НОВЫЙ ФГОС

УМК

МАТЕМАТИКА

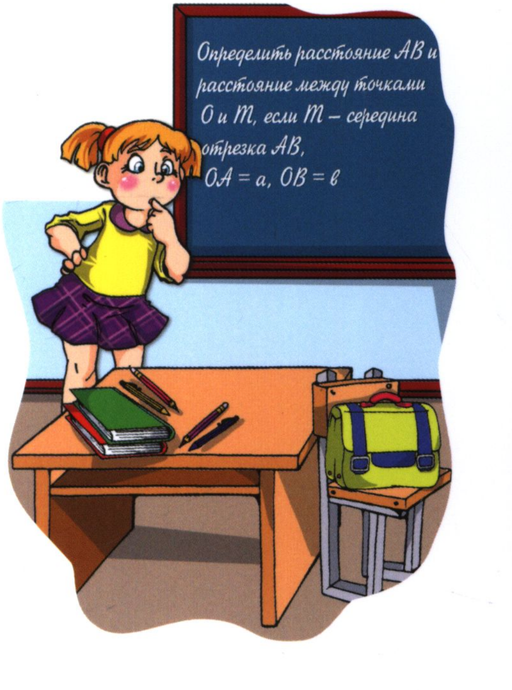
А. В. Фарков

# Математические олимпиады

Ко всем действующим учебникам

**5 | 6**

классы




ЭКЗАМЕН®

Учебно-методический комплект

А. В. Фарков

# Математические олимпиады

Ко всем действующим учебникам

## 5–6 классы

Допущено к использованию в образовательном процессе на основании приказа Министерства образования и науки Российской Федерации № 699 от 09.06.2016

*Издание тринадцатое, переработанное и дополненное*

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2023

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Ф24

*Имена авторов, название и содержание произведений используются в данной книге в учебных целях в объёме, оправданном целью цитирования (ст. 1274 п. 1 части четвёртой Гражданского кодекса Российской Федерации).*

**Фарков А. В.**

Ф24 Математические олимпиады. 5–6 классы. ФГОС НОВЫЙ / А. В. Фарков. — 13-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство «Экзамен», 2023. — 175, [1] с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-19149-0

Данное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту.

Пособие является необходимым дополнением к школьным учебникам по математике для 5–6 классов, рекомендованным Министерством просвещения Российской Федерации и включенным в Федеральный перечень учебников.

Пособие содержит рекомендации по проведению Всероссийских математических олимпиад (первый и второй этапы) применительно к 5–6 классам, подборку задач для подготовки к этим олимпиадам, примерные тексты школьных и муниципальных олимпиад.

Предназначено в первую очередь учащимся 5–6 классов. Будет полезно учителям математики, студентам педвузов.

**УДК 372.8:51**
**ББК 74.262.21**

Формат 60x90/16. Гарнитура «Школьная». Бумага офсетная.
Уч.-изд. л. 5,80. Усл. печ. л. 12,0.
Тираж 5000 экз. Заказ № 3017.

**ISBN 978-5-377-19149-0**

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Существующая в России концепция математического образования включает в себя как обязательный элемент проверки и оценки качества обучения проведение математических олимпиад и изучение их итогов. Это Всероссийские олимпиады школьников, проходящие в четыре этапа; школьный, муниципальный, региональный и заключительный: устные и командные олимпиады, олимпиады для будущих студентов, заочные, конкурс-игра «Кенгуру» и т. д. Но самой массовой олимпиадой является Всероссийская математическая олимпиада. При этом для учащихся 5–6 классов все ограничивается двумя этапами: школьным и муниципальным.

В данном пособии рассматривается методика подготовки и проведения школьного и муниципального этапов Всероссийской олимпиады по математике, приводятся требования к подбору заданий, включаемых в тексты школьных и муниципальных олимпиад по математике для учащихся 5–6 классов; описывается методика оценки олимпиадных заданий, также рассматриваются основные методы решения олимпиадных задач с примерами; задачи для подготовки учащихся к участию в различных олимпиадах, а также примерные тексты школьных и муниципальных олимпиад. При этом большинство текстов школьных и муниципальных олимпиад составлены автором или переработаны автором с учетом рекомендаций Центральной предметно-методической комиссии по математике из текстов, по которым проводились олимпиады в различных регионах России.

Издание адресовано в первую очередь учащимся 5–6 классов, но будет полезно учителям математики общеобразовательных учреждений и руководителям математических кружков внешкольных образовательных учреждений. Также его могут использовать руководители общеобразовательных учреждений, студенты педагогических направлений педвузов; им могут пользоваться и родители учащихся.

Все замечания по улучшению данного пособия можно высылать в издательство и лично автору: a. farkov@mail.ru.

# МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ШКОЛЬНЫХ И МУНИЦИПАЛЬНЫХ ОЛИМПИАД ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5–6 КЛАССОВ

Под *олимпиадой* понимается соревнование учащихся на лучшее выполнение определенных заданий в какой–либо области знаний, в частности в математике.

## Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике

Как правило, проводится отдельно для каждой параллели классов, начиная с пятого класса. Но в олимпиаде могут принимать участие и учащиеся начальных классов.

Основными целями школьной олимпиады являются:

- развитие интереса у обучающихся к математике;
- формирование мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках, факультативах и элективных курсах;
- повышение качества математического образования;
- отбор наиболее талантливых учащихся для участия их в муниципальном этапе Олимпиады и для организации индивидуальной работы с ними.

Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике организует образовательная организация. Для этого в школе создается оргкомитет и жюри школьного этапа Олимпиады.

Жюри создается для проверки и оценки работ участников олимпиады. Также жюри школьного этапа олимпиады определяет кандидатуры победителей и призеров олимпиады, предлагает участников для участия в муниципальном этапе олимпиады. В состав жюри входят председатель и члены жюри. Председателем жюри чаще всего является руководитель школьного методического объединения учителей математики (заведующий кафедрой). Членами жюри могут быть учителя математики и преподаватели вузов, работающие в данной школе; старшеклассники и студенты педвузов, проходящие педпрактику в школе.

Состав оргкомитета, жюри, порядок проведения олимпиад в школе утверждается директором школы.

Наиболее ответственным моментом подготовки олимпиады является составление текста олимпиады.

В соответствии с Положением о Всероссийской олимпиаде школьников, тексты олимпиад для проведения школьного этапа разрабатываются предметными методическими комиссиями муниципального этапа Олимпиады с учетом рекомендаций центральной методической комиссии по математике.

Поэтому рассмотрим основные требования к тексту школьной олимпиады по математике для учащихся 5–6 классов, разработанные автором на основе изучения литературы по проблеме олимпиадного движения и собственного опыта проведения олимпиад и с учетом рекомендаций центральной методической комиссии по математике:

**1. Число задач в тексте олимпиадной работы должно быть от 4 до 6** (при 1–3 заданиях могут возникнуть проблемы с определением победителей и призеров олимпиады, настроиться на решение больше 6 заданий учащимся сложно).

**2. Все задачи в тексте работы должны располагаться в порядке возрастания трудности (или сложности).**

Хотя данные понятия довольно часто встречаются в методической литературе в последние годы, все же остановимся на них подробнее.

*Сложность* — это объективная характеристика задачи, определяемая ее структурой. Сложность задачи зависит от:

- объема информации (числа понятий, суждений...), необходимого для ее решения,
- числа данных в задаче,
- числа связей между ними,

- количества возможных выводов из условия задачи,
- количества непосредственных выводов, необходимых для решения задачи,
- количества взаимопроникновений при решении задачи,
- длины рассуждений при решении задачи,
- общего числа шагов решения, привлеченных аргументов и т.д.

Рассчитать сложность задачи не очень просто, чаще всего учителя интуитивно распределяют задачи по сложности. Но в тексте олимпиадной работы задания берутся из разных разделов, некоторые из них нестандартные. Поэтому лучше применять все же понятие трудности задания.

*Трудность* — субъективная характеристика задачи, определяемая взаимоотношениями между задачей и решающим ее учеником.

Трудность задачи зависит от:

- сложности задачи (сложная задача, как правило, является более трудной для учащихся);
- времени, прошедшего после изучения материала, который встречается в тексте задачи (задачи на материал, изученный 1–2 года назад, используемые факты, которые уже забылись, более трудны для учащихся);
- практики в решении подобного рода задач;
- уровня развития ученика (задача, трудная для среднего ученика общеобразовательного класса, может быть легкой для обычного ученика физико-математического класса);
- возраста учащегося (задача, трудная для пятиклассника, может быть лёгкой для восьмиклассника) и т.д.

Трудность определяется процентом учеников, решивших задачу из числа ее решавших. Существуют различные формулы для расчета трудности задачи.

**3. В числе первых задач должны быть 1–2 задачи, доступные большинству учащихся,** т.е. с ними должны справиться не менее 70% учащихся. Это могут быть обычные задачи продвинутого уровня, аналогичные задачам из контрольных работ, а также и не изучаемые в школе, но которые должны решить большинство участников. Это необходимо, так как в школьной олимпиаде участвуют все желающие. А участник, не решивший ни одной задачи, теряет уверенность в своих силах, а иногда и интерес к математике. Поэтому и должны быть 1–2 доступные почти всем задачи. Но и эти задачи могут содержать «изюминку», благодаря которой более сильный ученик решил бы ее быстрее и рациональнее.

**4. В середине текста олимпиады должно быть 2–3 задачи повышенной трудности.** Это могут быть задачи продвинутого уровня из контрольных работ, но с измененными условиями. Их должны решить примерно половина участников. (Ученик, решивший более третьей части всех задач, уже может получить поощрение.)

**5. Последними в тексте олимпиады должны быть 1–2 задания более трудных,** их должны решить единицы учащихся. Это задания уровня муниципальных олимпиад.

**6. Включаемые задания должны быть из разных разделов школьного курса математики, но, как правило, на материал, изученный в данном учебном году и во втором полугодии предыдущего года.**

**7. В числе заданий текста олимпиады могут быть занимательные задачи, задачи-шутки, софизмы, задачи прикладного характера.**

**8. Для заинтересованности учащихся в посещении кружков желательно включать задания, аналогичные рассмотренным там.** Это могут быть логические задачи, задачи на применение принципа Дирихле, инвариантов, графов, задачи на раскраски и т.п. Такого рода задачи часто называют специальным термином «олимпиадные», хотя конечно не только они должны быть в тексте школьной олимпиады.

**9. В качестве одной из задач может быть задача, в условии которой фигурирует год проведения олимпиады.**

**10. В числе задач не должно быть задач с длительными выкладками, задач на использование трудно запоминающихся формул, на использование справочных таблиц.**

**11. Желательно включать в тексты олимпиад задачи из разных источников** с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких участников со всеми задачами, включенными в вариант. Лучше включать все же новые задачи.

**12. В текстах олимпиад для разных классов могут быть и одинаковые задания.**

В последние годы Центральная предметно-методическая комиссия по математике указывает иногда даже типы заданий, которые должны включаться в текст школьной олимпиады по математике. В частности, в текст школьного этапа Олимпиады в 5 классе ранее рекомендовалось включать задания по арифметике, числовые ребусы, задачи на разрезание фигур, задачи на переливания, взвешивания, логические или текстовые задачи. И, соответственно, в 6 классе: задачи по арифметике (на дроби, числовые ребусы), задачи на составление уравнения, задачи на фигуры, нахождение многоугольника с указанными свойствами, логические задачи.

В настоящее время список тем для включения в текст школьной олимпиады стал уже много шире. Рекомендуется в варианты заданий для учащихся 5–6 классов включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи на понятие четности.

Таковы основные требования к составлению текста работы школьной олимпиады.

*Школьный этап олимпиады* проводится в октябре в один день для всех учащихся 5–11 классов, как правило, вне уроков. Возможно проведение олимпиад на кружке, но для более объективной картины лучше бы проводить олимпиады с утра или после 3–4-го уроков, перенося остальные уроки на другие дни. Проведение школьной олимпиады в выходные дни нецелесообразно.

В школьных олимпиадах имеют право принимать участие все желающие. В случае большого числа параллельных классов и, соответственно, огромного числа желающих возможно проведение сначала классной, а затем школьной олимпиады. Можно первый тур сделать и заочным. Тогда на школьную олимпиаду приглашаются только призеры классных олимпиад или учащиеся, набравшие определенное число баллов (если текст олимпиадной работы был единый). Но участники классной олимпиады также считаются участниками школьной олимпиады.

Продолжительность школьной олимпиады в 5–6 классах: 1,5 астрономических часа (два урока).

В указанное время все участники олимпиады приходят в специально отведенные классы, рассаживаются по местам. Желательно каждому участнику предоставить отдельный стол. На столах заранее разложены бумага для выполнения работ, тексты олимпиады. Один из членов жюри знакомит участников с текстом олимпиады, правилами оценивания заданий олимпиад, временем выполнения работы, правилами оформления заданий. Задания участниками могут быть выполнены в любом порядке. Черновик должен быть подписан и сдан. Особенно это важно для учащихся 5 класса, которые, вполне возможно, впервые участвуют в таких соревнованиях. Также для участников олимпиады можно подготовить и специальные памятки. Рассмотрим возможный вариант такой памятки.

Памятка участнику олимпиады

1. Прочитайте все задачи и наметьте, в каком порядке вы будете их решать. Помните, последние задачи обычно более сложные.
2. Если для вас задача решилась слишком легко, то, скорее всего, вы не поняли условие или где-то ошиблись.
3. Если задача не решается — попробуйте упростить ее условие (взять меньшие числа, рассмотреть частные случаи и т. д.) или прорешать её «с конца», «от противного», поставить вместо чисел переменные и т. д.

4. Не зацикливайтесь на одной задаче: иногда отрывайтесь от нее и оценивайте положение. Если есть хоть небольшие успехи, то можно продолжать, а если мысль ходит по кругу, то задачу лучше оставить (хотя бы на время).
5. Почувствовав усталость — сразу отдыхайте (посмотрите в окно, закройте глаза, отвлекитесь).
6. Решив задачу, сразу оформите ее решение. Это поможет проверить рассуждения и освободить мысли для других задач.
7. Перед сдачей работы проверьте ещё раз написанное — поймут ли ваши решения задач члены жюри?

После этого участники олимпиады приступают к решению заданий. Консультироваться с товарищами, поворачиваться, использовать какую-то литературу на олимпиаде запрещается. Также запрещается пользоваться электронными вычислительными средствами или средствами связи.

За несколько минут до окончания работы член жюри предупреждает участников об окончании времени выполнения работы, и учащиеся начинают сдавать работы, подписав их.

После необходимого перерыва (5–10 минут) ученики возвращаются в класс, где один из членов жюри проводит разбор заданий олимпиады. Нецелесообразно отодвигать время разбора на занятие кружка или урок.

После разбора заданий члены жюри по каждому классу приступают к проверке заданий и оценке решений. Желательно, чтобы в каждой параллели было не менее 3 членов.

Самым сложным и ответственным моментом в проведении математической олимпиады является оценка заданий. Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-бальная шкала.

При этом 7 баллов ставится за полное верное решение. 6 баллов за верное решение с небольшими недочетами, в целом не влияющими на решение. 5 баллов ставится за верное в целом решение, но в решении есть ряд ошибок либо рассмотрены не все случаи. Но приведенное учеником решение может быть правильным после небольших ошибок или исправлений. 4 балла ставится, если ученик рассмотрел один из двух, более сложных, существенных случаев или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка. 2 или 3 балла ставится за решения задания, в котором доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. В 1 балл можно оценить решение, в котором рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии самого решения или при ошибочном решении. И 0 баллов ставится за неверное решение, в котором нет никакого продвижения в решении задания или за отсутствие решения.

Особенно важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри. Важно отметить, что исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) не являются основанием для снятия баллов.

В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

После того, как жюри выполнило проверку результатов участников олимпиады и у них есть предварительные результаты, участники имеют право ознакомиться со своими работами. В случае несогласия с выставленными баллами, они имеют право сообщить о своем несогласии. В этом случае Председатель жюри школьной олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по данной работе может быть пересмотрена.

После того, как жюри перепроверило работы всех участников, и особенно набравших наибольшее число баллов, определяются победители и призеры. Они должны быть независимо от того, сколько баллов набрали участники. Победители и призеры олимпиады определяются жюри в соответствии с итоговой таблицей. При этом необходимо знать, что количество победителей и призеров олимпиады не должно превышать 45% от общего числа участников олимпиады. Важно отметить, что победителями олимпиады являются ВСЕ участники, набравшие наибольшие баллы. При этом победители должны набрать не менее 50 % от максимального числа баллов. Иногда победителей может и не быть (если текст олимпиады составлен не в соответствии с указанными выше требованиями). Но призеры должны быть обязательно. Поэтому жюри может определить в любом классе более чем одного победителя и по несколько призеров. При определении победителей и призёров необходимо знать, что расхождение в 1–2 балла между результатами участников не должны сказываться на том, что один из них будет победителем, а другой, набравший на 1 балл меньше, уже призером.

Абсурд, если I место не присуждать ни одному участнику олимпиады. Результатом подведения итогов и определения победителей и призеров является то, что победителей и призеров в каждой параллели может быть несколько.

Итак, кто же является победителем школьной олимпиады? Ясно, что ученик, набравший наибольшее число баллов. Но так как субъективизм членов жюри может проявиться все равно при оценке заданий, то можно установить специальные границы в процентах от максимального числа баллов. Наиболее подходящими являются:

I место присуждается всем участникам, набравшим больше 75% от максимального числа баллов за все задания олимпиады. (Если все же при неудачном тексте олимпиады никто не набрал данного числа баллов, необходимо опустить число баллов до 70%, 50%. Олимпиада — это соревнование, а в любом соревновании бывают победители, они должны быть и здесь). Если несколько учеников верно решили 5 (4) задачи из 5 предложенных, всем им присудить I место.

II место присуждается участникам, набравшим от 50 до 75% от максимального числа баллов. Если несколько учеников верно решили 4 (3) задачи из 5 предложенных, всем им можно присудить второе место.

III место — набравшим от 33 до 50%, то есть решившим 2–3 задачи верно из 5 предложенных.

Не будет необычным, если в некоторой параллели 5 или 6 классов около половины участников будут победителями и призерами. В соответствии с рекомендациями Центральной методической комиссии по математике количество победителей и призеров школьного этапа олимпиады не должно превышать 45% от общего числа участников олимпиады. Большое число победителей и призеров только повысит интерес учащихся к участию в олимпиадах. На следующий год желающих, думаю, будет больше.

Список победителей и призеров утверждается Оргкомитетом школьного этапа Олимпиады. После определения победителей и призеров олимпиады по каждой параллели руководство школы совместно с оргкомитетом и жюри олимпиады проводит награждение. Согласно «Положению о Всероссийской олимпиаде школьников» победители всех этапов награждаются грамотами, дипломами и призами.

Провести награждение победителей и призеров олимпиады можно на математическом вечере или торжественной линейке. В качестве призов могут быть книги по математике, художественные, научно–популярные книги, денежные призы. Все зависит от конкретных условий школы.

## Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике

*Муниципальные олимпиады* являются вторым туром единой системы Всероссийских математических олимпиад.

Основными целями проведения муниципальных олимпиад являются:

- формирование и закрепление интереса математически способных обучающихся к регулярным дополнительным занятиям математикой;

- повышение качества работы учителей математики в школах;
- развитие системы работы с одаренными учащимися в регионе;
- отбор наиболее способных школьников в каждом муниципальном образовании;
- воспитание организованности, дисциплинированности, воли;
- привитие навыков к систематическим занятиям внеклассной и внешкольной работой;
- пробуждение желания учащихся самостоятельно приобретать знания и применять их на практике;
- сравнивание качества работы с учащимися в различных общеобразовательных учреждениях;
- определение направлений работы с одаренными учащимися в регионе;
- формирование регионального списка наиболее одаренных учащихся;
- отбор наиболее талантливых учащихся для участия в региональном туре.

Олимпиады также оказывают положительное влияние на общий уровень преподавания математики в школах, во многом позволяют выявить качество математических знаний, умений учащихся. Кроме того, в какой-то степени ориентируют учителя на более высокий уровень преподавания. Но необходимо помнить, что вместе с этим муниципальные олимпиады не должны являться единственной и основной формой внешкольной работы по математике. Наряду с ними должны проводиться популярные в последнее время соревнования: математические бои между школами, математические КВН, математические регаты и т.п.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады проводится для учащихся 7–11 классов, но Центральная методическая комиссия рекомендует проведение муниципального этапа олимпиады и для учащихся 6 класса. Также во многих регионах проводятся муниципальные олимпиады и для учащихся 5 классов. Но ученики 5–6 классов могут принимать участие и в муниципальном этапе для учащихся 7 (8) классов, если на школьном этапе они выполняли задания для этих классов и прошли на муниципальный этап. В муниципальных олимпиадах участвуют участники школьного этапа олимпиады текущего года, набравшие необходимое для участия в муниципальном этапе олимпиады количество баллов, установленное организатором муниципального этапа олимпиады. Кроме того, участниками олимпиады являются обучающиеся, ставшие победителями и призерами муниципального этапа олимпиады предыдущего года, при условии, что они продолжают обучение в общеобразовательных учебных заведениях. Вышесказанное означает *недопустимость ограничения числа участников Олимпиады от одного образовательного учреждения.* Но, все же, чтобы муниципальная олимпиада не превратилась в олимпиаду одного общеобразовательного элитного заведения (лицея, гимназии), необходимо участие в ней учащихся и других учебных заведений. Все это прописывается в положении о муниципальном этапе олимпиады.

Муниципальный этап Олимпиады проводится организатором данного этапа Олимпиады — органами местного самоуправления муниципальных районов и городских округов в сфере образования ежегодно в октябре–ноябре, но могут быть и другие сроки: март–апрель.

Конкретные даты проведения муниципального этапа Олимпиады устанавливаются организатором регионального этапа Олимпиады.

Для проведения муниципального этапа Олимпиады организатором указанного этапа Олимпиады создаются оргкомитет, предметно-методическая комиссия и жюри муниципального этапа Олимпиады.

Иногда в некоторых городах и районах для оказания финансовой помощи в проведении олимпиад привлекаются и спонсоры. Было бы очень хорошо, если бы эти спонсоры в школьные годы добивались определенных результатов в олимпиадах.

В состав жюри входят ведущие учителя школ муниципального образования, методисты муниципальных и региональных органов управлений образования, преподаватели, студенты и аспиранты вузов региона, а также преподаватели из сферы дополнительного образования. Жюри оценивает выполненные олимпиадные задания; проводит анализ выполненных олимпиадных заданий; определяет победителей и призеров муниципального этапа Олимпиады; рассматривает совместно с оргкомитетом Олимпиады апелляции участников; представляет в оргкомитет Олимпиады аналитические отчеты о результатах проведения Олимпиады.

Во многом: будет ли олимпиада интересной, запоминающейся; будут ли реализованы её цели — зависит от текста олимпиадной работы.

Тексты олимпиадных работ составляются членами муниципальной или региональной комиссии по математике в соответствии с рекомендациями Центральной методической комиссии по математике. В частности, в последние годы Центральная предметно-методическая комиссия для каждого учебного года рекомендует типы задач, которые должны включаться в текст олимпиадной работы. При этом, так как это рекомендации, отступления возможны как от тематики, так и от порядка следования заданий. В качестве примера рассмотрим типы заданий, которые рекомендовалось включать в текст муниципальной олимпиады по математике в 6 классе ранее:

1. Задача на составление уравнения.
2. Задача на проценты.
3. Фигуры (площадь, разрезания).
4. Числовая задача (построение примера, доказательство невозможности его построения).
5. Логическая задача.

Позже Центральная методическая комиссия рекомендовала включить для проведения муниципального этапа в 6 классе задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи на четность. В качестве примера приводится набор заданий [6; с. 47]:

**6.1.** Вычеркните из числа 987654321 как можно больше цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 15.

**6.2.** Сложите из пятиклеточных фигурок, среди которых нет двух одинаковых, какой-нибудь клетчатый квадрат.

**6.3.** В комнате 10 человек — лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Три человека сказали: «В комнате нечётное число лжецов»; а остальные семь сказали: «В комнате чётное число рыцарей». Сколько рыцарей могло быть в комнате?

**6.4.** Можно ли в равенстве $0{,}{**}\ 0{,}{**}\ 0{,}{**}\ 0{,}{**} = 1$ заменить звездочки различными цифрами от 0 до 7 так, чтобы получилось верное равенство?

**6.5.** В ящике лежат шары трех цветов: красного, синего и зелёного, причём шаров каждого цвета хотя бы по одному. Известно, что среди любых 10 шаров найдётся красный шар, а среди любых 20 шаров — синий. Какое наибольшее количество шаров могло лежать в ящике?

Естественно, этого варианта заданий в качестве текста муниципальной олимпиады использовать региональные комиссии не должны.

В тексты олимпиадной работы включаются, в основном, так называемые *олимпиадные* задачи. Требования к таким задачам очень высокие: они должны быть красивыми, интересными, формулировки их должны быть яркими и запоминающимися, а решение должно основываться на оригинальных идеях. Учащиеся должны в данных задачах познакомиться со спецификой олимпиадных задач: умением строить цепочки логических рассуждений, доказывать некоторые утверждения и т.п. Подробнее об олимпиадных задачах и методах их решения будет рассмотрено в следующем разделе.

Рассмотрим ***основные требования*** к текстам муниципальных олимпиад по математике для учащихся **5–6** классов.

**1. Число заданий в тексте должно быть от 4 до 6.**

**2. Все задания в тексте олимпиады должны быть расположены по возможности в порядке возрастания трудности или сложности.**

Суть данных понятий уже была рассмотрена.

**3. Первые 1–2 задания должны быть доступны большинству участников олимпиады;** их должно решить около 70% учащихся. В числе таких задач могут быть как наиболее легкие «олимпиадные» задачи, так и задачи, аналогичные задачам продвинутого уровня школьных учебников, контрольных работ. Условия задач можно немного изменить. Желательно, чтобы такие задачи содержали «изюминку», заметив которую, сообразительный ученик решил бы ее быстрее и красивее.

Например:

1) Расставьте числа $\frac{7}{8}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{10}{11}$ в порядке убывания.

2) Найдите значение выражения.
$2020 - 2019 + 2018 - 2017 + ... + 2 - 1$.

3) Вычислите.
$$\frac{16-15+14-13+12-11+...+4-3+2-1}{1992\cdot 73+1992\cdot 27}.$$

4) Из двух станций, расстояние между которыми 25,6 км, одновременно в одном направлении вышли два поезда. Впереди двигался поезд со скоростью 58,4 км/ч, и через 4 часа его догнал второй поезд. Найти скорость второго поезда.

Включение в текст работы посильной для большинства учащихся задачи вселяет в учащихся веру в свои силы, возбуждает энтузиазм, пробуждает желание лучше учиться по математике и добиваться дальнейших успехов на следующих олимпиадах.

**4. Следующие 2–3 задачи должны быть более трудными, но хотя бы одну из них должны решить большинство**

**участников, а в общем с ними должна справиться примерно половина участников.** Это могут быть задачи, не рассматриваемые на уроках, но с идеями их решения ученики встречались во внеклассной работе, при самостоятельном знакомстве с различными пособиями.

Например,

1) Как набрать из озера 8 литров воды, имея девятилитровое и пятилитровое ведра?
2) Расшифруйте следующую запись примера на сложение, в котором разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым — одинаковые цифры:

$$\begin{array}{r} \text{СПОРТ} \\ +\,\underline{\text{СПОРТ}} \\ \text{КРОСС} \end{array}$$

**5. Последние 1–2 задачи могут содержать как материал, не изучаемый в школе, так и наиболее сложные школьные задачи. Такие задачи обычно решают единицы учащихся.** Обычно это задачи уровня регионального этапа олимпиад, но так как данный этап в большинстве регионов России для учащихся 5–6 классов не проводится, то приведем примеры подобного рода задач:

1) Игнату сейчас вчетверо больше лет, чем было его сестре в тот момент, когда она была вдвое моложе его. Сколько лет Игнату, если через 15 лет ему и сестре будет вместе 100 лет?
2) Сколькими нулями оканчивается число 100!?
3) Страницы книги пронумерованы подряд, от первой до последней. Антон вырвал из разных мест книги 35 листов и сложил номера всех 70 вырванных страниц. В результате у него получилось число 2016. Когда об этом узнал знакомый Миша, то он сказал, что Антон ошибся при подсчете. Объясните, почему Миша прав.

**6. В качестве предложенных задач должна быть задача, содержащая год проведения олимпиады.**

Например:

1) Запишите число 2016 с помощью двенадцати четверок и арифметических операций.
2) Вычислите: $\dfrac{2004-2003+2002-2001+...+2-1}{2004\cdot 45+55\cdot 2004}$.

**7. В тексты олимпиад для учащихся 5–6 классов желательно включить 1–2 занимательные задачи.**

Например:

1) До царя Гороха дошла молва, что кто–то из троих богатырей убил Змея Горыныча. Царь приказал всем троим явиться ко двору, и молвили они:
   Илья Муромец: «Змея убил Добрыня Никитич».
   Добрыня Никитич: «Змея убил Алеша Попович».
   Алеша Попович: «Я убил змея».
   При этом оказалось, что один из них сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?
2) Илья Муромец, Добрыня Никитич и Алеша Попович вступили в бой с великанами. Получив по три удара богатырскими палицами, великаны обратились в бегство. Больше всего ударов нанес Илья Муромец — 7, меньше всех Алеша Попович — 3. Сколько всего было великанов?
3) Дядя Федор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин сидят на скамейке. Если Шарик, сидящий справа от всех, сядет между дядей Федором и котом, то кот окажется крайним слева. В каком порядке они сидят?

**8. Включаемые задания должны носить творческий характер и проверять не степень усвоения участником олимпиады различных разделов школьной математики, а его способность к нахождению решений новых для него задач. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.**

**9. Включаемые задачи должны быть как из разных разделов школьного курса математики, так и чисто «олимпиадные» (использующие специальные методы решения); при их решении должны применяться различные приемы, идеи.**

При включении в текст задач, использующих программный материал, необходимо быть особенно осторожным. Ведь один и тот же материал может изучаться по различным учебникам не только в разное время учебного года, но и в разных классах. В федеральный перечень учебников математики, рекомендованных к использованию в общеобразовательных учреждениях для учащихся 5–6 классов, для реализации обязательной части образовательной программы включено 9 базовых учебников разных авторов. А учитывая, что есть еще специальные учебники по математике и учебники для учебных курсов, обеспечивающих образовательные потребности обучающихся и курсы по выбору, получается более 10 пособий. И содержание всех пособий надо знать составителям текстов. Поэтому нельзя включать в текст задачи по тем разделам математики, которые не изучены хотя бы по одному базовому учебнику математики. Лучше в тексты олимпиад для 5 класса включать на программный материал лишь задачи, использующие материал начальной школы, а в 6 класс — материал из программы 5 класса. Большинство же задач лучше дать чисто «олимпиадных».

**10. В текстах олимпиад для различных классов могут быть как одинаковые задачи, так и задачи, использующие одну идею, но с постепенным усложнением от класса к классу.**

Например:

1) Разделите прямоугольник 3×4 на две равные части. Найдите как можно больше способов. Разрезать можно лишь по стороне квадрата 1×1 и способы считаются разными, если получаемые фигуры не будут равными при каждом способе (можно предложить в 5 и 6 классах).
2) Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. На вопрос: «Кто это сделал?» Петя, Вася и Коля ответили: «Не я», а Миша — «Не знаю». Потом оказалось, что двое из них сказали правду, а

двое — неправду. Знает ли Миша, кто разбил стекло? Ответ объясните.

3) Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Кто-то разбил мячом стекло. На вопрос: «Кто это сделал?» пятеро свидетелей ответили так.

   Первый: «То ли Петя, то ли Вася».

   Второй: «То ли Петя, то ли Коля».

   Третий: «То ли Коля, то ли Миша».

   Четвертый: «То ли Миша, то ли Вася».

   Пятый: «Не знаю».

   Потом оказалось, что трое из свидетелей сказали правду, а двое неправду. Знал ли пятый свидетель, кто разбил стекло?

(Задачи 2, 3 можно предложить соответственно в 5, 6 классах).

**11. Желательно включение в текст большинства таких задач, которые бы позволяли оценивать их решение разным числом баллов** (к числу таких задач можно отнести логические задачи, на поиск различных вариантов разрезания, геометрические и другого сорта задачи).

Конечно, ***могут быть и другие требования*** (обновление типов задач каждый год, использование задач, подобранных из различных источников и т.д.).

Лучше, если составителями текстов являются одни и те же люди в регионе, им легче устранить ошибки, промахи, совершенные в прошлом году.

## Проведение муниципального этапа олимпиады

Кроме оргкомитета, в проведении олимпиад принимает участие и жюри. Жюри создается для каждой параллели классов свое. Число членов жюри зависит от числа участников олимпиады. Примерный состав его 3–7 человек. Обязательное требование — председатель жюри не должен иметь среди участников своих учеников. Лучше всего на эту роль подходят преподаватели вузов, техникумов, колледжей, училищ. Все это надо хорошо продумать оргкомитету олимпиады. Лучший вариант — в жюри включать лишь тех учителей, кто не имеет своих учеников среди участников олимпиады (ведь даже при шифровке работ учителя узнают работы своих учеников по почерку). Ясно, что состав жюри по классам определяется накануне или перед началом проведения олимпиады. А вот председателей жюри, как всей олимпиады, так и по параллелям классов, лучше определять заранее. Председателем жюри муниципального этапа олимпиады лучше назначать *составителя текстов олимпиад* или руководителя муниципального объединения учителей математики. Председателями же жюри классов назначать *руководителей школьных методических объединений или преподавателей вузов, техникумов, училищ.*

Продолжительность олимпиады в соответствии с рекомендациями Центральной комиссии по математике для учащихся 5–6 классов 3 ч. Когда проводить олимпиаду — вопрос не такой простой. Хотя многие методисты рекомендуют проводить олимпиады в выходной день, думаю, вряд ли это целесообразно. В некоторых школах одни и те же учащиеся являются победителями школьных олимпиад по нескольким предметам, поэтому в случае их участия в нескольких районных олимпиадах, эти учащиеся фактически лишаются выходного дня. Поэтому целесообразнее ряд олимпиад проводить в обычные дни (лучше со вторника по четверг). Хотя каждый регион решает это для себя сам. Возможен вариант проведения олимпиады и в субботу, но это последний день после напряженной недели, и, если в пятницу участникам олимпиады не дать отдохнуть, вряд ли они покажут наилучший свой результат. А в итоге ученики пропускают два учебных дня при шестидневной рабочей неделе. Начинать олимпиады лучше с 9 (10) часов после торжественного открытия олимпиады. На торжественном открытии олимпиады учащихся поздравляют с участием в олимпиаде, знакомят с регламентом, правилами поведения. Особо надо подчеркнуть то, что олимпиада — это соревнование, а поэтому будут как победители, так и побежденные. Сами соревнования проводятся в больших аудиториях, в которых представители школы, в которой проводится олимпиада, все приготовили для проведения олимпиады: бумагу (тетради, листы в клеточку), запасные ручки, карандаши. При хорошем финансировании олимпиады можно сформировать специальные папки на память для каждого участника. Участников олимпиады желательно рассадить по одному за столы, проследив, чтобы рядом не оказалось учеников из одной школы. На каждый стол необходимо положить текст олимпиадной работы. В случае большого числа учащихся и нехватки кабинетов возможен вариант проведения олимпиады для двух классов в одной аудитории. В этом случае учащиеся одного класса садятся на первый вариант, а ученики другого класса — на второй вариант. При проведении олимпиады в аудитории не нужно присутствовать всем членам жюри, достаточно двух (в крайнем случае, трех) человек, в том числе председателя жюри класса. Остальные члены жюри в это время находятся в другой аудитории, где решают предложенные участникам олимпиады задания, находят другие варианты решения того или иного задания, обсуждают возможные варианты числа выставления баллов за решение заданий.

Перед началом олимпиады участники заполняют обложку тетради (титульный лист), указывая на ней свои данные. Категорически запрещается делать какие-либо записи, указывающие на авторство работы, во внутренней части тетради (на белых листах).

Решения заданий олимпиады участниками олимпиады выполняются ручками с синим или фиолетовым цветом в тетрадях в клетку. Запрещается использование для записи решений ручек с красными или зелеными цветами.

При проведении олимпиады запрещается подход к участнику олимпиады своего учителя. Поэтому лучше подходить к ученикам (если это очень нужно) председателю жюри олимпиады по данной параллели. Выходить участникам олимпиады можно разрешить лишь один раз, и то лучше в присутствии члена жюри. Время выхода и возвращения ученика в аудиторию фиксируется на титульном листе ученика.

Участникам олимпиады запрещается пользоваться справочной литературой, электронными вычислительными средствами или средствами связи.

