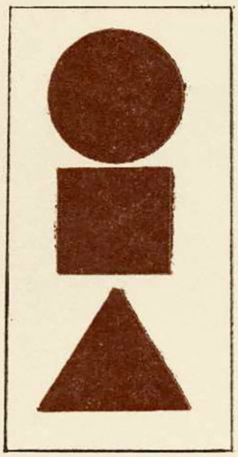
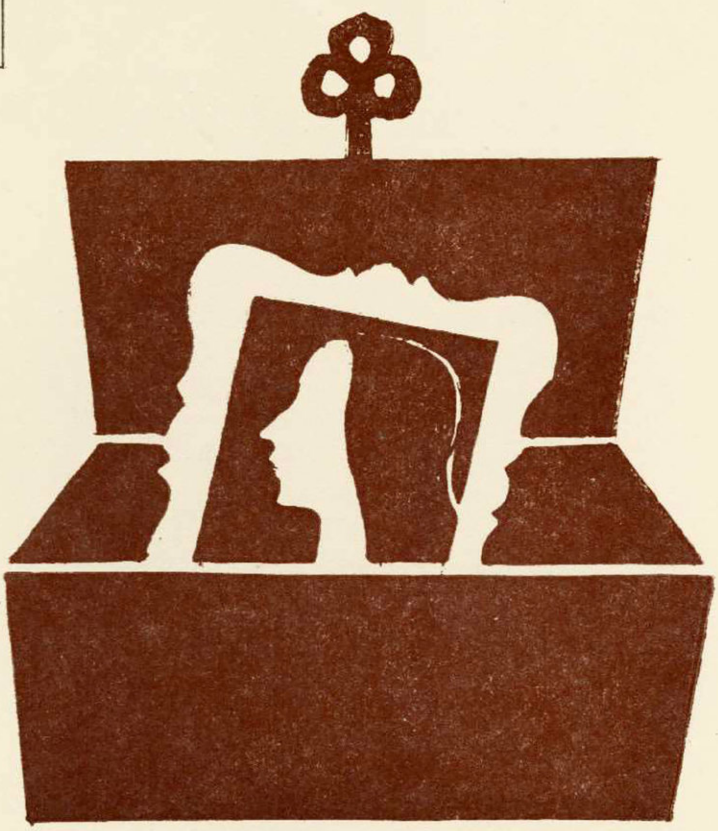
КАК ЖЕ НАЗЫВАЕТСЯ ЭТА КНИГА?

Рэймонд М. Смаллиан





ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

RAYMOND M. SMULLYAN

WHAT IS THE NAME OF THIS BOOK?

Prentice-Hall, Inc.
Englewood Cliffs, New Jersey
1978

Рэймонд М. Смаллиан

КАК ЖЕ НАЗЫВАЕТСЯ ЭТА КНИГА?

Перевод с английского
Ю. А. ДАНИЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА
1981

ББК 22.12
С 50
УДК 17.2.2

Смаллиан Р.

С 50 Как же называется эта книга?: Пер. с англ./Предисл. Ю. А. Данилова.— М.: Мир, 1981. — 238 с.

Книга американского профессора Р. Смаллиана, написанная в увлекательной форме, продолжает серию книг по занимательной математике и представляет собой популярное введение в некоторые проблемы математической логики.
Рассчитана на самые широкие круги читателей.

1702020000

С $\frac{20201 - 171}{041\ (01) - 81}$ 171 — 81, ч. 1

ББК 22.12
51 16

Редакция научно-популярной
и научно-фантастической литературы

От переводчика

Что может быть более далеким от истины, чем представление о математике как о застывшей науке, давно остановившейся в своем развитии и превратившейся в своего рода свод правил для решения задач? Однако такое превратное представление об одной из наиболее быстро развивающихся наук современности бытует у очень многих. Между тем математика непрестанно меняет свой облик, пополняет свой арсенал новыми идеями, мощными и гибкими методами, расширяет сферу приложений, черпает новые постановки задач не только из логики внутреннего развития, но и из других областей науки.

Столь странное противоречие объясняется тем, что между рубежами, завоеванными современной математикой, и традиционно читаемыми «устоявшимися» курсами математики существует разрыв, красочно описанный замечательным представителем этой науки, педагогом и популяризатором Гуго Штейнгаузом: «В математике несравненно явственней, чем в других дисциплинах, ощущается, насколько растянуто шествие всего человечества. Среди наших современников есть люди, чьи познания в математике относятся к эпохе более древней, чем египетские пирамиды, и они составляют значительное большинство. Математические познания незначительной части людей дошли до эпохи средневековья, а уровня математики XVIII века не достигает и один на тысячу... . Но расстояние между теми, кто идет в авангарде, и необозримой массой путников все возрастает, процессия растягивается, и идущие впереди отдаляются все более и более. Они скрываются из виду, их мало кто знает, о них рассказывают удивительнейшие истории. Находятся и такие, кто просто не верит в их существование».

«Растянутость шествия всего человечества» особенно ощутима, когда речь заходит не о рецептурной, алгоритмической, а об «идейной» стороне математики.

С незапамятных времен математические рассуждения считаются общепризнанным эталоном доказательности, достойным всяческого подражания (достаточно упомянуть «Этику» Спинозы, «изложенную на геометрический манер», или «Математические начала натуральной философии» Ньютона). Строгость математических доказательств, непреложность получаемых с их помощью выводов, незыблемость математических истин вошли в поговорку. Но прописные истины, подобно разменной монете, от частого употребления стираются и теряют в весе. Доверять им по меньшей мере неосмотрительно, а получить достоверную информацию о действительном положении вещей нелегко не только для человека далекого от математики, но и для математика, не занимающегося специально проблемами оснований математики и математической логики. Те, кто, желая похвалить обоснованность чьей-либо аргументации, с легкостью называют ее математически строгой и безупречной, как правило, не в состоянии объяснить, что означает «доказать», почему доказательство «доказывает», или ответить, всякое ли утверждение можно доказать или опровергнуть. Подобные вопросы способны поставить в тупик и несравненно более искушенного в математике нематематика, который умеет вычислить значение истинности таких высказываний, как «Речка движется и не движется», или импликации «⟨Если⟩ гром не грянет, ⟨то⟩ мужик не перекрестится», знает, чем исключающее «или» (Либо пан, либо пропал) отличается от неисключающего (Надобно либо уменье, либо везенье ⟨а лучше всего и то, и другое⟩), постиг различие между причинно-следственной связью и импликацией и усвоил немало других премудростей алгебры логики.

Простота подобных вопросов обманчива, их наивность иллюзорна. Они затрагивают тонкие и глубокие проблемы теории логического вывода и оснований математики, над решением которых трудилось не одно поколение логиков, математиков и философов. При всей общности понимания того, что составляет существо математического доказательства, и преемственности поколений каждая эпоха вносит свой вклад в недостижимый идеал математической строгости, вводя поправки и дополнения в то, что было сделано ранее.

Предлагаемая вниманию читателя книга американского ученого Рэймонда М. Смаллиана, известного своими работами в области математической логики, опровергает известные слова Пифагора о том, что в математику нет царской дороги. Перед ее читателем открывается редкая, чтобы не сказать уникальная, возможность проникнуть в существо одного из величайших достижений математической логики нашего века — в доказательство знаменитой теоремы Гёделя о неполноте. По занимательности, динамичности и напряженности действия книга Смаллиана не уступает лучшим образцам приключенческого жанра. Намного превосходя по глубине научного содержания большинство научно-популярных произведений и даже отдельные сугубо научные издания, книга Смаллиана помогает читателю совершить головокружительное восхождение от «дурацких штучек» (как автор называет элементарные логические задачи, не требующие для своего решения ничего, кроме находчивости, внимания и здравого смысла) к одной из вершин современной математической логики, на покорение которой обычно приходится затрачивать немало сил и средств. Попутно автор знакомит читателя со своенравной Порцией и ее не менее своенравными прапра...правнучками до N-го колена, проницательным инспектором Крэгом, искусными мастерами Челлини и Беллини, приглашает побывать на островах, населенных рыцарями, неизменно говорящими правду, и столь же неукоснительно лгущими лжецами, побывать в замке графа Дракулы Задунайского и, пережив множество увлекательных приключений, завершить необычайное путешествие на гёделевых и дважды гёделевых островах.

С непостижимой ловкостью фокусника (не все ученые коллеги автора знают, что в годы аспирантуры он выступал в этом качестве на профессиональной эстраде) Смаллиан демонстрирует новые, порой весьма неожиданные варианты известных задач, изобретает необычайно изящные головоломки собственной конструкции, раскрывая перед читателем логику «во всем ее блеске и великолепии».

Профессор Смаллиан умеет неопровержимо доказать, что либо он, либо читатель не существует, причем неизвестно, какая из альтернатив истинна! Чтобы постичь столь высокое искусство доказательства, необходимо внимательно прочитать его книгу. Поэтому пока мы ограничимся утверждением (с истинностью которого не может не согласиться даже тот, кто не читал книги), что книга Смаллиана с неуловимо исчезающим названием «Как же называется эта книга?» (попробуйте объяснить кому-нибудь, как она называется, и вы поймете, что имеется в виду) попадет в руки *либо* читателю, интересующемуся математикой, *либо* читателю, для которого математика не представляет ни малейшего интереса (хотя заранее неизвестно, какая альтернатива уготована тому или иному экземпляру книги). С не меньшей уверенностью можно утверждать, что и тот и другой прочитают ее с интересом *и* пользой.

Ю. Данилов

Посвящается
Линде Ветцель и Джозефу Бевандо,
чьи мудрые советы были для
меня неоценимы

Я хочу от души поблагодарить ....

Прежде всего моих добрых друзей Роберта и Ильзу Коуэн и их десятилетнюю дочь Ленору, прочитавших рукопись этой книги и высказавших множество полезных советов. (В частности, Ленора угадала правильный ответ на ключевой вопрос главы 4: существует ли Трулюлю в действительности или его выдумал Шалтай-Болтай?)

Выражаю свою искреннюю признательность Григу и Мелвину Фиттингам (авторам чудесной и полезной книги «Во славу простых вещей») за их интерес к моей работе и за то, что они обратили на нее внимание Оскара Коллиера из издательства «Прентис-холл». Думаю, что мне следует особо поблагодарить Мелвина за то, что он возник в этой книге (опровергнув своим появлением мое доказательство того, что он никак не мог бы появиться!).

Работать с Оскаром Коллиером и другими сотрудниками издательства «Прентис-холл» для меня было удовольствием. Миссис Илене Макгрэт, перепечатавшая рукопись книги, высказала много полезных советов, которые я с благодарностью принял. Выражаю признательность Дороти Лахман, весьма изобретательно находившей нужные детали и оттенки.

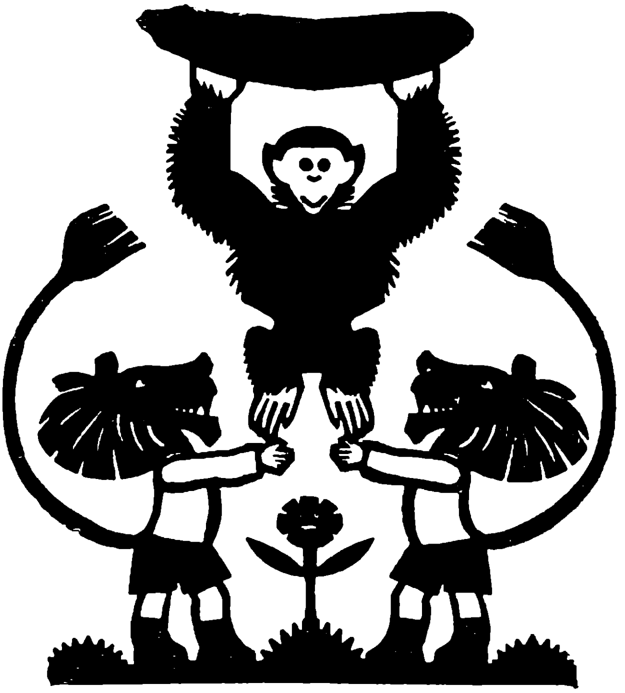
Я хотел бы еще раз подчеркнуть роль Джозефа Бевандо и Линды Ветцель, которым посвящена эта книга. Они были моими преданными и надежными помощниками на протяжении всей работы над книгой.

Я благодарен моей жене Бланш, помогавшей мне своими вопросами. Надеюсь, что эта книга поможет ей решить, за кого она вышла замуж: за рыцаря или за лжеца.

Рэймонд М. Смаллиан

Часть первая

Логические развлечения



1 Одурачен или не одурачен?

1. Остался ли я в дураках? . . . .

Мое первое знакомство с логикой произошло, когда мне было шесть лет. Случилось это 1 апреля 1925 г. В тот день я был болен гриппом, инфлюэнцой или чем-то еще в этом же роде. Утром ко мне в спальню заглянул мой брат Эмиль (он на десять лет старше меня) и сказал: «Рэймонд, сегодня первое апреля, день шуток и розыгрышей, и я одурачу тебя так, как тебя еще никто не одурачивал!» Весь день я терпеливо ждал, когда Эмиль меня одурачит, но он так и не появился. Поздно вечером мама спросила: «Рэймонд, почему ты не спишь?» Я ответил: «Жду, когда Эмиль меня одурачит». Мама позвала Эмиля и строгим голосом приказала: «Эмиль, немедленно разыграй малыша! Он ждет, когда ты его одурачишь». Эмиль послушно направился к моей кроватке, и между нами произошел следующий диалог.

Эмиль. Ты с утра ждешь, когда я тебя одурачу?
Рэймонд. Жду.
Эмиль. Я никак тебя не одурачиваю. Верно?
Рэймонд. Верно!
Эмиль. Но ведь ты ждал, что я тебя одурачу?
Рэймонд. Ждал.
Эмиль. Вот я тебя и одурачил.

Помнится, в тот день я долго еще ворочался в постели после того, как мама выключила свет, и ломал голову над тем, оставил меня брат в дураках или не оставил. С одной стороны, если брат меня не одурачил, то я не получил того, что мне было обещано, и, следовательно, остался в дураках. (Так рассуждал мой старший брат.) Но с тем же основанием можно утверждать, что если брат меня одурачил, то я получил обещанное, и тогда не понятно, в каком смысле меня следует считать оставшимся в дураках. Как же все-таки обстоит дело: одурачил меня брат или не одурачил?

Я не стану сейчас отвечать на этот вопрос. В нашей книге мы еще не раз вернемся к нему в той или иной форме. В нем воплощен некий тонкий принцип, который будет одной из главных тем нашей книги.

2. Лгал ли я? . . . .

Аналогичный случай произошел со мной много лет спустя, когда я был аспирантом Чикагского университета. В ту пору я выступал на эстраде как профессиональный фокусник, но в моих делах произошла небольшая заминка, и мне необходимо было экстренно изыскать способ, как восполнить убытки. Я решил попробовать, не подойдет ли мне работа коммивояжера. Предложив свои услуги компании, занимавшейся торговлей пылесосами, я получил приглашение явиться для проверки профессиональной пригодности. Среди прочих мне задали вопрос: «Не возражаете ли вы против того, что вам время от времени придется немного лгать?» У меня были весьма сильные возражения. Ложь, исходящую от коммивояжера, я считал особенно недопустимой, так как она создает превратное представление о продукции. Однако, подумав про себя, что если я выскажу вслух свое мнение, то заведомо лишусь работы, я солгал и сказал: «Нет, не имею ничего против».

По дороге домой мне пришло в голову следующее. Я спросил себя, вызывает ли у меня какие-нибудь возражения данный мной лживый ответ, и сказал «Нет». А поскольку я не имею ничего против этой конкретной лжи, то, значит, я не возражаю и против любой лжи. Следовательно, мой ответ «Нет» при проверке профессиональной пригодности был не ложью, а истиной!

До сих пор мне не вполне ясно, солгал я тогда или не солгал. С помощью формальной логики мне удалось бы доказать, что я изрек истину, так как допущение о том, что я лгал, приводит к противоречию. Таким образом, логика вынуждает меня поверить в то, что я сказал истину. Но в то же время меня не покидает ощущение, что я солгал!

Коль скоро речь зашла о лжи, я не могу не вспомнить случай, происшедший с Бертраном Расселлом и философом Дж. Э. Муром. Расселл отзывался о Муре как об одном из самых правдивых людей, с которыми ему когда-либо приходилось встречаться. Однажды Рассел спросил Мура: «Случалось ли вам солгать?» Мур ответил: «Да!» Комментируя этот краткий диалог, Расселл заметил: «Думаю, что это была единственная ложь, высказанная Муром!»

Случай, происшедший со мной в молодости, когда я вознамерился было стать коммивояжером, поднимает вопрос о том, может ли человек лгать, не зная, что он лжет. Я бы ответил на такой вопрос отрицательно. Я считаю, что лгать означает высказывать не ложное утверждение, а утверждение, которое тот, кто его высказывает, *считает* ложным. Действительно, если кто-то высказывает утверждение, считая его ложным, а оно оказывается истинным, то я бы сказал, что этот «кто-то» лжет.

В одном из учебников по аномальной психологии я прочитал о следующем происшествии. Врачи в психиатрической лечебнице собирались выписать пациента, страдающего шизофренией, и решили подвергнуть его проверке при помощи детектора лжи. Среди прочих пациенту был задан вопрос: «Вы Наполеон?» Пациент ответил отрицательно. Детектор показал, что он лжет.

Следующий эпизод, также вычитанный мною из какой-то книги, свидетельствует о том, что иногда животные способны лукавить. В комнате, к потолку которой на бечевке был подвешен банан, ставился эксперимент на шимпанзе. Банан висел так высоко, что дотянуться до него было невозможно. В комнате находились шимпанзе и экспериментатор и, если не считать банана и бечевки, не было ничего, кроме нескольких деревянных ящиков различных размеров. Цель эксперимента состояла в том, чтобы установить, сообразит ли шимпанзе составить из ящиков пирамиду, взобраться на нее и достать банан. А вот что произошло на деле. Экспериментатор стоял в углу комнаты и наблюдал за поведением шимпанзе. Обезьяна подошла к нему и стала настойчиво тянуть за рукав на середину комнаты. Экспериментатор, уступая нажиму, медленно последовал за шимпанзе. Когда они дошли до середины комнаты, обезьяна внезапно вспрыгнула ему на плечи и схватила банан.

3. Шутка, обернувшаяся против меня. . . . . .

У моего товарища по аспирантуре в Чикагском университете было двое братьев в возрасте шести и восьми лет. Я бывал у них дома и часто показывал ребятам фокусы. Однажды я пришел и предложил: «Хотите, я покажу вам необыкновенный фокус? Превращу вас в львов!» К моему удивлению, один из братьев охотно согласился. «Вот будет здорово! — сказал он. — Непременно преврати нас в львов!» Я попытался отговориться: «Пожалуй, этого не следует делать, потому что превратить вас потом снова в людей было бы невозможно». Младший брат ответил: «Все равно преврати нас в львов. Ну, пожалуйста!» «Но я же не смогу вернуть вам человеческий облик!»— пытался выкрутиться я. *«Я хочу, чтобы ты превратил нас в львов!»*— заорал в ответ старший брат, а младший спросил: «А как это делается?» «При помощи волшебных слов», — ответил я. «А что это за слова?» — поинтересовался один из братьев. «Чтобы сказать тебе волшебные слова, мне придется произнести их вслух, и тогда вы превратитесь в львов», — схитрил я. Братья задумались, а потом один из них спросил: «А нет ли таких волшебных слов, которые могли бы превратить нас из львов снова в людей?» «Есть, — ответил я, — но дело в том, что как только я произнесу первые волшебные слова, то не только вы, но и все люди на свете, в том числе и я сам, превратятся в львов. Львы не умеют говорить, и поэтому на целом свете не останется никого, кто смог бы произнести другие волшебные слова и снова превратить нас в людей». Старший брат сказал: «Не можешь сказать, тогда напиши волшебные слова!» Младший забеспокоился: «Тебе хорошо, а я еще не научился читать!» Я попытался успокоить его: «Волшебные слова обладают такой силой, что даже если их молча написать на клочке бумаги, то все люди на свете все равно превратятся в львов». Братья разочарованно вздохнули.

Примерно через неделю я встретил восьмилетнего брата, и он остановил меня: «Привет, Смаллиан! Я как раз хотел задать тебе один вопрос». Не подозревая подвоха, я спросил: «О чем?» Мальчик ответил: *«Как же ты сам ухитрился узнать волшебные слова?»*

2. Головоломки и дурацкие штучки

А. НЕСКОЛЬКО ДОБРЫХ СТАРЫХ ЗНАКОМЫХ

Начнем с нескольких хорошо известных головоломок, служивших развлечением не одному поколению. Некоторые из них покажутся вам знакомыми, но даже в них вы обнаружите новые подробности.

4. На чей портрет я смотрю? . . . .

Когда я был маленьким, эта головоломка пользовалась необычайной популярностью. Сейчас она менее известна. Эта головоломка обладает одной замечательной особенностью: большинство людей дают неправильный ответ на вопрос задачи, но вопреки всем аргументам упрямо отстаивают свое решение. Помню, однажды лет 50 тому назад в одной компании разгорелся многочасовой спор по поводу этой головоломки, но тем, кто верно решил ее, так и не удалось убедить остальных в правильности полученного решения. Вот эта головоломка.

Человек разглядывает портрет. «Чей это портрет вы рассматриваете?» — спрашивают у него, и человек отвечает: «В семье я рос один, как перст, один. И все ж отец того, кто на портрете,— сын моего отца (вы не ослышались, все верно — сын!)».

Чей портрет разглядывает человек?

5. . . . .

Предположим, что в предыдущей задаче человек, разглядывающий портрет, ответил на вопрос так: «В семье я рос один, как перст, один. И все же сын того, кто на портрете,— сын моего отца (вы не ослышались, все верно — сын!)».

Чей портрет разглядывает этот человек?

6. Что произойдет, если всесокрушающее пушечное ядро попадет в несокрушимый столб? . . . .

Вот еще одна головоломка времен моего детства, которая мне очень нравится. Под всесокрушающим пушечным ядром мы понимаем ядро, сметающее на своем пути все, что попадается, а под несокрушимым столбом — столб, который нельзя ни повалить, ни сломать. Что произойдет, если всесокрушающее пушечное ядро попадает в несокрушимый столб?

7. . . . .

Следующая очень простая задача — одна из многочисленных занимательных задач, снискавших широкую известность. В темной комнате стоит шкаф, в ящике которого лежат 24 красных и 24 синих носка. Сколько носков следует взять из ящика, чтобы из них заведомо можно было составить по крайней мере одну пару носков одного цвета? (В этой и в следующей задаче речь идет о наименьшем числе носков.)

8. . . . .

Новый поворот в предыдущей задаче. Предположим, что в ящике шкафа лежат несколько синих и столько же красных носков. Известно, что минимальное число носков, которые я должен взять из ящика, чтобы из них заведомо можно было составить по крайней мере одну пару носков одинакового цвета, совпадает с минимальным числом носков, которые требуется взять из ящика, чтобы из них можно было составить по крайней мере одну пару носков разного цвета. Сколько носков в ящике?

9. . . . .

Вот многим знакомая логическая задача. Известно, что в Нью-Йорке жителей больше, чем волос на голове у любого из них, и что среди жителей Нью-Йорка нет полностью лысых, у которых на голове не осталось бы ни одного волоса. Следует ли отсюда, что в

Нью-Йорке непременно найдутся по крайней мере два жителя с одинаковым числом волос на голове?

Приведем еще один вариант этой задачи, незначительно отличающийся от предыдущего. О населении города Поданк известно следующее.

1. Среди жителей Поданка не найдется двух с равным числом волос на голове.

2. Ни у одного жителя Поданка на голове не растет ровно 518 волос.

3. Жителей в Поданке больше, чем волос на голове любого из них.

Какова наибольшая численность населения Поданка?

10. Кто убийца? . . . .

В этой истории речь пойдет о караване, идущем через пустыню Сахару. Однажды караван остановился на ночлег. Обозначим трех главных действующих лиц A, B и C. A ненавидел C и решил убить его, подсыпав яду в бурдюк с питьевой водой (единственным запасом воды, которым располагал C). Независимо от A другой караванщик B также решил убить C и (не зная, что принадлежащая тому питьевая вода уже отравлена) проделал в бурдюке крохотную дырочку, чтобы вода потихоньку вытекала. Через несколько дней C умер от жажды. Спрашивается, кто убийца? A или B?

Одни считают убийцей караванщика B, поскольку C все равно не успел принять яд, подсыпанный его недругом A, и умер бы, даже если бы A не отравил воду. Другие считают убийцей караванщика A, так как, по их мнению, действия караванщика B не оказали ни малейшего влияния на исход событий: коль скоро A отравил воду, C обречен и умер бы, даже если бы другой его недруг B не проделал дырочку в бурдюке с водой.

Чьи рассуждения правильны?

В связи с нашей задачей я вспомнил анекдот о лесорубе, который в поисках работы забрел в лагерь лесозаготовителей. Управляющий встретил его не слишком обнадеживающе. «Не знаю, подойдет ли тебе работа, — сказал он. — Мы здесь валим лес». Лесоруб обрадовался: «Эта работа как раз по мне». Управляющий решил испытать его в деле. «Вот топор,— сказал он.— Посмотрим, сколько времени потребуется тебе, чтобы свалить вон то дерево». Лесоруб бросился к дереву и свалил его одним ударом топора. Управляющий был потрясен, но не сдавался. «Великолепно,— сказал он,— а теперь попробуй повалить вон то большое дерево». Лесоруб подошел к огромному дереву и двумя ударами — трах, бах! — повалил и его. «Невероятно! — воскликнул управляющий. — В жизни не видал ничего подобного. Вы, конечно, приняты! Но где вы научились так валить лес?» «Я изрядно попрактиковался и набил руку в лесу Сахары», — ответил лесоруб. Управляющий на миг задумался. «Вы хотели сказать «в пустыне Сахаре?» — переспросил он. «Теперь там пустыня», — пояснил лесоруб.

11. Еще один юридический казус. . . . .

Двоих судили за убийство. Присяжные признали одного из обвиняемых виновным, а другого невиновным. Судья обратился к тому, кто был признан виновным, и сказал: «Это самое странное дело из всех, которые мне приходилось разбирать. Хотя ваша вина вне всяких сомнений установлена, по закону я должен выпустить вас на свободу».

Как объяснить столь неожиданное заявление судьи?

12. Двое краснокожих. . . . .

Двое краснокожих сидели на бревнышке, один повыше ростом, другой пониже. Тот, кто пониже ростом, доводится сыном тому, кто повыше ростом, хотя тот, кто повыше ростом,— не его отец.

Как вы это объясните?

13. Часы остановились. . . . .

Вот превосходная старинная задача-головоломка. У одного человека не было наручных часов, но зато дома висели точные настенные часы, которые он иногда забывал заводить. Однажды, забыв в очередной раз завести часы, он отправился в гости к своему другу, провел у того вечер, а вернувшись домой, сумел правильно поставить часы. Каким образом ему удалось это сделать, если время в пути заранее известно не было?

14. Задача о медведе. . . . .

Эта задача обладает любопытной особенностью: многие слышали ее и знают ответ, но рассуждения, при которых они пытаются обосновать его, совершенно неудовлетворительны. Поэтому, даже если вы считаете, что знаете ответ задачи, проверьте себя, заглянув в решение.

Охотник находится в 100 м к югу от медведя, проходит 100 м на восток, поворачивается лицом к северу, прицеливается и, выстрелив в направлении на север, убивает медведя. Какого цвета медвежья шкура?

Б. ДУРАЦКИЕ ШТУЧКИ

Я долго колебался, не зная, как назвать эту книгу. Перебрал множество названий типа «Занимательная логика», «Логические забавы и развлечения», но никак не мог выбрать подходящее. Тогда я решил заглянуть в Большой энциклопедический словарь. Раскрыв его на статье «Развлечения», я прочитал: «См. Увеселения». Последовав совету, я почерпнул множество полезнейших сведений о буффонаде, играх, забавах, занимательных потехах, проказах, развлечениях, шалостях, шутках, шутовстве и юморе. Я узнал, что можно подшутить над кем-нибудь, устроить розыгрыш, затеять возню, устроить кутерьму, поднять пыль столбом, дым коромыслом и что бывают выходки, проделки, ужимки и даже «дурацкие штучки». Добравшись до этого выражения, я рассмеялся и сказал жене: «Знаешь, мне кажется, что «Дурацкие штучки» — великолепное название для моей книги». Однако, сколь ни выразительным было бы такое название, оно могло бы создать у читателя неправильное представление о ее содержании в целом, поскольку многие ее разделы вряд ли подходят под него. Тем не менее вы вскоре увидите, что название «Дурацкие штучки» как нельзя лучше подходит для названия этого раздела.

15. Две монеты. . . . .

У меня две монеты на общую сумму 15 копеек. Одна из них не пятак. Что это за монеты?

16. . . . .

Этот вопрос обращен к тем читателям, которые знают хоть что-нибудь о католицизме. Может ли католик жениться на сестре своей вдовы?

17. . . . .

Некто живет на двадцать пятом этаже тридцатиэтажного здания. Каждое утро (кроме субботы и воскресенья) он входит в лифт, спускается вниз и отправляется на работу. Вечером, вернувшись домой, он входит в лифт, поднимается на двадцать четвертый этаж, а оттуда — пешком — еще на один этаж.

Почему он выходит из лифта на двадцать четвертом этаже вместо того, чтобы подняться прямо на двадцать пятый этаж?

18. Грамматический вопрос. . . . .

Если вы любите грамматику, то вас, может быть, заинтересует следующий вопрос. Как правильно сказать: «не вижу белый желток» или «белого желтка»?

19. Задача о железнодорожном движении. . .

Поезд отправляется из Бостона в Нью-Йорк. Через час другой поезд отправляется из Нью-Йорка в Бостон. Оба поезда едут с одной и той же скоростью. Какой из них в момент встречи будет находиться на меньшем расстоянии от Бостона?

20. Наклон крыши. . . . .

Крыша одного дома не симметрична: один скат ее составляет с горизонталью угол 60°, другой — угол 70°. Предположим, что петух откладывает яйцо на гребень крыши. В какую сторону упадет яйцо — в сторону более пологого или крутого ската?

21. Сколько девяток? . . . .

Вдоль улицы стоят 100 домов. Мастера попросили изготовить номера для всех домов от 1 до 100. Чтобы выполнить заказ, он должен запастись цифрами. Не пользуясь карандашом и бумагой, подсчитайте в уме, сколько девяток потребуется мастеру?

22. Беговая дорожка. . . . .

Чтобы проползти по беговой дорожке одного стадиона по часовой стрелке, улитке требуется полтора часа. Когда же улитка ползет по той же дорожке против часовой стрелки, то полный круг она совершает за 90 мин. Чем объяснить несовпадение результатов?

23. Вопрос международного права. . . . .

Предположим, что на границе между Соединенными Штатами Америки и Канадой произошла авиационная катастрофа. В какой из двух стран, по вашему мнению, должны быть похоронены уцелевшие пассажиры?

24. Как вы это обясните? . . . .

Некий мистер Смит ехал в машине вместе со своим сыном Артуром. Их машина попала в катастрофу. Отец погиб на месте, а сын в тяжелом состоянии доставлен в ближайшую больницу. Взглянув на пострадавшего, дежурный хирург побледнел и сказал: «Я не могу оперировать его. Ведь это же мой сын Артур!»

Как вы это объясните?

25. И последний вопрос. . . . .

И наконец, последний вопрос: как называется эта книга?

РЕШЕНИЯ

4. Удивительно, как много людей дают неверный ответ на вопрос этой головоломки. Они мысленно ставят себя на место человека, разглядывающего портрет, и рассуждают следующим образом: «Так как у меня нет ни братьев, ни сестер, то сыном моего отца могу быть я сам и никто другой. Следовательно, я смотрю на свой собственный портрет».

Первое утверждение абсолютно правильно: если у меня нет ни братьев, ни сестер, то сыном моего отца могу быть только я сам. Но отсюда отнюдь не следует, будто правильный ответ на вопрос задачи гласит: «Самого себя». Так можно было бы ответить, если бы во второй посылке стояло «и все же тот, кого мы видим на портрете, — сын моего отца». Но в условии задачи этого не говорится. Там утверждается, что «*отец* того, кто на портрете, — сын моего отца». Отсюда следует, что отец человека на портрете — я сам (так как я единственный сын своего отца). Поскольку я отец человека на портрете, то он должен быть моим сыном. Следовательно, правильный ответ состоит в том, что человек разглядывает портрет своего сына.

Если мои рассуждения не убедили скептически настроенного читателя (а я уверен, что многие из читателей не согласны с моими аргументами!), то их можно представить в более наглядном виде.

(1) Отец человека на портрете — сын моего отца.

Подставляя краткое «я» вместо более громоздкого выражения «сын моего отца», преобразуем утверждение (1) к следующему:

(2) Отец человека на портрете — я.

Теперь вы убедились, дорогой читатель?

5. В этом случае человек разглядывает портрет своего отца.

6. При заданных условиях задача логически противоречива: всесокрушающее пушечное ядро и несокрушимый столб не могут существовать одновременно. Если бы существовало всесокрушающее пушечное ядро, то оно по определению сшибало бы на своем пути любой столб. Следовательно, в этом случае не мог бы существовать несокрушимый столб. Наоборот, если бы существовал несокрушимый столб, то по определению его не могло бы сбить ни одно пушечное ядро. Следовательно, в этом случае не могло бы существовать всесокрушающее пушечное ядро. Таким образом, существование всесокрушающего пушечного ядра само по себе не приводит к логическому противоречию. Существование несокрушимого столба само по себе также вполне допустимо. Но утверждение о том, что всесокрушающее пушечное ядро и несокрушимый столб существуют одновременно, противоречиво.

По существу дело обстоит так, как если бы я спросил у вас: «Живут на свете два человека — Джон и Джек. Джон ростом выше Джека, а Джек выше Джона. Как, по-вашему, это может быть?» Лучший ответ, который вы могли бы дать в этом случае, гласил бы: «Вы либо лжете, либо ошибаетесь».

7. Обычно на вопрос задачи дают неправильный ответ: 25 носков. Если бы в задаче спрашивалось, сколько носков следует взять из ящика, чтобы среди них было по крайней мере 2 носка *различного* цвета, то правильный ответ действительно был бы таким: 25 носков. Но в нашей задаче речь идет о том, чтобы среди взятых из ящика носков по крайней мере 2 носка были *одного* цвета, поэтому правильный ответ задачи иной: 3 носка. Если я возьму из ящика 3 носка, то они либо все будут одного цвета (и в этом случае я заведомо смогу выбрать из них по крайней мере 2 носка одного цвета), либо 2 носка будут одного цвета, а третий носок другого, что позволит мне также составить пару одноцветных носков.

8. В ящике 4 носка.

9. На вопрос первой задачи ответ утвердительный. Предположим для определенности, что население Нью-Йорка составляет 8 миллионов человек. Если число волос на голове у каждого жителя Нью-Йорка неповторимо, то это означает, что должно существовать 8 миллионов различных целых положительных чисел, каждое из которых меньше 8 миллионов, а это невозможно.

Переходим ко второй задаче. Численность населения Поданка не превышает 518 человек. Действительно, предположим, что в городе Поданк проживает более 518 человек — например, 520 человек. В этом случае должны были бы существовать 520 различных целых неотрицательных чисел, отличных от 518 и меньших 520. Но это невозможно, так как существует ровно 520 целых чисел (и среди них нуль), каждое из которых меньше 520. Следовательно, существует лишь 519 чисел, отличных от 518, которые меньше 520.

Заметим, кстати, что один из жителей Поданка должен быть совершенно лысым. Почему?

10. Не думаю, чтобы рассуждения сторонников любого из двух мнений относительно того, кто убийца, можно было считать «правильными» или «неправильными». В проблемах подобного типа, как мне кажется, одно мнение ничем не хуже и не лучше другого. Лично я считаю, что если кого-нибудь и обвинять в смерти караванщика C, то его недруга A. Если бы я был защитником караванщика B, то обратил бы внимание суда на два обстоятельства: 1) лишить человека отравленной воды не означает убить его; 2) в любом случае действия караванщика B способствовали продлению жизни караванщика C (хотя это и не входило в намерения караванщика B), поскольку смерть от отравления наступила бы быстрее, чем смерть от жажды.

Защитник караванщика A мог бы возразить мне: «Как можно, находясь в здравом уме, обвинять моего подзащитного в отравлении, если C в действительности не выпил ни капли яда?» Как видите, мы столкнулись с поистине головоломной проблемой. Дело усложняется тем, что проблему можно рассматривать с точки зрения морали, права и подходить к ней с чисто научных позиций, используя такое понятие, как *причинность*. С точки зрения морали и A, и B виновны в том, что *замышляли* убийство, но наказание за совершенное убийство по строгости не сравнимо с наказанием за преступный замысел. Правовая оценка этого дела мне не известна. Думаю, что приговоры, вынесенные различными составами присяжных, не были бы одинаковыми. Что же касается научного подхода к решению нашей головоломки, то само понятие *причинности* затрагивает множество проблем. Мне кажется, что об этой головоломке можно было бы написать целую книгу.

11. Обвиняемые были сиамскими близнецами.

12. Тот из краснокожих, кто повыше ростом,— мать того, кто ростом пониже.

13. Выходя из дома, человек заводит часы и запоминает, в каком положении находятся стрелки. Придя к другу и уходя из гостей, он отмечает время своего прихода и ухода. Это позволяет ему узнать, сколько он находился в гостях. Вернувшись домой и взглянув на часы, человек определяет продолжительность своего отсутствия. Вычитая из этого времени то время, которое он провел в гостях, человек узнает время, затраченное на дорогу туда и обратно. Прибавив ко времени выхода из гостей половину времени, затраченного на дорогу, он получает возможность узнать время прихода домой и перевести соответствующим образом стрелки своих часов.

14. Шкура должна быть белой, так как принадлежит белому медведю, обитающему в Арктике — вблизи Северного полюса. Обычно ответ подкрепляют ссылкой на то, что медведь, о котором говорится в условиях задачи, должен стоять на Северном полюсе. Это лишь одна, но не единственная возможная ситуация. В каком бы направлении ни ступить из Северного полюса, двигаться всегда будешь на юг. Поэтому если медведь находится на Северном полюсе, а охотник — в 100 м к югу от него, то, пройдя 100 м на восток и обернувшись на север, охотник окажется лицом к Северному полюсу. Все это так, но, как я уже говорил, приведенное решение не единственно. Действительно, существует бесконечно много решений. Например, охотник может находиться на параллели длиной 100 м, а медведь — в 100 м к северу от него. Пройдя 100 м на восток, охотник опишет полную окружность вокруг полюса и вернется в исходную точку. Это второе решение задачи. Но охотник может находиться еще ближе к полюсу на параллели длиной 50 м. Пройдя 100 м, он дважды опишет полную окружность вокруг полюса и окажется в исходной точке. Но и это еще не все. Охотник может находиться на параллели длиной в $^1/_3$ от 100 м. Трижды обойдя по параллели вокруг полюса, он также окажется в исходной точке. Поскольку аналогичное решение можно построить при любом положительном целом n, то на Земле существует бесконечно много мест, где могла бы разыграться сценка, описанная в задаче.

Разумеется, во всех этих решениях предполагается, что медведь, находившийся достаточно близко от Северного полюса, непременно должен быть белым медведем. Существует, однако, еще одна возможность, хотя она и весьма маловероятна: некий злонамеренный тип умышленно доставил на Северный полюс бурого медведя, чтобы «насолить» автору задачи.

15. Пятак и одна монета достоинством в 10 копеек. Одна монета (десятикопеечная) не пятак.

16. Как может покойник жениться на ком-нибудь?

17. Человек, живущий на двадцать пятом этаже,— лилипут и не может дотянуться до кнопки «25 этаж» на пульте лифта.

Один мой знакомый (о котором никак нельзя сказать, что он умеет мастерски рассказывать анекдоты) однажды рассказывал эту задачу-шутку в компании, где был и я. Начал он свой рассказ так: «В одном доме на двадцать пятом этаже жил лилипут...»

