбавкой (по сравнению с покупной ценой).

В первый день продавец распил одну бутылку вина, несколько бутылок продал, а всю выручку передал казначею.

На второй день продавец не стал пить вина, но прикарманил деньги, полученные от продажи одной бутылки, а всю остальную выручку передал казначею.

Вечером того же дня казначей наведался в погреба фирмы и пересчитал оставшиеся бутылки. «Вина ровно на 11 фунтов стерлингов», — заметил он себе под нос, покидая погреб.

На третий день продавец выпил одну бутылку вина, присвоил себе деньги, полученные от продажи другой бутылки, а всю остальную выручку передал казначею.

Поскольку все вино было продано, друзья созвали общее собрание «акционеров» и к своему огорчению обнаружили, что их доходы (то есть разность между суммами, переданными продавцом казначею, и первоначальной стоимостью вина) составили лишь 6 пенсов за бутылку. Доходы эти поступали в течение трех дней равномерно (то есть разность между выручкой, переданной продавцом казначею в конце каждого дня, и первоначальной стоимостью проданного за день вина была одной и той же в течение всех трех дней), но об этом, разумеется, знал лишь продавец.

1. Сколько бутылок вина было куплено в фонд компании?
2. По какой цене друзья покупали вино?

69

Через вершины треугольника ABC проведены прямые, отсекающие от углов A, B и C части, которые выражаются соответственно правильными дробями k, l и m. Пересекаясь между собой, эти прямые образуют треугольник, подобный треугольнику ABC. При этом угол нового треугольника, образованный прямыми, проходящими через вершины B и C, равен углу A и т. д.

Выразить k, l и m как (близкие по виду) функции одного переменного и найти отношение соответственных сторон нового и исходного треугольников.

70

Правильный тетраэдр расположен так, что одна из его граней обращена вперед (вершиной вверх) и основание ее горизонтально. Предположим, что в плоскости передней грани мы построили все возможные треугольники, имеющие с этой гранью общее основание и равновеликие ей, после чего каждый из треугольников обернули («до отказа») вокруг тетраэдра.

Найти: 1) геометрическое место вершин построенных треугольников, обернутых вокруг тетраэдра; 2) положение вершины треугольника, у которого левый угол при основании равен 15°; 3) левый угол при основании треугольника, вершина которого (при оборачивании треугольника вокруг тетраэдра справа вниз и налево) совместилась с вершиной тетраэдра, а сам треугольник закрыл собой части всех четырех граней тетраэдра; 4) левый угол при основании треугольника, который (направление, в котором треугольник оборачивают вокруг тетраэдра, такое же, как и в предыдущем вопросе) закрыл все четыре грани тетраэдра, затем переднюю и правую грани по второму разу, а его вершина совместилась с дальней (не принадлежащей передней грани) вершиной основания тетраэдра.

71

В данный треугольник вписать шестиугольник так, чтобы противоположные стороны шестиугольника были равны и параллельны, три из них лежали на сторонах треугольника, а диагонали пересекались в заданной точке внутри треугольника.

72

В урне содержатся 2 шара, относительно которых неизвестно ничего, кроме того, что каждый из них либо черный, либо белый. Установить цвет шаров, не вынимая их из урны.

Глава II

ОТВЕТЫ

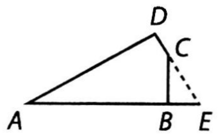
5. 2/3.

6. Пусть $2a$, $2b$, $2c$ — стороны треугольника, α, β, γ — его медианы. Тогда

$$a^2=\frac{-\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2}{9},$$

$$\cos A=\frac{5\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{2\sqrt{2\alpha^2-\beta^2+2\gamma^2}\sqrt{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}}.$$

7. Пусть AB и AD — известные стороны четырехугольника, углы B и D — прямые, S — площадь четырехугольника, и пусть $AB=b$, $AD=d$.



Тогда

$$1)\ BC=\frac{d-b\cos A}{\sin A};\quad CD=\frac{b-d\cos A}{\sin A};$$

$$2)\ S=\frac{2bd-\left(b^2+d^2\right)\cos A}{2\sin A}.$$

8. 7 человек; 2 шиллинга.

10. Либо 2 флорина и 1 шестипенсовик, либо полкроны и 2 шиллинга.

11. Искомое отношение равно

$$\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\theta\left(1+\cos A\cos B\cos C\right)+\cos\theta\sin A\sin B\sin C}.$$

При $\theta=90^\circ$ это выражение упрощается и принимает вид

$$\frac{\sin A\sin B\sin C}{1+\cos A\cos B\cos C}.$$

12. Пусть s — полупериметр, m — площадь треугольника, v — объем прямоугольного параллелепипеда. Тогда

$$a^2+b^2+c^2=2\left(s^2-\frac{v}{s}-\frac{m^2}{s^2}\right).$$

13. Пусть $2M$ — площадь четырехугольника, вершинами которого служат центры окружностей и точки их пересечения. Если стороны такого четырехугольника равны a и b, а его диагональ, соединяющая центры окружностей, — c, то искомая площадь равна

$$\frac{32M^3}{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}.$$

16. В первом случае вероятность равна $1/2$, во втором — лишь $5/12$. Следовательно, лучше придерживаться первой тактики.

18. 1) Искомая точка E делит основание так, что $BE/EC=\sin 2C/\sin 2B$.

2) Через вершины B и C основания треугольника проведем прямые, образующие прямые углы со сторонами AB и AC. Точку D пересечения этих прямых соединим с вершиной A. Точка E пересечения прямой AD с основанием треугольника BC и будет искомой точкой.

19. 11/17.

21. 1) $\dfrac{n(n+1)(n+4)(n+5)}{4}$; 2) 27 573 000.

22. Обозначим высоты треугольника через α, β и γ и положим

$$k^2=\frac{2\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)-\left(\beta^4\gamma^4+\gamma^4\alpha^4+\alpha^4\beta^4\right)}{4\alpha^4\beta^4\gamma^4}.$$

Тогда:

1) $a=\dfrac{1}{k\alpha}$, $b=\dfrac{1}{k\beta}$, $c=\dfrac{1}{k\gamma}$;

2) $\frown A=k\beta\gamma$, $\frown B=k\alpha\gamma$, $\frown C=k\alpha\beta$;

3) $S=\dfrac{1}{2k}$.

23. 2/5.

24. Величины DO/DA, EO/EB и FO/FC связаны соотношением $DO/DA+EO/EB+FO/FC=1$, из которого любую из трех величин можно выразить через две остальные.

25. $\varepsilon+\alpha+\lambda-2$.

27. 17/25.

28. $7-3\sqrt{5}$.

31. Полдень наступит в тот момент, когда стенные часы покажут 12 *ч* 2 *мин* $29\,{}^{277}/_{288}$ *с*.

32. 1) $\dfrac{n(n+1)(2n+13)}{6}$; 2) 358 550.

37. $\dfrac{4+\sqrt{3}}{12}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\pi}$, то есть около 0,044.

38. 49/72.

39. Пешеходы встречаются в полдень на третий день пути и в самом конце четвертого дня. Пешеход A к моменту встреч успевает пройти 23 и 34 мили.

41. 1) 7/12; 2) 1/2.

42. $\dfrac{abc}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$, где a, b, c — стороны исходного треугольника, а s — его полупериметр.

45. 0,6321207...

47. Первый набор значений неизвестных: $x=0$, $y=0$, $z=0$.
Второй набор: $x=y=0$, z принимает произвольное значение.
Третий набор: $x=z=0$, y принимает произвольное значение.
Четвертый набор: $x=k^2/(k-1)$, $y=z=k$, где k принимает любое значение.

Если x имеет любое положительное значение меньше 4, то y и z не вещественны.

49. 2.

50. 17/27.

52. 2 фунта 18 шиллингов 0 пенсов.

53. Пусть α, β, γ — треугольные координаты исходной точки. Тогда расстояние от вершины A треугольника до точки, в которой шар вторично отражается от стенки стола, составляет

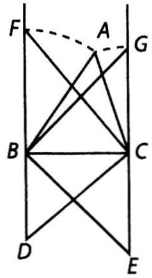
$$\frac{(\alpha \pitchfork C+\gamma \pitchfork A)(2\gamma \frown A+\beta)}{\alpha \frown C+\gamma \frown A+\beta}+\frac{\beta \frown A+\gamma \frown 2A}{\pitchfork A}.$$

54. Вершины шестиугольника D и G должны разбить сторону AB так, чтобы выполнялось соотношение

$$AD:DG:GB=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$$

(остальные стороны треугольника делятся аналогичным образом). Следовательно, сторона равностороннего шестиугольника выражается через стороны исходного треугольника как $1/a+1/b+1/c$.

56. Построим отрезки BC, CE и BD, равные высотам искомого треугольника, так, чтобы углы DBC и BCE были и прямыми, и продолжим DB за точку B, а EC — за точку C. Соединим точки D и C отрезком прямой и проведем $CF\perp DC$. Соединим точки E и B отрезком прямой и проведем $BG\perp EB$. С центром в точке B и радиусом BF опишем одну окружность, с центром в точке C и радиусом CG — другую. Пусть A — точка пересечения окружностей. Соединим отрезками прямых A с B и с C.



Можно доказать, что треугольник ABC подобен искомому треугольнику. Остальная часть построения очевидна.

57. 1) *Геометрическое решение.* На сторонах данного треугольника, вне его, построим квадраты. Продолжив стороны квадрата, параллельные сторонам треугольника, в обе стороны до пересечения друг с другом, получим новый треугольник, подобный данному. Разделим стороны нового треугольника на части, пропорциональные частям, на которые стороны квадратов разбивают стороны нового треугольника. Центральные отрезки будут равны основаниям искомых квадратов.

2) *Тригонометрическое решение.* Пусть a, b, c — стороны данного треугольника, m — его площадь, а x, y, z — стороны искомых квадратов.

Тогда
$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2m}+1.$$

58. $$\frac{3}{8-\frac{6\sqrt{3}}{\pi}}.$$

59. Пусть 3 пары противоположных ребер тетраэдра равны соответственно a, b и c, а соответствующие углы в каждой грани — A, B и C. Объем тетраэдра

$$v=\frac{abc}{6}\sqrt{1-\left(\triangle^2 A+\triangle^2 B+\triangle^2 C\right)+2\triangle A\triangle B\triangle C}.$$

60. $$\operatorname{ctg}\left(\angle BAD\right)=\frac{\left(m+n\right)\operatorname{ctg}A+n\operatorname{ctg}B}{m};$$

$$\operatorname{ctg}\left(\angle CAD\right)=\frac{\left(m+n\right)\operatorname{ctg}A+m\operatorname{ctg}C}{n}.$$

63. Пусть сторона любого квадрата равна 2. Тогда объем тела равен
$$\frac{8\cdot 2^{1/4}\left(\sqrt{2}+1\right)}{3}.$$

65. 10.

66. $\dfrac{2^m(\alpha-\beta)+\beta}{2^m(\alpha-\beta)+2\beta}$.

67. Выберем начало координат в центре горизонтальной грани тетраэдра, ось x проведем через одну из вершин этой грани, ось y направим параллельно ребру горизонтальной грани, противолежащему выбранной вершине, а ось z — перпендикулярно горизонтальной грани вниз. Если h — высота тетраэдра и a — расстояние от начала координат до вершины, лежащей на оси x, то искомое геометрическое место определяется системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}(x+\sqrt{3}y)(h-z)=ah,\\ x^2+y^2=a^2.\end{aligned}\right\}$$

68. 1) Пять дюжин;

2) 8 шиллингов 4 пенса за бутылку.

69. 1) $k=(\theta-B)/A$, $l=(\theta-C)/B$, $m=(\theta-A)/C$.

2) Обозначим вершины нового треугольника A', B', C'. Тогда $a'/a=b'/b=c'/c=2$⌓θ.

70. 1) Заднее ребро, проходимое сначала сверху вниз, затем снизу вверх и т. д.

2) На расстоянии, равном примерно 0,7 длины ребра (расстояние отсчитывается от верхней вершины тетраэдра).

3) Около $18{,}65^\circ$.

4) Около $14{,}53^\circ$.

72. Один шар черный, другой белый.

Глава III

РЕШЕНИЯ

1

Пусть u и v — искомые числа. Тогда $u^2+v^2=2$. Ясно, что квадраты, удовлетворяющие этому условию, можно представить в виде $u^2=1+k$, $v^2=1-k$.

Если бы в правой части вместо 2 стояло $2\,m^2$ (на решение задачи такая замена не повлияла бы, поскольку, разделив обе части равенства на m^2, мы бы вновь вернулись к исходному условию $u^2/m^2+v^2/m^2=2$), то квадраты можно было бы представить в виде m^2+k и m^2-k.

Поскольку каждое из чисел m^2+k и m^2-k является квадратом некоторого числа, нетрудно усмотреть их сходство с формулами для квадрата суммы и квадрата разности

$$a^2+b^2+2ab \text{ и } a^2+b^2-2ab.$$

Задача была бы решена, если бы нам удалось отыскать такие a и b, что число a^2+b^2 само было бы квадратом. В этом случае k было бы равно $2ab$.

Общая формула для таких a и b известна. Она имеет вид

$$a=x^2-y^2,$$
$$b=2xy.$$

[Нетрудно проверить, что $a^2+b^2=(x^2+y^2)^2$.]
Формула $u^2+v^2=2m^2$ при этом переходит в

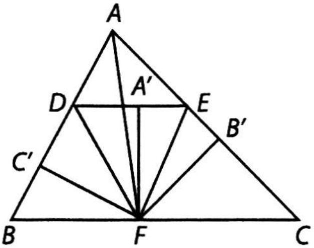
$$(x^2-y^2+2xy)^2+(x^2-y^2-2xy)^2=2(x^2+y^2)^2,$$

или
$$\left(\frac{x^2-y^2+2xy}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{x^2-y^2-2xy}{x^2+y^2}\right)^2=2.$$

Что и требовалось доказать.

2

Анализ. Пусть ABC — данный треугольник, а DE — искомая линия, так что $BD + CE = BC$.



На основании BC от вершины B отложим отрезок BF, равный отрезку BD. Тогда $CF = CE$. Соединим точку F с точками D и E. Нетрудно видеть, что $\angle BDF = \angle BFD = \angle FDE$ (первые два угла равны как углы при основании DF равнобедренного треугольника BDF, последние два — как внутренние накрест лежащие). Аналогично показывается, что $\angle CFE = \angle FED$. Отсюда мы заключаем, что DF — биссектриса угла BDE, EF — биссектриса угла CED, а точка F — центр вневписанной окружности треугольника ADE. Следовательно, перпендикуляры FC', FA' и FB', опущенные из точки F на BD, DE и EC, равны, и прямая AF, соединяющая вершину A треугольника ABC с точкой F, делит угол A пополам.

Отсюда мы получаем способ построения искомой прямой.

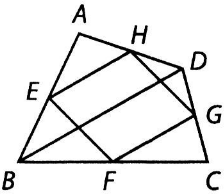
Синтез. Проводим биссектрису AF угла A. Из точки F опускаем перпендикуляры FB' и FC' на стороны AC и AB и восставляем перпендикуляр, на котором откладываем отрезок $FA' = FB'$. Через точку A' проводим прямую DE, перпендикулярную FA' (и, следовательно, параллельную BC). Прямая DE и есть искомая прямая.

Действительно, углы $FA'E$, $FB'C$ и FCD прямые и $FA' = FB' = FC'$. Следовательно, DF — биссектриса угла BDE, а EF — биссектриса угла CED. Но $\angle BFD = \angle FDA'$, а $\angle FDA' = \angle BDF$. Отсюда мы заключаем, что $\angle BFD = \angle BDF$ и $BF = BD$. Аналогичным образом можно показать, что $CF = CE$.

Итак, $BC = BD + CE$, что и требовалось доказать.

3

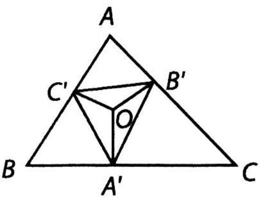
Пусть $ABCD$ — четырехугольник, 3 стороны которого AB, BC и CD делятся пополам вершинами E, H и G параллелограмма $EFGH$.



Соединим отрезком прямой вершины четырехугольника B и D. В треугольнике BCD точки F и G служат серединами сторон BC и CD. Следовательно, $FG \parallel BD$ как средняя линия треугольника BCD. Но $EH \parallel FG$, и, таким образом, $EH \parallel BD$. Отсюда мы заключаем, что треугольники AEH и ABD подобны. Но $AE = ½AB$, следовательно, и $AH = ½AD$, что и требовалось доказать.

4

Пусть ABC — данный, а $A'B'C'$ — искомый треугольники, причем $\angle BA'C' = \angle CA'B'$, $\angle BC'A' = \angle AC'B'$, $\angle AB'C' = \angle CB'A'$.



Прямые $A'C'$ и $A'B'$ образуют равные углы с перпендикуляром к BC, восставленным в точке A'. Аналогичное утверждение справедливо и относительно двух других пар сторон треугольника $A'B'C'$. Следовательно, перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника ABC в точках A', B' и C', делят углы $C'A'B'$, $A'B'C'$, $B'C'A'$ пополам и как биссектрисы внутренних углов треугольника $A'B'C'$ пересекаются в одной точке. Проведем все эти перпендикуляры. Обозначим точку их пересечения через O и положим $\angle C'A'B' = 2\alpha$, $\angle A'B'C' = 2\beta$, $\angle B'C'A' = 2\gamma$. Тогда $\beta + \gamma = \pi - \angle B'OC' = A$, откуда $2A=2(\beta+\gamma)=\pi-2\alpha$, или $\alpha=90^\circ-A$. Следовательно, $\angle BA'C'=A$. Аналогичным образом можно показать, что $\angle BC'A'=C$. Итак, треугольник $BC'A'$ подобен треугольнику BCA (треугольники $C'AB'$ и $A'CB$ также подобны треугольнику BCA).

Выбирая соответственные стороны, получаем

$$BA'=\frac{c}{a}\cdot BC'=\frac{c}{a}\cdot\left(c-AC'\right)=\frac{c}{a}\cdot\left(c-\frac{b}{c}\cdot AB'\right)=$$

$$=\frac{c^2}{a}-\frac{b}{a}\cdot\left(b-CB'\right)=\frac{c^2}{a}-\frac{b^2}{a}+\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}\cdot CA'=$$

$$=\frac{c^2}{a}-\frac{b^2}{a}+a-BA',$$

откуда

$$2BA'=\frac{c^2+a^2-b^2}{a}=\frac{2ca\cos B}{a},$$

или окончательно

$$BA'=c\cos B.$$

Следовательно, точка A' служит основанием перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC данного треугольника. Отсюда ясно, как построить искомый треугольник, что и требовалось доказать.

5

На первый взгляд может показаться, что, *после* того как мы добавили в урну один белый шар и извлекли из нее один белый шар, возникла ситуация, тождественная *исходной*, и, следовательно, вероятность вытащить белый шар вновь стала такой, какой она была сначала, то есть $1/2$. Однако те, кто так думает, заблуждаются.

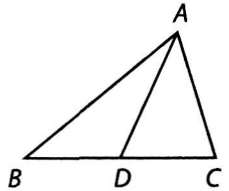
До того, как мы положили в урну белый шар, вероятность присутствия в ней одного белого шара была равна $1/2$ и такой же была вероятность того, что в урне находился 1 черный шар. Следовательно, *после того*, как мы положили в урну белый шар, вероятности того, что в ней находятся 2 белых шара или

1 белый и 1 черный, одинаковы и равны ½. С какой вероятностью шар, извлекаемый из урны, будет белым в каждом из этих двух случаев? Если в урне 2 белых шара, то извлечение белого шара произойдет с вероятностью 1, то есть будет достоверным событием. Если в урне 1 белый и 1 черный шар, то вероятность извлечь белый шар равна ½. Таким образом, после извлечения одного белого шара вероятности того, что урна до извлечения его содержала 2 белых шара или 1 белый и 1 черный шар, пропорциональны соответственно $\frac{1}{2}\cdot 1$ и $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, то есть ½ и ¼, или 2 и 1. Следовательно, эти вероятности равны ⅔ (2 белых шара в урне перед вытаскиванием белого шара) и ⅓ (в урне 1 белый и 1 черный шар). Таким образом, после извлечения белого шара вероятность того, что в урне остался 1 белый шар, равна ⅔, а вероятность того, что в урне остался 1 черный шар, ⅓.