После окончания олимпиады желательно сразу или после небольшого перерыва (учащиеся должны немного отдохнуть, восстановить силы, пообедать) провести разбор заданий олимпиады. Разбор проводит один из членов жюри в то время, пока работы участников олимпиады шифруются представителем оргкомитета или председателем жюри.

Проверяют и оценивают решения заданий муниципальной олимпиады члены жюри.

Рассмотрим основные требования к проверке работ участников олимпиады:

**1.** Олимпиада не является контрольной работой, и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки.

**2.** Для объективности проведения Олимпиады обязательной является шифровка работ, проводимая членами оргкомитета олимпиады.

После окончания олимпиады работы участников Олимпиады отдельно по каждому классу передаются на шифровку. На обложке каждой тетради (титульном листе) пишется соответствующий шифр, указывающий № класса и № работы (5–01, 5-02,..., 6–01, 6-02,...), который дублируется на первой (белой) странице работы. После этого обложка тетради снимается. Все страницы работы, содержащие указание на авторство этой работы, при шифровке изымаются и проверке не подлежат.

Дешифровка работ осуществляется после окончания проверки и составления предварительной итоговой таблицы и предварительного определения победителей и призёров Олимпиады по соответствующему классу. После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ участники олимпиады имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри Олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть и изменена. Изменение оценки согласуется с Председателем жюри и вносится в итоговую таблицу.

**3.** Решение каждой задачи оценивается Жюри в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией: все задания муниципального этапа олимпиад, как и школьного, оцениваются по *единым нормам*, исходя из **7** баллов за каждое задание (было рассмотрено выше). Особенно жюри должно знать, что задание не может оцениваться дробным числом баллов: 0,8; 4,5 и т.п.

Начать проверку работ необходимо с выяснения принципиального вопроса: верно ли решена задача (тогда ставится 4–7 баллов) или неверно решена задача (тогда ее решение оценивается от 0 до 3 баллов).

Решение считается *неполным* в следующих случаях:

- если оно содержит основные идеи, но не доведено до конца;
- если оно при верной общей схеме рассуждений содержит пробелы, то есть явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя счесть известными или очевидными;

Решение будет *неполным*, если ученик нашел не все способы, рассмотрел не все возможные варианты решения, но большинство.

Исправления, помарки в решениях не учитываются, но учитывается оригинальность решения. Вычислительные ошибки в невычислительных задачах не считаются за принципиальные ошибки. При оценке заданий учитывается только их правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность. За нерациональность решения, как правило, оценка за задание не уменьшается. Умение догадаться на олимпиаде, должно цениться выше, чем умение хорошо изложить решение. Ответ, найденный логическим путем, обычно оценивается выше, чем найденный подбором.

**4.** Членам жюри желательно смотреть и черновики. Причем при небольшом количестве участников олимпиады, работы могут проверяться и в присутствии авторов. Причем, недостатки, обнаруженные в черновых записях, не учитываются; но учитывается все, что может улучшить чистовик. *Хотя Центральная методическая комиссия рекомендует черновики не проверять!*

**5.** Иногда составители текстов олимпиад, облегчая работу членам жюри, разрабатывают специальные методические рекомендации, где дают и дополнительные указания по оценке того или иного задания. В случае расхождения между общими и дополнительными указаниями применяют дополнительные указания. Но в случае противоречия между дополнительными указаниями и реально сложившейся ситуацией на олимпиаде жюри имеет право вносить изменения как в общие, так и в дополнительные указания по оценке решений заданий.

Рассмотрим конкретные примеры, как может жюри оценить задания олимпиады.

*Пример 1.* Произведение цифр трехзначного числа равно 4. Найдите все такие числа.

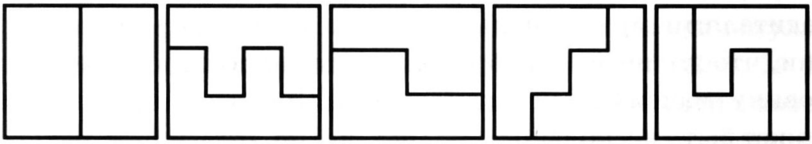
*Решение*. Произведение 3 цифр может быть равно 4 в следующих 2 случаях:

- одна из цифр равна 4, а две остальные — единицы;
- две из цифр равны 2, а одна — единице.

В итоге получаются такие числа: 411, 141, 114; 122, 212, 221. Всего получилось 6 чисел. Тогда 7 баллов ставится за верное решение задачи. Неполным решение будет, если рассмотрены оба варианта, причем в каждом из вариантов указано не менее половины случаев. А это означает, что в 5 баллов можно оценить решение, когда предложено 5 вариантов; а в 4 балла, когда предложено 4, причем из каждого случая рассмотрено по 2 варианта. Если предложено 4 (причем 3 варианта из одного случая) или менее вариантов, то решение в целом будет неверным. Оценить в баллах найденное число вариантов решения можно так: 3 балла — 4 варианта (причем из каждого случая по 2 варианта); 2 балла — найдено 2 или 3 варианта решения; 1 балл — за 1 вариант решения.

*Пример 2*. Разделите прямоугольник 3×4 на две равные части. Найдите как можно больше способов. Разрезать можно лишь по стороне квадрата 1×1, и способы считаются разными, если получаемые фигуры не будут равными при каждом способе.

*Решение*. Всего существует 5 вариантов (см. рисунок):



а б в г д

За все найденные варианты решений ставится 7 баллов, за все найденные решения, но неточные построения можно поставить 6 баллов. Если найдено 4 решения, то оценить решение можно 5 баллами, а если всего 3, то 4 баллами. За найденное 1 решение — 1 балл, за 2 решения (если это *а* или *в* или *г* — более простые случаи) — 2 балла. И 3 балла можно поставить за 2 случая, но из них есть случай *б* или *д* (они наиболее трудные).

Конечно, предложенные варианты оценки заданий олимпиады являются примерными. Число баллов ставит жюри, им виднее. Главное, чтобы при проверке работ учащихся оценивалась *деятельность учащихся, идеи* (хотя и не доведенные до конца), а не только правильность и неправильность решений. Тогда и не будет в протоколах олимпиад только 0 и 7 баллов.

**6.** Каждая работа должна быть оценена двумя членами Жюри. В случае расхождения их оценок вопрос об окончательном определении баллов, выставляемых за решение указанной задачи, определяется председателем Жюри или назначенным им старшим по классу;

**7.** Результаты проверки всех работ участников Олимпиады члены Жюри заносят в итоговую таблицу – протокол олимпиады. Фамилии учащихся вписываются только после заполнения всех остальных столбиков.

Определение победителей и призеров Олимпиады производится в соответствии с Положением о Всероссийской олимпиаде школьников (Приказ Минобрнауки РФ от 02 декабря 2009 года № 695). В соответствии с данным Положением участники муниципального этапа Олимпиады, набравшие наибольшее количество баллов, признаются победителями муниципального этапа Олимпиады при условии, что количество набранных ими баллов превышает половину максимально возможных. При этом победителей может быть несколько.

В случае, когда победители не определены, то есть нет участников, набравших более половины максимального числа баллов, на муниципальном этапе Олимпиады определяются только призеры.

Количество призеров муниципального этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призеров, установленной организатором регионального этапа Олимпиады. Призерами муниципального этапа Олимпиады в пределах установленной квоты победителей и призеров признаются все участники муниципального этапа Олимпиады, следующие в итоговой таблице за победителями.

В случае, когда у участника муниципального этапа Олимпиады, определяемого в пределах установленной квоты в качестве призера, оказывается количество баллов такое же, как и у следующих за ним в итоговой таблице, решение по данному участнику и всем участникам, имеющим с ним равное количество баллов, определяется жюри муниципального этапа олимпиады.

Список победителей и призеров муниципального этапа Олимпиады утверждается организатором муниципального этапа Олимпиады.

Победители и призеры муниципального этапа Олимпиады награждаются дипломами. Также можно вручить призы, в качестве которых могут быть и книги по математике.

Также можно поощрить и учащихся, занявших 4–5 места, особенно целесообразно делать это в 5–6 классах.

Сколько всего может быть победителей и призеров муниципальной олимпиады? Так как квоты могут быть разные, то в различных случаях их может быть от 20 до 40 %. Как определить победителей и призеров?

Рассмотрим конкретный *пример*.

Допустим, что среди 30 участников олимпиады результаты лучших участников будут: 28 б, 24 б, 23 б, 22 б, 19 б, 19 б, 16 б и т.д. (из 35 максимальных баллов). Квота победителей и призеров определена — не более 20 % от числа участников. Тогда в соответствии с Положением об олимпиаде и тем, что *разница в 1–2 балла не является очень существенной* (все же оценивают результаты люди), на 1 место можно вывести ученика, набравшего 28 б. А на 2 месте будет 3 ученика с 24 б, 23 б, 22 б; и на третьем месте будет два ученика с 19 б. Всего получилось 6 победителей и призеров, то есть 20 %.

В практике подведения итогов иногда случаются и немного курьезные случаи, когда максимальное число баллов набирают 5 и более участников олимпиады (такой случай произошел и с автором, когда он был в числе одного из *пяти* победителей районной олимпиады в 5 классе). Как быть? Конечно, всем надо присвоить первое место. Ученики не виноваты в том, что текст олимпиады был составлен не в соответствии с требованиями и многие участники решили все задания.

Также жюри может установить и поощрительные места, призы. Например, за самое оригинальное решение какой-то задачи, единственному ученику, верно решившему такую-то задачу, самому молодому (ведь в олимпиадах могут принимать участие и учащиеся из более младших классов), самому опытному участнику и т.д.

Жюри может подвести и итоги официального или неофициального первенства между школами. Желательно в тот же день провести награждение победителей; а участникам, пока жюри проверяет работы, предложить развлекательную программу. Желательно бы организовать и горячее питание или работу буфета. В качестве развлекательной программы может быть как КВН, так и концерт, дискотека, экскурсия по городу и т. п. Все хорошо к месту. Отсрочивать подведение итогов нежелательно: кроме лишней нервотрепки для учащихся, может быть и много неприятного для самих учителей. Начинаются выяснения, а почему у такого ученика столько-то баллов, а у такого-то столько. Необходимо знать, что никакие апелляции по олимпиадам, как правило, не принимаются после подписания протокола и принятия решения о призерах и победителях. Победители и призеры олимпиады среди учащихся 5–6 классов на следующий год участвуют обязательно в муниципальной олимпиаде, даже если они и не стали призерами школьной олимпиады. Само награждение лучше провести в одном из лучших помещений школы, где проводится олимпиада. На эту торжественную часть желательно пригласить спонсоров, выдающихся деятелей науки, работников различных организаций, которые были в школьные годы победителями муниципальных олимпиад. Желательно итоги муниципальных олимпиад осветить и в местной прессе. В практике подведения итогов олимпиад встречается и такой подход, когда победителей всех предметных олимпиад в городе приглашают на торжественное специальное мероприятие, где и происходит их чествование. Также иногда органы местного самоуправления и некоторые школы для победителей и призеров олимпиад устанавливают денежные премии, которые вручаются учащимся в конце года или полугодия.

# ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

Задачи, решаемые на уроках и вне уроков математики, очень разнообразны.

Среди всех математических задач выделяется особый вид, получивший специальное название: ***олимпиадные задачи по математике.***

Проведенный анализ литературы показывает, что единого подхода к трактовке «олимпиадной задачи» нет. В дальнейшем автор будет придерживаться следующего определения.

*Под* ***олимпиадной задачей по математике*** *будем понимать задачи повышенной трудности, нестандартные по формулировке или методам их решения.*

При таком подходе в число олимпиадных задач попадут как нестандартные задачи по математике, использующие необычные идеи и специальные методы решения, так и стандартные задачи, но допускающие более быстрое, оригинальное решение.

Рассмотрим несколько примеров.

**Задача 1.1.** Вычислить:

$90 + 89 + 88 + ... + 1 + 0 - 1 - 2 - ... - 90 - 91 - 92 - 93.$

**Задача 1.2.** Вычислить:

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + 2007 - 2008.$

Обе приведенные задачи являются стандартными, но если выполнять действия по порядку, не применяя законов сложения и вычитания, на это потребуется много времени. А время на олимпиадах очень ценно. Поэтому тот, кто найдет более быстрое решение этих и подобных заданий, сэкономит время для решения других задач. В то же время не все типы нестандартных задач будут олимпиадными. Останутся многие нестандартные задачи, имеющие как длинные решения, так и не использующие специальных методов решения.

Классификацию олимпиадных задач построить трудно (есть такие задачи, которые трудно отнести к какому-то отдельному виду, — они могут и не иметь аналогов; к тому же с каждым годом, благодаря работе методистов и математиков, появляются все новые олимпиадные задачи), поэтому будем рассматривать следующие ***основные типы олимпиадных задач***.

## Задачи на применение специальных методов решения

1. ***Принцип Дирихле*** (немецкий математик Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле жил в 1805–1859 гг.).

Принцип Дирихле выражает соотношение между двумя множествами. Существует несколько формулировок данного принципа. Самой популярной является такая: «Если в $n$ клетках сидит $m$ зайцев, причем $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят, по крайней мере, два зайца».

Рассмотрим пример применения принципа Дирихле.

**Задача 1.3.** В школе 11 классов. В ближайшем к школе доме живет 14 учеников данной школы. Можно ли утверждать, что среди этих учеников найдутся хотя бы два одноклассника?

*Решение.* Обозначим 11 классов за «клетки», а 14 учеников за «зайцев». Так как «зайцев» больше, чем «клеток», то по принципу Дирихле найдется хотя бы одна «клетка», в которой будет находиться, как минимум, два «зайца», то есть найдется класс, в котором будет учиться 2 ученика из данного дома. А это означает, что можно утверждать, что среди 14 учеников найдутся хотя бы два одноклассника.

На первый взгляд, непонятно, почему это совершенно очевидное предложение, тем не менее, является мощным математическим методом решения задач, причем самых разнообразных. Всё дело оказывается в том, что в каждой конкретной задаче нелегко понять, что же здесь выступает в роли «зайцев», а что — в роли «клеток». И почему надо, чтобы «зайцев» было больше, чем «клеток». Выбор «зайцев» и «клеток» часто не очевиден. Далеко не всегда по формулировке задачи можно определить, что следует применить принцип Дирихле. Главное же достоинство данного метода решения состоит в том, что он дает неконструктивное решение, то есть мы знаем, что такие клетки есть, но где именно они находятся, часто указать не можем; попытка же дать конструктивное доказательство приводит к большим трудностям.

Рассмотрим следующую задачу.

**Задача 1.4.** В листке ватмана размером 80×80 сантиметров Петя Иванов шилом проделал 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать лист размером 20×20 сантиметров, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки можно считать точечными.)

*Решение.* Разрежем лист ватмана на 16 листочков размерами 20×20 сантиметров. Так как листочков-«клеток» — 16, а дырок-«зайцев» — 15, то найдется хотя бы одна «клетка», в которой не будет «зайцев», то есть найдётся лист без дырок внутри.

Для решения данной задачи мы применили другую формулировку принципа Дирихле: «Если в $n$ клетках сидит $m$ зайцев, причем $m < n$, то хотя бы одна «клетка» будет пустая».

**Задача 1.5.** Плоскость раскрашена в 2 цвета. Верно ли утверждение, что всегда можно найти 2 точки, расположенные на расстоянии 1 метр друг от друга, окрашенные в одинаковый цвет?

*Решение.* Примем произвольно выбранную точку плоскости за центр $O$ окружности и проведём окружность радиуса 1 и хорду $AB$ длиной 1. Принимая точки $A$, $O$ и $B$ за «зайцев», а цвета — за «клетки», имеем: $3 > 2$. Тогда по принципу Дирихле найдутся 2 точки, расположенные на расстоянии 1 метра друг от друга, окрашенные в один цвет.

Есть и другие формулировки принципа Дирихле, которые чаще применяются при решении задач в 7–11 классах.

***2. Метод инвариантов***

В теории и практике часто встречаются случаи, когда некоторая система последовательно меняет свое состояние, и требуется выяснить нечто о конечном состоянии.

Фабулы многих, порождаемых такой ситуацией, олимпиадных задач, состоят, в частности, в следующем:

– задается некоторый объект и описывается преобразование, которое разрешено проводить над объектом;

– требуется доказать, что в результате таких преобразований объект нельзя привести к некоторому определенному виду.

Для решения подобного рода задач подбирается такая характеристика объекта, которая не изменяется в указанных преобразованиях, которую и называют инвариантом. Итак, ***инвариантом*** некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании. В качестве инварианта чаще всего рассматриваются чётность (нечётность) числа, знак произведения (суммы) нескольких чисел, остаток от деления числа на некоторое подходящее натуральное число. Хотя встречаются и другие стандартные инварианты: перестановки; раскраски и т. п. Причём применение чётности — одна из наиболее часто встречающихся идей при решении олимпиадных задач. Сформулируем наиболее важные утверждения, на которых основано применение этой идеи:

1) Чётность суммы нескольких целых чисел совпадает с чётностью количества нечётных слагаемых.

2) Знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется чётностью количества отрицательных сомножителей.

Рассмотрим примеры задач, решаемых данным методом.

**Задача 1.6.** Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз — на 2 см и так далее. Докажите, что через 221 прыжок кузнечик не может оказаться там, где начинал.

*Решение.* Проведем по прямой ось координат. Тогда кузнечик будет первоначально находиться в точке с координатой 0. 0 — число чётное. Рассмотрим сумму чисел $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 221$. Среди данных 221 число чётных — 110, а нечетных — 111. Так как чётность суммы целых чисел совпадает с чётностью количества нечётных слагаемых, то сумма чисел $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 221$ будет нечётной, поэтому кузнечик не сможет вернуться в исходную точку.

**Задача 1.7.** На плоскости расположено 7 шестерёнок, соединённых по замкнутой цепочке. Могут ли все шестерёнки вращаться одновременно? А если шестерёнок 8?

*Решение.* Пусть первая шестерёнка вращается по часовой стрелке, тогда вторая — против часовой стрелки, третья — по часовой стрелке и т. д. Получим, что шестая будет вращаться против часовой стрелки, а седьмая — по часовой стрелке. Значит, первая должна вращаться против часовой стрелки, что противоречит тому, что она вращается по часовой стрелке. Поэтому все 7 шестерёнок вращаться одновременно не могут. А вот 8 уже могут.

*Вывод.* Часто при решении подобного рода задач важно найти чередующиеся объекты.

**Задача 1.8.** На гранях кубика написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавить число 3 $n$ раз. Можно ли все числа на гранях кубика сделать равными?

*Решение.* Здесь в качестве инварианта выступит сумма чисел. Найдем сумму чисел $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Она нечётная. Прибавляя к любым двум числам по числу 3 $n$ раз, мы получим сумму, равную $21 + 6n$, которая снова будет нечётной. А сумма шести равных чисел чётная, поэтому сделать все числа равными нельзя.

**Задача 1.9.** Можно ли разменять купюру достоинством 100 рублей с помощью 25 монет достоинством 1 и 5 рублей?

*Решение.* Так как сумма 25 нечетных чисел является числом нечётным, а 100 — число чётное, то разменять 100 рублей на 25 монет по 1 и 5 рублей нельзя.

Четность и нечетность числа определяется остатком при делении числа на два. Данный инвариант является самым простым и наиболее часто применяется при решении олимпиадных задач. Рассмотрим примеры задач, в которых применяются и другие инварианты.

**Задача 1.10.** Разменный автомат меняет одну монету на 5 других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 55 монет?

*Решение.* Рассмотрим, сколько монет будет получаться при последовательном размене одной монеты. После первого размена будет 5 монет, после второго — 9 (так как из 5 монет меняем одну, поэтому получается $5 - 1 + 5 = 9$), после третьего — 13, после четвертого — 17 и т.д. Все эти числа имеют при делении на 4 остаток 1. А так как 55 при делении на 4 имеет остаток 3, то разменять металлический рубль на 55 монет будет нельзя.

*Вывод.* При решении данной задачи применили инвариант — *остаток от деления* получаемого числа монет на число 4.

Рассмотрим еще одну задачу на применение данного инварианта.

**Задача 1.11.** Сережа получил в школе отметку «2» по математике. Желая скрыть этот факт от мамы, он попросил сестру Лену помочь ему. Сергей вырвал из дневника лист с полученной плохой отметкой и порвал его на 5 частей. Лена помогла ему и начала рвать полученные куски на 9 частей, Сергей же продолжил рвать куски на 5 частей. В этот момент зашла мама и попросила детей собрать получившиеся кусочки. Всего их оказалось 2019 кусочков. Все ли кусочки были найдены?

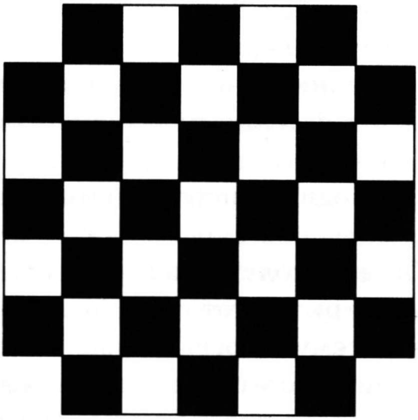
*Решение.* Рассмотрим, какое число обрывков могло получиться. Если Сергей первоначально порвал лист на

5 кусков, а затем один из кусков снова на 5, то всего их получается 9. Если теперь Сергей будет дальше рвать некоторые куски на 5, а Лена на 9, то число кусков может получаться 5, 9, 13, 17, 21 и т. д. То есть Сергей увеличивает число бумажек на 4, а Лена — на 8. Можно заметить, что общее число кусков можно записать как $4n + 1$, то есть всегда получается число, дающее при делении на 4 остаток 1. Так как $2019 = 504 \cdot 4 + 3$, то 2019 при делении на 4 имеет остаток 3. Поэтому Сергей и Лена собрали не все кусочки дневника.

*Вывод.* В данной задаче в качестве инварианта также выступил остаток от деления на 4.

**Задача 1.12.** Можно ли на доске 7×7 с вырезанными угловыми клетками разложить шнур так, чтобы он не проходил через вершины клеток и в каждой клетке побывал один раз?

*Решение.* Произведем шахматную раскраску доски.



Заметим, что при выполнении требуемых условий шнур будет соединять 2 клетки разного цвета. Поэтому вдоль шнура цвет клеток должен чередоваться, а значит, число клеток одного цвета должно отличаться от числа клеток другого цвета не более, чем на 1. Но на данной доске эти числа будут отличаться на 3 (белых клеток будет 21, а чёрных — 24), так как вырезанные клетки будут все одного цвета. Следовательно, разложить шнур требуемым образом будет нельзя.

*Вывод.* При решении данной задачи применялся специфический частный случай метода инвариантов — *раскраска*. При этом была применена одна из наиболее часто встречаемых раскрасок — шахматная. В старших классах при решении олимпиадных задач встречаются и другие виды раскрасок.

***3. Логические задачи***

**Задача 1.13.**Миша сказал, что на его дне рождения было больше 12 гостей. А его брат Илья сказал, что гостей было больше 11. Сколько было гостей, если известно, что одно из этих утверждений истинное, а другое ложное?

*Решение.* Пусть Миша солгал, тогда на его дне рождения было не больше 12 гостей. Тогда Илья, получается, сказал правду: гостей больше 11. Единственное число, которое удовлетворяет этим двум утверждениям, будет число 12. Значит, на дне рождения Миши было 12 гостей.

Если бы начали наши рассуждения с того, что Миша сказал правду, а Илья солгал, то получили бы, что гостей больше 12, но меньше 11. А такого быть не может.

**Задача 1.14.** Принцесса спрятала свой портрет в одну из трех шкатулок — золотую, серебряную и бронзовую. На крышках этих шкатулок были сделаны надписи: на золотой — «Портрет в этой шкатулке», на серебряной — «Портрет не в этой шкатулке», на бронзовой — «Портрет не в золотой шкатулке». Помогите жениху принцессы найти шкатулку с портретом, если он знает, что две надписи на шкатулках ложные, а одна истинная.

*Решение.* Из двух надписей: «Портрет в золотой шкатулке» и «Портрет не в золотой шкатулке» одна будет истинной, а другая ложной. Если надпись: «Портрет в золотой шкатулке» — истинная, то есть действительно портрет принцессы в золотой шкатулке, но другие две надписи:

«Портрет не в этой шкатулке» и «Портрет не в золотой шкатулке» должны быть ложными. Но отрицание надписи: «Портрет не в этой шкатулке» будет «Портрет в этой шкатулке», то есть получается, что принцесса положила свой портрет в золотую и серебряную шкатулки, чего не может быть. Рассмотрим второй случай. Пусть надпись: «Портрет в золотой шкатулке» будет ложная, тогда надпись: «Портрет не в золотой шкатулке» будет верная. А так как надпись: «Портрет не в этой шкатулке», сделанная на серебряной шкатулке также ложная, то портрет принцессы будет в серебряной шкатулке.

**Задача 1.15.** На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводники. Они встретили другого островитянина. Путешественник послал проводника узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал: «Туземец говорит, что он абориген».

Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?

*Решение.* Так как ответ встреченного островитянина мог быть лишь «Я — абориген» (этот ответ является правдой для аборигенов и ложью для пришельцев), а проводник сказал, что туземец — абориген, то проводник является аборигеном.

Класс логических задач очень обширен. Иногда к ним относят и *задачи на переправы, на взвешивания, на переливания, на выигрышные ситуации и т.п.* Рассмотрим примеры таких задач.

**Задача 1.16.** (*на переправы*). Отряд солдат подошел к реке, через которую надо было переправиться. Но моста через реку не было, река же была глубокой. Вдруг командир отряда заметил двух мальчиков, которые катались недалеко от берега на лодке. Командир попросил мальчиков помочь переправить отряд на другой берег. Мальчики сказали, что лодка может выдержать только двух мальчиков или мальчика и солдата — не больше. Тем не менее все солдаты переправились на другой берег. Как они это сделали?

*Решение.* Рассмотрим, как мальчики помогли солдатам переправиться на другой берег. 1. Один из мальчиков остался на другом берегу, а второй приплыл к отряду и вышел на берег. 2. Первый солдат сел в лодку и переплыл реку, вышел из лодки, а в лодку сел первый мальчик. 3. Первый мальчик приплыл к отряду, взял второго мальчика и поплыл обратно. Там один из мальчиков высадился, а второй пригнал лодку к отряду. 4. В лодку сел второй солдат и переплыл реку. А далее все продолжается аналогично.

**Задача 1.17.** (*на взвешивания*). Среди 9 монет одна фальшивая, которая тяжелее настоящей. Как найти фальшивую монету двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь?

*Решение.* Разобьем 9 монет по 3 на 3 кучки. Взвесим первые две кучки. Если весы будут не в равновесии, то фальшивая монета будет на той чашке весов, которая перевесила. А если весы будут в равновесии, то фальшивая монета в оставшейся кучке. Вторым взвешиванием положим на чашки весов по 1 монете из кучки, в которой монета фальшивая. Если весы не в равновесии, то на чашке весов, которая перевесила, будет находиться фальшивая монета. А если весы будут в равновесии, то фальшивая монета — оставшаяся.

**Задача 1.18.** (*на переливания*). Из полного восьмилитрового ведра отлейте 4 л с помощью пустых трехлитровой банки и пятилитрового бидона. Воду выливать на землю нельзя. Другими сосудами, кроме этих трех, пользоваться нельзя.

*Решение.* Перельем из 8 л ведра 5 л в бидон. Затем перельем из бидона 3 л в банку. Перельем из банки 3 л в ведро, а оставшиеся 2 л в бидоне в банку. Затем снова нальем

5 л в бидон. Отлив из бидона 1 л в банку, получим 4 л в бидоне. Процесс переливаний можно изобразить с помощью таблицы.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 л | 8 | 3 | 3 | 6 | 6 | 1 | 1 |
| 5 л | 0 | 5 | 2 | 2 | 0 | 5 | 4 |
| 3 л | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 2 | 3 |

**Задача 1.19.** (*на игры*). На столе лежат 15 монет. Двое играют в такую игру: по очереди берут 1 или 2 монеты. Выиграет тот, кто заберет со стола последнюю монету. Кто выиграет при правильной игре? А если монет будет 17?

*Решение.* В случае 15 монет выиграет второй, он должен брать каждым ходом число монет, дополняющее до 3 число монет, взятых первым игроком. В случае 17 монет первым ходом первый игрок должен взять 2 монеты, а затем последующими ходами брать число монет, дополняющее до 3 число монет, взятых вторым игроком. Тогда он выиграет.

*Также к данной группе задач можно отнести задачи на графы, раскраски и другие специальные методы решения задач*. Но так как задачи на эти методы практически не встречаются в текстах олимпиад для учащихся 5–6 классов, в данной книге их рассматривать не будем.

## Задачи, использующие программный материал, но повышенной трудности

### *1. Арифметические задачи*

Данный класс задач очень обширен. К ним относятся разнообразные задачи повышенной трудности по арифметике, в том числе и текстовые задачи, решаемые арифметическим методом. Рассмотрим решение несколько таких задач.

**Задача 1.20.** Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых входят только цифры 0 и 9?

*Решение.* Так как числа трехзначные, то на первом месте цифра 0 стоять не может. Таким образом, трехзначное число будет начинаться с цифры 9. Рассмотрим все такие трехзначные числа в порядке возрастания: 900, 909, 990, 999. Таким образом, получим 4 числа.

**Задача 1.21.** Поставьте скобки в выражении
$3 \cdot 7 + 10 : 5 - 3$ так, чтобы получилось число 26.

*Решение.* Без скобок результат равен 20, значит надо результат увеличить, для этого надо умножить на большее выражение или разделить на меньшее выражение. Получить число 26 можно вторым способом, а именно поставить скобки после действия деления: $3 \cdot 7 + 10 : (5 - 3)$.

**Задача 1.22.** Какое из чисел $\dfrac{7777777773}{7777777778}$ или $\dfrac{8888888882}{8888888887}$ больше? Ответ объясните.

*Решение.* Первая дробь меньше 1 на $\dfrac{5}{7777777778}$, а вторая на $\dfrac{5}{8888888887}$.

Поскольку $\dfrac{5}{7777777778} > \dfrac{5}{8888888887}$, то
$\dfrac{7777777773}{7777777778} < \dfrac{8888888882}{8888888887}$.

**Задача 1.23.** В стаде пасется 5 овец. Первая съедает копну сена за 1 день, вторая — за два дня, третья — за 3 дня, четвертая — за 4 дня, а пятая — за 5 дней. Кто съест копну сена быстрее, первая и пятая овца вместе или остальные овцы вместе?

*Решение.* Первая и пятая овца за день съедают $1+\dfrac{1}{5}=\dfrac{6}{5}$ копны сена.

Остальные за день съедят $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{6}{12}+\dfrac{4}{12}+\dfrac{3}{12}=\dfrac{13}{12}$ копны сена.

Так как $\frac{13}{12} < \frac{6}{5}$, то копну сена быстрее съедят первые две овцы.

**Задача 1.24.** В свежих грибах содержится 90 % влаги, а в сухих всего 12 %. Сколько свежих грибов надо собрать, чтобы получить 1 кг сухих грибов?

*Решение.* 1) 100 % − 12 % = 88 % — столько составляет сухое вещество в 1 кг сухих грибов.

2) 88 % от 1 кг будет составлять 0,88 кг.

3) 100 % − 90 % = 10 % — составляет сухое вещество в свежих грибах.

4) 10 % составляет 0,88 кг, поэтому 100 % будет 8,8 кг.

Таким образом, надо собрать свежих грибов 8,8 кг.

**Задача 1.25.** Мама оставила Лене яблоки на три дня. В первый день Лена съела половину всех яблок и еще пол-яблока. Во второй день она съела половину оставшихся яблок и еще пол-яблока. В третий день Лена съела снова половину оставшихся яблок и последние пол-яблока. Сколько яблок оставила мама Лене?

*Решение 1.* Решим данную задачу с конца. Так как в третий день Лена съела половину оставшихся яблок и еще пол-яблока, то всего она могла съесть лишь 1 яблоко. 2 яблока Лена не могла съесть, так как половина от 2 будет равна 1, а $1 + 0{,}5 \neq 2$. Таким образом, после второго дня на столе осталось 1 яблоко, которое вместе с половиной яблока будет составлять половину яблок, съеденных Леной во второй день. Таким образом, во второй день у Лены было 3 яблока, 2 из которых она съела затем. Так как в первый день Лена съела половину оставшихся яблок и еще пол-яблока и у неё осталось 3 яблока после этого, то всего яблок должно быть 7. Таким образом, мама оставила Лене 7 яблок.

*Решение 2 (алгебраический способ).* Съедено в первый день $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$, остаток $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$. Съедено во второй день $\frac{x-1}{2}:2+\frac{1}{2}$, остаток $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{2}=1$, $\frac{x-1-2}{4}=1$, $x-3=4$, $x=7$.

**Задача 1.26.** Если бы школьник купил 11 тетрадей, то у него бы осталось 8 рублей, а на 15 тетрадей у него не хватает 12 рублей. Сколько денег было у школьника?

*Решение.* Решим задачу арифметическим методом.

1) 15 − 11 = 4 (тетради) — разность количества покупаемых тетрадей.

2) 8 + 12 = 20 (руб.) — стоят 4 тетради.

3) 20 : 4 = 5 (руб.) — стоит 1 тетрадь.

4) 5 · 11 = 55 (руб.) — стоят 11 тетрадей.

5) 55 + 8 = 63 (руб.) — было у школьника денег.

Большой класс арифметических задач занимают ребусы. Иногда математические ребусы называют заданиями на восстановление. Ребусы бывают двух типов. У одних ребусов цифры заменены буквами, у других стертые цифры заменены точками или звездочками. Требуется восстановить запись на основании логических рассуждений. При этом встречаются математические ребусы, имеющие несколько решений. Задача будет решена верно, если будут найдены все решения или доказано, что других решений задача не имеет. Рассмотрим примеры решения подобного рода задач.

**Задача 1.27.** Восстановите ребус.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{КИС}\\ \text{КСИ}\end{array} \\ \hline \text{ИСК}\end{array}$$

*Решение.* Начнем рассуждения с десятков: И + С оканчивается на С. Значит, И = 0 или И = 9. Первый случай не может быть, так как С + И = К. Таким образом, И = 9, тогда из того, что К + К оканчивается на 9, имеем К = 4. Так как С + И оканчивается на К, а И = 9, К = 4, то С = 5. Таким образом,

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}495\\ 459\end{array} \\ \hline 954\end{array}$$

**Задача 1.28.** Решите ребус.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 2* \\ *2 \end{array} \\ \hline *8 \\ \times\ 7* \\ \hline 7*8 \end{array}$$

*Решение.* Так как при произведении * и 2 равно 8, то * = 4. Таким образом, первый множитель равен 24. Так как произведение 2 и * равно 7, то * = 3. Таким образом, второй множитель будет 32. Тогда решением будет

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 24 \\ 32 \end{array} \\ \hline 48 \\ \times\ 72 \\ \hline 768 \end{array}$$

***2. Алгебраические задачи***

Встречаются редко в 5–6 классах. К данному виду можно отнести более трудные уравнения, задачи с буквами, а также текстовые задачи, которые решаются с помощью уравнений. Приведем примеры подобного рода задач.

**Задача 1.29.** Решите уравнение: $\left(|x|+\dfrac{2}{7}\right)\cdot\left(\dfrac{5}{9}x-15\right)=0.$

*Решение.* Произведение будет равно 0, если хотя бы один из множителей равен 0. Таким образом, $|x|+\dfrac{2}{7}=0$ или $\dfrac{5}{9}x-15=0$. Решим первое уравнение: $|x|+\dfrac{2}{7}=0$. Тогда $|x|=-\dfrac{2}{7}$. Данное уравнение не имеет решений, так как слева выражение принимает только неотрицательные значения, а справа — число отрицательное. Решим второе уравнение: $\dfrac{5}{9}x-15=0$. Перенесем $-15$ в правую часть и выразим $x$: $x=15:\dfrac{5}{9}=\dfrac{15\cdot 9}{5}=27$. Ответ: $x=27$.

**Задача 1.30.** Сын спросил у отца, вернувшегося с рыбалки: «Сколько весит пойманная щука». Папа ответил сыну: «Я думаю, что хвост ее весит 0,5 кг, голова весит столько, сколько хвост и треть туловища, а туловище — сколько голова и хвост вместе». Сколько весит щука, пойманная отцом?

*Решение.* Обозначим за $3x$ кг вес туловища, тогда голова будет весить $(x + 0{,}5)$ кг. Так как туловище весит столько, сколько весит голова и хвост вместе, то получаем уравнение: $3x = x + 0{,}5 + 0{,}5$. Из этого уравнения находим $x = 0{,}5$, тогда голова щуки будет весить 1 кг, туловище 1,5 кг, хвост — 0,5 кг. Поэтому щука будет весить 3 кг.