18. Правильнее было бы сказать, что желток желтый.

19. Поезда в момент встречи будут находиться на одинаковом расстоянии от Бостона.

20. Петухи не откладывают яйца.

21. Двадцать.

22. Несовпадения нет: полтора часа по продолжительности не отличаются от 90 минут.

23. Вряд ли стоит хоронить тех, кто уцелел в авиационной катастрофе!

24. Хирург был матерью Артура Смита.

25. К сожалению, я никак не могу припомнить название этой книги, но не беспокойтесь: рано или поздно я непременно вспомню, как же называется эта книга.

3. Рыцари и лжецы

А. ОСТРОВ РЫЦАРЕЙ И ЛЖЕЦОВ

Существует множество хитроумных задач об острове, населенном «рыцарями», всегда говорящими только правду, и лжецами, изрекающими только ложь. Предполагается, что каждый обитатель острова либо рыцарь, либо лжец. Мы начнем с одной хорошо известной задачи этого типа, а затем я приведу серию новых задач, которые придумал сам.

26. . . . .

Итак, начнем с давно известной задачи. Трое жителей острова (A, B и C) разговаривали между собой в саду. Проходивший мимо незнакомец спросил у A: «Вы рыцарь или лжец?» Тот ответил, но так неразборчиво, что незнакомец не смог ничего понять. Тогда незнакомец спросил у B: «Что сказал A?» «A сказал, что он лжец», — ответил B. «Не верьте B! Он лжет! — вмешался в разговор островитянин C.

Кто из островитян B и C рыцарь и кто лжец?

27. . . . .

Когда я впервые встретил предыдущую задачу, мне сразу же бросилось в глаза, что C по существу бездействует, исполняя роль своего рода «бесплатного приложения». Действительно, когда B высказался, то ложность его утверждения можно было бы установить и без вмешательства C (см. решение предыдущей задачи). Следующий вариант задачи позволяет избавиться от «излишеств» в условиях.

Предположим, что незнакомец задал A другой вопрос: «Сколько рыцарей среди вас?» И на этот вопрос A ответил неразборчиво. Поэтому незнакомцу пришлось спросить у B: «Что сказал A?» B ответил: «A сказал, что среди нас один рыцарь». И тогда C закричал: «Не верьте B! Он лжет!»

Кто из двух персонажей B и C рыцарь и кто лжец?

28. . . . .

В этой задаче два персонажа: А и В. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. А высказывает следующее утверждение: «По крайней мере один из нас лжец».

Кто из двух персонажей А и В рыцарь и кто лжец?

29. . . . .

Предположим, что А говорит: «Или я лжец, или В рыцарь».

Кто из двух персонажей А и В рыцарь и кто лжец?

30. . . . .

Предположим, что А говорит: «Или я лжец, или два плюс два — пять». К какому заключению можно прийти на основании этого утверждения?

31. . . . .

Перед нами снова три островитянина А, В и С, о каждом из которых известно, что он либо рыцарь, либо лжец. Двое из них (А и В) высказывают следующие утверждения:

А: Мы все лжецы.

В: Один из нас рыцарь.

Кто из трех островитян А, В и С рыцарь и кто лжец?

32. . . . .

Предположим, что А и В высказывают следующие утверждения:

А: Мы все лжецы.

В: Ровно один из нас лжец.

Можно ли определить, кто такой В: рыцарь или лжец?

Можно ли определить, кто такой С?

33. . . . .

Предположим, что А высказывает утверждение: «Я лжец, а В не лжец».

Кто из островитян А и В рыцарь и кто лжец?

34. . . . .

Перед нами в очередной раз три островитянина А, В и С, о каждом из которых известно, что он либо рыцарь, либо лжец. Условимся называть двух островитян однотипными, если они оба рыцари или оба лжецы. Пусть А и В высказывают следующие утверждения:

А: В — лжец.

В: А и С однотипны.

Кто такой С: рыцарь или лжец?

35. . . . .

Перед нами снова трое островитян А, В и С. А высказывает утверждение: «В и С однотипны». Кто-то спрашивает у С: «А и В однотипны?»

Что ответит островитянин С?

36. Небольшое происшествие. . . . .

Эта головоломка необычна. Кроме того, в основу ее положено подлинное происшествие. Однажды, когда я гостил на острове рыцарей и лжецов, мне встретились два местных жителя. Я спросил у одного из них: «Кто-нибудь из вас рыцарь?» Мой вопрос не остался без ответа, и я узнал то, что хотел узнать.

Кем был островитянин, к которому я обратился с вопросом: рыцарем или лжецом? Кем был другой островитянин? Смею заверить вас, что я предоставил в ваше распоряжение информацию, достаточную для решения задачи.

37. . . . .

Предположим, что вы находитесь на острове рыцарей и лжецов и набрели на двух его обитателей, лениво греющихся на солнце. Вы спрашиваете одного из них, рыцарь ли его приятель, и получаете ответ (да или нет). Затем вы задаете такой же вопрос второму островитянину и получаете ответ (да или нет).

Должны ли оба ответа быть одинаковыми?

38. Эдуард или Эдвин? . . . .

На этот раз, прогуливаясь по острову, вы случайно набредете на островитянина, безнадежно увязшего у берега пруда, но сколько ни бьетесь, вам так и не удается извлечь его из тины. Вы помните, что его зовут то ли Эдвин, то ли Эдуард, но не можете вспомнить, как именно. Поэтому вы спрашиваете у островитянина, как его зовут, и слышите в ответ: «Эдуард».

Как зовут островитянина?

Б. РЫЦАРИ, ЛЖЕЦЫ И НОРМАЛЬНЫЕ ЛЮДИ

В не менее увлекательном виде задач персонажи делятся на три типа: рыцарей, говорящих всегда только правду, лжецов, изрекающих только ложь, и нормальных людей, которые иногда лгут, а иногда говорят правду. Предлагаю вам несколько придуманных мною задач о рыцарях, лжецах и нормальных людях.

39. . . . .

Перед нами трое людей A, B и C. Один из них рыцарь, другой лжец и третий — нормальный человек (типы людей могут быть перечислены не в том же порядке, в каком выписаны их «имена» A, B и C). Наши знакомые высказывают следующие утверждения.

A: Я нормальный человек.

B: Это правда.

C: Я не нормальный человек.

Кто такие A, B и C?

40. . . . .

Предлагаю вашему вниманию необычную задачу. Двое людей A и B, о которых известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо нормальный человек, высказывают следующие утверждения:

A: B — рыцарь.

B: A — не рыцарь.

Докажите, что по крайней мере один из них говорит правду, но это не рыцарь.

41. . . . .

На этот раз A и B высказывают следующие утверждения:

A: B — рыцарь.

B: A — лжец.

Докажите, что либо один из них говорит правду, но это не рыцарь, либо один из них лжет, но это не лжец.

42. Табель о рангах. . . . .

На одном острове, где живут рыцари, лжецы и нормальные люди, лжецы считаются особами низшего ранга, нормальные люди — особами среднего ранга и рыцари — особами высшего ранга.

Мне очень нравится следующая задача. Двое людей A и B, о каждом из которых известно, что он либо лжец, либо нормальный человек, высказывают утверждения:

A: По рангу я ниже, чем B.

B: Не правда!

Можно ли определить ранг A или B? Можно ли установить, истинно или ложно каждое из этих двух утверждений?

43. . . . .

Трое людей A, B и C, о каждом из которых известно, что он либо рыцарь, либо лжец, либо нормальный человек, высказывают следующие утверждения:

A: B по рангу выше, чем C.

B: C по рангу выше, чем A.

Затем у C спрашивают: «Кто старше по рангу — A или B?» Что ответит C?

В. ОСТРОВ БАХАВА

На острове Бахава женщины во всем пользуются равными правами с мужчинами, поэтому женщин, как и мужчин, называют рыцарями, лжецами и нормальными людьми. В глубокой древности одна из правительниц острова Бахава по собственной прихоти издала указ, по которому рыцарю разрешалось вступать в брак только с лжецом, а лжецу — только с рыцарем (следовательно, нормальный человек мог вступать в брак только с нормальным человеком). С тех пор в любой супружеской чете на острове Бахава либо оба супруга — нормальные люди, либо один из супругов — рыцарь, а другой — лжец.

Следующие три истории происходят на острове Бахава.

44. . . . .

Рассмотрим сначала супружескую чету — мистера и миссис А. Они высказывают следующие утверждения:

Мистер А: Моя жена — не нормальный человек.

Миссис А: Мой муж — не нормальный человек.

Кто такой мистер А и кто такая миссис А — рыцарь, лжец или нормальный человек?

45. . . . .

Предположим, что мистер и миссис А высказали следующие утверждения:

Мистер А: Моя жена — нормальный человек.

Миссис А: Мой муж — нормальный человек.

Совпадает ли ответ этой задачи с ответом предыдущей задачи?

46. . . . .

В этой задаче речь пойдет о двух супружеских парах с острова Бахава: мистере и миссис А, мистере и миссис В. При опросе трое из них дали следующие показания.

Мистер А: Мистер В — рыцарь.

Миссис А: Мой муж прав: мистер В — рыцарь.

Миссис В: Что верно, то верно. Мой муж действительно рыцарь.

Кто каждый из этих четырех людей — рыцарь, лжец или нормальный человек и какие из трех высказываний истинны?

РЕШЕНИЯ

26. Ни рыцарь, ни лжец не могут сказать: «Я лжец» (высказав подобное утверждение, рыцарь солгал бы, а лжец изрек бы истину). Следовательно, А, кем бы он ни был, не мог сказать о себе, что он лжец. Поэтому В, утверждая, будто А назвал себя лжецом, заведомо лгал. Значит, В — лжец. А так как С сказал, что В лгал, когда тот действительно лгал, то С изрек истину. Следовательно, С — рыцарь. Таким образом, В — лжец, а С — рыцарь. (Установить, кем был А, не представляется возможным.)

27. Ответ в этой задаче такой же, как в предыдущей, но ход рассуждений несколько иной.

Прежде всего заметим, что В и С не могут быть оба рыцарями или оба лжецами, так как В противоречит С. Следовательно, В и С не могут быть оба рыцарями или оба лжецами: один из них рыцарь, а другой — лжец. Если бы А был рыцарем, то всего было бы два рыцаря. Следовательно, А не лгал и сказал, что среди троих персонажей рыцарь лишь один. С другой стороны, если бы А был лжецом, то утверждение о том, что из трех островитян А, В и С рыцарь лишь один, было бы истинным. Но тогда А, будучи лжецом, не мог бы высказать это истинное утверждение. Следовательно, на вопрос незнакомца А не мог ответить: «Среди нас один рыцарь». Следовательно, В неверно передал высказывание А, из чего мы заключаем, что В — лжец, а С — рыцарь.

28. Предположим, что А — лжец. Если бы это было так, то утверждение «По крайней мере один из нас лжец» было бы ложным (так как лжецы высказывают ложные утверждения). Следовательно, в этом случае А и В были бы рыцарями. Таким образом, если бы А был лжецом, то он не был бы лжецом, что невозможно. Отсюда мы заключаем, что А не лжец, он рыцарь. Но тогда высказанное А утверждение должно быть истинным. Поэтому по крайней мере один из двух персонажей А и В в действительности лжец. Так как А — рыцарь, то лжецом должен быть В. Итак, А — рыцарь, а В — лжец.

29. Эта задача может служить неплохим введением в логику дизъюнкции. Пусть заданы два высказывания p, q. Высказывание «или p, или q» истинно, если истинно по крайней мере одно из высказываний p, q (или оба). Высказывание «или p, или q» ложно, если ложны оба высказывания p, q. Например, если бы я в хорошую погоду сказал: «Либо дождик, либо снег», то мое высказывание было бы ложным, потому что ложны обе его части: и та, в которой говорится о дожде, и та, в которой говорится о снеге.

Именно так принято понимать связку «или» в логике. Именно так мы будем понимать ее на протяжении всей нашей книги. В повседневной жизни союз «или» иногда интерпретируют так же, как в логике (то есть допускают возможность выполнения обеих альтернатив), а иногда понимают в так называемом «исключительном» смысле (то есть считают, что выполняется одна и только одна из альтернатив, но не обе). В качестве примера «исключительного или» приведу хотя бы такое высказывание: «Я женюсь на Бетти или на Джейн». Предполагается, что альтернативы взаимно исключающие, то есть что я не не женюсь на обеих девушках одновременно. С другой стороны, если в учебной программе колледжа сказано, что студенты первого курса должны либо прослушать годовой цикл лекций по математике, либо пройти годичный курс иностранного языка, то вряд ли руководство колледжа станет возражать, если вы захотите прослушать и то и другое! Именно в этом — «включительном» — смысле мы и будем использовать логическую связку «или».

Другое важное свойство дизъюнкции «или ..., или» состоит в следующем. Рассмотрим высказывание «p или q» (так мы условимся для краткости записывать сложное высказывание «или p, или q»). Предположим, что оно истинно. Тогда если p ложно, то q должно быть истинно (так как по крайней мере одно из высказываний должно быть истинным, то если p ложно, то q должно быть истинным). Предположим, что высказывание «Либо дождик, либо снег» истинно, но неверно, что дождь идет. Тогда должно быть истинно, что идет снег.

Воспользуемся свойствами дизъюнкции и применим их к решению задачи. А высказывает сложное утверждение типа дизъюнкции: «Или я лжец, или В — рыцарь». Предположим, что А — лжец. Тогда высказанное им утверждение ложно. «Перевести» это можно так: неверно, что А — лжец и что В — рыцарь. Таким образом, если бы А был лжецом, то из этого следовало бы, что он не лжец, то есть мы пришли бы к противоречию. Отсюда мы заключаем, что А должен быть рыцарем.

Итак, мы установили, что А — рыцарь. Следовательно, его высказывание о том, что выполняется по крайней мере одна из двух альтернатив (1) А — лжец, 2) В — рыцарь), истинно. А поскольку первая альтернатива (А — лжец) ложна, то должна выполняться вторая альтернатива, то есть В — рыцарь. Таким образом, установлено, что А и В — оба рыцари.

30. Единственное здравое заключение, к которому можно прийти, состоит в том, что автор этой задачи не рыцарь. Действительно, ни рыцарь, ни лжец не могли бы высказать утверждения, приведенного в задаче. Действительно, предположим, что А — рыцарь. Тогда высказывание «А — лжец или два плюс два — пять» ложно, так как оба образующих его высказывания («А — лжец» и «два плюс два — пять») ложны. Но это означало бы, что рыцарь А высказал ложное утверждение, что невозможно. С другой стороны, если бы А был лжецом, то сложное высказывание «А — лжец или два плюс два — пять» было бы истинным, так как первое из входящих в него простых высказываний «А — лжец» истинно. Но тогда лжец А высказал бы истинное утверждение, что также невозможно.

Итак, условия задачи (так же как и условия задачи о всесокрушающем пушечном ядре и несокрушимом столбе) противоречивы. Следовательно, я, автор задачи, либо допустил ошибку, либо солгал. Смею уверить вас, что ошибки я не допускал. Отсюда вы с полным основанием приходите к выводу, что я не рыцарь.

31. Прежде всего заметим, что А должен быть лжецом. Действительно, если бы А был рыцарем, то из его высказывания следовало бы, что все трое лжецы. Но тогда А (по предположению, рыцарь) оказался бы лжецом, что невозможно. Следовательно, А — лжец. Но тогда его высказывание ложно и по крайней мере один из трех островитян А, В и С — рыцарь.

Предположим теперь, что В — лжец. Тогда А и В — оба лжецы, поэтому С должен быть рыцарем (так как по крайней мере один из трех островитян рыцарь). Это означает, что ровно один из трех островитян рыцарь, и, следовательно, высказывание В истинно, но это невозможно, так как любое высказывание лжеца не истинно. Отсюда мы заключаем, что В должен быть рыцарем.

Итак, мы установили, что А — лжец, а В — рыцарь. Так как В — рыцарь, то его высказывание истинно, поэтому ровно один из трех островитян — рыцарь. Им должен быть В, следовательно, С должен быть лжецом. Итак, А — лжец, В — рыцарь и С — лжец.

32. Определить, кто такой В, мы не в силах, но можно доказать, что С — рыцарь.

По тем же причинам, что и в предыдущей задаче, А должен быть лжецом. Следовательно, по крайней мере один из островитян В и С должен быть рыцарем. Выясним, кто такой В. Он может быть либо рыцарем, либо лжецом. Предположим, что он рыцарь. Тогда его высказывание о том, что только один из островитян А и В — лжец, истинно. Единственным лжецом должен быть А, поэтому С может быть только рыцарем. Таким образом, если В — рыцарь, то и С — рыцарь. С другой стороны, если В — лжец, то С должен быть рыцарем, так как все трое островитян, как мы уже знаем, не могут быть рыцарями. Следовательно, С должен быть рыцарем в любом случае.

33. Прежде всего заметим, что А не может быть рыцарем. Действительно, если бы А был рыцарем, то его высказывание было бы истинным, а в нем утверждается, что А — лжец. Следовательно, А — лжец, и его высказывание ложно. Если бы В был рыцарем, то высказывание А было бы истинным. Следовательно, В также лжец. Итак, А и В — лжецы.

34. Предположим, что А — рыцарь. Тогда его высказывание о том, что В — лжец, должно быть истинным, в силу чего В должен быть лжецом. Но тогда высказывание В о том, что А и С однотипны, ложно, поэтому А и С не однотипны. Следовательно, С — лжец (так как А — рыцарь). Таким образом, если А — рыцарь, то С — лжец.

С другой стороны, предположим, что А — лжец. Тогда его высказывание о том, что В — лжец, ложно, в силу чего В — рыцарь. Следовательно, высказывание В о том, что А и С однотипны, истинно. Отсюда мы заключаем, что С — рыцарь (так как А — рыцарь).

Итак, мы доказали, что независимо от того, кто такой А — рыцарь или лжец, С должен быть лжецом. Следовательно, С — лжец.

35. Для решения этой задачи необходимо рассмотреть отдельно два случая.

Первый случай: А — рыцарь. Тогда В и С однотипны. Если С — рыцарь, то и В — рыцарь и, следовательно, одинотипен с А. Поэтому С, будучи человеком правдивым, должен был ответить «Да». Если С — лжец, то и В — лжец (поскольку В однотипен с С) и, следовательно, принадлежит к иному типу островитян, чем А. Поэтому С, будучи лжецом, должен солгать и ответить «да».

Второй случай: А — лжец. Тогда В и С не однотипны. Если С — рыцарь, то В — лжец и, следовательно, однотипен с А. Поэтому С, будучи рыцарем, должен ответить «да». Если С — лжец, то В, будучи человеком иного типа, чем С,— рыцарь и принадлежит к иному типу островитян, чем А. Но тогда С, будучи лжецом и утверждая, что А и С не однотипны, должен лгать, поэтому на заданный вопрос он ответит «да».

Таким образом, в обоих случаях С ответит «да».

36. Решить эту задачу вам поможет информация, приведенная в условиях задачи после сообщения о том, что островитянин дал ответ на мой вопрос: мое замечание о том, что после его ответа я узнал истинный ответ на свой вопрос.

Предположим, что островитянин, с которым я разговаривал (обозначим его А), ответил на мой вопрос «да». Мог бы я после такого ответа знать, что по крайней мере один из встретившихся мне островитян рыцарь? Разумеется, нет. Действительно, А мог оказаться рыцарем и на мой вопрос правдиво ответить «да» (его ответ соответствовал бы истине, поскольку по крайней мере один островитянин, а именно А — рыцарь). Оба островитянина могли оказаться лжецами. В этом случае А, солгав, ответил бы на мой вопрос «да» (что было бы ложью, так как ни один из островитян не был рыцарем). Таким образом, получив от А ответ «да», я не смог бы узнать истинный ответ на свой вопрос. Но, как говорится в условиях задачи, после ответа А мне стал известен правильный ответ на заданный мною вопрос. Следовательно, А мог ответить только «нет».

Разберемся теперь, кто такие островитянин А и его приятель, которого мы обозначим В. Если бы А был рыцарем, то он не мог бы дать правдивый ответ «нет», поэтому А — лжец. Так как его отрицательный ответ ложен, то по крайней мере один из двух островитян должен быть рыцарем. Следовательно, А — лжец, а В — рыцарь.

37. Должны. Если оба встретившихся вам островитянина рыцари, то они оба ответят «да». Если они оба лжецы, то они также оба ответят «да». Если же один из них рыцарь, а другой лжец, то рыцарь ответит «нет» и лжец также ответит «нет».

38. Должен признаться, что в этой задаче я позволил себе подшутить над читателем. Ключом к решению служит та фраза, в которой говорится, что вам, сколько вы ни бились, так и не удалось «извлечь его из тины». Слова, заключенные в кавычки, представляют собой каламбур — «извлечь его истины». Из них следует, что встретившийся вам островитянин изрекал только ложь, то есть был лжецом. Отсюда мы заключаем, что его звали Эдвин.

39. Прежде всего заметим, что А не может быть рыцарем, потому что рыцарь не назвал бы себя нормальным человеком. Следовательно, А — либо лжец, либо нормальный человек. Тогда истинно высказывание островитянина В. Значит, В — либо рыцарь, либо нормальный человек. Но В не может быть нормальным человеком (так как А — нормальный человек), поэтому В — рыцарь, а С — лжец. Но лжец не может сказать о себе, что он не нормальный человек (так как любой лжец — не нормальный человек), и мы приходим к противоречию. Итак, А не может быть нормальным человеком. Следовательно, А — лжец. Это означает, что высказывание островитянина В ложно, в силу чего В должен быть нормальным человеком (лжецом он быть не может, так как лжец — островитянин А). Итак, А — лжец, а В — нормальный человек. Отсюда мы заключаем, что С — рыцарь.

40. Эта задача обладает интересной особенностью. Условия ее не позволяют установить, кто из двух островитян говорит правду, не будучи рыцарем: А или В. Мы можем доказать более слабое утверждение: по крайней мере один из двух островитян А и В говорит правду, не будучи рыцарем.

Островитянин А либо говорит правду, либо не говорит правду. Докажем два утверждения: 1) если А говорит правду, то он говорит правду, не будучи рыцарем; 2) если А лжет, то В говорит правду, не будучи рыцарем.

1) Предположим, что А говорит правду. Тогда В — рыцарь и, следовательно, говорит правду. Значит, А — не рыцарь. Таким образом, если А говорит правду, то А — лицо, говорящее правду, не будучи рыцарем.

2) Предположим, что А не говорит правду. Тогда В — не рыцарь. Но В должен говорить правду, так как А не может быть рыцарем (ведь А не говорит правду). Следовательно, в этом случае В говорит правду, не будучи рыцарем.

41. Докажем, что если В говорит правду, не будучи рыцарем, и если В не говорит правду, то А лжет, не будучи лжецом.

1) Предположим, что В говорит правду. Тогда А — лжец и, следовательно, заведомо не говорит правду. Отсюда мы заключаем, что В — не рыцарь. Таким образом, в этом случае В говорит правду, не будучи рыцарем.

2) Предположим, что В не говорит правду. Тогда А не лжет. Но А заведомо лжет, когда говорит о В, так как В не может быть рыцарем, если он не говорит правду. Таким образом, в этом случае А лжет, не будучи лжецом.

42. Прежде всего заметим, что А не может быть рыцарем, так как если бы А был рыцарем, то его высказывание было бы ложным (рыцарь как особа высшего ранга не может быть по рангу ниже В). Предположим, что А — лжец. Тогда его высказывание ложно. Следовательно, А по рангу не может быть ниже, чем В. Значит, В также должен быть лжецом (так как если бы В не был лжецом, то А был бы особой более высокого ранга, чем В). Но это невозможно, так как высказывание В противоположно высказыванию А, а два противоположных высказывания не могут быть истинными одновременно. Следовательно, предположение, что А —лжец, приводит к противоречию. Значит, А не лжец, но тогда А должен быть нормальным человеком.

А что можно сказать о В? Если бы он был рыцарем, то А (будучи нормальным человеком) был бы особой более низкого ранга, чем В. Тогда высказывание А было бы истинным, из чего следовало бы, что высказывание В ложно. Таким образом, рыцарь высказал бы ложное утверждение, что невозможно. Значит, В не рыцарь. Предположим, что В был бы лжецом. Тогда высказывание А было бы ложным, из чего следовало бы, что высказывание В истинно. Таким образом, лжец высказал бы истинное утверждение, что невозможно. Следовательно, В не может быть не только рыцарем, но и лжецом. Значит, В — нормальный человек.

Итак, А и В — нормальные люди. Высказывание А ложно, высказывание В истинно. Тем самым задача полностью решена.

43. *Первый шаг.* Прежде всего докажем, что в силу высказывания А островитянин С не может быть нормальным человеком. Действительно, если А — рыцарь, то В — особа более высокого ранга, чем С. Следова-В должен быть нормальным человеком, а С — лжецом. Таким образом, в этом случае С — не нормальный человек. Предположим, что А — лжец. Тогда В по рангу не выше С. Следовательно, В — особа более низкого ранга, поэтому В должен быть нормальным человеком, а С — рыцарем. Таким образом, и в этом случае С — не нормальный человек. Предположим, наконец, что А — нормальный человек. Тогда С — заведомо не нормальный человек (так как из трех островитян А, В и С только один — нормальный человек). Итак, С — не нормальный человек.

Второй шаг. При аналогичных рассуждениях из высказывания В можно вывести, что А — не нормальный человек. Таким образом, ни А, ни С не нормальны. Следовательно, В — нормальный человек.

Третий шаг. Поскольку С — не нормальный человек, то он может быть рыцарем или лжецом. Предположим, что он рыцарь. Тогда А — лжец (так как В — нормальный человек). Следовательно, В — особа более высокого ранга, чем А, и С, будучи рыцарем, даст правдивый ответ: «В по рангу выше А». С другой стороны предположим, что С — лжец. Тогда А должен быть рыцарем, поэтому В по рангу не выше А. В этом случае С, будучи лжецом, солгал бы и ответил так: «В по рангу выше А». Таким образом, независимо от того, кто такой островитянин С — рыцарь или лжец, он ответит, что В по рангу выше А.

44. Мистер А не может быть лжецом, так как тогда его жена была бы рыцарем и, следовательно, не могла бы быть нормальным человеком, а это означало бы, что высказывание мистера А было бы истинно. По аналогичной причине миссис А не может быть и лжецом. Следовательно, ни мистер А, ни миссис А не могут быть и рыцарями (в противном случае второй супруг был бы лжецом). Значит, мистер А и миссис А — нормальные люди (и оба лгут).

45. Совпадает. Почему?

46. Оказывается, что все четверо — нормальные люди, а все три высказывания ложны.

Прежде всего заметим, что миссис В должна быть нормальным человеком, так как если бы она была рыцарем, то ее муж был бы лжецом и, назвав его рыцарем, она солгала бы. Если бы миссис В была лжецом, то ее муж был бы рыцарем, но тогда ее высказывание о своем муже было бы истинным. Следовательно, миссис В — нормальный человек, тогда мистер В также нормальный человек. Это означает, что мистер А и миссис А оба лгали. Отсюда мы заключаем, что ни один из супругов А не рыцарь и что они не могут быть и лжецами. Следовательно, супруги А — нормальные люди.

4. Алиса в Лесу Забывчивости

А. ЛЕВ И ЕДИНОРОГ

Когда Алиса вошла в Лес Забывчивости, она забыла не все, а лишь кое-что. Она часто забывала, как ее зовут, но особенно ей легко удавалось забывать дни недели. Лев и Единорог частенько наведывались в Лес Забывчивости. Странные это были существа. Лев лгал по понедельникам, вторникам и средам и говорил правду во все остальные дни недели. Единорог же вел себя иначе: он лгал по четвергам, пятницам и субботам и говорил правду во все остальные дни недели.

47. . . . .

Однажды Алиса повстречала Льва и Единорога, отдыхавших под деревом. Те высказали следующие утверждения.

Лев. Вчера был один из дней, когда я лгу.

Единорог. Вчера был один из дней, когда я тоже лгу.

Из этих двух высказываний Алиса (девочка очень умная) сумела вывести, какой день недели был вчера. Что это был за день?

48. . . . .

В другой раз Алиса повстречала одного Льва. Он высказал два утверждения:

1) Я лгал вчера.

2) После завтрашнего дня я буду лгать два дня подряд.

В какой день недели Алиса встретила Льва?

49. . . . .

В какие дни недели Лев может высказать следующие утверждения:

1) Я лгал вчера.

2) Я буду лгать завтра.

50. . . . .

В какие дни недели Лев может высказать следующее единое утверждение: «Я лгал вчера, и я буду лгать завтра». *Предостережение!* Ответ этой задачи не совпадает с ответом предыдущей задачи.

Б. ТРАЛЯЛЯ И ТРУЛЯЛЯ

Однажды в течение целого месяца Лев и Единорог не появлялись в Лесу Забывчивости. Они где-то пропадали, ведя нескончаемую драку за корону.

Но Траляля и Труляля частенько наведывались в лес. Один из них, как Лев, лгал по понедельникам, вторникам и средам и говорил правду во все остальные дни недели. Другой, как Единорог, лгал по четвергам, пятницам и субботам, но во все остальные дни недели говорил правду. Алиса не знала, кто из них ведет себя как Лев и кто — как Единорог. К тому же братья были так похожи друг на друга, что Алиса даже не могла различить их (воротнички, на которых были вышиты их имена, братья надевали очень редко). Бедняжке Алисе приходилось очень туго! Взять хотя бы следующие случаи.

51. . . . .

Однажды Алиса встретила обоих братьев вместе, и они высказали следующие утверждения:

Первый. Я Траляля.

Второй. Я Труляля.

Кто из них в действительности был Траляля и кто — Труляля?

52. . . . .

В другой день той же недели братцы высказали следующие утверждения:

Первый. Я Траляля.

Второй. Если это так, то я Труляля!

Кто из них Траляля и кто Труляля?

53. . . . .

Как-то Алиса встретила обоих братцев и спросила у одного из них: «Вы лжете по воскресеньям?» Тот ответил: «Да!» Тогда она задала тот же вопрос другому братцу. Что тот ответил?

54. . . . .

В другой раз братья заявили следующее:

Первый. 1) Я лгу по субботам.

2) Я лгу по воскресеньям.

Второй. Я буду лгать завтра.
В какой из дней недели это было?

55. . . . .

Однажды Алиса встретила одного из братцев. Он заявил следующее: «Я лгу сегодня, и меня зовут Труляля».

Кто из братцев встретился Алисе?

56. . . . .

Предположим, что встреченный Алисой братец заявил: «Я лгу сегодня или я Труляля». Можно было бы в этом случае определить, кто из братьев это был?

57. . . . .

Однажды Алиса встретила обоих братцев вместе. Они высказали следующие утверждения.

Первый. Если я Траляля, то он Труляля.

Второй. Если он Труляля, то я Траляля.

Можно определить, кто из братцев Траляля и кто Труляля? Можно ли определить, что это был за день недели?

58. Загадка разгадана! . . . .

В тот знаменательный день Алиса разгадала сразу три трудные загадки. Она набрела на братцев, которые, ухмыляясь, сидели под деревом. Алиса надеялась, что при этой встречи ей удасться разгадать три загадки: 1) установить день недели; 2) выяснить, кто из двух братцев Траляля; 3) определить, ведет ли себя Траляля, как Лев или как Единорог, когда лжет (эту загадку ей давно хотелось разгадать).

Братцы при виде Алисы высказали следующие утверждения.

Первый. Сегодня не воскресенье.

Второй. Сегодня понедельник.

Первый. Завтра — один из дней, когда Труляля лжет.

Второй. Лев лгал вчера.

От радости Алиса захлопала в ладоши. Задача была полностью решена! Какое решение у этой задачи?

В. ЧЬЯ ПОГРЕМУШКА?

Раз Траляля и Труляля
Решили вздуть друг дружку, —
Ведь Траляла сказал, что брат
Испортил погремушку, —
Хорошую и новую испортил погремушку.

Но ворон, черный, будто ночь,
На них слетел во мраке.
Герои убежали прочь,
Совсем забыв о драке, —
Тра-ля-ля-ля, тру-ля-ля-ля, совсем забыв о драке.

— Ты только взгляни! — торжествующе воскликнул Белый Король, обращаясь к Алисе. — Я нашел погремушку и починил ее. Она совсем как новая!

— О да,— восторженно согласилась Алиса,— погремушка выглядит так, будто ее только что сделали. Даже малый ребенок и тот не заметил бы разницы.

— Что значит «даже малый ребенок»? — возмутился Белый Король. — Твое замечание, должен прямо тебе сказать, не очень-то логично. Разумеется, малый ребенок не мог бы отличить починенную мной погремушку от новенькой! Вряд ли можно требовать от ребенка, чтобы он так тонко разбирался в погремушках! Тебе следовало бы сказать, — продолжал Король несколько успокоившись,— что даже взрослый, будь он хоть самым большим знатоком погремушек в мире, не смог бы отличить починенную мной погремушку от новой! Во всяком случае, мы будем считать, что ты именно так и сказала. Но починить погремушку даже так искусно, как это сделал я, — лишь полдела. Важно вернуть ее законному владельцу. Ты не могла бы взять это на себя?

— А кто ее законный владелец?— спросила Алиса.

— Об этом ты могла бы и не спрашивать! — нетерпеливо прервал ее Король.

— Почему?— удивилась Алиса.

— Потому что в стихах, которые ты, конечно, знаешь, ясно сказано: Траляля сказал, что брат испортил его новую хорошую погремушку. Значит, Траляля — законный владелец погремушки!

— Не обязательно!— возразила Алиса, которой хотелось самую малость поспорить.— Я хорошо знаю эти стихи и считаю, что вы не правы.

— А в чем, собственно говоря, проблема?— спросил Король, необычайно озадаченный словами Алисы.

— Все очень просто, — пояснила Алиса. — Я смею заверить вас, что все, о чем говорится в стихотворении, чистейшая правда. Траляля действительно сказал, что Труляля испортил его погремушку. Поэтому-то мы и не можем быть уверены в том, что все было именно так, как утверждает Траляля. Ведь Траляля мог сказать это в один из тех дней, когда он лжет. На самом деле все могло происходить как раз наоборот. Вполне возможно, что Траляля испортил новую хорошую погремушку, принадлежавшую Труляля.

— Об этом я как-то никогда не задумывался,— печально признался Король,— и теперь все мои добрые намерения пошли прахом.

Король выглядел таким несчастным, что казалось, вот-вот расплачется.

— Не беда,— сказала Алиса как можно более радостным тоном,— дайте мне погремушку, и я постараюсь найти ее законного владельца. У меня уже есть кое-какой опыт общения с лжецами и рыцарями, и я немного привыкла иметь с ними дело.

— Надеюсь, что это так! — печально сказал Король.

А теперь, когда вы знаете всю предысторию, я расскажу вам, какие приключения пришлось пережить Алисе, пока она разыскивала владельца погремушки.

59. . . . .

Взяв с собой погремушку, Алиса отправилась в Лес Забывчивости в надежде, что ей удастся разыскать по крайней мере одного из братцев. К своей радости, она внезапно увидела под деревом обоих братцев. Они сидели и ухмылялись. Алиса направилась к тому, кто был поближе, и сурово потребовала:

— Скажите мне правду! Чья это погремушка?

Тот ответил:

— Эго погремушка Труляля.

Алиса немного подумала и спросила второго братца:

— Вы кто?

— Труляля,— ответил тот.

Алиса не помнила точно, в какой день недели происходил этот разговор, но была уверена, что не в воскресенье.

Кому Алиса должна была отдать погремушку?

60. . . . .

Алиса возвратила погремушку ее законному владельцу, но через несколько дней другой братец снова сломал погремушку. На этот раз ворон не прилетел, чтобы испугать братцев, и они принялись лупить и тузить друг друга что было мочи. Алиса схватила сломанную погремушку и бросилась бежать из лесу.

Через какое-то время Алиса встретила Белого Короля и подробно рассказала обо всем, что случилось.

— Все это очень-очень интересно, — уверил ее Король.— А самое замечательное во всей истории то, что, хотя ты знаешь, кому отдала погремушку, нам до сих пор не известно, кто ее владелец, Траляля или Труляля.

— Вы совершенно правы, ваше величество,— согласилась Алиса.— Но что нам теперь делать с испорченной погремушкой?

— Пустяки,— сказал Король.— Мне ничего не стоит починить ее снова.

И в подтверждение своих слов Белый Король так искусно исправил погремушку, что та стала совсем как новая, и через несколько дней отдал Алисе. С трепетом отправилась Алиса в лес, опасаясь, что братцы все еще дерутся. Но Траляля и Труляла к этому времени заключили перемирие, и Алиса нашла одного из них, когда тот отдыхал под деревом. Алиса подошла к нему и спросила:

— Кому из вас принадлежит погремушка?

Тот ответил загадочно:

— Истинный владелец погремушки сегодня лжет. Велики ли шансы на то, что он и был истинным владельцем погремушки?

61. . . . .

Через несколько дней, бродя по лесу, Алиса снова увидела одного из братцев, сидевшего под деревом. Она задала ему тот же вопрос и услышала в ответ: «Истинный владелец погремушки сегодня говорит правду».

Алиса призадумалась. Ей хотелось оценить, велики ли шансы на то, что произнесший эту фразу братец был истинным владельцем погремушки.

— Я знаю, о чем ты думаешь,— сказал оказавшийся поблизости Шалтай-Болтай.— Шансы велики! Ровно тринадцать из четырнадцати.

Как Шалтай-Болтай получил эти числа?

62. . . . .

На этот раз Алиса встретила обоих братцев вместе. У первого из них она спросила: «Вы владелец погремушки?»— И получила ответ: «Да». Тогда Алиса спросила второго братца: «Это ваша погремушка?» Второй ответил, и Алиса отдала одному из них погремушку.

Которому из братцев Алиса вручила погремушку: первому или второму?

Г. ИЗ УСТ БАРМАГЛОТА

Из всех приключений, пережитых Алисой с двумя братцами Траляля и Труляля, то, о котором я хочу рассказать вам сейчас, было самым необыкновенным и запомнилось Алисе до мельчайших подробностей.

Началось все так. Однажды Шалтай-Болтай встретил Алису и, отозвав ее в сторону, сказал:

— Дитя, я хочу поведать тебе страшную тайну. Хотя большинство людей об этом даже не догадываются, у Траляля и Труляля есть третий брат, и зовут его Трулюлю. Он живет далеко-предалеко отсюда, но иногда приезжает в наши края. На Траляля и Труляля он похож так же, как Траляля и Труляля похожи друг на друга.

Сообщение Шалтая-Болтая необычайно встревожило Алису. Еще бы! Уже одно то, что на свете существовал третий братец, делало неверными все ее предыдущие умозаключения. Даже день недели нельзя было установить с абсолютной надежностью. А главное — как теперь вернуть погремушку законному владельцу?

Алиса глубоко задумалась, а потом задала Шалтаю-Болтаю разумный вопрос:

— По каким дням недели лжет Трулюлю?

— Трулюлю лжет всегда,— ответил Шалтай-Болтай.

Алиса молча удалилась. На сердце у нее было неспокойно. «Может быть, никакого третьего братца вовсе и нет? — попыталась утешить она себя. — Может быть, все это выдумки Шалтая-Болтая? Ведь всякий согласится, что звучит его история весьма странно». Но как ни старалась Алиса, ей никак не удавалось отделаться от тревожной мысли: «А что, если все это правда?»

О том, что произошло потом, рассказывают по-разному (всего существуют четыре версии событий, и я не утаю от вас ни одной из них). Попрошу вас принять два допущения: 1) если на свете действительно существует некто, кроме Траляля и Труляля, неотличимый от них по внешнему виду, то его зовут Трулюлю; 2) если такой индивид существует, то он всегда лжет. Должен заметить, что второе допущение не обязательно для решения первой загадки, но необходимо для решения двух следующих загадок.

63. Первая версия. . . . .

Алиса встретила в лесу одного из братцев. По крайней мере внешне он выглядел так, словно был Траляля или Труляля. Алиса рассказала ему историю, которую поведал ей Шалтай-Болтай, и спросила: «А кто вы такой?» На что последовал загадочный ответ: «Я либо Труляля, либо Траляля, и сегодня один из дней, когда я лгу».