Итак, вероятность вытащить при очередном извлечении шара из урны белый шар равна ⅔, что и требовалось доказать.

6

Пусть $2a$, $2b$, $2c$ — стороны треугольника, α, β, γ — его медианы.



Так как $\angle BDC$ — развернутый, то

$$\triangle(\angle ADB)+\triangle(\angle ADC)=0$$

или

$$\frac{a^2+\alpha^2-4c^2}{2\alpha a}+\frac{a^2+\alpha^2-4b^2}{2\alpha a}=0,$$

откуда $$2\alpha^2+2a^2-4b^2+4c^2=0$$

и, следовательно, $$\alpha^2=-a^2+2b^2+2c^2.$$

Аналогично $$\beta^2=2a^2-b^2+2c^2,$$

$$\gamma^2=2a^2+2b^2-c^2.$$

Исключим b и c. Для этого подберем числа k, l и m так, чтобы выполнялись равенства

$$2k-l+2m=0,$$

$$2k+2l-m=0.$$

Вычитая из второго равенства первое, находим

$$3(l-m)=0,$$

то есть $l=m$. Следовательно,

$$2k=-l=-m,$$

и мы можем, в частности, положить $k=-1$, $l=m=2$. Умножая на $k=-1$ обе части выражения для α^2, на $l=2$ — обе части выражения для β^2 и на $m=2$ — обе части выражения для γ^2 и складывая правые и левые части всех трех выражений, получаем

$$-\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2=9a^2,$$

откуда

$$a^2=\frac{-\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2}{9}.$$

Следовательно,

$$BC\left(=2a\right)=\frac{2}{3}\sqrt{-\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2}.$$

Аналогичные выражения нетрудно получить и для других сторон треугольника. Итак, выражение для длин сторон треугольника через его медианы получено.

По теореме косинусов

$$\frown A=\frac{b^2+c^2+a^2}{2bc}=$$

$$=\frac{2\alpha^2-\beta^2+2\gamma^2+2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2+\alpha^2-2\beta^2-2\gamma^2}{2\sqrt{2\alpha^2-\beta^2+2\gamma^2}\,\sqrt{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}}=$$

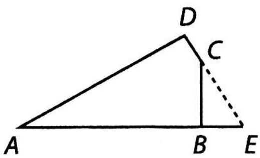
$$=\frac{5\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{2\sqrt{2\alpha^2-\beta^2+2\gamma^2}\sqrt{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}}.$$

Аналогичные выражения получаются и для косинусов углов B и C. Что и требовалось доказать.

7

Пусть AB и AD — данные стороны, углы B и D — прямые, и пусть $AB=b$, $AD=d$.

Продолжим стороны DC и AB до пересечения в точке E. Имеем



$$AE=AD\sec A=d\sec A,$$

откуда

$$BE=d\sec A-b.$$

Далее,

$$BC=BE\operatorname{tg}E=\left(d\sec A-b\right)\operatorname{ctg}A=\frac{d-b\cos A}{\sin A}$$

и аналогично

$$CD=\frac{b-d\cos A}{\sin A}.$$

Ответ на первый вопрос получен.

Вычислим теперь площадь S четырехугольника:

$$S=\frac{1}{2}\left(AB\cdot BC+AD\cdot DC\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b\left(d-b\cos A\right)+d\left(b-d\cos A\right)}{\sin A}=$$

$$=\frac{2bd-\left(b^2+d^2\right)\bigtriangleup A}{2\frown A}.$$

Это дает ответ и на второй вопрос.

8

Пусть m — число людей, k — число шиллингов у последнего (самого бедного) из них. После первого тура каждый из участников игры станет на 1 шиллинг беднее, а сумма, передаваемая последним из игроков первому, составит m шиллингов. Следовательно, после некоторого числа k туров каждый участник станет беднее на k шиллингов, у последнего участника не останется ни одного шиллинга, а сумма, передаваемая им первому участнику, составит mk шиллингов. Игра прекратится на следующем туре, когда очередь пополнять «передвижную кассу» дойдет до последнего игрока. В этот момент в «кассе» будет $mk+m-1$ шиллингов, у предпоследнего игрока не останется ничего, а у первого $m-2$ шиллингов.

Ясно, что единственными участниками, «состояния» которых относятся как $4:1$, могут быть лишь первый и последний игроки. Следовательно, либо

$$mk+m-1=4(m-2),$$

либо

$$4(mk+m-1)=m-2.$$

Первое уравнение преобразуем к виду

$$mk=3m-7,$$

или

$$k=3-\frac{7}{m}.$$

Ясно, что оно не имеет иных решений в целых числах, кроме $m=7$, $k=2$.

Второе уравнение преобразуется к виду

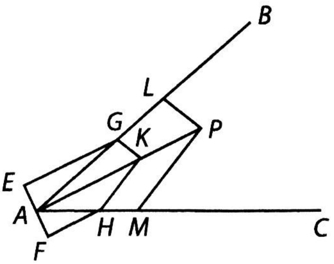
$$4mk=2-3m.$$

Оно не имеет решений в целых положительных числах.

Итак, ответ задачи: 7 человек; 2 шиллинга.

9

Пусть AB и AC — данные прямые, P — данная точка.



Соединим точку пересечения прямых A с точкой P. Через A проведем отрезок $EAF \perp AP$ и делящийся в точке A пополам ($EA = AF$). Через концы его E и F проведем прямые EG и FH, параллельные AP и пересекающиеся с данными прямыми AB и AC в точках G и H. Соединим G и H и на отрезке GH как на диаметре опишем полуокружность, пересекающуюся с AP в точке K. Соединим K с точками G и H. Угол GKH как вписанный в полуокружность будет прямым. Через точку P проведем $PL \parallel KG$ и $PM \parallel KH$. Треугольник APL подобен треугольнику AKG, при этом $AP = 2AK$. Точно так же треугольник APM подобен треугольнику AKH, и отношение соответственных сторон равно 2.

Но треугольники AKG и AKH равны, поскольку у них общее основание AK и равные высоты AE и AF. Следовательно, треугольники APL и APM также равны, и угол LPM, очевидно, равен углу GKH, то есть $\angle LPM = 90°$, что и требовалось доказать.

10

Обозначим достоинство монет, спрятанных в бильярдных шарах, через x, y и z. Пусть $x + y + z = s$.

Вероятность того, что луза, в которую скатились шары, вмещает 2 шара, равна 2/3. Математическое ожидание суммы денег, оказавшейся в лузе, то есть среднее значение величин $y + z$, $z + x$, $x + y$, в этом случае равно $2s/3$.

Вероятность того, что луза, в которую скатились шары, вмещает лишь 1 шар, равна 1/3, и в этом случае математическое ожидание суммы денег, оказавшихся в лузе, равно $s/3$.

Следовательно, полное математическое ожидание суммы, оказавшейся в лузе, составляет

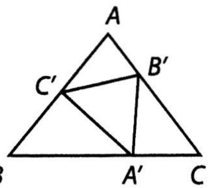
$$\frac{4s}{9}+\frac{s}{9}=\frac{5s}{9}.$$

По условию задачи $5s/9=30$ пенсов, откуда

$$s=54 \text{ пенса}=4 \text{ шиллинга } 6 \text{ пенсов.}$$

Итак, в шарах спрятаны либо 2 флорина и 1 монета в 6 пенсов, либо полкроны и 2 шиллинга, что и требовалось доказать.

11



По теореме синусов

$$\frac{BA'}{A'C'}=\frac{\sin(B+\theta)}{\sin B} \quad \text{и} \quad \frac{A'C}{A'B'}=\frac{\sin\theta}{\sin C},$$

откуда

$$BA'=\frac{\sin(B+\theta)}{\sin B}ka \quad \text{и} \quad A'C=\frac{\sin\theta}{\sin C}kb.$$

Но $BA'+A'C=a$. Следовательно,

$$k=\frac{a}{\dfrac{a\sin(B+\theta)}{\sin B}+\dfrac{b\sin\theta}{\sin C}}=\frac{\sin A}{\dfrac{\sin A\sin(B+\theta)}{\sin B}+\dfrac{\sin B\sin\theta}{\sin C}}=$$

$$=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A\sin(B+\theta)\sin C+\sin^2 B\sin\theta}=$$

$$=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A\sin C\left(\sin B\cos\theta+\cos B\sin\theta\right)+\left(1-\cos^2 B\right)\sin\theta}=$$

$$=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\theta+\sin\theta\left(\sin A\sin C\cos B+\cos^2 B\right)+\cos\theta\sin A\sin B\sin C}=$$

$$=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\theta+\sin\theta\cos B\left[\sin A\sin C+\cos\left(A+C\right)\right]+\cos\theta\sin A\sin B\sin C}=$$

$$=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\theta\left(1+\cos A\cos B\cos C\right)+\cos\theta\sin A\sin B\sin C},$$

что и требовалось доказать.

При $\theta=90^\circ$

$$k=\frac{\sin A\sin B\sin C}{1+\cos A\cos B\cos C}.$$

12

Пусть s — полупериметр, m — площадь треугольника и v — объем прямоугольного параллелепипеда.

По формуле Герона

$$m=\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)},$$

откуда

$$m^2=s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)$$

и

$$\frac{m^2}{s}=s^3-s^2\left(a+b+c\right)+s\left(bc+ca+ab\right)-abc=$$

$$=s^3-2s^3+s\left(bc+ca+ab\right)-v.$$

Следовательно,

$$\frac{m^2}{s^2}+\frac{v}{s}+s^2=bc+ca+ab,$$

$$2\left(\frac{m^2}{s^2}+\frac{v}{s}+s^2\right)=(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$

$$=4s^2-\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Разрешая последнее равенство относительно $(a^2+b^2+c^2)$, получаем

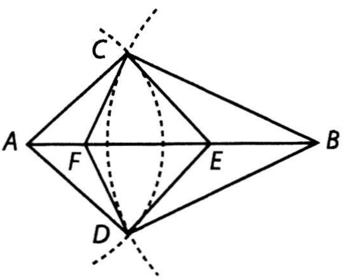
$$a^2+b^2+c^2=2\left(s^2-\frac{v}{s}-\frac{m^2}{s^2}\right),$$

что и требовалось доказать.

13

Пусть A и B — центры окружностей, C и D — точки их пересечения и $CFDE$ — четырехугольник, площадь которого требуется найти.

Обозначим стороны треугольника через a, b и c, а его углы — через α, β и γ. Тогда



$$CE=b\operatorname{tg}\alpha,\ CF=a\operatorname{tg}\beta.$$

Кроме того,

$$\angle FCE=\angle ACE+\angle FCB-\gamma=\pi-\gamma.$$

Следовательно,

$$\sin FCE=\sin\gamma,$$

площадь треугольника FCE равна

$$\frac{1}{2}ab\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\sin\gamma.$$

Отсюда получаем первое выражение для площади четырехугольника $ACBD$:

$$S = \frac{ab \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\cos\alpha \cos\beta}.$$

Обозначив через M площадь треугольника ABC, находим

$$\sin\alpha = \frac{2M}{bc}, \quad \sin\beta = \frac{2M}{ca}, \quad \sin\gamma = \frac{2M}{ab}.$$

Подставляя $\sin\alpha$, $\sin\beta$ и $\sin\gamma$ в выражение для S и заменяя $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ по теореме косинусов, приходим к окончательному выражению для площади четырехугольника:

$$S = ab \cdot \frac{8M^3}{a^2b^2c^2} \cdot \frac{4bc \cdot ca}{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)} =$$

$$S = \frac{32M^3}{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)},$$

что и требовалось доказать.

14

Задача сводится к доказательству тождества

$$3(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)^2 + (b^2-2bc+c^2) + (c^2-2ca+a^2) +$$

$$+ (a^2-2ab+b^2) = (a+b+c)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2.$$

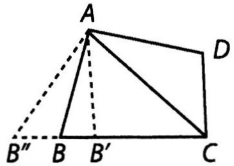
Числовые примеры (подобранные позднее с карандашом и бумагой в руках):

$$3(1^2+2^2+3^2) = 6^2+1^2+2^2+1^2,$$

$$3(1^2+3^2+7^2) = 11^2+4^2+6^2+2^2.$$

15

Пусть $ABCD$ — четырехугольник, вписанный в данную фигуру. Проведем диагональ AC и опишем окружность вокруг треугольника ACD. Если окружность не проходит через точку B, обозначим через B' точку пересечения окружности со стороной BC (или через B'' — точку пересечения окружности с продолжением стороны BC). Соединим вершину A с точкой B' (или B''). Сумма углов $AB'C$ (или $AB''C$) и ADC равна 180°. Таким образом, $\angle AB'C$ равен $\angle ABC$, что абсурдно. Следовательно, окружность проходит через точку B.



Можно показать, что любая точка той части периметра фигуры, которая расположена по одну сторону от диагонали AC четырехугольника $ABCD$ с точкой D, также лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ACD.

Аналогичное утверждение справедливо и для той части периметра фигуры, которая расположена по другую сторону диагонали AC, чем точка D.

Следовательно, данная фигура совпадает с окружностью, что и требовалось доказать.

16

Априорные вероятности содержимого первой урны одинаковы: с вероятностью $1/2$ в ней может быть белый шар и с вероятностью $1/2$ — черный. После того как в первую урну положили белый шар, вероятности комбинаций «белый — белый» и «черный — белый», очевидно, также равны $1/2$. Для первой комбинации (2 белых шара) вероятность «наблюденного события» равна 1, для второй (1 черный и 1 белый шар) — $1/2$. Следовательно, после того как из первой урны извлекли белый шар, вероятности того, что в урнах находилось по 1 черному и 1 белому шару, пропорциональны 1 и $1/2$, то есть 2 и 1. Их истинные значения равны $2/3$ и $1/3$.

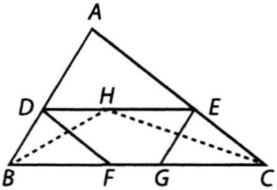
Выбирая наугад урну и извлекая из нее шар, мы вытащим белый шар с вероятностью $1/2 \cdot 2/3 + 1/2 \cdot 1/3 = 1/2$.

Пересыпая содержимое одной урны в другую и извлекая затем шар, мы вытащим белый шар с вероятностью $2/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1/4 = 5/12$.

Следовательно, первый способ предпочтительнее, что и требовалось доказать.

17

Анализ. Пусть ABC — данный треугольник, DE — искомая линия.



Через концы D и E отрезка DE проведем $DF \parallel AC$ и $EG \parallel AB$. По условию задачи $DF + EG = DE$.

Поскольку $BDEG$ — параллелограмм, $DB = EG$. Отрезки EC и DF равны как противоположные стороны параллелограмма $DFCE$. Следовательно, $DB + EC = DE$. Идея построения теперь ясна.

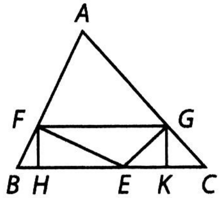
Синтез. Проведем биссектрисы углов B и C. Пусть H — точка их пересечения. Через точку H проведем $DE \parallel BC$, а через точки D и E — прямые $DF \parallel AC$ и $EG \parallel AB$.

Поскольку $DE \parallel BC$, $\angle DHB = \angle HBF$ (как внутренние накрест лежащие). Кроме того, поскольку BH — биссектриса угла B. $\angle HBF = \angle DBH$. Следовательно, $DB = DH$ и аналогично $EC = EH$, откуда $DB + EC = DF$. Далее, поскольку $BDEG$ и $DFCE$ — параллелограммы, $EG = DB$ и $DF = EC$, откуда $DF + EG = DE$, что и требовалось доказать.

18

1. Пусть E — искомая точка. Опустим из нее перпендикуляры EF и FG на стороны AB и AC треугольника ABC. Соединим отрезком прямой основания этих перпендикуляров F и G. Из F и G опустим перпендикуляры FH и GK на BC. Пусть $BE = x$, $EC = y$.

Так как $FG \parallel BC$, то $FH = GK$. Кроме того $EF = x \pitchfork B$ и $FH = EF \pitchfork (\angle FEH) = EF ⌓ B = x \pitchfork B ⌓ B$.

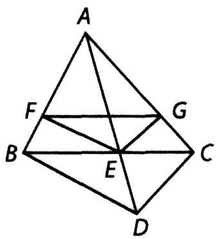


Аналогично $GK = y \frown C \vartriangle C$. Но $FH = GK$.

Следовательно, $x \frown B \vartriangle B = y \frown C \vartriangle C$, или

$$\frac{x}{y} = \frac{\frown 2C}{\frown 2B},$$

что и требовалось доказать.



2. Через вершины B и C данного треугольника проведем прямые, составляющие прямой угол со сторонами AB и AC. Пусть D — точка пересечения этих прямых. Прямая, соединяющая вершину треугольника A с точкой D, пересекает сторону BC в точке E. Из E опустим перпендикуляры EF и EG на AB и AC и соедними их основания F и G.

Поскольку BD и FE перпендикуляры AB, они параллельны между собой и $AF : FB = AE : ED$. Точно так же $CD \parallel GE$, поскольку они перпендикулярны AC, и $AG : GC = AE : ED$. Таким образом $AF : FB = AG : GC$, откуда следует, что $FG \parallel BC$. Что и требовалось доказать.

19

Обозначим урны в том порядке, как они упоминаются в условии задачи: A, B и C (урна A, например, содержит 1 белый и 1 черный шар и т. д.).

Урны могут располагаться шестью различными способами: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB и CBA. Априори вероятность каждого расположения равна $1/6$. Поскольку вероятности всех шести комбинаций урн равны, мы можем не умножать каждую из них на вероятность наблюденного события (из условия задачи известно, что из одной урны был извлечен белый шар, из второй — черный), а просто предположить, что вероятность наблюденного события для любого расположения урн пропорциональна апостериорной вероятности этого расположения, то есть вероятности расположения *после* извлечения из первой урны белого шара, а из второй — черного.

Вероятности наблюденного события равны:

для ABC $\quad 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$,
для ACB $\quad 1/2 \cdot 1/4 = 1/8$,
для BAC $\quad 2/3 \cdot 1/2 = 1/3$,
для BCA $\quad 2/3 \cdot 1/4 = 1/6$,
для CAB $\quad 3/4 \cdot 1/2 = 3/8$,
для CBA $\quad 3/4 \cdot 1/3 = 1/4$.

Следовательно, апостериорные вероятности пропорциональны 4, 3, 8, 4, 9, 6, то есть равны этим числам, деленным на 34.

Отсюда мы получаем, что вероятность вытащить белый шар из оставшейся (третьей) урны равна

$$\frac{1}{34}\cdot\left(4\cdot\frac{3}{4}+3\cdot\frac{2}{3}+8\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+9\cdot\frac{2}{3}+6\cdot\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{34}\cdot(3+2+6+2+6+3)=\frac{22}{34}=\frac{11}{17}.$$

20

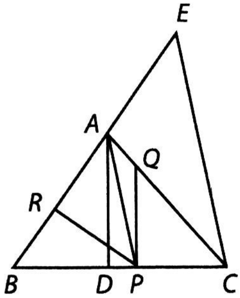
Анализ. Пусть ABC — данный треугольник, P — искомая точка. Из P восставим перпендикуляр PQ к BC и опустим перпендикуляр PR к AB. По условию задачи $PQ=PR$.

Следовательно,

$$PC\,\mathrm{tg}\,C = PB \frown B.$$

Опустив из вершины A перпендикуляр AD на сторону BC, получим

$$PC : PB = \frown B : \mathrm{tg}\,C = \frac{AD}{AB} : \frac{AD}{DC} = DC : AB.$$



Синтез. Из вершины A опустим перпендикуляр AD на сторону BC. Сторону AB продолжим за вершину A и отложим на продолжении $AE = DC$. Соединим точки E и C. Через A проведем $AP \parallel EC$, а из точки P восставим перпендикуляр PQ к основанию BC и опустим перпендикуляр PR к AB.

По построению

$$\frac{PQ}{PC} = \frac{AD}{DC} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AB}{DC} = \frac{PR}{PB} \cdot \frac{AB}{AE} = \frac{PR}{PB} \cdot \frac{PB}{PC} = \frac{PR}{PC}.$$

Следовательно,

$$PQ = PR,$$

что и требовалось доказать.

21

1. n-й член ряда имеет вид $n(n+2)(n+4)$. Следовательно, $(n+1)$-й член — $(n+1)(n+3)(n+5)$.