### *3. Геометрические задачи*

Наибольшие трудности у учеников на олимпиадах и соревнованиях вызывают геометрические задачи, хотя именно геометрия прекрасно развивает нестандартное мышление. Данный тип олимпиадных задач является самым обширным. Это задачи и на разрезания, и на построение, и на нахождение величин углов... В 7–11 классах встречаются и задачи, которые используют в своем решении какую-то необычную идею, например, дополнительное построение. Подобного рода задачи иногда встречаются и в вариантах единого государственного экзамена по математике в части 2.

Рассмотрим примеры олимпиадных задач по геометрии применительно к 5–6 классам.

**Задача 1.31.** Кусок проволоки длиной 87 см разрезали на несколько частей, при этом каждая из частей имеет длину 12 см или 15 см. Обрезков при этом нет. Найдите все возможные варианты разрезания.

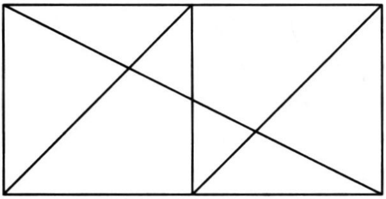
*Решение.* Если разрезать кусок проволоки на куски длиной 12 см, то их будет 7 и 3 см остается лишними. Но 15 см – 12 см = 3 см, значит, кусок проволоки длиной 87 см можно разрезать на 1 часть длиной 15 см и 6 частей длиной 12 см. Если разрезать кусок проволоки на куски длиной

15 см, то получится 5 кусков и 12 см остается. То есть кусок длиной 87 см можно еще разрезать на 5 частей длиной 15 см и 1 часть длиной 12 см. Других вариантов нет.

*Замечание:* Данную задачу можно рассматривать и как задачу в целых числах, в результате получить уравнение: $12x + 15y = 87$. Разделив обе части уравнения на 3, получим: $4x + 5y = 29$. Придавая значения для одной из переменных: 1, 2, 3, 4, 5, 6, получим значения для другой переменной: $x = 1$, $y = 5$ или $x = 6$, $y = 1$. Но в программе 5–6 классов решение уравнений в целых числах не рассматривается.

*Ответ:* Кусок проволоки длиной 87 см можно разрезать на 6 частей длиной 12 см и 1 часть длиной 15 см или на 1 часть длиной 12 см и 5 частей длиной 15 см.

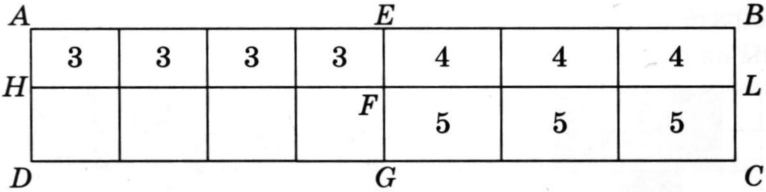
**Задача 1.32.** Сколько треугольников изображено на рисунке?



*Решение.* Правильность ответа будет зависеть от того, все ли треугольники будут найдены. Подсчет треугольников начнем с числа треугольников, которые не будут разбиваться на другие треугольники. Таких треугольников будет по 3 в каждом квадрате, то есть 6. Теперь посчитаем число треугольников, состоящих из 2 треугольников. В каждом квадрате таких треугольников будет по 3, итого их 6. Теперь посчитаем число треугольников, состоящих из 3 фигур (2 треугольников и 1 четырехугольника), всего их будет 2. И, наконец, подсчитаем число треугольников, содержащих по 4 фигуры: это будет 2 самых больших треугольника, получающихся от деления прямоугольника на 2 части. Таким образом, всего получается 16 треугольников.

**Задача 1.33.** Прямоугольник разбит на четыре маленьких прямоугольника. Площади трех из них известны: 3, 4, 5 (см. рисунок). Найдите площадь четвертого прямоугольника.

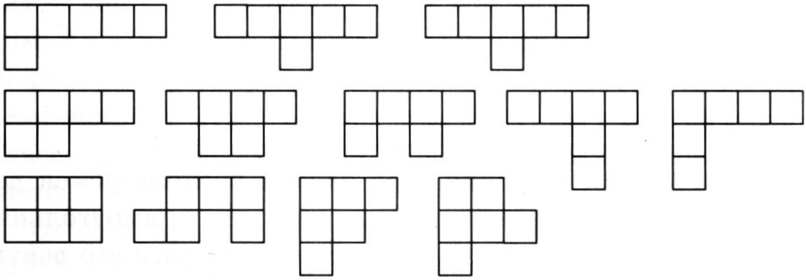

*Решение.* Для решения этой задачи воспользуемся дополнительным построением. Пристроим к прямоугольнику, заданному в условии задачи, слева три раза его левую часть, а справа — два раза его правую часть, как показано на рисунке.



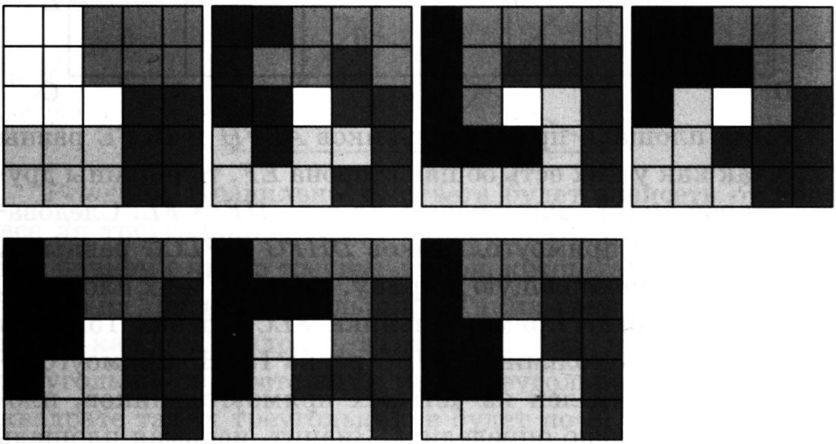

Тогда площади прямоугольников $AEFH$ и $BLFE$ равны 12, а так как у них есть общая сторона $EF$, то и длины других сторон будут одинаковые, то есть $HF = FL$. Следовательно, длины прямоугольников $DHFG$ и $FLCG$ равны. А так как они имеют общую ширину, то равны и их площади. Так как площадь прямоугольника $FLCG$ равна 15, то и площадь прямоугольника $DHFG$ равна 15. Но прямоугольник $DHFG$ составлен из четырех прямоугольников, площадь которых надо определить. Значит, искомая площадь равна $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

**Задача 1.34.** Разделите квадрат $5 \times 5$ клеток с вырезанной центральной клеткой на четыре равные части. Найдите как можно больше способов. Разрезать можно только по сторонам квадратов.

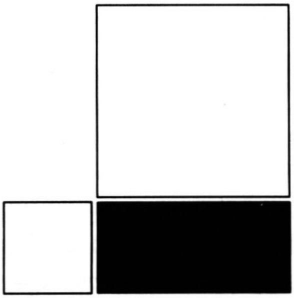
*Решение.* Так как всего в квадрате остается 24 клетки, а надо разделить исходную фигуру на четыре равные части, то каждая из частей будет содержать по 6 клеток. Рассмотрим, какие фигуры можно получить из 6 клеток. Вот некоторые из них.



Располагая по-разному выделенные нами фигуры в квадрате 5 × 5, получим следующие 7 способов (они показаны на рисунках):



**Задача 1.35.** На двух соседних сторонах прямоугольника (выделен черным цветом) с периметром 44 см построено по квадрату. Разность периметров этих квадратов равна 8 см. Найдите площадь данного прямоугольника. Ответ объясните.



*Решение.* Так как периметр прямоугольника равен 44 см, то полупериметр прямоугольника будет 22 см. Обозначим одну из сторон прямоугольника за $a$ см, тогда другая сторона будет равна $(22 - a)$ см. Найдем периметры построенных квадратов: они будут равны $4a$ и $4(22 - a)$. По условию их разность равна 8 см, поэтому имеем уравнение: $4(22 - a) - 4a = 8$. Решением данного уравнения является $a = 10$. Тогда $22 - a = 12$. Таким образом, стороны прямоугольника равны 10 см и 12 см, поэтому площадь прямоугольника равна 120 $см^2$.

Третий большой класс олимпиадных задач использует и программный материал, и специальные методы решения. Но данный тип практически не встречается в 5–6 классах. В качестве примера можно привести второе решение задачи 1–31.

# ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ

В этом разделе содержатся задачи, которые можно применять для подготовки к различного рода олимпиадам. Автор не стал их разбивать отдельно по 5 и 6 классам, так как сегодня в одном учебнике какой-то новый материал изучается в 5 классе, а по другому учебнику — лишь в 6 классе. Задачи, которые Вы не сможете решить, обучаясь в 5 классе, можно пропустить и вернуться к ним уже в 6 классе. Все задачи условно разбиты на несколько разделов, в каждом из которых собраны задачи по какому-то основному разделу школьной математики или задачи на применение специальных методов решения. Самый большой раздел задач по арифметике, так как больше всего этот раздел математики изучается в 5–6 классах. При этом текстовые задачи, применяющие программный материал, автор поместил в тот раздел, метод решения которых (арифметический или алгебраический) рассмотрел автор. Также в подборке задач есть раздел, в который помещены задачи, метод решения которых должен выбрать сам ученик. В числе этих задач есть как задачи на методы решения, рассмотренные выше, так и такие задачи, метод решения которых труднее определить.

Многие из предлагаемых задач заимствованы из различных сборников задач (большинство этих сборников указано в списке литературы), часть задач переработана автором, а некоторые из задач составлены автором.

## Арифметические задачи

**1.** Напишите число 100:

а) шестью одинаковыми цифрами;

б) девятью различными цифрами.

(Можно использовать знаки: +, :).

2. Ваня задумал число, прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 9, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил 2. Какое число задумал Ваня?

3. Говорил дед внукам: «Вот вам 130 орехов, разделите их на 2 части так, чтобы меньшая часть, увеличенная в 4 раза, равнялась бы большей части, уменьшенной в 3 раза». Как разделить орехи?

4. Запишите подряд 20 пятерок: 55...5. Поставьте между некоторыми цифрами знак сложения так, чтобы сумма равнялась 1000.

5. Запишите число, состоящее из суммы 11 тысяч, 11 сотен и 11 единиц.

6. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра десятков больше цифры единиц?

7. На сколько сумма всех четных чисел первой сотни больше суммы всех нечетных чисел этой сотни?

8. Найдите ошибку в следующих рассуждениях. Имеем числовое равенство: $4 : 4 = 5 : 5$. Вынесем за скобки в каждой части общий множитель.
Получим: $4(1 : 1) = 5(1 : 1)$. Числа в скобках равны, поэтому $4 = 5$, или $2 \times 2 = 5$.

9. Сколько существует натуральных чисел, меньших 100, в записи которых цифра 5 использована хотя бы 1 раз?

10. Возраст дедушки выражается наименьшим трехзначным числом, которое записывается различными цифрами. Сколько лет дедушке?

11. В двузначном числе первую цифру 4 зачеркнули. Получилось число, в 9 раз меньше первоначального. Каким может быть двузначное число?

12. Малыш и Карлсон сидели на крыше и наблюдали за голубями. На крыше сидело несколько голубей. Когда на крышу село еще 15 голубей, а улетело 18 голубей,

то на крыше осталось 16 голубей. Сколько голубей первоначально наблюдали Малыш и Карлсон?

**13.** Запишите число 1 000 000, имея только цифру 3, знаки арифметических действий и скобки, если они необходимы. Можно ли в этой записи обойтись без действия деления?

**14.** Во сколько раз лестница с первого этажа на шестнадцатый длиннее лестницы с первого на четвертый этаж дома?

**15.** Сколько всего имеется пятизначных чисел, сумма цифр в которых равняется трем? При этом в записи каждого числа цифра 1 может встречаться не более одного раза.

**16.** Поставьте в выражении скобки так, чтобы получилось верное равенство: $270 + 120 + 390 : 3 \cdot 5 = 1120$.

**17.** Малыш проехал на самокате некоторое расстояние за 15 минут. За какое время он проедет на велосипеде расстояние в 3 раза большее? Скорость малыша на велосипеде в 5 раз больше, чем на самокате.

**18.** Катя и Юра купили лотерейные билеты с номерами: 625517 и 322324, и обнаружили, что в каждом из номеров можно расставить знаки арифметических действий и скобки так, что в каждом случае результат будет равняться 100. Как это можно сделать?

**19.** Сколько всего пятизначных чисел можно составить из цифр 0 и 1? Цифры могут повторяться. Запишите эти цифры.

**20.** Старший брат идет от школы до дома 30 минут, а младший — 40 минут. Через какое время старший брат догонит младшего, если тот вышел из школы на 5 минут раньше?

**21.** Муравей направился в гости в соседний муравейник. Туда он шел пешком, а обратно ехал: первую половину пути на гусенице — со скоростью в 2 раза меньшей, чем пешком; а другую половину — на кузнечике, со скоростью в 5 раз большей, чем пешком. На какой путь муравей затратил времени меньше: в гости или обратно и почему?

**22.** Запишите 100

а) с помощью пяти единиц и знаков действий;

б) с помощью пяти пятерок и знаков действий;

в) с помощью пяти троек и знаков действий.

**23.** Лошадь может съесть воз сена за 1 месяц, коза — за 2 месяца, а овца — за 3 месяца. За какое время лошадь, коза и овца съедят такой же воз сена?

**24.** Найдите дробь со знаменателем 19, которая больше $\frac{5}{7}$, но меньше $\frac{6}{7}$.

**25.** Сколькими нулями оканчивается произведение: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$?

**26.** В 9 часов утра со станции $A$ отправился пассажирский поезд, а вслед за ним в 11 ч с той же станции отправился скорый поезд. На каком расстоянии от точки $A$ пассажирскому поезду надо будет пропустить скорый, если скорость пассажирского поезда 54 км/ч, а скорого — 72 км/ч?

**27.** Дима с собакой пошел встречать папу. Когда собака увидела папу, она побежала к нему со скоростью 5 м/с. Добежав до него, она сразу же побежала обратно к Диме. Добежав до Димы, собака снова побежала к папе и т.д. Какое расстояние пробежала собака, если Дима и папа двигались со скоростью 1,5 м/с, а первоначальное расстояние между ними было равно 300 м?

**28.** Вычислите:

$90 - 89 - 88 - ... - 1 + 0 + 1 + 2 + ... + 98 + 99 + 100$

**29.** Разделите семь яблок поровну на 12 человек, не разрезая яблоки более чем на 4 части.

**30.** Используя каждую из цифр 0,1, 2, 3. 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу, а также знаки арифметических действий, получите число 2018. Из цифр можно составлять числа.

**31.** В 100 г раствора имеется 1 % соли. После испарения в растворе стало 2 % соли. Сколько весит этот 2-процентный раствор соли.

**32.** Сколькими нулями оканчивается число 100!?

**33.** Запишите число 2017 с помощью десяти девяток и арифметических операций.

**34.** Из дома Саша вышел на 5 минут позже Лены, но шел в 2 раза быстрее, чем она. Через сколько минут Саша догонит Лену?

**35.** Подряд были выписаны все числа от 1 до 1000. Сколько раз была написана цифра 5?

**36.** Как отрезать от шнура длиной $\frac{2}{3}$ метра кусок длиной полметра, не пользуясь измерительными инструментами?

## Задачи на делимость

**37.** Отличник Вася решил купить себе в магазине одну ручку за 1 руб. 80 коп. и 6 стержней. Продавец потребовал с Васи 5 руб., на что Вася ответил тому, что он ошибся. Прав ли Вася и почему?

**38.** В классе меньше 30 учеников. За контрольную работу по математике пятая часть учеников получила пятерки, четвертая часть — тройки, а половина — четверки. Остальные получили двойки. Сколько учеников было в классе? Сколько из них получили двойку?

**39.** Делится ли число $11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 51 \cdot \ldots \cdot 91 - 1$ на 10? Почему?

**40.** Витя попросил одноклассниц порешать для него задачи. Для того чтобы задачи быстрее решались, он сказал девочкам, что за каждую решенную задачу девочка, решившая её первой, получает три конфеты, решившая второй — две, решившая последней — одну. После решения всех задач Витя обнаружил, что у всех девочек на столе по 11 конфет. Девочки сказали Вите, что они брали согласно уговору. Каждая девочка решила все задачи, и одновременно ни одной из задач они не решили. Правильно ли девочки брали конфеты и почему?

**41.** Найдите наименьшее натуральное число n, такое, что $n!$ делится и на 13, и на 14, и на 15, и на 16? ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$)

**42.** Учащиеся, построенные парами, выходят из леса, где они собирали грибы. В каждой паре идут девочка и мальчик, причем у девочки грибов в два раза больше, чем у мальчика. Может ли так случиться, что у всех учащихся вместе будет 500 грибов?

**43.** К числу 13 припишите справа и слева по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 36.

**44.** Мама принесла из сада корзину яблок и решила их разделить между своими детьми, которых у нее пятеро. Оказалось, что число яблок в корзине делилось нацело на 2, на 3 и на 5, но не делилось на 4. Сколько яблок было в корзине у мамы, если яблок меньше 100?

## Числовые ребусы

**45.** Восстановите запись.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & * & * & * \\
\times & & & & * & 8 \\
\hline
+ & & & * & * & * \\
 & * & * & * & 5 & \\
\hline
 & * & * & * & * & 0
\end{array}
$$

**46.** Восстановите запись сложения.

$$\begin{array}{r} \text{ПОРТ} \\ +\,\text{ПОРТ} \\ \underline{\text{ПОРТ}} \\ \text{ТОРГ} \end{array}$$

**47.** Восстановите запись.

$$\begin{array}{r} **** \\ -\quad *** \\ \hline 1 \end{array}$$

**48.** Восстановите пример, учитывая, что одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами.

$\overline{ABC} \times \overline{CBA} = 692443$

## Алгебраические задачи

**49.** Крестьянин попросил взять у царя 1 яблоко из его сада. Царь разрешил. Пошел крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором, причем каждый забор имеет одни ворота, вход в которые охраняет сторож. Подошел крестьянин к первому сторожу и говорит: «Царь разрешил мне взять одно яблоко из сада». На что сторож ему сказал: «Возьми, но при выходе отдашь мне половину тех яблок, что возьмёшь, и ещё одно». Эти же слова повторили крестьянину 2 и 3 сторожа, охранявшие другие ворота. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы после того, как он отдаст положенную часть 3 сторожам, у него осталось одно яблоко?

**50.** Решите уравнение: $\frac{5}{x} - \frac{3}{x} + \frac{6}{x} = \frac{4}{11}$.

**51.** Найдите все натуральные значения $x$, при которых верно неравенство:

$$1 < \frac{x}{7} + \frac{2x}{7} < \frac{23}{7}.$$

52. Проехав половину всего пути, пассажир лег спать и спал до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, который он проспал. Какую часть всего пути пассажир проехал бодрствующим?

53. Если треть числа разделить на его семнадцатую часть, в остатке будет 100. Найдите это число.

54. Из города Котлас в город Коряжма автомобиль ехал со скоростью 40 км/ч в течение 1 часа. Обратно автомобиль двигался уже со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.

55. За первый день бригада скосила 15 га, а за второй день — 20% оставшейся площади. Всего за 2 дня было скошено 36% всех лугов. Найдите площадь всех лугов.

## Геометрические задачи

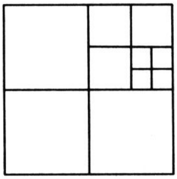
56. Объясните, как с помощью спичек можно получить на столе 60°, 90°, 120°. Изобразите получившиеся фигуры.

57. Какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы разрезать куб с ребром 3 см на 27 единичных кубиков?

58. Мальвина дала Буратино лист бумаги, на котором были нарисованы квадрат и треугольник. Буратино поставил внутри квадрата 3 точки, а внутри треугольника — 2. Всего получилось 4 точки, причем ни одна из них не располагалась на сторонах квадрата или треугольника. Покажите, как были нарисованы квадрат и треугольник и как Буратино поставил точки.

59. Закрасьте 8 одинаковых клеток так, чтобы каждая из них имела по две соседние закрашенные клетки.

**60.** Сколько всего квадратов на рисунке?



**61.** Космические корабли–спутники летают на высоте до 300 км. Хватит ли кубиков объемом в 1 куб. мм, содержащихся в 1 куб. метре, чтобы сложить из них башню такой высоты?

**62.** Какой фигурой может быть пересечение треугольника и четырехугольника? Покажите на рисунках.

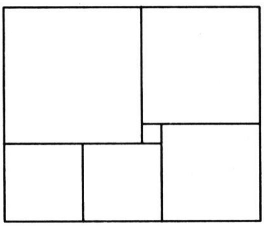
**63.** Найдите площадь прямоугольника, если его длина на 5 см больше ширины, а половина периметра равна 19 см.

**64.** Начертите три тупых угла так, чтобы два из них не имели общих точек, а стороны третьего пересекали бы лишь одну сторону каждого из первых двух углов.

**65.** Из трех одинаковых кубов с ребром 8 см составили прямоугольный параллелепипед. Найдите его объём и площадь поверхности.

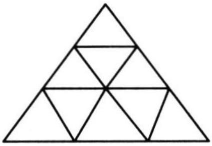
**66.** Сколько сантиметров проволоки потребуется для изготовления каркаса куба с ребром 6 см?

**67.** Прямоугольник составлен из шести квадратов (см. рисунок). Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.



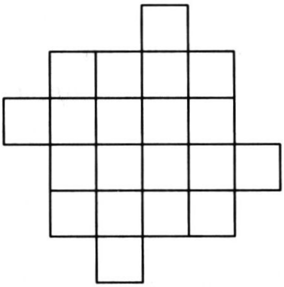
**68.** Две противоположные стороны прямоугольника увеличили на $\frac{1}{4}$ часть, а две другие уменьшили на $\frac{1}{4}$ часть. На сколько изменится площадь прямоугольника?

**69.** Сколько всего треугольников на рисунке?

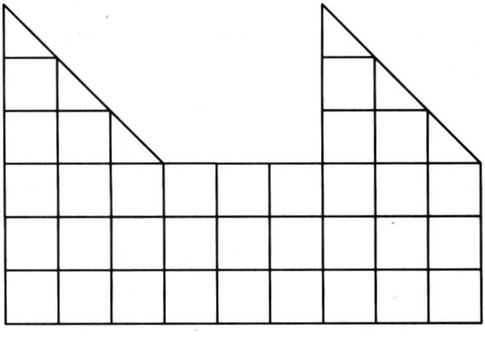


## Задачи на разрезания

**70.** Разделите изображенную на рисунке фигуру на четыре равные части:



**71.** Разрежьте изображенную на рисунке фигуру на две одинаковые части.



**72.** Разрежьте квадрат $3 \times 3$ на две части и квадрат $4 \times 4$ на две части так, чтобы из получившихся четырёх кусков можно было сложить квадрат.

**73.** Как разрезать прямоугольник со сторонами $4 \times 9$ на минимальное число частей, чтобы из них сложить равновеликий квадрат?

**74.** Как разделить круг тремя прямыми на 4, 5, 6, 7 частей?

**75.** У Ивана-царевича был волшебный ковер-самолёт размером $9 \times 12$ м$^2$, Змей Горыныч подкрался и отрезал от ковра маленький коврик размером $1 \times 8$ м$^2$. Иван–царевич очень расстроился, т.к. волшебный ковер–самолет мог летать, лишь имея прямоугольную форму. Поэтому он решил еще отрезать кусок $1 \times 4$ м$^2$, чтобы получился прямоугольник $8 \times 12$ м$^2$, но Василиса Премудрая предложила поступить по–другому. Она разрезала ковер на три части, из которых волшебными нитками сшила квадратный ковер–самолет размером $10 \times 10$ м$^2$. Как переделала ковер Василиса Премудрая?

**76.** Когда Гулливер попал в Лилипутию, то обнаружил, что там всё ровно в 12 раз короче, чем на его родине. Сможете ли Вы сказать, сколько лилипутских спичечных коробков помещается в спичечной коробке Гулливера?

**77.** На мачте пиратского корабля развевается двухцветный прямоугольный флаг, состоящий из чередующихся черных и белых вертикальных полос одинаковой ширины. Общее число полос равно числу пленных, находившихся в данный момент на корабле. Сначала на корабле было 12 пленных, а на флаге 12 полос, затем 2 пленных сбежали. Как разрезать флаг на 2 части, а затем сшить их, чтобы площадь флага и ширина полос не изменилась, а число полос стало равно 10?

## Задачи на применение принципа Дирихле

**78.** В ковре $4 \times 4$ метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером $1 \times 1$ метр, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки считать точечными.)

**79.** В мешке лежат шарики двух цветов: черного и белого. Докажите, что если вытащить три шарика, то два из них окажутся одного цвета.

**80.** В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой елке не более 800 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

**81.** В ящике лежат носки красного, белого, зеленого, синего и черного цветов. Какое наименьшее число носков нужно вытащить вслепую из ящика, чтобы среди них оказалось наверняка два носка одного цвета?

**82.** Голубей рассадили в ящики, причем оказалось, что ящиков больше, чем голубей. Докажите, что хотя бы один из ящиков пуст.

**83.** Дано 6 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых делится на 5.

**84.** На клумбе, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной 3 м растут 10 роз. Докажите, что найдутся две розы, которые находятся на расстоянии, не большем 1 м.

**85.** 12 учеников сидят за круглым столом, причем больше половины из них юноши. Докажите, что какие-то два юноши сидят напротив друг друга.

## Задачи на применение метода инвариантов

**86.** На доске записано 11 чисел: 6 нулей и 5 единиц. Вам предлагается 10 раз подряд выполнить такую операцию: зачеркните любые два числа и, если они одинаковы, то допишите к оставшимся числам нуль, а если разные, то единицу. Какое число останется на доске?

**87.** На столе лежат 7 металлических рублей гербом вверх. Разрешается за один раз перевернуть любые 6 из них. Можно ли за несколько раз перевернуть все рубли гербом вниз?

**88.** Произведение 10 целых чисел равно 1. Может ли сумма данных чисел равняться 0?

**89.** В каждой клетке доски размером $7 \times 7$ сидит жук. В некоторый момент времени все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Докажите, что после этого останется хоть одна пустая клетка.

**90.** В вершинах квадрата записаны числа 0, 1, 2, 4. Разрешается прибавлять к любым двум числам, стоящим в вершинах квадрата, одно и то же целое число. Можно ли через несколько ходов получить во всех вершинах одинаковые числа?

**91.** Имеется купюра в 50 рублей. Можно ли ее разменять с помощью 13 монет достоинством 1 и 5 рублей? А с помощью 18 монет? Как?

**92.** Конь вышел с поля a1 шахматной доски и через несколько ходов вернулся обратно. Докажите, что он сделал четное число ходов.

**93.** Сумма 2016 некоторых натуральных чисел — нечётное число. Каким числом — чётным или нечётным — является произведение этих чисел?

**94.** Вдоль дачного забора растут 24 куста малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах быть вместе 535 ягод?

**95.** Можно ли заменить звездочки в равенстве $1*2*3*...*9*10 = 0$ на знаки «+» и «−» так, чтобы равенство стало верным?

## Логические задачи

**96.** В ящике лежат шары: 5 красных, 7 синих и 1 зеленый. Сколько шаров надо вынуть, чтобы достать 2 шара одного цвета?

**97.** Николай с сыном и Иван с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько и его сын, а Иван — втрое больше, чем его сын. Всего было поймано 35 рыб. Сколько рыб поймал Иван и как звали его сына?

**98.** Автору данного пособия в 1979 году исполнилось столько лет, сколько сумма цифр года его рождения. В каком году я родился?

**99.** Петя и Ваня ехали вниз по эскалатору. На середине эскалатора хулиган Витя сорвал с Пети шапку и бросил ее на встречный эскалатор. Пострадавший Петя побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься вниз и вернуть шапку. Хитрый Ваня побежал по эскалатору вниз, чтобы затем подняться вверх и успеть раньше Пети. Кто успел первый, если скорости ребят относительно эскалатора постоянны и не зависят от направления движения?

**100.** Продавец получил для продажи несколько пачек конвертов по 100 конвертов в каждой. 10 конвертов он отсчитывает за 10 с. За сколько секунд сообразительный продавец может отсчитать 70 конвертов? 90 конвертов?

**101.** Петя сказал друзьям: «Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году исполнится 13». Мог ли Петя не соврать?

**102.** У поросят Ниф-Нифа и Нуф-Нуфа было соответственно по 4 и 8 пирогов. К ним пришел Наф-Наф и попросил угостить его пирожками. Пироги были разделены поровну. После того,как все пироги были съедены, Наф-Наф поблагодарил поросят и дал им 6 рублей. Как разделить эти деньги между Ниф-Нифом и Нуф-Нуфом справедливо?

**103.** У мальчика имеется 13 монет по 1, 5, 10, 50 копеек. Имеются ли среди них 4 одинаковые?

**104.** На школьной олимпиаде по математике участникам было предложено решить 6 задач. За каждую решенную задачу засчитывалось по 7 очков, а за каждую нерешенную списывалось 3 очка. Сколько задач решил участник, если он набрал 12 очков? 2 очка? 32 очка?

**105.** В семье 3 детей: 2 мальчика и девочка. Их имена начинаются с букв *А*, *В*, *Г*. Среди *А* и *В* есть начальная буква имени одного мальчика, а среди *В* и *Г* — начальная буква имени другого мальчика. С какой буквы начинается имя девочки?

**106.** Четыре человека обменялись рукопожатиями. Сколько всего было рукопожатий?

**107.** Четыре брата: Юра, Петя, Вова, Коля учатся в 1, 2, 3, 4 классах. Петя – отличник, младшие братья стараются брать с него пример. Вова учится в 4 классе. Юра помогает решать задачи брату. Кто из них в каком классе учится?

**108.** Три поросенка построили три домика: из соломы, из прутьев и из камней. Каждый из них получил один домик: Ниф-Ниф — не из камней и не из прутьев; Нуф-Нуф — не из камней. Объясните, какой домик достался Наф-Нафу.

**109.** Дядька Черномор и 33 богатыря охраняют остров Буян. Наряд из 6 богатырей дежурит в течение суток. Каким образом дядька Черномор может организовать дежурство в течение 11 суток так, чтобы каждый богатырь отдежурил 2 суток?

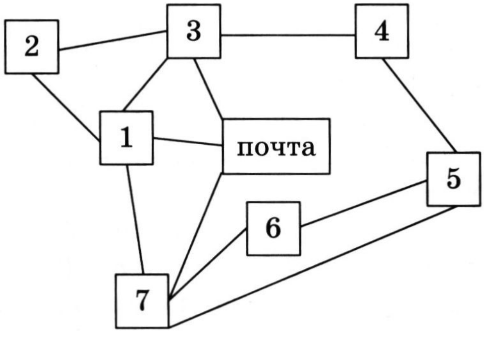
**110.** Гриша, Люда, Зина, Петя родились 12 февраля, 6 апреля, 12 июня, 26 июня. Интересно, что Петя и Люда родились в одном месяце, а Зина и Петя родились в один и тот же день разных месяцев. Когда родился Гриша?

**111.** Победителей олимпиады выстроили в ряд на сцене. Директор школы, поздравляя их, заметил, что пятым справа стоял Коля, выступивший лучше всех. Учитель математики же обратил внимание на то, что Коля стоял девятым слева. Сколько всего учеников стояло на сцене?

**112.** В феврале 2020 г. 2 февраля было воскресеньем. Сколько суббот было в феврале 2020 г.?

**113.** У всех 25 учеников на родительское собрание пришли папы и мамы. Мам было 20, а пап — 10. У скольких учеников на родительское собрание пришли и папы, и мамы?

**114.** Почтальон Печкин разнес почту во все дома деревни, после чего зашел к дяде Федору выпить молока. На рисунке показаны все тропинки, которые проходил Печкин, причем, как оказалось, ни по одной из них он не проходил дважды. Каков мог быть маршрут почтальона Печкина? В каком доме живет дядя Федор?



**115.** В кабинет математики для консультации собрались трое учеников: Аня, Боря и Света. Для ответа на вопросы Ане требуется 5 минут, Боре — 2 минуты, а Свете — 7 минут. Как учителю правильнее построить проведение консультации, чтобы ученики находились в кабинете как можно меньше времени?

**116.** На сковородке помещается 2 кусочка хлеба. На поджаривание куска с одной стороны требуется 1 минута. Как за три минуты поджарить 3 куска с обеих сторон?

**117.** Сергей приехал в гости к своей сестре Кате. Гуляя по городу, они остановились перед больницей. «Я навещу своего племянника», — сказал Сергей. «Хорошо, — сказала Катя. — Тут у меня нет больного племянника, да я его уже проведывала сегодня. Пойду, зайду в магазин». Каковы родственные отношения Кати и больного племянника?

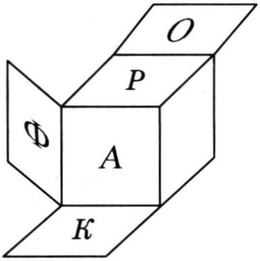
**118.** 12 человек несут 12 буханок хлеба. Каждый мужчина несет по 2 буханки хлеба, женщина — по $\frac{1}{2}$ буханки, а ребёнок — по $\frac{1}{4}$. Сколько было мужчин, женщин, детей?

**119.** На озере расцвела 1 лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на 10-й день все озеро покрылось цветами. На какой день покрылась цветами половина озера?

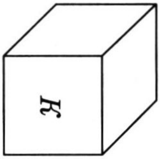
**120.** Баба-яга в своей избушке на курьих ножках завела сказочных животных. Все они, кроме двух, — Говорящие Коты. Все, кроме двух, — Мудрые Совы; остальные — Усатые Тараканы. Сколько обитателей в избушке у Бабы-яги, если каждое из сказочных животных у неё есть?

**121.** Три школьных товарища купили в буфете 14 пирожков. Коля купил в 2 раза меньше Вити, а Женя — больше Коли, но меньше Вити. Сколько пирожков купил каждый товарищ?

**122.** Незнайка подбросил кубик (см. рисунок *а*) так, что он упал, как показано на рисунке *б*. Заполните пустые видимые грани куба.




*а)*




*б)*

**123.** В парламенте одной из стран 150 депутатов. По крайней мере, один из них честен. В каждой паре депутатов хотя бы один продажен. Сколько всего честных депутатов в Парламенте данной страны?

**124.** После того как Маша съела половину яблок из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся яблок?

**125.** В поединке двух борцов разной силы всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить их по трое на три команды так, чтобы во встречах команд по системе «каждый с каждым» по числу побед первая команда одержала верх над второй, вторая — над третьей, а третья над первой?

**126.** Какое наибольшее число ладей, не бьющих друг друга, можно расставить на доске $8 \times 8$?

**127.** Трое друзей: Иванов, Петров и Сидоров учатся в пятом, шестом и седьмом классах. У самого младшего из них нет сестер. Сидоров учится с сестрой Петрова в одном классе, он самый старший из друзей. Назовите фамилии пятиклассника, шестиклассника и семиклассника. Ответ обоснуйте.

**128.** Племянник спросил дядю, сколько ему лет. Дядя ответил: «Если к половине моих лет прибавишь 8, узнаешь мой возраст 15 лет назад». Сколько лет дяде?

**129.** У Васи, плывущего по реке против течения на резиновой лодке, под мостом сдуло ветром шапку. Только через 15 минут он заметил, что плывет без шапки. Он сразу повернул обратно и поймал шапку в 1 км от моста. Какова скорость течения реки?

### Задачи на переливания

**130.** Как с помощью двух бидонов 5 л и 8 л отлить из молочной цистерны 7 л молока? Молоко разрешается выливать обратно в цистерну.

**131.** Имеется два сосуда ёмкостью 3 и 5 литров. Как, пользуясь только этими сосудами получить только 1 л воды. Воду можно брать из водопроводного крана, выливать её в раковину нельзя.

**132.** Как набрать из реки 3 л воды, имея ведра вместимостью 4 и 5 литров? Выливать воду из ведер нельзя.

### Задачи на выигрышные ситуации

**133.** На столе лежат 6 конфет. Двое берут по очереди по одной, по две или по три конфеты. Проигрывает тот, кому досталась последняя конфета. Как правильно играть начинающему, чтобы не проиграть?

**134.** На столе лежат 15 монет. Двое играют в такую игру: по очереди берут 1 или 2 монеты. Выиграет тот, кто заберет со стола последнюю монету. Кто выиграет при правильной игре?

**135.** Двое учеников по очереди ломают шоколадку $6 \times 8$. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет?

## Задачи на переправы

**136.** Трое учеников пошли на рыбалку, взяв с собой лодку, выдерживающую нагрузку до 100 кг. Как перебраться ученикам с берега реки на остров, если их масса равна 40 кг, 50 кг, 70 кг?