Спрашивается, существует ли Трулюлю в действительности или же его выдумал Шалтай-Болтай?

64. Вторая версия

Согласно этой версии, Алиса встретила двух братцев (по крайней мере встреченные ею два человечка по внешнему виду были неотличимы от Траляля и Труляля). Она спросила у первого: «Кто вы?» — и получила следующие ответы:

Первый. Я Трулюлю.

Второй. Это он!

Какие выводы вы можете сделать на основании этой версии?

65. Третья версия

Согласно этой версии, Алиса встретила одного из братцев. Он заявил: «Сегодня один из дней недели, когда я лгу». Какие выводы вы можете сделать на основании этой версии?

66. Четвертая версия

Согласно этой версии, Алиса встретила в будний день (не в субботу и не в воскресенье) двух братцев (по крайней мере по внешнему виду двух человечков нельзя было отличить от Траляля и Труляля) и спросила: «Существует ли Трулюлю в действительности?» Ей ответили следующее:

Первый. Трулюлю существует.

Второй. Я существую.

Какие выводы вы можете сделать на основании этой версии?

Эпилог

Как же обстоит дело в действительности? Существует Трулюлю или не существует? Я изложил вам четыре противоречивые версии событий, разыгравшихся в Лесу Забывчивости. Откуда они взялись? Должен признаться, что я их не выдумал. Все четыре истории я услышал из уст Бармаглота. Разговор между Алисой и Шалтаем-Болтаем действительно происходил — об этом мне рассказала Алиса, а она всегда говорит только правду. Но четыре версии событий, разыгравшихся после разговора, мне сообщил Бармаглот. Он лжет по тем же дням недели, что и Лев (понедельник вторник, среда), а свои истории рассказывал мне четыре дня подряд. (Отчетливо помню, что ни один из этих четырех дней не приходился на воскресенье и на субботу. Дело в том, что я изрядный лежебока и по субботам и воскресеньям люблю поспать с утра до вечера.) Все истории Бармаглот рассказал мне в том же порядке, в каком я поведал их читателям.

Располагая столь обширной информацией, читатель без труда установит, существует ли в действительности Трулюлю или Шалтай-Болтай солгал Алисе. Знает ли Алиса, существует или не существует Трулюлю в действительности?

РЕШЕНИЯ

47. Лев мог сказать, что он лгал накануне, только в понедельник и в четверг. Единорог мог сказать, что он лгал накануне, только в четверг и в воскресенье. Следовательно, они оба могли утверждать, что лгали накануне, только в четверг.

48. Из первого высказывания Льва следует, что Алиса встретила его в понедельник или в четверг. Из второго высказывания следует, что день встречи не четверг. Следовательно, встреча произошла в понедельник.

49. Такие утверждения Лев не может высказать ни в один из дней недели. Первое утверждение он мог бы высказать только в понедельник и в четверг, второе — только в среду и в воскресенье. Следовательно, оба утверждения он не мог бы высказать ни в один из дней недели.

50. Ситуация в этой задаче весьма отлична от той, с которой мы встретились в предыдущей задаче. На этом примере отчетливо видно различие между двумя отдельными высказываниями и одним сложным высказыванием — их конъюнкцией. Действительно, если заданы любые два высказывания X, Y, то из истинности одного сложного высказывания «X и Y» следует, что истинны оба высказывания X, Y. Если же конъюнкция «X и Y» ложна, то ложно по крайней мере одно из высказываний X, Y.

После этих предварительных замечаний перейдем к решению задачи. Единственный день недели, когда высказывания Льва «Я лгал вчера» и «Я буду лгать завтра» могли бы быть истинными,— вторник (поскольку он и только он попадает между двумя днями, когда Лев лжет). Следовательно, день, когда Лев высказал свое утверждение, не мог быть вторником, так как по вторникам его утверждение истинно, а Лев не высказывает истинных утверждений по вторникам. А раз это было не во вторник, то высказывание Льва ложно, то есть в тот день Лев лжет. Таким образом, приведенное в задаче сложное высказывание Лев мог произнести либо в понедельник, либо в среду.

51. Если первое высказывание истинно, то первого братца зовут Траляля. Тогда второго братца зовут Труляля, и второе высказывание также истинно. Если первое высказывание ложно, то первого братца зовут Труляля, второго — Траляля, и, следовательно, второе высказывание также ложно. Таким образом, либо оба высказывания истинны, либо оба высказывания ложны. С другой стороны, оба высказывания не могут быть ложными, так как Траляля и Труляля никогда не лгут в один и тот же день. Следовательно, оба высказывания должны быть истинными. Значит, первого братца зовут Траляля, а второго — Труляля. Алиса встретила их в воскресенье.

52. Несмотря на большое внешнее сходство, эта задача весьма отличается от предыдущей. Второе высказывание заведомо истинно. Так как встреча происходила на другой день после встречи, описанной в предыдущей задаче, то она пришлась на будний день. Следовательно, оба высказывания не могут быть истинными, из чего мы заключаем, что второе высказывание должно быть ложным. Таким образом, первого братца зовут Труляля, а второго — Траляля.

53. Первый ответ заведомо был ложным. Следовательно, встреча Алисы с двумя братцами происходила в будний день. Но тогда другой братец должен был дать правдивый ответ и поэтому сказал: «Нет».

54. Высказывание (2) первого братца заведомо ложно, поэтому его высказывание (1) также ложно (поскольку было сделано в один день). Следовательно, первый братец не лжет по субботам. Отсюда мы заключаем, что второй братец по субботам лжет. В день встречи второй братец говорит правду (так как первый братец лжет), поэтому встреча могла произойти в понедельник, вторник или среду. Единственный из этих дней, когда он может, не погрешив против истины, заявить, что будет лгать завтра, — это среда. Следовательно, дело было в среду.

55. Высказывание братца заведомо ложно (если бы оно было истинно, то братец лгал бы в день встречи, и мы пришли бы к противоречию). Следовательно, по крайней мере одно из двух высказываний «Я лгу сегодня», «Меня зовут Труляля» должно быть ложным. Первое высказывание («Я лгу сегодня») истинно, поэтому ложным должно быть второе высказывание. Итак, Алисе встретился Траляля.

56. Можно. Если бы встретившийся Алисе братец в тот день лгал, то первое высказывание в дизъюнкции было бы истинным, вследствие чего и все сложное высказывание также было бы истинным, и мы пришли бы к противоречию. Следовательно, в день встречи с Алисой братец говорил правду, и его высказывание истинно: либо он лжет, либо его зовут Труляля. Так как в день встречи братец не лгал, то его звали Труляля.

57. Оба высказывания истинны, поэтому встреча произошла в воскресенье. Определить, кто из братцев Траляля и кто Труляля, невозможно.

58. Оба братца не могут лгать в воскресенье и утверждать: «Сегодня не воскресенье», поэтому знаменательный день не может приходиться на воскресенье. Следовательно, первый братец говорит правду, а второй (поскольку сегодня не воскресенье) лжет. Так как второй утверждает, что сегодня понедельник, то знаменательный день не может приходиться и на понедельник.

Второй братец, утверждая, что Лев лгал вчера, солгал. Следовательно, вчера Лев говорил правду. Это означает, что вчера могли быть такие дни недели, как четверг, пятница, суббота или воскресенье, а сегодня — пятница, суббота, воскресенье или понедельник. Воскресенье и понедельник мы уже исключили, поэтому остается пятница или суббота.

Заметим, что завтра наступит один из дней, когда Труляля лжет (так сказал первый братец, говоривший правду). Следовательно, сегодня не может быть суббота. Отсюда мы заключаем, что сегодня пятница.

Отсюда в свою очередь следует, что Труляля лжет по субботам, то есть ведет себя как Единорог. Кроме того, первый брат сегодня, то есть в пятницу, говорит правду, а это означает, что его зовут Траляля. Тем самым задача полностью решена.

59. Предположим, что первый братец сказал правду. Тогда погремушка принадлежит Труляля. Второй братец должен в этом случае лгать (так как встреча Алисы с братцами произошла не в воскресенье), поэтому его настоящее имя не Труляля. Значит, его зовут Траляля, ему Алиса должна вручить погремушку.

Предположим теперь, что первый братец лгал. Тогда погремушка принадлежит Траляля. Значит, второй братец сказал правду, поэтому его зовут Труляля. Таким образом, и в этом случае погремушка принадлежит первому братцу. Следовательно, в любом случае Алиса должна отдать погремушку первому братцу.

60. Шансы равны нулю. Предположим, что высказывание встретившегося Алисе братца истинно. Тогда владелец погремушки в день встречи должен был лгать и, следовательно, не мог быть тем братцем, которого встретила Алиса. С другой стороны, предположим, что высказывание встретившегося Алисе братца ложно. Тогда владелец погремушки в день встречи должен лгать. Следовательно, и в этом случае он не может быть владельцем погремушки.

61. Шалтай-Болтай правильно оценил шансы. Предположим, что братец лгал. Это означало бы, что в день встречи владелец погремушки не говорит правду. В день встречи он лжет и, следовательно, должен быть тем самым братцем, с которым встретилась Алиса. Предположим теперь, что встретившийся Алисе братец говорит правду. Это означало бы, что владелец погремушки в день встречи действительно говорит правду. Если встреча происходит в будний день, то погремушка принадлежит встретившемуся Алисе братцу, а если в воскресенье, то (поскольку по воскресеньям оба братца говорят правду) владельцем погремушки может быть любой из них.

Итак, подведем итоги. Если встреча происходит в будний день, то погремушка принадлежит тому, с кем разговаривала Алиса. Если встреча происходит в воскресенье, то шансы за то, что он владелец погремушки, составляют $6^1/_2$ из 7, или 13 из 14.

62. Ключом к решению служит то место в условиях задачи, из которого видно, что, получив ответ второго братца, Алиса знала, кому ей нужно отдать погремушку. Если бы второй братец ответил «да», то один из братьев говорил бы правду, а другой лгал бы, и Алиса не могла бы определить, кто из них владелец погремушки. Но поскольку в условиях задачи сказано, что Алиса отдала погремушку, то второй братец не ответил «да». Следовательно, братцы либо оба лгали, либо оба говорили правду. Отсюда мы заключаем, что они оба говорили правду, и встреча с Алисой произошла в воскресенье. Поэтому Алиса отдала погремушку первому братцу.

63. Да, Трулюлю должен существовать. Именно с ним и разговаривала Алиса.

Действительно, встретившийся ей братец утверждал, что оба следующих высказывания истинны:

(1) Я либо Труляля, либо Траляля.

(2) Сегодня я лгу.

Если бы его утверждение было верно, то высказывания (1) и (2) были бы истинными. Но тогда было бы истинным высказывание (2), и мы пришли бы к противоречию. Следовательно, встретившийся Алисе братец солгал, поэтому оба высказывания (1) и (2) не могут быть истинными (по крайней мере одно из них ложно). Высказывание (2) истинно (так как утверждение о высказываниях (1) и (2) ложно). Следовательно, высказывание (1) должно быть не истинным. Таким образом, встретившийся Алисе человечек не Труляля и не Траляля. Значит, его должны звать Трулюлю.

64. Первый братец не мог быть в действительности Трулюлю, так как Трулюлю всегда лжет. Поэтому его зовут Труляля или Траляля, и он лжет. Тогда второй братец также лжет. Если бы второго братца звали Труляля или Траляля, то Труляля и Траляля лгали бы в один и тот же день, что невозможно. Следовательно, второй братец должен быть Трулюлю.

65. Эта версия просто-напросто ложна!

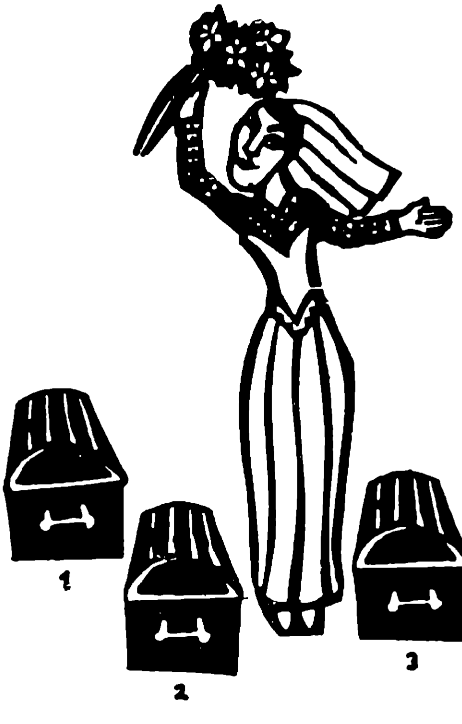
66. Кем бы ни был второй братец, его высказывание заведомо истинно. (Кажется, Декарт заметил: «Всякий, кто утверждает, что он существует, изрекает истинное высказывание». Мне действительно не приходилось встречать никого, кто бы не существовал.) Поскольку второе высказывание истинно и в день встречи было не воскресенье, то первое высказывание должно быть ложным. Отсюда мы заключаем, что если эта версия верна, то Трулюлю не существует.

Решение к эпилогу. Третья версия истории заведомо ложна. Следовательно, ни одна из версий не была рассказана в субботу или в воскресенье. Это означает, что четыре дня подряд версии можно рассказывать лишь при условии, если третья версия приходилась на среду. Тогда последняя версия была рассказана в четверг и поэтому должна быть верной. Таким образом, Трулюлю в действительности не существует! (Замечу, кстати, что лично я ничуть не сомневаюсь в существовании Трулюлю. Льюису Кэрроллу следовало бы знать об этом.)

Что же касается Алисы, то (поскольку четвертая версия — единственная, имевшая под собой реальную основу) ей нетрудно было понять всю беспочвенность опасений, вызванных «призраком Трулюлю».

Часть вторая

Шкатулки Порции и другие загадочные истории



5. Тайна шкатулок Порции

А. ИСТОРИЯ ПЕРВАЯ

67. . . . .

У Порции из комедии Шекспира «Венецианский купец» было три шкатулки: из золота, серебра и свинца. В одной из шкатулок хранился портрет Порции. Поклоннику предлагалось выбрать шкатулку, и если он был достаточно удачлив (или достаточно умен), чтобы выбрать шкатулку с портретом, то получал право назвать Порцию своей невестой. На крышке каждой шкатулки была сделана надпись, которая должна была помочь претенденту на руку и сердце Порции выбрать «правильную» шкатулку.

Предположим, что Порция вздумала выбирать мужа не по добродетелям, а по уму. На крышках шкатулок она приказала сделать следующие надписи:

На золотой	На серебряной	На свинцовой
Портрет в этой шкатулке	*Портрет не в этой шкатулке*	*Портрет не в золотой шкатулке*

Своему поклоннику Порция пояснила, что из трех высказываний, выгравированных на крышках шкатулок, по крайней мере одно истинно.

Какую шкатулку следует выбрать поклоннику Порции?

67а. . . . .

Поклонник Порции правильно выбрал шкатулку, они поженились и жили счастливо (по крайней мере первое время). Но однажды Порции пришли в голову следующие мысли: «Хотя мой муж, выбрав шкатулку с моим портретом, проявил *в известной мере* ум, но в действительности задача была не такой уж трудной. Мне следовало бы придумать какую-нибудь задачку потруднее. Тогда у меня был бы *действительно умный* муж». Порция развелась со своим мужем и решила подыскать себе супруга поумнее.

На этот раз она приказала выгравировать на крышках шкатулок следующие надписи:

На золотой	На серебряной	На свинцовой
Портрет не в серебряной шкатулке	*Портрет не в этой шкатулке*	*Портрет в этой шкатулке*

Своему поклоннику Порция пояснила, что из трех высказываний, выгравированных на крышках шкатулок, по крайней мере одно истинно и по крайней мере одно ложно.

В какой шкатулке хранится портрет Порции?

Эпилог . . . .

Волею судеб удачливым претендентом на руку Порции оказался бывший муж. Будучу человеком умным, он сумел решить и вторую задачу. Они вновь поженились. Прямо из-под венца супруг привез Порцию в их дом, положил себе на колено, закатил ей изрядную порку, и Порция навсегда избавилась от глупостей.

Б. ИСТОРИЯ ВТОРАЯ

Вступив вторично в брак, Порция и ее муж зажили счастливо. У них родилась дочь, Порция II, которую мы в дальнейшем будем для краткости называть просто Порцией. Когда юная Порция подросла, она стала необычайно умной и красивой девушкой, совсем как ее мама. Она также вздумала выбирать себе мужа «по методу шкатулок». Чтобы получить Порцию в жены, претендент на ее руку должен был пройти два испытания.

68. Первое испытание. . . . .

Во время этого испытания на крышке каждой шкатулки было выгравировано по две надписи. Порция пояснила, что на каждой крышке ложно не более чем одно высказывание.

На золотой	На серебряной	На свинцовой
1) *Портрет не в этой шкатулке*	1) *Портрет не в золотой шкатулке*	1) *Портрет не в этой шкатулке*
2) *Портрет написан художником из Венеции*	2) *Портрет в действительности написан художником из Флоренции*	2) *В действительности портрет в серебряной шкатулке*

В какой шкатулке находится портрет?

68а. Второе испытание . . . .

Если претендент на руку Порции проходил первое испытание, то его вели в другую комнату, посреди которой на столе были расставлены три другие шкатулки. На крышке каждой из них было выгравировано по две надписи. Порция пояснила, что на крышке одной шкатулки оба высказывания истинны, на крышке другой шкатулки оба высказывания ложны, а на крышке третьей шкатулки одно высказывание истинно и одно ложно.

На золотой	На серебряной	На свинцовой
1) *Портрет не в этой шкатулке*	1) *Портрет не в золотой шкатулке*	1) *Портрет не в этой шкатулке*
2) *Портрет в серебряной шкатулке*	2) *Портрет в свинцовой шкатулке*	2) *Портрет в золотой шкатулке*

В какой шкатулке находится портрет?

В. ПОЯВЛЕНИЕ БЕЛЛИНИ И ЧЕЛЛИНИ

Претендент на руку Порции из предыдущей истории успешно прошел оба испытания и провозгласил Порцию II своей невестой. Вскоре они поженились и жили счастливо. У них родилась очаровательная дочка, которую назвали Порцией III (впредь мы будем называть ее просто Порция). Когда Порция выросла, она стала умной и красивой девушкой — такой же, какими были в юности ее мама и бабушка. Следуя семейной традиции, она решила воспользоваться при выборе мужа «методом шкатулок». Претендент на ее руку должен был пройти три испытания! Программа испытаний была составлена весьма искусно. Порция решила воспользоваться идеей своей бабушки и приказала выгравировать на крышке каждой шкатулки не по две, а только по одной надписи. Но она не только возродила старую идею, но и обогатила ее новшеством. Претенденту на руку сообщалось, что каждая шкатулка была изготовлена одним из двух знаменитых флорентийских мастеров Челлини или Беллини. Если шкатулка была работы Челлини, то на крышке ее всегда значилось истинное высказывание, а если шкатулка была работы Беллини, то ее крышку украшало ложное высказывание.

69. Первое испытание. . . . .

В этом необычном испытании претендент на руку Порции, если бы он выбирал шкатулки наугад, имел бы шанс на успех не один к трем, а два к трем. Вместо своего портрета Порция положила в одну из трех шкатулок кинжал. Две остальные шкатулки остались пустыми. Если претендент на руку Порции мог указать *шкатулку, в которой не было кинжала,* то его допускали к следующему испытанию. Надписи на шкатулках гласили:

На золотой	На серебряной	На свинцовой
Кинжал в этой шкатулке	*Эта шкатулка пустая*	*Беллини изготовил не более одной шкатулки*

Какую шкатулку следует выбрать претенденту на руку Порции?

69а. Второе испытание. . . . .

В этом испытании претендент на руку Порции, если бы он выбирал шкатулку наугад, имел бы шансы на успех один к трем. Порция взяла две шкатулки, золотую и серебряную, и в одну из них положила свой портрет (кинжал в этом испытании не понадобился).

И эти шкатулки были изготовлены Челлини или Беллини. Надписи на крышках шкатулок гласили:

На золотой	На серебряной
Портрет не в этой шкатулке	*Ровно одна из этих двух шкатулок изготовлена Беллини*

Какую шкатулку следует выбрать претенденту на руку Порции (в шкатулке должен находиться портрет)?

69б. Третье испытание. . . . .

Если претендент на руку Порции успешно проходил первое и второе испытания, его вводили в комнату, где на столе были расставлены три шкатулки: золотая, серебряная и свинцовая. Каждая шкатулка была изготовлена либо Челлини, либо Беллини. В этом испытании тот, кто вздумал бы выбирать шкатулку наугад, имел бы шансы на успех один к трем. В одну из шкатулок Порция положила свой портрет. Чтобы пройти испытание, претендент должен был: 1) указать шкатулку с портретом Порции; 2) назвать мастера, изготовившего каждую шкатулку. Надписи на шкатулках гласили:

На золотой	На серебряной	На свинцовой
Портрет в этой шкатулке	*Портрет в этой шкатулке*	*По крайней мере две шкатулки изготовлены Челлини*

Как решить эту задачу?

Г. ЗАГАДОЧНАЯ ИСТОРИЯ: В ЧЕМ ОШИБКА?

70. . . . .

Четвертая и последняя история — самая поразительная из всех и служит иллюстрацией одного весьма важного логического принципа.

Претендент на руку Порции III, о котором говорилось в предыдущей истории, успешно преодолел все три испытания и стал женихом, а потом и мужем прекрасной Порции. Много лет они прожили в счастливом браке, и у них было много детей, внуков, правнуков и т. д.

Через несколько поколений в Америке родилась праправра... внучка, которая была так похожа на портреты своих праправра... бабушек, что ее назвали Порцией N-й (для краткости условимся называть ее в дальнейшем просто Порцией). Когда Порция выросла, то, как и все Порции, она превратилась в прелестную девушку, ум которой не уступал ее красоте. Характер ее отличался необычайной живостью не без склонности к сумасбродству. Она также решила прибегнуть при выборе спутника жизни к «методу шкатулок» (что в современном Нью-Йорке было в известной мере экстравагантным поступком, но мы не будем останавливаться на этом).

Составленная ею программа испытаний выглядела довольно просто. Порция заказала две шкатулки, серебряную и золотую, и в одну из них положила свой портрет. На крышках шкатулок красовались надписи:

На золотой	На серебряной
Портрет не в этой шкатулке	*Ровно одно из двух высказываний, выгравированных на крышках, истинно*

Какую шкатулку вы бы выбрали? Претендент на руку Порции рассуждал следующим образом. Если высказывание, выгравированное на крышке серебряной шкатулки, истинно, то это означает, что истинно ровно одно из двух высказываний. Тогда высказывание, выгравированное на крышке золотой шкатулки, должно быть ложным. С другой ссторони, предположим, что высказывание, помещенное на крышке серебряной шкатулки, ложно. В этом случае утверждение о том, что ровно одно из двух высказываний истинно, было бы неверным. Это означает, что либо оба высказывания истинны, либо оба высказывания ложны. Оба высказывания не могут быть истинными, так как по предположению второе высказывание ложно. Следовательно, оба высказывания ложны. Таким образом, высказывание, выгравированное на крышке золотой шкатулки, и в этом случае оказывается ложным. Итак, независимо от того, истинно или ложно высказывание на крышке серебряной шкатулки, высказывание, выгравированное на крышке золотой шкатулки, должно быть ложным. Следовательно, портрет Порции должен находиться в золотой шкатулке.

Придя к такому выводу, торжествующий кандидат в женихи воскликнул: «Портрет должен быть в золотой шкатулке!» — и откинул крышку. К его неописуемому ужасу шкатулка была пуста! Едва оправившись от потрясения, испытуемый обвинил Порцию в том, что та его обманула. «Я никогда не унижу себя обманом», — рассмеялась Порция и с торжествующим (и презрительным) видом открыла серебряную шкатулку. Нужно ли говорить, что портрет мирно покоился на дне этой шкатулки.

Не могли бы вы помочь незадачливому кандидату в женихи и указать, где в его рассуждения вкралась ошибка?

— Ну что? — спросила Порция у поверженного претендента, явно наслаждаясь своим триумфом. — Не очень-то помогли вам ваши рассуждения! Но вы мне чем-то нравитесь, и я хочу предоставить вам еще один шанс. Я так и сделаю, хотя это против правил. Забудем о последнем испытании, словно его и не было. Я предложу вам более простое испытание, в котором ваши шансы получить мою руку возрастут с одного к двум до двух к трем. Оно напоминает испытание, некогда устроенное моей прапрапра ... бабушкой Порцией III. Не сомневаюсь, что на этот раз вы успешно справитесь с задачей.

С этими словами она повела претендента за руку в другую комнату, где на столе были расставлены три шкатулки: золотая, серебряная и свинцовая. Порция пояснила, что в одной шкатулке лежит кинжал, а две другие пусты. Чтобы получить ее руку, испытуемому достаточно выбрать одну из пустых шкатулок. На крышках шкатулок красовались надписи:

На золотой	На серебряной	На свинцовой
Кинжал в этой шкатулке	*Эта шкатулка пуста*	*Не более чем одно из трех высказываний, выгравированных на шкатулках, истинно*

(Сравните эту задачу с первым испытанием, предложенным Порцией III. Вам не кажется, что и в том и в этом случае задача одна и та же?)

На этот раз претендент на руку прекрасной Порции тщательно следил за каждым шагом в своих рассуждениях, которые сводились к следующему. Предположим, что надпись на третьей шкатулке истинна. Тогда обе остальные надписи должны быть ложными. В частности, надпись на серебряной шкатулке ложна, поэтому кинжал должен находиться в ней. С другой стороны, если надпись на свинцовой шкатулке ложна, то по крайней мере две другие надписи должны быть истинными. Одной из них должна быть надпись на золотой шкатулке, тогда кинжал находится в ней. И в том и в другом случае шкатулка из свинца пуста.

Придя к такому заключению, претендент выбрал свинцовую шкатулку, откинул крышку и, к своему ужасу, обнаружил, что в шкатулке лежит кинжал! Порция, смеясь, открыла две другие шкатулки и показала, что в них ничего нет.

Читателю будет приятно узнать, что Порция и претендент на ее руку все же поженились. (Порция решила выйти за него замуж задолго до испытаний, которые понадобились ей только для того, чтобы немного подразнить будущего жениха.) Но даже такой счастливый конец оставляет без ответа весьма важный вопрос: *где в рассуждения претендента на руку Порции вкралась ошибка?*

РЕШЕНИЯ

67. Высказывания, выгравированные на золотой и свинцовой шкатулках, противоположны, поэтому одно из них должно быть истинным. Поскольку истинно не более чем одно из трех высказываний, то высказывание на крышке серебряной шкатулки ложно. Следовательно, портрет в действительности находится в серебряной шкатулке.

Эта задача допускает также другое решение. Если бы портрет находился в золотой шкатулке, то вопреки условиям задачи у нас было бы два истинных высказывания. Если бы портрет был в свинцовой шкатулке, то мы также получили бы два истиных высказывания (на этот раз на свинцовой и на серебряной шкатулках). Следовательно, портрет должен находиться в серебряной шкатулке.

Оба метода решения вполне корректны и служат наглядным подтверждением того, как во многих задачах к одному и тому же заключению ведут несколько правильных путей.

67а. Если бы портрет находился в свинцовой шкатулке, то вопреки условиям задачи все три высказывания были бы истинными. Если бы портрет находился в серебряной шкатулке, то (также вопреки условиям задачи) все три высказывания были бы ложными. Следовательно, портрет должен находиться в золотой шкатулке (тогда первые два высказывания истинны, а третье — ложно, что согласуется с условиями задачи).

68. Свинцовую шкатулку можно сразу же исключить из рассмотрения, так как если бы портрет находился в ней, то оба высказывания, выгравированные на крышке свинцовой шкатулки, были бы ложными. Следовательно, портрет находится в золотой или в серебряной шкатулке. Первые высказывания, выгравированные на крышках золотой и серебряной шкатулок, согласуются, поэтому они либо оба истинны, либо оба ложны. Если они оба ложны, то вторые высказывания оба истинны, что невозможно, так как вторые высказывания противоположны друг другу. Следовательно, если первые высказывания оба истинны, то портрет не может находиться в золотой шкатулке. Это доказывает, что портрет находится в серебряной шкатулке.

68а. Если портрет находится в золотой шкатулке, то на крышках золотой и серебряной шкатулок выгравировано по два ложных высказывания. Если портрет находится в серебряной шкатулке, то на крышках серебряной и свинцовой шкатулок выгравировано по одному истинному и одному ложному высказыванию. Следовательно, портрет находится в свинцовой шкатулке (крышка серебряной шкатулки при этом украшена двумя истинными высказываниями, крышка свинцовой шкатулки — двумя ложными высказываниями, и крышка золотой шкатулки — одним истинным и одним ложным высказыванием).

69. Предположим, что шкатулку из свинца изготовил Беллини. Тогда высказывание, помещенное на ее крышке, было бы истинным, и, следовательно, две другие шкатулки должны были бы быть работы Челлини. Это означает, что оба остальных высказывания ложны. В частности, ложно высказывание, выгравированное на крышке серебряной шкатулки, поэтому кинжал находится в серебряной шкатулке. Итак, если свинцовая шкатулка работы Беллини, то кинжал находится в серебряной шкатулке.

Предположим теперь, что свинцовую шкатулку изготовил Челлини. Тогда высказывание, украшающее ее крышку, ложно, поэтому по крайней мере две шкатулки изготовил Беллини. Это означает, что и золотая, и серебряная шкатулки работы Беллини (так как свинцовая по предположению изготовлена Челлини). Значит, высказывания на крышках золотой и серебряной шкатулок истинны. В частности, истинно высказывание, выгравированное на крышке золотой шкатулки. Следовательно, в этом случае кинжал лежит в золотой шкатулке.

Ни в одном из случаев кинжал не может оказаться в шкатулке из свинца, поэтому претенденту на руку Порции следует выбрать свинцовую шкатулку.

69а. Если серебряную шкатулку изготовил Беллини, то высказывание, выгравированное на ее крышке, истинно. В этом случае золотая шкатулка изготовлена Челлини. Предположим теперь, что серебряная шкатулка работы Беллини. Тогда золотую шкатулку изготовил Челлини (если бы золотая шкатулка была работы Беллини, то мы имели бы дело с тем случаем, когда ровно одна шкатулка изготовлена Беллини). Итак, независимо от того, кто изготовил серебряную шкатулку — Беллини или Челлини, золотая шкатулка заведомо работы Челлини. Следовательно, высказывание, выгравированное на крышке золотой шкатулки, ложно, поэтому портрет находится в золотой шкатулке.

69б. Докажем прежде всего, что свинцовую шкатулку должен был изготовить Беллини. Предположим, что свинцовая шкатулка работы Челлини. Тогда высказывание, выгравированное на ее крышке, ложно. Это означает, что по крайней мере две шкатулки должны быть изготовлены Беллини, а именно серебряная и золотая, что невозможно, так как портрет не может находиться в золотой и в серебряной шкатулках одновременно. Следовательно, свинцовая шкатулка в действительности изготовлена Беллини. Но тогда выгравированное на ее крышке высказывание истинно, и поэтому по крайней мере две шкатулки изготовлены Челлини. Это означает, что и золотая, и серебряная шкатулки работы Челлини. Следовательно, высказывания, украшающие крышки этих шкатулок, ложны, и портрет не находится ни в золотой, ни в серебряной шкатулке. Значит, портрет находится в свинцовой шкатулке.

Мы доказали также, что свинцовую шкатулку изготовил Беллини, а две остальные шкатулки — Челлини. Тем самым получен ответ и на второй вопрос задачи.

70. Претенденту на руку Порции следовало бы понять, что без информации об истинности или ложности любого высказывания или об отношении принимаемых высказываниями значений истинности высказывания не позволяют прийти к какому-либо выводу, и предмет (портрет или кинжал) может находиться где угодно. Что мешает мне взять любое число шкатулок, положить в одну из них какой-нибудь предмет и сделать на крышках любые надписи, какие только мне заблагорассудится? Эти надписи не будут нести в себе никакой информации о предмете, спрятанном в одной из шкатулок. Отсюда ясно, что Порция не лгала своему возлюбленному. Все, что она утверждала, сводилось к следующему: некий предмет спрятан в одной из шкатулок. И в каждом случае ее утверждение соответствовало истине.

Иное дело — истории о предках Порции N-й: если бы портрет или кинжал не оказался бы там, где его рассчитывал найти претендент на руку прапрапра... бабушки Порции N-й, то это означало бы (как мы вскоре увидим), что где-то «по дороге» прапрапра...бабушка допустила ложное высказывание.

Происшествие с поклонником Порции N-й можно рассматривать и с иной точки зрения. Его ошибка заключается в том, что каждое из высказываний, выгравированных на крышках шкатулок, он считал либо истинным, либо ложным. Разберемся более подробно, как происходило первое испытание — с двумя шкатулками. На крышке золотой шкатулки было выгравировано: «Портрет не в этой шкатулке». Это высказывание заведомо либо истинно, либо ложно, так как портрет либо находится в золотой шкатулке, либо его там нет. В действительности оно оказалось истинным, так как Порция положила портрет в серебряную шкатулку. Вот теперь мы приступаем к самому важному. Известно, что Порция положила портрет в серебряную шкатулку. Что можно сказать о высказывании, выгравированном на крышке этой шкатулки? Истинно оно или ложно? Оно не может быть ни истинным, ни ложным, ибо в противном случае мы пришли бы к противоречию! Действительно, предположим, что это высказывание было бы истинным. Тогда истинно ровно одно высказывание, а так как первое высказывание (выгравированное на крышке золотой шкатулки) истинно, то второе высказывание ложно. Таким образом, если бы высказывание, помещенное на крышке серебряной шкатулки, было истинным, то оно... было бы ложным! С другой стороны, предположим, что высказывание, выгравированное на крышке серебряной шкатулки, ложно. Тогда первое высказывание истинно, второе ложно. Следовательно, истинно ровно одно высказывание. Но именно это и утверждается во втором высказывании, которое по предположению ложно. Значит, оно должно быть истинным! Таким образом, оба предположения (и о том, что второе высказывание истинно, и о том, что второе высказывание ложно) приводят к противоречию.

Весьма поучительно сравнить это испытание со вторым испытанием, предложенным Порцией III (которой также хватило двух шкатулок). Надпись на золотой шкатулке в том испытании совпадала с надписью на золотой шкатулке в испытании, устроенном Порцией N-й, и гласила: «Портрет не в этой шкатулке». Но надпись на серебряной шкатулке была иной (старая надпись гласила: «Ровно одна из этих двух шкатулок изготовлена Беллини», новая — сообщала, что «Ровно одно из двух высказываний, выгравированных на крышках, истинно»). У читателя может возникнуть вопрос о том, существенно ли различие между этими двумя высказываниями, если известно, что Беллини гравировал на крышках шкатулок только истинные, а Челлини — только ложные высказывания. Различие, хотя и довольно тонкое, все же существует. Высказывание «Ровно одна из этих шкатулок изготовлена Беллини» — это высказывание, которое должно быть либо истинным, либо ложным, некое историческое утверждение о реальном мире. Беллини либо изготовил ровно одну из двух шкатулок, либо не изготовил. Предположим, что в истории о Порции III портрет оказался бы не в золотой, а в серебряной шкатулке. Какой вывод вы сделали бы из этого? Стали бы считать, что надпись, выгравированная на серебряной шкатулке, ни истинна, ни ложна? Такой вывод был бы неверен! Я уже говорил о том, что надпись на серебряной шкатулке представляет собой высказывание, которое может быть либо истинным, либо ложным. Поэтому правильным был бы иной вывод: если бы портрет был обнаружен в серебряной шкатулке, то Порция III, утверждая о Беллини и Челлини то, что она утверждала, лгала бы. В отличие от своей прапрапра...бабушки Порция N-я могла бы, не прибегая ко лжи, поместить свой портрет в серебряную шкатулку, так как она ничего не сказала о значении истинности высказываний, выгравированных на крышках шкатулок.

Вопрос о значениях истинности высказываний, определяемых в зависимости от их содержательной интерпретации, относится к одному из наиболее тонких и фундаментальных разделов современной логики. В последующих главах мы еще неоднократно вернемся к нему.

6. Из записок инспектора Крэга

А. ИЗ ЗАПИСОК ИНСПЕКТОРА КРЭГА

Инспектор Лесли Крэг из Скотланд-Ярда любезно согласился предоставить мне записки о некоторых распутанных им делах, с тем чтобы я мог поведать о них для пользы и в назидание тем, кто интересуется применением логики к раскрытию уголовных преступлений.

71. . . . .

Начнем с простого дела. На складе было совершено крупное хищение. Преступник (или преступники) вывез награбленное на автомашине. Подозрение пало на трех преступников-рецидивистов А, В и С, которые были доставлены в Скотланд-Ярд для допроса. Было установлено следующее:

1) Никто, кроме А, В и С, не был замешан в хищении.

2) С никогда не ходит на дело без А (и, возможно, других соучастников).

3) В не умеет водить машину.

Виновен или не виновен А?

72. . . . .

Другое, также несложное дело о хищении. Подозреваемые А, В и С были вызваны для допроса. Установлено следующее:

1) Никто, кроме А, В и С, в хищении не замешан.

2) А никогда не идет на дело без по крайней мере одного соучастника.

3) С не виновен.

Виновен или не виновен В?

73. Дело о двух неразличимых близнецах. . .

Это дело поинтереснее предыдущих. В Лондоне совершено ограбление. Трое подозреваемых — рецидивисты А, В и С — вызваны на допрос. Подозреваемые А и В — близнецы и похожи друг на друга настолько, что мало кто умеет отличать одного из них от другого. В картотеке Скотланд-Ярда имеются подробные сведения о всех троих, в том числе об их характере, наклонностях и привычках. В частности, известно, что оба близнеца по характеру робки, и ни один из них не отваживается идти на дело без соучастника. Подозреваемый В отличается большой дерзостью и терпеть не может ходить на дело с соучастником. Кроме того, несколько свидетелей показали, что во время ограбления одного из близнецов видели в баре в Дувре, но установить, о ком из двух близнецов шла речь, не удалось.

Предположим, что в ограблении не был замешан никто, кроме A, B и C. Кто из них виновен и кто не виновен?

74. . . . .

«Какие выводы вы сделали бы из следующих фактов?» — спросил инспектор Крэг у сержанта Макферсона:

1) Если A виновен и B не виновен, то C виновен.
2) C никогда не действует в одиночку.
3) A никогда не ходит на дело вместе с C.
4) Никто, кроме A, B и C, в преступлении не замешан, и по крайней мере один из этой тройки виновен.

Сержант поскреб в затылке и сказал:

— Боюсь, что я смогу извлечь из этих фактов не слишком много, сэр. А вы можете, опираясь на них, доказать, кто из трех подозреваемых виновен и кто не виновен?

— Не могу, — признался Крэг, — но чтобы выдвинуть неопровержимое обвинение против одного из них, материала вполне достаточно.

Чья виновность не вызывает сомнений?

75. Дело об ограблении лавки Макгрегора. . .

Мистер Макгрегор, владелец лавки из Лондона, сообщил по телефону в Скотланд-Ярд о том, что его ограбили. Трех преступников-рецидивистов A, B и C, подозреваемых в ограблении, вызвали на допрос. Установлено следующее:

1) Каждый из тройки подозреваемых A, B и C в день ограбления побывал в лавке, и никто больше в тот день в лавку не заходил.
2) Если A виновен, то у него был ровно один сообщник.
3) Если B не виновен, то C также не виновен.
4) Если виновны ровно двое подозреваемых, то A — один из них.

5) Если C не виновен, то B также не виновен.

Против кого инспектор Крэг выдвинул обвинение?

76. Дело четырех. . . . .

На этот раз на допрос были вызваны четверо подозреваемых в ограблении: A, B, C и D. Неопровержимыми уликами доказано, что по крайней мере один из них виновен и что никто, кроме A, B, C и D, в ограблении не участвовал. Кроме того, удалось установить следующее:

1) A безусловно не виновен.