Преобразуем последнее выражение:

$$\begin{gathered}(n+1)(n+2+1)(n+5) = (n+1)(n+2)(n+5) + (n+1)(n+5) = \\ = (n+1)(n+2)(n+3+2) + (n+1)(n+2+3) = \\ = (n+1)(n+2)(n+3) + 2(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) + 3(n+1) = \\ = (n+1)(n+2)(n+3) + 3(n+1)(n+2) + 3(n+1).\end{gathered}$$

Отсюда получаем выражение для суммы n членов ряда:

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + n(n+1)(n+2) + 3n(n+1) + C.$$

Подставляя $n=1$, находим, что $C=0$.

Следовательно,

$$S_n = n(n+1)\left(\frac{n^2+5n+6}{4}+n+2+\frac{3}{2}\right)=$$

$$=n(n+1)\frac{n^2+9n+20}{4}=\frac{n(n+1)(n+4)(n+5)}{4},$$

что и требовалось доказать.

2. $S_{100}=\dfrac{100\cdot 101\cdot 104\cdot 105}{4}=100\cdot 101\cdot 26\cdot 105.$

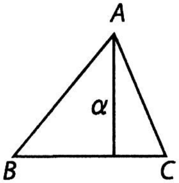
Но $101\cdot 105=10605$. Следовательно, $101\cdot 105\cdot 13=130000+$ $+7800+65=137865$. Умножив это число на 2, получим $274000+1730=275730$, откуда

$$S_{100}=27573000.$$

22

Пусть α, β, γ — данные высоты. Вычисляя площадь треугольника тремя различными способами, получим

$$\alpha a=\beta b=\gamma c,$$



откуда

$$\alpha \frown A=\beta \frown B=\gamma \frown C.$$

Пусть k означает любое из следующих равных отношений:

$$k=\frac{\frown A}{\beta\gamma}=\frac{\frown B}{\gamma\alpha}=\frac{\frown C}{\alpha\beta}.$$

Тогда

$$\frown A=k\beta\gamma,\quad \frown B=k\gamma\alpha,\quad \frown C=k\alpha\beta.$$

Но $\frown(A+B)=\bigtriangleup C$. Поэтому

$$\begin{gathered}
\frown A \bigtriangleup B+\bigtriangleup A \frown B=\frown C,\\
\frown A \bigtriangleup B=\frown C-\bigtriangleup A \frown B,\\
\frown^2 A(1-\frown^2 B)=\frown^2 C+\frown^2 B(1-\frown^2 A)-2\frown C \bigtriangleup A \frown B,\\
\frown^2 A-\frown^2 A\frown^2 B=\frown^2 C+\frown^2 B-\frown^2 A\frown^2 B-2\frown B\frown C \bigtriangleup A,\\
\frown^2 A-\frown^2 B-\frown^2 C=-2\frown B\frown C \bigtriangleup A.
\end{gathered}$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат, получаем:

$$\begin{gathered}
(\frown^4 A+\frown^4 B+\frown^4 C)-2\frown^2 A\frown^2 B-\\
-2\frown^2 A\frown^2 C+2\frown^2 B\frown^2 C=\\
=4\frown^2 B\frown^2 C(1-\frown^2 A),\\
(\frown^4 A+\frown^4 B+\frown^4 C)-2(\frown^2 A\frown^2 B+\frown^2 A\frown^2 C+\frown^2 B\frown^2 C)+\\
+4\frown^2 A\frown^2 B\frown^2 C=0.
\end{gathered}$$

Подставляя вместо $\frown A$, $\frown B$ и $\frown C$ их выражения через k, α, β и γ и деля на k^4, преобразуем это равенство к виду

$$(\beta^4\gamma^4+\gamma^4\alpha^4+\alpha^4\beta^4)-2\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+4k^2\alpha^4\beta^4\gamma^4=0,$$

откуда

$$k^2=\frac{2\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)-\left(\beta^4\gamma^4+\gamma^4\alpha^4+\alpha^4\beta^4\right)}{4\alpha^4\beta^4\gamma^4}.$$

Подставляя полученное выражение для k в формулы $A=k\beta\gamma$ и т. д., найдем углы треугольника (и, таким образом, ответим на второй вопрос задачи).

Пользуясь соотношениями $\alpha=b\frown C$, $\beta=c\frown A$, $\gamma=a\frown B$, получим

$$a=\frac{\gamma}{\frown B}=\frac{\gamma}{k\gamma\alpha}=\frac{1}{k\alpha}$$

и аналогично

$$b=\frac{1}{k\beta},\quad c=\frac{1}{k\gamma}.$$

Тем самым мы дадим ответ на первый вопрос задачи.

Наконец, площадь треугольника S можно записать в виде

$$S = \frac{bc \frown A}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{k\beta}\cdot\frac{1}{k\gamma}k\beta\gamma = \frac{1}{2k},$$

что дает ответ на третий (и последний) вопрос задачи.

23

Исходные вероятности различных вариантов содержимого урны были такими:

2 белых шара	$1/4$
1 белый и 1 черный шар	$1/2$
2 черных шара	$1/4$

После того как в урну положили 2 белых шара и 1 черный, вероятности соответствующих вариантов стали:

4 белых шара и 1 черный	$1/4$
3 белых и 2 черных шара	$1/2$
2 белых и 3 черных шара	$1/4$

Вероятности наблюденного события (извлечения 2 белых шаров и 1 черного) для этих вариантов равны соответственно $3/5$, $3/5$ и $3/10$.

Следовательно, после того как из урны извлечены 2 белых шара и 1 черный, вероятности трех вариантов ее содержимого пропорциональны $3/20$, $3/10$ и $3/40$, то есть 2, 4 и 1, и, таким образом, равны $2/7$, $4/7$ и $1/7$.

Итак, вероятности различных вариантов стали теперь такими:

2 белых шара	$2/7$
1 белый и 1 черный шар	$4/7$
2 черных шара	$1/7$

После того как в урну добавили еще 1 белый шар, те же вероятности соответствовали следующим вариантам:

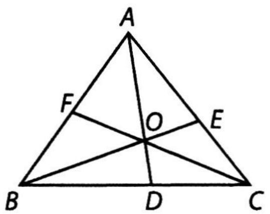
3 белых шара	$^2/_7$
2 белых шара и 1 черный	$^4/_7$
1 белый шар и 2 черных	$^1/_7$

Вероятность извлечения белого шара для этих вариантов равна соответственно 1, $^2/_3$ и $^1/_3$.

Следовательно, после извлечения белого шара вероятности этих вариантов заполнения урны становятся пропорциональными $^2/_7$, $^8/_{21}$ и $^1/_{21}$, или 6, 8 и 1, то есть равными $^6/_{15}$, $^8/_{15}$ и $^1/_{15}$.

Таким образом, вероятность того, что в урне осталось 2 белых шара, равна $^6/_{15}$, или $^2/_5$, что и требовалось доказать.

24



$$\frac{DO}{OA}=\frac{S_{DOC}}{S_{ABC}}=\frac{S_{DOB}}{S_{OAB}}=\frac{S_{OBC}}{S_{OCA}+S_{OAB}}.$$

Следовательно,

$$\frac{DO}{DA}=\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}.$$

Аналогично

$$\frac{EO}{EB}=\frac{S_{OCA}}{S_{ABC}} \quad \text{и} \quad \frac{FO}{FC}=\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}},$$

откуда

$$\frac{DO}{DA}+\frac{EO}{EB}+\frac{FO}{FC}=1,$$

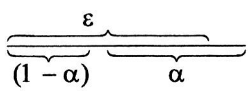
что и требовалось доказать.

25

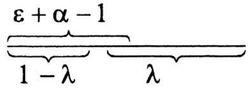
Обозначим одноглазых пациентов буквой *Г* (глаз), одноруких — *Р* (рука) и одноногих *Н* — (нога).

Наименьшую долю *Г*- и *Р*-пациентов, которые к тому же являются *Н*-пациентами, мы найдем, выстроив всех пациентов в ряд так, чтобы класс *ГР*-пациентов начинался с одного конца ряда, *Н*-класс — с другого, и подсчитав, какую долю от всех пациентов составляет та часть ряда, на которой *ГР*- и *Н*-классы перекрываются. Чем меньше будет *ГР*-класс, тем меньше будет и общий отрезок ряда у него с *Н*-классом. Следовательно, чтобы найти ответ на вопрос задачи, необходимо минимизировать *ГР*-класс пациентов.

Для этого мы перестроим пациентов так, чтобы *Г*-пациенты стояли, начиная с одного конца ряда, а *Р*-пациенты с другого. Наименьшая доля, которую *ГР*-пациенты составляют от общего числа пациентов госпиталя, равна длине перекрывающейся части отрезков длиной ε и α, отложенных навстречу друг другу с противоположных концов единичного отрезка, то есть $\varepsilon-(1-\alpha)=\varepsilon+\alpha-1$.



Аналогичным построением найдем долю, которую составляют *ГРН*-пациенты от общего числа пациентов госпиталя:

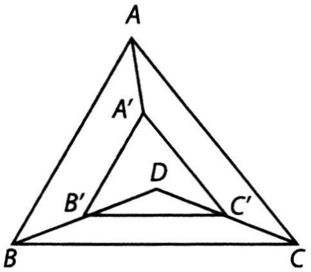


$$\varepsilon+\alpha-1-(1-\lambda)=\varepsilon+\alpha+\lambda-2,$$

что и требовалось доказать.

26

Анализ. Пусть ABC — данный, а $A'B'C'$ — искомый треугольники, и пусть k — отношение сходственных сторон, меньшее 1 (например, $k=B'C'/BC$).



Поскольку $BB'=CC'$ и $BC \parallel B'C'$, нетрудно доказать (опустив из B' и C' перпендикуляры на BC, которые должны быть равны по длине), что $\angle B'BC=\angle C'CB$ (и аналогично $\angle A'AC=$ $=\angle C'CA$, $\angle A'AB=\angle B'BA$).

Обозначим для краткости $\angle B'BC$ через θ. Тогда $\angle C'CB=\theta$ и, следовательно,

$$\angle C'CA=C-\theta=\angle A'AC,$$

$$\angle A'AB=A-(C-\theta)=\angle B'BA.$$

Но $\angle B'BC+\angle B'BA=B$, поэтому $\theta+A-(C-\theta)=B$, откуда

$$2\theta=B+C-A=180^\circ-2A,$$

или окончательно

$$\theta=90^\circ-A.$$

Таким образом, продолжив BB' за B' и CC' за C' до пересечения в точке D, мы получим равнобедренный треугольник DBC с углом при вершине D, равным $2A$.

Описав окружность вокруг треугольника ABC и соединив ее центр с вершинами B и C, мы убедимся, что треугольник с вершинами в центре описанной окружности и точках B и C удовлетворяет тем же условиям. Следовательно, центр описанной окружности совпадает с точкой D.

Синтез. Из середин сторон данного треугольника ABC восставим перпендикуляры до пересечения в точке D и соединим ее с вершинами B и C. На отрезке BD от точки D

отложим $DB' = kDB$ и через конец B' отложенного отрезка проведем $B'C' \parallel BC$.

Нетрудно доказать, что $B'C' = kBC$. Точно так же нетрудно доказать, что точка пересечения прямых, проведенных через B' и C' параллельно сторонам AB и AC данного треугольника, лежит на отрезке AD, причем $A'B' = kAB$, $A'C' = kAC$, что и требовалось доказать.

27

Обозначим урны через A, B и C. Если после извлечения двух шаров нетронутой осталась урна A, то вероятность наблюденного события (извлекли 1 белый и 1 черный шар) равна половине вероятности извлечения белого шара из урны B и черного — из урны C плюс половина вероятности извлечения черного шара из урны B и белого — из урны C, то есть

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Аналогично если нетронутой осталась урна B, то вероятность наблюденного события равна

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},$$

а если нетронутой осталась урна C, то

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{36}.$$

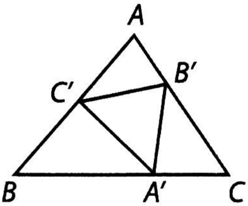
Следовательно, вероятности того, что нетронутыми остались урны A, B, C, относятся между собой как $9:9:7$, то есть равны $9/25$, $9/25$ и $7/25$.

Вероятность извлечь белый шар из урны A равна $5/6$, поэтому вероятность вытащить белый шар из оставшейся урны, если осталась урна A, равна $5/6 \cdot 9/25 = 3/10$. Аналогично для урны B мы получаем вероятность $6/25$ и для урны C — $7/50$. Вероятность вообще вытащить белый шар из оставшейся урны равна сумме этих вероятностей, то есть

$$\frac{15+12+7}{50}=\frac{34}{50}=\frac{17}{25}.$$

28

Пусть ABC — данный треугольник, стороны которого разделены в точках A', B', C' в крайнем и среднем отношении, и M — его площадь.



Обозначим длину отрезка BA' через x. Тогда

$$x^2 = a(a-x),$$

или, что то же,

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку длина отрезка — величина неотрицательная, из двух корней мы выбираем лишь

$$x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Зная x, вычисляем площадь треугольника $AB'C'$:

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\left[b-\frac{b}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right]\frown A =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(3-\sqrt{5}\right)bc \frown A =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4\sqrt{5}-8\right)M = \left(\sqrt{5}-2\right)M.$$

Площади треугольников $BC'A'$ и $CA'B'$ вычисляются аналогично.

Сумма площадей треугольников $AB'C'$, $BC'A$ и $CA'B$ равна $3\left(\sqrt{5}-2\right)$, а площадь треугольника $A'B'C' = \left(7-3\sqrt{5}\right)M$.

29

Требуемое утверждение можно вывести из тождества

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2.$$

Действительно, правую часть тождества можно представить либо как

$$a^2c^2=b^2d^2+2acbd+a^2d^2+b^2c^2-2adbc,$$

либо как

$$a^2c^2+b^2d^2-2acbd+a^2d^2+b^2c^2+2adbc,$$

то есть либо как

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2,$$

либо как

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Если последние две суммы *тождественны* (то есть отличаются друг от друга самое большое лишь порядком слагаемых), то число $ac+bd$ должно совпадать с числом $ad+bc$, поскольку $ac+bd\neq ac-bd$. Отсюда следует, что

$$a(c-d)-b(c-d)=0,$$
$$(a-b)(c-d)=0,$$

то есть что какое-то из выражений

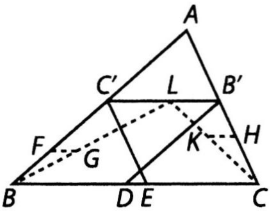
$$a^2c^2+b^2d^2+2acbd+a^2d^2+b^2c^2-2adbc,$$

$$a^2c^2+b^2d^2-2acbd+a^2d^2+b^2c^2+2adbc$$

представляет собой сумму двух *тождественных* квадратов.

Отсюда, рассуждая от противного, мы заключаем, что если *каждая* из скобок в исходном тождестве содержит 2 *различных* квадрата, то произведение можно представить в виде суммы квадратов двух чисел двумя различными способами. Что и требовалось доказать.

30



Анализ. Пусть ABC — данный треугольник. Предположим, что прямая $B'C'$ проведена так, что $B'D \parallel AB$, $C'E \parallel AC$ и $B'D + C'E = 2B'C'$.

По теореме о равенстве противоположных сторон параллелограмма $B'D = C'B$ (из параллелограмма $BDB'C'$) и $C'E = B'C$ (из параллелограмма $C'ECB'$), вследствие чего $B'C + C'B = 2B'C'$. Поэтому, если на $B'C'$ отложить $B'L = \frac{1}{2}B'C$, то $C'L = \frac{1}{2}C'B$.

Синтез. На BC' выберем произвольную точку F и через нее проведем прямую, параллельную основанию треугольника, на которой отложим $FG = \frac{1}{2}BF$; через точку В и конец G построенного отрезка проведем прямую.

Аналогичным образом выберем произвольную точку H на CB', проведем через H прямую, параллельную BC, отложим на ней отрезок $HK = \frac{1}{2}HC$ и через конец H построенного отрезка и вершину C треугольника проведем другую прямую.

Обе проведенные прямые продолжим до пересечения в точке L. Через L проведем $B'C' \parallel BC$, а через концы отрезка $B'C'$ — прямые $C'E \parallel AC$ и $B'D \parallel AB$.

Так как по построению $FG = \frac{1}{2}FB$, из подобия треугольников BFG и $BC'L$ следует, что и $C'L = \frac{1}{2}BC'$, и (по аналогичным причинам) $B'L = \frac{1}{2}B'C$. Таким образом, $C'B' = \frac{1}{2}(C'B + B'C)$, или $C'B + B'C = 2B'C'$. Но по теореме о равенстве противоположных сторон параллелограмма $C'B = B'D$ и $B'C = C'E$, откуда $B'D + C'E = 2B'C'$, что и требовалось доказать.

31

1 июля мои карманные часы за 10 *ч* ушли вперед по сравнению со стенными часами на 5 *мин*, то есть спешили на $\frac{1}{2}$ *мин* в час, или на 2 *мин* в 4 *ч*. Следовательно, когда

карманные часы показывали полдень, на стенных часах было 12 *ч* 2 *мин*. Иначе говоря, в тот момент, когда *точное* время было 12 *ч* 5 *мин*, стенные часы отставали на 3 *мин* (от точного времени).

30 июля карманные часы отстали от стенных на 1 *мин* за 10 *ч*, то есть отставали на 6 *с* в час, или на 19 *с* за 3 *ч* 10 *мин*. Таким образом, когда карманные часы показывали 12 *ч* 10 *мин*, на стенных было 12 *ч* 7 *мин* 19 *с*. Иначе говоря, в момент, когда *точное* время было 12 *ч* 5 *мин*, стенные часы спешили на 2 *мин* 19 *с* (по сравнению с точным временем).

Итак, стенные часы уходят вперед по сравнению с точным временем на 5 *мин* 19 *с* за 29 дней, что составляет 319 *с* за 29 дней, или 11 *с* в день, или $11/24 \cdot 12$ *с* за 5 *мин*. Следовательно, 5 *мин* точного времени соответствуют 5 *мин* 11/288 *с*, отсчитанным по карманным часам.

31 июля, когда точное время равнялось 12 *ч* 5 *мин*, стенные часы ушли вперед на 2 *мин* 19 *с* + 11 *с*, то есть показывали 12 *ч* $7\frac{1}{2}$ *мин*. Следовательно, если вернуться на 5 *мин* назад по *точному* времени, то стрелки стенных часов следует отвести на 5 *мин* 11/288 *с* назад, то есть поставить так, чтобы они показывали 12 *ч* 2 *мин* $29\,{}^{277}/_{288}$ *с*.

Таким образом, в момент, когда 31 июля стенные часы показывают это время, по точному времени наступает полдень.

32

1. n-й член ряда имеет вид $n(n+4)$, а $(n+1)$-й — вид $(n+1)(n+5)$. Преобразуем последнее выражение:

$$(n+1)[(n+2)+3]=(n+1)(n+2)+3(n+1).$$

Следовательно,

$$S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+3\frac{n(n+1)}{2}+C.$$

Подставляя $n=1$, получаем $C=0$.

Таким образом,

$$S_n=n(n+1)\left(\frac{n+2}{3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{n(n+1)(2n+13)}{6},$$

что и требовалось доказать.