**137.** Три семейные пары подошли к реке и захотели переправиться на другой берег. На берегу находилась лодка с веслами, которая могла поднять всего двух человек. Как семейным парам переправиться на другой берег, если ни одна жена не хотела оставаться на берегу без своего мужа в окружении чужих мужей, и каждая жена хотела ехать в лодке только со своим мужем? При этом грести все жены и мужья умели.

**138.** Семья в составе папы, мамы, сына и дочери ночью подошла к мостику через реку. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2 минуты, сын — за 5 минут, а дочь — за 10 минут. На всех у них имеется всего 1 фонарик. При этом мостик может выдержать только двоих. При этом если передвигаются двое, то они идут с меньшей скоростью. Без фонарика по мостику двигаться нельзя. Светить издали также нельзя. Носить друг друга на руках нельзя. Перебрасывать фонарик также нельзя. Как семье переправиться на другой берег за 17 минут, соблюдая все эти правила?

## Задачи на взвешивания

**139.** Имеются чашечки без гирь и 3 одинаковые по внешнему виду монеты. Одна из монет фальшивая, причем неизвестно, легче она настоящих монет или тяжелее (одинаковые монеты одного веса). Сколько надо сделать взвешиваний, чтобы определить фальшивую монету?

**140.** Из 9 монет одна фальшивая, она легче остальных. Сколько надо сделать взвешиваний на чашечных весах без гирь, чтобы определить фальшивую монету?

**141.** Из 27 монет одна — фальшивая, она легче остальных. Можно ли ее определить за три взвешивания на чашечных весах без гирь?

**142.** Среди 25 монет 3 фальшивые (более легкие). Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь отобрать из этих 25 монет 8 хороших монет?

**143.** Есть 9 кг песка и чашечные весы с двумя гирями 50 г и 200 г. Как за три приема взвесить 2 кг песка?

**144.** В 4 мешках все монеты настоящие (весят по 10 г), а в одном все фальшивые (весят по 11 г). Одним взвешиванием на точных весах со стрелкой определите, в каком мешке фальшивые монеты.

## Задачи на разные методы решения

**145.** Обменный пункт выдает за 1 доллар 60 рублей и за 1 евро 70 рублей. Мельче доллара и евро в обменном пункте валюты нет. Перечислите способы, которыми можно обменять 1000 рублей.

**146.** На острове, где каждый житель или всегда говорит правду, или всегда обманывает, жили три брата — старший, средний и младший. Они получили в наследство кота, осла и мельницу. После этого каждый из братьев сделал два заявления: «Мельницу получит тот, кто старше меня» и «Тот, кто получил кота, младше меня». Кому какая часть наследства досталась, если известно, что каждый что-то получил? Ответ объясните.

**147.** Из спичек выложены 2 неверных равенства:

а) XII + IX = I

б) VI – IV = XI

Переложите в каждом равенстве по одной спичке, чтобы равенства стали верными.

**148.** Школьники Петя и Вася взвесили свои портфели на весах. Весы показали 3 кг и 2 кг. Когда же они поставили на весы оба портфеля, весы показали 6 кг. «Как же так? — удивился Петя, — ведь 2 + 3 не равняется 6». На что Вася ответил: «Разве ты не видишь, что у весов сдвинута стрелка?» Сколько же весят портфели на самом деле?

**149.** Имеются двое песочных часов: на 3 минуты и на 7 минут. Яйцо варится 11 минут. Как отмерить это время при помощи имеющихся часов?

**150.** Король нанял 2 рабочих для рытья подземного хода из своего дворца. Один рабочий за 1 час может прокопать вдвое больше, чем другой, а платит им король каждому одинаково за каждый час работы. Что обойдется дешевле — совместная работа землекопов с 2 сторон до встречи или поочередное рытье половины подземного хода каждым из землекопов?

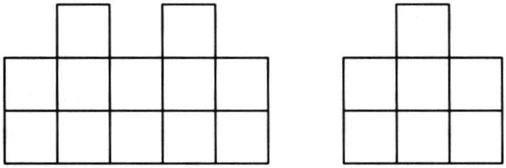
**151.** Ягнёнок и поросёнок весят столько, сколько 5 собачек. Поросёнок весит столько, сколько 4 кошки; 2 кошки и поросёнок весят столько, сколько 3 собачки. Сколько кошек уравновесят ягнёнка?

**152.** Винни-Пуху подарили на день рождения бочонок с медом массой 7 кг. Когда Винни-Пух съел половину меда, то бочонок с оставшимся медом стал иметь массу 4 кг. Сколько килограммов меда было первоначально в бочонке?

**153.** Три одинаковых арбуза надо разделить поровну между четырьмя детьми. Как это сделать, выполнив наименьшее число разрезаний?

**154.** Дочери в настоящее время 8 лет, а матери 38 лет. Через сколько лет мать будет втрое старше дочери?

**155.** Из скольких кубиков, поставленных один на другой, может состоять башня, показанная на рисунке?



*Вид спереди* *Вид сбоку*

**156.** На координатном луче отмечено несколько точек, координаты которых являются натуральными числами. Известно также, что сумма этих чисел равна 75. Если мы каждую точку переместим вправо на три единичных отрезка, то сумма координат новых точек будет уже равняться 99. Сколько чисел было отмечено на координатном луче?

**157.** Деревянный окрашенный куб с ребром 4 см распилили на кубические сантиметры. Сколько среди них оказалось кубиков, окрашенных с трех сторон?

**158.** Как-то в праздник Коля сказал Васе: «Позавчера мне было 12 лет, а в будущем году исполнится 15 лет». Могло ли такое быть?

**159.** Ребята пришли с рыбалки с уловом. Все вместе они поймали 121 рыбку, причем количество рыбок у каждого оказалось одинаковым. Сколько ребят ходило на рыбалку?

**160.** На волшебной яблоне выросли 3 банана и 4 апельсина. Если сорвать один из плодов — вырастет такой же; если одновременно 2 одинаковых плода — вырастет апельсин, а если одновременно сорвать 2 разных плода — вырастет банан. В каком порядке надо срывать плоды, чтобы на яблоне остался ровно один плод? Можно ли определить, какой это будет плод? Можно ли срывать плоды так, чтобы на яблоне ничего не осталось?

**161.** Карлсон очень любил сладкое. Налив себе в стакан сметаны, он добавил туда варенья из банки, но как только он перемешал сметану и варенье, то понял, что хочет есть одно варенье. Недолго думая, он перелил в банку столько варенья со сметаной, сколько взял из банки варенья. После перемешивания Карлсон задумался: чего же получилось больше: сметаны в банке с вареньем или варенья в стакане со сметаной? А как думаете Вы?

**162.** На школьной олимпиаде по шахматам выступило 6 команд, в каждой команде было по 5 учеников. Сколько всего партий было сыграно на олимпиаде, если каждая команда играла с каждой по одной игре?

**163.** Несколько одинаковых по численности бригад сторожей спали одинаковое число ночей. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем число бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 ночь?

**164.** Во дворе бегают 17 кошек и котят. Каждая кошка-мама вывела на прогулку не менее двух котят. Каким может быть наибольшее количество кошек-мам?

**165.** Девять ребят сидят за круглым столом. Можно ли раздать им конфеты таким образом, чтобы у двух рядом сидящих детей количество конфет отличалось на единицу?

# ПРИМЕРНЫЕ ТЕКСТЫ ШКОЛЬНЫХ ОЛИМПИАД

Дать готовые тексты для проведения школьных олимпиад нереально, так как учащиеся в разных школах и классах могут сильно отличаться по умственному развитию; учащиеся обучаются по разным системам, технологиям и учебникам. Поэтому и предлагается несколько вариантов для каждого класса, используя которые можно составить тексты школьной или классной олимпиады. Задания, которые не изучались, можно заменять другими. Используя данные тексты, учащиеся могут проверить свою готовность к участию в первом этапе Всероссийской олимпиады по математике.

## 5 класс

### Вариант 1

1. Сколько всего понедельников может быть в году?
2. На доске написано число 2719834105. Зачеркните в нем три цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке образовали как можно меньшее число.
3. Решите числовой ребус: $AAA - AA - A = BB$, где одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.
4. К Сергею пришли его одноклассники. Мать Сергея спросила у него, сколько пришло гостей. Сергей ответил: «Больше пяти», а стоявшая рядом сестренка сказала: «Больше четырех». Сколько было гостей, если известно, что один ответ верный, а другой нет?
5. У Карлсона в шкафу стоят 6 банок малинового варенья, 9 банок смородинного варенья, 7 банок вишневого и 24 банки клубничного варенья. Может ли Карлсон съесть все варенье, если каждый день он хочет съедать 2 банки варенья, но обязательно из разных ягод?

## Вариант 2

1. На листе бумаги нарисованы квадрат и прямоугольник. Квадрат имеет площадь, равную 36 см$^2$. Одна из сторон прямоугольника на 1 см больше стороны квадрата, а другая сторона на 3 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь этого прямоугольника.
2. Восстановите пример на сложение, где цифры слагаемых заменены звездочками: ** + **+** = 295.
3. В ящике 50 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и гири весом 1 кг за два раза отвесить 37 кг гвоздей?
4. Три пятиклассника купили в буфете 14 пирожков. При этом Александр купил в 2 раза меньше пирожков, чем Борис, а Витя — больше Александра, но меньше Бориса. Сколько пирожков купил каждый из учеников?
5. Дано 2021 число. Известно, что сумма любых четырех из них положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?

## Вариант 3

1. Десять рабочих должны были завершить работу за 8 дней. Когда они проработали 2 дня, выяснилось, что работу надо завершить через 2 дня. Сколько рабочих еще надо было нанять?
2. Сколько бабушек и дедушек было у ваших дедушек и бабушек?
3. Каждое из двух чисел не делится на10. Их произведение равно 1000. А чему может равняться их сумма?
4. Известно, что 4 карандаша дороже 5 тетрадей. Что дороже: 5 карандашей или 6 тетрадей?
5. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега три конфеты, а всем остальным ученикам — по одной. К концу четверти Саша заслужил 27 конфет, Боря — 28, а Витя — 31 конфету. Известно, что один из них пропустил ровно один урок

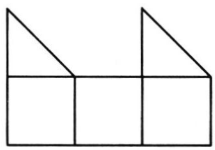
физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

## Вариант 4

1. Летели утки: одна впереди и две позади, одна позади и две впереди, одна между двумя и три в ряд. Сколько всего летело уток?
2. Расшифруйте два ребуса, в которых одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным буквам — разные цифры в обоих примерах.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \text{АБВ} \\ \text{ВВ} \end{array} \\ \hline \text{ААБ} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times \begin{array}{r} \text{АБВ} \\ \text{ВВ} \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} \text{АБВ} \\ \text{АБВ}\phantom{\text{В}} \end{array} \\ \hline \text{АГАВ} \end{array}$$

3. Докажите, что из трех целых чисел всегда можно найти два, сумма которых делится на два.
4. Найдите наибольшее целое число, дающее при делении на 13 с остатком частное 17.
5. Разрежьте фигуру, представленную на рисунке, на две равные фигуры.

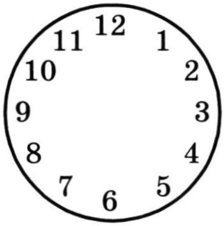


6. Из числа 12345678910111213 ... 5657585960 вычеркните 100 цифр так, чтобы оставшееся число стало наибольшим.

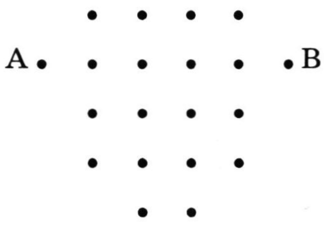
## Вариант 5

1. Вычеркните в числе 4000538 пять цифр так, чтобы оставшееся число стало наибольшим.

2. Для того чтобы разрезать металлическую балку на две части, нужно уплатить за работу 5 рублей. Сколько будет стоить работа, если балку нужно разрезать на 10 частей?
3. Парусник отправляется в плавание в понедельник в полдень. Плавание будет продолжаться 100 часов. Назовите день и час его возвращения в порт.
4. Разбейте циферблат часов (смотри рисунок) с помощью отрезков на три части таким образом, чтобы сумма чисел в каждой из этих частей была одной и той же.




5. На улице, став в кружок, беседуют четыре девочки: Аня, Валя, Галя, Надя. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье носит каждая из девочек?
6. Соедините точки А и В (смотри рисунок) линией длиной 19 см так, чтобы она прошла через все точки, изображенные на рисунке (расстояние между двумя соседними точками, расположенными горизонтально или вертикально, равно 1 см).



## Вариант 6

1. Сколько раз к наибольшему однозначному числу надо прибавить наибольшее двузначное число, чтобы получить наибольшее трёхзначное?
2. Расставьте скобки в записи $7 \cdot 9 + 12 : 3 - 2$ так, чтобы значение полученного выражения было равно: а) 23; б) 75.
3. Если Сережа поедет в школу автобусом, а обратно пойдет пешком, то он затратит на весь путь 1 ч 30 мин. Если же в оба конца он поедет автобусом, то затратит всего 30 мин. Сколько времени потратит Сережа на дорогу, если он пойдет пешком и в школу, и обратно?
4. Школьный драмкружок, готовясь к постановке отрывка из сказки А. С. Пушкина о царе Салтане, решил распределить роли между участниками:

   — Я буду Черномором, — сказал Юра.

   — Нет, Черномором буду я, — заявил Коля.

   — Ладно, — уступил ему Юра, — я могу сыграть Гвидона.

   — Ну, я могу стать Салтаном, — тоже проявил уступчивость Коля.

   — Я же согласен быть только Гвидоном! — произнес Миша.

   Желания мальчиков были удовлетворены. Как распределились роли?
5. У Ивана имеется деревянный параллелепипед с измерениями 6 см, 14 см, 18 см. Он распиливает его на кубики с ребром 1 см выкладывает из них бордюр протяжённостью 4 м вокруг своей коллекции игрушечных автомобилей. Хватит ли ему кубиков?

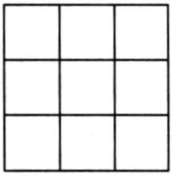
## Вариант 7

1. Запишите наибольшее и наименьшее семизначное число.
2. У щенят и утят вместе 44 ноги и 17 голов. Сколько щенят и сколько утят?

3. Если школьник купит 11 тетрадей, то у него останется 5 рублей. А на 15 тетрадей у него не хватает 7 рублей. Сколько денег у школьника?
4. Как, имея два сосуда вместимостью 5 л и 7 л, налить из водопроводного крана 6 л?
5. Как разрезать прямоугольник, длина которого 16 см, а ширина 9 см, на две равные части, из которых можно составить квадрат?

## Вариант 8

1. Вычислите: 101 101·999 – 101·999 999.
2. Разместите на трёх грузовиках 7 полных бочек, 7 бочек, наполненных наполовину, и 7 пустых бочек так, чтобы на всех грузовиках был одинаковый по массе груз.
3. На школьной викторине участникам предложили 20 вопросов. За правильный ответ ученику ставили 12 очков, а за неправильный списывали 10 очков. Сколько правильных ответов дал один из учеников, если он ответил на все вопросы и набрал 86 очков?
4. Сколько прямоугольников изображено на рисунке? Площадь каждого квадрата равна 1 кв. ед.

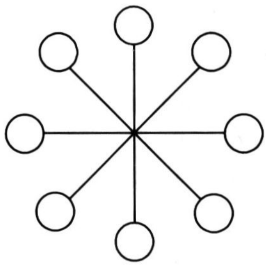


5. Сколько нулей стоит в конце произведения всех натуральных чисел от 10 до 25?

## Вариант 9

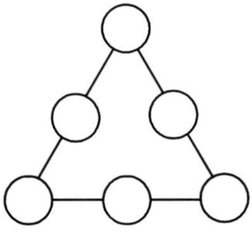
1. На каждой перемене между уроками Вася съедает по одной конфете. В каждый день недели было по 6 уроков с понедельника по пятницу. Сколько конфет съел Вася?

2. Внучке столько месяцев, сколько лет дедушке. Вместе им 91 год. Сколько лет дедушке и сколько лет внучке?
3. В трёх мешках находятся крупа, вермишель и сахар. На одном мешке написано «крупа», на другом — «вермишель», на третьем — «крупа или сахар». В каком мешке что находится, если содержимое каждого из них не соответствует записи?
4. Можно ли треугольник разрезать так, чтобы получилось три четырехугольника? (Если д», то выполните рисунок.)
5. Даны числа от 1 до 9. Расставьте их в кружки так, чтобы сумма трех чисел вдоль каждой линии (смотри рисунок) была равна 15. Какое число должно быть в центре?

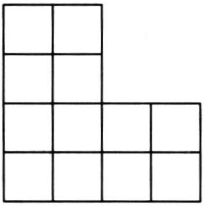


## Вариант 10

1. В шести кружках, расположенных в форме равностороннего треугольника (смотри рисунок), расставьте числа 31, 32, 33, 34, 35, 36 так, чтобы сумма чисел на всех трех сторонах треугольника была одинаковой и равнялась 100.



2. Чашка и блюдце вместе стоят 25 рублей, а 4 чашки и 3 блюдца стоят 88 рублей. Найдите цену чашки и цену блюдца.
3. На скотном дворе гуляли гуси и поросята. Мальчик сосчитал количество голов, их оказалось 30; а затем он сосчитал количество ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на скотном дворе?
4. Разделите фигуру (смотри рисунок) на четыре равные фигуры.



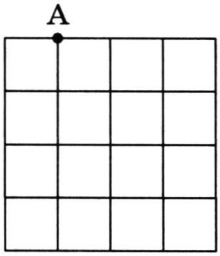
5. Мачеха, уезжая на бал, дала Золушке мешок, в котором были перемешаны мак и просо, и велела перебрать их. Когда Золушка уезжала на бал, она оставила три мешка: в одном — просо, в другом — мак, а в третьем — еще не разобранная смесь. Чтобы не перепутать мешки, Золушка к каждому из них приклеила таблички: «Мак», «Просо», «Смесь». Мачеха вернулась с бала первой и нарочно поменяла местами таблички так, чтобы на каждом мешке оказалась неправильная запись. Ученик Феи успел предупредить Золушку, что теперь ни одна надпись на мешках не соответствует действительности. Тогда Золушка достала только одно-единственное зёрнышко из одного мешка и, посмотрев на него, сразу догадалась, где что лежит. Как она это сделала?
6. Найдите сумму: $1 + 2 + 3 + \ldots + 111$.

## Вариант 11

1. Найдите среди чисел вида $3a + 1$ первые три числа, которые кратны 5.

**2.** Малыш может съесть 600 г варенья за 6 мин., а Карлсон — в 2 раза быстрее. За какое время они съедят это варенье вместе?

**3.** Квадрат разрезали по ломаной линии, состоящей из трех равных отрезков. Начало разреза в точке А (смотри рисунок). Получили две равные фигуры. Как это сделали?




**4.** Как с помощью семилитрового ведра и трехлитровой банки налить в кастрюлю ровно 5 литров воды?

**5.** Догадайся, какие цифры надо поставить вместо звездочек.

$$\begin{array}{r} **5 \\ \times\quad 4* \\ \hline 3** \\ +\ *2**\phantom{} \\ \hline 1**** \end{array}$$

**6.** В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

## Вариант 12

**1.** На прямой линии посажено 10 кустов так, что расстояние между любыми соседними кустами одно и то же. Найдите это расстояние, если расстояние между крайними кустами 90 дм.

2. Выразите $x$ из формулы $a = (x + 8) : 9$.
3. Когда велосипедист проехал $\frac{2}{3}$ пути, лопнула шина. На остальной путь пешком он затратил вдвое больше времени, чем на велосипедную езду. Во сколько раз велосипедист ехал быстрее, чем шел?
4. В записи 1*2*3*4*5 замените «*» знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 100.
5. Было 9 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на три части. Всего стало 15 листов. Сколько листов бумаги разрезали?
6. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько страниц в этой книге?

## Вариант 13

1. Запишите число 2016 с помощью одиннадцати двоек и арифметических операций.
2. Попрыгунья Стрекоза половину времени каждых суток красного лета спала, третью часть времени каждых суток танцевала, шестую часть — пела. Остальное время она решила посвятить подготовке к зиме. Сколько часов в сутки Стрекоза готовилась к зиме?
3. Найдите значение выражения.

$$26 \cdot 25 - 25 \cdot 24 + 24 \cdot 23 - 23 \cdot 22 +$$
$$+ 22 \cdot 21 - 21 \cdot 20 + 20 \cdot 19 - 19 \cdot 18 +$$
$$+ 18 \cdot 17 - 17 \cdot 16 + 16 \cdot 15 - 15 \cdot 14$$

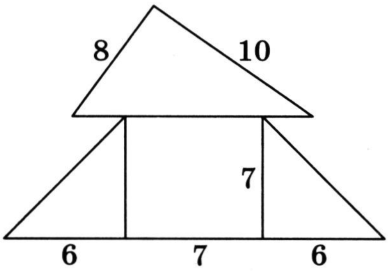
4. Восстановите запись.

$$\begin{array}{r} {*}2{*}3 \\ \times \quad {*}{*} \\ \hline {*}{*}{*}87 \\ +\ {*}{*}{*}{*}{*}\phantom{0} \\ \hline 2{*}004{*} \end{array}$$

5. В семье четверо детей, им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера, Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на 3?
6. Приехало 100 туристов. Из них 10 человек не знали ни немецкого, ни французского языка, 75 знали немецкий язык и 83 знали французский. Сколько туристов знали французский и немецкий языки?

## Вариант 14

1. Решите уравнение: $3 + \dfrac{210}{x-3} = 33$.
2. Вычислите площадь фигуры, изображенной на рисунке.




3. Из 18 одинаковых кубиков сложили прямоугольный параллелепипед высотой в три кубика. Найдите площадь поверхности параллелепипеда, если площадь поверхности одного кубика равна 19 см$^2$.
4. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 26. Найдите уменьшаемое.
5. Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет и отдал их второму. Потом второй проиграл половину своих монет и отдал их первому. Потом снова первый проиграл половину своих монет и отдал их второму. В итоге у первого пирата оказалось 15 монет, а у второго 33. Сколько монет первоначально было у каждого из пиратов?

## Вариант 15

1. 3 ученика делают 3 самолетика за 3 минуты. Сколько учеников сделают 9 самолетиков за 9 минут?
2. Рыбаки поймали 19 рыбин массой 100 г, 200 г, ..., 1900 г. Можно ли весь улов поделить поровну между 10 рыбаками? Если можно, то как? Если нет, то почему?
3. Средний возраст 11 игроков футбольной команды 22 года. Когда одного игрока удалили с поля, средний возраст оставшихся игроков стал 21 год. Сколько лет удаленному игроку?
4. Цена билета на стадион была 159 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на $50\%$, а сбор увеличился на $25\%$. На сколько снизили цену билета?
5. Напишите в строку пять чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была отрицательной, а сумма всех чисел положительной.

## Вариант 16

1. Замените буквы $A$, $B$, $C$ и $D$ цифрами так, чтобы получилось верное равенство.

$$AAAA + BBB - CC - D = 2015.$$

($A$, $B$, $C$, $D$ означают разные цифры.)

2. Внуку столько же месяцев, сколько лет бабушке. Бабушке с внуком вместе 52 года. Сколько лет бабушке и сколько лет внуку?
3. Петя провёл три прямые линии и отметил на них 6 точек. Оказалось, что на каждой прямой он отметил 3 точки. Покажите, как он это сделал.
4. Три охотника варили кашу. Один положил 2 кружки крупы, второй — 1 кружку, а у третьего крупы не было. Кашу же они съели все поровну. Третий охотник и говорит: «Спасибо за кашу! — и вот вам задача: Я даю вам

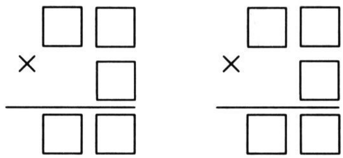
5 патронов. Как поделить эти патроны в соответствии с вашим вкладом в мою порцию каши?»

**5.** Четверо девочек выбирали водящую с помощью считалки. Тот, на кого падало последнее слово, выходил из круга, и счет повторялся вновь. Считающая девочка каждый круг начинала с себя и в результате стала водящей, причем счет каждый раз кончался перед ней. Какое наименьшее число слов могло быть в считалке?

## 6 класс

### Вариант 1

**1.** Впишите в квадраты цифры от 0 до 9 (без повторений) так, чтобы получилось два верных примера на умножение. Найдите все возможные способы.



**2.** Придумайте семизначное число, у которого по крайней мере три разные цифры, и которое делится на каждую из них.

**3.** Сколько воды надо добавить к 120 г 15%-ного раствора соли, чтобы получить 5%-ныйо раствор соли?

**4.** Сумма пяти чисел равна 300. Докажите, что их произведение не может оканчиваться на 2019.

**5.** Тринадцать шестиклассников встали в круг. Они договорились, что некоторые из них всегда говорят правду, а все другие всегда лгут. Каждому из них раздали по две карточки, и каждый сказал: «У меня карточки одного цвета». После этого каждый передал обе свои карточки своему соседу справа. Могли ли они все после этого сказать: «У меня теперь карточки разных цветов»?

## Вариант 2

1. Расставьте скобки в выражении $1:2:3:4:5 = 30$ так, чтобы получилось верное равенство.
2. Запишите числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 в строку так, чтобы из любых двух соседних чисел одно делилось бы на другое.
3. Сергей сказал, что у него братьев и сестер поровну, а Лена сказала, что у нее братьев в три раза больше, чем сестер. Сколько детей в семье, если Сергей и Лена — брат и сестра?
4. У весов сдвинута стрелка, то есть они всегда показывают на фиксированное число граммов больше (или меньше), чем истинный вес. Когда на весы положили дыню, весы показали 4 кг. Когда положили арбуз, весы показали 6 кг. Когда взвесили арбуз и дыню, весы показали 9 кг. Сколько кг покажут весы, если на них поставить гирю в 2 кг?
5. Два натуральных числа в сумме дают 2019. Вася увеличил каждое из них на 25 и перемножил полученные числа. Он получил, что произведение также оканчивается на 2019. Докажите, что Вася ошибся.

## Вариант 3

1. В выражении $2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5$ расставьте скобки так, чтобы получилось верное равенство.
2. Восемь спичек уложите так, чтобы образовалось 8 треугольников, два квадрата и восьмиугольник (все в одной фигуре).
3. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 2020. Чему равно уменьшаемое?
4. К новогоднему празднику школа закупила для каждого ученика по одной шоколадке. Но шоколадки продаются в упаковках по 20 шоколадок или по 24. Если покупать шоколадки в упаковках по 20 шоколадок, то понадобится на 5 упаковок больше, чем упаковок по 24 шоколадки. Сколько учеников в школе?

5. В 6 А классе обучаются 22 ученика. В первой четверти они по трое дежурили по классу. Могло ли так получиться, что в некоторый момент каждый из учеников отдежурил с каждым ровно по одному разу?

## Вариант 4

1. Запишите число 2016 с помощью двенадцати троек и арифметических операций.
2. В турнире по олимпийской системе (проигравший выбывает) участвуют 32 боксера. Какое наименьшее количество боев надо провести, чтобы выявить победителя?
3. За билетами на концерт выстроилась очередь. Пока билеты не начали продавать, в каждый промежуток между стоящими в очереди успело встать по одному человеку. Билеты все не продавали, и во все промежутки снова встало по одному человеку. Наконец билеты стали продавать, все стоящие в очереди купили по одному билету. Сколько стояло первоначально людей в очереди, если всего было продано 125 билетов?
4. В записи 52*2* замените звездочки цифрами так, чтобы полученное число делилось на 36. Укажите все возможные решения.
5. Сколько воды надо добавить к 600 г жидкости, содержащей 40% соли, чтобы получился 12%-ный раствор этой соли?
6. Олег, Игорь и Аня учатся в 6 классе. Среди них есть лучший математик, лучший шахматист и лучший художник. Известно, что:
   а) лучший художник не нарисовал своего портрета, но нарисовал портрет Игоря;
   б) Аня никогда не проигрывала мальчикам в шахматы.

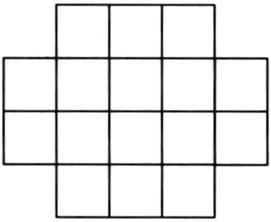
   Кто в классе лучший математик, лучший шахматист и лучший художник?

## Вариант 5

1. Поставьте вместо звездочек цифры.

$$
\begin{array}{r}
59{,}27 \\
+\quad **{,}45 \\
78{,}*3 \\
\hline
182{,}*1
\end{array}
$$

2. Выразите число 16 с помощью четырех пятерок, соединяя их знаками действий.
3. Разместите восемь козлят и девять гусей в пяти хлевах так, чтобы в каждом хлеве были и козлята, и гуси, а число их ног равнялось 10.
4. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке на три части, не являющиеся квадратами, так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат.



5. На столе стоят три одинаковых ящика, в одном находятся 2 черных шарика, в другом — 1 чёрный и 1 белый шарик, в третьем — два белых шарика. На ящиках написано: «2 белых», «2 чёрных», «чёрный и белый». При этом известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Как, вынув только один шарик, определить правильное расположение надписей?

## Вариант 6

1. Используя каждую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу, а также знаки арифметических действий, получите число 2016. Из цифр можно составлять числа.

2. Найдите все дроби со знаменателем 15, которые больше $\frac{8}{9}$ и меньше 1.
3. Переложите одну из семи спичек, изображающих число $\frac{10}{7}$, записанное римскими цифрами (т.е. $\frac{\text{VII}}{\text{X}}$), так, чтобы получившаяся дробь равнялась $\frac{2}{3}$.
4. Возраст старика Хоттабыча записывается числом с различными цифрами. Об этом числе известно следующее:
   – если первую и последнюю цифру зачеркнуть, то получится двузначное число, которое при сумме цифр, равной 13, является наибольшим;
   – первая цифра больше последней в 4 раза.

   Сколько лет старику Хоттабычу?
5. *Древнегреческая задача.*

   — Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

   — Вот сколько, — ответил Пифагор. — Половина изучает математику, четверть — природу, седьмая часть проводит время в размышлении и, кроме того, есть еще три женщины.

   Сколько всего учеников посещает школу Пифагора?

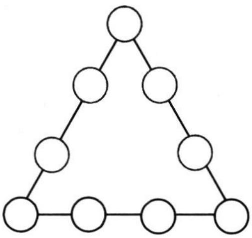
## Вариант 7

1. 12-метровое бревно распилили на 3-метровые столбики за 12 минут. За какое время такое же бревно можно распилить на метровые чурбаки?
2. Масса 10 слив равна массе 3 яблок и 1 груши, а масса 6 слив и 1 яблока равна массе 1 груши. Сколько слив надо взять, чтобы их масса равнялась массе 1 груши?
3. Некоторый товар стоил 500 рублей. Затем цену на него увеличили на 10%, а затем уменьшили на 10%. Какой стала цена в итоге?

4. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.
5. В летний лагерь приехали отдыхать три друга: Миша, Володя и Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из следующих фамилий: Иванов, Семенов, Герасимов. Миша — не Герасимов. Отец Володи — инженер. Володя учится в 6 классе. Герасимов учится в 5 классе. Отец Иванова — учитель. Какая фамилия у каждого из трех друзей?

## Вариант 8

1. Даны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Расставьте их так, чтобы сумма их на каждой стороне треугольника (смотри рисунок) была равна 20.



2. Вычислите наиболее удобным способом.

$$\frac{74\cdot 147-73}{73\cdot 147+74}$$

3. Решите уравнение.

$$\left(|x|+\frac{3}{11}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}x+15\right)=0$$

4. Школьник прочитал книгу за три дня. В первый день он прочитал 0,2 всей книги и еще 16 страниц, во второй день — 0,3 остатка и еще 20 страниц. В третий день 0,75 остатка и последние 30 страниц книги. Сколько страниц в книге?

5. Инопланетяне сообщили жителям Земли, что в системе их звезды три планеты: А, Б, В. Они живут на второй планете. Далее передача сообщения ухудшилась из-за помех, но было принято еще два сообщения, которые, как установили ученые, оказались оба ложными:

а) А — не третья планета от звезды;

б) Б — вторая планета.

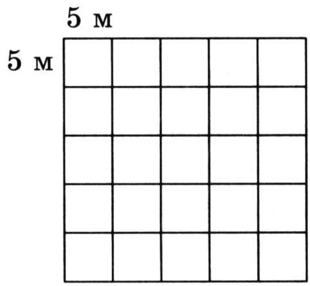
Какими планетами от звезды являются А, Б, В?

## Вариант 9

1. Сколько всего существует трехзначных чисел?
2. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвертой, вторая — с пятой, третья — с шестой. Докажите, что это число кратно 7, 11, 13.
3. Расшифруйте запись. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры.

$$\begin{array}{r} \text{УДАР} \\ +\;\text{УДАР} \\ \hline \text{ДРАМА} \end{array}$$

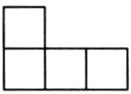
4. Огород квадратной формы 25 × 25 м нужно разделить несколькими кусками сетки на пять клетчатых участков одинаковой площади. Это легко сделать, имея 100 м сетки (смотри рисунок). А хватит ли для этой цели 80 м сетки?



5. В школьной математической олимпиаде принимали участие 9 учеников шестого класса. За каждую решённую задачу ученик получал 2 очка, а за каждую нерешённую задачу с него списывалось 1 очко. Всего было предложено 10 задач. Докажите, что среди участников олимпиады из шестого класса было по крайней мере, два ученика, набравших одинаковое число очков. (Считается, что ученик, набравший больше штрафных очков, чем зачётных, набрал ноль очков.)

## Вариант 10

1. Первый раз Дима на рыбалку поехал на велосипеде. Рыбы поймал много, поэтому обратно шёл пешком. На весь путь он затратил 40 минут. Во второй раз он до реки туда и обратно ехал на велосипеде и затратил 20 минут. Сколько времени Диме потребуется, чтобы пройти путь в оба конца пешком?
2. Разрежьте клетчатый прямоугольник размером $5 \times 8$ на фигурки из четырех клеток вида.



3. На окраску куба размерами $2 \times 2 \times 2$ требуется 2 грамма краски. Сколько краски потребуется на покраску куба размером $6 \times 6 \times 6$?
4. Маша купила в магазине тетрадей за 13 рублей и блокноты по 15 рублей. За всю покупку она заплатила ровно 239 рублей. Сколько тетрадей и блокнотов купила Маша?
5. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Встретились три островитянина: Петя, Вася и Толя. Петя сказал: «Мы все лжецы». Вася на это ему ответил: «Нет, только ты». Может ли Толя быть лжецом?

## Вариант 11

**1.** Решите уравнение.

$$\frac{12{,}3}{2{,}324}=\frac{x-4}{46{,}48}$$

**2.** Произведение двух взаимно простых чисел равно 3232. Чему равно наименьшее общее кратное этих чисел? Найдите эти числа.

**3.** Сравните числа $x$ и $y$, если 13,5% числа $x$ равны 12,5% числа $y$.

**4.** Прямоугольник разделен двумя отрезками на четыре прямоугольника, площади трех из которых 2 см$^2$, 4 см$^2$, 6 см$^2$ (смотри рисунок). Найдите площадь прямоугольника.

| | |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 6 | |

**5.** Илья решил отметить свой очередной день рождения. Мама спросила Илью: «Сколько будет гостей?» Илья ответил, что будет больше 7 человек. Стоящий же рядом брат Миша сказал, что будет больше 6 гостей. Сколько всего гостей пригласил на день рождения Илья, если известно, что из двух ответов один верный, а другой — нет?

## Вариант 12

**1.** В стаде 8 овец. Первая съест копну сена за 1 день, вторая — за 2 дня, третья — за 3 дня, ..., восьмая — за 8 дней. Кто быстрее съест копну сена: две первые овцы или все остальные вместе?

**2.** В начале забега на 1000 м вперед вырвался Андрей, вторым шел Борис, а третьим — Виктор. За время бега Андрей и Борис менялись местами 6 раз, Борис и

Виктор — 5 раз, Андрей и Виктор — 4 раза. В каком порядке прибежали спортсмены? Почему?

3. В классе девочек, которым нравится математика, столько же, сколько и мальчиков, которым не нравится математика. Кого в классе больше: учеников, которым нравится математика, или мальчиков?
4. Придумайте натуральное число, которое делится на 2014 и сумма его цифр также делится на 2014.
5. Имеется 10 мешков с монетами по 100 монет в каждом мешке. Известно, что в девяти из них настоящие монеты весом 10 г каждая, а в одном фальшивые монеты весом 9 г каждая. Весы показывают общий вес положенных на них монет. За какое наименьшее число взвешиваний можно определить, в каком мешке фальшивые монеты?