2) Если B виновен, то у него был ровно один соучастник.

3) Если C виновен, то у него было ровно два соучастника.

Инспектору Крэгу было особенно важно узнать, виновен или не виновен D, так как D был опасным преступником. К счастью, приведенных выше фактов достаточно, чтобы установить виновность или невиновность подозреваемого D.

Итак, виновен или не виновен D?

Б. НЕ МОГЛИ БЫ ВЫ ПОМОЧЬ?

Инспектора Крэга нередко можно видеть в зале суда, где он с неослабным вниманием следит за всеми перипетиями судебного разбирательства. Крэг интересуется не только теми делами, в расследовании которых он принимал участие. Слушание любого дела служит для него своеобразным упражнением по логике: выслушав доводы сторон, инспектор стремится при помощи логических рассуждений установить истину. Вот несколько любопытных казусов, свидетелем которых ему пришлось быть в зале судебных заседаний.

77. Глупый защитник. . . . .

Одного человека судили за участие в ограблении. Обвинитель и защитник в ходе судебного заседания заявили следующее:

Обвинитель. Если подсудимый виновен, то у него был сообщник.

З а щ и т н и к. Не верно!

Ничего хуже защитник сказать не мог. Почему?

78. . . . .

По обвинению в ограблении перед судом предстали A, B и C. Установлено следующее:

1) Если A не виновен или B виновен, то C виновен.

2) Если A не виновен, то C не виновен.

Можно ли на основании этих данных установить виновность каждого из трех подсудимых?

79. . . . .

По обвинению в ограблении перед судом предстали A, B и C. Установлено следующее:

1) По крайней мере один из трех подсудимых виновен.

2) Если A виновен и B не виновен, то C не виновен.

Этих данных недостаточно, чтобы доказать виновность каждого из трех подсудимых в отдельности, но эти же данные позволяют отобрать двух подсудимых, о которых известно, что один из них заведомо виновен. О каких двух подсудимых идет речь?

80. . . . .

Этот случай более интересен, чем предыдущие. Подсудимых четверо: A, B, C, D. Установлено следующее:

1) Если A и B оба виновны, то C был соучастником.

2) Если A виновен, то по крайней мере один из обвиняемых B, C был соучастником.

3) Если C виновен, то D был соучастником.

4) Если A не виновен, то D виновен.

Кто из четырех подсудимых виновен вне всякого сомнения и чья вина остается под сомнением?

81. . . . .

И в этом случае подсудимых было четверо: A, B, C,. D. Установлено следующее:

1) Если A виновен, то B был соучастником.

2) Если B виновен, то либо C был соучастником, либо A не виновен.

3) Если D не виновен, то A виновен и C не виновен.

4) Если D виновен, то A виновен.

Кто из подсудимых виновен и кто не виновен?

В. ШЕСТЬ НЕОБЫЧНЫХ СЛУЧАЕВ

82. Не лучше ли было промолчать? . . . . . .

На небольшом островке одного человека судили за преступление. Суду было известно, что подсудимый родился и вырос на соседнем острове рыцарей и лжецов. (Напомним, что рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.) Подсудимому разрешалось произнести в свою защиту только одну фразу. Поразмыслив, он заявил следующее: «Лицо, действительно совершившее преступление, в котором меня обвиняют, лжец».

Разумно ли было с его стороны такое заявление? Помогло ли оно или только ухудшило его положение? Может быть, оно никак не повлияло на решение суда?

83. Загадочный обвинитель. . . . .

В другом случае на том же острове за совершение некоторого преступления судили двух местных жителей X и Y. Дело было в высшей степени необычно, так как об обвинителе было известно, что он либо рыцарь, либо лжец. На суде обвинитель сделал два следующих заявления:

1) X виновен.

2) X и Y не могут быть виновны оба.

К какому заключению вы бы пришли на основании этих заявлений на месте присяжных? Можно ли утверждать что-нибудь относительно виновности X или Y? Кто, по-вашему, обвинитель: рыцарь или лжец?

84. . . . .

Предположим, что обвинитель из предыдущей задачи сделал на суде два следующих заявления:

1) Либо X виновен, либо Y виновен.

2) X не виновен.

К какому заключению вы бы пришли на основании этих заявлений?

85. . . . .

Предположим, что обвинитель из задачи 83 сделал на суде два следующих заявления:

1) Либо X не виновен, либо Y виновен.

2) X виновен.

К какому заключению вы бы пришли на основании этих заявлений?

86. . . . .

Этот случай произошел на острове рыцарей, лжецов и нормальных людей. Напомним, что рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а нормальные люди иногда говорят правду, а иногда — ложь.

Трое жителей острова A, B и C предстали перед судом. Известно, что преступление мог совершить только один из них. Известно также, что совершивший преступление был рыцарем и что других рыцарей среди трех подсудимых не было. На суде A, B и C сделали следующие заявления:

A: Я не виновен.

B: Это правда.

C: B — не нормальный человек.

Кто из троих виновен в совершенном преступлении?

87. . . . .

Этот случай, самый интересный из всех, внешне напоминает предыдущие, но в действительности в корне отличен от них. Он также произошел на острове рыцарей, лжецов и нормальных людей.

Главными действующими лицами были подсудимый, обвинитель и защитник. Судебный процесс проходил весьма необычно. Начать хотя бы с того, что один из его трех главных участников был рыцарем, другой лжецом, а третий нормальным человеком, но кто из них рыцарь, лжец или нормальный человек, не было известно никому. Еще более странным было другое обстоятельство: суду достоверно было известно, что если подсудимый не виновен, то виновен либо защитник, либо обвинитель. Было известно также, что виновный не лжец. В ходе судебного заседания подсудимый, обвинитель и защитник сделали следующие заявления:

П о д с у д и м ы й. Я не виновен.

З а щ и т н и к. Мой подзащитный действительно не виновен.

О б в и н и т е л ь. Не правда, подсудимый виновен.

Их заявления прозвучали вполне естественно. Присяжные удалились на совещание, но не смогли вынести никакого решения: сведений, содержащихся в трех заявлениях, сделанных на суде, для этого оказалось недостаточно. В те времена, когда происходил суд, остров входил в британские владения, поэтому правительство острова направило в Скотланд-Ярд телеграмму с просьбой направить к ним инспектора Крэга, чтобы тот помог разрешить возникшее затруднение.

Через несколько недель инспектор Крэг прибыл на остров, и суд возобновил свои заседания. Крэг решил во что бы то ни стало досконально во всем разобраться. Он вознамерился не только установить, кто виновен в совершении преступления, но и определить, кто из трех участников процесса рыцарь, кто лжец и кто нормальный человек. Выяснить интересующие его сведения инспектор Крэг решил за минимальное число вопросов. Сначала он спросил у обвинителя: «Вы, случайно, не виновны?» Обвинитель ответил. Поразмыслив, инспектор Крэг обратился с вопросом к подсудимому: «Виновен ли обвинитель?» Подсудимый ответил, и инспектор Крэг узнал все, что его интересовало.

Кто виновен? Кто был нормальным человеком, кто рыцарем и кто лжецом?

РЕШЕНИЯ

71. Покажем прежде всего, что по крайней мере один из А, С виновен. Если В не виновен, то ясно, что виновен кто-то из А, С (или оба), так как из высказывания (1) следует, что никто, кроме А, В и С, не может быть виновен. Если В виновен, то у него должен быть соучастник (так как В не умеет водить машину). Следовательно, и в этом случае А или С должен быть виновен. Таким образом, кто-то из А и С (или оба) виновен. Если С не виновен, то А должен быть виновен. С другой стороны, если С виновен, то в силу высказывания (2) А также виновен. Следовательно, А виновен.

72. Этот случай еще проще. Если А не виновен, то (так как С не виновен) виновным должен быть В — в силу высказывания (1). Если А виновен, то в силу высказывания (2) у него должен быть соучастник. Из высказывания (3) следует, что этим соучастником не мог быть С. Значит, им должен быть В. Итак, и в том и в другом случае В виновен.

73. Предположим, что В не виновен. Тогда должен быть виновен один из двух близнецов. У этого близнеца должен быть соучастник, а поскольку В не мог быть сообщником, то им должен быть другой близнец. Но это невозможно, так как одного из близнецов во время преступления видели в Дувре. Следовательно, В виновен. А поскольку В всегда «ходит на дело» в одиночку, то оба близнеца не виновны.

74. Не вызывает ни малейших сомнений виновность В. Доказать это можно при помощи любого из следующих рассуждений.

Рассуждение первое. Предположим, что В не виновен. Тогда если бы А был виновен, то С также был бы виновен в силу высказывания (1). Это означало бы, что вопреки высказыванию (3) А совершил преступление вместе с С. Следовательно, А должен быть не виновен. Но тогда вопреки высказыванию (2) С единственный, кто виновен. Значит, В виновен.

Рассуждение второе. Оно прямее приводит к ответу на вопрос задачи.

а) Предположим, что А виновен. Тогда в силу высказывания (3) В и С не могут быть оба не виновны, поэтому у А должен быть соучастник. Так как С в силу высказывания (3) не мог быть соучастником А, то им должен быть В. Следовательно, если А виновен, то В также виновен.

б) Предположим, что С виновен. Тогда в силу высказывания (2) у него должен быть соучастник, которым в силу высказывания (3) не мог быть A. Следовательно, им должен быть B.

в) Если ни A, ни C не виновны, то B несомненно виновен!

75. Инспектор Крэг выдвинул против мистера Макгрегора обвинение в попытке ввести полицию в заблуждение: никакого ограбления в действительности не было. Вот как рассуждал инспектор Крэг.

Первый шаг. Предположим, что A был бы виновен. Тогда в силу высказывания (2) у него был бы ровно один соучастник — не больше, не меньше. Следовательно, кто-то один из B, C виновен, а другой не виновен. Но это противоречит высказываниям (3) и (5), из которых, если взять их вместе, следует, что B, C либо оба виновны, либо оба не виновны. Значит, A должен быть не виновен.

Второй шаг. Из высказываний (3) и (5) следует, что B и C либо оба виновны, либо оба не виновны. Если бы они были оба виновны, то других виновных не было бы (так как A не виновен). Следовательно, виновных в этом случае было бы ровно двое. В силу высказывания (4) это означало бы, что A виновен. Тем самым мы пришли бы к противоречию, так как A не виновен. Следовательно, B и C оба не виновны.

Третий шаг. Итак, установлено, что A, B, C не виновны. Но, как следует из высказывания (1), в день ограбления никто, кроме A, B и C, в лавку не заходил и не мог совершить ограбления. Значит, никакого ограбления не было, и Макгрегор лгал.

Эпилог. Не устояв перед неопровержимыми доводами инспектора Крэга, Макгрегор признался в том, что он солгал в надежде получить страховку.

76. Если B виновен, то в силу высказывания (2) в преступлении замешаны ровно двое подсудимых. Если же виновен C, то в силу высказывания (3) в преступлении замешаны трое подсудимых. Поскольку ни того, ни другого быть не может, то по крайней мере один из B и C не виновен. Подсудимый A также не виновен, поэтому виновных не может быть больше двух. Следовательно, у C не было ровно двух соучастников, и в силу высказывания (3) подсудимый C должен быть не виновен. Если B виновен, то у него был ровно один соучастник. Им должен быть D (так как A и B оба не виновны). Если B не виновен, то A, B и C не виновны. Тогда D должен быть виновен. Итак, независимо от того, виновен или не виновен B, подсудимый D должен быть виновен. Следовательно, D виновен.

77. В действительности обвинитель сказал, что подсудимый не совершал преступления в одиночку. Защитник, отрицая высказывание обвинителя, тем самым утверждал, что подсудимый *совершил* преступление в одиночку.

78. Можно, причем очень просто. В силу высказывания (1) если A не виновен, то C виновен (поскольку если A не виновен, то дизъюнкция «либо A не виновен, либо B виновен» — истина). В силу высказывания (2), если A не виновен, то C не виновен. Следовательно, если A не виновен, то C одновременно виновен и не виновен, что невозможно. Значит, A должен быть виновен.

79. Двое подсудимых, один из которых должен быть виновен, это B и C. Действительно, предположим, что A не виновен. Тогда в силу высказывания (1) B или C должен быть виновен. С другой стороны, предположим, что A виновен. Если B виновен, то по крайней мере кто-то один из B и C заведомо виновен. Но предположим, что B не виновен. Тогда A виновен, а B не виновен. Следовательно, в силу высказывания (2) C должен быть виновен, то есть и в этом случае либо B, либо C виновен.

80. Прежде всего докажем, что если A виновен, то C виновен. Предположим, что A виновен. Тогда в силу высказывания (2) либо B, либо C виновен. Если B не виновен, то виновен должен быть C. Но предположим, что B виновен. Тогда A и B оба виновны. Следовательно, в силу высказывания (1) C также виновен. Это доказывает, что если A виновен, то C виновен. Кроме того, в силу высказывания (3), если C виновен, то D виновен. Сопоставляя эти два факта, мы заключаем, что если A виновен, то D виновен. Но в силу высказывания (4), если A не виновен, то D виновен. Следовательно, независимо от того, виновен или не виновен A, подсудимый D должен быть виновен. Таким образом, виновность D не вызывает сомнений. Виновность всех остальных подсудимых остается под сомнением.

81. Все подсудимые виновны. Действительно, в силу высказывания (3) если D не виновен, то A виновен. В силу высказывания (4) если D виновен, то A виновен. Следовательно, независимо от того, виновен или не виновен D, подсудимый A должен быть виновен. Тогда в силу высказывания (1) B также виновен. Из высказывания (2) мы заключаем, что либо C виновен, либо A не виновен. Поскольку уже известно, что A не невиновен, то C должен быть виновен. Наконец, из высказывания (3) следует, что если D не виновен, то C не виновен. Но мы уже доказали, что C не невиновен, поэтому D должен быть виновен. Итак, все подсудимые виновны.

82. Вполне разумно: оно помогло подсудимому снять с себя все подозрения! Действительно, предположим, что подсудимый — рыцарь. Тогда его высказывание истинно, и виновный — лжец. Следовательно, подсудимый должен быть не виновен. С другой стороны, предположим, что подсудимый — лжец. Тогда его высказывание ложно, поэтому тот, кто совершил преступление, — рыцарь. Следовательно, и в этом случае подсудимый не виновен.

83. Предположим, что обвинитель был бы лжецом. Тогда высказывания (1) и (2) были бы ложными. Но если высказывание (1) ложно, то X не виновен, а если ложно высказывание (2), то X и Y оба виновны. Итак, X должен был быть виновным и не виновным одновременно, что невозможно. Следовательно, обвинитель должен быть рыцарем. Значит, X в действительности виновен, а поскольку X и Y не могут быть виновными одновременно, то Y должен быть не виновен. Следовательно, X виновен, Y не виновен, и обвинитель — рыцарь.

84. Если бы обвинитель был лжецом, то тогда

1) X и Y оба были бы виновны;
2) X был бы виновен.

И в этом случае мы бы опять пришли к противоречию. Следовательно, обвинитель — рыцарь, X не виновен, а Y виновен.

85. Предположим, что обвинитель был бы лжецом. Тогда высказывание (1) ложно, поэтому X виновен и Y не виновен. Следовательно, X виновен. Но высказывание (2) также ложно, поэтому X не виновен, и мы приходим к противоречию. Значит, в этой задаче, так же как и в предыдущей, обвинитель — рыцарь. Тогда в силу высказывания (2) X виновен. Из высказывания (1) (так как X не невиновен) мы заключаем, что Y виновен. Следовательно, в этом случае X и Y оба виновны.

86. Подсудимый A не может быть рыцарем, так как если бы он был рыцарем, то был бы виновен и не лгал бы, утверждая, что не виновен. Подсудимый A не может быть и лжецом, так как если бы он был лжецом, то его высказывание было бы ложным, и он был бы виновен и, следовательно, был бы рыцарем. Значит, A — нормальный человек и не виновен. Поскольку A не виновен, то высказывание островитянина B истинно. Следовательно, B не лжец: он либо рыцарь, либо нормальный человек. Предположим, что B был бы нормальным человеком. Тогда высказывание островитянина C было бы ложным, и C был бы либо лжецом, либо нормальным человеком. Это означало бы, что среди трех островитян A, B, C нет ни одного рыцаря. Следовательно, вопреки условиям задачи ни один из них не виновен. Отсюда мы заключаем, что B не может быть нормальным человеком. Он должен быть рыцарем и, следовательно, виновен.

87. *Пока Крэг не прибыл* *. Прежде всего заметим, что A не может быть лжецом, так как если бы он был лжецом, то его высказывание было бы ложно и, следовательно, он был бы виновен. Мы пришли бы к противоречию с тем условием задачи, в котором говорится, что лжец не виновен. Значит, A — либо рыцарь, либо нормальный человек.

Первый случай: A — рыцарь. Поскольку его высказывание истинно, то он не виновен. Тогда высказывание защитника B также истинно. Следовательно, B — либо рыцарь, либо нормальный человек. Но A — рыцарь, поэтому B — нормальный человек. Значит, C мо-

* Обозначим подсудимого A, защитника B и обвинителя C.

жет быть только лжецом. А поскольку известно, что лжец не виновен, то В виновен.

Второй случай: А — нормальный человек и не виновен. Высказывание защитника В истинно и в этом случае, поэтому В — рыцарь (поскольку А — нормальный человек). Так как А не виновен и С, будучи лжецом, не виновен, то виновен В.

Третий случай: А — нормальный человек и виновен. В этом случае высказывание обвинителя истинно, поэтому обвинитель должен быть рыцарем (он не может быть нормальным человеком, так как «вакансия» нормального человека занята А). Следовательно, В может быть только лжецом.

Итак, вот что мы выяснили, рассматривая три возможных случая:

	1	2	3
Подсудимый	Не виновен Рыцарь	Не виновен Нормальный человек	Виновен Нормальный человек
Защитник	Виновен Нормальный человек	Виновен Рыцарь	Не виновен Лжец
Обвинитель	Не виновен Лжец	Не виновен Лжец	Не виновен Рыцарь

Все три случая согласуются с заявлениями, сделанными тремя главными участниками судебного процесса до прибытия Крэга.

После прибытия Крэга. Крэг спросил у обвинителя, виновен ли тот. Задавая свой вопрос, инспектор Крэг уже знал, что обвинитель не виновен (так как во всех трех случаях обвинитель не виновен), поэтому ответ обвинителя был нужен Крэгу лишь для того, чтобы установить, кто такой обвинитель: рыцарь или лжец. Если бы обвинитель правдиво ответил «нет», то инспектор Крэг понял бы, что случаи (1) и (2) можно исключить, и не стал бы задавать новых вопросов. Но инспектору Крэгу после того, как обвинитель ответил, понадобилось задать еще несколько вопросов. Следовательно, обвинитель должен быть лжецом и на вопрос инспектора ответить «да». Такой ответ заставил инспектора Крэга (а вместе с ним и читателя) исключить из рассмотрения случай (3) и в дальнейшем рассматривать только случаи (1) и (2). Это означает, что в действительности виновен защитник, но относительно подсудимого и защитника не известно, кто из них рыцарь и кто нормальный человек. Затем Крэг спросил у подсудимого, виновен ли обвинитель и, получив ответ, смог до конца разобраться в ситуации. На вопрос Крэга рыцарь ответил бы «нет», в то время как нормальный человек ответил бы либо «да», либо «нет». Получив ответ «нет», Крэг не смог бы определить, был ли подсудимый рыцарем или нормальным человеком. Но поскольку для Крэга после ответа все стало ясно, то подсудимый должен был ответить «да». Следовательно, подсудимый — нормальный человек, а защитник — рыцарь (хотя он и виновен).

7. Как избежать оборотней и другие полезные практические советы

Эта глава посвящена не столько занимательным аспектам логики, сколько ее практическим приложениям. Во многих житейских ситуациях полезный совет был бы как нельзя кстати. Учитывая это, я обстоятельно, шаг за шагом научу вас: А) как избежать оборотней в лесу; Б) как выбрать невесту; В) как защищать себя на суде; Г) как жениться на дочери короля.

Разумеется, я не могу поручиться, что вам непременно представится случай убедиться, насколько полезны мои советы, но как мудро объяснил Алисе Белый Рыцарь, нужно быть готовым *ко всему*!

А. КАК ВЕСТИ СЕБЯ В ЛЕСУ, ГДЕ ВОДЯТСЯ ОБОРОТНИ

Предположим, что вы находитесь в лесу, каждый обитатель которого либо рыцарь, либо лжец. (Напомним, что рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.) Кроме того, в лесу водятся оборотни, имеющие на редкость неприятную привычку иногда превращаться в волков и пожирать людей. Оборотень может быть либо рыцарем, либо лжецом.

88. . . . .

Вы берете интервью у трех обитателей леса A, B, C. Известно, что ровно один из них оборотень. В беседе с вами они заявляют:

A: C — оборотень.

B: Я не оборотень.

C: По крайней мере двое из нас лжецы.

Наша задача состоит из двух частей.

а) Кто оборотень: рыцарь или лжец?

б) Если бы вам предстояло выбрать одного из трех обитателей леса в попутчики и вопрос о том, не окажется ли ваш избранник оборотнем, волновал бы вас сильнее, чем вопрос, не окажется ли он лжецом, то на ком из трех вы бы остановили свой выбор?

89. . . . .

Вы снова берете интервью у трех обитателей леса A, B и C. Известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец и среди них имеется ровно один оборотень. В беседе с вами они заявляют:

A: Я оборотень.

B: Я оборотень.

C: Не более чем один из нас рыцарь.

Проведите полную классификацию A, B и C.

90. . . . .

В этой и в двух следующих задачах мы снова встречаем трех обитателей леса A, B, C, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Заявления делают только двое из них: A и B. В их высказываниях слово «нас» относится ко всем трем героям (к A, B и C), а не только к A и B.

Предположим, что A и B заявили следующее:

A: По крайней мере один из нас рыцарь.

B: По крайней мере один из нас лжец.

Известно, что по крайней мере один из них оборотень и ни один не является одновременно рыцарем и оборотнем. Кто оборотень?

91. . . . .

На этот раз A и B сделали следующие заявления:

A: По крайней мере один из нас лжец.

B: C — рыцарь.

Известно, что ровно один из них оборотень и что он рыцарь. Кто оборотень?

92. . . . .

В этой задаче A и B заявили следующее:

A: По крайней мере один из нас лжец.

B: C — оборотень.

И в этой задаче известно, что ровно один из них оборотень и что он рыцарь. Кто оборотень?

93. . . . .

В этой задаче известно, что из трех обитателей леса ровно один оборотень, что он рыцарь, а два остальных — лжецы. Заявление сделал только B: «C — оборотень».

Кто оборотень?

94. . . . .

В этой задаче, отличающейся изящной простотой, лишь два действующих лица: A и B. Лишь одно из них оборотень. A и B заявили следующее:

A: Оборотень — рыцарь.

B: Оборотень — лжец.

Кого из них вы выбрали бы себе в попутчики?

Б. КАК ВЫБРАТЬ ИЛИ ЗАВОЕВАТЬ НЕВЕСТУ

95. Как ее убедить? . . . .

Предположим, что вы один из жителей острова рыцарей и лжецов. Вы полюбили девушку и хотите жениться на ней. Но у вашей избранницы странные вкусы: по каким-то непонятным причинам она не желает выходить замуж за рыцаря и прочит себя в жены только лжецу. При этом ей подавай не бедного, а непременно богатого лжеца (для удобства мы будем предполагать, что все лжецы на острове делятся либо на богатых, либо на бедных). Предположим, что вы богатый лжец. Вам разрешается сказать избраннице лишь одну фразу. Как одной-единственной фразой убедить вашу возлюбленную, что вы богатый лжец?

96. . . . .

Предположим теперь, что ваша девушка мечтает выйти замуж только за богатого рыцаря. Как одной-единственной фразой убедить ее, что вы богатый рыцарь?

97. Как выбрать невесту?. . . . .

На этот раз вы переноситесь на остров рыцарей и лжецов. Каждая обитательница этого острова — либо рыцарь, либо лжец. Вы влюбляетесь в одну из прекрасных островитянок — девушку по имени Элизабет — и хотите жениться на ней. Но вам хотелось бы знать, кто она (так как вы, естественно, не хотели бы жениться на лжеце). Если бы вам разрешили задать ей хоть один вопрос, то все было бы очень просто. Но на острове существует древнее табу, запрещающее мужчине заговаривать с любой островитянкой до тех пор, пока она не станет его женой. К счастью, у Элизабет есть брат. Он, как и все островитяне, либо рыцарь, либо лжец (брат и сестра не обязательно однотипны: один из них может быть рыцарем, а другой — лжецом). Вам разрешается задать брату один вопрос, на который можно ответить либо «да», либо «нет».

Придумайте такой вопрос, чтобы, услышав ответ, вы бы могли с уверенностью сказать, кто такая Элизабет: рыцарь или лжец. Какой вопрос вы бы задали?

98. Как выбрать невесту на острове Бахава?

На этот раз вы переноситесь на остров Бахава, где живут рыцари, всегда говорящие только правду, лжецы, которые всегда лгут, и нормальные люди, говорящие то правду, то ложь. Напомним, что на острове Бахава женщины во всем пользуются равными правами с мужчинами. Среди женщин, как и среди мужчин, имеются рыцари, лжецы и нормальные люди. На вас как на иностранца не распространяются законы острова и, в частности, королевский указ, повелевающий рыцарю вступать в брак только с рыцарем, а лжецу — только с лжецом: вы вольны выбирать себе в жены островитянку, кем бы она ни была.

Предположим, что вам надлежит выбрать себе в невесты одну из трех сестер А, В, С. Известно, что одна из них рыцарь, одна — лжец и одна — нормальный человек. Известно также, что нормальная сестра (нечего сказать, в хорошенькое положение вы попали!) — оборотень, а две другие сестры не оборотни. Предположим, что вы не откажетесь взять в жены лжеца (или рыцаря), но жениться на оборотне даже для такого покладистого человека, как вы, — это уж слишком! Чтобы определить, кто из сестер кто, вам разрешается задать им один-единственный вопрос, на который можно ответить либо «да», либо «нет».

Какой вопрос вы бы задали?

В. ДА, ВЫ НЕ ВИНОВНЫ, НО КАК ЭТО ДОКАЗАТЬ?

Теперь мы переходим к серии особенно увлекательных задач. Действие во всех этих задачах происходит на острове рыцарей, лжецов и нормальных людей. Вы сами также один из уроженцев и постоянных обитателей этого острова.

На острове совершено преступление. По совершенно непонятным соображениям подозрения пали на вас. Вы задержаны и предстали перед судом. На судебном заседании вам разрешают произнести одну-единственную фразу. Ваша задача — убедить присяжных в том, что вы не виновны.

99.

Предположим, что преступник — лжец (о чем известно суду) и вы также лжец (о чем суду не известно), но тем не менее не виновны в совершении инкриминируемого вам преступления. Вам предоставляется право произнести одну-единственную фразу. Ваша цель — убедить присяжных не только в том, что вы не лжец, но и в том, что вы не виновны. Что бы вы сказали?

100.

Предположим, что вы находитесь в такой же ситуации, как и в предыдущей задаче, с единственным отличием: теперь вы виновны. Какое заявление вы бы сделали на суде, чтобы убедить присяжных (людей вполне разумных и способных рассуждать логично) в своей невиновности?

101.

В этой задаче мы будем предполагать, что преступник — рыцарь. (Наше допущение внутренне непротиворечиво: чтобы совершить преступление, вовсе не обязательно лгать.) Предположим также, что вы рыцарь (о чем присяжным не известно), но не виновны в совершении преступления. Что бы вы заявили на суде?

102.

Эта задачка потруднее. Предположим, что преступник — не нормальный человек, то есть либо рыцарь, либо лжец. Вы не виновны. Какое высказывание, которое могло бы исходить и от рыцаря, и от лжеца, и от нормального человека, вы бы произнесли на суде, чтобы убедить присяжных в своей невиновности?

103.

А вот гораздо более простая задача. Известно, что преступник — не нормальный человек. Вы не преступник, но вполне нормальны. Какое высказывание, которое не могло бы исходить ни от виновного рыцаря, ни от лжеца, вы бы произнесли на суде, чтобы убедить присяжных в своей невиновности?

104. . . . .

Эта задача поинтереснее. Известно, что преступник — не нормальный человек. Предположим, что 1) вы не виновны и что 2) вы не лжец.

Можете ли вы одним-единственным высказыванием убедить присяжных в этих двух фактах?

105. . . . .

Эта задача в известном смысле «двойственна» предыдущей. Известно, что преступник — не нормальный человек, вы не виновны, но не рыцарь. Предположим, что по каким-то известным вам соображениям вы не прочь приобрести репутацию лжеца или нормального человека, но с презрением относитесь к рыцарям. Могли бы вы одним-единственным высказыванием убедить присяжных в том, что вы не виновны, но не рыцарь?

Г. КАК ЖЕНИТЬСЯ НА ДОЧЕРИ КОРОЛЯ?

Наконец-то мы добрались до темы, которую вы все ожидали с нетерпением!

106. . . . .

Вы, житель острова рыцарей, лжецов и нормальных людей, влюблены в дочь короля Маргозиту и хотите жениться на ней. Король не желает, чтобы его дочь вышла замуж за нормального человека, и дает ей отеческие наставления: «Поверь мне, дорогая, тебе действительно не следует выходить замуж за нормального человека. Нормальные люди капризны, переменчивы, на них ни в чем нельзя положиться. С ними никогда не знаешь, где находишься. Один день он говорит тебе правду, на другой день лжет. Что в этом хорошего? Рыцарь же надежен, как скала. С ним всегда знаешь, на чем стоишь. С лжецом тоже чувствуешь себя вполне уверенно: что бы он ни сказал, стоит тебе лишь заменить его высказывание противоположным, и ты знаешь, как обстоит дело в действительности. Я считаю, что у человека должны быть какие-то принципы, которым он неукоснительно следует. Если человек видит высшее наслаждение в том, чтобы говорить правду, пусть говорит правду. Если считает, что ложь превыше всего, пусть лжет. А что представляют собой эти добропорядочные нормальные люди? Так себе: серединка на половинку, ни правды, ни лжи. Нет, они не для тебя!»

Предположим теперь, что вы не нормальный человек (и поэтому имеете шанс обрести в жены дочь короля). Чтобы получить согласие короля на ваш брак с его дочерью, вам необходимо убедить его в том, что вы не нормальный человек. Король дает вам аудиенцию, во время которой вы можете произнести сколько угодно высказываний. Задача подразделяется на две части.

а) Сколько истинных высказываний понадобится вам, чтобы убедить короля в том, что его будущий зять — не нормальный человек?

б) Сколько ложных высказываний понадобится вам, чтобы убедить короля в том, что его будущий зять — не нормальный человек?

(Подчеркнем, что и в том и в другом случае речь идет о *минимальном* числе высказываний.)

107. . . . .

На другом острове рыцарей, лжецов и нормальных людей король придерживался противоположных взглядов и дал дочери иные отеческие наставления: «Дорогая, я не хочу, чтобы ты вышла замуж за какого-нибудь рыцаря или лжеца. Мне хотелось бы, чтобы твой муж был солидным нормальным человеком с хорошей репутацией. Тебе не следует выходить замуж за рыцаря, потому что все рыцари — ханжи. Тебе не следует выходить замуж и за лжеца, потому что все лжецы вероломны. Нет, что ни говори, а добропорядочный нормальный человек был бы тебе как раз под пару!»

Предположим, что вы житель этого острова и нормальный человек. Ваша задача — убедить короля в том, что вы нормальный человек.

а) Сколько истинных высказываний понадобится вам для этого?

б) Сколько ложных высказываний понадобится вам для той же цели?

(И в том и в другом случае речь идет о минимальном числе высказываний.)

108. . . . .

Перед вами более сложный вариант предыдущей задачи. Ее решение представляет собой альтернативу (хотя и чрезмерно сложную) решению предыдущей задачи, но, чтобы решить ее, одного лишь решения предыдущей задачи недостаточно.

Предположим, что вы житель острова рыцарей, лжецов и нормальных людей и сами нормальный человек. Король хочет, чтобы его дочь вышла замуж только за нормального человека, но требует доказательства исключительного остроумия и сообразительности от своего будущего зятя. Чтобы получить руку королевской дочери, вы должны в присутствии его величества произнести одно-единственное высказывание, которое удовлетворяло бы двум следующим условиям:

1) Оно должно убедить короля в том, что вы нормальный человек.

2) Король не должен знать, истинно или ложно ваше высказывание.

Как это сделать?

РЕШЕНИЯ

88. С — либо рыцарь, либо лжец. Предположим, что С — рыцарь. Тогда по крайней мере двое из трех островитян — лжецы. Следовательно, ими должны быть А и В. Отсюда мы заключаем, что В — оборотень (так как, по его словам, он не оборотень, а по доказанному В — лжец). Итак, если С — рыцарь, то оборотень — лжец (так как им должен быть В). Предположим теперь, что С — лжец. Тогда неверно, что по крайней мере два из трех островитян — лжецы, поэтому среди них есть самое большее один лжец. Этим лжецом должен быть С. Следовательно, и А, и В — рыцари. Так

как А — рыцарь и утверждает, что С — оборотень, то С действительно оборотень. Таким образом, и в этом случае оборотень — лжец (а именно С).

Следовательно, независимо от того, рыцарь ли С или лжец, оборотень — лжец (хотя в каждом случае речь идет о другом лице). Итак, ответ на первый вопрос гласит: оборотень — лжец. Кроме того, мы доказали, что оборотнем может быть либо В, либо С. Следовательно, если вы хотите выбрать себе попутчика, который заведомо не был бы оборотнем, то вам следует остановить свой выбор на А.

89. Докажем сначала, что С — рыцарь. Предположим, что С был бы лжецом. Тогда его первое высказывание было бы ложным, поэтому по крайней мере двое из трех островитян были бы рыцарями. Это означало бы, что А и В оба должны быть рыцарями (так как по предположению С — лжец). Следовательно, их высказывания были бы истинными, и они оба вопреки условиям задачи были бы оборотнями. Итак, С — рыцарь. Тогда ровно двое из трех лжецы. Ими должны быть А и В. А поскольку их высказывания ложны, то ни А, ни В не оборотни. Следовательно, оборотнем должен быть С. Таким образом, С — рыцарь и оборотень, А и В — лжецы, и ни один из них не оборотень.

90. Если бы В был лжецом, то по крайней мере один из трех островитян действительно был бы лжецом. Но тогда его высказывание было бы истинным, и мы пришли бы к противоречию, так как лжецы не говорят правды. Следовательно, В — рыцарь. Тогда высказывание А истинно, и А также должен быть рыцарем. Таким образом, и А, и В — рыцари. Так как В — рыцарь, то его высказывание истинно, поэтому один из трех — рыцарь. Им должен быть С. Следовательно, он и только он оборотень.

91. А должен быть рыцарем по тем же самым причинам, по которым в предыдущей задаче был рыцарем В, а именно: если бы А был лжецом, то было бы истинным высказывание о том, что по крайней мере один из трех лжец, и мы пришли бы к противоречию (высказывание лжеца было бы истинным). Так как А — рыцарь, то его высказывание истинно, поэтому по крайней мере один из трех действительно лжец.

Если бы В был рыцарем, то (в силу высказывания В) С также был бы рыцарем, и все трое оказались бы рыцарями. Но в истинном высказывании А утверждается, что по крайней мере один из трех — лжец. Следовательно, В должен быть лжецом. А так как В утверждает, что С — рыцарь, то С в действительности лжец. Таким образом, А — единственный рыцарь. Следовательно, А — оборотень.

92. Из высказывания А следует, что А должен быть рыцарем и по крайней мере один из трех должен быть лжецом. Если бы В был рыцарем, то С был бы оборотнем и, значит, еще одним рыцарем, но тогда все трое были бы рыцарями. Следовательно, В — лжец. Но тогда С не оборотень. Поскольку известно, что оборотень — рыцарь, то В также не может быть оборотнем. Значит, оборотень А.

93. Если бы В был рыцарем, то С был бы оборотнем и рыцарем, то есть рыцарей было бы двое. Следовательно, В — лжец, а С не оборотень. Кроме того, В, будучи лжецом, не оборотень. Значит, оборотень А.

94. Вам следовало бы выбрать А. Предположим, что В — рыцарь. Тогда его высказывание истинно. Следовательно, оборотень — лжец, поэтому В не может быть оборотнем. Предположим, что В — лжец. Тогда его высказывание ложно, а это означает, что оборотень в действительности рыцарь. Следовательно, и в этом случае В не может быть оборотнем.

95. Все, что вам нужно сказать: «Я бедный лжец». Из этого высказывания ваша возлюбленная сразу же заключит, что вы не рыцарь (поскольку рыцарь не стал бы лгать и утверждать, что он бедный лжец). Следовательно, вы должны быть лжецом, а так как ваше высказывание ложно, то вы не бедный лжец. Но вы лжец, поэтому вы должны быть богатым лжецом.

96. Вам нужно сказать: «Я не бедный рыцарь». Услыхав такое признание, ваша возлюбленная стала бы рассуждать следующим образом. Если бы вы были лжецом, то вы действительно не были бы бедным рыцарем. Следовательно, ваше высказывание было бы истинным. Это означало бы, что вы, будучи лжецом, высказали истинное утверждение. Возникшее противоречие показывает, что вы рыцарь. Но тогда ваше высказывание истинно, и вы не бедный рыцарь. А поскольку вы рыцарь, то вы должны быть богатым рыцарем.

97. Эта задача имеет несколько решений. Простейшее из них состоит в следующем. Вы спрашиваете у брата вашей избранницы: «Вы и Элизабет однотипны?» Если он ответит «да», то Элизабет должна быть рыцарем независимо от того, будет ли ее брат рыцарем или лжецом. Если же он ответит «нет», то Элизабет должна быть лжецом независимо от того, кто ее брат. Докажем это.

Предположим, что на ваш вопрос брат Элизабет ответил «да». Мы знаем, что ее брат — либо рыцарь, либо лжец. Если он рыцарь, то его высказывание, утверждающее, что Элизабет рыцарь, истинно. Следовательно, Элизабет также должна быть рыцарем. Если брат Элизабет — лжец, то его высказывание ложно. Следовательно, он и Элизабет разнотипны, а это означает, что Элизабет и в этом случае должна быть рыцарем. Итак, если Артур отвечает вам «да», то Элизабет рыцарь.

Предположим, что Артур отвечает «нет». Если он рыцарь, то говорит правду. Следовательно, он и Элизабет разнотипны, поэтому Элизабет должна быть лжецом. Если же он лжец, то его высказывание ложно. Тогда Элизабет в действительности однотипна с ним, а следовательно, и в этом случае должна быть лжецом. Итак, если Артур отвечает вам «нет», то Элизабет — лжец.

98. Эта задача также допускает несколько решений. Простейшее и наиболее изящное из известных мне решений состоит в том, чтобы, выбрав одну из сестер (например, A), спросить у нее: «B по рангу ниже C?» *

Предположим, что A отвечает «да». Тогда вы выбираете себе в невесты B, рассуждая при этом следующим образом. Предположим, что A — рыцарь. Тогда B по рангу действительно ниже C. Следователь-

* Напомним, что рыцари — особы высшего ранга, нормальные люди — среднего, лжецы — низшего.

но, B — лжец, а сестра C — нормальный человек. В этом случае B не оборотень (так как оборотень C). Предположим, что A — лжец. Тогда B в действительности по рангу выше C. Это означает, что B — рыцарь, а C — нормальный человек. Следовательно, и в этом случае B — не оборотень. Если A — нормальный человек, то B заведомо не оборотень, так как оборотень A. Итак, если A отвечает на ваш вопрос «да», то независимо от того, будет ли она рыцарем или лжецом, вам следует выбрать себе в невесты сестру B.

Если бы A ответила «нет», то ее ответ был бы эквивалентен утверждению, что C по рангу ниже B. В этом случае вам следовало бы выбрать себе в невесты сестру C.