2. $S_{100}=\dfrac{100\cdot 101\cdot 213}{6}=\dfrac{100\cdot 101\cdot 71}{2}=\dfrac{717\,100}{2}=358\,550.$

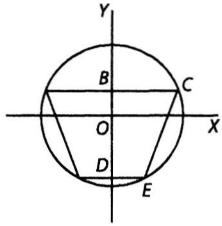
33

Пусть $DE=x$, тогда $BC=2x$. Площадь трапеции, максимум которой необходимо найти, как известно, дается выражением

$$3x\left(\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-4x^2}\right).$$

Максимум его мы найдем, если будем знать максимум выражения

$$v=x\left(\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-4x^2}\right).$$



Дифференцируя v по x и приравнивая производную нулю, получаем

$$\frac{dv}{dx}=\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-4x^2}-x^2\left(\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{r^2-4x^2}}\right)=0.$$

Следовательно,

$$\left(r^2-x^2\right)\sqrt{r^2-4x^2}+\left(r^2-4x^2\right)\sqrt{r^2-x^2}=$$

$$=x^2\left(4\sqrt{r^2-4x^2}+\sqrt{r^2-x^2}\right),$$

$$\left(r^2-2x\right)\sqrt{r^2-4x^2}=-\left(r^2-8x^2\right)\sqrt{r^2-x^2},$$

$$r^4-4\left(r^2x^2+4x^4\right)\left(r^2-4x^2\right)=\left(r^4-16r^2x^2+64x^4\right)\left(r^2-x^2\right),$$

$$r^6-8r^4x^2+20r^2x^4-16x^6=r^6-17r^4x^2+80r^2x^4-64x^6.$$

Отбрасывая в правой и левой частях r^6, после деления на x^2 получаем

$$48x^4 - 60r^2x^2 + 9r^4 = 0$$

или

$$16x^4 - 20r^2x^2 + 3r^4 = 0,$$

откуда

$$\frac{x^2}{r^2} = \frac{2 \pm \sqrt{208}}{32}.$$

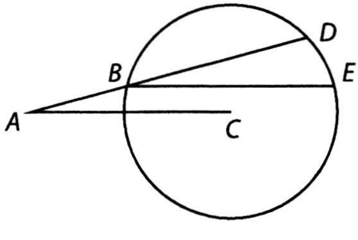
В качестве ответа задачи мы выбираем корень

$$\frac{x^2}{r^2} = \frac{5 - \sqrt{13}}{8}$$

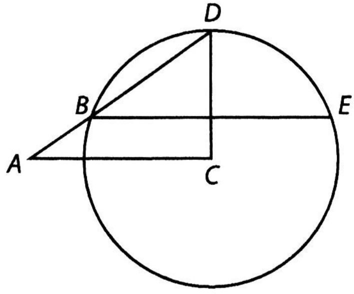
(верхний знак недопустим, хотя подробного анализа этого случая я не производил).

34

Анализ. Пусть A — данная точка, C — центр данной окружности. Соединим A с C отрезком прямой и предположим, что ABD — искомая прямая. Из точки B проведем хорду $BE \parallel AC$. Тогда $\angle DBE = \angle A$. Следовательно, дуга DE равна дуге BD, или, что то же, точка D делит дугу BE пополам, то есть лежит на перпендикуляре, проведенном из центра окружности C к хорде BE. Отсюда ясно, как построить искомую прямую.



Синтез. Соединим данную точку A с центром окружности C и из конца отрезка AC восставим перпендикуляр CD. Соединим точки A и D. Пусть B — точка пересечения отрезка AD с окружностью. Через точку B проведем $BE \parallel AC$.



Нетрудно доказать, что дуги BD и DE равны. Следовательно, дуга BD стягивает угол DBE, равный углу A, что и требовалось доказать.

35

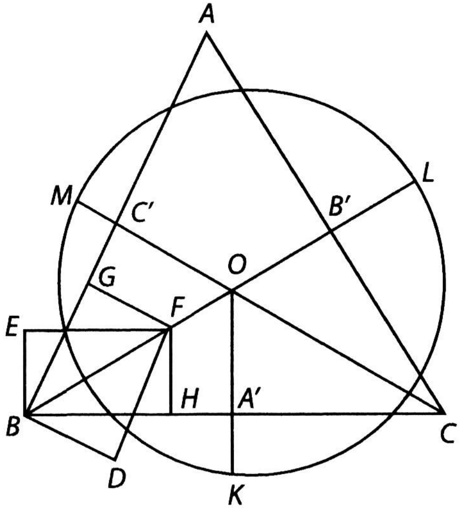
Пусть ABC — данный треугольник, и пусть отрезки радиусов, лежащие вне треугольника, относятся к радиусу, как $k:1$, $l:1$, $m:1$ (величины k, l и m по предположению — правильные дроби).

Из вершины B восставим перпендикуляр BD к стороне AB и другой перпендикуляр BE к стороне BC. Длины перпендикуляров подберем так, чтобы они относились между собой, как $(1-m):(1-k)$. Через точку D проведем прямую $DF \parallel BA$, а через точку E — прямую $EF \parallel BC$ и соединим точки B и F отрезком прямой. Из F опустим перпендикуляры FG (на сторону AB) и FH (на сторону BC). Тогда

$$FG:FH=(1-m):(1-k).$$

Через вершину треугольника C проведем прямую так, чтобы длины перпендикуляров, опущенных из любой ее точки на стороны CA и CB, относились между собой как $(1-l):(1-k)$. Отрезок BF продолжим за точку F до пересечения с этой прямой в точке O. Из O опустим перпендикуляры OA', OB', OC' на BC, AC и AB. По построению

$$OA':OB':OC'=(1-k):(1-l):(1-m).$$



На продолжении OA' отложим отрезок AK', такой, что $OK:OA'=1:(1-k)$. С центром в точке O и радиусом OK опишем окружность и продолжим OB' и OC' до пересечения с ней в точках L и M.

Имеем

$$OK:OA'=1:(1-k),$$

$$OA':OB'=(1-k):(1-l).$$

Следовательно,

$$OK:OB'=1:(1-l).$$

Аналогично

$$OK:OC'=1:(1-m)$$

и, наконец,

$$A'K:OK=(OK-OA'):OK-k:1$$

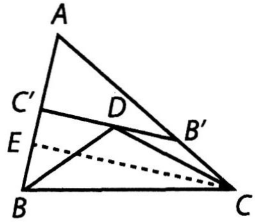
(OK — радиус окружности).

Так же доказываются и два остальных отношения:

$$B'L:OL=l:1 \text{ и } C'M:OM=m:1.$$

36

Анализ. Пусть $B'C'$ — искомый отрезок и $\angle B'C'B=$ $=\angle B'C'A=90^\circ$.



На $C'B'$ отложим отрезок $C'D$, равный отрезку $C'B$, тогда $DB'=B'C$. Соединим точку D с вершинами треугольника B и C. Из равнобедренных треугольников $BC'D$ и $DB'C$ следует, что $\angle DBC=45^\circ$ и $\angle B'DC=\angle B'CD$. Опустив из вершины C перпендикуляр CE на сторону AB, получим $\angle B'DC=\angle DCE$ и, следовательно, $\angle B'CD=\angle DCE$.

Синтез. Из вершины C опустим перпендикуляр CE на сторону треугольника AB и проведем биссектрису угла ACE. На стороне AB с вершиной в точке B построим угол ABD, равный 45°. Продолжим сторону BD этого угла и биссектрису CD угла ACE до пересечения в точке D. Через D проведем прямую $B'DC'\perp AB$. Тогда

$$\angle C'DB=180^\circ-(\angle DC'B+\angle C'BD)=45^\circ=\angle C'BD.$$

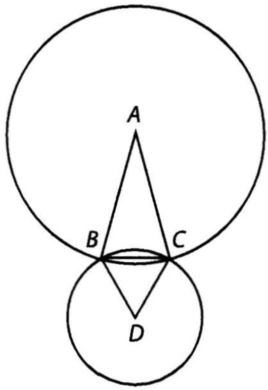
Следовательно, $C'D=C'B$. Кроме того, $\angle B'CD=\angle DCE=$ $=\angle DCB'$, откуда $DB'=B'C$, и мы получаем, что $C'B'=BC'+CB'$, что и требовалось доказать.

Для того чтобы решение было возможным, $\angle A$ не должен превосходить 90°, $\angle B$ не должен быть меньше 45°, а $\angle C$ не должен быть меньше половины дополнения A до 90°, то есть угла $45^\circ-(A/2)$.

37

Пусть BC — общая хорда, A и D — центры окружностей, $\angle A=30^\circ$, $\angle D=60^\circ$, $BC\ (=DB=DC)=1$, а $AB=x$.

Поскольку ⌓$A=\sqrt{3}/2=(2x^2-1)/2x^2$, то $\sqrt{3}/2=1-1/2x^2$, откуда $1/2x^2=(2-\sqrt{3})/2$, или $x^2=1/(2-\sqrt{3})=2+\sqrt{3}$.



Площади кругов равны соответственно $\pi(2+\sqrt{3})$ и π, а площади секторов — $\pi(2+\sqrt{3})\ /12$ и $\pi/6$. Сумма площадей секторов равна $\pi(4+\sqrt{3})/12$.

Площадь треугольника ABC составляет $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}=$ $=(2+\sqrt{3})/4$, площадь треугольника DBC равна $\sqrt{3}/4$, а их сумма составляет $(2+2\sqrt{3})/4=(1+\sqrt{3})/2$.

Площадь той части меньшего круга, которая находится внутри большего круга, равна разности между суммой площадей секторов и суммой площадей треугольников, то есть

$$\pi\frac{4+\sqrt{3}}{12}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, чтобы найти отношение между площадью этой луночки и площадью меньшего круга, найденную величину необходимо разделить на π. Искомое отношение равно

$$\frac{4+\sqrt{3}}{12}-\frac{1+\sqrt{3}}{2\pi}\approx$$

$$\approx\frac{5{,}73^2}{12}-\frac{2{,}73^2}{\left(\frac{44}{7}\right)}\approx 0{,}478-\frac{0{,}248}{\left(\frac{4}{7}\right)}=$$

$$=0{,}478-\frac{1{,}736}{4}=0{,}478-0{,}434=0{,}044,$$

что и требовалось доказать.

38

Расположим урны по порядку. Условимся считать первой ту урну, из которой вынут «другой» шар неизвестного цвета, второй — урну, из которой два раза был вытащен красный шар, и третьей — оставшуюся урну. Нетрудно видеть, что всего возможно 6 различных вариантов расположения урн A, B и C, а именно:

1) ABC,	4) BCA,
2) ACB,	5) CAB,
3) BAC,	6) CBA.

В первом случае вероятность наблюденного события равна $1 \cdot 4/9 = 4/9$, во втором $1 \cdot 1/9 = 1/9$, в третьем $2/3 \cdot 1 = 2/3$, в четвертом $2/3 \cdot 1/9 = 2/27$, в пятом $1/3 \cdot 1 = 1/3$ и в шестом $1/3 \cdot 4/9 = 4/27$.

Следовательно, вероятности существования шести расположений урн A, B, C пропорциональны 12, 3, 18, 2, 9, 4 и, следовательно, равны 1/4, 1/16, 3/8, 1/24, 3/16, 1/12.

Вероятность того, что и второй из вытащенных во второй раз шаров окажется красным, равна сумме

$$\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{16}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{24}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$\frac{36+9+36+4+9+4}{9\cdot 16}=\frac{98}{9\cdot 16}=\frac{49}{72},$$

что и требовалось доказать.

39

Пусть x — число дней, прошедших с того момента, как пешеходы пустились в путь, до встречи.

Тогда

$$\left[2\cdot 10-(x-1)\right]\frac{x}{2}=14+\left[2\cdot 2+(x-1)\cdot 2\right]\frac{x}{2},$$

то есть

$$\frac{21x}{2}-\frac{x^2}{2}=14+x+x^2,$$

или окончательно $3x^2-19x+28=0$, откуда

$$x=\frac{19\pm 5}{6}.$$

Таким образом,

$$x_1=4,\quad x_2=\frac{7}{3}.$$

Приведенное выше решение не учитывает (при составлении уравнения) того обстоятельства, что как возрастание, так и убывание скорости пешеходов происходят *скачкообразно*. Оно верно лишь в предположении, что возрастание и убывание скорости пешеходов происходят *непрерывно*, причем так, что в конце каждого дня скорости согласуются с теми данными, которые приведены в условии задачи. Следовательно, правильный ответ дает $x_1=4$ дням. Второй же ответ $7/3$ лишь указывает на то, что встреча происходит на *третий день*. Чтобы установить час встречи, введем новое неизвестное: пусть y означает число часов, которые пешеходы находятся в пути (напомним, что y отсчитывается с 6 *ч* утра каждого дня).

К концу второго дня пути A пройдет 19 миль, а B будет находиться от пункта отправления A на расстоянии $14+6=20$ миль.

Следовательно,

$$19+y\cdot\frac{8}{12}=20+y\cdot\frac{6}{12},$$

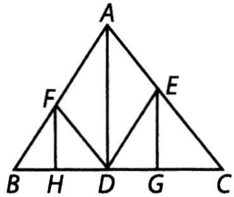
$$y\cdot\frac{2}{3}=1+y\cdot\frac{1}{2},$$

откуда $y=6$.

Таким образом, пешеходы встречаются по прошествии двух с половиной дней (2 дня 6 *ч*) и четырех дней пути на расстояниях в 23 и 34 мили от отправного пункта пешехода A.

40

1. Пусть ABC — данный треугольник и AD — его высота, опущенная на сторону BC.



Через точку D проведем прямые DE и DF, параллельные боковым сторонам треугольника, а из точек E и F опустим на основание BC перпендикуляры EG и FH.

Треугольники FBD и EDC подобны треугольнику ABC, вследствие чего

$$FH:AD=BD:BC$$

и

$$EG:AD=DC:BC.$$

Следовательно,

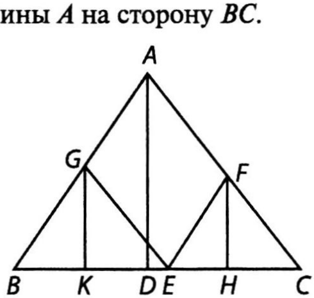
$$(FH+EG):AD=BC:BC,$$

откуда

$$FH+EG=AD.$$

Кроме того, площади треугольников AED и AFD равны, а сами треугольники имеют общее основание AD. Следовательно, их высоты также равны, то есть $DH=DG$, что и требовалось доказать.

2. Пусть ABC — данный треугольник и AD — высота, опущенная из вершины A на сторону BC.



На стороне BC от точки C отложим отрезок $CE=BD$ и через точку E проведем прямые EF и EG, параллельные боковым сторонам треугольника. Из точек F и G опустим перпендикуляры GK и FH на сторону BC.

Из подобия треугольников GBE, FEC и треугольника ABC следует, что

$$GK : AD = BE : BC$$

и

$$FH : AD = EC : BC,$$

откуда

$$(GK + FH) : AD = BC : BC.$$

Последнее равенство означает, что

$$GK + FH = AD.$$

Кроме того,

$$BK : BE = BD : BC,$$

откуда

$$BK : DC = EC : BC = HC : DC.$$

Следовательно,

$$BK = HC,$$

что и требовалось доказать.

41

1. Поскольку из слов друга известно, что по крайней мере один шар в урне белый, априорные вероятности различных вариантов содержимого урны равны (*б* означает белый шар, *ч* — черный шар):

для *бббб*	$1/8$
для *бббч*	$3/8$
для *ббчч*	$3/8$
для *бччч*	$1/8$

Вероятности наблюденного события для этих вариантов равны 1, $1/2$, $1/6$ и 0.

После испытания вероятности различных вариантов содержимого урны пропорциональны $1/8 \cdot 1$, $3/8 \cdot 1/2$, $3/8 \cdot 1/6$, $1/8 \cdot 0$, то есть $1/8$, $3/16$, $1/6$, 0, или, что то же, 2, 3, 1. Следовательно, эти вероятности равны $1/3$, $1/2$, $1/6$, 0.

Поэтому вероятность извлечь белый шар при очередном испытании равна $1/3 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1/2 = 7/12$.

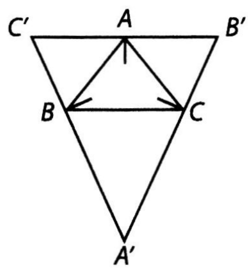
2. Если бы мой друг не предупредил о том, что по крайней мере один шар в урне белый, то априорные вероятности для вариантов *бббб*, *бббч*, *ббчч*, *бччч* и *чччч* были бы равны $1/16$, $1/4$, $3/8$, $1/4$, $1/6$, а вероятности наблюденного события — 1, $1/2$, $1/6$, 0, 0.

Следовательно, после испытания вероятности различных вариантов заполнения урны пропорциональны $1/16 \cdot 1$, $1/4 \cdot 1/2$, $1/6 \cdot 3/8$, 0, 0, или 1, 2, 1, 0, 0, то есть равны $1/4$, $1/2$, $1/4$, 0, 0.

Таким образом, в этом случае вероятность извлечь белый шар равна $1/4 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1/2 = 1/2$.

42

Пусть *ABC* — данный треугольник. Проведем биссектрисы его углов и прямые, перпендикулярные к ним и образующие треугольник *A'B'C'*.



Имеем

$$\angle CBA' = 90^\circ - \frac{B}{2},$$

$$\angle BAC' = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

$$\angle ACB' = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$\angle A' = 180^\circ - \left(\angle CBA' + \angle BCA'\right) = \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

$$BA' = a \cdot \frac{\text{⌓} \dfrac{C}{2}}{\text{⌓} \dfrac{A}{2}} \quad \text{и аналогично} \quad BC' = c \cdot \frac{\text{⌓} \dfrac{A}{2}}{\text{⌓} \dfrac{C}{2}}.$$

Таким образом, если s — полупериметр данного треугольника, то

$$A'C' = \frac{a\cos^2\frac{C}{2} + c\cos^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{a\cdot\frac{s\cdot(s-c)}{ab} + c\cdot\frac{s\cdot(s-a)}{bc}}{\frac{s}{b}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}} =$$

$$= \frac{s-c+s-a}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{b}{\sin\frac{B}{2}}$$

и аналогично

$$A'B' = \frac{c}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Зная $A'B'$ и $A'C'$, нетрудно вычислить площадь треугольника $A'B'C'$. Она равна

$$\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\text{площ. } A'B'C'}{\text{площ. } ABC} = \frac{bc\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\cdot\frac{2}{bc\sin A} =$$

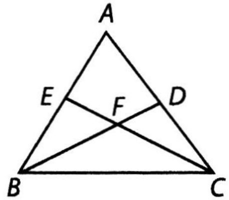
$$= \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{abc}{2(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)},$$

что и требовалось доказать.

43

Пусть ABC — данный треугольник, BFD и CFE — искомые прямые: $FB = FC$, и четырехугольник $AEFD$ равновелик треугольнику FBC. Обозначим $\angle FBC$ через θ. Для решения задачи достаточно вычислить этот угол.



Поскольку треугольник FBC равновелик четырехугольнику $AEFD$, то

$$S_{\triangle DBC} = S_{\triangle AEC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle EBC}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle DBC} + S_{\triangle EBC} = S_{\triangle ABC},$$

откуда

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\operatorname{ctg}\theta + \operatorname{ctg} C} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\operatorname{ctg}\theta + \operatorname{ctg} B} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C},$$

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}\theta + \operatorname{ctg} C} + \frac{1}{\operatorname{ctg}\theta + \operatorname{ctg} B} = \frac{1}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C}.$$

Левую часть последнего равенства преобразуем к виду

$$\frac{2\operatorname{ctg}\theta + \left(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C\right)}{\operatorname{ctg}^2\theta + \operatorname{ctg}\theta\left(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C\right) + \operatorname{ctg} B\cdot\operatorname{ctg} C}.$$

Освобождаясь от знаменателя в обеих частях равенства, получаем

$$\operatorname{ctg}^2\theta + \operatorname{ctg}\theta\cdot\left(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C\right) + \operatorname{ctg} B\cdot\operatorname{ctg} C =$$

$$= 2\operatorname{ctg}\theta\cdot\left(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C\right) + \left(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C\right)^2,$$

или

$$\operatorname{ctg}^2\theta-\operatorname{ctg}\theta\cdot\left(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\right)-\left(\operatorname{ctg}^2B+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}^2C\right)=0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\pm\sqrt{5\operatorname{ctg}^2B+6\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+5\operatorname{ctg}^2C}\right).$$

44

Пусть k — число, в разложении которого на простые множители не содержатся числа 2 или 5, то есть число, взаимно-простое с 10. Если $1/k$ представить в виде бесконечной периодической дроби, а последнюю, воспользовавшись формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, свести к простой дроби, то знаменатель этой дроби будет состоять из девяток, то есть будет иметь вид (10^n-1). Поскольку полученная дробь равна $1/k$, а число k взаимно-просто с 10, а следовательно, и с 10^n, множитель (10^n-1) должен делиться на k.

Аналогичное утверждение, очевидно, остается в силе и в любой другой (недесятичной) системе счисления. Следовательно, если a — основание системы счисления, b — число взаимно-простое с a, то найдется целое положительное число n, такое, что число (a^n-1) будет делиться на b.

Что и требовалось доказать.

Примеры (придуманные днем с карандашом и бумагой в руках).

1. В десятичной системе счисления найти n, при котором число (10^n-1) будет делиться на 7.

$$\frac{1}{7}=0,\!\left(142857\right)=\frac{142\,857}{10^6-1}.\ \text{Ответ: } n=6.$$

2. Пусть числа a и b, о которых говорится в условии задачи, равны 8 и 9. Найти n, при котором (8^n-1) будет делиться на 9.