# ТЕКСТЫ МУНИЦИПАЛЬНЫХ ОЛИМПИАД ПО МАТЕМАТИКЕ

В материалах, которые приведены ниже, приведены тексты муниципальных олимпиад для учащихся 5–6 классов, которые проводились в г. Коряжме Архангельской области в 1999–2004 гг., а также тексты, составленные автором позже на основании рекомендаций Центральной предметно-методической комиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## 5 класс

### Вариант 1

1. Из двух станций, расстояние между которыми 25,6 км, одновременно в одном направлении вышли два поезда. Впереди двигался поезд со скоростью 58,4 км/ч, и через 4 часа его догнал второй поезд. Найдите скорость второго поезда.
2. До царя Гороха дошла молва, что кто-то из троих богатырей убил Змея Горыныча. Царь приказал всем троим явиться ко двору, и молвили они:
   Илья Муромец: «Змея убил Добрыня Никитич».
   Добрыня Никитич: «Змея убил Алеша Попович».
   Алеша Попович: «Я убил змея».
   При этом оказалось, что один из них сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?
3. Расшифруйте следующую запись примера на сложение, в котором разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым буквам — одинаковые.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{СПОРТ}\\ \text{СПОРТ}\end{array}\\ \hline \text{КРОСС}\end{array}$$

4. Лев поручил лисе посчитать, сколько в лесу медведей, зайцев и волков. После подсчета лиса доложила, что всего медведей, зайцев и волков в лесу 100, но волков на 25 больше, чем медведей; зайцев на 30 больше, чем волков. Один из зайцев, услышав такой ответ, расхохотался и сказал, что такого быть не может. Кто прав: лиса или заяц и почему?
5. Вычислите.
$8908908 9089 \cdot 7373 - 7307307 3073 \cdot 8989$

## Вариант 2

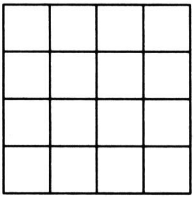
1. Найдите значение выражения.
$2000 - 1999 + 1998 - 1997 + 1996 - ... + 2 - 1$
2. Расшифруйте пример.

$$\begin{array}{r} \text{А} \\ + \quad \text{ББ} \\ \text{А} \\ \hline \text{ССС} \end{array}$$

3. Разделите прямоугольник $3 \times 4$ на две равные части. Найдите как можно больше способов. Разрезать можно лишь по стороне квадрата $1 \times 1$, и способы считаются разными, если получаемые фигуры не будут равными при каждом способе.
4. Илья Муромец, Добрыня Никитич и Алеша Попович вступили в бой с великанами. Получив по три удара богатырскими палицами, великаны обратились в бегство. Больше всего ударов нанес Илья Муромец — 7, меньше всех Алеша Попович — 3. Сколько всего было великанов?
5. Митя, Сеня, Толя, Юра и Костя пошли на концерт и встали в очередь. Если бы Митя встал посередине очереди, то он бы оказался между Сеней и Костей, а если бы Митя встал в конец очереди, то рядом с ним мог быть Юра, но Митя встал впереди всех своих товарищей. Кто за кем стоит?

## Вариант 3

1. Вычислите.
$$\frac{2004-2003+2002-2001+\ldots+2-1}{2004\cdot 45+55\cdot 2004}$$
2. Для нумерации книги для детей понадобилось 204 цифры. Сколько страниц в книге, если нумерация книги начинается с первой страницы?
3. Разрежьте квадрат размером 4 × 4 (смотри рисунок) на 4 равные фигуры. Разрезать можно лишь по стороне квадрата 1 × 1, и способы считаются разными, если полученные фигуры не будут равными при каждом способе.



4. В квартирах № 1, № 2, № 3 жили три котенка: белый, черный и рыжий. В квартирах № 1 и № 2 жил не черный котенок. Белый котенок жил не в квартире № 1. В какой квартире жил каждый котенок?
5. Папа купил на праздник своим детям коробку конфет. Федя взял половину конфет и половинку одной конфеты, Аня взяла половину остатка и еще полконфеты. Коля взял половину нового остатка и еще полконфеты. Маша взяла половину оставшихся конфет и еще полконфеты. После этого в коробке осталась одна конфета. Сколько конфет было в коробке?
6. Когда у рыбака спросили, как велика пойманная им щука, он сказал: «Я думаю, что хвост ее — 1 кг, голова — столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище — сколько голова и хвост вместе». Сколько весит щука?

## Вариант 4

1. Даны три сосуда: первый вместимостью 3 л, второй — 5 л, третий — 20 л. Первые два сосуда пустые, третий заполнен водой. Как с помощью нескольких переливаний налить во второй сосуд 4 л воды? (При переливаниях разрешается наливать в сосуд ровно столько воды, сколько в нем помещается, либо выливать всю воду из одного сосуда в другой, если она в него помещается.)
2. Семья состоит из трех человек: отца, матери и дочери. В настоящее время сумма их возрастов составляет 77 лет, а 10 лет назад эта сумма составляла 45 лет. Сколько лет сейчас матери, если она старше дочери на 19 лет?
3. Проезжая по лесной дороге, Иван-царевич встретил медведя, волка и лису. Медведь всегда говорит правду, лиса всегда лжет, а волк чередует правду и ложь, всегда начиная с правды. Звери сказали Ивану-царевичу по два предложения.

   Первый: «Ты коня спасешь», «Сам ты погибнешь».

   Второй: «Ты останешься целым-невредимым», «Коня спасешь».

   Третий: «Ты целым останешься», «Коня ты потеряешь».

   Определите, какому зверю принадлежит каждый ответ и что ждёт Ивана-царевича впереди?
4. Как разрезать прямоугольник, длина которого 16 см, а ширина 9 см, на две равные части, из которых можно составить квадрат?
5. Могут ли десять игрушек ценой в 105, 211 и 233 рубля стоить в сумме 2017 рублей?

## Вариант 5

1. Запишите число 2016 с помощью двенадцати четверок и арифметических операций.

2. Внутренние покои султана состоят из 100 одинаковых квадратных комнат, расположенных в виде квадрата $10 \times 10$. Если у двух комнат есть общая стена, то в ней обязательно есть ровно одна дверь. Сколько дверей во дворце?
3. Ширина прямоугольного параллелепипеда в 4 раза меньше высоты, а высота меньше длины в 2 раза. Вместе длина и высота составляют 60 см. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда.
4. В примере цифры заменены буквами, причем одинаковые цифры — одинаковыми буквами. Расшифруйте пример.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \text{ОДИН} \\ \text{ОДИН} \end{array} \\ \hline \text{МНОГО} \end{array}$$

5. Как набрать из озера 8 литров воды, имея девятилитровое ведро и пятилитровое ведро?

## Вариант 6

1. Запишите подряд 21 пятёрку: 5555...5. Поставьте между некоторыми цифрами знаки арифметических действий так, чтобы в результате получилось число 2220.
2. В некотором месяце оказалось, что три воскресенья выпали на четное число. Определите, на какой день недели пришлось в этом месяце 26-е число?
3. Два крестьянина вышли пешком из деревни в город. Когда они прошли $\frac{1}{3}$ пути, то сели отдохнуть. «Сколько нам еще осталось идти?» — спросил один крестьянин у другого. «Нам осталось идти на 8 км больше, чем мы прошли», — был ответ другого крестьянина. Каково расстояние от города до деревни?
4. Куб с объемом в 27 дм$^3$ состоит из маленьких кубиков со стороной 1 см. Какой будет длина цепочки, составленной из всех имеющихся маленьких кубиков?

5. В трех кучках лежат 11, 7, 6 спичек соответственно. Разрешается перекладывать из одной кучки в другую столько спичек, сколько там уже есть. Как за три операции сравнять число спичек во всех кучках?

### Вариант 7

1. В примере на сложение цифры заменили буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными. Получилось АБББ + А = ВГГГ. Восстановите пример. Объясните, почему это можно сделать только одним способом.
2. В некоторой стране 24 города, при этом каждые два города соединены авиалинией. Сколько всего авиалиний в этой стране?
3. Напишите самое маленькое четырехзначное число, которое при делении на 6 дает в остатке 5.
4. Ширина прямоугольного параллелепипеда в 4 раза меньше высоты, а высота меньше длины в 2 раза. Вместе длина и высота составляют 60 см. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда.
5. На острове, где живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, путешественник встретил двух туземцев А и Б. Туземец А произнес фразу: «По крайней мере один из нас (А или Б) — лжец». Можно ли определить, кем является А и кем является Б (рыцарем или лжецом)?

### Вариант 8

1. Как разрезать квадрат со стороной 30 м 30 см на 2020 одинаковых треугольников?
2. Незнайка утверждает, что он придумал пример на деление, в котором последние цифры делимого, делителя, неполного частного и остатка соответственно равны 1, 3, 5 и 7. Прав ли Незнайка?
3. Как с помощью семилитрового ведра и трехлитровой банки налить в кастрюлю ровно 5 литров воды?

4. За весну Карлсон похудел на 25%, затем за лето прибавил в весе 20%. За осень снова похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел или поправился Карлсон за год? На сколько процентов?

5. В таблице $4 \times 4$ за один ход можно поменять все знаки в любой строке или столбце на противоположные. Можно ли таким образом из таблицы, приведенной на рисунке, получить таблицу из одних плюсов?

| | | | |
|---|---|---|---|
| + | + | + | − |
| − | − | − | + |
| + | + | + | − |
| − | − | − | + |

## Вариант 9

1. На острове Буяне находится четыре королевства, причем каждое граничит с тремя остальными. Нарисуйте карту острова так, как Вы ее представляете.

2. Ваня купил 4 книги для подготовки к олимпиаде по математике. Все книги, кроме первой, стоили в сумме 348 руб., без второй — 296 руб., без третьей — 292 руб., а без четвертой — 288 руб. Сколько стоит каждая книга?

3. Из 50 учащихся 5-х классов 35 посещают кружки; 26 посещают спортивные секции, при этом 18 учащихся ходят и на кружки, и на секции. Сколько учащихся не посещают ни кружков, ни секций?

4. Могут ли десять игрушек ценой в 115, 213 и 237 рублей стоить в сумме 2019 рублей?

5. На первом заседании нового состава городской Думы было 80% списочного состава, а на втором всего 70%. Сколько процентов депутатов присутствовало на обоих заседаниях?

## Вариант 10

1. С помощью четырех четверок и знаков действий запишите все цифры от 0 до 9.
2. Комнаты отеля пронумерованы тремя цифрами. Первая цифра означает этаж, а следующие две — номер комнаты. Например, 116 означает 16-ю комнату на первом этаже. В отеле 4 этажа, они пронумерованы от 1 до 4, с 25 комнатами, пронумерованными от 101 до 125 на первом этаже и аналогичным образом — на остальных. Сколько раз при нумерации комнат использовали цифру 3?
3. Если бы школьник купил 11 тетрадей, то у него осталось бы 50 рублей. А на 15 тетрадей у него не хватает 70 рублей. Сколько денег было у школьника?
4. Как разрезать прямоугольник длиной в 18 см и шириной 8 см на наименьшее число прямоугольников и сложить из них квадрат?
5. На листе бумаги нарисован круглый циферблат часов с 60 точками, обозначающими минуты. Двое поочередно проводят отрезки прямых, соединяющих две произвольные точки. Не разрешается проводить отрезок, пересекающий другие отрезки, но они могут иметь разные концы. Проигрывает тот, кто не сумеет провести отрезок. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или партнер?

# 6 класс

## Вариант 1

1. Решите уравнение.

$$-\frac{7}{9} : 0,6 = x : 5,4$$

**2.** Дядя Федор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин сидят на скамейке. Если Шарик, сидящий справа от всех, сядет между дядей Федором и котом, то кот окажется крайним слева. В каком порядке они сидят?

**3.** В классе 30 учеников. Найдется ли месяц, в котором отмечают свои дни рождения не меньше, чем 3 ученика этого класса?

**4.** В рисе содержится $75\%$ крахмала, а в ячмене — $60\%$. Сколько надо взять ячменя, чтобы в нем содержалось бы столько крахмала, сколько его содержится в 9 кг риса?

**5.** Какой цифрой оканчивается число $2^{1999}$?

## Вариант 2

**1.** Вычислите.

$$\frac{666666 \cdot 666666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1} - \frac{777777 \cdot 777777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}.$$

**2.** Сережа пошел с отцом в тир. Уговор был такой: Сережа делал 5 выстрелов и за каждое попадание в цель получал право сделать еще 2 выстрела. Сережа сделал 17 выстрелов. Сколько раз он попал в цель?

**3.** Кросс осенний вспоминая,
Спорят белки два часа:
Победил в забеге заяц,
А второй была лиса!
— Нет, — твердит другая белка. —
Ты мне шутки эти брось.
Заяц был вторым, конечно,
Первым был, я помню, — лось.
— Я, — промолвил филин важный, —
В спор чужой не стану лезть.
Но у вас в словах у каждой по одной ошибке есть.
Белки фыркнули сердито.

Неприятно стало им.
Вы уж, взвесив всё, решите,
Кто был первым, кто вторым.

4. Можно ли выбрать из таблицы 5 чисел, сумма которых делилась бы на 20?

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 3 | 3 | 3 |
| 5 | 5 | 5 |
| 7 | 7 | 7 |

5. Буратино отпил полчашки черного кофе и долил её молоком. Потом он отпил $\frac{1}{3}$ чашки и долил ее молоком. Потом он отпил $\frac{1}{6}$ чашки и долил ее молоком. Наконец, Буратино допил содержимое чашки до конца. Чего Буратино выпил больше: кофе или молока?

6. В ряд выписано 12 девяток: 999999999999. Поставьте между ними знаки: +, –, :, ×, скобки, так чтобы получилось число 2000. Представьте как можно больше способов.

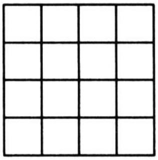
## Вариант 3

1. Запишите подряд 22 пятёрки: 5555...5. Поставьте между некоторыми цифрами знаки арифметических действий так, чтобы в результате получилось число 2004.

2. Восстановите пропущенные цифры в примере:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} *0*3 \\ *** \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 2**** \\ ***6\phantom{*} \end{array} \\ \hline 621**1 \end{array}$$

3. Разрежьте квадрат размером $4 \times 4$ (см. рис.) на 4 равные фигуры. Резать можно только по сторонам клеточек. Найдите как можно больше способов.



4. Мама купила яблок и сказала детям, чтобы они, вернувшись из школы, разделили их поровну. Первым пришел Андрей, взял треть яблок и ушел. Вторым пришел Борис, взял треть оставшихся яблок и ушел. Затем вернулась из школы Валя, она взяла 4 яблока — треть от числа яблок, которые она увидела. Сколько яблок оставила мама?
5. В пакете 9 кг крупы. Как при помощи чашечных весов и одной 200-граммовой гири отвесить 2 кг крупы, если разрешается сделать только три взвешивания.
6. В древней рукописи приведено описание города, расположенного на 8 островах. Острова соединены между собой и с материком мостами. На материк выходят 5 мостов; на 4 островах берут начало по 4 моста, на 3 островах берут начало по 3 моста и на один остров можно пройти только по одному мосту. Может ли быть такое расположение мостов?

## Вариант 4

1. Вместо звездочек поставьте такие знаки действий, чтобы равенство оказалось верным: $(\frac{9}{20} * 0{,}05) * 1{,}4 = \frac{2}{7}$.
2. Замените букву О на цифру, звездочки на арифметические действия (необязательно одинаковые) и расставьте скобки так, чтобы равенство ООО *О*О*О*О*О = 2016 было верным.

3. Два ученика одновременно вышли из дома в школу. Петя делает шаги на 10 % короче, чем Вася, но на 10 % чаще. Который из учеников раньше придет в школу?
4. Можно ли прямоугольник размером $35 \times 23$ разрезать без остатка на прямоугольники размером $5 \times 7$? Если можно, то как? Если нельзя, то почему?
5. На столе лежат 8 монет, при этом 3 из них вверх орлом, а 5 — вверх решкой. Можно ли все монеты положить вверх орлом, если одновременно переворачивать по две монеты?

## Вариант 5

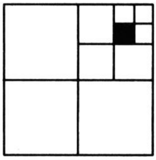
1. Сколько существует двузначных чисел, у которых все цифры четные?
2. Учащиеся 6 класса отправились в поход. 16 участников взяли с собой бутерброды с колбасой. 13 — бутерброды с сыром, а 9 человек взяли и бутерброды с сыром, и бутерброды с колбасой. Сколько всего туристов пошло в поход?
3. Шестиклассники решили летом пойти в поход. Первоначально девочек было 25% от общего числа участников. Но одна девочка передумала, и вместо нее пришел мальчик. Тогда число девочек стало составлять уже 20% от числа всех участников. Сколько девочек и сколько мальчиков участвовало в походе?
4. Замените буквы на цифры: $ПА^2 = ПИЛА$. Укажите все решения.
5. Хозяин имел двор квадратной формы. В четырех углах двора он посадил по дереву. Прошло время, и он решил увеличить площадь двора в 2 раза, но так, чтобы двор сохранил форму квадрата и деревья росли бы на линии ограды. Покажите на рисунке, как он это должен сделать.
6. По кругу записаны 2015 натуральных чисел. Докажите, что найдутся 2 соседних числа, сумма которых чётна.

## Вариант 6

**1.** Расшифруйте запись. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \text{КОКА} \\ \underline{\text{КОЛА}} \end{array} \\ \text{ВОДА} \end{array}$$

**2.** Какая часть квадрата (смотри рисунок) закрашена?



**3.** Один купец прошел через три города, и взыскали с него в первом городе пошлины половину и треть имущества, и во втором городе половину и треть (с того, что осталось), и в третьем городе снова взыскали половину и треть (с того, что осталось). Когда он прибыл домой, у него осталось имущества на 1000 денежных единиц. Узнайте, какова была стоимость имущества у купца.

**4.** Расставьте числа $\frac{9}{10}$; $\frac{10}{11}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{12}{13}$ в порядке убывания.

**5.** Ни у кого из тысячи пиратов
Не наберется тысячи дукатов,
Но даже самый маленький пират
Имеет все же хоть один дукат.
Так можно ли сказать о тех пиратах,
Что среди них — безусых и усатых,
Косматых, безбородых, бородатых —
Есть двое одинаково богатых?

## Вариант 7

**1.** Масса бидона с молоком 32 кг, без молока — 2 кг. Какова масса бидона, заполненного молоком наполовину?

2. Расшифруйте запись. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры.

```
      М И Н У С
   ×  М И Н У С
      ---------
      * * * * С
  * * * * * У
+ * * * * Н
* * * * И
М И Н У С
-----------------
* * * * * * * * *
```

3. Три подруги вышли в белом, синем, зеленом платьях и туфлях таких же цветов. Известно, что только у Ани цвет платья и туфель совпадает. Ни платье, ни туфли Вали не были белыми. Наташа была в зеленых туфлях. Определите цвет платья и туфель каждой подруги.
4. В классе 35 учеников. Из них 20 школьников занимаются в математическом кружке, 11 — в экологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько экологов увлекается математикой?
5. Четыре коровы черной масти и три коровы рыжей масти за 5 дней дали такое же количество молока, что и три коровы черной масти и 5 коров рыжей масти за 4 дня. Какие коровы более продуктивны (т. е. дают молока больше за 1 день) — черные или рыжие?

### Вариант 8

1. В ряд выписано 11 двоек: 22222222222. Поставьте между некоторыми из них знаки: +, –, : , · так, чтобы получилось число 2021.
2. Социологи провели опрос: «Что Вы предпочитаете пить по утрам: чай или кофе?». 47,25% опрошенных ответили «Чай», 46,5 % ответили «Кофе», а 9 человек ничего не ответили. Сколько человек опросили социологи?

3. Определите, чему равен угол между часовой и минутной стрелками часов в 11 ч 45 мин.

4. Докажите, что между числами 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ нельзя расставить знаки «+» и «−» так, чтобы значение выражения было равно 0.

5. В гостинице, имеющей форму квадрата, расположено 9 комнат одинаковых размеров. Все 9 постояльцев недовольны своей комнатой и считают, что любая комната через стенку лучше, чем та, в которой они живут. Может ли хозяйка гостиницы переселить их так, чтобы каждый постоялец переехал в соседнюю комнату?

## Вариант 9

1. Расставьте числа в порядке убывания: $\frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}$.

2. Незнайка начертил 3 прямые линии. На каждой из них он отметил 3 точки. Всего Незнайка отметил 6 точек. Как он это сделал? Покажите на рисунке.

3. В кинотеатре «Сириус» на прошлой неделе показали три новых фильма. Оказалось, что на каждом из фильмов присутствовало по 200 человек, причем 150 человек приходило только на один фильм, а 180 — ровно на два. Сколько человек приходило на все 3 фильма?

4. В некотором доме живут только супружеские пары с маленькими детьми (бездетных семей нет). Известно, что у каждого мальчика есть сестра и что мальчиков больше, чем девочек. Кого больше в этом доме: детей или взрослых?

5. В файле хранятся 2022 единицы и 1957 нулей. Программа читает из файла два произвольных числа, стирает и записывает вместо них их сумму. Программа запускается многократно. В конце концов, в файле остается только одно число. Чему оно равно?

## Вариант 10

1. Одна бутылка лимонада стоит 30 рублей. Пустую бутылку можно сдать за 12 рублей. Какое наибольшее число бутылок лимонада можно выпить, имея 100 рублей?
2. В ящике лежат лимоны. Сначала из него взяли половину всех лимонов и половину лимона, затем половину остатка и еще половину лимона, наконец, половину нового остатка и опять половину лимона. После этого в ящике остался 31 лимон. Сколько лимонов было в ящике вначале?
3. Пусть $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}$. Докажите, что $0<S<1$.
4. Ширина прямоугольного параллелепипеда больше единицы, длина больше высоты, а высота больше ширины. При этом длина, ширина и высота — натуральные числа, а объем нескольких таких параллелепипедов равен 315. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда.
5. На столе стоят 10 стаканов, при этом 3 из них вверх дном, а 7 — дном вниз. Можно ли все стаканы поставить правильно (то есть вниз дном), если одновременно переворачивать по два стакана?

# РЕШЕНИЯ, ОТВЕТЫ

## Задачи для подготовки к математическим олимпиадам

### Арифметические задачи

**1.** а) $99 + 99 : 99$;
б) $91 + 5742 : 638$.

**2.** Рассуждая с конца, имеем:
$2 \cdot 7 = 14$, $14 + 6 = 20$, $20 : 4 = 5$, $5 \cdot 9 = 45$, $45 - 5 = 10$.
Ваня задумал число 10.

**3.** Уменьшив втрое количество орехов в большей части, мы получим их столько же, сколько в 4 меньших частях. Значит, большая часть должна содержать в $3 \cdot 4 = 12$ (раз) больше орехов, чем меньшая, а общее число орехов должно быть в 13 раз больше, чем в меньшей части. Поэтому меньшая часть должна содержать: $130 : 13 = 10$ (орехов),
а большая: $130 - 10 = 120$ (орехов).

**4.** $555 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 5$.

**5.** $12111=11000+1100+11$.

**6.** 45.

**7.** На 50, если разбить на пары все числа.

**8.** Ошибка допущена в вынесении общего множителя за скобки в левой и правой частях тождества $4 : 4 = 5 : 5$.

**9.** Таких чисел 19: 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 65, 75, 85, 95.

**10.** 102.

**11.** 45.

**12.** $16 + 18 - 15 = 19$ (голубей) — наблюдали Малыш и Карлсон.

**13.** $3\,333\,333 : 3 - 333\,333 : 3 = 1\,000\,000$
или $333333 \cdot 3 + 3 : 3 = 1\,000\,000$.
Нет, так как всегда будет число, кратное трем.

**14.** В 5 раз.

**15.** 9: 21000, 20100, 20010, 20001, 12000, 10200, 10020, 10002, 30000.

**16.** $270 + (120 + 390) : 3 \cdot 5 = 1120$.

**17.** Так как скорость на велосипеде в 5 раз больше, чем на самокате, то это же расстояние Малыш проедет в 5 раз быстрее, то есть за 3 минуты. Но так как Малыш должен проехать расстояние в 3 раза большее, то и времени понадобится в 3 раза больше, то есть 9 мин.

**18.** $62 + 55 - 17$ и $(3 + 22)\cdot(3 - 2)\cdot 4$.

**19.** 16: 10000, 10001, 10010, 10011, 10100, 10101, 10110, 10111, 11000, 11001, 11010, 11011, 11100, 11101, 11110, 11111.

**20.** Через 15 минут, так как половину пути от школы до дома старший брат проходит за 15, а младший — за 20 минут.

**21.** Муравей затратил на обратный путь времени больше, так как на первую половину обратного пути он затратил времени столько же, сколько и пешком.

**22.** $111 - 11 = 100$; $5\cdot5\cdot5 - 5\cdot5 = 100$; $33\cdot3 + 3:3 = 100$.

**23.** За один год лошадь съест 12 возов сена, коза — 6, а овца — 4 воза сена. Всего за год они вместе съедят 22 воза сена. Тогда один воз сена они съедят все вместе за

$12 : 22 = \dfrac{6}{11}$ (месяца).

**24.** $\dfrac{14}{19}$; $\dfrac{15}{19}$.

**25.** У числа $A = 1 \cdot 2 \cdot 3\cdot\ldots\cdot2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 5 делится $2019 : 5 = 403$ числа, из них на 25 делится $2019 : 25 = 80$ чисел, на 125 делится $2019 : 125 = 16$ чисел, на 625 делятся 3 числа. $403 + 80 + 16 + 3 = 502$. Тогда число $A$ делится на $5^{502}$. Так как среди множителей числа $A$ содержится 1014 чётных чисел, то $A$ делится и на $2^{502}$, а значит, $A$ делится на $10^{502}$, то есть оканчивается 502 нулями.

**26.** За 2 часа пассажирский поезд пройдет 108 км, разность скоростей поездов 18 км/ч, значит, скорый поезд догонит пассажирский поезд за $108 : 18 = 6$ (ч). Расстояние от станции $A$ будет $6 \cdot 72 = 432$ (км).

**27.** Так как Дима и папа двигались со скоростью каждый по 1,5 м/с, то скорость сближения будет равна 3 м/с и они встретятся через 300 м: 3 м/с = 100 с. Т.к. скорость собаки 5м/с, то за 100 с она пробежит 500 м = 0,5 км.

**28.** $-90 - 89 - 88 - \ldots - 1 + 0 + 1 + 2 + \ldots + 98 + 99 + 100 =$
$= 91 + 92 + \ldots + 100 =$
$= (91 + 100)\cdot5 = 191 \cdot 5 = 955.$

**29.** Так как $7 : 12 = \frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$, то надо разделить 3 яблока на 4 части, а 4 яблока каждое на 3 части и каждому человеку дать по $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$ яблока.

**30.** Возможный вариант:
$2018 = 2015 + 9 - 8 + 7 - 6 + 4 - 3$.

**31.** 1 % соли составляет 1 г. Так как при испарении соль остается, а уменьшается масса воды, то соли осталось 1 г. Так как 1 г. составляет 2 % раствора, то раствор будет весить 50 г.

**32.** $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots 99 \cdot 100$. Ноль получается от умножения четного числа на 5. Четных чисел в данном произведении будет 50. Посчитаем число пятёрок. Так как на 5 делится двадцать чисел от 1 до 100, при этом четыре числа: 25, 50, 75, 100 делятся на $25 = 5 \cdot 5$, то всего будет 24 пятерки. Поэтому число 100! Оканчивается 24 нулями.

**33.** Возможный вариант: $999 + 999 + 9 + 9 + 9 : 9 = 2017$.

**34.** Заметим, что за 5 минут Саша пройдет такое же расстояние, что и Лена за 10 минут. Поэтому Саша догонит Лену через 5 минут.

**35.** В первом десятке чисел всего одна цифра 5. Аналогично во втором, третьем, четвёртом, пятом, седьмом, восьмом, девятом и десятом. А в шестом десятке все числа начинаются с цифры 5: 50, 51, ... 59. Здесь цифр 5 будет 11, так как в числе 55 их 2. Таким образом, в первой сотне будет 20 пятерок. Аналогичная ситуация во второй, третьей, четвёртой, шестой, седьмой, восьмой, девятой сотнях — везде по 20 пятерок. Рассмотрим, сколько пятерок будет в пятой сотне. В неё входят числа 500, ... 599. Дополнительно к 20 пятеркам добавляется 100 пятерок — цифры, стоящие на первых местах. Итого получим 120 пятерок. В сумме получается $9 \cdot 20 + 120 = 300$. Таким образом, получается 300 пятерок.

**36.** Сложим вдвое шнур, тогда половина шнура будет $\frac{1}{3}$ метра.

Сложим половину шнура еще вдвое, тогда получим $\frac{1}{6}$ метра.

Отрежем эту часть, тогда оставшаяся часть шнура имеет длину $\frac{1}{2}$ метра, так как $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

**37.** Да, так как 5 руб. – 1 руб. 80 коп. = 3 руб. 20 коп. = 320 коп.; а 320 не делится на 6 нацело.

**38.** Так как число учеников, получивших ту или иную оценку, всегда натуральное, то для решения задачи надо найти такое натуральное число меньше 30, одновременно делящееся на 5, 4 и 2. Возможным единственным ответом является число 20. Тогда в классе получили «пятерки» — 4 ученика, «четверки» — 10 учеников, «тройки» — 5 учеников. Значит, двойку получил 1 ученик.

**39.** Последняя цифра уменьшаемого оканчивается на 1, поэтому разность оканчивается 0. Значит, число делится на 10.

**40.** Так как за решение каждой задачи девочки получали вместе 6 конфет, значит, сумма всех полученных ими конфет должна обязательно делиться на 6, но 33 на 6 нацело не делится. Значит, девочки Витю обманули.

**41.** Так как 14 – число простое, то меньше 13 быть не может, так как не может делиться на 13. $13! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 13$, поэтому делится и на 13, и на 14 ($14 = 2 \cdot 7$), и на 15 ($15 = 3 \cdot 5$), и на 16 ($16 = 2 \cdot 8$).

**42.** Заметим, что число грибов в каждой паре делится на 3. Значит, сумма всех грибов, собранных детьми, также должна делиться на 3. Но 500 на 3 не делится. Поэтому случиться такое не может.

**43.** Используя признак делимости на 4, получаем, что последняя цифра должна быть 2 или 6. Используя признак делимости на 9, получаем, что в первом случае первая цифра будет 3, а во втором – 8. Таким образом, получаем числа: 3132 и 8136.

**44.** Числа меньше 100 и делящиеся на 2, 3 и 5 — это 30, 60, 90. Но число 60 делится на 4, поэтому в корзине лежало 30 или 90 яблок.

**45.**
$$\begin{array}{r} \times\ 115 \\ 98 \\ \hline 920 \\ +1035\phantom{0} \\ \hline 11270 \end{array}$$

**46.** Так как сумма четырехзначных чисел есть число четырехзначное, то П = 1, 2 или 3. Т в свою очередь будет больше 2. Рассмотрим различные значения для Т.

1) Пусть Т = 3. Тогда Г = 9, П = 1. Тогда Р = 0 или 5. Если Р = 5, то О = 0. Но 0 + 1 не оканчивается на 0. Значит, Т $\neq$ 3.

2) Пусть Т = 4. Тогда Г = 2 и П = 1. Опять противоречие, так как Р = 0 или 5, а при сложении трёх нулей или трёх пятёрок с 1 сумма не будет оканчиваться ни на 0, ни на 5.

3) Пусть Т= 5. Этот случай отпадает, так как тогда и Г = 5.

4) Т = 6. Тогда Г = 8. Опять получим противоречие, как и во втором случае.

5) Пусть Т = 7. Тогда Г = 1. Тогда, чтобы 3·Р оканчивалось на Р, Р может быть лишь 9 или 4.

А) Пусть Р = 9. Сумма трёх 9 и 2 будет 29, поэтому 2 + 3О должно оканчиваться на О. Это возможно, только если О = 4. Так как П не может быть 1, осталось два варианта. В случае П = 3 мы получим сумму 3П и 1, равную 10, то есть число должно быть пятизначное. А в случае П = 2 всё получается. Таким образом, П = 2, Т = 7, О = 4, Р = 9, Г = 1, а пример будет:

$$\begin{array}{r} 2497 \\ +\ 2497 \\ \underline{2497} \\ 7491 \end{array}$$

Б) А если Р = 4, то сумма трёх О и 1 не оканчивается на О ни при каком значении О. Значит, этого случая не будет.

Рассмотрим, будут ли еще решения.

6) Пусть Т = 8. Тогда Г = 4 и П = 2. Р может быть 4 или 9.

А) Пусть Р = 4. Такого быть не может, так как Г = 4.

Б) Пусть Р = 9. Тогда О может быть только 9, но Р = 9. Поэтому и такой случай не может быть.

7) Пусть Т = 9. Тогда Г = 7, П = 3. Тогда Р = 4. Но сумма трех 0 и 1 не может быть равна 0. И в этом случае нет решения.

*Ответ:* 2497 + 2497 + 2497 = 7491.

**47.** Так как разность четырехзначного числа и трехзначного равна 1, то это может быть только в случае, когда от 1000 вычитается 999. Таким образом, запись будет такая:
1000 − 999 = 1.

**48.** Так как произведение трёхзначного числа на трёхзначное получилось шестизначным и первые цифры 6 и 9, то цифры, стоящие на местах А и С, будут 7 и 9. Сделав перебор для буквы В, получим, что В = 3. Таким образом, пример будет:
739 × 937 = 692443.

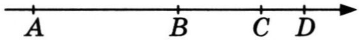
## Алгебраические задачи

**49.** Задача имеет различные методы решения. Рассмотрим алгебраический метод решения. Для того чтобы пройти через ворота с $a$ яблоками, перед воротами у крестьянина должно быть $2(a + 1)$ яблок. Поэтому перед последними воротами у него должно быть 4 яблока ($a = 1$), перед вторыми: 10 яблок ($a = 4$), перед первыми: 22 яблока ($a = 10$).
Значит, надо взять 22 яблока.

**50.** $x = 22$.

**51.** 3; 4; 5; 6; 7.

**52.** Изобразим путь пассажира отрезками (смотри рисунок):




Обозначим за $S$ отрезок $CD$, тогда $BC = 2S$ (пока спал), всего $BD = 3S$, но $AB = BD$, значит, $AD = 6S$. Бодрствовал он на $AB$ и $CD$, $AB + CD = 3S + S = 4S$.

Пассажир бодрствовал $\frac{4S}{6S} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (пути).

**53.** Так как у числа есть треть и семнадцатая часть, то оно делится на 51, т.е. имеет вид $51x$. Тогда треть его будет $17x$, а семнадцатая часть — $3x$. По условию задачи составим уравнение: $17x = 3xp + 100$. Выразим $x$: $x = \frac{100}{17-3p}$.

Учитывая, что $x$ и $p$ натуральные, подбором найдем $p = 5$. Тогда $x = 50$.
В итоге получим, что число будет 2550.

**54.** Найдем среднюю скорость автомобиля: $v_{\text{ср.}} = \frac{s}{t}$. Обозначим путь от Котласа до Коряжмы за $s$. Тогда время движения от Котласа до Коряжмы будет равно $t_1 = \frac{s}{40}$. Учитывая, что автомобиль двигался 1 час, найдем путь от Котласа до Коряжмы: 40 км. Тогда время из Коряжмы в Котлас $t_2 = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ ч. Тогда общее время движения будет $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ ч, а путь — 80 км.

Тогда $v_{cp} = \frac{80}{\frac{5}{3}} = \frac{240}{5} = 48$ км/ч.

**55.** Обозначим площадь поля за $x$ га. Тогда после первого дня косьбы осталось $(x - 15)$ га. 20% от данной площади будет $0{,}2x - 3$. А так как за 2 дня скосили 36% всех лугов, то имеем уравнение:

$15 + 0{,}2x - 3 = 0{,}36x$.

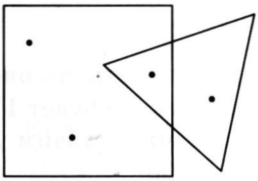
Решением данного уравнения будет $x = 75$ га.

## Геометрические задачи

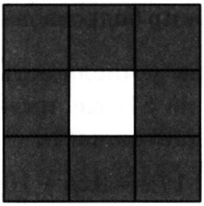
**56.** Равносторонний треугольник дает угол в 60°, правильная четырехугольная пирамида, у которой все 8 ребер равны 1 спичке, дает в основании квадрат с углом 90°. Два равносторонних треугольника, имеющие общую сторону, дают угол в 120°.

**57.** Так как объем куба равен 27 см$^3$, то получить 27 единичных кубиков можно, сделав по 2 разреза граней, то есть всего 6.

**58.**



**59.**



**60.** 13.

**61.** Да, так как

$1000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 1\,000\,000\,000$ мм $= 1000$ км.