99. Все подозрения с вас могло бы снять одно-единственное высказывание: «Я виновен». Вы, будучи лжецом, могли бы сделать такое заявление на суде, поскольку оно ложно, и оно сняло бы с вас подозрения, так как присяжные, искушенные в логике, рассуждали бы следующим образом. Если бы вы действительно были виновны, то вы были бы лжецом (так как известно, что преступник — лжец). Но тогда вы, будучи лжецом, высказали бы истинное утверждение. Таким образом, предположение о том, что вы виновны, приводит к противоречию. Следовательно, вы не виновны.

Приведенное нами рассуждение присяжных может служить типичным примером рассуждения от противного (ложность утверждения доказывается тем, что высказанный тезис доводится до нелепости, отсюда латинское название этого способа доказательства *reductio ad absurdum* — приведение к нелепости). Присяжные могли бы прийти к тому же выводу и более прямым путем, рассуждая следующим образом. Вы либо лжец, либо не лжец (напомним, что присяжным не известно, лжец вы или не лжец). Если вы лжец, то ваше высказывание ложно. Следовательно, вы не виновны. Если вы не лжец, то вы заведомо не виновны, так как преступник — лжец.

100. Убедить присяжных одним-единственным высказыванием в том, что вы не виновны, невозможно. Если после того, как вы сделали свое заявление, присяжные могли бы, логически рассуждая, прийти к выводу, что вы не виновны, то (поскольку они люди умные и строили свои рассуждения по всем правилам логики) это означало бы, что вы действительно не виновны вопреки условию задачи (по предположению вы виновны в совершении преступления).

101. Эта задача в известном смысле «двойственна» задаче 99 (и даже несколько проще той). Вам необходимо лишь заявить на суде: «Я не виновен». Услышав ваше заявление, присяжные стали бы рассуждать следующим образом. Если вы рыцарь (о чем они не знают), то ваше высказывание истинно. Следовательно, вы не виновны. Если же вы не рыцарь, то вы опять-таки не виновны, так как по имеющимся у присяжных сведениям преступник — рыцарь.

102. Одно из решений состоит в том, что вы должны выступить на суде с заявлением: «Либо я рыцарь и не виновен, либо я лжец и виновен». Сформулируем ваше высказывание несколько проще: «Я либо невиновный рыцарь, либо виновный лжец». Выслушав подобное заявление, присяжные принялись бы рассуждать следующим образом.

Первый шаг. Предположим, что он рыцарь. Тогда его высказывание истинно. Следовательно, он либо невиновный рыцарь, либо виновный лжец. Быть виновным рыцарем он не может, так как он не лжец. Значит, он невиновный рыцарь. Следовательно, он не виновен.

Второй шаг. Предположим, что он лжец. Тогда его заявление ложно. Следовательно, он ни невиновный рыцарь, ни виновный лжец. В частности, он не может быть виновным лжецом. Но он лжец. Следовательно, он невиновный лжец и, значит, не виновен.

Третий шаг. Если он нормальный человек, то он заведомо не виновен, так как преступник — не нормальный человек.

103. Эта задача решается очень просто. Вам нужно заявить на суде: «Я лжец». Ни рыцарь, ни лжец не могли бы высказать такое утверждение. Следовательно, вы нормальный человек и, значит, не виновны.

104. Вы могли бы сказать: «Я не виновный рыцарь». Присяжные, выслушав ваше признание, стали бы рассуждать следующим образом.

Первый шаг. Предположим, что он (то есть вы) был бы лжецом. Тогда он не был бы рыцарем и, следовательно, не мог бы быть виновным рыцарем, поэтому его высказывание было бы истинным. Но это невозможно, так как лжецы не высказывают истинных утверждений. Следовательно, он не может быть лжецом.

Второй шаг. Нам известно, что он либо рыцарь, лицо нормальный человек. Если он нормальный человек, то он не виновен. Предположим, что он рыцарь. Тогда его высказывание истинно. Следовательно, он не может быть виновным рыцарем. Но он рыцарь. Значит, он должен быть невиновным рыцарем.

Следует заметить, что вы могли бы сделать на суде и другие (по форме, но эквивалентные по существу) заявления, например «Либо я не рыцарь, либо я не виновен», «Если я рыцарь, то я не виновен».

105. Вы могли бы сказать: «Я виновный лжец». Выслушав ваше заявление, присяжные стали бы рассуждать следующим образом: «Ясно, что он не рыцарь. Значит, он либо нормальный человек, либо лжец. Если он нормальный человек, то он не виновен. Предположим, что он лжец. Тогда его высказывание ложно, и он может быть виновным лжецом. Следовательно, он невиновный лжец».

106. Любого числа высказываний недостаточно, чтобы убедить короля в вашей ненормальности. Действительно, любые ваши высказывания, сколько бы их ни было, могли бы принадлежать нормальному человеку, так как нормальный человек высказывает и истинные, и ложные утверждения. Следовательно, вам не удастся жениться на дочери этого короля! Жаль! Придется вам попытать счастья на следующем острове.

107. И в том и в другом случае достаточно одного высказывания. Короля могло бы убедить истинное высказывание «Я не рыцарь» (такое высказывание не могло бы принадлежать ни рыцарю, ни лжецу) и ложное высказывание «Я лжец».

108. В связи с этой задачей я хотел бы заметить, что если вы выскажете первое утверждение, то король узнает, что хотя вы и нормальный человек, но только что вы высказали истинное утверждение. Если вы выскажете второе утверждение, то король узнает, что хотя вы и нормальный человек, но только что вы высказали ложное утверждение.

Выберите на свое усмотрение любое утверждение, истинность или ложность которого не известна королю, например утверждение, что у вас в кармане ровно 11 долларов. Свое утверждение вы могли бы высказать в такой форме: «Либо я нормальный человек и у меня ровно 11 долларов в кармане, либо я лжец».

Такое утверждение не могло бы принадлежать лжецу (потому что утверждение, в котором о лжеце говорится, что он либо нормальный человек, у которого 11 долларов в кармане, либо лжец, истинно). Такое утверждение не могло бы принадлежать и рыцарю (рыцарь не может быть ни нормальным человеком с 11 долларами в кармане, ни лжецом). Следовательно, король узнает, что вы нормальный человек, но не сможет узнать, истинно выше высказывание или ложно, пока ему не станет известно, сколько денег у вас в кармане.

8. Логические задачи

ПРЕАМБУЛА

Многие из задач в этой главе содержат так называемые *условные* высказывания, то есть сложные высказывания вида «Если P истинно, то Q истинно», где P и Q — некоторые высказывания. Прежде чем приступить к решению задач этого типа, необходимо выяснить, какие неоднозначности могут встретиться в истолковании условных высказываний. С одними фактами согласятся все, по поводу других могут возникнуть значительные разногласия.

Обратимся к конкретному примеру. Рассмотрим следующее высказывание:

Если Джон виновен, то его жена виновна. (1)

Всякий согласится с тем, что если Джон виновен и если высказывание (1) истинно, то жена Джона также виновна.

Предположим теперь, что жена Джона виновна, но не известно, виновен Джон или не виновен. Как, по-вашему, будет ли в этом случае высказывание (1) истинно или ложно? Не считаете ли вы, что независимо от того, виновен Джон или не виновен, его жена виновна? Может быть, вы предпочитаете выразить свою мысль иначе: если Джон виновен, то его жена виновна, и если Джон не виновен, то его жена виновна?

Примеры такого словоупотребления мы находим в литературе. В рассказе Киплинга «Рики-тики-тави» кобра говорит перепуганному семейству: «Если вы двинетесь с места, я укушу, и если вы не двинетесь с места, я укушу». В переводе на более привычный язык это означает просто-напросто: «Я укушу». О наставнике секты дзен Токусане легенда рассказывает, что на все вопросы (и «невопросы») он отвечал ударами своего посоха. Ему принадлежит знаменитое изречение: «Тридцать ударов, если тебе есть что сказать, тридцать ударов, если тебе нечего сказать».

Итак, мы с трогательным единодушием заключаем, что если высказывание Q истинно, то условное высказывание «Если P, то Q» (так же как и условное высказывание «Если не P, то Q») истинно.

Наиболее спорный вопрос состоит в том, истинно или ложно условное высказывание «Если P, то Q», когда оба высказывания P и Q ложны. Обратимся к нашему примеру. Можно ли считать высказывание (1) истинным, если и Джон и его жена не виновны? К этому жизненно важному вопросу мы вскоре вернемся.

С интересующим нас вопросом тесно связан другой. Мы уже пришли к единому мнению относительно того, если Джон виновен, а его жена не виновна, то высказывание (1) должно быть ложным. Верно ли обратное утверждение? Иначе говоря, следует ли из ложности высказывания (1), что Джон должен быть виновен, а его жена невиновна? Ту же мысль можно сформулировать и по-другому: правильно ли утверждать, что высказывание (1) ложно лишь в том случае, если Джон виновен, а его жена не виновна? Если связку «если ..., то ...» понимать так, как это делают большинство логиков, математиков и других ученых, то на наш вопрос следует ответить утвердительно. Мы также будем придерживаться общепринятого соглашения. Заключается оно в том, что если нам заданы любые два высказывания P и Q, то сложное высказывание «Если P, то Q» означает: «Не верно, что P истинно, а Q ложно» (не больше и не меньше). В частности, принятое соглашение означает, что если Джон и его жена не виновны, то высказывание (1) следует считать истинным. Единственный случай, когда высказывание (1) ложно, может представиться, если Джон виновен, а его жена не виновна. Это условие заведомо не выполняется, если Джон и его жена не виновны. Иначе говоря, если Джон и его жена не виновны, то заведомо не верно, что Джон виновен, а его жена не виновна, поэтому высказывание (1) не может быть истинным.

Следующий пример еще более причудлив:

Если Конфуций родился в Техасе, то я Дракула. (2)

Высказывание (2) означает всего-навсего: «Не верно, что Конфуций родился в Техасе, и я не Дракула». Таким образом, высказывание (2) следует считать истинным.

К оценке истинности высказывания (2) можно подойти и с другой стороны. Высказывание (2) ложно лишь в том случае, если Конфуций родился в Техасе, а я не Дракула. Но поскольку Конфуций родился не в Техасе, то не может быть верно, что Конфуций родился в Техасе *и* что я не Дракула. Иначе говоря, высказывание (2) не может быть ложным. Следовательно, оно должно быть истинным.

Рассмотрим теперь любые два высказывания P, Q. Составим из них сложное высказывание

$$\text{Если } P, \text{ то } Q. \qquad (3)$$

Будем обозначать его $P \rightarrow Q$ (эту сокращенную запись принято читать либо как «если P, то Q», либо как «из P следует Q», либо «P влечет за собой Q», либо даже

«P имплицирует Q»). Слово «следует» (и его синонимы) не слишком удачно, но оно привилось в литературе. Понимать его, как мы видели, надлежит лишь в совершенно определенном, хотя, быть может, и несколько необычном смысле: не верно, что P ложно и Q истинно. Итак, относительно высказывания $P \to Q$ мы располагаем следующей информацией.

Факт 1. Если P ложно, то $P \to Q$ автоматически истинно.

Факт 2. Если Q истинно, то $P \to Q$ автоматически истинно.

Факт 3. Высказывание $P \to Q$ может быть ложно в том и только в том случае, если P истинно, а Q ложно.

Факт 1 иногда формулируют иначе: «Из ложного высказывания следует что угодно». Такое утверждение вызывает у некоторых философов самые решительные возражения (см., в частности, задачу 244 из гл. 14). Факт 2 иногда формулируют так: «Истинное высказывание следует из чего угодно».

Таблица истинности. . . . .

Если заданы два высказывания P, Q, то их значения истинности могут распределяться четырьмя возможными способами: 1) P и Q истинны; 2) P истинно, Q ложно; 3) P ложно, Q истинно; 4) P и Q ложны.

В каждом конкретном случае мы должны иметь дело с одним и только с одним из этих четырех вариантов. Рассмотрим теперь высказывание $P \to Q$. Можно ли определить, в каких случаях оно истинно и в каких — ложно? Можно, если воспользоваться следующими соображениями.

Случай 1: P и Q истинны. Так как Q истинно, то $P \to Q$ истинно (факт 2).

Случай 2: P истинно, Q ложно. Тогда $P \to Q$ ложно (факт 3).

Случай 3: P ложно, Q истинно. Тогда $P \to Q$ истинно (факт 1 или факт 2).

Случай 4: P ложно, Q ложно. Тогда $P \to Q$ истинно (факт 1).

Все четыре случая мы сведем в одну таблицу, называемую *таблицей истинности для импликации*:

	P	Q	$P \to Q$
1	И	И	И
2	И	Л	Л
3	Л	И	И
4	Л	Л	И

Три буквы И, И, И (истинно, истинно, истинно) в первой строке означают, что когда P истинно и Q истинно, высказывание $P \to Q$ истинно. Буквы И, Л, Л во второй строке означают, что если P истинно, Q ложно, то $P \to Q$ истинно, а буквы Л, Л, И в четвертой строке — что если P ложно и Q ложно, то $P \to Q$ истинно.

Заметим, что $P \to Q$ истинно в трех из четырех случаев и ложно только во втором случае.

Еще одно свойство импликации. Импликация обладает еще одним важным свойством. Чтобы доказать истинность высказывания «Если P, то Q», достаточно, приняв высказывание P за посылку, убедиться в том, что из него следует высказывание Q. Иначе говоря, если из посылки P следует заключение Q, то высказывание «Если P, то Q» истинно.

В дальнейшем мы будем ссылаться на это свойство импликации, как на *факт 4*.

А. ПРИМЕНЕНИЕ ИМПЛИКАЦИИ К РЫЦАРЯМ И ЛЖЕЦАМ

109. . . . .

О каждом из двух людей А и В известно, что он либо рыцарь, либо лжец. Предположим, что А высказывает следующее утверждение: «Если я рыцарь, то В — рыцарь».

Можно ли определить, кто такие А и В: кто из них рыцарь и кто лжец?

110. . . . .

У А спрашивают: «Вы рыцарь?» Тот отвечает: «Если я рыцарь, то съем собственную шляпу».

Докажите, что А придется съесть свою шляпу.

111. . . . .

А утверждает: «Если я рыцарь, то дважды два — четыре». Кто такой А: рыцарь или лжец?

112. . . . .

А заявляет: «Если я рыцарь, то дважды два — пять». Кто, по-вашему, А: рыцарь или лжец?

113. . . . .

Относительно А и В известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец. А заявляет: «Если В — рыцарь, то я лжец». Кто А и кто В?

114. . . . .

Двух человек X и Y судят за участие в ограблении, А и В выступают на суде в качестве свидетелей. Относительно А и В известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец. В ходе судебного заседания свидетели выступили со следующими заявлениями:

А: Если X виновен, то Y виновен.

В: Либо X не виновен, либо Y виновен.

Можно ли утверждать, что А и В однотипны? (Напомним, что двух обитателей острова рыцарей и лжецов мы называем однотипными, если они оба рыцари либо оба лжецы.)

115. . . . .

У трех обитателей А, В и С острова рыцарей и лжецов взяли интервью, в ходе которого они высказали следующие утверждения:

А: В — рыцарь.

В: Если А — рыцарь, то С — рыцарь.

Можно ли определить, кто из А, В и С рыцарь и кто лжец?

Б. ЛЮБОВЬ И ЛОГИКА

116. . . . .

Предположим, что следующие два высказывания истинны:

1) Я люблю Бетти или я люблю Джейн.

2) Если я люблю Бетти, то я люблю Джейн.

Следует ли из них непременно, что я люблю Бетти? Следует ли из них непременно, что я люблю Джейн?

117.

Предположим, что у меня спрашивают: «Верно ли, что если вы любите Бетти, то вы также любите Джейн?» Я отвечаю: «Если это верно, то я люблю Бетти».

Следует ли отсюда, что я люблю Бетти? Следует ли отсюда, что я люблю Джейн?

118.

На этот раз перед нами две девушки: Ева и Маргарет. У меня спрашивают: «Правда ли, что если вы любите Еву, то вы также любите Маргарет?» Я отвечаю: «Если это правда, то я люблю Еву, и если я люблю Еву, то это правда».

О какой девушке можно с уверенностью сказать, что я ее люблю?

119.

На этот раз перед нами предстанут три девушки: Сью, Марция и Диана. Предположим, что известно следующее.

1) Я люблю по крайней мере одну из этих трех девушек.

2) Если я люблю Сью, а не Диану, то я также люблю Марцию.

3) Я либо люблю и Диану и Марцию, либо не люблю ни одну из них.

4) Если я люблю Диану, то я также люблю Сью.

Кого из девушек я люблю?

Не кажется ли вам, что логики — народ глуповатый? Уж кому, как не мне, знать, люблю я или не люблю Бетти, Джейн, Еву, Маргарет, Сью, Марцию, Диану и всех прочих. Разве для этого непременно нужно сесть за стол и что-то прикинуть на бумаге? Не сочли бы вы странным, если бы жена, спросив у своего высокоученого мужа: «Милый, ты меня любишь?» — услышала бы в ответ: «Минуточку, дорогая», после чего муж уселся бы за письменный стол и после напряженных вычислений через час сказал бы: «Ты знаешь, милая, выходит, что я тебя люблю»?

В этой связи мне вспоминается история, якобы приключившаяся с Лейбницем. Однажды великий философ стал размышлять, не жениться ли ему на некоей даме. Взяв лист бумаги, он разделил его на две части и на одной подробно перечислил все достоинства дамы, а на другой — ее недостатки. Недостатков оказалось больше, и Лейбниц решил воздержаться от женитьбы.

120. . . . .

Эта задача, хотя и проста, но несколько неожиданна.

Предположим, что я либо рыцарь, либо лжец и высказываю два следующих утверждения:

1) Я люблю Линду.
2) Если я люблю Линду, то я люблю Кати.

Кто я: рыцарь или лжец?

121. Новый вариант старинной пословицы . .

Старинная английская пословица гласит: «Под приглядом котел не закипит». Как я установил, это утверждение ложно. Однажды мне довелось приглядывать за котлом, стоявшим на раскаленной плите, и котел закипел.

А что если мы исправим старинную пословицу, например, так: «Под приглядом котел не закипит, если за ним не приглядывать»?

Как, по-вашему, истинно или ложно такое утверждение?

В. ЕСТЬ ЛИ СОКРОВИЩА НА ЭТОМ ОСТРОВЕ?

Задачи двух предыдущих групп были связаны в основном с условными высказываниями, то есть с высказываниями вида «Если P истинно, то Q». Задачи этой группы связаны главным образом с высказываниями вида «P истинно в том и только в том случае, если Q истинно». Оно означает, что если P истинно, то Q истинно, и если Q истинно, то P истинно. Иначе говоря, если одно из двух высказываний P, Q истинно, то другое также истинно. Оно означает также, что высказывания P и Q либо оба истинны, либо оба ложны. Сложное высказывание «P в том и только в том случае, если Q» принято обозначать «$P \longleftrightarrow Q$».

Таблица истинности для $P \longleftrightarrow Q$ имеет следующий вид:

P	Q	$P \longleftrightarrow Q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Высказывание «P в том и только в том случае, если Q» иногда читают как «P эквивалентно Q» или как «P и Q эквивалентны». Отметим два следующих факта:

Факт 1. Любое высказывание, эквивалентное истинному высказыванию, истинно.

Факт 2. Любое высказывание, эквивалентное ложному высказыванию, ложно.

122. Есть ли сокровище на этом острове? . . .

На некотором острове, населенном рыцарями и лжецами, разнесся слух о том, что на нем зарыты сокровища. Вы прибываете на остров и спрашиваете у одного из местных жителей (назовем его А), есть ли золото на его острове. В ответ на ваш вопрос А заявляет: «Сокровища на этом острове есть в том и только в том случае, если я рыцарь».

Наша задача подразделяется на две части:

а) Можно ли определить, кто такой А — рыцарь или лжец?

б) Можно ли определить, есть ли сокровища на острове?

123. . . . .

В предыдущей задаче коренной житель А острова рыцарей и лжецов добровольно снабдил вас информацией. Предположим, что теперь вы спросили у А: «Эквивалентно ли высказывание о том, что вы рыцарь, высказыванию о том, что на этом острове спрятаны сокровища?» Если бы А ответил «да», то задача свелась бы к предыдущей. Предположим, что А ответил «нет». Могли бы вы в таком случае сказать, спрятаны ли сокровища на острове?

124. Как я разбогател. . . . .

К сожалению, история, которую я хочу вам поведать, не соответствует истине. Но поскольку она интересна, то мне все равно хочется рассказать ее вам.

В океане (в каком именно — не помню) неподалеку друг от друга расположены три острова: А, В и С. Мне удалось разузнать, что по крайней мере на одном из них закопаны сокровища, но на каком именно, осталось невыясненным. Острова В и С были необитаемы, население острова А составляли рыцари и лжецы. Не исключено, что среди местных жителей встречались и нормальные люди, но сказать с уверенностью, был ли на острове хоть один нормальный человек, я не берусь.

Мне посчастливилось раздобыть карту островов, составленную знаменитым капитаном Марстоном — пиратом, славившимся своими причудами (он-то и запрятал сокровища). К карте была приложена записка, разумеется зашифрованная. Когда я ее расшифровал, то выяснилось, что она состоит лишь из двух предложений. Вот что в ней значилось:

(1) На острове А нет сокровищ.

(2) Если среди жителей острова А встречаются нормальные люди, то сокровища закопаны на двух островах.

Я поспешил на остров А. Мне было достоверно известно, что обитатели этого острова знают о зарытых сокровищах все до мелочей. Король острова догадался, зачем я прибыл в его владения, и в недвусмысленных выражениях разрешил мне задать лишь один вопрос любому из наугад выбранных мною его подданных. Способа установить, на кого пал мой выбор — на рыцаря, лжеца или на нормального человека, у меня не было.

Мне необходимо было придумать такой вопрос чтобы, получив ответ, я мог указать на один из островов и быть уверенным, что сокровище закопано на нем.

Какой вопрос следовало мне задать островитянину?

125. . . . .

Случилось мне как-то раз побывать на другом острове рыцарей, лжецов и нормальных людей. По слухам, на том острове были закопаны несметные сокровища, и я хотел разузнать, как обстоит дело в действительности. Король острова (рыцарь) любезно представил меня трем своим подданным А, В и С и сообщил мне, что не более чем один из них нормальный человек. Любому из них разрешалось задать два вопроса, на которые можно ответить «да» или «нет».

Можно ли при помощи двух таких вопросов выяснить, запрятаны ли на острове сокровища?

126. Умеете ли вы рассуждать логически?

Предположим, что население двух соседних островов составляют только рыцари и лжецы (на островах нет ни одного нормального человека). Вам говорят, что на одном острове проживает четное, а на другом — нечетное число рыцарей. Вам также сообщают, что на острове с четным числом рыцарей закопаны сокровища, а на острове с нечетным числом рыцарей сокровищ нет.

Вы выбираете наугад один из островов и отправляетесь туда. Все обитатели острова знают, сколько рыцарей и сколько лжецов живет среди них. Вы беседуете с тремя обитателями А, В и С острова и получаете от них следующие заявления:

А: Число лжецов на этом острове четно.

В: На нашем острове сейчас находится нечетное число людей.

С: Я рыцарь в том и только в том случае, если А и В однотипны.

Предположим, что вы не рыцарь и не лжец и что, когда вы были на острове, других гостей на нем не было. Спрятаны ли на острове сокровища?

РЕШЕНИЯ

109—112. Эти четыре задачи основаны на использовании одной и той же идеи, которая сводится к следующему. Пусть *P* — любое высказывание, а А — любой обитатель острова рыцарей и лжецов. Тогда если А высказывает утверждение: «Если я рыцарь, то *P*», то он должен быть рыцарем, а высказывание *P* должно быть истинным! В это трудно поверить, и мы докажем наше удивительное утверждение двумя способами.

1. Предположим, что А — рыцарь. Тогда высказывание «Если А — рыцарь, то *P*» должно быть истинным (так как рыцари всегда говорят правду). Следовательно, А — рыцарь, и верно, что если А — рыцарь, то *P*. Из этих двух фактов мы заключаем, что *P* должно быть истинно. Таким образом, приняв в качестве посылок предположение о том, что А — рыцарь, мы получаем в качестве заключения высказывание *P*. Тем самым (с учетом факта 4 об импликации) мы доказали, что если А — рыцарь, то *P*. Но именно это и утверждал А! Следовательно, А должен быть рыцарем. А так как мы доказали, что если А — рыцарь, то *P*, то заключаем, что *P* должно быть истинно.

2. Другой способ убедиться в истинности нашего утверждения состоит в следующем. Напомним, что из ложного высказывания следует любое высказывание. Поэтому если А не рыцарь, то высказывание «Если А — рыцарь, то *P*» автоматически становится истинным и, следовательно, не могло бы принадлежать лжецу. Значит, если кто-нибудь, о ком известно, что он может быть либо рыцарем, либо лжецом, высказывает такое утверждение, то он может быть только рыцарем и высказывание *P* должно быть истинным.

Применим этот принцип к нашим задачам. Начнем с задачи 109. Если в качестве *P* принято высказывание «В — рыцарь», то ясно, что А должен быть рыцарем, а его высказывание истинным. Следовательно, В — рыцарь, и мы получаем ответ: А и В — оба рыцари.

В задаче 110 в качестве *P* выберем высказывание «А придется съесть свою шляпу». Мы видим, что А должен быть рыцарем и что ему придется съесть свою шляпу. (Тем самым доказано, что хотя рыцари обладают несомненными достоинствами и добродетелями, они тем не менее могут быть глуповатыми.)

Ответ к задаче 111: А — рыцарь.

Правильное заключение, к которому можно прийти в задаче 112: автор опять мистифицирует читателей! Условия задачи противоречивы: высказывание «Если я рыцарь, то дважды два — пять» не может принадлежать ни рыцарю, ни лжецу.

113. А должен быть рыцарем, а В — лжецом.

Докажем прежде всего, что только рыцарь может высказать утверждение вида «Если *P*, то я лжец». Напомним, что истинное высказывание следует из любого высказывания. Значит, если высказывание «Я лжец» истинно, то полное высказывание «Если *P*, то я лжец» также истинно. Но если я лжец, то никакое истинное высказывание не могло бы принадлежать мне. Следовательно, высказывая утверждение «Если *P*, то я лжец», я должен быть рыцарем.

Итак, А должен быть рыцарем. Следовательно, верно также, что если В — рыцарь, то А — лжец (потому что А настаивает на истинности этого высказывания). Тогда В не может быть рыцарем, так как в противном случае А должен бы быть лжецом, а он им не является *. Следовательно, В — лжец.

114. А в действительности утверждает: «Не верно, что X виновен, а Y не виновен». Но это то же самое, как если бы А утверждал: «Либо X не виновен, либо Y виновен». Следовательно, А и В в действительности утверждают одно и то же, но выражают свою мысль по-разному. Таким образом, утверждения, приведенные в задаче, либо оба истинны, либо оба ложны, поэтому А и В должны быть однотипными.

115. Предположим, что А — рыцарь. Тогда В также рыцарь (по утверждению А). Следовательно, высказывание В «Если А — рыцарь, то С — рыцарь» истинно. Но (по предположению) А — рыцарь. Следова-

* Любое высказывание, из которого следует ложное высказывание должно быть ложным, так как из истинного высказывания не может следовать ложное высказывание. В решении задачи 113 из высказывания «В — рыцарь» следует ложное высказывание «А — лжец». Значит, высказывание «В — рыцарь» должно быть ложным. Это еще один вариант доказательства от противного.

тельно, С — рыцарь (в предположении, что А — рыцарь).

Итак, мы доказали, что если А — рыцарь, то С — рыцарь *. Именно это и утверждал В. Следовательно, В — рыцарь. Значит, высказывание А о том, что В — рыцарь, истинно, поэтому А также рыцарь. Итак, мы доказали, что если А — рыцарь, то С — рыцарь. Следовательно, С также рыцарь. Значит, все трое — рыцари.

116. Из приведенных в задаче высказываний не следует, что я люблю Бетти, но следует, что я люблю Джейн. В том, что я люблю Джейн, можно убедиться при помощи, например, таких рассуждений.

Я либо люблю Бетти, либо не люблю ее. Если я не люблю Бетти, то по условию (1) я должен любить Джейн (так как в задаче сказано, что я люблю по крайней мере одну из девушек). С другой стороны, если я люблю Бетти, то по условию (2) должен любить и Джейн. Значит, независимо от того, люблю ли я или не люблю Бетти, мы приходим к выводу, что я люблю Джейн.

Замечу, кстати, что тем из читательниц, кого зовут Бетти, огорчаться было бы преждевременно: хотя из условий задачи не следует, что я люблю Бетти, из них не следует, что я не люблю Бетти. Вполне возможно, что я люблю и ее, причем даже больше, чем Джейн.

117. На этот раз из условий задачи не следует, что я люблю Джейн, но следует, что я люблю Бетти. Действительно, предположим, что я не люблю Бетти. Тогда утверждение «Если я люблю Бетти, то я люблю Джейн» должно быть истинным (так как из ложного утверждения следует любое утверждение). Но по условиям задачи если это утверждение истинно, то я должен любить Бетти. Значит, если я не люблю Бетти, то из этого можно заключить, что я люблю ее, и мы приходим к противоречию. Единственный способ избежать противоречия состоит в признании того, что я люблю Бетти.

---

* Мы сделали это, приняв в качестве посылки высказывание «А — рыцарь», из которого вывели заключение «С — рыцарь». В силу факта (4) об импликации мы заключаем, что если А — рыцарь, то С — рыцарь.

Условия задачи не позволяют определить, люблю ли я или не люблю Джейн.

118. Из условий задачи следует, что я должен любить и Еву, и Маргарет. Пусть *P* — высказывание «Если я люблю Еву, то я люблю и Маргарет». Нам известно:

1) Если *P* истинно, то я люблю Еву.
2) Если я люблю Еву, то *P* истинно.

Решая предыдущую задачу, мы убедились: из (1) следует, что я люблю Еву. Значит, я люблю Еву. Тогда по условию (2) должно быть истинно высказывание *P*, то есть верно, что если я люблю Еву, то люблю и Маргарет. Но я люблю Еву. Следовательно, я люблю и Маргарет.

119. Я должен любить всех трех девушек. Доказать это можно разными способами. Приведем один из них.

По условию (3) я люблю и Диану, и Марцию, либо не люблю ни одну из них. Предположим, что я не люблю ни Диану, ни Марцию. Тогда по условию (1) я должен любить Сью. Значит, я люблю Сью, но не люблю Диану и не люблю Марцию, что противоречит высказыванию (2). Следовательно, не верно, что я не люблю ни Диану, ни Марцию. Значит, я люблю и Диану, и Марцию. Так как я люблю Диану, то по условию (4) я люблю и Сью. Итак, доказано, что я люблю всех трех девушек.

120. Я должен быть рыцарем. Если бы я был лжецом, то утверждения (1) и (2) были бы ложными. Предположим, что утверждение (2) ложно. Тогда я любил бы Линду, но я не любил бы Кати. Значит, Линду я любил бы, а это означает, что утверждение (1) было бы истинным. Поэтому невозможно, чтобы оба утверждения (1) и (2) были ложными. Следовательно, я не могу быть лжецом.

121. Сказать: «*P* ложно, если не *Q*» — то же самое, что сказать: «Если *P*, то *Q*». (Например, высказывание «Я не пойду в кино, если вы не пойдете со мной» эквивалентно высказыванию «Если я пойду в кино, то вы пойдете со мной».) Следовательно, «исправленный» вариант пословицы «Под приглядом котел не закипит, если за ним не приглядывать» эквивалентно утверждению «Если котел под приглядом закипит, то за ним приглядывают», а оно заведомо истинно, так как за котлом под приглядом, кипит он или не кипит, несомненно кто-то приглядывает.

122. Определить, кто такой А — рыцарь или лжец, невозможно. Однако сокровища должны быть на острове.

Для решения этой и других задач серии «Есть ли сокровища на этом острове?» установим раз и навсегда следующий основной принцип: если говорящий (либо рыцарь, либо лжец) высказывает утверждение «Я рыцарь в том и только в том случае, если P», то P должно быть истинным (независимо от того, кто такой говорящий — рыцарь или лжец).

Пусть K — утверждение о том, что говорящий — рыцарь. По словам говорящего, K эквивалентно P. Предположим, что говорящий действительно рыцарь. Тогда K действительно эквивалентно P, и K — истинно. Следовательно, P эквивалентно истинному утверждению. Значит, P должно быть истинно. С другой стороны, предположим, что говорящий — лжец. Тогда его утверждение ложно, поэтому P не эквивалентно K. Кроме того, так как он лжец, то утверждение K ложно. Поскольку P не эквивалентно ложному утверждению K, то P должно быть истинно (если бы P было эквивалентно K, то P было бы ложно). Итак, независимо от того, кто такой говорящий — рыцарь или лжец, P должно быть истинно.

Интересно сравнить новый принцип с принципом, установленным в решениях задач 109—112: если рыцарь или лжец высказывает утверждение «Если я рыцарь, то P», то мы можем заключить, что он рыцарь и что P истинно. Но если рыцарь или лжец высказывает утверждение «Я рыцарь в том и только в том случае, если P», то мы можем заключить, что P истинно, но у нас нет способа определить, рыцарь или лжец тот, кто высказал утверждение.

123. Да, могли бы: никаких сокровищ на острове нет.

Пусть G — утверждение о том, что на острове зарыты сокровища, а K — утверждение о том, что А — рыцарь. Отвечая на ваш вопрос отрицательно, А тем самым заявляет, что G не эквивалентно K. Предположим, что А — рыцарь. Тогда G действительно не эквивалентно K. Так как А — рыцарь, то K истинно. Следовательно, G, поскольку оно не эквивалентно истинному утверждению K, должно быть ложным.

С другой стороны, предположим, что А — лжец. Тогда G в действительности эквивалентно K (поскольку лжец сказал, что G и K не эквивалентны). Но K — ложное утверждение (поскольку его высказал лжец). Следовательно, G должно быть ложным, как утверждение, эквивалентное ложному утверждению K. Таким образом, независимо от того, кто такой А — рыцарь или лжец, его отрицательный ответ на ваш вопрос означает, что утверждение G ложно. Следовательно, никаких сокровищ на острове нет.

Примечание. Из двух последних задач (122 и 123) следует один весьма важный принцип, хорошо известный знатокам и специалистам по «рыцарям и лжецам». Предположим, что P — любое высказывание, истинность или ложность которого вам требуется установить, и кому-то (он может быть либо рыцарем, либо лжецом) известно подлинное значение истинности высказывания P. Тогда, задав носителю знаний один-единственный вопрос, вы можете установить, истинно P или ложно. Достаточно спросить: «Эквивалентно ли высказывание «вы рыцарь» высказыванию «P истинно»? Получив утвердительный ответ, вы поймете, что P истинно. Получив отрицательный ответ, вы будете знать, что P ложно.

Тот же принцип используется и в решениях трех следующих задач. Мы будем называть его *фундаментальным принципом*.

124. Нам заранее известно, что на острове А нет никаких сокровищ, что сокровища зарыты либо на острове В, либо на острове С и что если на острове А есть хоть один нормальный житель, то сокровища зарыты и на острове В, и на острове С.

У выбранного наугад островитянина я спросил: «Эквивалентно ли утверждение, что вы рыцарь, утверждению, что сокровища зарыты на острове В?»

Предположим, что на мой вопрос островитянин ответил утвердительно. Если он либо рыцарь, либо лжец, то сокровища (в силу фундаментального принципа, установленного в решении предыдущей задачи) зарыты на острове В. Если же он нормальный человек, то сокровища зарыты на островах В и С, поэтому на острове сокровища заведомо имеются. Таким образом, утвердительный ответ на мой вопрос означает, что на острове B есть сокровища.

Предположим, что островитянин на мой вопрос ответил отрицательно. Если он рыцарь или лжец, то (в силу фундаментального принципа) сокровищ на острове B нет. Значит, сокровища должны быть на острове C. С другой стороны, если он нормальный человек, то сокровища зарыты и на острове B, и на острове C. Следовательно, на острове C зарыты сокровища. Таким образом, отрицательный ответ на мой вопрос означает, что на острове C есть сокровища.

125. Чтобы решить эту задачу, достаточно дважды воспользоваться фундаментальным принципом (объяснение его см. в решении задачи 123).

Один вопрос понадобится вам, чтобы установить, кто из трех островитян заведомо не нормальный человек. Обращаясь к A, вы спрашиваете его: «Эквивалентно ли утверждение, что вы рыцарь, утверждению, что B — нормальный человек?» Предположим, что A отвечает утвердительно. Если A либо рыцарь, либо лжец, то (в силу фундаментального принципа) B должен быть нормальным человеком. Значит, C — не нормальный человек. Если же A не рыцарь и не лжец, то он должен быть нормальным человеком, и тогда C снова не может быть нормальным человеком. Таким образом, утвердительный ответ на ваш вопрос означает, что C — не нормальный человек.

Предположим, что A отвечает отрицательно. Если он рыцарь или лжец, то B — не нормальный человек (в силу фундаментального принципа). Если же A — не рыцарь и не лжец, то B, как и в предыдущем случае, не может быть нормальным человеком, так как A — нормальный человек. Таким образом, отрицательный ответ на ваш вопрос означает, что B — не нормальный человек.

Итак, получив от A утвердительный ответ, вы обращаетесь со вторым вопросом к C. Если же на ваш первый вопрос A отвечает отрицательно, то со вторым вопросом вам надлежит обратиться к B. И в том и в другом случае вы знаете, что обращаетесь со вторым вопросом либо к рыцарю, либо к лжецу. Вы спрашиваете (тот же вопрос был задан вами островитянину A в задаче 122): «Эквивалентно ли утверждение, что вы рыцарь, утверждению, что на этом острове зарыты сокровища?» Утвердительный ответ означает, что на острове есть сокровища, отрицательный — что их нет.

126. Не будь у вас «на вооружении» фундаментального принципа, решить эту задачу было бы довольно трудно. Но фундаментальный принцип позволяет без труда «расправиться» с задачей. Я предполагаю, что вам известны следующие свойства целых чисел: сумма двух четных чисел четна, сумма двух нечетных чисел также четна. Следовательно, вычитая четное число из четного числа или нечетное число из нечетного числа, вы получаете четное число. (Например, $12-8=4$, $13-7=6$.)

Из высказанного C утверждения (в силу фундаментального принципа) следует, то A и B однотипны, то есть они либо оба рыцари, либо оба лжецы. Следовательно, их высказывания либо оба истинны, либо оба ложны. Предположим, что оба высказывания истинны. Тогда по утверждению A на острове имеется четное число лжецов. По утверждению B на острове (вместе с вами) находится нечетное число людей. Но вы не рыцарь и не лжец, и, кроме вас, других гостей на острове нет. Поэтому, вычитая четное число лжецов из четного числа рыцарей и лжецов, вы получаете четное число рыцарей. Следовательно, в данном случае сокровища зарыты где-то на острове. Предположим теперь, что оба утверждения ложны. Это означает, что на острове находится нечетное число лжецов и нечетное число рыцарей и лжецов (так как всего на острове вместе с вами находится четное число людей). Следовательно, число рыцарей снова должно быть четным, и сокровище, как и в предыдущем случае, должно быть зарыто где-то на острове.

9. Беллини или Челлини?

В гл. 5 мы рассказали о шкатулках Порции. История эта имеет продолжение. Напомним, что Беллини всегда гравировал на крышках шкатулок своей работы истинные надписи, а Челлини украшал шкатулки своей работы ложными высказываниями. У Беллини и Челлини были сыновья, которые переняли у отцов секреты мастерства и также стали делать изящные шкатулки. Сыновья пошли по стопам отцов: наследники Беллини гравировали на крышках своих шкатулок только истинные высказывания, а сыновья Челлини — только ложные.

Других мастеров по изготовлению шкатулок, кроме Беллини и Челлини, в Италии эпохи Возрождения не было: каждая шкатулка была работы либо Беллини, либо Челлини, либо сына Беллини, либо сына Челлини.

У знатоков и любителей старины шкатулки, изготовленные Беллини и Челлини (особенно отцами), ценятся необычайно высоко.

А. ЧЬЕЙ РАБОТЫ ШКАТУЛКА?