Выбрав основание системы счисления равным 8, находим:

$$\frac{1}{9}=0,\!\left(07\right)=\frac{7}{8^2-1}.\ \text{Ответ: } n=2.$$

3. То же для $a=7$, $b=13$.

$$\frac{1}{13}=0,\left(035245631421\right)=\frac{35\,245\,631\,421}{7^{12}-1}.\ \text{Ответ: } n=12.$$

45

Разделим каждую палку на $(n+1)$ частей (число n будем считать нечетным) и предположим, что палки могут ломаться только в точках деления (их n), причем в каждой из точек с одинаковой легкостью.

Вероятность сломать палку в одной точке равна $(n-1)/n$, вероятность сломать палку в n точках равна $[(n-1)/n]^n=(1-1/n)^n$.

Следовательно, вероятность того, что ни одна палка не сломана посредине, равна $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-1/n\right)^n$, и, таким образом, ответ задачи надлежит формулировать так: искомая вероятность (того, что по крайней мере одна палка переломана точно посередине) равна $1-\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-1/n\right)^n$.

Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1/n\right)^n=e$. Пусть a — сумма нечетных, а b — сумма четных членов разложения

$$e=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots\quad .$$

Тогда $e=a+b$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-1/n\right)^n=a-b=2a-e$, что и требовалось доказать.

Примечание. Приводимые ниже выкладки были проделаны не «в уме», а с карандашом и бумагой в руках.

Вычислим значение искомой вероятности. Для этого представим a в виде непрерывной дроби

$$a=1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\ldots\quad .$$

Подходящие дроби равны:

$$1=1,$$

$$\frac{1}{\lfloor 2}=0{,}5,$$

$$\frac{1}{\lfloor 4}=0{,}4166666\ldots\ ,$$

$$\frac{1}{\lfloor\underline{6}} = 0{,}00138888\ldots,$$

$$\frac{1}{\lfloor\underline{10}} = 0{,}00000027\ldots.$$

Следовательно,

$$a = 1{,}5430806\ldots,$$

$$2a = 3{,}0861612\ldots.$$

Так как

$$e = 2{,}7182818\ldots,$$

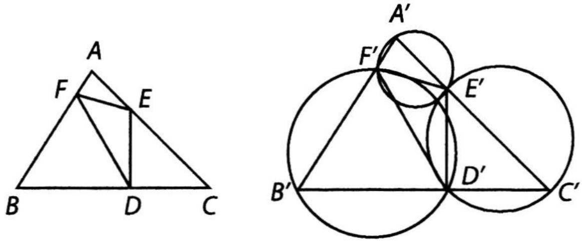
то

$$\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^n = 0{,}3678793\ldots,$$

и мы получаем численное значение искомой вероятности:

$$1-\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^n = 0{,}6321207\ldots.$$

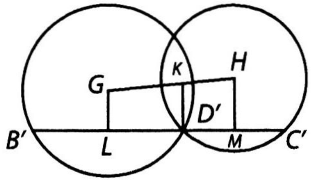
46



Пусть *ABC* — данный треугольник, *D* — выбранная точка.

Если мы построим треугольник *D'E'F'* с углами при вершинах, равными данным углам, и выделенной вершиной *D'*, то задача сведется к построению треугольника, описанного вокруг треугольника *D'E'F'* и подобного треугольнику *ABC*.

На сторонах треугольника *D'E'F'* мы можем построить сегменты, вмещающие углы, равные углам *A*, *B* и *C*. Следовательно, задача будет решена, если через вновь построенные окружности мы сумеем провести прямую $B'D'C'$, которую точка D' делит в том же отношении, в каком выбранная заранее точка D делит основание треугольника ABC.



Необходимое вспомогательное построение можно осуществить следующим образом. Пусть G и H — центры окружностей. Соединим их и разделим в точке K на отрезки, пропорциональные BD и DC. Точку K соединим с точкой пересечения окружностей D'. Через D' перпендикулярно KD' проведем прямую $B'D'C'$ и из центров окружностей G и H опустим на нее перпендикуляры GL и HM.

Нетрудно доказать, что

$$LD' : D'M = GK : KH = BD : DC.$$

Но $B'D' = 2LD'$, $D'C' = 2D'M$, следовательно,

$$B'D' = D'C' = BD : DC,$$

что и требовалось доказать:

Построение теперь очевидно. Через B', F' и C', E' нужно провести прямые и продолжить их до пересечения в точке A', лежащей, как нетрудно показать, на третьей окружности, затем разделить AB и AC в точках F и E пропорционально $A'F'B'$ и $A'E'C'$ и провести прямые DE и DF.

47

Непосредственно видно, что нулевые значения неизвестных удовлетворяют системе уравнений.

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$x(1/y - l/z) = y - z,$$

откуда $x = yz[(y-z)/(z-y)] = -yz$ (при $y \neq z$, в противном случае $x = 0/0$).

Но из уравнения (1) $x=xy-yz$. Следовательно, при $y\neq z$

$$x=xy+x,$$

откуда (при конечных x)

$$xy=0.$$

Аналогичным образом из уравнения (2) находим $xz=0$ (если x конечен).

Таким образом, при конечных значениях x и $y\neq z$, во-первых, либо $x=0$, либо $y=0$ и, во-вторых, либо $x=0$, либо $z=0$, то есть либо $x=0$, либо $y=z=0$. Но в силу предположения $y\neq z$ вторая возможность исключается. Следовательно, $x=0$. Но тогда и $yz=0$. Это означает, что одна из двух неизвестных y или z равна нулю, а вторая может принимать произвольные значения.

Итак, мы получаем еще два решения:

$x=y=0$, z принимает произвольное значение;

$x=z=0$, y принимает произвольное значение.

Исследуем теперь, что происходит при $y=z$.

Из уравнения (1) $x/y=x-y$. Следовательно, $y^2=x(y-1)$, $x=y^2/(y-1)$.

Из уравнения (2) получаем $x=z^2/(z-1)$.

Таким образом, четвертое решение нашей системы уравнений имеет вид

$$x=\frac{k^2}{k-1}, \quad y=z=k,$$

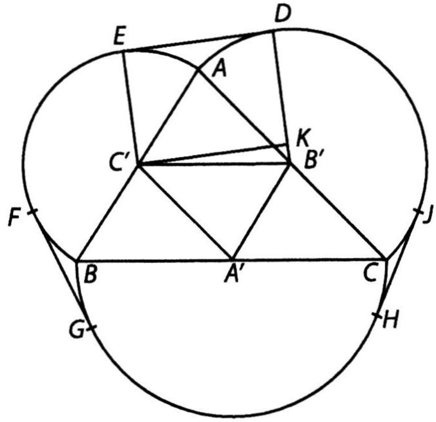
где k — любое вещественное число (не равное 1).

Ясно, что y и z могут принимать *любые* вещественные значения, а область допустимых значений x ограничена условием

$$y^2-xy+x=0.$$

При $x^2-4x<0$ неизвестная y не будет вещественной. Следовательно, x может принимать любые отрицательные значения и любые положительные значения, которые больше или равны 4. При $0<x<4$ неизвестная y перестает быть вещественной.

48



Пусть ABC — данный треугольник, A', B', C' — центры полуокружностей, а DE, FG, HJ — общие касательные к полуокружностям, так что $DE=\alpha$, $FG=\beta$, $HJ=\gamma$.

Соединим точки B' и D, C' и E и из точки C' опустим перпендикуляр $C'K$ на $B'D$. Нетрудно видеть, что $C'K=\alpha$.

Обозначим стороны данного треугольника через $2a$, $2b$ и $2c$.

Так как $B'C'=a$, $B'K=b-c$, то $C'K=\sqrt{a^2-(b-c)^2}$, то есть

$$\alpha=\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Аналогично получаем выражения для β и γ:

$$\beta=\sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)},$$

$$\gamma=\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)}.$$

Таким образом,

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha}=-a+b+c,$$

$$\frac{\gamma\alpha}{\beta}=a-b+c,$$

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}=a+b-c,$$

а сумма всех трех выражений равна $a+b+c$, то есть полупериметру треугольника ABC, что и требовалось доказать.

49

Примем за единицу длины сторон любого треугольника.

Сечение правильного тетраэдра вертикальной плоскостью, проходящей через одно из наклонных ребер, имеет вид треугольника с основанием, равным $\sqrt{3}/2$, и боковыми сторонами $\sqrt{3}/2$ и 1. Косинус меньшего из углов при основании этого треугольника равен

$$\left(\frac{3}{4}+1-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

а синус того же угла (и высота треугольника) равен $\sqrt{2}/\sqrt{3}$.

Поскольку высота проведенного сечения совпадает с высотой правильного тетраэдра, объем последнего равен

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Высота пирамиды равна высоте треугольника с основанием $\sqrt{2}$ и боковыми сторонами 1 и 1, то есть равна $\sqrt{2}/2$. Нетрудно вычислить, что объем пирамиды равен

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Таким образом, искомое отношение объемов составляет

$$\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{12}{\sqrt{2}}=2.$$

50

Вначале вероятность того, что в урне H находятся 2 белых шара, равна $1/4$, 1 черный и 1 белый шар — равна $1/2$, 2 черных шара — равна $1/4$. Следовательно, после того, как в урну H положили 1 белый шар, в ней с вероятностью $1/4$ находились 3 белых шара, с вероятностью $1/2$ — 2 белых шара и 1 черный и с вероятностью $1/4$ — 1 белый шар и 2 черных, вследствие чего вероятность извлечь из нее белый шар стала равной

$$\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

а вероятность извлечь черный шар $1/3$.

После того как в урну *K* перенесли 1 шар неизвестно какого цвета, в ней с вероятностью $2/3\cdot 1/4=1/6$ стало 3 белых шара, с вероятностью $2/3\cdot 1/2+1/3\cdot 1/4=5/12$ — 2 белых шара и 1 черный, с вероятностью $2/3\cdot 1/4+1/3\cdot 1/2=1/3$ — 1 белый шар и 2 черных и с вероятностью $1/3\cdot 1/4=1/12$ — 3 черных шара. Следовательно, вероятность извлечь из урны белый шар стала равной

$$\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{5}{12}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9},$$

а вероятность вытащить черный шар равна $4/9$.

До того как мы извлекаем из урны *K* белый шар и переносим его в урну *H*, в последней с вероятностью $1/4\cdot 1+1/2\cdot 1/3=5/12$ находятся 2 белых шара, с вероятностью $1/2\cdot 2/3+1/4\cdot 2/3=1/2$ — 1 белый и 1 черный шар и с вероятностью $1/4\cdot 1/3=1/12$ — 2 черных шара. Следовательно, после того, как мы извлечем из урны *K* *какой-то* шар, о котором известно лишь, что он либо белый, либо черный, и перенесем его в урну *H*, в последней с вероятностью $5/12\times 5/9=25/108$ окажутся 3 белых шара, с вероятностью $5/12\cdot 4/9+1/2\cdot 5/9=50/108$ — 2 белых шара и 1 черный, с вероятностью $1/2\cdot 4/9+1/12\cdot 5/9=29/108$ — 1 белый шар и 2 черных и с вероятностью $1/12\cdot 4/9=4/108$ — 3 черных шара.

Таким образом, вероятность извлечь из урны белый шар будет равна

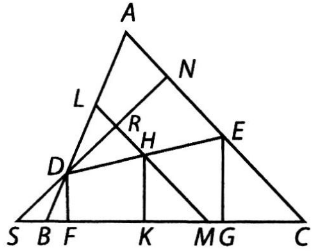
$$\frac{1}{108}\cdot\left(25\cdot 1+50\cdot\frac{2}{3}+29\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{27},$$

то есть семнадцать шансов против десяти.

51

Пусть ABC — данный треугольник, а D — данная точка.

Анализ. Предположим, что DE — искомая прямая. Из точек D и E опустим перпендикуляры DF и EG на основание треугольника BC. По условию $DF+EG=DE$.



Из середины H отрезка DE опустим на BC перпендикуляр HK. Очевидно, что $HK = \frac{1}{2}(DF + EG)$. Следовательно, окружность с центром в точке H и радиусом HD проходит через точки E и K и касается основания треугольника в точке K.

Через точку H проведем прямую $LHM \parallel AC$. Ясно, что точка L будет при этом серединой отрезка AD. Кроме того, LM проходит через центр окружности H. Следовательно, если из точки D опустить перпендикуляр DN на LM (или CA), то DN как хорда окружности будет делиться пополам в точке R. Продолжим ND до пересечения в точке S с продолжением основания треугольника. Тогда SDN — секущая, а SK — касательная к одной и той же окружности, проведенные из точки S. Но точку S можно найти, а $SK^2 = SD \cdot SN$.

Синтез. Из точки D опустим перпендикуляр DN на AC и продолжим его до пересечения в точке S с продолжением основания BC. Построим отрезок SK, такой, что $SK^2 = SD \cdot SN$.

Разделим пополам отрезок DA, пусть L — его середина. Через L проведем $LM \parallel AC$, а из точки K восставим перпендикуляр KH до пересечения с LM. Соединим точки D и H отрезком прямой и продолжим до пересечения с AC в точке E. Из концов отрезка DE опустим перпендикуляры DF и EG на основание треугольника.

Так как $DL = LA$ и $LM \parallel AC$, то $DH = HE = HK$, откуда $DE = 2HK$. Но $DF + EG = 2HK$. Следовательно, $DF + EG = DE$, что и требовалось доказать.

Примечание. Приведенное выше доказательство неполно, поскольку в нем необоснованно использовано равенство $DH = HK$.

Это равенство можно доказать следующим образом. Так как $SK^2 = SD \cdot SN$, то DN — хорда окружности, касающейся основания треугольника в точке K. Следовательно, прямая LM, перпендикулярная хорде DN и делящая ее пополам, проходит через центр окружности. Но KH также проходит через центр окружности. Отсюда мы заключаем, что точка H есть центр окружности и, следовательно, $HD = HK$.

52

Пусть x — число пенсов у каждого из нищих до игры. № 3 получает x пенсов, вынимает из мешочка $(2+4)$ пенса, кладет в него $x/2$ пенсов. В результате этих манипуляций в мешочке оказывается $(x \cdot 3/2 - 6)$ пенсов. Условимся в дальнейшем вместо $3/2$ писать a.

№ 5 получает $(xa-6)$ пенсов, отдает соседям справа и слева $(4+1)$ пенс и досыпает в мешочек $(xa-6)a$ пенсов, после чего в мешочке оказывается (xa^2-6a-5) пенсов.

№ 2 вынимает $(1+3)$ пенса и передает очередному играющему мешочек с (xa^3-6a^2-5a-4) пенсами.

№ 4 раздает соседям $(3+5)$ пенсов и передает дальше мешочек с $(xa^4-6a^3-5a^2-4a-8)$ пенсами.

№ 1 кладет в мешочек 2 пенса, после чего в мешочке оказывается $5x$ пенсов.

Итак,

$$xa^4-6a^3-5a^2-4a-6=5x,$$

откуда

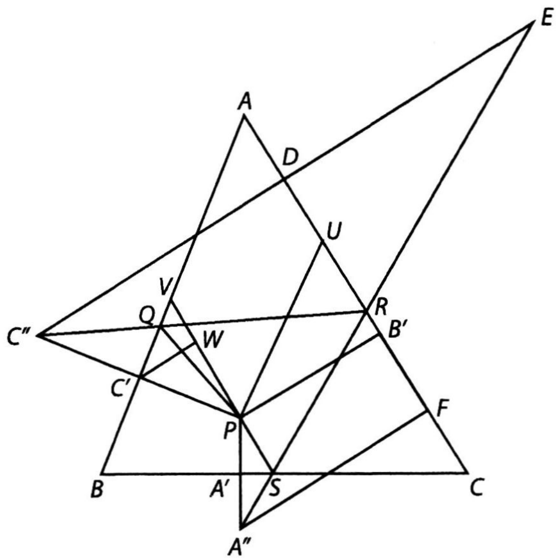
$$x=\frac{6a^3+5a^2+4a+6}{a^4-5}=\frac{\left(6\cdot 3^3+5\cdot 3^2\cdot 2+4\cdot 3\cdot 2^2+6\cdot 2^3\right)\cdot 2}{3^4-5\cdot 2^4}=$$

$$=\frac{(162+90+48+48)\cdot 2}{81-80}=696$$ пенсов $=$ 2 фунта 18 шиллингов 0 пенсов.

53

Пусть ABC — данный треугольник, P — данная точка, а α, β и γ — ее треугольные координаты.

Из точки P на стороны треугольника опустим перпендикуляры $PA'=\alpha$, $PB'=\beta$, и $PC'=\gamma$. На продолжениях отрезков



PA' и PC' отложим отрезки $A'A''=PA'$ и $C'C''=PC'$. Из точки C'' опустим перпендикуляр $C''D$ на AC и продолжим его на отрезок $DE=C''D$. Проведем прямую EA'', пересекающую сторону AC в точке R и сторону ВС в точке S, и прямую $C''R$, пересекающую сторону AB в точке Q. Соединим точку P с точками Q и S.

Путь шара по столу изображается ломаной $PQRSP$. Для решения задачи необходимо вычислить длину отрезка AR. Но $AR=DR+AD=DR+AB'-DB'$. Следовательно, предварительно необходимо вычислить длину отрезка DR.

Через P проведем прямые $PU \parallel AB$ и $PV \parallel AC$, из точки C' опустим перпендикуляр $C'W$ на PV, а из точки A'' — перпендикуляр $A''F$ на AC.

Из подобия треугольников $C''DR$ и $A''FR$

$$DR:RF=DE:A''F=C''D:A''F,$$

откуда

$$DR:DF=C''D:(C''D+A''F)$$

и, таким образом,

$$DR=\frac{DF\cdot C''D}{C''D+A''F}.$$

Но

$$\angle C'VP = \angle A,$$

поэтому

$$\angle C'PV = 90^\circ - \angle A,$$
$$WP = \gamma \pitchfork A,$$
$$DB' = 2WP = 2\,\gamma \pitchfork A.$$

Аналогично

$$B'F = 2\,\alpha \pitchfork C.$$

Следовательно,

$$DF = 2(\alpha \pitchfork C + \gamma \pitchfork A).$$

Далее,

$$C'W = \gamma \frown A,$$

откуда

$$C''D = 2C'W + PB' = 2\,\gamma \frown A + \beta.$$

Из аналогичных соображений

$$A''F = 2\,\alpha \frown C + \beta,$$

откуда

$$C''D + A''F = 2(\alpha \frown C + \gamma \frown A + \beta,$$

$$DR = \frac{\left(\alpha \pitchfork C + \gamma \pitchfork A\right)\left(2\gamma \frown A + \beta\right)}{\alpha \frown C + \gamma \frown A + \beta}.$$

Но

$$AB' = B'U + UA = B'U + RV = \beta \operatorname{ctg} A + \gamma \operatorname{cosec} A = \frac{\beta \frown A + \gamma}{\pitchfork A},$$

следовательно,

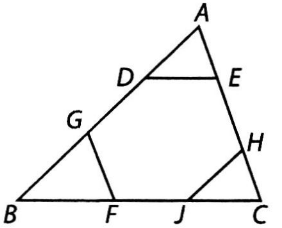
$$AB' - DB' = \frac{\beta \frown A + \gamma}{\pitchfork A} - 2\gamma \pitchfork A = \frac{\beta \frown A + \gamma\left(1 - 2 \pitchfork^2 A\right)}{\pitchfork A} =$$
$$= \frac{\beta \frown A + \gamma \frown 2A}{\pitchfork A}.$$

Подставляя вычисленные значения $AB' - DB'$ и DR в равенство $AR = DR + AB' - DB'$, получаем

$$AR = \frac{\left(\alpha \pitchfork C + \gamma \pitchfork A\right)\cdot\left(2\gamma \frown A + \beta\right)}{\alpha \frown C + \gamma \frown A + \beta} + \frac{\beta \frown A + \gamma \frown 2A}{\pitchfork A}.$$

54

Ясно, что треугольник ADE подобен треугольнику ABC.



Пусть k — коэффициент подобия:

$$k = \frac{DE}{a} = \frac{AE}{b} = \frac{AD}{c}.$$

Так как шестиугольник равносторонний, то $DG = DE$ и, следовательно, $DG = ka$. Отсюда $GB = c - ka - kc$, $GB/c = 1 - k - k \cdot a/c$ и $GF = GB \cdot b/c = b - kb - k \cdot ab/c$. Но $GF = DE = ka$, поэтому

$$b - kb - k \cdot \frac{ab}{c} = ka,$$

$$bc = k\left(bc + ca + ab\right),$$

откуда

$$k = \frac{bc}{bc + ca + ab} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Введем новое обозначение: пусть

$$m = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Тогда $k = \dfrac{1/a}{m}$, $AD = \dfrac{c \cdot 1/a}{m}$, $DG = \dfrac{1}{m} = \dfrac{c \cdot 1/c}{m}$.