**62.** Пересечением могут быть (см. рис.)

а) точка

б) отрезок

в) треугольник

г) четырёхугольник

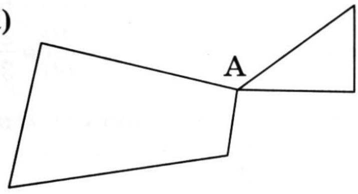
д) пятиугольник

е) шестиугольник

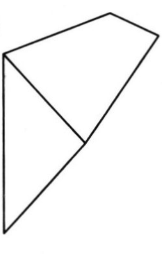
ж) семиугольник

з) пустое множество

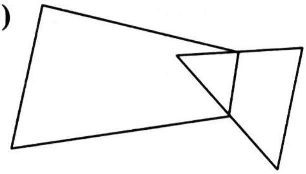
а)



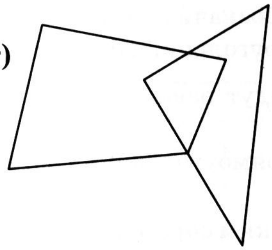

б)



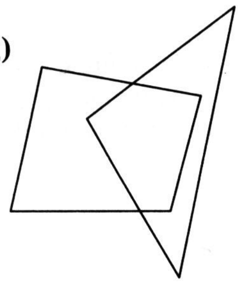
в)



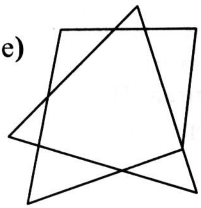
г)



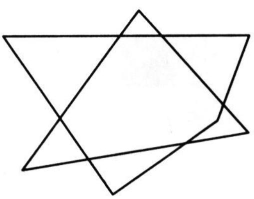
д)



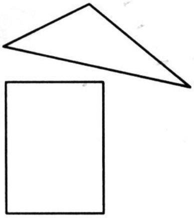
е)



ж)

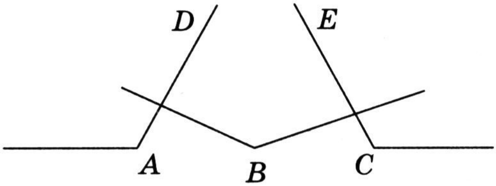


з)



**63.** 84 см$^2$.

**64.**




**65.** $V = 24 \cdot 8 \cdot 8 = 1536$ см$^3$.

$S = 4 \cdot 8 \cdot 24 + 2 \cdot 8 \cdot 8 = 896$ см$^2$.

**66.** $6 \cdot 12 = 72$ см.

**67.** Обозначим длину стороны самого большого квадрата за $x$. Тогда, двигаясь от большого квадрата по часовой стрелке, последовательно выразим через $x$ стороны других квадратов: $x - 1$, $x-2$, $x - 3$. Из равенства верхней и нижней сторон прямоугольника получаем уравнение

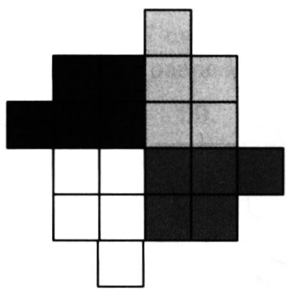
$x + (x - 1) = (x - 2) + (x - 3) + (x - 3)$.

Корнем данного уравнения будет $x = 7$.

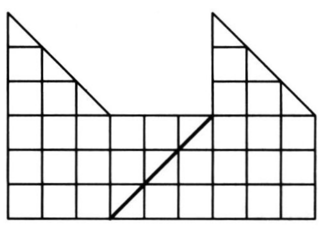
**68.** Обозначим стороны прямоугольника за $a$ и $b$. Площадь прямоугольника будет $ab$. Тогда новые стороны прямоугольника будут равны $a + \frac{1}{4}a = \frac{5}{4}a$ и $b - \frac{1}{4}b = \frac{3}{4}b$. Площадь нового прямоугольника соответственно будет равна $\frac{5}{4}a \cdot \frac{3}{4}b = \frac{15}{16}ab$, таким образом, площадь уменьшилась на $\frac{1}{16}$.

**69.** Начнем с маленьких треугольников. Их всего 9. Теперь сосчитаем число треугольников, содержащих в себе по 4 треугольника. Их всего 3. И есть еще большой треугольник. Таким образом, на рисунке всего 14 треугольников.

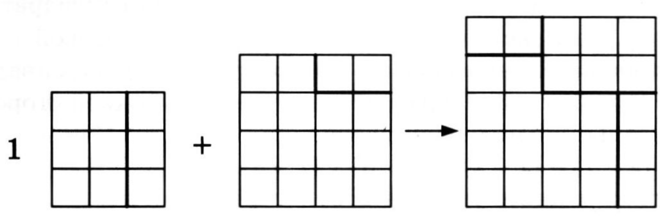
**70.**

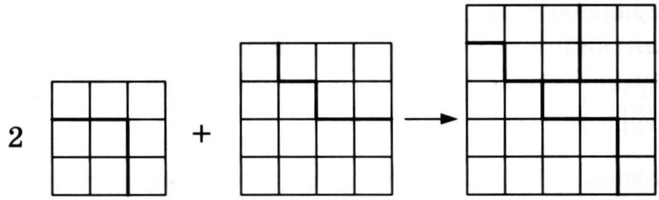


**71.**



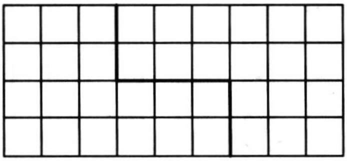
**72.** Возможны два варианта разрезаний. Они показаны на рисунках ниже.



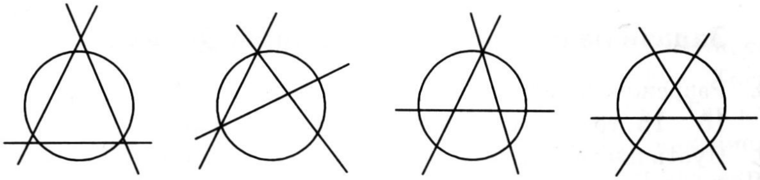




**73.** Поскольку площади прямоугольника и квадрата должны быть равны, то сторона квадрата будет равна **6**. Поэтому откладываем по **6** на больших сторонах прямоугольника и делаем ступенчатый разрез, о котором можно догадаться, вспомнив о центральной симметрии прямоугольника.



**74.**



**75.** На рис. 1 показан ковер-самолёт после того, как его испортил Змей Горыныч. На рис. 2 показан ковер-самолёт, который разрезала Василиса Премудрая. На рис. 3 показан ковер-самолёт, который сшила Василиса Премудрая.

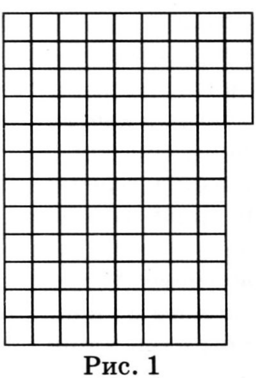


Рис. 1

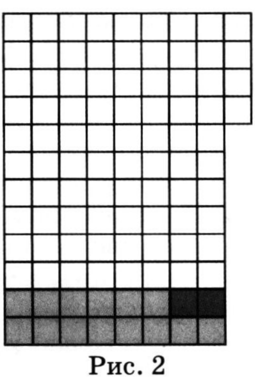


Рис. 2

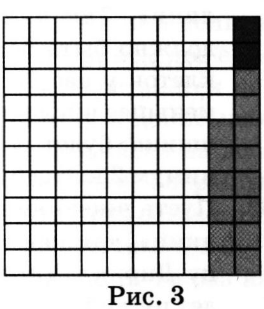
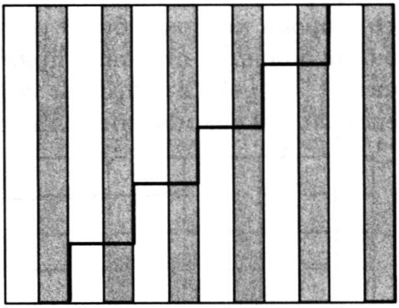


Рис. 3

**76.** В гулливерском спичечном коробке должно поместиться 12 лиллипутских коробков в ширину, 12 — в длину, 12 — в высоту. Всего $12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$ (коробков).

**77.** Фигура *B*, смещенная вниз на $\frac{1}{5}$ длины флага и влево на 2 полосы. В результате получается флаг, состоящий из 10 полос и имеющий ту же площадь (см. рис.)




## Задачи на применение принципа Дирихле

**78.** Разрежем ковер на 16 ковриков размером $1 \times 1$ метр. Так как $16 > 15$, то один из ковриков будет без дыр.

**79.** Пусть цвета шариков – «клетки», а 3 шарика — «кролики». Так как $3 > 2$, то по принципу Дирихле как минимум два шарика попадут в одну «клетку», то есть будут одного цвета.

**80.** Пусть число иголок — это «клетки», а ёлки — «кролики». Так как 1 000 000 больше 800 000, то по крайней мере два «кролика» попадут в одну «клетку», то есть найдутся две елки, на которых будет одинаковое число иголок.

**81.** Пусть цвета носков — это «клетки». А число носков — «кролики». Так как по принципу Дирихле число «кроликов» должно быть больше как минимум на 1 число «клеток», а клеток у нас 4, то надо 5 «кроликов». Таким образом, наименьшее число носков, которое нужно вытащить вслепую из ящика, будет равно 5. Тогда по принципу Дирихле как минимум 2 носка будут одного цвета.

**82.** Пусть число ящиков — «клетки», а число голубей — «кролики», так как голубей меньше, чем ящиков, то по принципу Дирихле (вторая формулировка) хотя бы один ящик будет пустой.

83. Рассмотрим в качестве «клеток» остатки от деления целых чисел на 5 — это 0, 1, 2, 3, 4. «Клеток» — 5. За «кроликов» обозначим 6 целых чисел. Так как $6 > 5$, то по принципу Дирихле как минимум два числа будут иметь одинаковые остатки. А разность двух чисел, имеющих одинаковые остатки при делении на 5, всегда делится на 5. Действительно, если первое число $a = 5m + q$, второе $b = 5n + q$, то $a - b = 5m - 5n = 5(m - n)$, которое делится на 5.

84. Разобьём равносторонний треугольник со стороной 3 м на равносторонние треугольники со стороной 1 м. Всего таких треугольников будет 9. Обозначим эти треугольники за «клетки», а розы — за «кроликов». Так как $10 > 9$, то по принципу Дирихле найдутся как минимум 2 «кролика», попавшие в одну «клетку», то есть найдутся не менее 2 роз, попавших в один треугольник. А расстояние между любыми двумя точками в треугольнике со всеми сторонами, равными 1 м, всегда не превосходит 1 м. Таким образом, найдутся всегда 2 розы, которые находятся на расстоянии, не большем 1 метра.

85. Введем «клетки» следующим образом. Пусть 2 ученика, сидящие друг против друга, образуют одну «клетку». Тогда клеток будет 6. А юношей обозначим за «кроликов». Так как их больше половины, то их будет больше 6. Так как число «кроликов» больше числа «клеток», то минимум два «кролика» попадут в одну «клетку», то есть найдутся 2 юноши, сидящие напротив друг друга.

## Задачи на применение метода инвариантов

86. Сумма 11 исходных чисел — нечетное число. Рассмотрим, какие суммы будут получаться после выполнения указанной операции. Если зачеркнем два нуля, то мы допишем ноль, и сумма на доске будет нечетной. Если мы зачеркнем две единицы и допишем нуль, сумма снова на доске останется нечетной. Наконец, вычеркивая нуль и единицу и дописывая единицу, мы получим также нечетную сумму чисел на доске. Таким образом, после выполнения указанной операции на доске остается на одно число меньше, но сумма оставшихся чисел будет нечетной. Так как 1 — нечетное число, а 0 — четное, то после выполнения указанной операции 10 раз на доске останется нечетное число, то есть 1.

**87.** Первоначально сумма гербов, которые сверху, равна 7 — нечетное число. Посмотрим, что будет с числом гербов после переворачивания 6 любых монет. При первом переворачивании у нас останется 1 герб сверху. 1 — число нечетное. Далее можно перевернуть или 6 монет, у которых герб внизу, или 5 монет с гербом внизу и оставшуюся седьмую монету, которую не переворачивали. В первом случае снова будет 7 гербов вверху, а во втором — 5 гербов вверху. 5 и 7 — числа нечётные. Можно продолжить рассматривать еще варианты данной операции, но всегда вверху будет гербов нечётное число. Так как 0 — чётное число, то перевернуть за несколько раз все монеты гербом вниз нельзя.

**88.** Произведение 10 целых чисел равно 1, если эти числа равны 1 или −1. Так как 1 — число положительное, то количество чисел −1 будет чётное. А так как получить сумму, равную 0 можно лишь, используя 5 чисел, равных −1 и 5 чисел, равных 1, то нулю сумма равняться не может.

**89.** Для решения данной задачи применим разновидность метода инвариантов — метод раскраски. Применим шахматную раскраску в два цвета. Тогда 24 клетки будут окрашены в один цвет (предположим, белый), 25 клеток — в другой (например, чёрный). При переползании на соседнюю клетку жук меняет цвет клетки. Но жуков, сидящих на белых клетках, — 24, а на чёрных — 25. Тогда после переползания всех жуков на соседние клетки по крайней мере 1 чёрная клетка останется пустая (несколько жуков могут переползти на одну и ту же клетку).

**90.** Сумма чисел, записанных в вершинах квадрата, равна 7 — число нечетное. Если мы прибавим к любым двум числам, стоящим в вершинах квадрата, одинаковые целые числа, то сумма всех четырех чисел в вершинах квадрата останется снова нечетной, так как сумма нечетного и четного чисел — число нечетное. А так как сумма четырех одинаковых целых чисел — число четное, то через несколько ходов получить во всех вершинах квадрата одинаковые числа будет нельзя.

**91.** Число 50 — четное, а 1 и 5 — числа нечетные. Так как сумма 13 нечетных чисел — число нечетное, то купюру 50 рублей разменять с помощью 13 монет достоинством 1 и 5 рублей нельзя. Но сумма 18 нечётных чисел число чётное и 50 — число чётное. Значит, эту операцию можно выполнить.

Рассмотрим, как это можно сделать: надо взять 10 монет достоинством 1 рубль и 8 монет по 5 рублей.

**92.** Конь ходит буквой Г, при этом он при каждом ходе меняет цвет поля, то есть он снова попадет на клетку того же цвета через 2, 4, ..., $2n$ ходов. Так как конь вернулся снова на поле $a1$, то есть на клетку того же цвета, то он сделал чётное число ходов.

**93.** 2016 натуральных чисел могут быть все четными; все нечетными; или четными и нечетными. Два первых случая не могут быть, так как сумма — нечетное число. Значит, среди 2016 натуральных чисел есть четные и нечетные числа, поэтому произведение будет числом четным.

**94.** Так как число ягод на соседних кустах отличается на 1, то на двух соседних кустах будет нечетное число ягод. Тогда количество ягод на 24 кустах будет равно сумме 12 нечетных чисел, то есть будет числом четным. Так как число 535 — нечетное, то на всех кустах вместе 535 ягод быть не может.

**95.** Заменив все знаки «*» на знаки «+»,получим, что в левой части будет число 55. Заменим некоторые знаки «+», тогда значение в левой части будет уменьшаться на четное число. Таким образом, в левой части всегда будет число нечетное, а в правой — 0 — чётное. Значит, верного равенства получить нельзя.

## Логические задачи

**96.** 4.

**97.** Иван поймал 21 рыбу, его сына звали Николай.

**98.** 1957.

**99.** Петя и Ваня к шапке прибегут одновременно.

**100.** За 30 секунд; за 10 секунд. Продавец может отсчитывать из пачки не 70, а 30 конвертов, тогда в пачке остается 70 конвертов. Аналогично и с 90 конвертами: отсчитать 10 конвертов.

**101.** Да, если это было сказано 1 января, то 30 декабря Пете было 10 лет, 31 декабря исполнилось 11 лет. 31 декабря этого же года ему будет уже 12 лет, а в будущем году — 13.

**102.** Так как каждый из поросят съел по 4 пирожка, то деньги все достанутся Нуф-Нуфу, который свои 4 пирожка отдал Наф-Нафу.

**103.** Пусть монет каждого достоинства по 3, тогда всего будет 12 монет. Следовательно, еще одна, тринадцатая, позволяет полностью ответить на вопрос задачи. Если же каких-то монет меньше 3, то других будет 4 или больше.

**104.** Воспользуемся таблицей подсчета очков.

| Решено задач | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Не решено задач | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Набрано очков | 42 | 32 | 22 | 12 | 2 | –8 | –18 |

В результате получим 3 задачи, 2 задачи, 5 задач.

**105.** Имя девочки начинается с буквы *В*.

**106.** 6.

**107.** Вова в четвёртом классе, Петя в третьем классе, Юра во втором классе, Коля в первом классе.

**108.** Наф-Нафу достался домик из камней.

**109.** Возможный вариант: первые 5 дней дежурят 30 богатырей по 6 в день; на шестой день дежурят оставшиеся 3 богатыря и первые 3. В следующие 5 дней дежурят оставшиеся 30 богатырей по 6 в день.

**110.** 12 февраля.

**111.** 13.

**112.** 5.

**113.** У пяти учеников.

**114.** Почта – 1 – 3 – почта –7 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 5. Федор живет в доме № 5 (см. рис. на стр. 69).

**115.** Сначала проконсультировать Борю, затем Аню и Свету. Тогда общее время нахождения учеников в кабинете составит $2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 7 = 23$ (мин).

**116.** 1) Поджарить первый и второй куски с одной стороны.

2) Перевернуть первый кусок, а второй кусок заменить третьим.

3) Обжаренный с 2 сторон первый кусок заменить вторым куском, обжаренным с одной стороны, и перевернуть третий кусок.

4) Обжарить второй и третий куски.

**117.** Мать и сын.

**118.** Так как мужчин не больше 6, то самое большее их может быть 5. Значит, мужчины несут 10 буханок. Остается 2 буханки, поэтому 2 женщин не может быть, значит, женщин — 1, а детей — 6.

**119.** На девятый.

**120.** В избушке живут Говорящие Коты, Мудрые Совы и Усатые Тараканы. Из того, что, кроме двух, — остальные Говорящие Коты, значит, что Мудрых Сов и Усатых Тараканов вместе двое. Аналогично, из того, что, кроме двух, в избушке — остальные Мудрые Совы; Усатых Тараканов и Говорящих Котов — тоже двое. Эти два условия будут выполняться лишь в случаях:

1) Тараканов — 2, Сов и Котов — нет

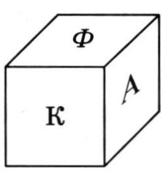
или

2) всех — по одному.

Но 1 случай не подходит, т.к. в условии сказано, что Совы и Коты живут в избушке. Поэтому у Бабы-яги поселились по 1 Говорящему Коту, Мудрой Сове и Усатому Таракану, т.е. всего 3.

**121.** Из условия задачи следует, что Витя купил пирожков больше всех, значит, больше, чем третью часть от 14, т. е. 5 или больше. Так как число пирожков у него в 2 раза больше, чем у Коли, то это может быть 6, 8, 10, 12, 14. Проверим. Возьмем 6, тогда Коля купил 3 пирожка, а Женя — 5. Эти числа удовлетворяют условию задачи. Возьмем 8, тогда Коля купил 4, Женя — 3, что меньше Коли. Поэтому данный вариант не подходит. Аналогично можно доказать, что других вариантов нет.

**122.** Спереди — *К*, справа — *А*, сверху — *Ф* (см. рис.).




**123.** 1.

**124.** Так как половина яблок составляет треть объема банки, то половина оставшихся яблок составляет шестую часть первоначального объема. Так как $\frac{1}{6}$ от $\frac{2}{3}$ будет составлять $\frac{1}{4}$, то уровень компота понизится на четверть.

**125.** Пронумеруем борцов в соответствии с их силой (больший номер побеждает меньший). Интуитивно ясно, что если такие команды существуют, то их общая сила примерно равна.

Разобьем борцов сначала на три группы (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9) и в каждую команду направим по одному представителю от каждой группы. Тогда команды (1, 5, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8) будут удовлетворять условию задачи.

**126.** На каждой горизонтали может стоять не более одной ладьи, таким образом, на доске может быть не более 8 ладей, не бьющих друг друга. Поставив 8 ладей на одну из диагоналей доски, мы получим расстановку, удовлетворяющую условию.

**127.** Так как Сидоров учится с сестрой Петрова в одном классе, то Петров не является младшим. Так как, по условию, Сидоров — старший, остается, что Петров — средний, а Иванов — младший. Поэтому Иванов учится в 5 классе, Петров — в 6 классе, а Сидоров — в 7 классе.

**128.** Дядя мог сказать и иначе: «Если к половине моих лет прибавишь 23, то узнаешь мой возраст». Следовательно, половина дядиного возраста 23 года. Поэтому возраст дяди 46 лет.

**129.** Шапка Васи оказалась в 1 км от моста. Вася первоначально плыл против течения реки, а затем по течению реки. Так как шапка относительно течения реки находится в состоянии покоя, то Вася догонит шапку также через 15 минут. Поэтому шапка за 30 минут проплыла 1 км. Значит, скорость течения реки равна 2 км/ч.

**130.** 1) Налить молоко в пятилитровый бидон и перелить в восьмилитровый.

2) Снова налить молоко в пятилитровый бидон и долить восьмилитровый бидон. Тогда в пятилитровом бидоне останется 2 л молока.

3) Вылить молоко в цистерну из восьмилитрового бидона.

4) Перелить 2 л молока из пятилитрового бидона в восьмилитровый бидон.

5) Налить молоко в пятилитровый бидон и перелить его в восьмилитровый.

В результате в восьмилитровом бидоне получим 2 + 5 = 7 (л) молока.

**131.** Наполним трёхлитровый сосуд и перельём воду в пятилитровый. Повторим то же самое. Тогда в трёхлитровом сосуде останется литр воды.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 л | 0 | 3 | 0 | 3 | 1 |
| 5 л | 0 | 0 | 3 | 3 | 5 |

**132.** Наполним четырёхлитровое ведро водой. Затем перельем эти 4 литра в пятилитровое ведро и снова наполним водой четырёхлитровое ведро. Затем дополним водой пятилитровое ведро из четырёхлитрового ведра. Так как в пятилитровом ведре было уже 4 л, то мы вылили в него 1 л и в четырёхлитровом ведре останется 3 л, что и требовалось.

**133.** Рассмотрим 3 варианта:

1) Начинающий берет 3 конфеты. Тогда противник, взяв 2 конфеты, выигрывает, так как начинающему игру остается одна конфета.

2) Начинающий берет 2 конфеты. Тогда противник, взяв 3 конфеты, выигрывает, так как начинающему игру остается 1 конфета.

3) Начинающий берет одну конфету. Тогда при любом числе конфет, взятым противником (1; 2; 3), начинающий должен брать столько конфет, чтобы на столе осталась одна конфета ($4 - 1 = 3$; $4 - 2 = 2$; $4 - 3 = 1$). Таким образом, взяв сначала 1 конфету и действуя далее правильно (беря столько конфет, чтобы они с числом, взятым противником, давали в сумме 4), начинающий всегда выиграет.

**134.** Выиграет второй, он должен брать каждым ходом число монет, дополняющее до 3 число монет, взятых первым игроком.

**135.** Так как число частей после каждого хода увеличивается на один, то выиграет первый игрок. Из 1 шоколадки $6 \times 8$ после 47 ходов получится 48 шоколадок размером $1 \times 1$. Сорок восьмого хода второму ученику уже не сделать.

**136.** План действий должен быть такой:

1) сначала переправляются двое легких,

2) один из них перегоняет лодку обратно,

3) самый тяжелый садится в лодку и переплывает один,

4) второй легкий садится в лодку и перегоняет ее обратно,

5) двое легких садятся в лодку и переправляются на остров.

**137.** Обозначим для удобства мужей и жен М1, Ж1, М2, Ж2, М3, Ж3. Рассмотрим один из возможных вариантов.

1. Реку переплывают М1 и Ж1.
2. Обратно возвращается М1, на берегу остается Ж1.
3. М1 остается на берегу, а в лодке переправляются М2 и Ж2.
4. На другом берегу остаются Ж1 и Ж2, а в лодке обратно едет М2.

5. В лодку садятся М3 и Ж3 и переправляются на другой берег, М2 остается на берегу вместе с М1.

6. В лодку садится М3, на берегу остаются только жены. Переправляется обратно и забирает с собой в лодку М1.

7. М3 и М1 переплывают реку, а в лодку садится Ж2, переплывает реку и возвращается обратно вместе с М2.

**138.** Первыми переправляются с фонариком папа и мама, на это уходит 2 минуты. Затем папа с фонариком возвращается. Вторыми переходят реку сын с дочерью. На это у них уходит 10 минут. С фонариком возвращается мама. Последними снова переходят мостик папа и мама. На это у них уходит 2 минуты. Итак, всего ушло $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ минут.

**139.** Взвесим любые 2 монеты. Если монеты в равновесии, то фальшивая монета – оставшаяся. Если же весы не в равновесии, то фальшивая монета на весах. Возьмем одну из монет, которые на весах, и ту монету, которая осталась. Если весы в равновесии, то фальшивая монета та, которая осталась. А если не в равновесии, то фальшивая монета та, которая была оставлена на весах. Таким образом, понадобится два взвешивания.

**140.** Достаточно двух взвешиваний. Разбиваем монеты на 3 кучки по 3 монеты и взвешиваем две кучки. Если весы в равновесии, то фальшивая в третьей кучке. Если нет, то фальшивая монета на той чашечке, которая выше. Вторым взвешиванием определяем фальшивую монету. Для этого из кучки, в которой есть фальшивая монета, берем любые 2 монеты и взвешиваем. Если весы в равновесии, то фальшивая монета — оставшаяся монета. А если весы не в равновесии, то фальшивая монета на той чаше весов, которая выше.

**141.** Решение аналогично предыдущей задаче. Разбиваем 27 монет на 3 кучки по 9 монет. Первым взвешиванием определяем кучку из 9 монет, в которой есть фальшивая монета. Далее эту кучку разбиваем на 3 кучки и 2 взвешиваниями определяем фальшивую монету, как в предыдущей задаче.

**142.** Берем по 12 монет и кладем их на чашечки весов. Если весы в равновесии, то в каждой из кучек по одной фальшивой монете. Оставшаяся монета — тоже фальшивая. Если весы не в равновесии, то перевесит чашка весов с 1 фальшивой монетой, а с 2 фальшивыми монетами чашечка будет вверху. Оставшаяся же монета — хорошая. Итак, первым взвешиванием мы определили кучку из 12 монет, среди которых есть 1 фальшивая монета. Разбиваем 12 монет на 3 кучки и взвешиваем любые 2 кучки по 4 монеты. Возможны 2 случая: а) если весы в равновесии, то на чашах настоящие монеты и отбираем эти 8 настоящих монет; б) если весы не в равновесии, то отбираем 4 монеты, которые перевесили, и 4 оставшиеся (которые не взвешивали).

**143.** Разделим песок пополам два раза. В итоге получим 2 кг 250 г. Применяя гири 200 г и 50 г, отвесим лишние 250 г.

**144.** Пронумеруем мешки: № 1, № 2, № 3, № 4. Возьмем из каждого мешка столько монет, каков его номер. Так как число монет будет $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, то в случае, когда все монеты настоящие, вес был бы равен 100 г. Но так как среди них есть фальшивые монеты, то вес монет будет больше. Если вес монет равен 101 г, то фальшивые монеты в первом мешке; если вес 102 г, то во втором; если вес равен 103 г, то в третьем; если вес равен 104 г, то в четвертом мешке.

## Задачи на разные методы решения

**145.** $1000 = 12 \cdot 60 + 4 \cdot 70$ и $1000 = 5 \cdot 60 + 10 \cdot 70$.

**146.** Первое, а значит, и второе утверждения старшего брата ложны, поэтому он получил кота. Второе, а значит, и первое утверждения младшего брата ложны, поэтому он получил мельницу. Тогда средний получил осла.

**147.** а) Переложить одну из спичек от знака «плюс» к числу II:
XII − IX = III;
б) Переложить спичку от числа XI к знаку «минус»:
VI + IV = X.

**148.** 3 кг и 4 кг.

**149.** Перевернуть обои часы. Когда пройдет 3 минуты, в семиминутных часах останется 4 минуты. Поставить яйцо в данный момент вариться. Когда 4 минуты закончатся, перевернуть семиминутные часы обратно. Получим $4 + 7 = 11$.

**150.** Дешевле обойдется совместная работа землекопов с 2 сторон.

**151.** Обозначим ягнёнка — *Я*, поросёнка — *П*, кошку — *К*, собачку — *С*. Тогда согласно условию, получим:
$Я + П = 5С$ (1), $П = 4К$ (2), $2К + П = 3С$ (3).
Подставим (2) в (3), тогда $6К = 3С$ или $2К = С$.

Подставим (2) в (1): $Я + 4К = 5С$.

Так как $С = 2К$, то $Я + 4К = 10К$ или $Я = 6К$.

*Ответ:* 6 кошек уравновесят ягнёнка.

**152.** 6 кг.

**153.** Два арбуза разрезать пополам, а один — двумя разрезами на 4 части. Тогда выполним всего 4 разреза.

**154.** Через 7 лет.

**155.** От 32 до 20.

**156.** Так как сумма чисел увеличилась на $99 - 75 = 24$, причем каждое из чисел увеличилось на 3, то всего чисел было $24 : 3 = 8$.

**157.** 8: четыре сверху и четыре снизу.

**158.** Да, если разговор был 1 января, а день рождения Коли 31 декабря.

**159.** Представим число 121 в виде произведения двух сомножителей: $121 = 1 \cdot 121 = 121 \cdot 1 = 11 \cdot 11$.

Так как ребят не может быть по 1 и рыбок по 1, то на рыбалку ходили 11 ребят, которые поймали все по 11 рыбок.

**160.** Рассмотрим, что будет получаться в каждом из различных случаев. Если сорвать банан, на дереве снова вырастет банан. Если сорвать апельсин, снова вырастет апельсин. Т.е. если срывать по одному плоду, ничего не меняется. Сорвем 2 банана, тогда на дереве будет 1 банан и 5 апельсинов, т.е. плодов стало на 1 меньше, бананов уменьшилось, апельсинов увеличилось. Больше по 2 банана не сорвать. Сорвем 2 апельсина, на дереве останется 3 банана и 3 апельсина. Сорвем банан и апельсин, тогда на дереве будет 3 банана и 3 апельсина. Таким образом, срывая по 2 плода, мы получаем, что число плодов уменьшится на 1, причем число бананов остается все время нечетным. Можно предложить такой вариант для ответа на 1 вопрос: срывать 4 раза по банану и апельсину вместе, в итоге останется лишь 1 банан. Так как на яблоне всегда остается один плод, то не сделать так, чтобы ничего не осталось.

**161.** Сметаны в банке с вареньем окажется столько же, сколько варенья в стакане со сметаной.

**162.** 15.

**163.** Пусть $n$ — число сторожей в бригаде, $k$ — число бригад, $m$ — число ночей, которое проспал один сторож.

Тогда $m \cdot n \cdot k = 1001$. Так как $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ и $n < m < k$, то $n = 7$, $m = 11$, $k = 13$. Значит, сторожей в бригаде будет 7.

164. 5, если у кошки-мамы нет своей кошки-мамы. В противном случае их 7 (2 бабушки-кошки и 5 мам-кошек).

165. Пусть первый ребенок получит четное число конфет, тогда у второго будет число конфет нечетным, у третьего четным и т. д., у девятого тоже нечетным, а он сидит рядом с первым. Значит, нельзя.

166. В шестеричной системе счисления, так как
$4(6 + 3) = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 6 \cdot 6 = 6^2 = 100 = 10^2$.

# Примерные тексты школьных олимпиад

## 5 класс

***Вариант 1***

1. Так как в году 365 или 366 дней, а в неделе 7 дней, то имеем $365 = 7 \cdot 52 + 1$ или $366 = 7 \cdot 54 + 2$. Поэтому если 1 января понедельник, то будет 53 понедельника, а если 1 января — например, четверг, то будет 52 понедельника. Итак, в году может быть 52 или 53 понедельника.
2. Чтобы оставшееся число было как можно меньше, надо зачеркнуть такие 3 цифры, чтобы оставшаяся впереди цифра была самой маленькой. Самая маленькая цифра в этом числе –1 стоит на третьем месте (0 не может стоять впереди), поэтому зачеркиваем цифры 2, 7 и 9. Тогда получим число 1834105.
3. Так как разность трехзначного, двузначного и однозначного чисел, состоящих из одинаковых цифр, есть число двузначное: $AAA - AA - A = BB$, то это возможно только в случае, когда $A = 1$. Тогда получаем: $111 - 11 - 1 = 99$.
4. Допустим, что гостей действительно больше пяти. Тогда правы и Сергей, и его сестра, а это противоречит условию задачи. Значит, гостей не больше пяти, и Сергей неправ. Но тогда должна быть права сестра, иначе снова нарушится условие задачи. Значит, гостей больше четырех. Но если их больше четырех и не больше пяти, то их ровно пять.
5. Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-то из 22   $(6 + 9 + 7)$ банок другого варенья. Значит, он съест не более 22 банок клубничного варенья и все варенье не сможет съесть.

*Вариант 2*

1. Так как площадь квадрата равна 36 $см^2$, то сторона квадрата будет равна 6 см. Тогда стороны прямоугольника, соответственно, будут равны 7 см и 3 см. Соответственно, площадь прямоугольника будет равна 21 $см^2$.
2. Так как сумма трёх двузначных чисел равна 295, а сумма самых больших трёх двузначных чисел будет 297, то какие-то слагаемые будут меньше 99. Рассматривая различные варианты, получим два решения: $99 + 99 + 97 = 295$ или $99 + 98 + 98 = 295$.
3. При первом взвешивании кладем в одну из чашек гирю и раскладываем гвозди так, чтобы установилось равновесие. Получаем 24 и 25 кг гвоздей. Затем вторым взвешиванием 24 кг делим пополам, взвешивая гвозди без гири. Получили 2 кучки по 12 кг. Искомое количество гвоздей получим как $25 + 12 = 37$. *Возможно и другое решение*. При втором взвешивании кладем гирю на весы и делим 25 кг так, чтобы получилось равновесие. Тогда на весах получим 12 и 13 кг. Искомые 37 кг получим как $24 + 13 = 37$.
4. Расположим всех учеников в порядке возрастания числа пирожков, ими купленных. Тогда получим такой порядок: Александр, Витя, Борис. Всего куплено 14 пирожков. Начнем рассматривать различные случаи. Пусть Борис купил 10 пирожков, тогда Александр купил 5 пирожков. Противоречие. Пусть Борис купил 8 пирожков, тогда Александр купил 4 пирожка и у Вити получается 2 пирожка. Противоречие. Пусть Борис купил 6 пирожков, тогда Александр — 3, Витя — 5. Все получается. Если же рассмотреть случай, когда Борис купил 4 пирожка, то получим, что у Вити будет 8 пирожков — больше всех. Опять противоречие. Аналогично противоречие получаем и при случаях, когда Александр купил 2 пирожка. Итак, получаем, что Александр купил 3 пирожка, Витя — 5, а Борис — 6 пирожков.
5. Да. Среди этих чисел есть как минимум одно положительное число, а остальные числа можно разбить на четверки, в каждой из которых сумма положительная.

*Вариант 3*

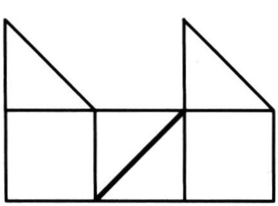
1. За 4 дня 10 человек могут выполнить половину всей работы, значит, вновь принятым рабочим за оставшиеся два дня на-

до выполнить вторую половину работы. Поэтому потребуется еще 20 рабочих.

2. Так как бабушек у вас 2 и 2 дедушки, то у них тоже было по 2 бабушки и 2 дедушки, а всего получается $4 \cdot 4 = 16$. Итак, у ваших дедушек и бабушек 16 дедушек и бабушек.
3. Так как произведение двух чисел равно 1000, а каждое из этих чисел не делится на 10, то эти числа не могут оканчиваться на 0. Так как $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, то это могут быть только 8 и 125. Тогда их сумма равна $125 + 8 = 133$.
4. Так как 4 карандаша дороже 5 тетрадей, то 1 карандаш будет дороже $\frac{5}{4}$ тетради. Тогда 5 карандашей будут дороже $\frac{25}{4}$ тетрадей. Но $\frac{25}{4} > 6$, поэтому 5 карандашей дороже 6 тетрадей.
5. Заметим, что после каждого забега все присутствующие на уроке физкультуры школьники получают нечётное количество конфет. Поэтому чётность количества полученных конфет у ребят, посетивших все уроки, должна быть одинаковой. Но из трёх чисел 27, 28, 31 первое и третье — нечётные, а второе — чётное. Значит, пропустил урок тот, у кого чётное количество заработанных конфет, то есть Боря.