127. . . . .

Однажды мне в руки попала шкатулка, на крышке которой выгравирована надпись:

Эта шкатулка
не была сделана
ни одним из сыновей
Беллини

Чьей работы эта шкатулка: Беллини, Челлини или кого-нибудь из их сыновей?

128. . . . .

В другой раз мне довелось увидеть шкатулку, на крышке которой красовалась надпись, позволявшая заключить, что шкатулка была работы Челлини.

Какую надпись мог выгравировать знаменитый мастер на крышке шкатулки?

129. . . . .

Особенно высоко ценятся шкатулки с надписями, по которым можно установить, что шкатулки изготовлены Беллини или Челлини, но нельзя определить, кем именно. Однажды мне посчастливилось держать в руках такую шкатулку. Какая надпись могла украшать ее крышку?

130. От великого до смешного . . . .

Предположим, что вам удалось найти шкатулку со следующей надписью на крышке:

Эту шкатулку
сделал я

К какому заключению вы бы пришли на основании такой надписи?

131. Флорентийский патриций. . . . .

Один флорентийский патриций любил предаваться весьма изысканным и дорогостоящим забавам. Кульминацией званых вечеров была какая-нибудь игра, победителю которой вручался драгоценный приз. Прослышав про шкатулки Порции, патриций решил придумать очередную игру в том же духе. Он приказал изготовить три шкатулки — золотую, серебряную и свинцовую — и в одну из них положил драгоценный камень, который должен был стать наградой победителю. Своим гостям патриций объяснил, что каждая шкатулка изготовлена либо Беллини, либо Челлини (а не сыновьями знаменитых мастеров). Первого, кто догадается, в какой шкатулке спрятан драгоценный камень, и сможет доказать правильность своей догадки, ждет награда. Надписи на крышках шкатулок гласили:

На золотой	На серебряной	На свинцовой
Если драгоценный камень лежит в серебряной шкатулке, то ее изготовил Беллини	*Если драгоценный камень лежит в этой шкатулке, то золотую шкатулку изготовил Челлини*	*Шкатулку, в которой лежит драгоценный камень, изготовил Челлини*

В какую шкатулку патриций положил драгоценный камень?

Б. ПАРЫ ШКАТУЛОК

В некоторых музеях шкатулки экспонируются парами. Именно так — в комплекте из одной золотой и одной серебряной шкатулок — их некогда изготовляли и продавали. Род Беллини был связан с семейством Челлини узами крепкой дружбы, и нередко над созданием одного комплекта из двух шкатулок Беллини и Челлини трудились сообща. Разумеется, каждую шкатулку делал только один мастер, но золотая и серебряная шкатулки даже в одном комплекте могли быть работы различных мастеров. Знаменитые мастера любили украшать свои шедевры надписями, по которым сообразительные потомки могли полностью или хотя бы частично определить, кто изготовил ту или иную шкатулку. Искусствоведы подсчитали, что существует 16 вариантов атрибуции шкатулок в каждом комплекте: золотую шкатулку мог изготовить Беллини, сын Беллини, Челлини и сын Челлини, причем в каждом случае любой из четырех мог оказаться создателем серебряной шкатулки.

132. . . . .

В одном музее мне довелось увидеть пару шкатулок, украшенных следующими надписями:

На золотой	На серебряной
Обе шкатулки в этом комплекте изготовлены членами семейства Челлини	*Ни одна из этих шкатулок не была изготовлена ни сыном Беллини, ни сыном Челлини*

Чьей работы каждая из двух шкатулок?

133. . . . .

В другой раз мне случилось видеть пару шкатулок с надписями:

На золотой	На серебряной
Если эту шкатулку изготовил кто-нибудь из членов семейства Беллини, то серебряную шкатулку изготовил Челлини	*Золотую шкатулку сделал сын Беллини*

Чьей работы каждая из двух шкатулок?

134.

Перед вами пара шкатулок с надписями на крышках:

На золотой	На серебряной
Серебряную шкатулку сделал сын Беллини	*Золотую шкатулку изготовил не сын Беллини*

Докажите, что по крайней мере одна из этих двух шкатулок работы Беллини.

135.

Перед вами пара шкатулок с надписями:

На золотой	На серебряной
Серебряную шкатулку изготовил Челлини	*Золотую шкатулку изготовил не Челлини*

Докажите, что по крайней мере одна из этих двух шкатулок работы сына Челлини.

136.

Взгляните теперь на две шкатулки, украшенные следующими надписями:

На золотой	На серебряной
Серебряную шкатулку изготовил сын Беллини	*Золотую шкатулку изготовил сын Челлини*

Докажите, что по крайней мере одну из этих двух шкатулок изготовил либо Беллини, либо Челлини.

137.

История, о которой пойдет речь в этой задаче, поистине удивительна. Однажды я увидел две шкатулки, золотую и серебряную, и мне захотелось узнать, не была ли по крайней мере одна из них изготовлена Беллини. Прочитав надпись на одной шкатулке, я не смог вывести из нее, что по крайней мере одна из двух привлекших мое внимание шкатулок изготовлена Беллини. Каково же было мое изумление, когда, взглянув на надпись, украшавшую крышку другой шкатулки, я обнаружил, что она ничем не отличается от первой надписи. Но еще большее удивление охватило меня, когда выяснилось, что, прочитав вторую надпись, я мог утверждать со всей определенностью: «Обе шкатулки работы Беллини».

Какие надписи, по-вашему, могли украшать крышки шкатулок?

138. . . . .

В другой раз мне довелось видеть две шкатулки с одинаковыми надписями на крышках. Зная обе надписи, я смог прийти к заключению, что обе шкатулки изготовлены Челлини, хотя надпись на каждой шкатулке в отдельности не позволяла утверждать, что даже одна шкатулка изготовлена Челлини.

Какая надпись была, по-вашему, выгравирована на крышках шкатулок?

139. . . . .

Однажды мне довелось видеть две шкатулки с одинаковыми надписями на крышках. Из надписей следовало, что обе шкатулки были изготовлены одним мастером: либо Беллини, либо Челлини, но определить, кто из двух мастеров сделал их, было невозможно. Более того, надпись на одной шкатулке не позволяла прийти даже к такому заключению.

Какая надпись выгравирована на крышках шкатулок?

140. . . . .

Особенно высоко ценятся пары шкатулок, удовлетворяющие следующим условиям:

1) Из надписей на крышках можно заключить, что одна из шкатулок изготовлена Беллини, а другая — Челлини, но невозможно определить, какая из шкатулок чьей работы.

2) Надпись на крышке любой из двух шкатулок сама по себе не позволяет прийти к заключению, что шкатулки изготовлены либо Беллини, либо Челлини.

Однажды мне посчастливилось увидеть такую пару. (Насколько я могу понять, это была единственная в своем роде пара шкатулок.) Какие надписи могли, по-вашему, украшать крышки шкатулок?

141. Необыкновенное приключение. . . . . . .

В юности, еще до женитьбы, мне довелось побывать во Флоренции. Проглядывая от нечего делать какую-то местную газету, я неожиданно заметил объявление: «Срочно требуется логик» (к счастью, оно было напечатано на английском языке, так как итальянским я совершенно не владею). Из любопытства я отправился в музей, поместивший объявление, и там узнал, что логик понадобился для решения сложной проблемы. Дело в том, что сотрудники музея разыскали четыре шкатулки: две золотые и две серебряные. По ряду признаков удалось установить, что некогда шкатулки составляли два комплекта, но впоследствии их перемешали, и никто не мог сказать, какие шкатулки образуют пару. Я получил разрешение взглянуть на шкатулки и довольно быстро установил, какие из них входят в один комплект, за что мне было выплачено солидное вознаграждение. Кроме того, мне удалось установить, кто из мастеров изготовил каждую шкатулку, за что благодарная дирекция музея выплатила мне дополнительное вознаграждение (в качестве премии я, помимо всего прочего, получил целый ящик превосходного кьянти), а одна из красивейших девушек Флоренции в знак благодарности поцеловала меня *.

Вот какие надписи были выгравированы на крышках четырех шкатулок:

На шкатулке А из золота	На шкатулке В из золота
Серебряную шкатулку изготовил кто-то из семейства Челлини	*Либо серебряную шкатулку изготовил кто-то из семейства Челлини, либо обе шкатулки сделал Беллини*

* Бенвенуто Челлини не без основания слыл хвастуном. Почему бы мне не последовать его примеру?

На шкатулке C из серебра	На шкатулке D из серебра
Золотую шкатулку изготовил кто-то из семейства Беллини	*Золотую шкатулку изготовил кто-то из семейства Беллини, и по крайней мере одну из шкатулок сделал либо сын Беллини, либо сын Челлини*

Возникают два вопроса.

а) Какая шкатулка была изготовлена в комплекте со шкатулкой A: C или D?

б) Чьей работы каждая из четырех шкатулок?

РЕШЕНИЯ

127. Шкатулка работы Беллини. Действительно, если бы ее сделал один из сыновей Беллини, то высказывание, выгравированное на крышке шкатулки, было бы ложным, что невозможно. Если бы шкатулка была работы либо Челлини, либо сына Челлини, то высказывание было бы истинным, что также невозможно. Следовательно, шкатулку изготовил Беллини.

128. На крышке шкатулки достаточно было бы выгравировать надпись: «Эту шкатулку изготовил сын Челлини».

129. «Эта шкатулка изготовлена либо Беллини, либо сыном Челлини».

130. Высказывание, выгравированное на крышке шкатулки, очевидно, истинно. Следовательно, шкатулку мог сделать либо Беллини, либо сын Беллини.

131. *Первый шаг.* Предположим, что свинцовая шкатулка работы Беллини. Тогда выгравированное на ней утверждение истинно, поэтому драгоценный камень находится в шкатулке, изготовленной Челлини. Следовательно, эта шкатулка не может быть свинцовой. Предположим теперь, что свинцовую шкатулку сделал Челлини. Тогда выгравированное на ее крышке утверждение ложно, поэтому драгоценный камень находится в шкатулке работы Беллини. Значит, и в этом случае патриций положил драгоценный камень не в свинцовую шкатулку. Тем самым доказано, что в свинцовой шкатулке драгоценного каменя нет и не может быть.

Второй шаг. Затем мы устанавливаем, что и в серебряной шкатулке драгоценного камня нет. Если бы драгоценный камень находился в серебряной шкатулке, то мы бы пришли к следующему противоречию.

Пусть патриций положил драгоценный камень в серебряную шкатулку. Предположим, что золотая шкатулка изготовлена Беллини. Тогда выгравированное на ее крышке утверждение истинно, а поскольку (по предположению) драгоценный камень находится в серебряной шкатулке, то серебряная шкатулка работы Беллини. Отсюда следует, что золотую шкатулку изготовил Челлини. Итак, если золотая шкатулка работы Беллини, то ее изготовил Челлини!

Предположим теперь, что золотую шкатулку сделал Челлини. Тогда утверждение, выгравированное на крышке золотой шкатулки, ложно. Следовательно, серебряную шкатулку изготовил не Беллини. Значит, ее сделал Челлини. Но тогда утверждение, выгравированное на крышке серебряной шкатулки, ложно, из чего мы заключаем, что золотая шкатулка работы Беллини. Итак, если золотая шкатулка изготовлена Челлини, то ее сделал Беллини, что невозможно.

Полученные противоречия доказывают, что драгоценного камня нет и не может быть и в серебряной шкатулке. Следовательно, патриций положил его в золотую шкатулку.

132. Утверждение, выгравированное на крышке золотой шкатулки, не может быть истинным, так как в противном случае мы пришли бы к противоречию. Значит, золотая шкатулка изготовлена кем-то из семейства Челлини. Так как надпись на золотой шкатулке ложна, то обе шкатулки не могли быть изготовлены членами семейства Челлини. Следовательно, серебряную шкатулку сделал кто-то из семейства Беллини. Значит, утверждение, выгравированное на крышке серебряной шкатулки, истинно, поэтому ни одна из шкатулок не была выполнена ни сыном Беллини, ни сыном Челлини. Следовательно, золотую шкатулку изготовил Челлини, а серебряную — Беллини.

133. Напомним, что если любой житель острова рыцарей и лжецов заявляет: «Если я рыцарь, то то-то и то-то истинно», то этот житель должен быть рыцарем, а «то-то и то-то» должно быть истинно. Исходя из аналогичных соображений докажем, что утверждение, выгравированное на крышке золотой шкатулки, истинно.

Предположим, что золотая шкатулка изготовлена кем-то из семейства Беллини. Тогда надпись на ее крышке истинна: «Если эту шкатулку изготовил кто-нибудь из членов семейства Беллини, то серебряную шкатулку изготовил Челлини». Но золотую шкатулку (по предположению) изготовил либо отец, либо сын из семейства Беллини. Значит, серебряную шкатулку сделал Челлини. Итак, мы доказали, что если золотую шкатулку изготовил кто-то из членов семейства Беллини, то серебряную шкатулку сделал Челлини *. Иначе говоря, мы доказали, что на крышке золотой шкатулки выгравировано истинное утверждение. Следовательно, золотая шкатулка действительно изготовлена кем-то из членов семейства Беллини. Поскольку ранее нами установлено, что если золотую шкатулку изготовил кто-то из членов семейства Беллини, то серебряную шкатулку сделал Челлини. Полученный вывод относительно атрибуции (как говорят искусствоведы) золотой шкатулки позволяет прийти к заключению, что серебряная шкатулка изготовлена Челлини. Значит, надпись на крышке серебряной шкатулки ложна, поэтому золотую шкатулку сделал не сын Беллини. Но золотая шкатулка изготовлена кем-то из членов семейства Беллини. Следовательно, ее сделал Беллини. Итак, золотая шкатулка работы Беллини, а серебряная — Челлини.

134. Предположим, что утверждение, выгравированное на крышке золотой шкатулки, истинно. Тогда серебряную шкатулку изготовил сын Беллини. Значит, утверждение, украшающее крышку серебряной шкатулки, истинно. Следовательно, золотую шкатулку изготовил не сын Беллини, а так как на ее крышке выгравировано истинное утверждение, то золотую шкатулку должен был сделать Беллини.

---

* Так как из посылки «золотую шкатулку изготовил кто-то из членов семейства Беллини» следовало заключение «серебряную шкатулку изготовил Челлини». Мы снова воспользовались фактом (4) об импликации (см. последний абзац в преамбуле к гл. 8).

Предположим теперь, что утверждение, выгравированное на крышке золотой шкатулки, ложно. Это означает, что серебряную шкатулку сделал не сын Беллини. Тем не менее утверждение, выгравированное на крышке серебряной шкатулки, должно быть истинным (так как ложное утверждение на крышке золотой шкатулки не мог выгравировать сын Беллини). Следовательно, серебряную шкатулку изготовил Беллини.

Итак, если надпись на крышке золотой шкатулки верна, то золотую шкатулку изготовил Беллини. Если надпись на золотой шкатулке не верна, то серебряная шкатулка работы Беллини.

135. Предположим, что утверждение, выгравированное на крышке серебряной шкатулки, истинно. Поскольку оно истинно, то серебряную шкатулку изготовил кто-то из членов семейства Беллини. Значит, утверждение, выгравированное на крышке золотой шкатулки («Серебряную шкатулку изготовил Челлини»), должно быть ложным. Но поскольку (по предположению) надпись на крышке серебряной шкатулки верна, то золотую шкатулку изготовил не Челлини. Итак, на крышке золотой шкатулки выгравировано ложное утверждение, но шкатулку сделал не Челлини. Значит, золотую шкатулку изготовил сын Челлини.

Предположим теперь, что утверждение, выгравированное на крышке серебряной шкатулки, ложно. Это означает, что золотую шкатулку сделал Челлини. Следовательно, надпись на ее крышке ложна, и серебряную шкатулку изготовил не Челлини. Итак, на крышке серебряной шкатулки выгравировано ложное утверждение, но сделал эту шкатулку не Челлини. Значит, серебряную шкатулку изготовил сын Челлини.

136. Предположим, что утверждение, выгравированное на крышке золотой шкатулки, истинно. Тогда должна быть верной и надпись на крышке серебряной шкатулки, а это означало бы, что надпись на крышке золотой шкатулки не верна. Полученное противоречие доказывает, что утверждение, выгравированное на крышке золотой шкатулки, ложно. Из него следует также, что серебряную шкатулку изготовил не сын Беллини. Значит, если надпись на крышке серебряной шкатулке не верна, то золотую шкатулку изготовил не сын Челлини, но так как утверждение, выгравированное на крышке золотой шкатулки, ложно, то золотую шкатулку сделал Челлини.

Итак, если на крышке серебряной шкатулки выгравировано истинное утверждение, то серебряную шкатулку сделал Беллини. Если же это утверждение ложно, то золотую шкатулку сделал Челлини. Итак, мы доказали, что либо серебряную шкатулку изготовил Беллини, либо золотую шкатулку изготовил Челлини.

137. Эта задача, как и следующие три задачи, допускает много решений. Одно из возможных решений состоит в том, чтобы украсить крышки шкатулок надписью: «Либо обе шкатулки изготовлены Беллини, либо по крайней мере одну из них сделал кто-то из членов семейства Челлини».

Ни отец, ни сын Челлини в этом случае не могли изготовить ни одной из двух шкатулок, поскольку какую бы шкатулку они ни сделали, надпись на ее крышке оказалась бы верной, что невозможно. Следовательно, обе шкатулки изготовлены членами семейства Беллини. Значит, утверждения, выгравированные на крышках шкатулок, истинны, поэтому либо обе шкатулки изготовлены Беллини, либо по крайней мере одна шкатулка сделана кем-то из семейства Челлини. Последняя альтернатива ложна. Значит, обе шкатулки изготовлены Беллини.

138. Одно из решений состоит в следующем. На крышках шкатулок было выгравировано: «По крайней мере одна из этих шкатулок изготовлена сыном Челлини». Если бы эти утверждения были истинны, то по крайней мере одна шкатулка была бы работы сына Челлини. Но это невозможно, так как сын Челлини не гравирует на крышках своих шкатулок истинные утверждения. Следовательно, оба утверждения «по крайней мере одна из этих шкатулок изготовлена сыном Челлини» ложны. Это означает, что ни одна из шкатулок не была изготовлена сыном Челлини, из чего мы заключаем, что обе шкатулки сделал Челлини.

139. Крышки шкатулок могли бы украшать, например, такие надписи: «Либо обе шкатулки изготовлены Беллини, либо по крайней мере одну шкатулку сделал сын Челлини».

Докажем, что если эти надписи верны, то обе шкатулки изготовлены Беллини, а если не верны, то обе шкатулки изготовлены Челлини.

Предположим, что утверждения, выгравированные на крышках шкатулок, истинны. Тогда (в соответствии с надписями) либо обе шкатулки изготовлены Беллини, либо по крайней мере одну из них изготовил сын Челлини. Последняя альтернатива отпадает (сын Челлини не мог бы выгравировать на крышке шкатулки своей работы истинное утверждение). Следовательно, обе шкатулки должны быть работы Беллини.

Предположим, что утверждения, выгравированные на крышках шкатулок, ложны. В этом случае обе альтернативы, входящие в дизъюнкцию, ложны. В частности, ложна вторая альтернатива (утверждающая, что по крайней мере одну из шкатулок изготовил сын Челлини). Это означает, что ни одна из шкатулок не была изготовлена сыном Челлини. Поскольку оба утверждения все же ложны, то обе шкатулки были сделаны Челлини.

140. Одно из возможных решений состоит в следующем.

Надпись на крышке золотой шкатулки: «Эти шкатулки изготовлены Беллини и Челлини в том и только в том случае, если серебряную шкатулку изготовил член семейства Челлини».

Надпись на крышке серебряной шкатулки: «Золотую шкатулку изготовил член семейства Челлини».

Пусть P — утверждение о том, что шкатулки изготовлены Беллини и Челлини, а Q — утверждение о том, что серебряную шкатулку сделал член семейства Челлини. Надпись на крышке золотой шкатулки сообщает нам, что P эквивалентно Q, а из надписи на крышке серебряной шкатулки мы узнаем, что золотую шкатулку изготовил лжец, вследствие чего надпись на ее крышке ложна. Следовательно, одна из двух надписей истинна, а другая ложна.

Предположим, что утверждение, выгравированное на крышке золотой шкатулки, истинно. Тогда (поскольку мы доказали, что одна из двух надписей истинна, а другая ложна) надпись на серебряной шкатулке должна быть ложной. Значит, серебряную шкатулку изготовил кто-то из членов семейства Челлини, поэтому Q истинно. Кроме того, так как надпись на золотой шкатулке истинна, P действительно эквивалентно Q. Следовательно, P должно быть истинно (так как Q истинно).

Предположим теперь, что надпись на золотой шкатулке ложна. Тогда надпись на серебряной шкатулке истинна. Следовательно, серебряная шкатулка не может быть работы Челлини, поэтому Q ложно и, кроме того, P не эквивалентно Q. Значит, и в этом случае P истинно.

Итак, независимо от принятых нами предположений P должно быть истинно, то есть одна из шкатулок изготовлена Беллини, а другая — Челлини.

141. Шкатулка А входит в один комплект со шкатулкой D, так, если бы мы попытались составить комплект из шкатулки А и шкатулки С, то пришли бы к следующему противоречию.

Предположим, что в одном комплекте со шкатулкой А была изготовлена шкатулка С. Пусть надпись на крышке шкатулки А истинна. Тогда надпись на крышке шкатулки С ложна. Но тогда ложна и надпись на крышке А, и мы приходим к противоречию. Пусть теперь надпись на крышке шкатулки А ложна. Тогда надпись на крышке шкатулки С истинна, из чего следует, что надпись на шкатулке А должна быть истинной, и мы опять приходим к противоречию. Значит, шкатулка С не входит в один комплект со шкатулкой А. Тем самым первая часть задачи решена.

Рассмотрим теперь пару шкатулок В и С. Предположим, что надпись на крышке С ложна. Тогда шкатулка В изготовлена кем-то из членов семейства Челлини, поэтому надпись на ее крышке ложна. Это означает, что ни одна из двух входящих в нее альтернатив не истинна. В частности, ложна первая альтернатива, а это означает, что шкатулку С изготовил кто-то из членов семейства Беллини. Итак, если утверждение, выгравированное на крышке С, ложно, то шкатулку С сделал кто-то из членов семейства Беллини, что невозможно. Значит, надпись на крышке шкатулки С истинна, в силу чего надпись на крышке шкатулки В также истинна (так как надпись на С сообщает нам, что шкатулка В изготовлена кем-то из членов семейства Беллини). Но первая альтернатива, входящая в утверждение, выгравированное на крышке шкатулки В, не может быть истинной, поэтому истинна вторая альтернатива. Итак, шкатулки В и С изготовлены Беллини.

Рассмотрим теперь комплект шкатулок А и D. Предположим, что утверждение, выгравированное на крышке шкатулки А, ложно. Тогда шкатулка D сделана членом семейства Беллини. Следовательно, выгравированное на ней утверждение истинно. Это означает, что шкатулку А изготовил кто-то из членов семейства Беллини, и мы приходим к противоречию. Итак, надпись на шкатулке А истинна, из чего мы заключаем, что надпись на шкатулке D ложна. Следовательно, по крайней мере одна из входящих в нее альтернатив ложна. Первая альтернатива истинна (так как истинно утверждение, выгравированное на крышке шкатулки А). Значит, ложна вторая альтернатива. Это означает, что ни одна из шкатулок не была изготовлена ни сыном Беллини, ни сыном Челлини. Следовательно, шкатулку А сделал Беллини, а шкатулку D — Челлини.

Часть третья

Сказки и легенды

10 Остров Ваал

А. В ПОИСКАХ АБСОЛЮТА

В какой-то книге по философии мое внимание привлекли следующие строки: «Истинным философом с полным основанием можно назвать девочку лет девяти, которая долго смотрела в окно, а потом, обернувшись, спросила у матери:

— Мамочка, отчего существует не́что, а не ничто́?»

Над решением этой великой проблемы ломали голову многие мудрецы. Некоторые из них придавали ей первостепенное значение и формулировали несколько иначе, чем их юная коллега: «Почему существует не́что, а не ничто́?»

Если задуматься, то вопрос этот действительно не так прост. Действительно, почему существует нечто, а не ничто?

Давным-давно жил на свете один философ, который решил во что бы то ни стало выяснить, почему существует нечто, а не ничто. Он перечитал все книги по философии, которые когда-либо были написаны, но ни в одной из них не нашел убедительного ответа на мучивший его вопрос. Тогда он принялся за теологию. С кем он только ни беседовал: и со священнослужителями, и с учеными теологами, но никто из них не смог вразумительно объяснить, почему существует нечто, а не ничто. Разочаровавшись в мудрости Запада, наш философ с надеждой обратил свой взор на Восток. Около двенадцати лет провел он в странствиях по Индии и Тибету, беседовал со множеством гуру, но и те не знали, почему существует не́что, а не ничто́. Нашему философу не оставалось ничего другого, как отправиться в Китай и в Японию и провести еще долгих двенадцать лет в попытках постичь мудрость Дао и дзен-буддизма. Наконец, после долгих и безуспешных поисков ему удалось набрести на одного дряхлого старца, возлежавшего на смертном одре, который перед самой кончиной сказал:

— Сын мой! Мне неведомо, почему существует нечто, а не ничто. Единственное место на свете, где знают ответ на твой несомненно важный вопрос, — остров Ваал. Один из высших жрецов храма Ваала посвящен в эту великую тайну.

— А где находится остров Ваал? — спросил, сгорая от нетерпения, философ.

— Увы, — последовал ответ, — этого я тоже не знаю. Более того, за всю свою долгую жизнь я не встретил ни одного человека, который бы побывал на острове Ваал. Мне известно лишь то место в океане, где находится целый архипелаг островов, не отмеченных даже и в самой подробной лоции. На одном из этих островов хранится вычерченная кем-то от руки карта, на которой проложен курс к острову Ваал. К сожалению, не могу тебе сказать, на каком острове хранится карта. Знаю только, что называется тот остров Майя. Еще мне доподлинно известно, что архипелаг тот населен рыцарями, говорящими только правду, и лжецами, которые всегда лгут. Задавая вопрос жителям любого острова из числа входящих в архипелаг, следует держать ухо востро!

Таков был наиболее существенный результат более чем двадцатичетырехлетних непрестанных поисков! Но наш философ не впал в уныние. Пользуясь наставлениями мудрого старца, он добрался до архипелага, затерянного в бескрайних просторах океана, и принялся систематически обследовать остров за островом в надежде, что ему удастся найти остров Майя.

142. Первый остров . . . .

На первом острове нашему философу повстречались два коренных жителя A и B, заявивших:

A: B — рыцарь, и этот остров называется Майя.

B: A — лжец, и этот остров называется Майя.

Можно ли утверждать, что первый остров действительно называется Майя?

143. Второй остров. . . . .

Два коренных жителя A и B этого острова заявили:

A: Мы оба лжецы, и этот остров называется Майя.

B: Что правда, то правда.

Можно ли утверждать, что второй остров действительно называется Майя?

144. Третий остров. . . . .

Коренные жители А и В этого острова заявили:

А: По крайней мере один из нас лжец, и этот остров называется Майя.

В: Совершенно верно!

Можно ли утверждать, что третий остров действительно называется Майя?

145. Четвертый остров. . . . .

Два коренных жителя А и В этого острова заявили:

А: Мы оба лжецы, и этот остров называется Майя.

В: По крайней мере один из нас лжец, и этот остров не Майя.

Можно ли утверждать, что четвертый остров действительно называется Майя?

146. Пятый остров. . . . .

Коренные жители А и В этого острова заявили:

А: Мы оба лжецы, и этот остров называется Майя.

В: По крайней мере один из нас рыцарь, и этот остров не Майя.

Можно ли утверждать, что пятый остров действительно называется Майя?

147. Шестой остров. . . . .

Два обитателя А и В этого острова заявили:

А: Либо В — рыцарь, либо этот остров называется Майя.

В: Либо А — лжец, либо этот остров называется Майя.

Можно ли утверждать, что этот остров действительно называется Майя?

148. Как добраться до острова Ваал? . . . .

Долго ли, коротко ли, но наш философ сумел-таки разыскать остров Майя. Впрочем, радость его была преждевременной: найти карту с прокладкой курса на остров Ваал оказалось не так просто, как он ожидал. Пришлось обратиться к верховному жрецу острова

Майя. Выслушав философа, жрец ввел его в обширную комнату, посреди которой на столе были разложены три карты X, Y и Z. Жрец пояснил, что только одна карта позволяет найти остров Ваал, на двух остальных проложенные курсы ведут к островам демонов и что всякий, кто ступит на остров демонов, тотчас же обращается в ничто. Философу предстояло выбрать одну из трех карт.

В комнате, куда жрец ввел философа, находилось пятеро колдунов: A, B, C, D и E. Каждый из колдунов был либо рыцарем, либо лжецом, и каждый дал философу совет.

A: X — правильная карта.

B: Y — правильная карта.

C: Неверно, что A и B — оба лжецы.

D: Либо A — лжец, либо B — рыцарь.

E: Либо я лжец, либо C и D однотипны (либо оба рыцари, либо оба лжецы).

Какая из карт X, Y и Z правильная?

Б. ОСТРОВ ВААЛ

Из всех островов рыцарей и лжецов остров Ваал — самый необычайный и достопримечательный. Он населен людьми и обезьянами. Обезьяны говорят человеческим языком, причем весьма бегло. Каждая обезьяна, как и каждый человек, — либо рыцарь, либо лжец.

В самом центре острова стоит капище Ваала — один из самых замечательных храмов мира. Все высшие жрецы обладают глубочайшими познаниями в метафизике, а во Внутреннем святилище храма один из жрецов, по слухам, знает ответ на глубочайшую тайну Вселенной: почему существует нечто, а не ничто.

Стремящимся приобщиться к Священному Знанию разрешается войти во Внутреннее святилище, если они сумеют с честью выдержать три тура испытаний. Я сумел украдкой выведать все тайны жрецов: чтобы проникнуть в храм Ваала, мне пришлось загримироваться под обезьяну! Должен сказать, что я рисковал не на шутку. Трудно даже представить себе, какому наказанию подвергли бы служители Ваала пришельца, дерзнувшего обманом проникнуть в святая святых храма. Они не просто обратили бы злоумышленника в ничто, а изменили бы законы Вселенной так, чтобы он никогда не мог бы возродиться и в будущем!

Но вернемся к нашему повествованию. Выбрав правильную карту, наш философ благополучно добрался до острова Ваал и согласился подвергнуть себя испытаниям. Первый тур испытаний проводился в течение трех дней в огромном помещении, известном под названием Наружного святилища. В центре святилища на золотом троне восседала закутанная в драгоценное покрывало фигура: то ли человек, то ли обезьяна, то ли рыцарь, то ли лжец. Таинственная фигура изрекала одно-единственное заклинание, по которому философ должен был определить, кто сидел на троне (человек или обезьяна) и кем он был (рыцарем или лжецом).

149. Первое испытание. . . . .

Сидящий на троне произнес заклинание: «Я либо лжец, либо обезьяна».

Кто он?

150. Второе испытание. . . . .

Сидящий на троне произнес заклинание: «Я лжец и обезьяна».

Кто он?

151. Третье испытание. . . . .

Сидящий на троне произнес заклинание: «Не верно, что я обезьяна и рыцарь».

Кто он?

Философ успешно прошел все три испытания первого тура и был допущен ко второму туру. На этот раз испытания проводились также в течение трех дней в другом помещении, не уступающем по размерам первому и известном под названием Среднего святилища. В центре святилища на платиновых тронах восседали две фигуры, закутанные в драгоценные покрывала. Сидевшие на троне произносили по одному заклинанию, а философ должен был установить, кто изрек каждое заклинание: человек или обезьяна, рыцарь или лжец. Для удобства мы обозначим сидевших на троне А и В.

152. Четвертое испытание. . . . .

А: По крайней мере один из нас обезьяна.
В: По крайней мере один из нас лжец.
Кто такие А и В?

153. Пятое испытание. . . . .

А: Мы оба обезьяны.
В: Мы оба лжецы.
Кто такие А и В?

154. Шестое испытание. . . . .

А: В — лжец и обезьяна. Я человек.
В: А — рыцарь.
Кто такие А и В?

Наш философ успешно выдержал все три испытания второго тура и был допущен к третьему туру, состоявшему из одного-единственного, хотя и сложного испытания.

155. . . . .

Из Среднего святилища можно выйти через четыре двери X, Y, Z и W. По крайней мере одна из них ведет во Внутреннее святилище. Того, кто выходит через другую дверь, пожирает огнедышащий дракон.

В Среднем святилище во время испытания находятся восемь жрецов А, В, С, D, Е, F, G и Н, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Нашему философу жрецы сообщили следующее.

А: X — дверь, ведущая во Внутреннее святилище.

В: По крайней мере одна из дверей Y и Z ведет во Внутреннее святилище.

С: А и В — рыцари.

D: Обе двери X и Y ведут во Внутреннее святилище.

Е: Обе двери X и Y ведут во Внутреннее святилище.

F: Либо D, либо E — рыцарь.
G: Если C — рыцарь, то F — рыцарь.
H: Если G и я сам — рыцари, то A — рыцарь.
Какую дверь следует выбрать философу?

156. Во Внутреннем святилище! . . . .

Наш философ сумел выбрать нужную дверь и благополучно очутился во Внутреннем святилище. Там на двух тронах, усыпанных бриллиантами, восседали два величайших жреца (более великих жрецов не было в целом мире!). Возможно, что одному из них был известен ответ на Вопрос Вопросов: «Почему существует нечто, а не ничто?»

Нужно ли говорить, что каждый из двух великих жрецов был либо рыцарем, либо лжецом (были ли жрецы людьми или обезьянами — не существенно). Поэтому мы не можем сказать заранее о каждом из жрецов, рыцарь он или лжец и знает ли он ответ на Вопрос Вопросов. При виде философа жрецы произнесли следующие заклинания.

Первый жрец. Я лжец и не знаю, почему существует нечто, а не ничто.

Второй жрец. Я рыцарь и не знаю, почему существует нечто, а не ничто.

Знал ли в действительности кто-нибудь из жрецов, почему существует нечто, а не ничто?

157. Есть ответ! . . . .

Сейчас вы наконец узнаете правильный ответ на Вопрос Вопросов.

Одному из двух жрецов был известен правильный ответ на Вопрос Вопросов, и, когда философ спросил у него: «Почему существует нечто, а не ничто?» — он ответил так: «Существует нечто, а не ничто».

Какое поразительное заключение следует из такого ответа?

РЕШЕНИЯ

142. Предположим, что B — рыцарь. Тогда первый остров называется Майя и, кроме того, A — лжец. Следовательно, высказанное A утверждение ложно, и поэтому не верно, что B — рыцарь и первый остров называется Майя. Но по предположению B — рыцарь, значит, первая часть утверждения истинна. Отсюда мы заключаем, что вторая часть утверждения ложна. Следовательно, первый остров не Майя. Итак, если В — рыцарь, то первый остров должен и быть, и не быть островом Майя. Полученное противоречие доказывает, что В — лжец.

Так как В лжец, то А также лжец (поскольку А утверждает, что В — рыцарь). Высказанное В утверждение, как всякое утверждение лжеца, ложно, поэтому не верно, что А — лжец и первый остров называется Майя. Но первая часть утверждения истинна (так как А — лжец). Следовательно, вторая часть утверждения должна быть ложной, и первый остров — не остров Майя.

143. Ясно, что А — лжец (высказанное А утверждение не может принадлежать рыцарю). Так как В согласен с А, то В также лжец. Поскольку высказанное А утверждение ложно, то не верно, что: 1) А и В — оба лжецы и что 2) второй остров называется Майя. Но высказывание (1) истинно, поэтому высказывание (2) должно быть ложно. Итак, второй остров — не остров Майя.

144. Так как В согласен с А, то А и В либо оба рыцари, либо оба лжецы. Если бы они оба были рыцарями, то было бы не верно, что по крайней мере один из них лжец. Но тогда высказанное А утверждение было бы ложно, что невозможно, так как А — рыцарь. Следовательно, А и В — оба лжецы. Это означает, что высказанное А утверждение ложно. Но первая часть его должна быть истинной (если А и В — оба лжецы, то по крайней мере один из них лжец). Значит, вторая часть утверждения должна быть ложной. Следовательно, третий остров — не остров Майя.

145. Островитянин А — заведомый лжец, так как высказанное им утверждение не может принадлежать рыцарю. Если В — рыцарь, то из высказанного им утверждения следует, что четвертый остров — не остров Майя. Если же В — лжец, то первая часть высказанного А утверждения истинна. Но все утверждение А ложно (так как А — лжец), поэтому должна быть ложной его вторая часть. Следовательно, и в этом случае четвертый остров — не остров Майя.

146. Как и в предыдущей задаче, A должен быть лжецом, а B может быть либо рыцарем, либо лжецом, но и в том и в другом случае пятый остров — не остров Майя.

147. Если бы A был лжецом, то обе альтернативы высказанной им дизъюнкции были бы ложными, вследствие чего B был бы лжецом. В свою очередь это означало бы, что обе альтернативы высказанной B дизъюнкции ложны, и A должен бы быть рыцарем. Полученное противоречие показывает, что A — рыцарь. Следовательно, его утверждение истинно, и либо B — рыцарь, либо шестой остров называется Майя. Если вторая альтернатива истинна, то шестой остров, разумеется, остров Майя. Предположим, что истинна первая альтернатива, то есть что B — рыцарь. Тогда его утверждение истинно: «Либо A — лжец, либо этот остров называется Майя». Но A не лжец, поэтому первая альтернатива ложна. Следовательно, вторая альтернатива истинна, и шестой остров — остров Майя.

Вкратце часть наших рассуждений сводится к следующему. Мы установили, что либо B — рыцарь, либо шестой остров — остров Майя. Но, кроме того, нам известно, что если B — рыцарь, то шестой остров — остров Майя. Следовательно, шестой остров — остров Майя.

Итак, остров Майя после долгих поисков найден!

148. Если бы E был лжецом, то было бы верно, что либо E — лжец, либо C и D однотипны. Это означало бы, что лжец высказал истинное утверждение. Поскольку это невозможно, то E — рыцарь. Значит, его утверждение истинно, поэтому либо он лжец, либо C и D однотипны, а так как он не лжец, то C и D однотипны.

Предположим, что C был бы лжецом. Тогда A и B оба были бы лжецами. Высказанное D утверждение было бы истинным, поэтому D был бы рыцарем. Таким образом, C был бы лжецом, а D — рыцарем, что противоречит их однотипности. Следовательно, C должен быть рыцарем. Значит, D также рыцарь. Так как C — рыцарь, то A и B оба не могут быть лжецами, из чего мы заключаем, что либо X, либо Y — правильная карта. Предположим, что X — правильная карта. Тогда A — рыцарь, а B — лжец вопреки истинному утверждению, высказанному D, о том, что либо A — лжец, либо B — рыцарь. Следовательно, X не может быть правильной картой. Значит, Y — правильная карта.

149. Если бы сидящий на троне был лжецом, то он был бы либо лжецом, либо обезьяной. Следовательно, его высказывание было бы истинным вопреки тому, что он лжец. Значит, сидящий на троне — рыцарь, его высказывание истинно, и он либо лжец, либо обезьяна. Так как он не лжец, то он обезьяна. Итак, сидящий на троне — обезьяна и рыцарь.

150. Ясно, что сидящий на троне не рыцарь. Значит, он лжец, и его высказывание ложно. Следовательно, он либо рыцарь, либо человек. Так как он не рыцарь, то он человек. Итак, сидящий на троне — человек и лжец.

151. Предположим, что сидящий на троне был бы лжецом. Тогда было бы верно, что он не обезьяна и не рыцарь одновременно. Следовательно, его высказывание было бы истинным, и мы получили бы лжеца, способного высказывать истинные утверждения. Полученное противоречие показывает, что сидящий на троне — рыцарь. Следовательно, верно, что он не обезьяна и не рыцарь. Если бы он был обезьяной, то он был бы обезьяной и рыцарем. Значит, он человек. Итак, сидящий на троне — человек и рыцарь.