Таким образом,

$$GB = c - AD - DG = \frac{c\left(m - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)}{m} = \frac{c \cdot \frac{1}{b}}{m}.$$

Следовательно,

$$AD:DG:GB=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$$

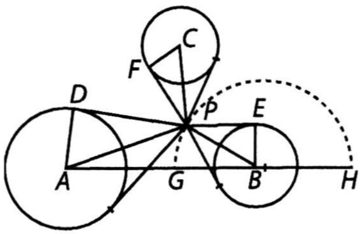
и

$$DE=ka=\frac{1}{m}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

что и требовалось доказать.

55

Пусть A, B, C — центры оснований башен; a, b, c — их радиусы.



Предположим, что P — искомая точка. Из P к каждой из окружностей проведем по две касательные и соединим P с центрами окружностей. Ясно, что каждая из прямых PA, PB и PC делит пополам угол между касательными, проведенными из P к соответствующей окружности. Следовательно, углы APD, BPE и CPF равны, в силу чего

$$\sin(\angle APD)=\sin(\angle BPE)=\sin(\angle CPF).$$

Эти равенства означают, что

$$\frac{a}{AP}=\frac{b}{BP}=\frac{c}{CP},$$

или

$$AP:BP:CP=a:b:c.$$

Через центры окружностей A и B проведем прямую и выберем на ней точки G и H так, чтобы

$$AG:GB=AH:HB=a:b.$$

Тогда полуокружность, описанная на GH, как на диаметре, есть геометрическое место точек, расстояния от которых до A и B относятся между собой, как $a:b$.

Следовательно, если провести прямую через B и C и на ней также построить полуокружность, служащую геометрическим местом точек, расстояния от которых до B и C относятся между собой, как $b:c$, то точка пересечения двух полуокружностей будет искомой точкой.

Примечание. Для каждой пары окружностей мы используем лишь *половину* геометрического места точек, расстояния от которых до центров заданных окружностей относятся между собой, как радиусы этих окружностей. Так, геометрическим местом точек... и т. д. для пары окружностей с центрами в точках A и B и радиусами a и b является *окружность* с центром, лежащим на прямой AB, и диаметром GH.

56

Построим отрезки BC, CE и BD, равные данным высотам, и расположим их так, чтобы углы между DB и BC, а также между BC и CE были прямыми. Продолжим отрезки DB и EC за точки B и C.

Соединим отрезком прямой точки D и C. Из конца отрезка C восставим перпендикуляр CF до пересечения с продолжением отрезка DB.

Соединим точки E и B отрезком прямой. Из конца B отрезка EB восставим перпендикуляр BG до пересечения с продолжением отрезка EC.

Опишем одну окружность с центром в точке B радиусом BF, а другую — с центром в точке C и радиусом CG. Пусть A — точка пересечения окружностей. Соединим ее с точками B и C.

Обозначим высоты треугольника ABC через α, β и γ, а его площадь — через S. Справедливы следующие равенства:

$$\alpha \cdot BC = \beta \cdot CA = \gamma \cdot AB = 2S.$$

Следовательно, приняв BC за единицу длины, мы получим соотношения:

$$BC = \frac{1}{BC}, \quad CA = CG = \frac{1}{CE}, \quad AB = BF = \frac{1}{BD}.$$

Подставив их в первые равенства, найдем, что

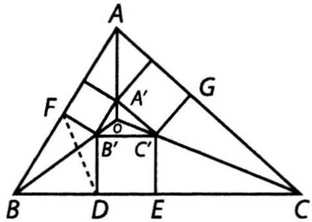
$$\frac{\alpha}{CA}=\frac{\beta}{CE}=\frac{\gamma}{BD},$$

то есть что α, β и γ пропорциональны данным высотам. Следовательно, треугольник *ABC* подобен искомому, построение которого теперь очевидно.

57

1. *Геометрическое решение*

Пусть *ABC* — данный треугольник.



Анализ. Предположим, что 3 квадрата внутри треугольника *ABC* построены и стороны их, параллельные сторонам, лежащим на *AB*, *BC* и *AC*, образуют треугольник *A'B'C'*. Соединим отрезками прямых *A* с *A'*, *B* с *B'* а *C* с *C'*.

Продолжим отрезок *BB'* за точку *B'*. Ясно, что перпендикуляры, опущенные из любой точки отрезка *BB'* или его продолжения на стороны *AB* и *AC*, пропорциональны отрезкам *B'F* и *B'D*. Аналогичное утверждение справедливо и для отрезков *AA'*, *CC'* и их продолжений. Следовательно, все три прямые (продолжения отрезков *BB'*, *CC'* и *AA'*) пересекаются в точке, такой, что перпендикуляры, опущенные из нее на стороны треугольника *ABC*, пропорциональны отрезкам *B'C'*, *C'A'* и *A'B'*.

Следовательно, если на сторонах треугольника *ABC*, вне его, построить квадраты и продолжить их внешние основания до пересечения в точках *A''*, *B''*, *C''*, то треугольник *A''B''C''* с тремя квадратами, построенными на его сторонах, внутри его, по чертежу будет неотличим от треугольника *ABC* с тремя искомыми квадратами.

Синтез. На сторонах данного треугольника, вне его, построим квадраты. Стороны квадрата, параллельные лежащим на сторонах треугольника, продолжим до пересечения в точках, образующих вершины нового треугольника. Разделим стороны данного треугольника на части, пропорциональные частям, на которые построенные вне его квадраты делят стороны нового треугольника. Тогда центральные отрезки будут основаниями искомых квадратов.

2. *Тригонометрическое решение*

Пусть a, b, c — стороны данного треугольника, m — его площадь, x, y, z — стороны искомых квадратов.

Вокруг четырехугольника $BDB'F$, очевидно, можно описать окружность. Следовательно, $\angle B'BD = \angle B'FD$.

Кроме того, нам известно, что в треугольнике $B'FD$

$$B'D \sin D = B'F \sin F,$$

то есть

$$x \sin\left(\angle B' + \angle F\right) = z \sin F.$$

Таким образом

$$x \sin B' \cos F + x \cos B' \sin F = z \sin F.$$

Но $\angle$ B дополняет $\angle B'$ до 180°, следовательно,

$$x \sin B \cos F = \left(z + x + \cos B\right) \sin F,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} F = \frac{z + x \cos B}{x \sin B} = \operatorname{ctg}\left(\angle B'BD\right).$$

Подставляя ctg ($\angle B'BD$) в выражение

$$BD = x \operatorname{ctg} (\angle B'BD),$$

получаем

$$BD = \frac{z + x \cos B}{\sin B}.$$

Аналогичным способом находим, что

$$EC = \frac{y + x \cos C}{\sin C}.$$

Но $BD+EC=a-x$, поэтому

$$\frac{z+x\cos B}{\sin B}+\frac{y+x\cos C}{\sin C}=a-x,$$

$$\frac{x\sin\left(B+C\right)+y\sin B+z\sin C}{\sin B\sin C}=a-x,$$

$$\frac{x\sin A+y\sin B+z\sin C}{\sin B\sin C}=a-x. \qquad (*)$$

Из подобия треугольников ABC и $A'B'C'$ следует, что

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}.$$

Следовательно, равенство (*) с помощью выписанного ряда равных отношений можно преобразовать к виду

$$\frac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{\sin B\sin C}=\frac{a^2}{x}-a,$$

откуда

$$\frac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{\sin B\sin C}=\frac{a}{x}-1$$

и, наконец,

$$\frac{a}{x}=\frac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{a\sin B\sin C}+1.$$

Умножая числитель и знаменатель стоящей в правой части дроби на одно из равных отношений

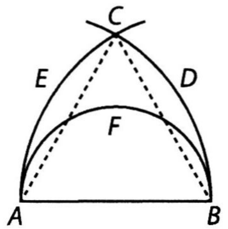
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

находим

$$\frac{a}{x}=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab\sin C}+1=\frac{a^2+b^2+c^2}{2m}+1=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}.$$

58

Можно предположить, что для трех точек, образующих треугольник, вероятность лежать на одной прямой (практически) равна нулю.



Пусть AB — самая длинная из сторон треугольника. На AB, как на диаметре, построим полуокружность (полуокружность должна лежать по ту сторону от AB, по которую лежит треугольник ABC). Кроме того, проведем дуги окружностей с центрами в точках A и B и радиусами AB и BA. Пусть C — точка пересечения этих дуг.

Ясно, что вершина треугольника C не может лежать вне фигуры $ABDCE$.

Кроме того, мы видим, что если вершина C лежит внутри полуокружности, то треугольник тупоугольный, если же вне полуокружности, — то остроугольный. (Вероятность того, что вершина C лежит на полуокружности, практически равна нулю.)

Следовательно, искомая вероятность равна отношению

$$\frac{\text{площадь половины круга}}{\text{площадь фигуры } ABDCE}.$$

Положим $AB = 2a$, тогда площадь половины круга, построенного на AB, как на диаметре, равна $\pi a^2/2$, а площадь фигуры $ABDCE$ равна разности между удвоенной площадью сектора $ABDC$ и площадью треугольника ABC, то есть

$$2\cdot\frac{4\pi a^2}{6} - \sqrt{3}\cdot a^2 = a^2\cdot\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right).$$

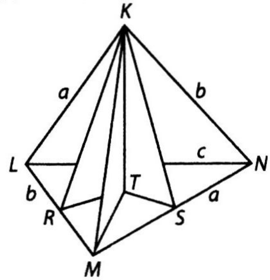
Следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{\pi/2}{4\pi/3 - \sqrt{3}} = \frac{3}{8 - 6\sqrt{3}/\pi},$$

что и требовалось доказать.

59

Пусть $KL = MN = a$, $KN = LM = b$, $KM = LN = c$, $\angle LMK = A$, $\angle MKL = B$, $\angle KLM = C$ (аналогичные равенства справедливы и для углов в других гранях).



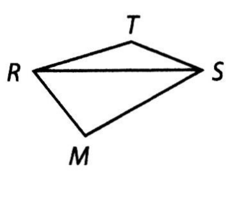
Из вершины тетраэдра K опустим высоту KT на основание LMN, а также перпендикуляры KR и KS к ребрам LM и MN. Соединим точку T с вершиной M и основаниями перпендикуляров R и S.

Нетрудно доказать, что углы TRM и TSM — прямые.

Искомый объем равен $\frac{1}{3}KT\cdot$ площадь LMN. Площадь грани LMN, разумеется, можно считать известной. Следовательно, чтобы решить задачу, необходимо лишь знать высоту KT. Но $KT^2 = KS^2 - TS^2$, причем $KS = c \sin B$. Итак, задача свелась к вычислению длины отрезка TS.

Чтобы вычислить длину TS, нам понадобится вспомогательная лемма, доказательство которой само по себе представляет красивую задачу.

Лемма 1. В четырехугольнике $RMST$ стороны RM и MS известны, а углы RMS, TRM и TSM — прямые. Найти длину стороны TS.



По теореме синусов

$$\frac{TS}{\sin(\angle TRS)} = \frac{TR}{\sin(\angle TSR)}.$$

Кроме того,

$$TS \text{⌓}\left(\angle TSR\right)+TR \text{⌓}\left(\angle TRS\right)=RS,$$

следовательно,

$$\frac{TS}{\text{⌔}\left(\angle TRS\right)}=\frac{TR}{\text{⌔}\left(\angle TSR\right)}=$$

$$=\frac{TS \text{⌓}\left(\angle TSR\right)+TR \text{⌓}\left(\angle TRS\right)}{\text{⌔}\left(\angle TRS\right)\text{⌓}\left(\angle TSR\right)+\text{⌔}\left(\angle TSR\right)\text{⌓}\left(\angle TRS\right)}=$$

$$=\frac{RS}{\text{⌔}\left(\angle RMS\right)}=\frac{MS}{\text{⌔}\left(\angle MRS\right)}.$$

Таким образом,

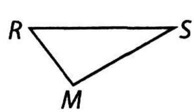
$$\frac{TS}{\text{⌓}\left(\angle MRS\right)}=\frac{MS}{\text{⌔}\left(\angle MRS\right)},$$

то есть

$$TS = MS\cdot \operatorname{ctg}\left(\angle MRS\right).$$

Итак, для решения задачи нам требуется вычислить $\operatorname{ctg}(\angle MRS)$. Его значение мы найдем с помощью другой леммы (разумеется, мы могли бы с тем же успехом вычислять и $\operatorname{tg}(\angle MRS)$; более того, вычисление тангенса представляет собой более изящную задачу, чем вычисление котангенса).

Лемма 2. В треугольнике RMS даны стороны RM, MS и $\angle RMS$. Найти $\operatorname{tg}(\angle MRS)$.



$$\operatorname{tg}\left(\angle MRS\right)=\frac{\text{⌔}\left(\angle MRS\right)}{\text{⌓}\left(\angle MRS\right)}=\frac{RS \text{⌔}\left(\angle MRS\right)}{RS \text{⌓}\left(\angle MRS\right)}=$$

$$=\frac{MS \text{⌔}\left(\angle RMS\right)}{RM - MS \text{⌓}\left(\angle RMS\right)}.$$

Итак, в четырехугольнике $RMST$ по лемме 1

$$TS = MS\operatorname{ctg}\left(\angle MRS\right),$$

а по лемме 2

$$\operatorname{ctg}\left(\angle MRS\right) = \frac{RM - MS\cos\left(\angle RMS\right)}{MS\sin(\angle RMS)} = \frac{c\cos A - c\cos B\cos C}{c\cos B\sin C} =$$

$$= \frac{\cos A - \cos B\cos C}{\cos B\sin C}.$$

Следовательно,

$$TS = \frac{c}{\sin C}\left(\cos A - \cos B\cos C\right).$$

Но $KT^2 = KS^2 - TS^2$, поэтому

$$KT^2 = \left(c\sin B\right)^2 - \frac{c^2}{\sin^2 C}\cdot\left(\cos A - \cos B\cos C\right)^2 =$$

$$= \frac{c^2}{\sin^2 C}\cdot\left[\left(\sin B\sin C\right)^2 - \left(\cos A - \cos B\cos C\right)^2\right].$$

Таким образом,

$$KT = \frac{c}{\sin C}\sqrt{\sin^2 B\sin^2 C - \cos^2 B\cos^2 C - \cos^2 A + 2\cos A\cos B\cos C} =$$

$$= \frac{c}{\sin C}\sqrt{\left(1-\cos^2 B\right)\left(1-\cos^2 C\right) - \cos^2 B\cos^2 C - \cos^2 A + 2\cos A\cos B\cos C} =$$

$$= \frac{c}{\sin C}\sqrt{1 - \left(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C\right) + 2\cos A\cos B\cos C}.$$

Выражение, стоящее под радикалом, как и должно быть, симметрично относительно A, B и C.

Площадь грани LMN равна

$$\frac{ab\sin C}{2},$$

следовательно, искомый объем тетраэдра равен

$$\frac{abc}{6}\sqrt{1 - \left(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C\right) + 2\cos A\cos B\cos C}.$$

Остается выяснить (это было сделано *после* решения задачи), каким условиям должны удовлетворять отрезки a, b и c, чтобы построение тетраэдра было *возможно*.

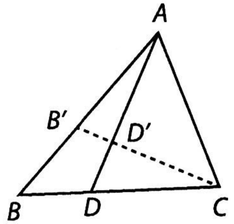
1. Отрезки длиной a, b и c должны быть сторонами треугольника. Следовательно, какие бы две из величин a, b и c мы ни взяли, их сумма должна быть больше третьей величины.

2. Углы треугольника, построенного из отрезков длиной a, b и c, должны образовывать *пространственный угол*. Следовательно, сумма любой пары углов должна быть больше третьего угла и, таким образом, превосходить 90°. Это означает, что *каждый* из углов должен быть *меньше* 90°, а его *косинус* — больше нуля. Отсюда мы заключаем, что должно выполняться неравенство $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Иначе говоря, числа a, b и c должны быть такими, что *сумма квадратов* любых двух из них должна быть больше *квадрата* третьего числа.

Например, отрезки 2, 3 и 4 *не могут* служить для построения тетраэдра, хотя они и удовлетворяют *первому* условию $(2 + 3 > 4)$, поскольку *второе* условие нарушено $(2^2 + 3^2 < 4^2)$.

60

Пусть $\angle BAD = \theta$, $\angle CAD = \varphi$.



Имеем

$$\frac{\sin(\angle B + \theta)}{\sin\theta} = \frac{c}{\left(\frac{ma}{m+n}\right)} = \frac{c(m+n)}{ma},$$

откуда

$$\sin B \operatorname{ctg}\theta + \cos B = \frac{c(m+n)}{ma}.$$

Из этого равенства находим $\operatorname{ctg}\theta$:

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{c(m+n)}{ma \pitchfork B}-\operatorname{ctg}B=$$

$$=\frac{(m+n)(a \text{⌓} B+b \text{⌓} A)-ma \text{⌓} B}{ma \pitchfork B}=$$

$$=\frac{(m+n)b \text{⌓} A+na \text{⌓} B}{ma \pitchfork B}=$$

$$=\frac{(m+n)\dfrac{b}{\pitchfork B} \text{⌓} A+na\operatorname{ctg}B}{ma}=$$

$$=\frac{(m+n)\ a\operatorname{ctg}A+na\operatorname{ctg}B}{ma}=$$

$$=\frac{(m+n)\operatorname{ctg}A+n\operatorname{ctg}B}{m}.$$

Аналогичным образом вычисляем и $\operatorname{ctg}\varphi$:

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{(m+n)\operatorname{ctg}A+m\operatorname{ctg}C}{n}.$$

Следствия.

1. $m\operatorname{ctg}\theta-n\operatorname{ctg}\varphi=n\operatorname{ctg}B-m\operatorname{ctg}C$.

2. $\dfrac{\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}\varphi}{\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}\theta}=\dfrac{m}{n}$.

3. Если треугольник равносторонний, то

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{m+2n}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{n+2m}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\operatorname{ctg}\varphi}=\frac{mn+2n^2}{mn+2m^2},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}=\frac{mn+2m^2}{mn+2n^2}.$$

Последние равенства означают, что если провести прямую $CD'B' \perp AD$, то

$$\frac{B'D'}{D'C} = \frac{mn + 2m^2}{mn + 2n^2}.$$

Например, если $m/n = 1/2$, то $B'D'/D'C = 2/5$.

4. Пусть $\operatorname{tg} A = 1$, $\operatorname{tg} B = 2$, $\operatorname{tg} C = 3$.

Тогда

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{m + n + n \cdot \dfrac{1}{2}}{m} = \frac{2m + 3n}{2m},$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{m + n + m \cdot \dfrac{1}{3}}{n} = \frac{3n + 4m}{3n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{6mn + 8m^2}{6mn + 9n^2}.$$

Отсюда при заданном отношении $\operatorname{tg}\theta/\operatorname{tg}\varphi$ мы можем находить m/n, решая квадратное уравнение.

Пытаясь найти отношение тангенсов, при котором число m/n рационально, я перепробовал различные $\operatorname{tg}\theta/\operatorname{tg}\varphi$ и обнаружил, что нужным мне свойством обладает отношение $\operatorname{tg}\theta/\operatorname{tg}\varphi = 2/3$.

Действительно, в этом случае мы приходим к квадратному уравнению

$$2(6mn + 9n^2) - 3(6mn + 8m^2) = 0,$$

или

$$4m^2 + mn^2 - 3n^2 = 0,$$

откуда $m/n = (-1 \pm 7)/8$. Нас интересует лишь корень $m/n = 3/4$, дающий решение следующей задачи.

«Дан треугольник ABC, такой, что $\operatorname{tg} A = 1$, $\operatorname{tg} B = 2$, $\operatorname{tg} C = 3$. Разделить сторону BC так, чтобы прямая, проведенная из вершины A в точку D, делила отрезок CB', проведенный перпендикулярно ей, в отношении $2/3$». Ответ задачи: $BD/DC = 3/4$.