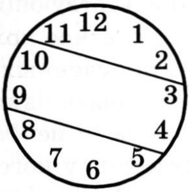
***Вариант 4***

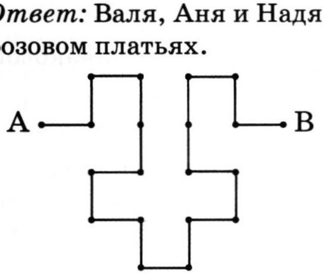
1. 3.
2. $$+\begin{array}{r}321\\11\\\hline 332\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}321\\11\\\hline 321\\321\phantom{0}\\\hline 3531\end{array}\qquad \begin{array}{l}А=3\\Б=2\\В=1\\Г=5\end{array}$$
3. Из трех чисел как минимум два являются одинаковой четности, значит, их сумма будет делиться на 2.
4. $a = 13 \cdot 17 + 12 = 233$
5. Решение показано на рис.



6. Надо вычеркнуть 100 цифр, причем оставить как можно больше цифр «9» впереди. Тогда до первой цифры «9» вычеркнем 8 цифр, до второй — 19, до третьей — 19, до четвёртой — 19, до пятой — 19.
Таким образом, мы вычеркнем $19 \cdot 4 + 8 = 84$ цифры. Осталось вычеркнуть еще 16 цифр, а именно цифры чисел 50, 51, 52 ... 56 (14 цифр) и дважды цифру 5 у чисел 57 и 58.
Всего, таким образом, вычеркнули 100 цифр. Получили число: 99999785960.

***Вариант 5***

1. 58.
2. 45 рублей, так как распилов надо сделать 9.
3. В сутках 24 часа, поэтому 100 ч = 4 · 24 ч + 4 ч = 4 сут. + 4 ч. Тогда парусник вернется в пятницу в 16 ч.
4. 


5. Из второго предложения ясно, что Аня и Валя не в зеленом платье, Надя — не в зеленом и не в голубом. Из третьего предложения следует, что Валя не в розовом и не в белом платье. Тогда Валя будет в голубом платье, а Галя в зеленом. Используя первое предложение, изобразив девочек по кругу, получим, что Галя будет стоять между Валей и Надей. Тогда Аня в белом, а Надя в розовом платье.
*Ответ:* Валя, Аня и Надя соответственно в голубом, белом и розовом платьях.
6. 

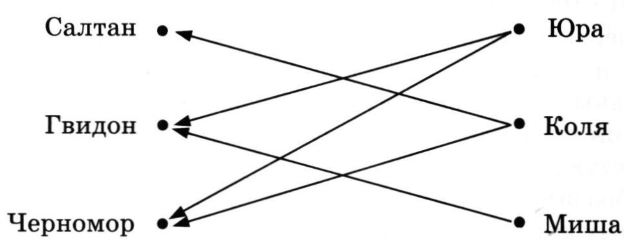

***Вариант 6***

1. $9 + n \cdot 99 = 999$, $n = 10$.
*Ответ:* 10 раз.

2. а) $(7 \cdot 9 + 12) \cdot 3 - 2 = 187$,
б) $(7 \cdot 9 + 12) \cdot (3 - 2) = 75$.

3. 30 мин · 2 = 15 мин — Серёжа едет в школу автобусом в одну сторону.
1 ч 30 мин — 15 мин = 1 ч 15 мин — Сережа идет пешком в одну сторону.
1 ч 15 мин + 1 ч 15 мин = 2 ч 30 мин
*Ответ:* 2 ч 30 мин

4. Для решения задачи применим графы (см. рис.)



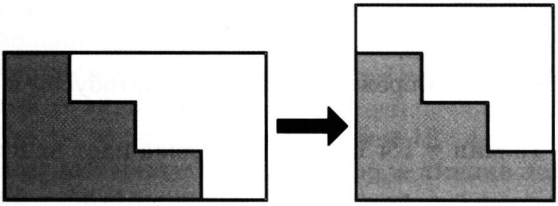

Так как к Салтану идет лишь одна стрелка, то Коля будет играть Салтана. Тогда Коля не будет Черномором, а значит, Черномором будет Юра и Миша — Гвидоном.

5. *Решение.*
Количество кубиков: $6 \cdot 4 \cdot 18 = 432$.
Выложенные в ряд они составляют длину 4 м 32 см.
*Ответ*: хватит.

***Вариант 7***

1. 9999999 — наибольшее и 1000000 — наименьшее.
2. 5 щенят и 12 утят.
3. 38 рублей.
4. 1) Наполняем семилитровый сосуд, переливаем из него 5 л в пятилитровый, затем 5 л выливаем, а оставшиеся 2 л в семилитровом сосуде выливаем вновь в пятилитровый сосуд.
2) Снова наполняем семилитровый сосуд, отливаем из него 3 л в пятилитровый сосуд. Тогда в семилитровом остается 4 л. Выливаем все из пятилитрового сосуда и выливаем в него 4 л из семилитрового сосуда.
3) Наполняем вновь семилитровый сосуд, отливаем из него 1 л в пятилитровый сосуд. Таким образом, в семилитровом сосуде получаем 6 л.

5.



*Вариант 8*

1. $101101 \cdot 999 - 101 \cdot 999999 =$
$= 101 \cdot 1001 \cdot 999 - 101 \cdot 999 \cdot 1001 = 0.$
2. На первый грузовик поместить 3 полные бочки, 1 наполненную наполовину, 3 пустые бочки; на второй грузовик — 3 полные, 1 наполненную наполовину и 3 пустые бочки; на третий грузовик — 1 полную, 5 наполненных наполовину, 1 пустую.
3. Изобразим таблицу набранных очков соответственно при верных 20, 19 и т.д. вопросах.

| Верных ответов | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Из таблицы видно, что ученик ответил верно на 13 вопросов. Можно было заметить закономерность, что каждый раз число набранных очков уменьшается на 22.
*Ответ:* 13.
4. Площадью по 1 кв. ед. будет 9 прямоугольников; 12 — с площадью по 2 кв. ед.; 6 прямоугольников — по 3 кв. ед.; 4 прямоугольника имеют площадь по 4 кв. ед.; 4 прямоугольника имеют площадь по 6 кв. ед. и 1–9 кв. ед.
*Ответ:* 36 прямоугольников.
5. В произведении содержится 5 «пятерок»: по одной дают разложения 10, 15 и 20 на простые множители; а $25 = 5 \cdot 5$. Произведение каждой «пятерки» на чётный множитель даёт нуль, поэтому произведение оканчивается 5 нулями.
*Ответ:* 5 нулей.

*Вариант 9*

1. Так как в каждый день 6 уроков, то перемен будет 5. Так как дней 5, то всего Вася съест 25 конфет.
2. Внучке 7 лет, дедушке 84 года.

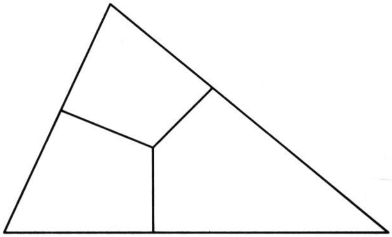
3. Используем таблицу.

| Содержимое мешка / Номер мешка | Вермишель | Крупа | Сахар |
|---|---|---|---|
| 1 | | – | + |
| 2 | – | + | |
| 3 | + | – | – |

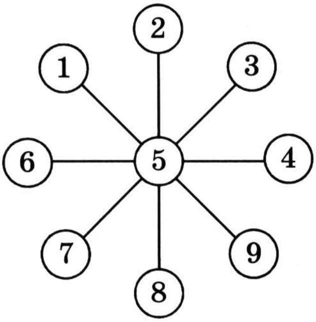
Так как в первом мешке не крупа, то ставим в соответствующей клетке «–». Аналогично, во второй строке ставим «–» — против вермишели. Так как в третьем мешке — не крупа и не сахар, то ставим «минусы» в столбцах с надписями «крупа» и «сахар». Тогда из таблицы получаем, что в третьем мешке — вермишель, во втором — крупа (крупы нет в 1 и 3 мешках), значит, сахар — в 1 мешке.

*Ответ:* В мешке с надписью «крупа» находится сахар, с надписью «вермишель» — крупа, с надписью «крупа или сахар» — вермишель.

4. Да, возможный вариант изображен на рис.

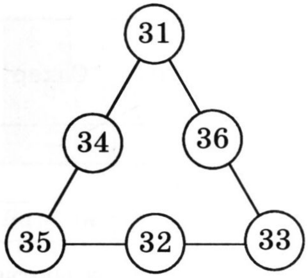


5. $10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$. Разместим «5» в центре. Тогда возможный вариант может быть такой (см. рис.).



*Вариант 10*

**1.**



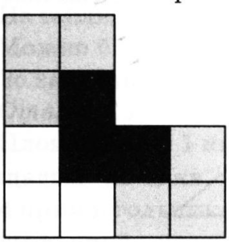

**2.** Одна чашка и одно блюдце вместе стоят 25 рублей, поэтому 4 чашки и 4 блюдца будут стоить 100 рублей. Так как по условию задачи 4 чашки и 3 блюдца стоят 88 рублей, то одно блюдце стоит 12 рублей. Тогда одна чашка будет стоить $(25 - 12)$ руб. = 13 руб.

*Ответ:* цена чашки 13 рублей, цена блюдца 12 рублей.

**3.** Если бы все поросята встали на задние ноги, то на земле оказалось бы $30 \cdot 2$ ног. Тогда вверху будет $84 - 60 = 24$ (ноги). Так как каждый поросенок вверх поднял по две ноги, то поросят будет $24 : 2 = 12$. Тогда гусей будет $30 - 12 = 18$.

*Ответ:* 12 поросят и 18 гусей.

**4.**



**5.** Золушка взяла зернышко из мешка с надписью «смесь»; так как ни одна табличка не соответствовала содержимому мешка, то там был мак или просо. Если взятое Золушкой зернышко — мак, то в мешке с надписью «смесь» — мак. Тогда в мешке с надписью «мак» — просо, а в мешке с надписью «просо» — смесь.

Аналогично, если взятое зернышко — просо, то в мешке с надписью «смесь» — просо. Тогда в мешке с надписью «мак» — смесь, а в мешке с надписью «просо» — мак.

**6.** Напишем искомую сумму дважды:

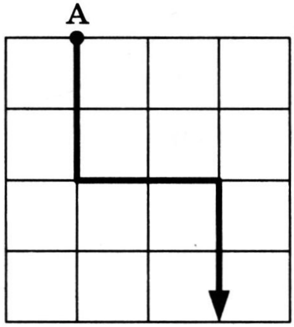
$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 109 + 110 + 111.$

$S = 111 + 110 + 109 + \ldots + 3 + 2 + 1.$

Сложим почленно:
$2S = (1 + 111) + (2 + 110) + \ldots + (110 + 2) + (111 + 1) = 112 \cdot 111.$
Тогда $S = 112 \cdot 111 : 2 = 6216.$

***Вариант 11***

1. 10, 25, 40.
2. 600 : 6 = 100 (г) — съест Малыш за 1 минуту
6 : 2 = 3 (мин.) — за такое время Карлсон съест все варенье
600 : 3 = 200 (г) — съест варенья Карлсон за 1 минуту
100 + 200 = 300 (г) — могут съесть вместе варенья Малыш и Карлсон
600 : 300 = 2 (мин) — за такое время съедят варенье вместе Малыш и Карлсон.
*Ответ:* 2 мин.
3.




4. С помощью трехлитровой банки нальем 6 л воды в ведро. Еще раз нальем 3 л воды в банку и наполним семилитровое ведро доверху. Тогда в банке останется 2 л воды, которую выльем в кастрюлю. Добавим к ним 3 л воды с помощью банки, получим всего 5 л воды. Возможны и другие варианты решения.
5.

$$\begin{array}{r} \times\ 315 \\ 41 \\ \hline +\ 315 \\ 1260 \\ \hline 12915 \end{array}$$

6. Молоко в кувшине, лимонад в бутылке, квас в банке, вода в стакане.

### *Вариант 12*

1. Так как посажено 10 кустов, то промежутков между ними будет 9. Поэтому расстояние между соседними кустами будет $90 : 9 = 10$ (дм).
2. $x = 9a - 8$
3. Велосипедист прошел пешком $\frac{1}{3}$ пути, то есть в 2 раза меньше, чем проехал на велосипеде. Времени же затратил вдвое больше. Поэтому он ехал в 4 раза быстрее, чем шел.
4. $1 \cdot (2 + 3) \cdot 4 \cdot 5 = 100$.
5. При разрезании каждого листа на 3 части число листов увеличивается на 2. Добавилось: $15 - 9 = 6$ (листов). Значит, $6 : 2 = 3$ (листа) бумаги разрезали.
6. На первые девять страниц потребуется 9 цифр, на каждые следующие 90 страниц надо по 2 цифры на каждую страницу, а значит, надо $2 \cdot 90$ цифр. Пусть в книге $x$ страниц, тогда страниц с тремя цифрами будет $x$ — 99, а цифр на них — $3 \cdot (x - 99)$.
   Получаем уравнение: $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot (x - 99) = 1392$.
   Решая его, получаем $x = 500$.
   *Ответ:* В книге 500 страниц.

### *Вариант 13*

1. Возможный вариант:
   $2222 - 222 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2016$
2. В сутках 24 ч, из них Стрекоза спала $24 : 2 = 12$ (ч), танцевала $24 : 3 = 8$ (ч), пела $24 : 6 = 4$ (ч). Всего на эти дела она потратила $12 + 8 + 4 = 24$ (ч), поэтому на подготовку к зиме времени у нее не осталось.
3. $26 \cdot 25 - 25 \cdot 24 + 24 \cdot 23 - 23 \cdot 22 + 22 \cdot 21 - 21 \cdot 20 + 20 \cdot 19 -$
   $- 19 \cdot 18 + 18 \cdot 17 - 17 \cdot 16 + 16 \cdot 15 - 15 \cdot 14 =$
   $= 25 \cdot (26 - 24) + 23 \cdot (24 - 22) + 21 \cdot (22 - 20) + 19 \cdot (20 - 18) +$
   $+ 17 \cdot (18 - 16) + 15 \cdot (16 - 14) =$
   $= 2 \cdot (25 + 23 + 21 + 19 + 17 + 15) =$
   $= 2 \cdot (40 + 40 + 40) = 2 \cdot 120 = 240$.
4. $7243 \cdot 29 = 210047$.
5. Так как девочка ходит в детский сад, то Боре не 5 лет. Так как Аня старше Бори, то Ане 13 или 15 лет. Но сумма лет Ани и Веры делится на 3, поэтому Ане 13 лет, тогда Вере

5 лет. Тогда, так как Аня старше Бори, Боре 8 лет. Гале остается 15 лет.

*Ответ:* Вере 5 лет, Боре 8 лет, Ане 13 лет, Гале 15 лет.

6. $100 - 10 = 90$ (чел.) — знали немецкий или французский языки;
$90 - 75 = 15$ (чел.) — не знали немецкого языка;
$90 - 83 = 7$ (чел.) — не знали французского языка;
$90 - (15 + 7) = 68$ (чел.) — знали и французский, и немецкий языки.
*Ответ:* 68 туристов знали и французский, и немецкий языки.

***Вариант 14***

1. Можно решить устно: перенести 3 в правую часть и получить 30, затем поделить обе части на 30 и получить в числителе 7. Так как числитель равен знаменателю, то $x - 3 = 7$, откуда находим $x = 10$.
2. Площадь фигуры равна 131.
3. Возможны 2 варианта параллелепипеда, построенного из 18 кубиков высотой 3 кубика: $3 \cdot 3 \cdot 2$ и $3 \cdot 6 \cdot 1$. Площадь поверхности данных параллелепипедов будет равна 42 и 54 площадей 1 грани. Учитывая, что площадь грани равна $\frac{19}{6}$ см$^2$, получим площадь поверхности: 133 см$^2$ и 171 см$^2$.
4. Так как вычитаемое и разность в сумме дают уменьшаемое, то два уменьшаемых будут равны 26, а значит, уменьшаемое будет равно 13.
5. Решим задачу с конца. Так как после последней игры у первого пирата осталось 15 монет, а проиграл он половину, то до третьей (последней) игры у него было 30 монет, соответственно, у второго пирата их было 18. Так как во второй игре второй проиграл половину своих монет, то у него до игры было 36 монет, соответственно, у первого было 12 монет. Так как в первой игре первый пират проиграл половину своих монет, а после игры у него осталось 12 монет, то первоначально у первого пирата было 24 монеты. Соответственно, у второго до первой игры было $36 - 12 = 24$ монеты. Таким образом, первоначально у каждого пирата было по 24 монеты.

***Вариант 15***

1. Так как 3 ученика делают за 3 минуты 3 самолетика, то за 9 минут они сделают 9 самолётиков.
*Ответ:* 3 ученика.

2. Так как масса всей рыбы будет равна

$(1900 + 100) \cdot 9 + 1000 = 19\,000$ (г),

то каждому рыбаку должно достаться по 1900 г. Значит, разделить рыбу можно следующим образом: 1900 г; 100 г и 1800 г; ... 900 г и 1000 г.

3. Сумма возрастов всех футболистов была равна $11 \cdot 22 = 242$, а после удаления стала $10 \cdot 21 = 210$. Значит, возраст удаленного футболиста 32 года.

4. Обозначим за $x$ и $y$ — соответственно первоначальное число посетителей и новую цену билета. Тогда, после снижения цены, посетителей будет $1{,}5x$, а сбор денег $1{,}5xy$. Так как первоначально денег собрали $150x$, а сбор увеличился на 25%, то получаем уравнение $1{,}5xy - 150x = 0{,}25 \cdot 150x$. Решая его, находим $y = 125$ руб., то есть цену снизили на 25 руб.

5. Задача имеет много решений, например:

4, –5, 4, –5, 4; 5, – 6; 5; –6; 5 и т. д.

*Вариант 16*

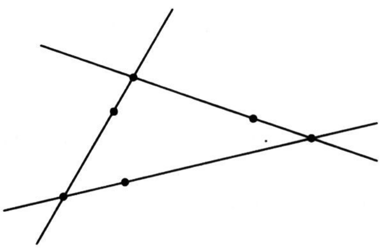
1. $1111 + 999 - 88 - 7 = 2015$

или

$1111 + 888 + 22 - 6 = 2015$.

2. 48 лет и 4 года.

3. Возможный вариант показан на рис.



4. Второй охотник съел столько каши, сколько положил крупы, поэтому третий охотник от него ничего не получил. Поэтому все патроны надо отдать первому охотнику.

5. В первом круге число слов должно делиться на 4, во втором — на 3, а в последнем — на 2. Наименьшее число, делящееся на 2; 3; 4, будет 12. Значит, наименьшее число слов в считалке будет равно 12.

## 6 класс

***Вариант 1***

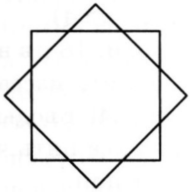
1. Будет два решения: 1) $45 \cdot 2 = 90$; $13 \cdot 6 = 78$.
   2) $15 \cdot 4 = 60$; $39 \cdot 2 = 78$.
2. Например, число 1111124 (делится на 1, на 2 и на 4).
3. В 120 г 15%-ного раствора содержится 18 г соли. 18 г в новом растворе соли будет составлять уже 5%. Поэтому масса раствора будет равна 360 г. Значит, надо добавить 240 г воды.
4. Произведение чисел нечетно, следовательно, все пять чисел нечетны, и их сумма также должна быть нечетной.
5. Рассмотрим двух шестиклассников, стоящих рядом. Про карточки, которые правый из них (П) получил от левого (Л), они дали разные ответы. Значит, один из них говорит правду, а другой — лжет. Пусть следующий по кругу за П — шестиклассник К. Тогда в паре П — К также один говорит правду, а другой — лжет. И так далее. Значит, говорящие правду и ложь — чередуются. Поэтому их должно быть четное количество. Значит, все шестиклассники не могли сказать: «У меня теперь карточки разных цветов».

***Вариант 2***

1. $1 : (2 : 3 : 4 : 5) = 30$
2. Например, 1, 4, 8, 2, 6, 3, 9.
3. Пусть сестер в семье $x$. Тогда из ответа Сергея следует, что братьев в семье $x + 1$. А из ответа Лены получаем, что число братьев $x + 1$ больше числа сестер $x - 1$ (без Лены) в три раза. Имеем уравнение: $x + 1 = 3(x - 1)$. Решая его, получаем $x = 2$. Таким образом, в семье будет 2 сестры и 3 брата, итого 5 детей.
4. Если мы положим по отдельности на весы 4 кг и 6 кг, то весы покажут $y$ каждого веса какой-то сдвиг, то есть на вес $4 + 6 = 10$ кг сдвиг стрелки влияет дважды, а на вес 9 кг — только один раз. Значит, сдвиг стрелки равен $10 - 9 = 1$ кг. Следовательно, правильный вес на 1 кг меньше того, что показывают весы. Значит, если на весы поставить гирю в 2 кг, то они покажут 3 кг.
5. Если сумма двух натуральных числе равна 2019, то одно из них четное, а другое нечетное. Если к четному числу прибавить 25, получится нечетное число. Аналогично, если к нечетному числу прибавить 25, получится четное число. А

произведение четного и нечетного чисел должно быть числом четным и поэтому не может оканчиваться на 2019.

***Вариант 3***

1. $(2 : 3) : (4 : 5 : 6) = 5$
2. 
3. Так как сумма вычитаемого и разности равна уменьшаемому, то уменьшаемое будет половина всей суммы, то есть равно 1010.
4. Обозначим за $x$ число упаковок по 24 шоколадки, тогда $x + 5$ будет число упаковок по 20 шоколадок. Найдем число шоколадок в этих упаковках: $24x$ — число шоколадок в упаковках по 24 и $20(x + 5)$ — число шоколадок в упаковках по 20. Так как эти выражения равны, то имеем уравнение:
$24x = 20(x + 5)$, решением которого будет $x = 25$
Тогда учеников в школе будет $24 \cdot 25 = 600$.
5. Предположим, что такое возможно. Рассмотрим любого ученика. В первое свое дежурство он отдежурил с двумя одноклассниками. Во второе — с двумя другими и т. д. Так как у него 21 одноклассник (нечетное число), то после десятого его дежурства останется ровно один одноклассник, с которым он не отдежурил. Полученное противоречие завершает доказательство. Поэтому такого получиться не могло.

***Вариант 4***

1. Возможный вариант:
$333 \cdot 3 + 333 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 2016$
2. Так как после каждого боя выбывает один боксер, то всего должен выбыть 31 боксер, так как победитель один. Таким образом, надо провести 31 бой.
3. Промежутков между стоящими в очереди на 1 меньше, чем стоящих людей. Так как в конце в очереди было 125 человек, то встало 62 человека между 63 во второй раз. Тогда первоначально было 32 человека.
4. Число делится на 36, если оно делится и на 4, и на 9. Так как сумма цифр 5, 2, 2 равна 9, то сумма двух недостающих

цифр должна равняться 0, 9 или 18. Учитывая, что число должно делиться на 4, а предпоследняя цифра равна 2, то последняя цифра может быть лишь 0, или 4, или 8. Тогда ответ будет: 52524, 52128, 52020, 52920.

5. $600 \cdot 40 : 100 = 240$ (г) — содержится соли в 600 г жидкости;
$240 : 12 \cdot 100 = 2000$ (г) — будет 12%-й жидкости;
$2000 - 600 = 1400$ (г) — воды надо добавить.
*Ответ:* 1400 г.

6. Так как Аня не проигрывала мальчикам в шахматы, то она — лучший шахматист. Так как художник не нарисовал своего портрета, а нарисовал портрет Игоря, то Игорь — лучший математик, а Олег — лучший художник.
*Ответ:* Олег — лучший художник, Аня — лучший шахматист, Игорь — лучший математик.

***Вариант 5***

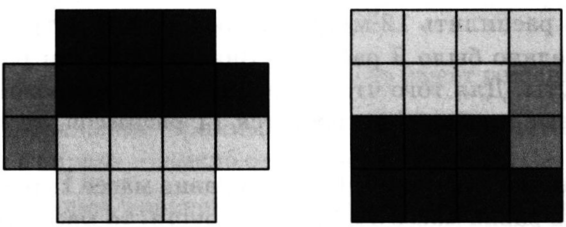
1.

$$\begin{array}{r} 59{,}27 \\ +\,44{,}45 \\ 78{,}43 \\ \hline 182{,}15 \end{array}$$

2. $55 : 5 + 5 = 16$

3. Обозначим число гусей в одном хлеве за $x$, а число козлят за $y$, тогда, учитывая, что ног в одном хлеве должно быть 10, получим уравнение: $2x + 4y = 10$.
Из данного уравнения имеем, что число козлят может быть только 1 или 2, соответственно, гусей будет 3 или 1. Тогда размещение будет такое: в двух хлевах будет по 1 козленку и 3 гусям, в трёх хлевах — по 2 козленка и 1 гусю.

4. Возможный вариант разрезания показан на рис.



5. Необходимо вынуть шарик из ящика с надписью «черный или белый». Если вынутый шарик окажется белым, значит, в этом ящике 2 белых, в ящике с надписью «2 белых» будет

2 черных, а с надписью «2 черных» будут черный и белый. Аналогично рассуждаем, если вынутый шарик — черный.

***Вариант 6***

**1.** Возможный вариант:
$2016 = 2013 + 9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4$.

**2.** Числа $\frac{8}{9}$ и 1 представим в виде дробей со знаменателем, кратным 15. Тогда $\frac{8}{9} = \frac{40}{45}$, $1 = \frac{45}{45}$. Между числами $\frac{8}{9}$ и 1 лежат дроби $\frac{41}{45}$, $\frac{42}{45}$, $\frac{43}{45}$, $\frac{44}{45}$. Условию удовлетворяет лишь $\frac{42}{45} = \frac{14}{15}$.

*Ответ:* $\frac{14}{15}$.

**3.** $\frac{\text{VI}}{\text{IX}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

**4.** Так как после зачеркивания получается наибольшее число с суммой цифр 13, то вторая и третья цифры равны 9 и 4. Так как первая цифра больше последней в 4 раза и все цифры различны, то первая цифра будет 8, а последняя — 2. В результате получаем число 8942.

*Ответ:* старику Хоттабычу 8942 года.

**5.** Решается с помощью уравнения:
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$$
*Ответ:* 28 учеников.

***Вариант 7***

**1.** Чтобы распилить 12-метровое бревно на 3-метровые столбики, сделано было 3 распила. Значит, на один распил ушло 4 минуты. Для того чтобы распилить 12-метровое бревно на метровые чурбаки, потребуется 11 распилов, то есть 44 минуты.

**2.** Так как масса 6 слив и 1 яблока равна массе 1 груши, а масса 10 слив равна массе 3 яблок и 1 груши, то масса 10 слив равна массе 6 слив и 4 яблок, то есть масса 1 сливы равна массе 1 яблока. Поэтому масса 1 груши равна массе 7 слив.

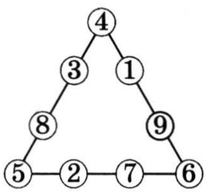
**3.** $550 - 55 = 495$ (руб.) — стала цена в итоге.

4. Так как число после приписывания двух цифр должно делиться на 15, значит, оно будет делиться на 3 и на 5. По признаку делимости на 5 последняя цифра в числе может быть лишь 0 или 5. Используя признак делимости на 3, получим, что первая цифра может быть 3, 6, 9 (если последняя цифра 0) или 1, 4, 7 (если последняя цифра — 5). Тогда ответом будут числа: 1155, 3150, 4155, 6150, 7155, 9150.

5. Так как Володя учится в 6 классе, а Герасимов в 5 классе, то Володя не Герасимов. Так как отец Иванова — учитель, отец Володи — инженер, то Володя — не Иванов. Тогда Володя — Семенов, Миша — Иванов, а Петя — Герасимов.
Можно для наглядности применить графы или таблицы.

***Вариант 8***

1. Возможный вариант указан на рис.




2. $$\frac{74\cdot147-73}{73\cdot147+74}=\frac{74\cdot(74+73)-73}{73\cdot(73+74)+74}=\frac{74\cdot74+74\cdot73-73}{73\cdot73+73\cdot74+74}=$$
$$=\frac{74\cdot74+73(74-1)}{73\cdot73+74(73+1)}=1.$$

3. Произведение будет равно 0, если хотя бы один из множителей равен 0. Таким образом, $|x|+\frac{3}{11}=0$ или $\frac{5}{3}x+15=0$.

Решим первое уравнение: $|x|+\frac{3}{11}=0$.

Тогда $|x|=-\frac{3}{11}$. Данное уравнение не имеет решений, так как слева выражение принимает только неотрицательные значения, а справа — число отрицательное.

Решим второе уравнение: $\frac{5}{3}x+15=0$. Перенесем 15 в правую часть и выразим $x$: $x=-15:\frac{5}{3}=-\frac{15\cdot3}{5}=-9$.

*Ответ*: $x= -9$.

4. Пусть $x$ — число страниц, которое было в книге. В первый день прочитали $(0{,}2x + 16)$ страниц; осталось прочитать во второй и третий дни $(0{,}8x - 16)$ страниц; во второй день прочитали $(0{,}3(0{,}8x - 16) + 20) = (0{,}24x + +15{,}2)$ страниц; в третий день осталось $(0{,}56x - 31{,}2)$ страниц. Так как в третий день прочитали 0,75 остатка и еще 30 книг, то остаток будет составлять 120 страниц. В итоге получаем уравнение: $0{,}56x - 31{,}2 = 120$, откуда находим $x = 270$.

*Ответ:* 270 страниц.

5. Так как второе и третье сообщения ложны, то *А* является третьей планетой, а *Б* — не второй, поэтому *Б* — первая планета от звезды. Тогда *В* будет второй планетой, на которой живут инопланетяне.

***Вариант 9***

1. Самое маленькое трехзначное число 100, а самое большое — 999. Поэтому всего трехзначных чисел будет $999 - 99 = 900$.

2. Обозначим соответственно первую, вторую и третью цифру числа за $a, b, c$. Тогда число можно записать

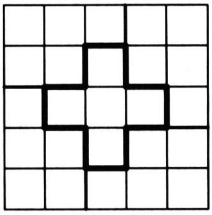
$$100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c =$$
$$= 100100a + 10010b + 1001c = 1001(100a + 10b + c) =$$
$$= 7 \cdot 11 \cdot 13(100a + 10b + c).$$

3.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 8126 \\ 8126 \end{array} \\ \hline 16252 \end{array}$$

Данное число делится на 7, на 11, на 13.

4. Да, возможный вариант показан на рис.



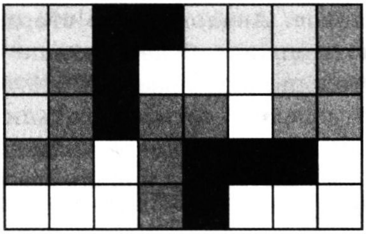
5. Для доказательства составим таблицу зависимости числа набранных очков от числа решенных задач.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число решенных задач | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| Число набранных очков | 20 | 17 | 14 | 11 | 8 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 |

Из таблицы видно, что существует всего 8 различных возможностей получения очков. А так как учеников было 9, то по крайней мере два из них получили одинаковое количество очков.

***Вариант 10***

1. Так как в один конец Дима пешком тратит на 20 минут больше, чем на велосипеде, то в оба конца он потратит пешком больше на 40 минут. Значит, всего на путь туда и обратно пешком он потратит 1 час.
2. Возможный вариант показан на рис.



3. Так как каждая грань большего кубика в 9 раз больше грани маленького, то и краски понадобится в 9 раз больше, то есть 18 граммов.
4. Решение лучше найти подбором. Пусть Маша за все покупки заплатила по 13 рублей, тогда покупок она сделала 18 и 5 рублей осталось ($239 = 13 \cdot 18 + 5$). Но 5 рублей остаться не может, так как разность в стоимости 1 блокнота и 1 тетради составляет 2 рубля. Денег должно остаться четное число. Значит, надо сделать 17 покупок, а 18 рублей доплатить за 9 блокнотов. Тогда тетрадей будет 8, а блокнотов — 9. Других решений не будет, так как следующее четное число после 18 будет 34. Оно получается при 15 покупках, а так как $34 : 2 = 17$, то получается противоречие.
5. Если Толя лжец, то и Вася лжец. Но тогда Петя не может быть ни лжецом (так как он тогда бы сказал правду), ни рыцарем (так как он тогда бы солгал). Значит, Толя не может быть лжецом.

***Вариант 11***

1. Так как знаменатель второй дроби в 20 раз больше знаменателя первой дроби, то корень уравнения можно найти устно: $x = 12{,}3 \cdot 20 + 4 = 250$.

**2.** Разложив 3232 на множители, получим:
$3232 = 32 \cdot 101 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 101$.
Так как все двойки должны быть в одном числе, то эти числа будут 32 и 101. Так как наименьшее кратное двух взаимно простых чисел будет равно их произведению, то оно будет равно 3232.

**3.** Из уравнения $13{,}5x = 12{,}5y$ следует, что $x < y$, если $x$ и $y$ — положительные числа; $x = y$, если $x = 0$ и $y = 0$; $x > y$, если $x$ и $y$ — отрицательные числа.

**4.** Так как верхние прямоугольники имеют общую сторону и площадь правого в 2 раза больше, то и его вторая сторона будет в 2 раза больше. Аналогично и вторая сторона правого нижнего прямоугольника будет больше стороны верхнего левого прямоугольника в 3 раза. А это означает, что площадь нижнего правого четырехугольника будет в 6 раз больше площади левого верхнего прямоугольника, то есть будет равна 12 см$^2$. Поэтому площадь всего прямоугольника будет равна 24 см$^2$.

**5.** Пусть гостей будет больше 7. Тогда правы будут и мама, и брат Миша. А это противоречит условию задачи. Значит, гостей не больше 7 и Илья тогда не прав. Так как Миша прав, то больше 6 и не больше 7 гостей, будет ровно 7 гостей.

### *Вариант 12*

**1.** За 1 день первая и вторая овцы съедят вместе $(1 + \frac{1}{2})$ копны сена, а все остальные: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ (копны сена). Так как $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} << \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1$, а $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} < \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, то первые две овцы имеют большую скорость поедания, а значит, съедят 1 копну сена быстрее.

**2.** Андрей и Борис менялись местами четное число раз, поэтому Андрей останется впереди Бориса. Андрей и Виктор менялись местами также четное число раз, поэтому Андрей останется впереди Виктора. Борис же и Виктор менялись местами нечетное число раз, поэтому Виктор придет раньше Бориса. Тогда порядок спортсменов на финише будет такой: Андрей, Виктор, Борис.

3. Разделим всех учеников на 2 группы: в первой — мальчики, во второй — девочки. Затем мальчиков, которые не любят математику, переведем во вторую группу, а девочек, которые любят математику, — в первую. Численность групп от этого не изменятся. Но в первой группе будут все ученики, которые любят математику, поэтому учеников, которые любят математику, столько же, сколько и мальчиков.
4. Например: 20142014...2014 (цифры 2, 0, 1, 4 повторяются 2014 раз).
5. Положим на весы одну монету из первого мешка, две — из второго, три — из третьего, ... десять — из десятого. Весы тогда покажут вес $(550 - m)$ г, где $m$ — число фальшивых монет на весах. Значит, в мешке с номером $m$ будут фальшивые монеты. Понадобилось всего одно взвешивание.

# Тексты муниципальных олимпиад по математике

## 5 класс

***Вариант 1***

1. 1) $58{,}4 \cdot 4 = 233{,}6$ (км) — расстояние, пройденное первым поездом за 4 ч.
   2) $233{,}6 + 25{,}6 = 259{,}2$ (км) — расстояние, пройденное вторым поездом за 4 ч.
   3) $259{,}2 : 4 = 64{,}8$ (км/ч) — скорость второго поезда.
   *Ответ:* 64,8 км/ч.
2. Добрыня Никитич.
3. С = 4, Р = 7, П = 3, К = 8, Т = 2, О = 9

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 43972 \\ 43972 \end{array} \\ \hline 87944 \end{array}$$

4. Заяц. Так как зайцев на 30 больше, чем волков, то без 30 зайцев животных в лесу будет 70, причем зайцев и волков будет одинаково. Так как волков на 25 больше, чем медведей, то с 25 дополнительными медведями в лесу животных будет 95, причем всех животных будет поровну. Но 95 на 3 не делится. Значит, лиса не права.