152. B не может быть лжецом, так как в противном случае его утверждение было бы истинным. Значит, B — рыцарь, поэтому его утверждение истинно, и A должен быть лжецом. Тогда утверждение A ложно, и A и B — оба люди. Следовательно, A — человек и лжец, а B — человек и рыцарь

153. B должен быть лжецом, так как рыцарь не мог бы высказать утверждение B. Следовательно, A и B оба не могут быть лжецами, поэтому A — рыцарь. Значит, его утверждение истинно, и A и B — оба обезьяны. Итак, A — обезьяна и рыцарь, B — обезьяна и лжец.

154. Предположим, что B был бы рыцарем. Тогда A также был бы рыцарем (так как B утверждает, что

А — рыцарь), и, следовательно, В должен бы быть лжецом и обезьяной. Полученное противоречие показывает, что В — лжец. Из его утверждения мы заключаем, что А также лжец. Так как первое утверждение, высказанное А, ложно, то не верно, что В — лжец и обезьяна. Но В — лжец. Следовательно, не верно, что В — обезьяна, поэтому В — человек и лжец. Из второго утверждения, высказанного А, следует, что А — обезьяна. Итак, А — обезьяна и лжец.

155. Прежде всего докажем, что G — рыцарь. Для этого достаточно доказать, что его утверждение истинно, то есть что если С — рыцарь, то F также рыцарь. Мы докажем это тем, что выведем из посылки «С — рыцарь» заключение «F также рыцарь».

Итак, предположим, что С — рыцарь. Тогда А и В — оба рыцари. Следовательно, X — дверь, ведущая во Внутреннее святилище, и либо дверь Y, либо дверь Z ведет во Внутреннее святилище.

Случай 1: дверь Y ведет во Внутреннее святилище. Тогда обе двери X и Y ведут во Внутреннее святилище. В этом случае D — рыцарь.

Случай 2: дверь Z ведет во Внутреннее святилище. Тогда обе двери X и Z ведут во Внутреннее святилище. В этом случае Е — рыцарь.

Итак, либо D, либо Е должен быть рыцарем. Следовательно, высказанное F утверждение истинно, поэтому F — рыцарь.

Итак, из посылки «С — рыцарь» мы вывели заключение «F — рыцарь». Следовательно, верно, что если С — рыцарь, то F — рыцарь. Именно это и утверждал G. Значит, G — рыцарь.

Докажем теперь, что высказанное Н утверждение истинно. По словам Н, если G и Н — оба рыцари, то А — рыцарь. Предположим, что Н — рыцарь. Тогда G и Н — оба рыцари. Кроме того, верно, что если G и Н — оба рыцари, то А — рыцарь (именно так утверждал Н, а он по предположению рыцарь). Значит, если Н — рыцарь, то 1) G и Н — рыцари; 2) если G и Н — рыцари, то А — рыцарь. Из (1) и (2) следует, что А — рыцарь. Таким образом, если Н — рыцарь, то А — рыцарь. Именно это утверждал Н, поэтому Н должен быть рыцарем. Его утверждение истинно, и так как G и Н — рыцари, то А — рыцарь.

Итак, мы установили, что А — рыцарь. Следовательно, дверь X действительно ведет во Внутреннее святилище, и нашему философу надлежит выбрать дверь X.

156. Первый жрец не может быть рыцарем, он должен быть лжецом. Поскольку его высказывание ложно, то не верно, что он лжец и не знает ответа на Вопрос Вопросов. Но он лжец, поэтому первая часть высказанной им конъюнкции истинна. Значит, вторая часть конъюнкции должна быть ложной, поэтому первый жрец знает ответ. Таким образом, первый жрец — лжец и знает ответ на Вопрос Вопросов.

Относительно второго жреца нельзя сказать ничего определенного. Он либо рыцарь, не знающий ответа на Вопрос Вопросов, либо лжец. Во всяком случае (и это имеет решающее значение для решения следующей задачи), если он знает ответ на Вопрос Вопросов, то он лжец.

157. Из решения предыдущей задачи нам известно, что первый жрец знает ответ на Вопрос Вопросов и лжет, а второй жрец, если он знает ответ на Вопрос Вопросов, — лжец. По условиям задачи тот из жрецов, кто изрек: «Существует нечто, а не ничто», знал правильный ответ. Следовательно, тот, кто дал такой ответ, лжец, и высказанное им утверждение ложно. Ничто не существует!

Итак, в результате самоотверженного поиска ответа на Вопрос Вопросов, которому наш философ посвятил всю свою жизнь, выяснилось неожиданно, что «ничто не существует». Должно быть, в этот ответ вкралась какая-то ошибка: если из ничего ничего не возникает, то откуда взялся жрец, высказавший подобное утверждение?

Более правильное заключение, к которому можно прийти на основании полученного ответа, состоит в том, что остров Ваал, описанный в нашей книге, не может существовать. Считаю своим долгом обратить внимание читателя на одну тонкость. Я отнюдь не утверждаю, что остров Ваал *не существует* (это было более или менее ясно с самого начала). Я высказываю более сильное логически неопровержимое утверждение: остров Ваал *не может существовать*. Действительно, если бы остров Ваал не существовал и история, которую я вам поведал, была бы истинной, то, как было показано, отсюда следовало бы, что ничто не существует. Следовательно, не существовало бы и острова Ваал, и мы пришли бы к противоречию. Значит, остров Ваал не может существовать.

Самое любопытное во всей истории — это то, что вплоть до последней задачи (№ 157) все, о чем я рассказывал вам, сколь бы неправдоподобно оно ни звучало, было логически вполне допустимо. Но стоило мне сообщить вам условия последней задачи, как соломинка переломила спину верблюду!

11. Остров зомби

А. «БАЛ» и «ДА»

На небольшом островке неподалеку от Таити колдуны вуду напустили порчу на половину населения и превратили ее в зомби. Нужно сказать, что зомби на этом острове ведут себя несколько необычно. Они ничуть не похожи на безмолвные тени или на духов смерти. Зомби двигаются и разговаривают так же, как и люди. Единственное, чем они отличаются от людей, — необыкновенным пристрастием ко лжи. Зомби всегда лгут, в то время как люди, обитающие на острове, говорят только правду.

Дочитав до этого места, вы, должно быть, подумали: «К чему столько слов? Не проще ли сразу сказать, что перед нами добрый старый остров рыцарей и лжецов?» Не торопитесь с выводами, читатель: на острове зомби все обстоит гораздо сложнее! Дело в том, что хотя все его жители в совершенстве владеют английским языком, древнее табу запрещает им употреблять иноязычные слова. На любой вопрос, требующий ответа либо «да», либо «нет», жители острова отвечают либо «бал», либо «да» (на их родном языке эти слова соответствуют более привычным для нас «да» и «нет»). Беда лишь в том, что мы не знаем, какое из слов «бал» и «да» означает «нет» и какое — «да».

158. . . . .

Однажды я встретил коренного жителя острова и спросил у него: «Означает ли «бал» по-нашему «да»? Тот ответил: «бал».

а) Можно ли из нашего разговора заключить, что означает слово «бал»?

б) Можно ли из нашего разговора заключить, кто мой собеседник: зомби или человек?

159. . . . .

Представьте себе, что, гуляя по острову, вы встретили одного из туземцев. Можно ли с помощью одного вопроса выяснить, что означает слово «бал»? (Напомним, что ваш собеседник на все ваши вопросы будет отвечать либо «бал», либо «да», причем слово «да» на местном наречии лишь в силу случайного совпадения созвучно утвердительному ответу «да».)

160. . . . .

Предположим, что вас не интересует, чему именно соответствует слово «бал» (отрицанию или утвердительному ответу), но вы хотите знать, с кем вы разговариваете: с зомби или с человеком. Можно ли выяснить это, задав собеседнику лишь один вопрос?

161. Как заставить колдуна сказать «бал». . .

Вы находитесь на том же острове, что и в предыдущих задачах, и хотите жениться на дочери царька местного племени. Царец намерен отдать свою дочь замуж только за человека, отмеченного печатью разума, поэтому вам предстоит выдержать испытание, состоящее в следующем.

Вы должны задать колдуну какой-нибудь вопрос на свое усмотрение. Если колдун ответит «бал», то вы получите в жены дочь царька. Если же на ваш вопрос колдун ответит «да», вам придется искать себе невесту в другом месте.

Кто именно колдун (человек или зомби), неизвестно. Какой вопрос следует задать колдуну, чтобы независимо от того, означает ли «бал» нет или да, колдун ответил «бал»?

162. . . . .

Эта задача потруднее предыдущих. Разнесся слух, что на острове зарыт клад. Вы прибываете на остров и, прежде чем приступать к поискам, хотите выяснить, действительно ли кем-то был зарыт клад или нет. Все туземцы великолепно осведомлены относительно того, существует ли клад в действительности. Можно ли, задав любому туземцу лишь один вопрос, выяснить, стоит ли заниматься поисками клада? Напомним, что туземец может ответить вам либо «бал», либо «да», и вам необходимо по его ответу прийти к заключению независимо от того, что именно означает слово «бал» (или «да») на местном наречии.

Б. НА СЦЕНЕ СНОВА ПОЯВЛЯЕТСЯ ИНСПЕКТОР КРЭГ

163. Суд. . . . .

На языке племени, населяющего остров, расположенный неподалеку от острова зомби, слова «бал» и «да» означают «да» и «нет», но одинаково звучащие слова не обязательно должны совпадать по смыслу. Одни жители острова отвечают на вопросы «бал» и «да», другие, нарушая древнее табу, предпочитают говорить по-английски (и отвечают «да» и «нет»).

По некоторым не выясненным до конца причинам все члены любого семейства на этом острове однотипны. В частности, любые два брата либо оба зомби, либо оба люди.

Против одного из коренных жителей острова выдвинуто обвинение в измене родине. Учитывая особую важность дела, было принято решение вызвать из Лондона инспектора Крэга. Три основных свидетеля A, B и C были коренными жителями острова. Следующий отрывок взят из стенограммы судебного заседания. Допрос свидетелей ведет инспектор Крэг.

Вопрос (свидетелю А). Подсудимый не виновен?

Ответ (свидетеля А). Бал.

Вопрос (свидетелю В). Что означает «бал»?

Ответ (свидетеля В). «Бал» означает «да».

Вопрос (свидетелю С). Свидетели А и В — братья?

Ответ (свидетеля С). Нет.

Второй вопрос (свидетелю С). Подсудимый не виновен?

Ответ (свидетеля С). Да.

Виновен или не виновен подсудимый?

164. . . . .

Можно ли в предыдущей задаче определить, однотипны ли свидетели А и В?

165. Полузомби. . . . .

После окончания суда инспектор Крэг посетил соседний остров. Одну часть коренного населения этого острова составляли обыкновенные люди, другую — зомби, а третью — так называемые полузомби. К числу последних относились те жители острова, на которых колдуны напустили порчу, но лишь с частичным успехом: полузомби иногда лгали, иногда говорили правду. На языке островитян наши привычные слова «да» и «нет», как и на языках племен, населявших соседние острова, звучали, как «бал» и «да» (но означало ли слово «бал» согласие или отрицание, было неизвестно). Отвечая на вопросы, туземцы иногда говорили «да» и «нет», а иногда переходили на родной язык и говорили «бал» и «да».

Инспектор Крэг задал одному туземцу следующий вопрос: «Если кто-нибудь спросит вас, означает ли «бал» — да и вы вздумаете отвечать на своем родном языке, то ответите ли вы «бал»?

Туземец ответил, но инспектор Крэг не записал его ответ и не отметил, на каком языке он был дан. В его записной книжке осталась лишь пометка о том, что из полученного ответа Крэг сумел заключить, кем был туземец: зомби, полузомби или человеком.

Что ответил туземец инспектору Крэгу и на каком языке: на английском или на своем родном?

166. Что за ответ? . . . .

В другой раз на том же острове инспектор Крэг повстречал другого туземца и спросил у него: «Если кто-нибудь спросит вас, верно ли, что дважды два — четыре, и вы вздумаете отвечать на своем родном языке, то ответите ли вы «бал»?

И на этот раз инспектор Крэг не записал, что ответил туземец («бал», «да», «нет» или «да»). В его записной книжке помечено лишь, что из полученного ответа инспектор Крэг смог заключить, с кем он разговаривал: с зомби, полузомби или с обыкновенным человеком.

Что ответил туземец на вопрос инспектора Крэга?

РЕШЕНИЯ

158. Из нашего разговора невозможно заключить, что означает «бал», но можно с уверенностью сказать, что мой собеседник должен быть человеком.

Предположим, что «бал» означает «да». Тогда «бал» — правдивый ответ на вопрос, означает ли «бал» по-нашему «да». Следовательно, в этом случае мой собеседник должен быть человеком.

Предположим теперь, что «бал» означает «нет». Тогда наше обычное «нет» — правдивый ответ на вопрос, означает ли «бал» по-нашему «да». Следовательно, «бал» — правдивый ответ на языке туземцев на заданный мною вопрос. Значит, и в этом случае мой собеседник должен быть человеком. Итак, независимо от того, означает ли «бал» по-нашему «да» или «нет», мой собеседник — человек.

159. Достаточно спросить у туземца, человек ли он. Поскольку все коренные жители острова считают для себя за честь называться людьми, то повстречавшийся вам туземец, будь он человеком или зомби, на ваш вопрос ответит утвердительно. Если он ответит «бал», то «бал» означает «да». Если же он ответит «да», то «да» означает «да» (а «бал» — «нет»).

160. Достаточно задать первому встречному такой же вопрос, как в задаче 158, то есть спросить: «Означает ли «бал» по-нашему «да»?» Если «бал» действительно означает «да», то правильный ответ на ваш вопрос должен гласить «бал». Поэтому человек ответит «бал», а зомби ответит «да». Если же «бал» не означает «да», то и в этом случае правильный ответ на ваш вопрос должен гласить «бал». Следовательно, и в этом случае человек ответит вам: «бал», а зомби скажет «да».

161. Заставить колдуна ответить «бал» можно несколькими способами. Например, вы можете спросить у колдуна, верно ли, что «бал» — правдивый ответ на вопрос, является ли колдун человеком. Можно доказать, что колдуну не останется ничего другого, как ответить «бал». Чтобы несколько упростить последующие рассуждения, обозначим через *H* вопрос «Вы человек?». Позволю себе напомнить, что вы не спрашиваете у колдуна, правилен или неправилен вопрос *H*. Вас интересует нечто другое: правилен ли ответ «бал» на вопрос *H*.

Случай 1: колдун — человек. Если «бал» означает «да», то «бал» — правильный ответ на *H*. Так как колдун — человек, то на ваш вопрос он даст правдивый ответ, то есть скажет «бал». Если же «бал» означает «нет», то «бал» — неправильный ответ на *H*. Следовательно, колдун, правдиво отвечая на ваш вопрос, скажет «бал» (что в данном случае будет означать «нет»). Таким образом, на ваш вопрос человек всегда ответит «бал» независимо от того, означает ли «бал» на туземном наречии «да» или «нет».

Случай 2: колдун — зомби. Если «бал» означает «да», то «бал» — неправильный ответ на *H*. Поскольку колдун — зомби, то он солжет и скажет, что «бал» — правильный ответ на *H*. Следовательно, на ваш вопрос колдун ответит «бал» (что означает «да, ответ правильный», то есть несомненную ложь). Если же «бал» означает «нет», то «бал» — правильный ответ на *H*. Следовательно, колдун солжет и скажет, что «бал» — неправильный ответ на *H*, то есть скажет «бал» (что в данном случае будет означать «нет»). Таким образом, на ваш вопрос зомби ответит «бал» независимо от того, означает ли «бал» на туземном наречии «да» или «нет».

Существуют и другие вопросы, позволяющие решить задачу. Приведем лишь два из них.

а) Верно ли, что либо вы человек и «бал» означает «да», либо вы зомби и «бал» означает «нет»?

б) Верно ли, что вы человек в том и только в том случае, если «бал» означает «да»?

162. Можно, причем не одним, а многими способами. Например, можно спросить у первого встречного: «Если кто-нибудь спросит у вас, есть ли на острове клад, ответите ли вы «бал»? Как будет показано, если на острове есть клад, то туземец ответит «бал». Если же клада на острове нет, то туземец ответит «да» (оба ответа не зависят как от того, будет ли встретившийся вам островитянин человеком или зомби, так и от того, что именно означают в действительности слова «бал» и «да»).

Обозначим для кратности через G вопрос «Есть ли клад на этом острове?».

Случай 1: туземец — человек, и «бал» означает «да». Предположим, что на острове есть клад. Тогда на вопрос G туземец ответил бы «бал». Будучи человеком, повстречавшийся вам местный житель правдиво сказал бы вам, что он ответил бы «бал». Поэтому на заданный вами вопрос туземец ответит «бал». Предположим теперь, что клада на острове нет. Тогда на вопрос G туземец не ответил бы «бал» и, будучи человеком, сообщил бы вам, что он не ответил бы. Следовательно, на ваш вопрос туземец ответит «да».

Случай 2: туземец — зомби, и «бал» означает «да». Предположим, что на острове есть клад. Тогда «бал» — правдивый ответ на вопрос G, поэтому туземец, будучи зомби, не ответил бы на G словом «бал». В ответ на ваш вопрос он солгал бы, сказав, что ответил бы на G «бал». Таким образом, туземец ответил бы вам «бал». Предположим теперь, что никакого клада на острове нет. Тогда «бал» — неправильный ответ на вопрос G, поэтому зомби на вопрос G ответил бы «бал». Но вам он солгал бы и сказал, что на вопрос G он бы не ответил «бал». Следовательно, в этом случае туземец ответил бы на ваш вопрос «да».

Случай 3: туземец — человек, и «бал» означает «нет». Предположим, что на острове есть клад. Тогда «бал» — неправильный ответ на вопрос G, поэтому человек в ответ на G не сказал бы «бал». Следовательно, в ответ на ваш вопрос туземец правдиво сообщил бы, что на вопрос G он бы не ответил «бал». Следовательно, на ваш вопрос туземец ответил бы «бал».

Если же клада на острове нет, то «бал» — правильный ответ на вопрос G. Поэтому человек ответил бы на вопрос G «бал». Значит, на ваш вопрос человек ответил бы «да» (что означает «да, я ответил бы «бал» на вопрос G»).

Случай 4: туземец — зомби, и «бал» означает «нет». Предположим, что на острове есть клад. Тогда на вопрос G туземец ответил бы «бал», но вам бы солгал, сказав, что он не ответил бы «бал». Следовательно, на ваш вопрос туземец ответил бы «бал». Предположим теперь, что на острове нет никакого клада. Тогда на вопрос G туземец ответил бы «да» и, следовательно, не ответил бы «бал». Вам же туземец солгал бы, сказав, что он ответил бы на G «бал». Значит, на ваш вопрос туземец ответил бы «да».

Итак, если на острове есть клад, то в каждом из четырех случаев вы услышите в ответ на свой вопрос «бал». Если же никакого клада на острове нет, то на ваш вопрос туземец ответит «да».

Приведенный нами вопрос — не единственный. Ту же задачу можно решить, задав первому встречному туземцу и другой вопрос, например: «Верно ли, что вы человек в том и только в том случае, если «бал» — правдивый ответ на вопрос, есть ли на острове клад?»

163. Прежде всего я докажу, что свидетель С не может быть зомби. Предположим, что С — зомби. Тогда А и В должны быть братьями. Следовательно, они либо оба зомби, либо оба люди. Предположим, что А и В — люди. Тогда «бал» означает «да», поэтому А на вопрос, не виновен ли подсудимый, дал утвердительный ответ. Следовательно, подсудимый не виновен. Предположим теперь, что А и В — зомби. Тогда «бал» означает «нет», а поскольку А — зомби и на вопрос, не виновен ли подсудимый, отвечает отрицательно, то подсудимый не виновен. Итак, если С — зомби, то подсудимый не виновен (независимо от того, кто такие А и В — зомби или люди). С другой стороны, если С — зомби, то подсудимый должен быть виновен, так как С утверждает, что подсудимый не виновен, и мы приходим к противоречию. Следовательно, С не может быть зомби, и поэтому С — человек. А поскольку С утверждает, что подсудимый не виновен, то тот действительно не виновен.

164. Так как C — человек, то A и B не братья. Разумеется, это не обязательно означает, что A и B разнотипны: они вполне могут быть однотипными, не будучи братьями. Более того, они *должны* быть однотипными. Действительно, если бы они были разнотипными, то подсудимый непременно оказался бы виновным. В этом читатель без труда может убедиться сам.

165. Единственный из четырех возможных ответов («бал», «да», «да» и «нет»), который не могли бы дать ни человек, ни зомби, — это «нет». Действительно, если бы туземец был либо человеком, либо зомби и ответил бы инспектору Крэгу по-английски, то он должен был бы ответить «да». Если бы он ответил на родном языке, то, если «бал» означает «да», сказал бы «бал» (независимо от того, кто он — человек или зомби), а если «бал» означает «нет», сказал бы «да». (Доказательство этих утверждений я предоставлю читателю.) Следовательно, получив любой ответ, кроме «нет», инспектор Крэг не мог бы определить, кем был спрошенный им туземец. А поскольку инспектор сумел установить, кем был туземец, то полученный им ответ гласил «нет», и туземец был полузомби.

166. И в этой задаче, так же как и в предыдущей, туземец должен быть полузомби, а единственный ответ, по которому Крэг мог установить, кто его собеседник, должен быть «да» (на туземном наречии). Если бы туземец ответил по-английски, то Крэг не мог бы установить, с кем он разговаривает, так как и человек, и зомби на его вопрос ответили бы «да», если «бал» означает «да», и «нет», если «бал» означает «нет». Туземец, ответивший «бал», мог бы оказаться либо человеком, либо зомби, либо полузомби.

12. Жив ли Дракула?

А. В ТРАНСИЛЬВАНИИ

Несмотря на свидетельства очевидцев, подкрепленные ссылками на литературные источники, у меня были веские основания сомневаться в том, что с графом

Дракулой Задунайским удалось разделаться, когда в могилу этого упыря забили осиновый кол. Я решил отправиться в Трансильванию и самостоятельно докопаться до истины. Отправляясь в дальние края, я ставил перед собой следующие три задачи: 1) выяснить, жив ли граф Дракула; 2) если его нет в живых, взглянуть на его бренные останки; 3) если он жив, то встретиться с ним.

Прибыв в Трансильванию, я вскоре обнаружил, что около половины ее населения составляют люди, а другую половину — упыри. Отличить упыря от человека по внешнему виду невозможно, но люди (по крайней мере в Трансильвании) всегда говорят правду, а упыри всегда лгут. Положение необычайно усложняется еще и тем, что половина обитателей Трансильвании лишились рассудка и придерживается превратных представлений о действительности: все истинные утверждения безумцы считают ложными, а все ложные утверждения — истинными. Другая половина обитателей находится в здравом уме и трезво судит о том, что истинно и что ложно. Таким образом, жители Трансильвании подразделяются на четыре типа: 1) люди в здравом уме; 2) люди, лишившиеся рассудка; 3) упыри в здравом уме; 4) упыри, лишившиеся рассудка. Человек в здравом уме изрекает только истины. Человек, лишившийся рассудка, всегда лжет. Упырь в здравом уме также всегда лжет. Упырь, лишившийся рассудка, изрекает только истины. Например, человек в здравом уме скажет, что дважды два — четыре. Человек, лишившийся рассудка, скажет, что дважды два не равно четырем (поскольку он убежден, что дважды два действительно не равно четырем). Упырь в здравом уме скажет, что дважды два не равно четырем (поскольку он знает, что дважды два равно четырем, и умышленно лжет). Наконец, упырь, лишившийся рассудка, скажет, что дважды два — четыре (поскольку он убежден, что дважды два не равно четырем, и умышленно лжет).

167. . . . .

Однажды мне повстречался трансильванец, который заявил: «Либо я человек, либо я в здравом уме».

Кем он был в действительности?

168. . . . .

Другой трансильванец заявил: «Я не человек в здравом уме».

Кем он был?

169. . . . .

Еще один трансильванец заявил: «Я человек, лишившийся рассудка.»

Однотипен ли он с трансильванцем из предыдущей задачи?

170. . . . .

Однажды я спросил у встречного: «Вы упырь, лишившийся рассудка?» Он ответил (либо «да», либо «нет»), и я узнал, к какому типу он принадлежал.

Кем он был?

171. . . . .

Однажды я встретил трансильванца, который заявил: «Я упырь».

Можно ли на основании этой фразы определить, был ли он человеком или упырем? Можно ли на основании той же фразы установить, в своем ли он уме или лишился рассудка?

172. . . . .

Некий трансильванец заявляет: «Я лишился рассудка».

а) Можно ли на основании этой фразы определить, в здравом ли он уме?

б) Можно ли на основании той же фразы установить, человек он или упырь?

173. Хитроумная задача. . . . .

Утверждение «если Q, то P» называется обратным утверждению «если P, то Q». Существуют два утверждения X и Y, такие, что каждое из них обратно другому, причем:

1) X не следует из Y, а Y — из X;

2) стоит любому жителю Трансильвании высказать любое из утверждений, как из этого следует, что другое утверждение должно быть истинным.

Можете ли вы привести два таких утверждения?

174. . . . .

Пусть X — любое утверждение и некий трансильванец считает, что он считает X истинным. Следует ли отсюда, что X должно быть истинным? Предположим, что наш трансильванец не считает, что он считает X истинным. Следует ли отсюда, что X должно быть ложным?

175. . . . .

Предположим, что некий трансильванец заявляет: «Я считаю X истинным». Следует ли отсюда, что X должно быть истинным, если наш трансильванец — человек? Следует ли отсюда, что должно быть ложно, если наш трансильванец — упырь?

Решение этой задачи устанавливает некий важный общий принцип!

176. . . . .

Однажды мне встретились два трансильванца А и В. Я спросил у А: «В — человек?» А ответил: «Думаю, да». Тогда я спросил у В: «Как вы думаете, А — человек?» Что ответил В? (Предполагается, что В ответил либо «да», либо «нет».)

177. . . . .

Назовем трансильванца надежным, если он либо человек в здравом уме, либо упырь, лишившийся рассудка, и ненадежным, если он либо человек, лишившийся рассудка, либо упырь в здравом уме. Надежные трансильванцы всегда высказывают истинные утверждения, ненадежные высказывают ложные утверждения (либо из-за расстройства ума, либо в силу заблуждения).

Предположим, что вы спрашиваете у трансильванца: «Вы надежны?» Он отвечает вам либо «да», либо «нет». Можно ли из ответа заключить, кто ваш собеседник: рыцарь или не упырь? Можно ли определить, в здравом ли он уме?

178. . . . .

Предположим, что вы задаете трансильванцу другой вопрос: «Вы думаете, что вы надежны?» Он отвечает либо «да», либо «нет». Можно ли из ответа заключить, кто ваш собеседник: упырь или человек? Можно ли установить, в здравом ли он уме?

Б. ЖИВ ЛИ ГРАФ ДРАКУЛА?

179. . . . .

Напомню, что, отправляясь в Трансильванию, я прежде всего хотел выяснить, жив ли граф Дракула Задунайский. С этим вопросом я обратился к первому же встречному трансильванцу. Тот ответил: «Если я человек, то граф Дракула жив».

Можно ли по такому ответу установить, жив ли граф Дракула?

180. . . . .

Другой трансильванец в ответ на такой же вопрос заявил: «Если я в здравом уме, то граф Дракула жив».

Можно ли из такого ответа заключить, жив ли граф Дракула?

181. . . . .

Еще один трансильванец, у которого я спросил, жив ли Дракула, ответил: «Если я человек и в здравом уме, то граф Дракула жив».

Можно ли заключить из такого ответа, жив ли граф Дракула?

182. . . . .

Предположим, что в ответ на мой вопрос некий трансильванец заявил: «Если я либо человек в здравом уме, либо упырь, лишившийся рассудка, то граф Дракула жив».

Можно ли заключить из такого ответа, жив ли граф Дракула?

183. . . . .

Существует ли такое утверждение, при помощи которого трансильванец, не прибегая к другим доводам, мог бы убедить вас в том, что граф Дракула жив и что само утверждение ложно?

184. . . . .

Существует ли такое утверждение, при помощи которого трансильванец, не прибегая к другим доводам, мог бы убедить вас, что граф Дракула жив и что относительно самого утверждения нельзя сказать, истинно оно или ложно?

185. . . . .

Предположим, что некий трансильванец высказал два следующих утверждения:

1) Я в здравом уме.

2) Считаю, что графа Дракулы нет в живых.

Можно ли на основании этих утверждений заключить, жив ли граф Дракула?

186. . . . .

Предположим, что некий трансильванец высказал следующие два утверждения:

1) Я человек.

2) Если я человек, то граф Дракула жив.

Можно ли из этих утверждений заключить, жив ли граф Дракула?

В. КАКОЙ ВОПРОС ЗАДАТЬ?

187. . . . .

Можете ли вы, задав первому встречному трансильванцу лишь один вопрос, узнать, упырь он или человек?

188. . . . .

Можете ли вы, задав первому встречному трансильванцу лишь один вопрос, установить, в здравом ли он уме?

189. . . . .

Какой вопрос следует задать трансильванцу, чтобы заставить его ответить «да» независимо от того, к какому из четырех типов он принадлежит?

190. . . . .

Можете ли вы, задав трансильванцу лишь один вопрос, узнать, жив ли граф Дракула?

Г. В ЗАМКЕ ГРАФА ДРАКУЛЫ

Если бы я мог напрячь все силы своего разума и решить предыдущую задачу, то, несомненно, избавил бы себя от бесчисленных хлопот и множества неприятностей. Но я был так занят, настолько поглощен сложностью классификации трансильванцев, находящихся в здравом уме и утративших разум, изрекающих только истину или отдающих предпочтение лжи, что не мог сосредоточиться на решении задачи. Кроме того, должен признаться, что в обществе трансильванцев, среди которых за безобидной внешностью заведомо встречались упыри, я чувствовал себя не очень уютно. Мог ли я предполагать, что мне предстоят еще более суровые испытания!

Я все еще не знал, жив ли граф Дракула, и надеялся, что сумел бы получить ответ на свой вопрос, если бы мне удалось побывать в его замке. Я плохо представлял себе, что (по причинам, о которых вы вскоре узнаете) посещение замка знаменитого упыря осложнит мое и без того достаточно тяжелое положение.

Мне было доподлинно известно, где находится замок графа Дракулы. Знал я, что в замке кипит жизнь. От надежных людей я прослышал и про владельца замка, но не знал, был ли он графом Дракулой (ведь я оставался в неведении даже относительно того, жив ли граф Дракула). Попасть в замок графа Дракулы можно было только по приглашению, а приглашения получали только сливки трансильванского высшего света. Мне не оставалось ничего другого, как ценой неимоверных усилий совершить за несколько месяцев головокружительную карьеру и занять достаточно высокое положение в обществе, чтобы получить приглашение. И долгожданный день настал! Я получил приглашение на празднества, которые должны были в течение нескольких дней и ночей происходить в замке графа Дракулы.

Преисполненный самых радужных надежд, я отправился в замок, но тут меня ожидал первый удар. Вскоре после прибытия в замок я обнаружил, что в спешке не захватил с собой зубную щетку, карманные шахматы и какую-нибудь книгу для чтения. Рассчитав, что успею съездить за вещами к себе в гостиницу и вернуться до начала празднества, я направился было к воротам замка, но меня остановил свирепого вида страж-трансильванец и вежливо, но весьма твердо сообщил, что всякий, кто переступил порог замка графа Дракулы, может покинуть замок только с разрешения его хозяина. «Тогда проведите меня к хозяину замка», — потребовал я. «Сейчас это невозможно, — сообщил мне страж, — но, если угодно, я могу передать хозяину вашу записку». Я решил воспользоваться предложением и написал хозяину замка записку с просьбой разрешить мне ненадолго отлучиться из замка. Ответ последовал довольно скоро. Он был краток и не слишком обнадеживающ: «Никаких отлучек!»

Итак, я оказался в замке графа Дракулы на положении узника! Что мне было делать? Поскольку я понимал всю безнадежность своего положения в тот момент, то решил действовать в духе истинно восточной мудрости: отправиться на предстоявшее в тот же вечер открытие празднеств, по возможности приятно провести время и при первой же возможности попытаться найти ответы на интересовавшие меня вопросы.

Бал по случаю торжественного открытия празднеств превзошел все мои ожидания. Ничего более великолепного я не видывал! Около двух часов ночи, почувствовав усталость, я решил удалиться на покой. Меня проводили в отведенные мне апартаменты.

Странное дело: несмотря на смертельную опасность, я крепко заснул. Пробудившись на другой день около полудня, я после роскошного завтрака замешался в толпе гостей, надеясь почерпнуть полезную информацию. И тут меня ожидал второй удар. Оказалось, что все приглашенные (кроме меня) принадлежат к узкому кругу самого высшего трансильванского общества и вместо обычных слов «да» и «нет» предпочитают говорить «бал» и «да», как это принято у зомби! Нечего сказать, в хорошенькое положение я попал! Меня окружал цвет трансильванской аристократии: люди и упыри, обладающие здравым умом и лишившиеся рассудка! В довершение всех бед я не знал, что означают слова «бал» и «да». Так, к сложностям общения с простыми трансильванцами за стенами замка прибавились сложности «языка зомби». Добившись с таким трудом приглашения в замок, я, как мне казалось, попал из огня в полымя!

Придя к такому заключению, я несколько утратил «восточную невозмутимость» и до самого вечера находился в подавленном состоянии. Сославшись на головную боль, я рано ушел к себе и, не раздеваясь, бросился на кровать. Сколько времени я пролежал, бесцельно уставясь в потолок, не в силах даже заснуть, сказать трудно. Но вдруг меня осенило! Я понял, что трудности с «языком зомби» легко преодолимы. Дрожащими от нетерпения руками я достал свой блокнот и карандаш и принялся набрасывать следующую серию задач.

191. . . . .

Задав всего лишь один вопрос (на который следовало отвечать либо «бал», либо «да»), я мог бы выведать у любого гостя, не упырь ли он.

192. . . . .

Задав всего лишь один вопрос, я мог бы выведать у любого гостя, в здравом ли он уме.

193. . . . .

Задав всего один вопрос, я мог бы узнать, что означает «бал».

194. . . . .

Стоило мне только захотеть, и я мог бы задать любому гостю в замке вопрос, на который тот волей-неволей ответил бы «бал».

195. . . . .

Задав всего лишь один вопрос, я мог бы выяснить, жив ли Дракула!

Что это за вопросы?

Д. ЗАГАДКА ДРАКУЛЫ

А теперь мы подходим к кульминации всей истории! На следующий день я уже располагал всей необходимой информацией: граф Дракула оказался жив и находился в великолепном здравии, к тому же именно он был владельцем замка. К своему удивлению, я узнал, что Дракула упырь, лишившийся рассудка, и поэтому любое высказанное им утверждение ложно.

Но что толку было от приобретенных мною знаний, если я был брошен на произвол судьбы и, рискуя вечным блаженством, ежеминутно мог превратиться в упыря? Наконец, празднества завершились, и всем гостям, кроме меня, было разрешено покинуть замок. Все разъехались, и я остался один в замке, сбросившем праздничное убранство и ставшем необычайно мрачным и неуютным, по существу в плену у хозяина, которого так еще ни разу не видел.

Впрочем, ждать мне пришлось недолго. Не успели часы на башне пробить полночь, как меня грубо разбудили и вежливо, но весьма твердо препроводили в личные покои графа Дракулы, где, насколько можно было судить, мне была назначена аудиенция. Мой провожатый удалился, и я остался лицом к лицу с самим графом Дракулой. После секундной паузы, показавшейся мне целой вечностью, Дракула произнес:

— Известно ли вам, что я всегда оставляю своим жертвам шанс на спасение?

— Нет, — честно признался я, — об этом мне ничего не известно.

— А между тем это так, — удовлетворенно заметил Дракула. — Мне не хотелось бы лишать себя столь большого удовольствия.

Не знаю почему, но эти слова не понравились мне. Уж очень высокомерно они прозвучали.

— Я имею обыкновение, — невозмутимо продолжал Дракула, — задавать своим жертвам загадку. Тех, кто сумеет за четверть часа отгадать ее, я отпускаю. С теми же, кто не отгадает загадки, разговор короток: я набрасываюсь на них, и они навек становятся упырями.

— В здравом уме или лишившимися рассудка? — попытался уточнить я, не имея в виду ничего дурного.

— Ваши шутки неуместны! — вне себя от ярости вскричал Дракула. — Отдаете ли вы себе отчет в серьезности положения? У меня нет ни малейшого желания выслушивать ваши дурацкие остроты. Более того, я намерен лишить вас даже обычного шанса на спасение.

Как я ни был испуган, все же любопытство взяло верх над страхом, и мне захотелось узнать, почему Дракула добровольно идет на риск упустить жертву.

— Что заставляет вас проявлять такое великодушие по отношению к своим жертвам? — спросил я.

— Великодушие? — переспросил Дракула с гримасой отвращения. — Вы глубоко заблуждаетесь! Я абсолютно чужд всякому великодушию. Мне просто доставляет ни с чем не сравнимое садистское наслаждение наблюдать, как моя жертва суетится, что-то пишет, лихорадочно подсчитывает... Эта умственная агония с лихвой компенсирует меня за бесконечно малый шанс упустить жертву.

Должен признаться, что слова «бесконечно малый шанс» не придали мне особой уверенности.

— Да-да! Мне еще ни разу не случилось упустить намеченную жертву, — продолжал Дракула, — так что, как видите, риск не столь уж велик.

— Нельзя ли ближе к делу? — дерзко прервал я Дракулу, изо всех сил стараясь не выдать охватившего меня ужаса. — Какую загадку вы хотели загадать мне?

196. . . . .

Дракула испытующе посмотрел на меня:

— Должен признаться, что вопросы, которые вы задавали моим гостям, довольно остроумны. Вы удивлены? Напрасно! Я великолепно осведомлен обо всем, что происходит в моем замке. Ваши вопросы, повторяю, весьма остроумны, хотя они далеко не так хороши, как вам кажется. Судите сами. Чтобы получить интересующие вас сведения, вам каждый раз приходилось придумывать новый вопрос. Вы так и не сумели найти простой принцип, позволяющий сформулировать универсальный вопрос, пригодный для выяснения всего, что вас интересовало, а ведь такой вопрос избавил бы вас от излишних умственных затрат. Между тем существует высказывание S, обладающее почти волшебным свойством. Стоит вам обратиться к любому из моих гостей, слуг или даже ко мне с вопросом «эквивалентны ли S и X?», как вы тотчас же узнаете все, что захотите, и сможете установить, истинно или ложно *любое* высказывание X. Если вам ответят «бал», то X должно быть истинным. Если же вам ответят «да», то X должно быть ложным. Например, если вам заблагорассудится узнать, не упырь ли ваш собеседник, то вы спросите у него: «Верно ли, что S истинно в том и только в том случае, если вы упырь?» Если же вы захотите узнать, в здравом ли уме тот или иной обитатель замка, то достаточно спросить у него: «Верно ли, что S истинно в том и только в том случае, если вы в здравом уме?» Вы хотите узнать, что означает слово «бал»? Нет ничего проще! Спросите у любого гостя: «Верно ли, что S истинно в том и только в том случае, если «бал» означает «да»?», и вам все станет ясно. Чтобы узнать, жив ли я, вам было бы достаточно спросить: «Верно ли, что S истинно в том и только в том случае, если Дракула жив?» Я мог бы без труда привести множество других примеров, но думаю, что вы уже по достоинству оценили волшебные свойства высказывания S.

— А что это за высказывание? — спросил я, сгорая от любопытства.

— Вот это вам и предстоит выяснить, — ответил Дракула. — Это и есть моя загадка.

С этими словами Дракула поднялся и направился к двери.

— В вашем распоряжении пятнадцать минут, — напомнил он. — Советую хорошенько подумать. Ставка столь высока, что стоит любых усилий.

Ставка действительно была высока! Нужно ли говорить, что следующие пятнадцать минут были самыми мучительными за всю мою жизнь. Страх настолько парализовал меня, что в голову не приходило ни одной дельной мысли. К тому же меня не покидало ощущение, что Дракула скрытно следит за мной.