61

Воспользуемся тождеством

$$(a^2+4b^2+4c^2)+(4a^2+b^2+4c^2)+(4a^2+4b^2+c^2)= \\ =9(a^2+b^2+c^2)$$

и запишем его в следующем виде:

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{9}\left[\left(a^2+4b^2+4c^2\right)+\left(4a^2+b^2+4c^2\right)+\right.$$

$$\left.+\left(4a^2+4b^2+c^2\right)\right]=\frac{1}{9}\left[\left(a^2+4b^2+4c^2+8bc-4ca-4ab\right)+\right.$$

$$\left.+\left(4a^2+b^2+4c^2-4bc+8ca-4ab\right)+\left(4a^2+4b^2+c^2-4bc-4ca+8ab\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{9}\left[\left(-a+2b+2c\right)^2+\left(2a-b+2c\right)^2+\left(2a+2b-c\right)^2\right]=$$

$$=\left(\frac{-a+2b+2c}{3}\right)^2+\left(\frac{2a-b+2c}{3}\right)^2+\left(\frac{2a+2b-c}{3}\right)^2.$$

Но $(-a+2b+2c)=3(b+c)-(a+b+c)$. Следовательно, если $(a+b+c)$ делится на 3, то $(-a+2b+2c)$ также делится на 3, то есть $(-a+2b+2c)/3$ — целое число. Аналогичные утверждения справедливы и относительно остальных двух дробей.

Кроме того, можно показать, что если число $(-a+2b+2c)/3$ равно a, b или c, то a, b и c образуют арифметическую прогрессию.

Действительно, пусть

$$\frac{-a+2b+2c}{3}=a.$$

Тогда $-a+2b+2c=3a$, или $b+c=2a$.

Если же

$$\frac{-a+2b+2c}{3}=b,$$

то $-a+2b+2c=3b$, или $2c=(a+b)$.

Наконец, если

$$\frac{-a+2b+2c}{3}=c,$$

то $-a+2b+2c=3c$, или $2b=c+a$.

Аналогичные утверждения без труда доказываются и для двух остальных дробей.

Следовательно, рассуждая от противного, мы заключаем, что если числа a, b и c *не* образуют арифметическую прогрессию, то сумму их квадратов можно представить в виде суммы 3 других квадратов, причем эти суммы не будут иметь общих слагаемых, что и требовалось доказать.

Числовые примеры (придуманные *не* в часы бессонницы):

a^2	b^2	c^2	$\left(\frac{-a+2b+2c}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2a-b+2c}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2a+2b-c}{3}\right)^2$
1^2	4^2	4^2	5^2	2^2	2^2
3^2	4^2	8^2	7^2	6^2	2^2
4^2	5^2	9^2	8^2	7^2	3^2

Думаю, что читателям моей книги будет небезынтересно познакомиться со следующим решением задачи 61, забавным образом нарушающим законы логики. Его прислал один из моих читателей. Привожу его рассуждения дословно.

Пусть $3m$, $21m$, $30m$ — три числа.

Тогда

$$3m+21m+30m=3\cdot 18m$$

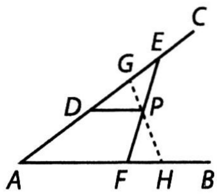
и, как нетрудно видеть,

$$(3m)^2+(21m)^2+(30m)^2=(6m)^2+(15m)^2+(33m)^2=$$
$$=(5m)^2+(10m)^2+(34m)^2=(10m)^2+(17m)^2+(31m)^2=$$
$$=(14m)^2+(23m)^2+(25m)^2.$$

Обозначим через α свойство трех чисел не быть последовательными членами арифметической прогрессии и давать в сумме число, делящееся на 3, а через β — свойство трех чисел, состоящее в том, что сумму их квадратов можно представить в виде суммы квадратов трех других чисел. Автору присланного решения удалось доказать лишь, что *некоторые определенным образом выбранные* числа, обладающие свойством α, обладают также свойством β. Но этим утверждением не исчерпывается сформулированная мной теорема, поскольку в ней требуется доказать, что *любые* три числа, обладающие свойством α, обладают также и свойством β. Записав рассуждение автора приведенного выше решения в виде силлогизма, мы без труда обнаружим, что он исходит из совершенно несостоятельной большей посылки, а именно: «То, что верно для *некоторых определенным образом выбранных чисел*, обладающих свойством α, верно и для любых чисел, обладающих свойством α».

62

Пусть AB, AC — данные прямые, P — данная точка. Через точку P проведем прямую $PD \parallel AB$ и на прямой AC от точки D отложим отрезок $DE=AD$. Соединим точки E и P отрезком прямой и продолжим его до пересечения с прямой AB в точке F.



Так как $AD=DE$ и $DP \parallel AB$, то $FP=PE$. Пусть GPH — любая другая прямая, проходящая через точку P. Тогда $\angle PFH > \angle PEG$.

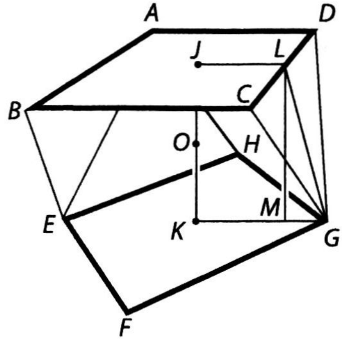
Поскольку в треугольниках PFH и PEG стороны PF и PE, а также углы FPH и GPE равны, а $\angle PFH > \angle PEG$, то и сторона PH больше стороны PG. Следовательно, $S_{\Delta PFH} > S_{\Delta PEG}$. Присоединив к каждому из треугольников четырехугольник $AFPG$, мы получим неравенство $S_{\Delta AGH} > S_{\Delta AEF}$.

Поскольку GPH — произвольная прямая, проходящая через точку P, площадь треугольника AEF — наименьшая из возможных, что и требовалось доказать.

63

Пусть сторона каждого квадрата равна 2. Тогда $LG=\sqrt{3}$, $MG=(\sqrt{2}-1)$, откуда $LM=JK=\sqrt{3-(2+1-2\sqrt{2})}=2^{3/4}$ и, следовательно, $OJ=OK=1/2^{1/4}$.

Выберем точку O за начало координат, ось X направим параллельно AD, ось Y — параллельно AB, а ось Z — по JK.



Уравнение плоскости, в которой лежит треугольник CDG, имеет вид

$$x \text{⌓} \alpha + y \text{⌓} \beta + z \text{⌓} \gamma - p = 0,$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из O на плоскость и пересекающегося с последней в какой-то из точек отрезка LG.

Следовательно, p можно найти из уравнения прямой LG, лежащей в плоскости XZ. Это уравнение имеет вид

$$x \text{⌓} \alpha + z \text{⌓} \gamma - p = 0.$$

Координаты точек L и G, через которые проходит прямая, известны: $L = (1,\ 1/2^{1/4})$, $G = [\sqrt{2},\ -(1/2^{1/4})]$. Подставляя их в уравнение, получаем

$$\text{⌓} \alpha + \frac{1}{2^{1/4}} \text{⌓} \gamma - p = 0,$$

$$\sqrt{2} \text{⌓} \alpha - \frac{1}{2^{1/4}} \text{⌓} \gamma - p = 0.$$

Отсюда

$$\left(\sqrt{2} - 1\right) \text{⌓} \alpha = \frac{2}{2^{1/4}} \text{⌓} \gamma = 2^{3/4} \text{⌓} \gamma,$$

следовательно,

$$\frac{\text{⌓} \alpha}{2^{3/4}} = \frac{\text{⌓} \gamma}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2^{3/4} + 3 - 2^{3/4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{⌓}\,\alpha=\frac{2^{3/4}}{\sqrt{3}},\quad \text{⌓}\,\gamma=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}},$$

$$p=\frac{2^{3/4}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}-1}{2^{1/4}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+1}{2^{1/4}\sqrt{3}}.$$

Площадь треугольника CDG равна $\sqrt{3}$. Следовательно, площадь пирамиды с основанием CDG и вершиной в точке O равна $(\sqrt{2}+1)/(3\cdot 2^{1/4})$.

Интересующее нас тело содержит восемь таких пирамид. Их суммарный объем составляет $8(\sqrt{2}+1)/(3\cdot 2^{1/4})$.

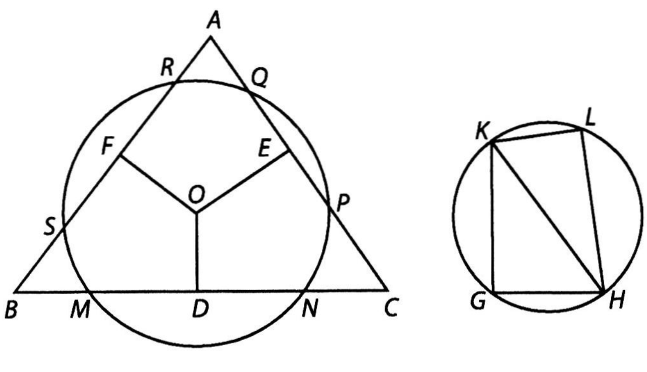
Объем пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной в точке O равен $4/(3\cdot 2^{1/4})$. В интересующем нас теле имеются две такие пирамиды. Их суммарный объем составляет $8/(3\cdot 2^{1/4})$.

Следовательно, объем тела равен

$$\frac{8\left(2+\sqrt{2}\right)}{3\cdot 2^{1/4}}=\frac{8\cdot 2^{1/4}\left(\sqrt{2}+1\right)}{3},$$

что и требовалось доказать.

64



Пусть ABC — данный треугольник, O — данная точка, и пусть OD (расстояние от O до BC) меньше, чем OE или OF (расстояний от O до AC и AB).

Построим отрезок $GH = OE$. На перпендикуляре, восставленном к нему в точке G, отложим $GK = OF$ и соединим точки

K и H отрезком прямой. Вокруг треугольника GHK опишем окружность, проведем в ней хорду $KL = OD$ и соединим отрезком прямой точки L и H.

Так как $KL^2 + LH^2 = KG^2 + GH^2$ и отрезок KL меньше любого из отрезков KG и GH, то отрезок LH должен быть больше любого из них. Следовательно, окружность с центром в точке O и радиусом LH пересечет каждую из сторон треугольника ABC в двух точках. Проведем такую окружность. Тогда

$$MD^2 + DO^2 = PE^2 + EO^2,$$

$$LH^2 = RF^2 + FO^2,$$

следовательно,

$$MD^2 + DO^2 + LH^2 = PE^2 + RF^2 + EO^2 + FO^2.$$

Но

$$DO^2 + LH^2 = KL^2 + LH^2 = GH^2 + GK^2 = EO^2 + FO^2.$$

Таким образом,

$$MD^2 = PE^2 + RF^2,$$

$$4MD^2 = 4(PE^2 + RF^2),$$

откуда

$$MN^2 = PQ^2 + RS^2.$$

Следовательно, отрезки MN, PQ и RS могут быть сторонами прямоугольного треугольника, что и требовалось доказать.

65

Обозначив углы искомого треугольника через $360°/x$, $360°/y$ и $360°/z$, получим диофантово уравнение с тремя неизвестными вида

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что ни x, ни y, ни z не могут быть равны 2.

1. Пусть $x = 3$. Тогда $1/y + 1/z = 1/6$. Если $1/y = [k/(k+l)] \cdot 1/6$, то $1/z = [l/(k+l)] \cdot 1/6$, откуда следует, что k и l могут принимать только значения 1, 2, 3 или 6.

Примечание. Предполагается, что числители и знаменатели каждой из дробей $k/(k+l)$, $l/(k+l)$ не содержат общих множителей.

Предположим, что $1/y \geqslant 1/z$. Тогда $k/(k+l) \geqslant 1/2$, и мы можем перечислить все допустимые значения $k/(k+l)$ и $l(k+l)$:

$\frac{k}{k+l}$	$\frac{l}{k+l}$
1/2	1/2
2/3	1/3
3/4	1/4
3/5	2/5
6/7	1/7

Отсюда мы получаем 5 наборов допустимых значений $1/x$, $1/y$, $1/z$, а именно: 1/3, 1/12, 1/12; 1/3, 1/9, 1/18; 1/3, 1/8, 1/24; 1/3, 1/10, 1/15; 1/3, 1/7, 1/42.

2. Пусть $x = 4$. Тогда $1/y + 1/z = 1/4$, и, как и раньше, k и l могут принимать только значения 1, 2 или 4. Допустимыми в этом случае являются следующие значения $k/(k+l)$ и $l/(k+l)$:

$\frac{k}{k+l}$	$\frac{l}{k+l}$
1/2	1/2
2/3	1/3
4/5	1/5

Отсюда мы получаем еще 3 допустимых набора значений $1/x$, $1/y$, $1/z$: 1/4, 1/8, 1/8; 1/4, 1/6, 1/12; 1/2, 1/5, 1/20.

3. Пусть $x = 5$. Тогда $1/y + 1/z = 3/10$. Следовательно, знаменатель левой части должен содержать множитель 3, а k и l могут принимать только значения 1, 2, 5 или 10.

Из таблицы допустимых значений $k/(k+l)$ и $l/(k+l)$

$\frac{k}{k+l}$	$\frac{l}{k+l}$
1/2	1/2
2/3	1/3
5/6	1/6

получаем 2 набора допустимых значений $1/x$, $1/y$ и $1/z$: 1/5, 1/5, 1/10; 1/5, 1/4, 1/20.

Последний набор уже встречался нам (это обстоятельство ускользнуло от меня, когда я решал задачу в уме).

4. Пусть $x=6$. Тогда $1/y+1/z=1/3$. Следовательно, k и l могут принимать только значения 1 или 3. Допустимыми для $k/(k+l)$ и $l/(k+l)$ являются значения

$\frac{k}{k+l}$	$\frac{l}{k+l}$
1/2	1/2
3/4	1/4

Отсюда мы получаем 2 набора допустимых значений $1/x$, $1/y$ и $1/z$: 1/6, 1/6, 1/6; 1/6, 1/4, 1/12, но последний из них уже встречался нам (это обстоятельство я также упустил из виду, когда решал задачу в уме).

Придавать x значения больше 6 бессмысленно, поскольку при этом $1/y+1/z>1/3$ и, следовательно, одно из слагаемых в левой части должно быть больше 1/6. Это означало бы, что либо y, либо z должен быть меньше 6, и мы вернулись бы к прежним наборам допустимых значений.

Итак, существуют 10 различных форм треугольников интересующего нас вида, что и требовалось доказать.

Перечислю их (я не уверен, что все они были получены мной без обращения к карандашу и бумаге):

1) 120°,	30°,	30°;	6) 90°,	45°,	45°;
2) 120°,	40°	20°;	7) 90°,	60°,	30°;
3) 120°,	45°,	15°;	8) 90°,	72°,	18°;
4) 120°,	36°,	24°;	9) 72°,	72°,	36°;
5) 120°,	$51\frac{3}{7}$°,	$8\frac{4}{7}$°;	10) 60°,	60°,	60°.

66

Обозначим для краткости $\alpha/(\alpha+\beta)$ через k. Шары в урне могут быть либо оба белые, либо один белый и один черный. Пусть x — вероятность того, что в урне находятся 2 белых шара. Тогда вероятность того, что в урне находятся 1 белый и 1 черный шар, равна $1-x$. Следовательно, вероятность вытащить из урны белый шар равна

$$x\cdot 1+(1-x)\cdot\frac{1}{2}=x+\frac{1-x}{2}=k,$$

откуда

$$x=2k-1,$$

$$1-x=2-2k.$$

Предположим теперь, что из урны вытащили 1 шар и он оказался белым. Вероятность «наблюденного события» в первом случае (в урне 2 белых шара) равна 1, во втором случае 1/2. Следовательно, послеапостериорные вероятности того, что в урне находились 2 белых шара или 1 белый и 1 черный шар, пропорциональны $(2k-1)\cdot 1$ и $(2-2k)\cdot 1/2$, или просто $(2k-1)$ и $(1-k)$, то есть равны $(2k-1)/k$ и $(1-k)/k$.

Вероятность вытащить белый шар теперь равна

$$\frac{2k-1}{k}\cdot 1+\frac{1-k}{k}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3k-1}{k}.$$

Итак, в результате 1-го повторения испытания вероятность перешла в $(3k-1)/2k$.

При втором повторении $(3k-1)/2k$ перейдет в

$$\frac{3\cdot\frac{3k-1}{2k}-1}{2\cdot\frac{3k-1}{2k}}=\frac{7k-3}{6k-2}.$$

Найдем общий закон (если таковой существует) для членов ряда

$$k,\quad\frac{3k-1}{2k},\quad\frac{7k-3}{6k-2},$$

то есть выражение, которое при $n=1, 2, 3$ (n — число испытаний) принимает выписанные выше значения.

Записав первый и второй члены ряда по аналогии с третьим в виде

$$\frac{k-0}{0\cdot k-(-1)},\quad\frac{3k-1}{2k-0},\quad\frac{7k-3}{6k-2},$$

заметим, что каждое из трех выражений является частным случаем выражения

$$\frac{(2^n-1)k-(2^{n-1}-1)}{(2^n-2)k-(2^{n-1}-2)},$$

где n — номер члена (и число испытаний).

Предположим, что этот закон верен для n членов. Как изменится вероятность после проведения еще одного испытания?

Мы уже знаем, что после одного испытания k переходит в $(3k-1)/2k$. Следовательно, новое значение вероятности равно

$$\frac{3\cdot\dfrac{(2^n-1)k-(2^{n-1}-1)}{(2^n-2)k-(2^{n-1}-2)}-1}{2\cdot\dfrac{(2^n-1)k-(2^{n-1}-1)}{(2^n-2)k-(2^{n-1}-2)}}=$$

$$=\frac{k(3\cdot 2^n-3-2^n+2)-3\cdot 2^{n-1}+3+2^{n-1}-2}{(2^{n+1}-2)k-(2^n-2)}=$$

$$=\frac{(2^{n+1}-1)k-(2^n-1)}{(2^{n+1}-2)k-(2^n-2)}.$$

Таким образом, $(n+1)$-й член ряда удовлетворяет тому же закону. Поскольку мы знаем, что закон верен при $n=1$, 2, 3, он верен при любых значениях n.

Следовательно, вероятность вытащить белый шар после $(m+1)$ повторных испытаний совпадает с $(m+1)$-м членом ряда, то есть равна

$$\frac{(2^{m+1}-1)k-(2^m-1)}{(2^{m+1}-2)k-(2^m-2)}.$$

Подставляя $k=\alpha/(\alpha+\beta)$, получаем

$$\frac{(2^{m+1}-1)\alpha-(2^m-1)(\alpha+\beta)}{(2^{m+1}-2)\alpha-(2^m-2)(\alpha+\beta)}=\frac{(2^{m+1}-2^m)\alpha-(2^m-1)\beta}{(2^{m+1}-2^m)\alpha-(2^m-2)\beta}=$$

$$=\frac{2^m(\alpha-\beta)+\beta}{2^m(\alpha-\beta)+2\beta},$$

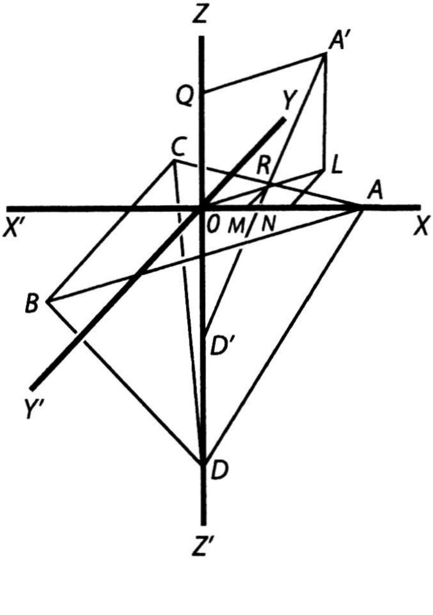
что и требовалось доказать.

Пример. Пусть вероятность вытащить белый шар равна и испытание повторено еще 5 раз. В этом случае $\alpha=9$, $\beta=1$, следовательно, искомая вероятность равна $(32\cdot8+1)/(32\cdot8+2)=257/258$.

67

Пусть *ABCD* — углубление. Будем поворачивать тетраэдр до тех пор, пока связанная с ним плоскость *DOA* не совместится с плоскостью *D'QA'*, а ребро *DA* в новом положении не коснется ребра *AC* углубления в точке *R*. Из *A'* опустим на плоскость *XY* перпендикуляр *A'L*. Через точки *O* и *R* проведем прямую и продолжим ее до точки *L*. Проведем отрезки *RM* и *LN* — ординаты точек *R* и *L*.