**5.** $89089089089 \cdot 7373 - 73073073073 \cdot 8989 =$
$= 89\,1001001001 \cdot 73\,1001 - 73 \cdot 1001001001 \cdot 89 \cdot 1001 = 0.$

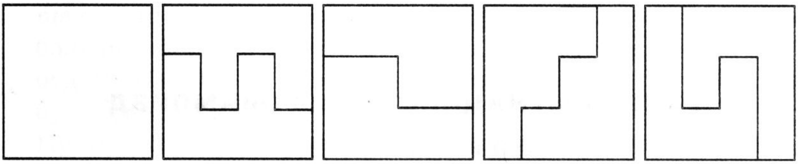
***Вариант 2***

**1.** Заметим, что разность 2000 и 1999 равна 1, аналогично разность 1998 и 1997 равна 1 и т.д. Всего таких разностей будет 1000. В результате получается, что значение выражения равно 1000.

**2.** А = 6, Б = 9, С = 1.

$$\begin{array}{r} 6 \\ +\ 99 \\ 6 \\ \hline 111 \end{array}$$

**3.** См. рис.



а б в г д

**4.** Так как больше всего ударов нанес Илья Муромец — 7, а меньше всех Алеша Попович, то Добрыня Никитич нанес от 4 до 6 ударов. Всего ударов великаны получили от 14 до 16. Из этого промежутка только число 15 делится на 3. Следовательно, великанов было 5.

**5.** Митя, Толя, Сеня, Костя, Юра — первый вариант;
Митя, Толя, Костя, Сеня, Юра — второй вариант.

***Вариант 3***

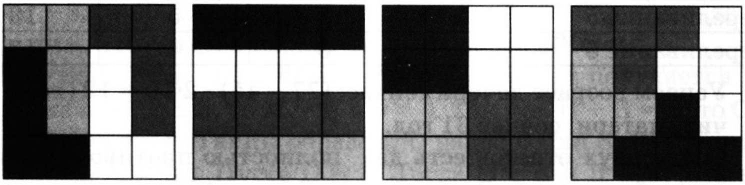
**1.** $$\frac{2004-2003+2002-2001+\ldots+2-1}{2004\cdot 45+55\cdot 2004} = \frac{1002}{2004(45+55)} =$$

$$= \frac{1002}{2004\cdot 100}.$$

Так как учащиеся по большинству учебников не изучали сокращение дробей, то ответ можно оставить в таком виде.

**2.** Для нумерации страниц с первой по девятую понадобится 9 цифр, для нумерации страниц с 10 по 99 понадобится $90 \cdot 2 = 180$ (цифр). Итак, использовано 189 цифр. Осталось $204 - 189 = 15$. Так как с сотой страницы на нумерацию одной страницы потребуется 3 цифры, то всего страниц в книге будет $99 + 15 : 3 = 99 + 5 = 104$.

*Ответ:* В книге 104 страницы.

3. 

4. Так как в квартирах № 1 и № 2 жил не чёрный котёнок, то чёрный котёнок жил в квартире № 3. Так как белый котёнок жил не в квартире № 1, а квартира № 3 занята чёрным котёнком, то белый котёнок живёт в квартире № 2. Тогда рыжий котёнок живёт в квартире № 1.

   *Ответ:* В квартире № 1 жил рыжий котёнок; в квартире № 2 жил белый котёнок; в квартире № 3 жил чёрный котёнок.

5. Решаем задачу с конца.

   1) $(1 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 3$ (конфеты) — осталось после Коли.

   2) $(3 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 7$ (конфет) — осталось после Ани.

   3) $(7 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 15$ (конфет) — осталось после Феди.

   4) $(15 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 31$ (конфета) — была в коробке.

   *Ответ:* В коробке была 31 конфета.

6. Пусть $2x$ кг весит туловище щуки, тогда голова будет весить $(x + 1)$ кг. Из условия, что туловище весит столько же, сколько голова и хвост вместе, получим уравнение:
   $2x = x + 1 + 1$.
   Откуда $x = 2$, а вся щука будет весить 8 кг.
   *Ответ:* Щука весила 8 кг.

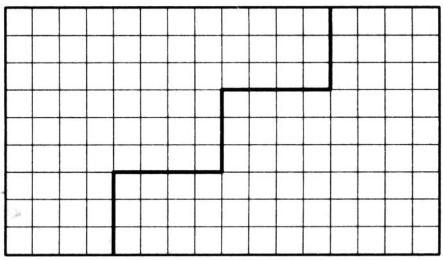
***Вариант 4***

1. Возможный вариант.

| | Сосуд 3 л | Сосуд 5 л | Сосуд 20 л |
|---|---|---|---|
| Первоначальное состояние | 0 | 0 | 20 |
| Переливание 1 | 0 | 5 | 15 |
| Переливание 2 | 3 | 2 | 15 |

| | Сосуд 3 л | Сосуд 5 л | Сосуд 20 л |
|---|---|---|---|
| Переливание 3 | 0 | 2 | 18 |
| Переливание 4 | 2 | 0 | 18 |
| Переливание 5 | 2 | 5 | 13 |
| Переливание 6 | 3 | 4 | 13 |

2. Узнаем возраст дочери сейчас: (77 – 45) - 2·10 = 12 (лет). Значит, матери, сейчас 31 год.
3. Среди двух ответов есть два полностью противоположных: первый и третий. Значит, второй ответ принадлежит волку, а так как волк первым предложением говорит правду, то Иван-царевич останется целым-невредимым. Значит, третий ответ будет правильным. Таким образом, первый ответ принадлежит лисе, второй — волку, третий — медведю.
4. На рис. показан вариант разрезания указанного прямоугольника на две части, из которых можно составить квадрат.



5. Сумма четного числа 10 нечётных чисел четна. У нас 10 игрушек, цена каждой игрушки — нечётное число рублей, а значит, сумма 10 нечётных чисел должна быть чётным числом. Но 2017 — число нечётное, поэтому получить его в виде 10 нечётных чисел нельзя.

***Вариант 5***

1. Возможный вариант: 444 · 4 + 44 · 4 + 44 + 4 · 4 + 4 = 2016.
2. Всего комнат 100. Все комнаты, кроме тех, что находятся вдоль сторон квадрата, имеют по 4 общие стены, поэтому в них будет по 4 двери. Таких комнат 64. В угловых комнатах (их 4) будет по 2 двери. И в оставшихся 32 комнатах, расположенных вдоль сторон квадрата, будет по 3 двери. Учитывая, что дверь соединяет две комнаты, получим
(64 · 4 + 4 · 2 + 32 · 3) : 2 = 180.
*Ответ:* 180 дверей.

3. Пусть $x$ см ширина параллелепипеда, тогда $4x$ см будет высота, а $8x$ см — длина параллелепипеда. Так как длина и высота вместе составляют 60 см, то получаем уравнение: $4x + 8x = 60$, из которого находим $x = 5$ см. В результате получим, что объем параллелепипеда равен 4000 см$^3$.
4. Так как сумма двух чётырехзначных чисел получается пятизначное число, то М = 1, а О > 4. Так как Н + Н = О, то О — цифра чётная. Таким образом, О равно 6 или 8. Рассмотрим первый случай. Пусть О = 6. Тогда Н = 3 и Д = 8. Так как И + И = Г и Г < 8, то И = 1, 2, 3. Но цифры 1 и 3 заняты. Остаётся И = 2.
Рассмотрим второй случай: О = 8. Тогда, с одной стороны, Н = 4 (так как Н + Н = О), а с другой — Н = 6 или 7 (так как О + О = Н), чего не может быть.
Значит, этот случай отпадает.
*Ответ:* $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 6823 \\ 6823 \end{array} \\ \hline 136461 \end{array}$
5. Решение задачи видно из схемы-таблицы:

| Ведро | 1 шаг | 2 шаг | 3 шаг | 4 шаг | 5 шаг | 6 шаг |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 л | 0 л | 5 л | 0 л | 4 л | 4 л | 5 л |
| 9 л | 9 л | 4 л | 4 л | 0 л | 9 л | 8 л |

***Вариант 6***

1. Возможный вариант:
$555 + 555 + 555 + 555 - 55\cdot(5 - 5 : 5) + 5 + 5 + 5 + 5 = 2020$
2. Поскольку два воскресенья, идущие подряд, приходятся на числа разной четности, то единственная возможность для данных трех воскресений — это 2, 16 и 30-е число. Поэтому 26-е число будет среда.
3. Так как осталось идти на 8 км больше, чем было пройдено, а пройдено было $\frac{1}{3}$ пути, то 8 км составляет $\frac{1}{3}$ всего пути. Поэтому весь путь будет 24 км.
4. Так как объем куба равен 27 дм$^3$, то сторона куба будет равна 3 дм или 30 см. Тогда ребро куба будет состоять из 30 кубиков со стороной 1 см, а всего кубиков будет $30 \cdot 30 \cdot 30 = 27\,000$. Так как сторона маленького кубика равна 1 см, то длина цепочки будет равна 27 000 см = 270 м.
5. $(11, 7, 6) \to (4, 14, 6) \to (4, 8, 12) \to (8, 8, 8)$.

*Вариант 7*

1. Буква Б — обязательно 9, иначе при сложении не пройдет переход через тысячу. Буква А — обязательно 1, иначе сумма АБББ + А не будет оканчиваться на три одинаковые цифры. Таким образом, получается единственный способ: $1999 + 1 = 2000$.
   *Ответ:* $1999 + 1 = 2000$.
2. Так как каждый город из 24 соединён авиалинией с остальными 23 городами, то всего авиалиний будет $24 \cdot 23$. Но при таком подсчёте, мы каждую авиалинию считали дважды, поэтому всего авиалиний в данной стране будет $\frac{24 \cdot 23}{2} = 276$.
   *Ответ:* 276 авиалиний.
3. Так как самое большое трехзначное число, которое делится на 6, есть 996, а искомое будет больше его на 5, то это число будет 1001.
4. Пусть $x$ см ширина параллелепипеда, тогда $4x$ см будет высота, а $8x$ см — длина параллелепипеда. Так как длина и высота вместе составляют 60 см, то получаем уравнение: $4x + 8x = 60$, из которого находим $x = 5$ см. В результате получим, что объем параллелепипеда равен 4000 см$^3$.
5. Пусть *А* — лжец. Тогда его утверждение неверное, то есть оба туземца должны быть рыцарями. Но это противоречит тому, что *А* — лжец.
   Пусть *А* — рыцарь. Тогда его утверждение верное и *Б* — лжец. Таким образом, можно определить, кем является *А* и кем является *Б*: *А* — рыцарь, *Б* — лжец.

*Вариант 8*

1. Разделим две противоположные стороны квадрата на отрезки длиной 3 см. Соединяя концы получившихся отрезков, получим 1010 одинаковых прямоугольников. Проведя в каждом прямоугольнике диагональ, получим 2020 одинаковых треугольников.
2. Незнайка утверждает, что все четыре числа: делимое, делитель, неполное частное и остаток, являются нечетными. Но делимое является суммой произведения неполного частного на делитель и остатка. Если последние три числа нечетные, то делимое должно быть четным. Поэтому Незнайка неправ.

3. Решение видно из таблицы:

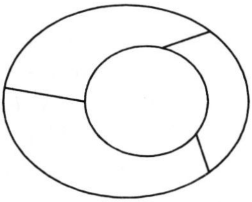
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 л | 7 | 4 | 4 | 1 | 0 | 0 | 7 | 4 | 0 | 0 |
| 3 л | 0 | 3 | 0 | 3 | 3 | 0 | 0 | 3 | 3 | 0 |
| 5 л | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 |

4. 1) $100\% - 25\% = 75\%$ — столько стал вес Карлсона к лету.
2) $75\% \cdot 1{,}2 = 90\%$ — стал вес Карлсона к осени.
3) $90\% \cdot 0{,}9 = 81\%$ — стал вес Карлсона к зиме.
4) $81\% \cdot 1{,}2 = 97{,}2\%$ — стал вес Карлсона к концу года от первоначального. Поэтому Карлсон похудел за год.
$100\% - 97{,}2\% = 2{,}8\%$ — на столько он похудел.
*Ответ:* Карлсон похудел за год на $2{,}8\%$.

5. Да, можно сначала проделать операцию со второй, затем с четвёртой строками и, наконец, с четвёртым столбцом.

***Вариант 9***

1. Возможный вариант показан на рисунке:



2. Если мы сложим стоимость всех книг без первой, без второй, без третьей и без четвертой, то получим утроенную стоимость всех четырех книг. Тогда стоимость всех книг будет 408 рублей. Соответственно, первая книга тогда будет стоить $408 - 348 = 60$ (руб.), вторая — 112 руб. ($408 - 296$), третья — 116 руб., а четвертая — 120 руб.
*Ответ*: стоимость первой, второй, третьей и четвертой книг соответственно равна 60 руб., 112 руб., 116 руб., 120 руб.

3. Узнаем, сколько учеников посещают только кружки.
$35 - 18 = 17$.
Аналогично найдём, сколько учеников посещают только секции: $26 - 18 = 8$. Так как всего учеников 50, при этом только кружки посещают 17 учеников, только секции 8 учеников, а 18 учащихся посещают и кружки и секции, то не посещают ни кружков, ни секций
$50 - 17 - 8 - 18 = 7$ учеников.

4. Сумма чётного числа 10 нечётных чисел чётна. У нас 10 игрушек, цена каждой игрушки — нечётное число рублей, а значит, сумма 10 нечётных чисел должна быть чётным числом. Но 2019 — число нечётное, поэтому получить его в виде 10 нечётных чисел нельзя.
5. Так как на первое заседание не явилось 20% депутатов, а на второе 30% депутатов, и если это были разные депутаты, то на обоих заседаниях как минимум было 50% депутатов. Максимально же могло быть 70% депутатов на обоих заседаниях, если все пришедшие второй раз были и в первый раз. Таким образом, всего депутатов было на обоих заседаниях от 50% до 70%.

### *Вариант 10*

1. $4 + 4 - 4 - 4 = 0$, $(4 + 4) : (4 + 4) = 1$, $4 : 4 + 4 : 4 = 2$,
$4 \cdot 4 : 4 - 1 = 3$, $4 \cdot (4 - 4) + 4 = 4$, $(4 + 4 \cdot 4) : 4 = 5$,
$4 + (4 + 4) : 4 = 6$, $4 + 4 - 4 : 4 = 7$, $4 + 4 + 4 - 4 = 8$,
$4 + 4 + 4 : 4 = 9$.
2. Найдем, сколько раз встречалась цифра 3 на первом этаже. Для этого перечислим все комнаты с такой цифрой: 103, 113, 123. Аналогичная ситуация будет и на втором и четвертом этаже: 203, 213, 223, 403, 413, 423. А вот на третьем этаже дополнительно добавятся 25 цифр «троек», так как каждый номер начинается с цифры 3. Итого получается, что цифра 3 использовалась $3 + 3 + 3 + 25 = 34$ раза.
3. Так как после покупки 11 тетрадей у ученика остается 50 рублей, а для покупки 15 тетрадей у него не хватает 70 рублей, то 4 тетради будут стоить $50 + 70 = 120$ (рублей). Тогда одна тетрадь будет стоить 30 рублей. Следовательно, у школьника было $11 \cdot 30 + 50 = 380$ (рублей).
4. Необходимо разрезать прямоугольник на три прямоугольника размерами $8 \times 12$, $4 \times 6$, $4 \times 6$, из которых и сложить квадрат размерами $12 \times 12$.
5. Выиграет начинающий. Своим первым ходом он соединяет любые две диаметрально противоположные точки. На последующих ходах он строит отрезок, симметричный относительно этого диаметра последнему отрезку, проведенному вторым игроком.

## 6 класс

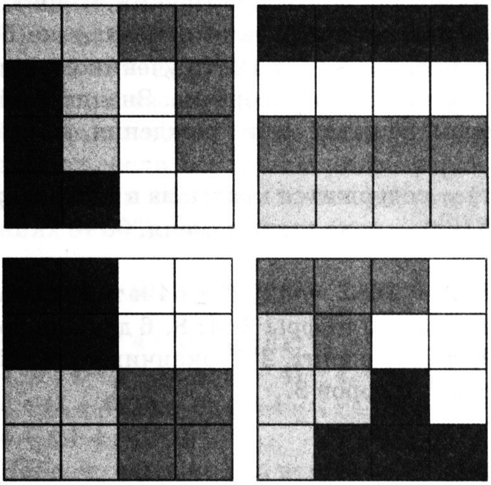
*Вариант 1*

1. $-7$.
2. Кот Матроскин, дядя Федор, почтальон Печкин, Шарик.
3. Пусть в каждом месяце дни рождения отмечают не более 2 учеников. Так как месяцев в году 12, то учеников в классе будет не более 24. Получили противоречие. Значит, найдется месяц, в котором отметят дни рождения не менее 3 учеников.
4. 1) $9 \cdot 0,75 = 6,75$ (кг) — содержится крахмала в 9 кг риса;
   2) $6,75 : 0,6 = 11,25$ (кг) — надо взять ячменя.
   *Ответ:* 11,25 кг.
5. $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$; $2^6 = 64$ и так далее. Замечаем закономерность, что цифры 2, 4, 8, 6 дальше повторяются. $1999 = 499 \cdot 4 + 3$, значит, $2^{1999}$ оканчивается той же цифрой, что и $2^3$, то есть цифрой 8.

*Вариант 2*

1. $$\frac{666666 \cdot 666666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1} - \frac{777777 \cdot 777777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1} =$$
   $$= \frac{111111 \cdot 6 \cdot 111111 \cdot 6}{36} - \frac{111111 \cdot 7 \cdot 111111 \cdot 7}{49} =$$
   $$= \frac{111111 \cdot 6 \cdot 111111 \cdot 6}{6 \cdot 6} - \frac{111111 \cdot 7 \cdot 111111 \cdot 7}{7 \cdot 7} =$$
   $$= 111111 \cdot 111111 - 111111 \cdot 111111 = 0.$$
2. Сережа сделал призовых выстрелов: $17 - 5 = 12$, поэтому попаданий в цель было: $12 : 2 = 6$.
3. Лось, лиса, заяц.
4. Нет, так как сумма пяти нечетных чисел является числом нечетным, а нечетное число на 20 не делится.
5. Буратино выпил молока $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. И столько же он выпил черного кофе. Поэтому Буратино молока и кофе выпил одинаково.
6. Например: $(9999 : 9 - 999 : 9) \cdot (9 + 9) : 9$;
   $999 + 999 + (9 : 9) \cdot (9 : 9) + 9 : 9$.

*Вариант 3*

1. Возможный вариант.
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 + 5 : 5 - 5 : 5 - 5 : 5.$
2. $3003 \cdot 207.$
3. 
4. Решаем задачу с конца. Так как 4 яблока составляют треть от того количества, что осталось после Бори, то весь остаток будет 12 яблок. Но 12 яблок составляют $\frac{2}{3}$ яблок, оставшихся после Андрея, значит, после Андрея осталось 18 яблок, которые, в свою очередь, составляют $\frac{2}{3}$ числа яблок, купленных мамой. Значит, мама купила $18 : 2 \cdot 3 = 27$ (яблок).
*Ответ:* Мама купила 27 яблок.
5. При первом взвешивании положим на левую чашу 200 г и уравновесим весы с помощью крупы, тогда крупы на левой чаше будет 4400 г, а на правой — 4600 г. Теперь 4400 г разделим пополам: тогда на каждой чаше будет по 2200 г крупы. При третьем взвешивании отвесим с помощью гири 200 г крупы, тогда получим массу оставшейся крупы в одной из кучек 2000 г = 2 кг.
6. Найдем число концов у всех мостов: $5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 = 31$ — является числом нечетным. Так как число концов у всех мостов должно быть четным, то такого расположения мостов быть не может.

***Вариант 4***

1. $(\frac{9}{20}*0,05)*1,4=\frac{2}{7}=(\frac{9}{20}*\frac{1}{20})*\frac{7}{5}=\frac{2}{7}$.

   Рассматривая различные варианты знаков, в итоге получим:

   $(\frac{9}{20}-0,05):1,4=\frac{2}{7}$.
2. Возможный вариант: $333 \cdot (3+3) + 3 \cdot (3+3) = 2016$.
3. Пусть Вася делает 100 шагов, тогда Петя будет делать 110 шагов. Пусть длина шага Васи будет $a$ см, тогда длина шага Пети будет $0,9\ a$. Тогда Вася пройдет расстояние $100\ a$, а Петя — $99a$. Значит, раньше в школу придет Вася.
4. Нельзя, так как 23 нельзя представить в виде суммы пятерок и семерок.
5. Рассмотрим различные возможные случаи.

   А) Перевернем 2 монеты, лежащие вверх орлом, тогда они будут вверх решкой, всего монет, лежащих вверх орлом, будет 1, на 2 меньше.

   Б) Перевернем 2 монеты, лежащие вверх решкой, тогда они будут вверх орлом, всего монет, лежащих вверх орлом, будет 5, на 2 больше.

   В) Перевернем 1 монету, лежащую вверх орлом, и 1, лежащую вверх решкой. Тогда монет, лежащих вверх орлом, будет снова 3.

   Таким образом, во всех 3 случаях монет, лежащих вверх орлом, будет нечётное число. А так как 8 — число чётное, то повернуть все монеты вверх орлом будет нельзя.

   *Ответ:* Нельзя.

***Вариант 5***

1. Всего двузначных чисел 90. Первая цифра может быть 2, 4, 6 или 8; а вторая 0, 2, 4, 6 или 8. Поэтому всего будет $4 \cdot 5 = 20$ таких чисел.

   *Ответ*:20.
2. Так как 16 участников взяли бутерброды с колбасой, а 9 — с колбасой и сыром, то только с колбасой бутерброды были у 7 участников. Аналогично, только с сыром бутерброды были у $13-9=4$ участников.

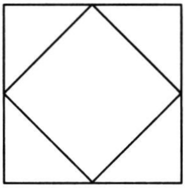
   Тогда всего в поход пошло $7+4+9=20$ человек.

   *Ответ:* 20 человек.

3. Так как общее число участников похода не изменилось, то 1 девочка составляет 5% от общего числа участников похода. Поэтому всего участников похода будет 20. Так как девочки составляют 20% , то их будет 4, а тогда мальчиков будет 16. Итак, в походе участвовало 4 девочки и 16 мальчиков.

4. Так как квадрат двузначного числа — число четырехзначное и начинается с той же цифры, что и само число, то П = 9. Так как произведение двух одинаковых цифр оканчивается на ту же цифру, то А может быть 0, 1, 5 и 6. Подстановкой убеждаемся, что первые два варианта не подходят. Итак, получается два варианта: $95^2 = 9025$ или $96^2 = 9216$.

5. Хозяин должен увеличить свой двор так, как показано на рисунке. Деревья обозначены точками. Площадь старого двора (квадрат, расположенный внутри) будет в 2 раза меньше нового двора (больший квадрат).



6. Сумма двух соседних чисел будет четной, если они оба четные или оба нечетные. Сумма двух чисел будет нечетной, если одно из них четное, а другое – нечетное. Если сумма любых двух соседних чисел будет нечетна, тогда четные и нечетные числа должны чередоваться. Тогда общее число чисел должно быть четное. По условию же чисел 2015, а число 2015 — число нечетное. Значит, найдутся два соседних числа, сумма которых будет четна.

***Вариант 6***

1.

$$\begin{array}{r} 3930 \\ +\,3980 \\ \hline 7910 \end{array}$$

2. $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$.

*Ответ:* $\frac{1}{64}$.

3. В первом городе взыскали с купца $\frac{5}{6}$ имущества, значит, осталось $\frac{1}{6}$ всего имущества.

Во втором городе взыскали $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ имущества, значит, осталось $\frac{1}{6} - \frac{5}{36} = \frac{1}{36}$ имущества.

Аналогично рассуждая, получим, что после третьего города у купца останется $\frac{1}{216}$ часть имущества.

Так как это имущество стоит 1000 денежных единиц, то всего имущества было на 216 000 денежных единиц.
*Ответ:* 216 000.

4. Найдем дополнения каждой дроби до 1 и сравним их.

$1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$, $1 - \frac{10}{11} = \frac{1}{11}$, $1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$, $1 - \frac{12}{13} = \frac{1}{13}$.

Так как $\frac{1}{10} > \frac{1}{11} > \frac{1}{12} > \frac{1}{13}$, то $\frac{9}{10} < \frac{10}{11} < \frac{11}{12} < \frac{12}{13}$.

*Ответ:* $\frac{12}{13}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{9}{10}$.

5. Число различных денежных сумм, которые можно составить из менее чем 1000 дукатов, меньше 1000, то есть меньше числа пиратов. Поэтому у 2 пиратов будет одинаковое число дукатов.

### *Вариант 7*

1. 17 кг.
2.

$$
\begin{array}{r}
\times\ 14286 \\
\underline{14286} \\
85716 \\
114288\phantom{0} \\
+\ \ 28572\phantom{00} \\
57144\phantom{000} \\
\underline{14286\phantom{0000}} \\
204089796
\end{array}
$$

3. Так как Наташа в зеленых туфлях, а Валя не в белых, то Валя в синих туфлях. Значит, Аня в белых туфлях. Так как цвет платья и туфель у Ани совпадает, то Аня в белом платье. Так как у остальных девочек цвет платья и туфель не совпадает, то Валя в зеленом платье, а Наташа — в синем.

*Ответ:* Аня в белом платье и белых туфлях, Валя в зеленом платье и синих туфлях, Наташа в синем платье и зеленых туфлях.

**4.** $35 - 10 = 25$ (учеников) — посещают кружки,

$25 - 20 = 5$ (учеников) — посещает только экологический кружок,

$11 - 5 = 6$ (учеников) — посещают оба кружка.

*Ответ:* 6 экологов увлекаются математикой.

**5.** Пусть $x$ л дает 1 чёрная корова в день, а $y$ л — 1 рыжая корова в день. Тогда за 5 дней 4 чёрные и 3 рыжие коровы дают $5(4x + 3y)$ л, а 3 чёрные и 5 рыжих коров за 4 дня — $4(3x + 5y)$ л. Так как данные выражения равны, то получим уравнение: $5(4x + 3y) = 4(3x + 5y)$, из которого получаем $y = 1,6x$, что означает, что рыжие коровы более продуктивны.

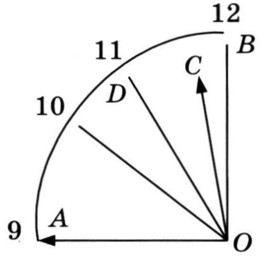
***Вариант 8***

**1.** Возможный вариант:

$2222 - 222 + 22 - 2:2 = 2021.$

**2.** 9 человек, которые ничего не ответили, составляют $100 - 37,5 - 56,25 = 6,25\%$, то есть 16-ю часть от общего количества опрошенных. Значит, всего было опрошено 144 человека.

**3.** Изобразим модель часов:




Здесь $OA$ — положение минутной стрелки, $OC$ — положение часовой стрелки.

$\angle AOB = 90^\circ$, $\angle DOB = 30^\circ$. За 60 минут часовая стрелка проходит угол в $30^\circ$, поэтому за 15 минут угол будет в 4 раза меньше, поэтому $\angle COB = 7,5^\circ$. Тогда угол между часовой и минутной стрелкой в 11 ч 45 минут будет

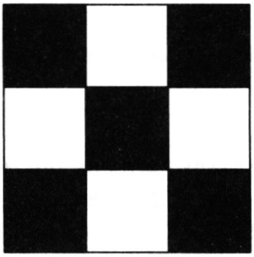
$\angle AOC = 90^\circ - 7,5^\circ = 82,5^\circ$.

4. Составим выражение.

$$1\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}\pm\frac{1}{4}\pm\frac{1}{5}=\frac{60\pm30\pm20\pm15\pm12}{60}=\frac{5(12\pm6\pm4\pm3)\pm12}{60}.$$

Значение произведения в числителе дроби при всех возможных переменных знака останется кратным 5 и не может быть равным $\pm12$, и, следовательно, значение исходного выражения не может быть равным 0.

5. Раскрасим комнаты в шахматном порядке, как на рисунке. При этом соседние комнаты окрасятся в разный цвет. При переезде цвет комнаты меняется, тогда постояльцы, живущие в пяти чёрных комнатах, должны переехать в белые комнаты, которых четыре. Такой обмен невозможен, поэтому хозяйка гостиницы переселить их так, чтобы каждый постоялец переехал в соседнюю комнату, не сможет.



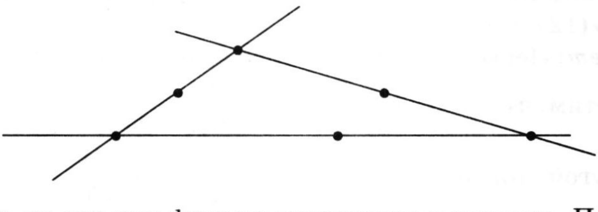
## *Вариант 9*

1. Найдем дополнения каждой дроби до 1.

$1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$, $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$, $1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$, $1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$.

Так как $\frac{1}{5}>\frac{1}{6}>\frac{1}{7}>\frac{1}{8}$, то $\frac{4}{5}<\frac{5}{6}<\frac{6}{7}<\frac{7}{8}$.

2. Решение изображено на рисунке.



3. Пусть на все три фильма приходило $x$ человек. Посчитаем, сколько билетов было куплено на все три фильма вместе. Те,

кто приходил только на один фильм, купили 150 билетов, те, кто приходил на два фильма, купили $2 \cdot 180 = 360$ билетов. А те, кто приходил трижды, купили $3x$ билетов. Так как всего было продано $3 \cdot 200 = 600$ билетов, то составляем и решаем уравнение: $150 + 360 + 3x = 600$, откуда находим $x = 30$.

**4.** Поскольку в каждой семье есть дети и у каждого мальчика есть сестра, то в каждой семье есть хотя бы одна девочка, то есть количество девочек не меньше, чем количество семей. Мальчиков больше, чем девочек. Значит, их количество больше, чем количество семей. Так как в каждой семье взрослых двое, то общее количество детей больше, чем общее количество взрослых.

**5.** При замене двух любых чисел на их сумму сумма всех чисел в файле не меняется. То есть инвариантом является сумма чисел в файле. Поэтому последнее число — оно же сумма чисел в конце — равно сумме чисел вначале, т.е. 2022.

### *Вариант 10*

**1.** На одну пустую бутылку лимонада не купить. Сам лимонад без бутылки стоит $30 - 12 = 18$ (рублей). Поэтому можно купить $(100 - 12) : 18 = 4$ бутылки, на пятую не хватит денег. Сначала можно купить 3 бутылки, а затем на сданные бутылки еще одну.

**2.** Задачу можно решить с помощью уравнения или с помощью рассуждений с конца задачи. Рассмотрим второй вариант. Так как в итоге в ящике остался 31 лимон, а до этого взяли половину оставшихся лимонов и пол-лимона, то перед последним разом лимонов было $(31 + 0{,}5) \cdot 2 = 63$. Аналогично рассуждая для второго раза, получим, что перед тем, как взять половину всех лимонов и еще пол-лимона, лимонов оставалось $(63 + 0{,}5) \cdot 2 = 127$. Тогда первоначально лимонов было $(127 + 0{,}5) \cdot 2 = 255$.

*Ответ*: Первоначально лимонов в ящике было 255.

**3.** Заметим, что $S = 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - \ldots - (\frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}) - \frac{1}{2010} < 1$.

С другой стороны, $S = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}) > 0$.

Таким образом, $0 < S < 1$.

4. Обозначим длину, ширину и высоту параллелепипеда соответственно за $x$, $y$, $h$. Объём $n$ параллелепипедов будет равен $nxyh$ и равен $315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. При этом $y > 1$, $x > h$, $h > y$. Число 315 есть произведение четырёх простых множителей, значит, $n$, $x$, $y$, $h$ могут быть только этими множителями. Так как $y < h < x$, а всего различных множителей три, то $y = 3$, $h = 5$, $x = 7$. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда со сторонами $x$, $y$, $h$ равна $2xy + 2xh + 2yh$. В итоге получаем $42 + 70 + 30 = 142$.
5. Перевернём 2 стакана из 3 стоящих вверх дном, тогда останется 1 стакан стоящий вверх дном. Перевернув его одновременно с любым другим, вновь получим один стакан стоящий вверх дном и т.д.
*Ответ*: нельзя.

# ЛИТЕРАТУРА

1. *Агаханов Н.Х., Подлипский О.К.* Математика. Районные олимпиады. 6–11 классы. — М.: Просвещение, 2010.
2. *Ажгалиев О.А., Отеш А.К.* Задачи математических олимпиад. / Учебное пособие / — Республиканский издательский кабинет Казахской академии образования им. И. Алтынсарина, Алматы, 2001.
3. *Горбачев Н.В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004.
4. *Дориченко С.А., Ященко И.В.* / Московская математическая олимпиада: сборник подготовительных задач. — М., 1994.
5. *Канель–Белов А.Я., Ковальдин А.К., Васильев Н.Б.* Подготовительные задачи к VII Московской математической олимпиаде 1994 года для 8–11 классов. — М.: TREADE PUBLISHERS, 1994.
6. *Козлова Е.Г.* Сказки и подсказки: Задачи для математического кружка. — М.: Мирос, 1994.
7. *Крижановский А.Ф.* Математические кружки. 5–7 классы. — М.: ИЛЕКСА, 2018.
8. Летняя математическая школа: теория, задания математические бои, олимпиады, опыт организации. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко; С.О. Иванова. Ростов-на-Дону: Легион, 2013.
9. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.1 / [Н.А. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников и др.; Под общ. ред. С.И. Демидовой, И.И. Колисниченко]. — М.: Просвещение, 2008.
10. Математические олимпиады. Учебно–методическое пособие / Сост. М.Н. Бобошко, Л.В. Коноплева, Ф.Ф. Колесова. — Омск: Изд-во ОмПГУ, 1998.
11. Материалы для проведения школьных олимпиад по математике /Авторы–составители: Н.И. Мерлина, А.В. Мерлин. — Чебоксары: Клио, 1997.
12. *Медников Л.Э., Мерзляков А.С.* Математические олимпиады. — Ижевск: Свиток, 1997.
13. *Мерлин А.В., Мерлина Н.И.* Нестандартные задачи по математике в школьном курсе. — Чебоксары: Клио, 1998.
14. Методические рекомендации по проведению школьного и муниципального этапов всероссийской олимпиады школьников в 2018/2019 учебном году по математике. Утверждены на заседании Центральной предметно-методической

комиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике (протокол № 2 от 13.06.2018 г.)

15. Московские математические олимпиады 60 лет спустя / Под ред. Ю.С. Ильяшенко и В.М. Тихомирова. — М.: Бюро Квантум, 1995.
16. Олимпиадные задания по математике: 5–11 классы / Автор-состав. О.Л. Безрукова. — Волгоград: Учитель, 2009.
17. Районные олимпиады по математике третьего тысячелетия / Составители Ю.Я. Романовский, И.А. Корлюкова, Е.Г. Микулич. — 3-е изд. Мозырь: Белый Ветер, 2014.
18. *Русанов В.Н.* Сборник задач математических олимпиад младших школьников: Пособие для учителей и родителей. — Оса: Росстали-на Каме, 1995.
19. *Чулков П.В.* Математика. Школьные олимпиады: метод. пособие. 5–6 кл. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2007.

*Справочное издание*

**Фарков Александр Викторович**

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

# 5–6 КЛАССЫ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.04ОСТ0.ОС02.Н19677 с 18.05.2022 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *И. А. Огнева, И. Д. Баринская*
Дизайн обложки *М. С. Михайлова*
Компьютерная верстка *М. В. Демина*

Россия, 107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции ОК 034-2014; 58.11.1 — книги печатные

**Отпечатано в ООО “Красногорская типография”.**
**143405, Московская область, г. Красногорск,**
**Коммунальный квартал, дом 2.**
**www.ktprint.ru**

**По вопросам реализации обращаться по тел.:**
**8 (495) 641-00-30 (многоканальный).**

- Данное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту.

- Единый Учебно-Методический Комплект с учебниками по математике для 5–6 классов составляют:
  - Рабочая тетрадь по математике. 5–6 классы
  - Тесты по математике. 5–6 классы
  - Контрольные работы по математике. 5–6 классы
  - Контрольные и самостоятельные работы по математике. 5–6 классы
  - **Математические олимпиады. 5–6 классы.**

- **Математические олимпиады являются необходимым дополнением к школьным учебникам по математике для 5–6 классов, рекомендованным Министерством просвещения Российской Федерации и включенным в Федеральный перечень учебников.**

- Данное пособие содержит как рекомендации по составлению текстов школьных и городских математических олимпиад, так и сами тексты. Рассмотрены различные подходы к проведению олимпиад в сельских малокомплектных школах, нестандартные и многоуровневые олимпиады. Предложена большая подборка задач для подготовки к школьным и районным (городским) олимпиадам.

- Предназначено для учителей математики и студентов педвузов. Будет полезно и учащимся 5–6 классов.

- Пособия прошли апробацию во многих регионах России, имеют положительные заключения от специалистов институтов развития образования. Пособия практичны, современны по содержанию и оформлению. По ним легко учить и интересно учиться.

- Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «***ЭКЗАМЕН***» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

ISBN 978-5-377-19149-0

9 785377 191490