Координатами точки *A'* служат длины отрезков *ON*, *NL*, *LA'*. Условимся относительно обозначений. Пусть $x'=OM$, $y'=MR$, $a=OA$, $a'=OR$, $h=OD$, $\theta=\angle XOR$.



Ясно, что вертикальная ось тетраэдра все время совпадает с осью Z. Следовательно, точка A движется по поверхности цилиндра, то есть

$$x^2+y^2=a^2. \tag{1}$$

Поскольку $\angle XAC=150^\circ$, уравнение прямой AC имеет вид

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-a\right),$$

или, что то же,

$$x+\sqrt{3}\cdot y=a. \tag{2}$$

Уравнение прямой OR, очевидно, можно записать в виде

$$\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=\delta.$$

Следовательно, координаты точки R удовлетворяют соотношению

$$\frac{x'}{\cos\theta}=\frac{y'}{\sin\theta}=a'. \tag{3}$$

Кроме того, поскольку точка R лежит на прямой AC, в силу уравнения (2)

$$a'\cos\theta+\sqrt{3}a'\sin\theta=a$$

и, таким образом,

$$a'=\frac{a}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta} \tag{4}$$

Далее, из подобия треугольников $D'QA'$ и $D'OR$

$$QA':QD'=OR:OD',$$

то есть

$$a:h=\frac{a}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}:\left(h-z\right),$$

откуда

$$h-z=\frac{h}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}.$$

Но $⌓\theta = x/a$, $\frown\theta = y/a$, следовательно,

$$h - z = \frac{ah}{x + \sqrt{3}y},$$

или

$$(x + \sqrt{3}y)(h - z) = ah. \tag{5}$$

Искомое геометрическое место точек определяется уравнениями (1) и (5).

68

Обозначим число бутылок вина, проданных в первый, второй и третий день, через x, y и z. Предположим, что каждая бутылка была куплена за $10v$ пенсов и, следовательно, продана за $11v$ пенсов.

В первый день казначей получил от продавца $(x-1)\cdot 11v$, во второй $y\cdot 11v - v$ и в третий день $(z-1)\cdot 11v - v$ пенсов. Следовательно, прибыль (разность между выручкой и затратами на покупку вина) составила: в первый день $xv - 11$, во второй день $yv - v$ и в третий $zv - 12v$ пенсов. По условию задачи все три величины равны, откуда $y = x - 10$, $z = x + 1$.

Таким образом, полное число бутылок $(x + y + z)$, хранившихся в начале в винном погребе «фирмы», равно $3x - 9$.

Прибыль от продажи всех бутылок составила $(x + y + z)v - 24v = (3x - 33)v$, а прибыль от продажи одной бутылки равна $[(3x - 33)v]/(3x - 9)$. (По условию задачи эта величина равна 6 пенсам.) Отсюда мы получаем уравнение

$$(x - 11)v = (x - 3)6.$$

Кроме того, $z\cdot 11v = 11\cdot 240$, то есть

$$(x + 1)\cdot 11v = 11\cdot 240.$$

Комбинируя эти два уравнения, получаем:

$$\frac{x-11}{x+1} = \frac{6(x-3)}{240},$$

$$(x+1)(x-3) = 40(x-11),$$

$$x^2-2x-3=40x-440,$$

$$x^2-42x+437=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{42\pm 4}{2},\quad x_1=23,\quad x_2=19.$$

Итак, число бутылок равно либо 60, либо 48, но, поскольку оно должно быть кратно 5, остается лишь одно решение: 60 бутылок.

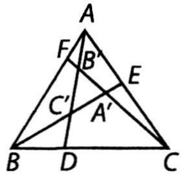
Поскольку $(x+1)\cdot 11v=11\cdot 240$, или $24v=240$, то $v=10$.

Таким образом, вино было куплено по цене 8 шиллингов 4 пенса за бутылку и продано по цене 9 шиллингов 2 пенса за бутылку.

69

1. Пусть $\angle BAD=k\cdot A$, $\angle CBE=l\cdot B$, $\angle ACF=m\cdot C$. Тогда $\angle ABE=(1-l)\cdot B$, а поскольку $\angle B'CD=\angle C'AB+\angle C'BA$, то

$$k\cdot A+(1-l)\cdot B=C. \tag{1}$$



Аналогично выводятся и соотношения

$$l\cdot B+(1-m)C=\text{A}, \tag{2}$$

$$m\cdot C+(1-k)A=B. \tag{3}$$

Пользуясь соотношениями (1) и (3), величи́ны l и m можно выразить через k, но получающиеся при этом функции не будут однотипными с k. Поэтому k необходимо представить в виде некоторой функции, зависящей, например, от A, B, C и θ. При этом l и m должны быть такими же по виду функциями A, B, C и θ, то есть должны выполняться соотношения:

$$k = f(A, B, C, \theta),$$

$$l = f(B, C, A, \theta),$$

$$m = f(C, A, B, \theta).$$

Из соотношения (1) известно, что $kA - lB = C - B$, то есть

$$A \cdot f(A, B, C, \theta) - B \cdot f(B, C, A, \theta) = C - B.$$

В качестве эксперимента положим

$$k \cdot A = xA + yB + zC + \theta,$$

$$l \cdot B = xB + yC + zA + \theta,$$

тогда

$$kA - lB = (x - z)A + (y - x)B + (z - y)C.$$

Следовательно,

$$x - z = 0, \text{ то есть } x = z;$$

$$z - y = 1, \text{ то есть } z = y + 1.$$

Эти условия будут выполнены, если положить $y = 1$, $x = z = 2$, так что

$$kA = 2A + B + 2C + \theta,$$

$$lB = 2B + C + 2A + \theta.$$

При этом

$$\left(A, B, C, \theta\right) = \frac{2A + B + 2C + \theta}{A}.$$

Функцию f можно упростить, если вычесть из числителя $A + B + C = 180^\circ$. При этом $k = (A + C + \theta)/A$. Формула упростится еще больше, если $A + B + C = 180^\circ$ вычесть из числителя еще раз, и будет иметь вид $k = (\theta - B)/A$.

Величины l и m выражаются так же:

$$l=\frac{\theta-C}{B},\quad m=\frac{\theta-A}{C}.$$

2. Поскольку $kA=\theta-B$, то, очевидно, $\angle ADC=\theta$ и точно так же $\angle BEA=\angle CFB=\theta$.

Это обстоятельство позволяет решить следующую геометрическую задачу на построение: «Через вершины A, B и C треугольника провести прямые, образующие один и тот же угол θ с противолежащими сторонами».

3. Установим пределы, в которых должен лежать угол θ.

Мы знаем, что $kA=\theta-B$. Но $kA\leqslant A$, следовательно, $\theta-B\leqslant A$, то есть $\theta\leqslant A+B$. Иначе говоря, угол θ не превосходит угла, дополняющего угол C до 180°.

Разумеется, это утверждение справедливо не только для C, но и для любого из трех углов A, B и C треугольника. Следовательно, угол θ не должен превосходить угол, дополняющий наибольший из углов треугольника до 180°.

Кроме того, должно выполняться соотношение $kA\geqslant 0$. Следовательно, $\theta-B\geqslant 0$, или $\theta\geqslant B$. То же неравенство, разумеется, можно выписать и для других углов треугольника.

Итак, если углы A, B, C треугольника расположены в порядке убывания величины, то θ может изменяться в пределах

$$A\leqslant\theta\leqslant 180^\circ-A.$$

4. Найдем коэффициент подобия треугольников $A'B'C'$ и ABC.

Вычислим стороны треугольника ABC', углы которого равны $(\theta-B)$, $(180^\circ-\theta-A)$, $(180^\circ-C)$:

$$AC'=\frac{AB}{\sin\left(AC'B\right)}\cdot\sin\left(ABC'\right)=\frac{c}{\sin C}\cdot\sin\left(\theta+A\right)=\frac{a}{\sin A}\cdot\sin\left(\theta+A\right);$$

$$BC'=\frac{AB}{\sin\left(AC'B\right)}\cdot\sin\left(BAC'\right)=\frac{c}{\sin C}\cdot\sin\left(\theta-B\right)=\frac{a}{\sin A}\cdot\sin\left(\theta-B\right)$$

и по симметрии

$$AB'=\frac{a}{\sin A}\cdot\sin\left(\theta-A\right).$$

Сторону $B'C'$ треугольника $A'B'C'$ можно представить в виде $B'C'=AC'-AB'$. Следовательно,

$$B'C'=\frac{a}{\sin A}\left[\sin\left(\theta+A\right)-\sin\left(\theta-A\right)\right]=\frac{a}{\sin A}2\cos\theta\sin A=a2\cos\theta.$$

Таким образом,

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=2\cos\theta.$$

70

1. В плоскости передней грани геометрическим местом вершин всех равновеликих ей треугольников, имеющих с ней общее основание (и расположенных по ту же сторону от этого основания, что и сама грань), является прямая, параллельная основанию и отстоящая от него на расстояние $\sqrt{3}/2$ (если за единицу длины принять длину ребра).

Следовательно, если мы представим себе, что к передней грани тетраэдра приклеена полоска бумаги шириной $\sqrt{3}/2$, которой мы оборачиваем тетраэдр, то верхний край этой полоски и будет, очевидно, геометрическим местом вершин треугольников, равновеликих передней грани и имеющих с ней общее основание. Воображаемую полоску бумаги удобно представить себе разделенной на равносторонние треугольники с основаниями, обращенными попеременно то вниз, то вверх. По мере того как мы будем оборачивать полоску вокруг тетраэдра, эти треугольники будут совмещаться с гранями тетраэдра, закрывая их в такой последовательности: передняя, правая боковая, нижняя, левая боковая, передняя и т. д. *Верхний* край полоски, образованный основаниями перевернутых равносторонних треугольников, расположится на поверхности тетраэдра следующим образом.

Обозначим треугольники, на которые разбита полоска, буквами греческого алфавита. Пусть вслед за первым треугольником, совпадающим с передней гранью тетраэдра, идет треугольник α (обращенный основанием вверх), затем — треугольник β (обращенный основанием вниз), γ (основание обращено вверх), δ (основание обращено вниз) и т. д. Геометрическое место, о котором идет речь, состоит из оснований треугольников α, γ и т. д. Когда треугольник α совмещается с правой боковой гранью тетраэдра, его основание совпадает с задним ребром тетраэдра, идущим от вершины к основанию. Треугольник β закроет нижнюю грань тетраэдра. Его основание совпадает с нижним ребром передней грани. Треугольник γ совместится с левой боковой гранью тетраэдра, его основание совпадет с задним ребром тетраэдра, идущим от вершины к основанию, и т. д. Таким образом, искомое геометрическое место точек будет состоять из точек заднего ребра тетраэдра, не лежащего в горизонтальной плоскости и проходимого сначала сверху вниз, затем снизу вверх и т. д. Таков ответ на первый вопрос.

Отвечая на остальные вопросы, мы будем рассматривать полоску бумаги до того, как она будет обернута вокруг тетраэдра, и вычислять положение вершин соответствующих треугольников вдоль *верхнего* ее края. При этом задачи сводятся к более простым задачам планиметрии.

2. Рассмотрим прямоугольный треугольник с высотой $\sqrt{3}/2$ и углом при основании, равным 15°. Если мы вычислим его основание и вычтем из него половину основания треугольника, образующего переднюю грань тетраэдра (то есть просто $1/2$), то найдем, на каком расстоянии от вершины тетраэдра (считая вдоль верхнего края полоски) находится его вершина. Затем мы сможем вычислить, сколько раз нам придется спуститься и подняться по заднему ребру тетраэдра, чтобы попасть в эту точку.

Итак, пусть x — основание прямоугольного треугольника (с высотой $\sqrt{3}/2$ и углом при основании, равным 15°). Тогда

$$\frac{\sqrt{3}}{2x} = \operatorname{tg} 15^\circ.$$

Если обозначить $\operatorname{tg} 15^\circ$ через t, то

$$\frac{2t}{1-t^2} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$1-t^2 = 2\sqrt{3}t, \quad t^2 + 2\sqrt{3}t - 1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим

$$t = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4}{2}.$$

Отбрасывая отрицательный корень, получаем $t=2-\sqrt{3}$. Таким образом,

$$x-\frac{\sqrt{3}}{2\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+\frac{3}{2}.$$

Искомое расстояние равно $x-½=\sqrt{3}+1$, то есть около 2,7.

Следовательно, нам придется спуститься по заднему ребру, затем подняться и снова спуститься примерно на 0,7 его длины. Таков ответ на второй вопрос задачи.

3. Прежде чем дойти до вершины этого треугольника, нам придется один раз спуститься вдоль заднего ребра тетраэдра и один раз подняться, то есть пройти обращенные вверх основания треугольников α и γ. Поэтому основание вспомогательного прямоугольного треугольника (см. решение предыдущего вопроса) в этом случае равно $2\frac{1}{2}$, а тангенс угла при его основании равен $(\sqrt{3}/2)\cdot 2/5$, то есть $\sqrt{3}/5$. Вычисляя приближенно арксинус этого угла, я нашел, что угол равен 18,65°.

4. В этом случае основание вспомогательного прямоугольного треугольника равно $3\frac{1}{2}$. Следовательно, тангенс искомого угла (обозначим его φ) при основании равен

$$\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{7}{2}=\frac{\sqrt{3}}{7},$$

откуда

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}=\frac{\cos\varphi}{7}=\frac{1}{\sqrt{52}}$$

и

$$\sin\varphi=\sqrt{\frac{3}{52}}\approx\sqrt{\frac{1}{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Поскольку $\sqrt{17}\approx 4,\ 12\ldots$, то

$$\sin\varphi\approx 0{,}24\ldots,$$

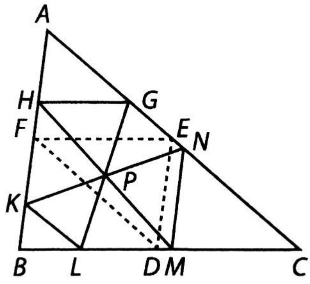
а

$$\varphi\approx 14{,}53^\circ.$$

71

Пусть ABC — данный треугольник, P — данная точка.

Соединим отрезками прямых середины D, E и F сторон треугольника ABC.



Предположим сначала, что точка P лежит внутри треугольника DEF.

Проведем прямую $HG \parallel BC$ так, чтобы расстояние между HG и BC было вдвое больше расстояния от точки P до BC. Соединим отрезками прямых точки G, P и H, P и продолжим отрезки GP и HP до пересечения со стороной BC в точках L и M. Через L проведем $LK \parallel AC$. Прямую KP продолжим до пересечения со стороной AC в точке N. Соединим точки M и N отрезком прямой.

Так как $HG \parallel LM$, то $GP = PL$ и $HP = PM$, а поскольку $KL \parallel GN$ и $LP = PG$, то $KP = PN$ и, следовательно, $MN \parallel HK$. Таким образом, треугольники PGH и PLM равны, в силу чего $GH = LM$.

Равенства $KL = GH$ и $MN = HK$ доказываются аналогично.

Если точка P лежит на FE, то отрезки HG и LM стягиваются в точку и шестиугольник вырождается в параллелограмм.

Если точка P совпадает с точкой D, то шестиугольник вырождается в прямую BC.

Если точка P лежит вне треугольника DEF, то задача неразрешима.

72

Мы знаем, что если бы в урне было 3 шара, из них 2 черных и 1 белый, то вероятность вытащить черный шар была бы равна 2/3, и что при любой *другой* комбинации трех шаров вероятность извлечь черный шар была бы *иной*.

Вероятности того, что в данной урне находятся (α) 2 черных шара, (β) 1 белый и 1 черный шар и (γ) 2 белых шара, равны соответственно 1/4, 1/2, 1/4.

Положим в урну один черный шар.

Вероятности того, что в ней теперь находятся (α) 3 черных шара, (β) черный шар, белый шар и черный шар и (γ) 2 белых шара и 1 черный шар, как и прежде, равны 1/4, 1/2, 1/4.

Следовательно, теперь вероятность вытащить черный шар равна

$$\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Это означает, что теперь в урне находятся 2 черных шара и 1 белый (ибо при любой *другой* комбинации 3 шаров вероятность вытащить черный шар была бы *иной*).

Таким образом, *до того*, как мы положили в урну 1 черный шар, в ней находились 1 белый шар и 1 черный шар, что и требовалось доказать.

Содержание

Научно-популярное издание

Льюис Кэрролл

История с узелками, или Все не так, как кажется

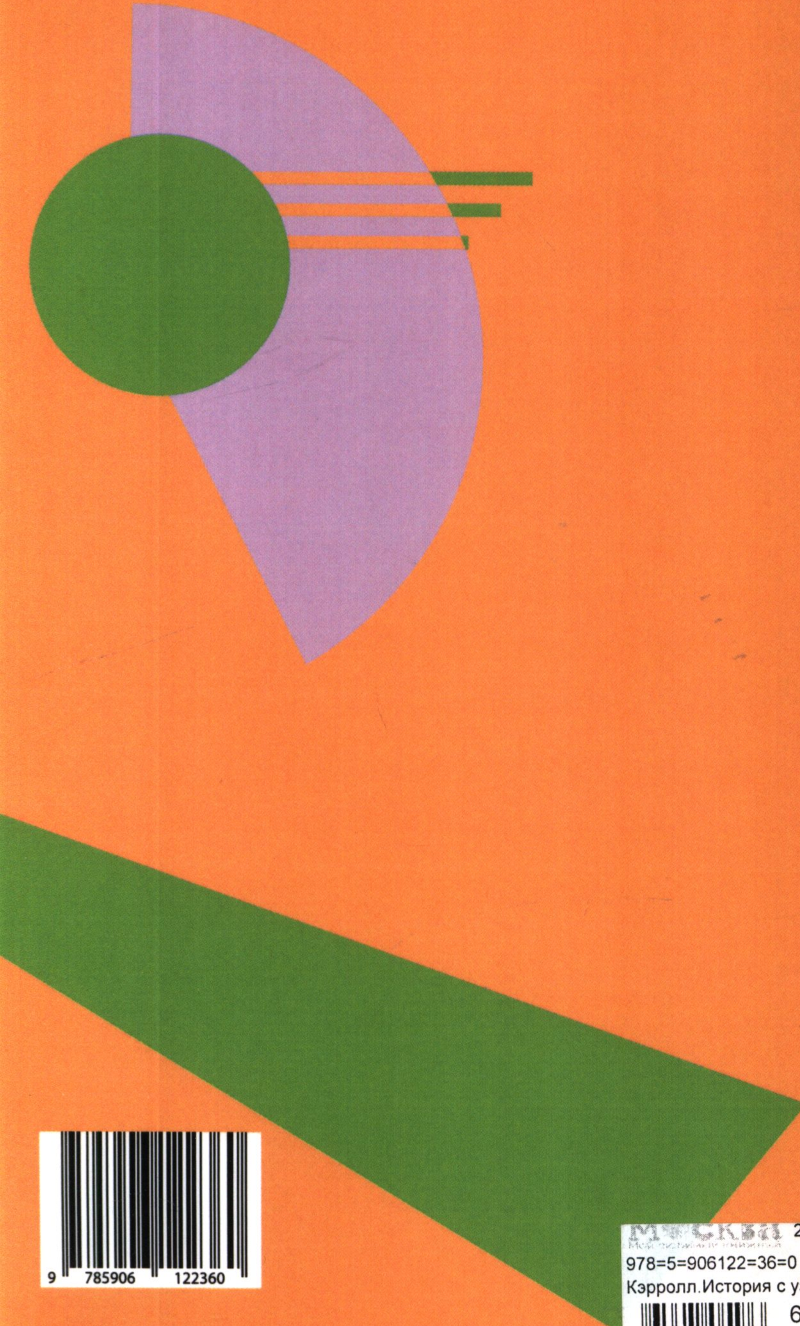
Над книгой работали:

Оформление — Заплавская Т. И.
Компьютерная верстка — Махонин А. В., Тарасов А. А.
Ответственный за выпуск — Захаров С. В.

Генеральный директор — Бодрова Ж. Л.

ООО «Лекстор»
http://www.rimis.ru
123007, Москва, 2-й Силикатный пр-д, д. 8
Оптовые и розничные продажи: +7(499) 946-22-06
E-mail: info@rimis.ru

Подписано в печать 02.06.2017.
Формат 84×108 1/32.
Усл. печ. л. 10,92.
Тираж 700 экз.



9 785906 122360

200-216-004
978=5=906122=36=0 0501
Кэрролл.История с узелками,или
6547059
740.00