Пятнадцать минут истекли. Дракула с торжествующим видом распахнул дверь и, плотоядно ухмыляясь, начал шаг за шагом приближаться ко мне. Расстояние между нами неумолимо сокращалось. Я уже ощущал прикосновение его клыков, когда мне внезапно пришла в голову спасительная идея.

— Стойте! — закричал я. — Как же я раньше не догадался! Высказывание S звучит так: «...»

Какое высказывание S спасло мне жизнь?

Эпилог

Разочарование от того, что я сумел разгадать загадку, оказалось непосильным для Дракулы: не сходя с места, он испустил дух и рассыпался в прах. И теперь, когда кто-нибудь спрашивает меня: «Жив ли граф Дракула?» — я с полным основанием могу, не погрешив против истины, ответить: «Бал!»

197.

В приведенной выше истории имеются четыре небольших несоответствия. Не могли бы вы указать их?

РЕШЕНИЯ

167. Высказанное трансильванцем утверждение либо истинно, либо ложно. Предположим, что оно ложно. Тогда трансильванец не человек и не в здравом уме. Следовательно, он должен быть упырем, лишившимся рассудка. Но такие упыри высказывают только истинные утверждения, и мы приходим к противоречию. Значит, высказанное трансильванцем утверждение истинно. Такие утверждения могут высказывать только люди в здравом уме и упыри, лишившиеся рассудка. Если бы наш трансильванец был бы упырем, лишившимся рассудка, то он не был бы ни человеком, ни лицом, находящимся в здравом уме. Следовательно, высказанное им утверждение было бы ложным. Но мы знаем, что оно истинно. Следовательно, наш трансильванец должен быть человеком в здравом уме.

168. Он должен быть упырем, лишившимся рассудка.

169. Нет, не однотипен. На этот раз трансильванец должен быть упырем в здравом уме.

170. Человек в здравом уме на мой вопрос ответил бы отрицательно, а трансильванцы любого из трех остальных типов — утвердительно. Получив утвердительный ответ на свой вопрос, я не смог бы определить, к какому из четырех типов трансильванцев принадлежит мой собеседник. Но в условиях задачи сказано, что я узнал по ответу, кто мой собеседник. Следовательно, на мой вопрос он ответил не утвердительно. Значит, он ответил «нет», из чего мы заключаем, что трансильванец был человеком в здравом уме.

171. Из приведенной фразы нельзя заключить, был ли встречный человеком или упырем, но можно заключить, что он лишился рассудка. Человек в здравом уме не мог бы сказать о себе, что он упырь, а упырь, находящийся в здравом уме, знал бы, что он упырь, и, солгав, заявил бы: «Я человек». С другой стороны, человек, лишившийся рассудка, считал бы себя упырем и заявил бы об этом. Упырь, лишившийся рассудка, считал бы себя человеком и, солгав, заявил бы: «Я упырь».

172. Единственное заключение, к которому можно прийти на основании сделанного трансильванцем заявления, состоит в том, что он упырь. Человек в здравом уме не сказал бы о себе, что он лишился рассудка. Человек, лишившийся рассудка, считал бы, что находится в здравом уме, и, будучи человеком, не мог бы заявить о себе: «Я лишился рассудка».

173. Думаю, что таких утверждений X, Y существует немало, во всяком случае не одна пара. Я имел в виду следующие утверждения:

X: Если я в здравом уме, то я человек.

Y: Если я человек, то я в здравом уме.

Предположим, что некий трансильванец, высказывает утверждение X. Докажем, что Y должно быть истинно, то есть если наш трансильванец — человек, то он в здравом уме. Предположим, что он человек. Тогда верно, что если он в здравом уме, то он человек (так как он человек). Значит, *X* истинно. Следовательно, наш трансильванец должен быть в здравом уме, поскольку люди, лишившиеся рассудка, не высказывают истинных утверждений. Отсюда мы заключаем, что если он человек, то находится в здравом уме. Следовательно, *Y* — истинно.

Наоборот, предположим, что наш трансильванец высказывает утверждение *Y*. Требуется доказать, что *X* истинно. Предположим, что трансильванец в здравом уме. Тогда *Y* должно быть истинно. Следовательно, трансильванец — человек (потому что упыри в здравом уме не высказывают истинных утверждений). Значит, он человек (в предположении, что он находится в здравом уме). Итак, если наш трансильванец в здравом уме, то он человек. Следовательно, *X* истинно.

174. Ответы на оба вопроса задачи утвердительны. Предположим, что некий трансильванец считает истинным какое-то утверждение *X*. Отсюда, как нетрудно понять, отнюдь не следует, что *X* должно быть истинным, так как трансильванец мог утратить рассудок. Но если он считает, что *X* истинно, то *X* должно быть истинно! Действительно, предположим, что трансильванец в здравом уме. Так как он считает, что утверждение о том, что он считает утверждение истинным, истинно, то его утверждение «я считаю *X* истинным» должно быть истинно. Следовательно, он действительно считает утверждение *X* истинным. А так как он в здравом уме, то *X* должно быть истинным. Предположим теперь, что трансильванец лишился рассудка. Так как он считает, что утверждение о том, что он считает *X* истинным, истинно, то его утверждение «я считаю истинным» должно быть ложным. Следовательно, в действительности он не считает *X* истинным (ему только кажется, что он считает!). Так как трансильванец не считает *X* истинным и лишился рассудка, то *X* должно быть истинным.

Итак, доказано следующее. Если трансильванец считает, что он считает утверждение *X* истинным, то *X* должно быть истинным независимо от того, в здравом ли уме трансильванец или лишился рассудка. Аналогично можно доказать, что если какой-нибудь трансильванец не считает, что он считает утверждение *X* истинным, то *X* должно быть ложным. Доказать это мы предоставляем читателю.

175. Ответы на оба вопроса задачи (как следует из решения предыдущей задачи) должны быть утвердительными.

Предположим, что по утверждению А он считает высказывание *X* истинным. Тогда А действительно считает именно так, как говорит. Следовательно, А считает, что он считает утверждение *X* истинным. В этом случае, как показано в решении предыдущей задачи, *X* должно быть истинно независимо от того, в здравом ли уме А или лишился рассудка. Предположим теперь, что А — упырь. Тогда он не считает так, как говорит. Следовательно, А не считает, что считает *X* истинным. Значит, *X* должно быть ложным независимо от того, в здравом ли уме А или лишился рассудка.

176. А утверждает, что считает В человеком. В либо утверждает, что считает А человеком, либо утверждает, что считает А не человеком. Вторую альтернативу необходимо исключить, так как она приводит к следующему противоречию.

Рассмотрим два утверждения.

1) А утверждает, что считает В человеком.

2) В утверждает, что считает А не человеком.

Предположим, что А — человек. Тогда, как показано в решении задачи 175, из утверждения (1) следует, что В — человек. В свою очередь из утверждения (2) следует, что А не человек. Поскольку А по предположению человек, то мы приходим к противоречию.

Предположим теперь, что А — упырь. Тогда, как показано в решении задачи 175, из утверждения (1) следует, что В не человек. Следовательно, В — упырь. Из утверждения (2) мы, как показано в решении задачи 175, заключаем, что А — человек. Но такой вывод противоречит предположению о том, что А — упырь. Значит, если бы В ответил отрицательно, то мы пришли бы к противоречию. Следовательно, В ответил утвердительно.

177. Ни к какому заключению прийти нельзя, так как на ваш вопрос любой трансильванец ответит утвердительно. Предоставляю вам самостоятельно убедиться в этом.

178. Случай, описанный в этой задаче, отличается от случая, рассмотренного в предыдущей задаче. Из ответа вашего собеседника нельзя заключить, человек он или упырь, но можно установить, в здравом ли он уме. Если встретившийся вам трансильванец в здравом уме, то он ответит «да». Если же он утратил рассудок, то на ваш вопрос последует отрицательный ответ. Доказательство предоставляем читателю.

179. Нет, нельзя. Не исключено, что ваш трансильванец — человек в здравом уме и граф Дракула жив. Возможно также, что ваш собеседник — упырь, лишившийся рассудка, и графа Дракулы нет в живых. (В действительности если вы обратились с вопросом к упырю, утратившему рассудок, то Дракула мог быть как живым, так и мертвым.)

180. Нет, нельзя.

181. Нет, нельзя. Трансильванец, к которому вы обратились с вопросом, мог быть, например, упырем, лишившимся рассудка. В этом случае граф Дракула мог бы быть как живым, так и мертвым.

182. Можно: на этот раз из полученного вами ответа следует, что Дракула жив.

Воспользуемся терминологией задачи 177 и сформулируем утверждение трансильванца следующим образом: «Если я надежен, то Дракула жив».

В гл. 8 (см. решения задач 109—112) мы доказали, что туземец с острова рыцарей и лжецов, высказавший утверждение «если я рыцарь, то то-то и то-то», должен быть рыцарем, а «то-то и то-то» должно быть истинно. Аналогично трансильванец, высказавший утверждение «если я надежен, то то-то и то-то», должен быть надежным, а «то-то и то-то» должно быть истинным. Доказать это можно так же, как это сделано в решении задач 109—112 (достаточно слово «рыцарь» заменить словом «надежный»).

183. Такое утверждение существует: «Я не надежен, и Дракулы нет в живых». Доказательство предоставляем читателю. (Указание: начните с доказательства ненадежности вашего собеседника.)

184. Такое утверждение существует: «Я надежен в том и только в том случае, если Дракула жив».

В решении задачи 122 из гл. 8 мы доказали, что если туземец с острова рыцарей и лжецов высказывает утверждение «я рыцарь в том и только в том случае, если то-то и то-то», то это «то-то и то-то» должно быть истинно (хотя мы ничего не можем сказать относительно того, рыцарь или лжец наш туземец). Аналогично если трансильванец высказывает утверждение «я надежен в том и только в том случае, если то-то и то-то», то это самое «то-то и то-то» должно быть истинно независимо от того, надежен ли трансильванец или ненадежен. Доказательство то же, что и прежде (необходимо лишь слово «рыцарь» заменить словом «надежный»).

Приведенное нами утверждение — не единственное. Решением задачи могут служить и другие утверждения, например «я считаю, что утверждение «Дракула жив» эквивалентно утверждению, что я человек». Более забавно следующее утверждение: «Я считаю, что если кто-нибудь спросит меня, жив ли Дракула, то я бы ответил утвердительно».

185. Можно. Из утверждений (1) и (2) следовало бы, что Дракулы нет в живых.

Из утверждения (1) можно заключить, что наш трансильванец — человек. Действительно, упырь, находящийся в здравом уме, знал бы, что он в здравом уме, и заявил бы: «Я лишился рассудка». Упырь, лишившийся рассудка, считал бы, что находится в здравом уме, и заявил бы: «Я лишился рассудка». Следовательно, наш трансильванец — человек.

Напомним принцип, установленный в решении задачи 175: если человек заявляет, что считает некоторое утверждение X истинным, то X должно быть истинным (независимо от того, в здравом ли уме этот человек или лишился рассудка). Мы установили, что трансильванец — человек. Он заявил — см. утверждение (2), — что, по его мнению, Дракулы нет в живых. Следовательно, графа Дракулы не должно быть в живых.

186. Из первого утверждения («я человек») не следует, что трансильванец — человек, а следует, что он должен быть в здравом уме. (Человек, утративший рассудок, не знал бы, что он человек. Упырь, лишившийся рассудка, считал бы себя человеком и, солгав, сказал бы, что он упырь.) Итак, мы знаем, что трансильванец в здравом уме. Докажем, что он человек. Предположим, что он упырь. Тогда не верно, что наш трансильванец — человек, а так как из ложного утверждения следует что угодно, то его второе утверждение («если я человек, то граф Дракула жив») должно бы быть истинно.

Но упырь в здравом уме не может высказывать истинных утверждений, и мы приходим к противоречию. Следовательно, наш трансильванец не может быть упырем и должен быть человеком.

Итак, нам известно, что трансильванец находится в здравом уме и что он человек, поэтому высказываемые им утверждения истинны. Следовательно, его второе утверждение («если я человек, то граф Дракула жив») должно быть истинно. Он человек. Значит граф Дракула жив.

187. Достаточно спросить трансильванца, в здравом ли он уме. Человек (независимо от того, в здравом ли он уме или лишился рассудка) ответит утвердительно, а упырь отрицательно.

188. Стоит лишь спросить первого встречного, человек ли он, как все станет ясно. Трансильванец, находящийся в здравом уме (будь то человек или упырь), ответит утвердительно, а трансильванец, лишившийся рассудка, — отрицательно.

В нескольких следующих задачах я приведу лишь ответ (то есть укажу, какой вопрос следует задать трансильванцу). Вы уже накопили достаточно опыта, чтобы самостоятельно убедиться в правильности предлагаемых решений.

189. Один из вопросов, на который все трансильванцы вынуждены будут ответить утвердительно, звучит так: «Считаете ли вы себя человеком?» И дело здесь вовсе не в том, что все трансильванцы действительно считают себя людьми (так считают только люди, находящиеся в здравом уме, и упыри, лишившиеся рассудка), но тем не менее все трансильванцы будут утверждать, что считают себя людьми.

Другой вопрос, на который любой трансильванец ответит утвердительно: «Вы надежны?» Все трансильванцы станут уверять, что они надежны.

190. Чтобы установить, жив ли граф Дракула, достаточно задать трансильванцу любой из следующих вопросов:

1) Эквивалентно ли утверждение о том, что вы надежны, утверждению о том, что Дракула жив?

2) Эквивалентно ли, по-вашему, утверждение о том, что вы человек, утверждению о том, что Дракула жив?

191. Достаточно спросить гостя: «Правильно ли ответить «бал» на вопрос, в здравом ли вы уме?» Если гость ответит «бал», то он человек. Если же гость ответит «да», то он упырь.

192. Достаточно спросить гостя: «Правильно ли ответить «бал» на вопрос, человек ли вы?» Если гость ответит «бал», то он в здравом уме. Если же гость ответит «да», то он лишился рассудка.

193. Достаточно спросить гостя: «Считаете ли вы себя человеком?» Слово, которое он произнесет в ответ, должно означать «да». Можно задать и другой вопрос: «Надежны ли вы?»

194. Один из вопросов, дающих решение задачи, звучит так: «Правильно ли ответить «бал» на вопрос, надежны ли вы?» (Напомним, что быть надежным означает либо быть человеком, находящимся в здравом уме, либо упырем, лишившимся рассудка.)

Другой вопрос, также дающий решение задачи: «Надежны ли вы в том и только в том случае, если «бал» означает «да»?»

Любой из этих вопросов заставит гостей ответить «бал». Доказать это можно так же, как в решении задачи 161 из гл. 11 (единственное различие состоит в том, что вместо «человек» везде следует взять «надежный человек»).

195. Любой из следующих вопросов позволит выяснить, жив ли граф Дракула.

1) Считаете ли вы, что «бал» — правильный ответ на вопрос, эквивалентно ли утверждение о том, что вы человек, утверждению «Дракула жив»?

2) Правильно ли ответить «бал» на вопрос, эквивалентно ли утверждение о том, что вы надежны, утверждению «Дракула жив»?

Единый принцип, суть которого разъяснена в решении задачи 196, позволяет дать гораздо более простое и изящное решение.

196. Единый принцип. Условимся называть представителя элиты трансильванского общества аристократом типа 1, если на вопрос «дважды два — четыре?» он отвечает «бал». Разумеется, на любой другой вопрос с правильным ответом «да» трансильванский аристократ типа 1 ответит «бал».

Условимся называть представителя трансильванской элиты аристократом типа 2, если он не типа 1. Это означает, что если X — любое истинное высказывание (например, «дважды два — четыре») и вы спрашиваете аристократа типа 2, истинно ли X, то он ответит «да» (не путать с «нашим» привычным «да»!).

Сразу же ясно, что если «бал» означает «да», то аристократы типа 1 надежны, а аристократы типа 2 ненадежны. Если же бал» означает «нет», то картина обратная (аристократы типа 1 ненадежны, а аристократы типа 2 надежны).

Единый принцип конструирования вопросов заключается в следующем. Чтобы выяснить, истинно ли любое утверждение X, достаточно спросить у любого трансильванского аристократа, эквивалентно ли утверждение о том, что он аристократ типа 1, утверждению X. Вопрос можно задать, например, так: «Истинно ли X в том и только в том случае, если вы аристократ типа 1?» Докажем, что если на такой вопрос последует ответ «бал», то X должно быть истинно, а если «да», то X должно быть ложно. Следовательно, «волшебное» утверждение S — это просто-напросто утверждение «вы аристократ типа 1» (или «на вопрос «дважды два — четыре?» вы ответите «бал»).

Доказательство. Пусть S — утверждение «вы аристократ типа 1», X — утверждение, истинность или ложность которого требуется установить. Вы задаете вопрос: «Эквивалентно ли S утверждению X?» Предположим, что вам отвечают «нет». Требуется доказать, что X должно быть истинно.

Случай 1: «бал» означает «да». В этом случае нам известны два факта: 1) аристократ типа 1 надежен; 2) наш собеседник, говорящий «бал», утверждает, что S эквивалентно X.

Подслучай 1а: аристократ типа 1. Он надежен и высказывает истинные утверждения. Следовательно, S действительно эквивалентно X. Но S истинно (так как аристократ относится к типу 1). Значит, X истинно.

Подслучай 1б: аристократ типа 2. Он ненадежен и высказывает ложные утверждения. Так как он утверждает, что S эквивалентно X, то в действительности S не эквивалентно X. Но S ложно (так как аристократ не принадлежит к типу 1), а не эквивалентно S. Следовательно, X истинно.

Случай 2: «бал» означает «нет». В этом случае нам известны два факта: 1) аристократ типа 1 ненадежен; 2) наш собеседник, говорящий «бал», утверждает, что S не эквивалентно X.

Подслучай 2а: аристократ типа 1. Он ненадежен и высказывает ложные утверждения. По его словам (не соответствующим действительности), S не эквивалентно X. Значит, на самом деле S эквивалентно X, а так как S истинно, то X истинно.

Подслучай 2б: аристократ типа 2. Он надежен и высказывает истинные утверждения. Значит, S не эквивалентно X (так как, по его словам, S не эквивалентно X). Но S ложно. Следовательно, X должно быть истинно.

Итак, доказано, что ответ «бал» означает истинность высказывания X. Повторив аналогичные рассуждения, мы могли бы доказать, что ответ «да» означает ложность высказывания X. Но к тому же результату можно прийти и более коротким путем, если рассуждать следующим образом.

Предположим, что наш собеседник говорит в ответ «да». Ответ «да» на заданный вопрос означает то же, что и ответ «бал» на вопрос «Верно ли, что вы аристократ типа 1 в том и только в том случае, если X ложно?» (поскольку для любых двух утверждений Y и Z утверждение «Y эквивалентно Z» противоположно утверждению «Y эквивалентно не Z»). Следовательно, если бы вы задали вопрос «верно ли, что вы аристократ типа 1 в том и только в том случае, если X ложно?», то ваш собеседник ответил бы «бал». А так как он ответил бы «бал», то отсюда (как доказано выше) следует, что X действительно ложное утверждение.

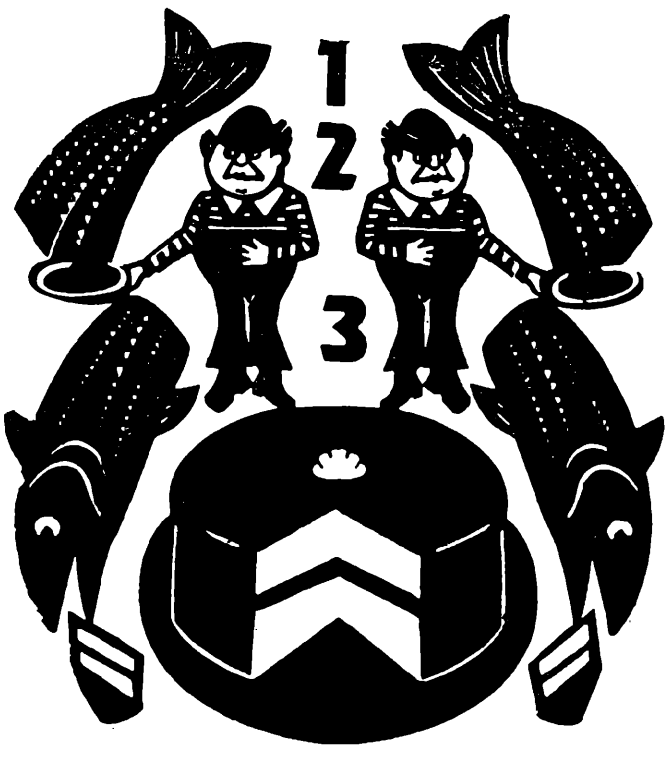
197. Ответ на вопрос о мелких несоответствиях. 1 и 2. В двух случаях (говоря о том, что ему ни разу не случалось упускать намеченную жертву, и разъясняя действие «волшебного» утверждения S) Дракула произносит «да». Представители высшей трансильванской знати, к числу которых принадлежит и он, не употребляют слова «да».

3. Когда свирепого вида страж сообщил мне, что я не могу покинуть замок без разрешения хозяина, с чего это вдруг я ему поверил?

4. Когда хозяин замка прислал мне ответную записку «Никаких отлучек!», с чего мне понадобилось ему верить? Ведь в тот момент я еще не знал, что владелец замка — упырь, лишившийся рассудка, и высказывает (письменно и устно) истинные утверждения.

Часть четвертая

Логика во всем своем блеске и великолепии



13. Логика и жизнь

А. ЧТО ТАКОЕ ЛОГИКА

198. Определение логики по Траляля. . . . .

Мне нравится следующее определение логики, принадлежащее Траляля:

Труляля (обращаясь к Алисе). Я знаю, о чем ты думаешь, но это не так! Ни в коем разе!

Траляля. Наоборот, если было так, то так могло быть, а если бы так было, то так и было бы. Но ничего такого нет. Это и есть логика.

199. Определение логики по Терберу. . . . .

В романе «Тринадцать часов» Тербер приводит определение логики, суть которого сводится примерно к следующему. Поскольку можно прикоснуться к часам, не останавливая их, то можно пустить часы, не прикасаясь к ним. Это — логика, какой я ее вижу и понимаю.

200. . . . .

Определение логики по Терберу несколько напоминает мой излюбленный силлогизм: некоторые автомашины дребезжат на ходу. Моя автомашина — это некоторая автомашина. Не удивительно, что моя автомашина дребезжит!

201. Еще одно определение логики. . . . . . .

Мой приятель, отставной полицейский офицер, узнав, что я логик, сказал мне однажды: «Знаешь, что я понимаю под логикой? Однажды мы с женой были в гостях. Хозяйка предложила нам отведать пирога. На подносе лежало всего два куска пирога, один побольше, другой поменьше. Немного подумав, я решил взять себе тот, что побольше. Рассуждал я при этом так. Я знаю, что моя жена любит пироги и что она знает, что я люблю пироги. Я также знаю, что она любит меня и хочет, чтобы я был счастлив. Следовательно, ей хочется, чтобы я взял себе тот кусок пирога, который побольше. Так я и сделал».

202. . . . .

Рассказ моего приятеля напомнил мне историю о двух посетителях ресторана, заказавших рыбу. Официант принес блюдо с двумя рыбами: одной побольше, другой поменьше. Один из посетителей сказал другому: «Прошу вас. Выбирайте любую, какая вам больше нравится». Сотрапезник поблагодарил за любезность и положил себе на тарелку ту рыбу, которая была побольше. После напряженного молчания первый посетитель заметил: «Если бы вы предоставили мне право первого выбора, то я взял бы себе ту рыбу, которая поменьше!» «На что вы, собственно, жалуетесь? — осведомился у него другой посетитель. — Ведь вы получили именно то, что хотели!»

203. . . . .

История о двух посетителях ресторана напомнила мне еще одну историю о даме на званом обеде. Когда подали спаржу, эта дама, взяв себе с серебряного блюда все головки, передала остальное соседу. Сосед спросил: «Что вы делаете? Почему вы взяли себе все головки, а остальное отдали мне?» «Как, разве вы не знаете? — невозмутимо ответила дама. — Головки в спарже — самое вкусное».

204. . . . .

Однажды в какой-то газете мне попалась на глаза карикатура. Мальчик и девочка идут по тротуару. Мальчик идет дальше от проезжей части, чем девочка. Мимо них проезжает грузовик и обдает девочку грязью с головы до ног. Мальчик говорит своей спутнице: «Теперь ты понимаешь, почему я не хожу со стороны проезжей части как джентльмен?»

205.

Мне нравится следующее определение этики. Мальчик спрашивает отца: «Папа, что такое этика?» Отец отвечает: «Сейчас объясню тебе на примере, сынок. Както раз в мой магазин зашла одна дама. Оплачивая покупку, она дала мне двадцатидолларовую купюру, думая, что дает мне десять долларов. Я также подумал, что она уплатила десять долларов, и дал ей сдачу как с десяти долларов. Лишь через несколько часов я обнаружил, что дама в действительности уплатила двадцать долларов. Сообщу ли я или не сообщу об этом моему партнеру? Это и есть этика, мой мальчик».

206.

Однажды я вместе с приятелем, математиком по профессии, зашел в небольшой ресторанчик пообедать. После перечня блюд в меню стояло: «За все особо заказанное нужно особо платить». Мой приятель заметил по этому поводу: «Слово «особо», да еще дважды повторенное, здесь явно ни к чему».

207.

На рекламе одного ресторана красовалась броская надпись:

Все вкусное не дешево.
Все дешевое не вкусно.

Означают ли эти два предложения одно и то же, или их содержание различно?

С точки зрения логики оба предложения означают одно и то же. Они эквивалентны утверждению «нет ничего, что было бы вкусно и дешево». И все же, хотя эти предложения *логически* эквивалентны, их *психологический* подтекст различен. При чтении первого предложения в моем воображении возникает мысль о вкусном блюде, за которое стоит заплатить дорого. При чтении второго рождается мысль о недоброкачественно дешевом блюде. Не думаю, чтобы моя реакция была нетипичной.

Б. КТО ВЫ: ФИЗИК ИЛИ МАТЕМАТИК?

208. . . . .

Должно быть, многим известна задача о двух сосудах, в одном из которых содержится 10 мл воды, а в другом — 10 мл вина. Из сосуда с водой в сосуд с вином отливают 3 мл воды и после тщательного перемешивания 3 мл смеси переливают обратно в сосуд с водой. Спрашивается, чего больше: воды в сосуде с вином или вина в сосуде с водой?

Решать эту задачу можно двумя способами: «арифметически» (подсчитать количество воды, внесенной при переливаниях в сосуд с вином, и вина, оказавшегося в сосуде с водой) и «физическим», основанным на здравом смысле. Я отдаю предпочтение физическому решению. При арифметическом подходе задача решается следующим образом. После того как в сосуд с вином влили 3 мл воды, в нем оказалось 13 мл смеси: $^{3}/_{13}$ составляет вода и $^{10}/_{13}$ вино. После переливания в сосуд с водой 3 мл смеси в нем оказалось $3 \times {}^{10}/_{3} = {}^{30}/_{13}$ мл вина. До второго переливания в сосуде с вином находилось 3 мл воды, из них $3 \times {}^{3}/_{13}$ мл было перелито в сосуд с водой. Следовательно, после двух переливаний в сосуде с вином осталось $3 - {}^{9}/_{13}$ мл воды. Но $3 - {}^{9}/_{13} = {}^{39}/_{13} - {}^{9}/_{13} = {}^{30}/_{13}$. Таким образом, воды в сосуде с вином оказалось ровно столько же (а именно $^{30}/_{13}$ мл), сколько вина в сосуде с водой.

Физическое решение приводит к ответу несравненно быстрее и, кроме того, подсказывает некую общую идею: поскольку количество жидкости в каждом сосуде после двух переливаний одинаково, то убыль воды в сосуде с водой восполнена вином, а убыль вина в сосуде с вином восполнена водой. Тем самым задача решена. Разумеется, здравый смысл не позволяет нам оценить величину убыли жидкости в каждом сосуде, в то время как арифметическое решение позволяет указать ее точный объем: $^{30}/_{13}$ мл. Зато физическое решение применимо к следующей более общей задаче (перед которой арифметический подход оказывается бессильным).

Возьмем те же два сосуда с водой и с вином, что и в предыдущей задаче, и начнем переливать жидкость из одного сосуда в другой, не измеряя каждый раз, какой объем мы переливаем, и не подсчитывая, сколько раз мы производим переливание. Количество переливаемой жидкости может изменяться от одного переливания к другому, лишь бы по окончании всех операций в каждом сосуде снова оказалось по 10 мл жидкости. Спрашивается, чего больше: воды в сосуде с вином или вина в сосуде с водой?

Те же соображения, которые привели нас к физическому решению, позволяют утверждать, что после всех переливаний воды в сосуде с вином окажется столько же, сколько вина в сосуде с водой, но их недостаточно, чтобы узнать, сколько именно жидкости перешло из одного сосуда в другой.

209. . . . .

В связи с предыдущей задачей у меня возник следующий вопрос. Представим себе, что первоначально в сосуд A налито 10 мл воды, а в сосуд B — 10 мл вина, и мы переливаем жидкость из одного сосуда в другой и обратно по 3 мл любое конечное число раз. Сколько переливаний требуется произвести, чтобы процентное содержание вина в обоих сосудах стало одинаковым?

Я имел в виду следующий ответ: за любое конечное число переливаний невозможно добиться равенства концентраций вина в обоих сосудах. Независимо от того, сколько вина в одном сосуде, сколько воды в другом и сколько жидкости переливается каждый раз из сосуда в сосуд и обратно (если только один сосуд при переливании не опоражнивается полностью), концентрация вина в сосуде B всегда останется выше, чем в сосуде A. Убедиться в этом можно при помощи простого рассуждения, использующего математическую индукцию. Первоначально концентрация вина в сосуде B, несомненно, выше, чем в сосуде A. Предположим, что после какого-то числа переливаний концентрация вина в сосуде B остается по-прежнему выше, чем в сосуде A. Переливая затем какое-то количество жидкости из сосуда B в сосуд A, мы будем переливать более крепкий раствор в более слабый. Следовательно, и после очередного переливания концентрация вина в сосуде B останется выше, чем в сосуде A. Если мы перельем какое-то количество жидкости из сосуда А в сосуд В, то концентрация вина в В также останется выше, чем в А. Так как любое переливание сводится к одному из этих двух случаев, то мы заключаем, что концентрация вина в сосуде В всегда больше, чем в сосуде А. Единственный способ выравнять концентрации — перелить целиком содержимое одного сосуда в другой.

Если эту задачу рассматривать как *чисто математическую*, то мои рассуждения безупречны. Но если рассматривать ее как физическую задачу, то в моем рассуждении обнаруживаются уязвимые места. Оно исходит из представления о безграничной делимости жидкости, в то время как реальные жидкости состоят из дискретных молекул. На это обстоятельство один из читателей обратил внимание Мартина Гарднера *. Он подсчитал, что после 47 переливаний «туда и обратно» концентрация вина в обоих сосудах с высокой вероятностью окажется равной.

Интересно, останется ли в силе предложенное этим читателем решение, если число молекул в сосуде вина будет нечетным? Проживи я на свете миллион лет, мне никогда не пришло бы в голову, что эта задача не математическая, а физическая.

210. Какой брусок намагничен?

Мартин Гарднер предложил следующую задачу *. Представьте себе, что вы заперты в комнате, где (так же как и на вас самих) нет ничего металлического, кроме двух совершенно одинаковых с виду железных брусков. Один из брусков намагничен. Установить, какой именно, можно, подвесив каждый из брусков на нити, обвязанной вокруг середины бруска: намагниченный брусок будет вести себя как стрелка компаса, то есть указывать на север. Нельзя ли установить, какой из брусков намагничен, более простым способом?

Приведенное в книге Гарднера решение состояло в том, чтобы дотронуться концом одного бруска до середины другого. Если вы почувствуете притяжение,

---

* См. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1971, с. 286.

* См. Гарднер М. Математические новеллы. — М.: Мир, 1974, с. 170.

то брусок, которым вы дотрагивались, намагничен. Если притяжения не возникает, то в руках у вас находится ненамагниченный брусок.

Это «физическое» решение вполне разумно. Осуществить его «экспериментально» проще, чем подвешивать оба бруска на нитях. Будучи все-таки логиком, а не физиком, я придумал еще одно решение, занимающее по своей простоте промежуточное положение между «физическим» и «лобовым». Я предлагаю взять один брусок, обвязать его нитью посредине и, подвесив на нити, посмотреть, будет ли он указывать на север.

211. Кто вы: физик или математик? . . . . .

Как вы мыслите: физически или математически? Следующий великолепный тест позволит безошибочно определить, физик вы или математик.

Вы находитесь в летней кухне. В вашем распоряжении нерастопленная плита, коробок спичек, кран с холодной водой и пустая кастрюля. Требуется нагреть кастрюлю воды. Что бы вы стали делать? Должно быть, на этот вопрос вы ответили бы так: «Я налил бы в кастрюлю холодной воды из крана, зажег плиту, поставил кастрюлю на огонь и подождал бы, пока вода в кастрюле не нагреется». Прекрасно! На этом этапе между математиками и физиками царит полное согласие. Различие в подходе обнаруживается при попытке решить следующую задачу.

Вы снова находитесь в летней кухне. В вашем распоряжении нерастопленная плита, коробок спичек, кран с холодной водой и кастрюля, в которую налита холодная вода. Требуется нагреть кастрюлю воды. Что бы вы стали делать? Большинство людей отвечают: «Зажег бы плиту и поставил кастрюлю с водой на огонь». Если вы думаете так же, то вы физик! Математик бы вылил воду из кастрюли и тем самым свел бы новую задачу к предыдущей, которая решена.

Мы могли бы продвинуться еще на один шаг и рассмотреть случай, когда кастрюля с холодной водой уже поставлена на огонь. Как получить горячую воду в этом случае? Физик просто подождал бы, пока вода не нагреется, а математик погасил бы огонь, вылил воду из кастрюли и тем самым свел бы нашу новую задачу к первой (или ограничился бы тем, что погасил огонь, сведя задачу ко второй, уже решенной).

Еще более наглядно различие между физиком и математиком проявляется в следующем («драматическом») варианте задачи. Представьте себе, что в доме, где вы находитесь, начался пожар. В вашем распоряжении пожарный кран и шланг (не присоединенный ни к чему). Как потушить пожар? Ясно, что прежде всего необходимо присоединить шланг к крану, а затем пустить струю воды в пламя. Предположим теперь, что в вашем распоряжении пожарный кран, шланг (не присоединенный ни к чему) и никакого пожара в доме нет. Как бы вы стали тушить пожар? Математик сначала поджег бы дом, чтобы свести задачу к предыдущей.

212. Фон Нейман и задача о мухе. . . . . . .

Эту задачу можно решить двумя способами: «трудным» и «легким».

Два поезда, находившиеся на расстоянии 200 км друг от друга, сближаются по одной колее, причем каждый развивает скорость 50 км/ч. С ветрового стекла одного локомотива в начальный момент движения взлетает муха и принимается летать со скоростью 75 км/ч вперед и назад между поездами, пока те, столкнувшись, не раздавят ее. Какое расстояние успевает пролететь муха до столкновения?

С каждым из поездов муха успевает повстречаться бесконечно много раз. Чтобы найти расстояние, которое муха преодолела в полете, можно просуммировать бесконечный ряд расстояний (эти расстояния убывают достаточно быстро, и ряд сходится). Это — «трудное» решение. Чтобы получить его, вам понадобятся карандаш и бумага. «Легкое» решение состоит в следующем. Поскольку в начальный момент расстояние между поездами равно 200 км, а каждый поезд развивает скорость 50 км/ч, то от начала движения до столкновения проходит 2 ч. Все эти 2 ч муха находится в полете. Поскольку она развивает скорость 75 км/ч, то до того момента, как столкнувшиеся локомотивы раздавят ее, муха успеет пролететь 150 км. Вот и все!

Один из выдающихся математиков современности Джон фон Нейман, когда ему задали эту задачу, задумался лишь на миг и сказал: «Ну, конечно, 150 км!» Приятель спросил его: «Как вам удалось так быстро получить ответ?» «Я просуммировал ряд», — ответил математик.

213. . . . .

О фон Неймане рассказывают следующую забавную историю. Некогда он консультировал специалистов, строивших ракету-носитель для космического корабля. Увидев остов ракеты, фон Нейман спросил у сопровождавших его сотрудников: «Кто сконструировал ракету?» «Наши инженеры,» — ответили ему. «Инженеры!» — презрительно повторил фон Нейман. — Я разработал полную математическую теорию ракет. Возьмите мою работу 1952 г. и вы найдете там все, что вас интересует». Специалисты раздобыли работу, о которой говорил фон Нейман, сдали на слом разработанную ими конструкцию ракеты (на которую к тому времени было израсходовано 10 млн долларов) и построили новую ракету, неукоснительно следуя рекомендациям фон Неймана. Но их постигла неудача: при нажатии на кнопку «Пуск» раздался оглушительный взрыв, и ракета разлетелась на мелкие кусочки. В гневе ракетчики позвали фон Неймана и спросили: «Мы выполнили все ваши рекомендации, а ракета все-таки взорвалась при запуске. Почему?» Фон Нейман ответил: «То, о чем вы говорите, относится к так называемой теории сильного взрыва. Я рассмотрел ее в своей работе 1954 г. В ней вы найдете все, что вас интересует».

214. . . . .

Рассказывают, будто в Принстоне жила девочка, которой никак не давалась арифметика. И вдруг за какие-нибудь два месяца она стала великолепно успевать по этому предмету. Мать спросила у нее, в чем причина неожиданных успехов. Девочка ответила: «Как-то раз я услышала, что в нашем городе есть профессор, который хорошо разбирается в арифметике. Я узнала, где он живет, пришла к нему, и с тех пор он каждый день помогает мне готовить уроки. Объясняет он все очень понятно». Мать несколько озадаченно спросила, не знает ли дочь, как фамилия профессора. Девочка ответила: «Точно не скажу, не помню. Кажется, Эйнштейн или как-то очень похоже».

215. . . . .

В разговоре с одним из своих коллег Эйнштейн заметил однажды, что не хотел бы преподавать в колледже с совместным обучением юношей и девушек. По его мнению, юноши смотрели бы на красивых сокурсниц и не уделяли бы должного внимания математике и физике. Знакомый Эйнштейна возразил: «Вас бы юноши слушали, боясь проронить слово». Эйнштейн ответил: «Такие юноши не стоят того, чтобы им преподавать».

216. . . . .

Следующий анекдот отчетливо показывает различие между физиком и математиком.

Физик и математик летят на одном самолете из Калифорнии в Вашингтон. Каждого из них попросили по прибытии в Вашингтон представить отчет обо всем увиденном в пути. Пролетая над Канзасом, оба увидели далеко внизу черную овцу. Физик записал в блокноте: «В Канзасе водится черная овца». Математик также сделал соответствующую запись в своем блокноте: «Где-то на Среднем Западе водится овца, черная сверху».

В. ИСТОРИИ О ВЕРМОНТЦАХ

217. . . . .

Предыдущая история напомнила мне один случай, происшедший с американским президентом Кальвином Кулиджем. Вместе с группой друзей Кулидж однажды посетил животноводческую ферму. Когда они подошли к стаду овец, один из друзей президента заметил: «Я вижу, что овец недавно остригли». «По крайней мере с этой стороны они выглядят так, как будто их остригли,» — отозвался Кулидж.

218. . . . .

Когда юморист Уилл Роджерс собрался на прием к президенту Кулиджу, его предупредили, что президента невозможно рассмешить. Роджерс спокойно ответил: «Ничего, я все-таки попробую». И ему действительно удалось рассмешить Кулиджа. Когда Роджерса подвели к президенту и представлявший произнес: «Мистер Роджерс, позвольте представить вас президенту Кулиджу», Уилл Роджерс повернулся к президенту и с любезной улыбкой сказал: «Простите, я не расслышал вашей фамилии. С кем имею честь?»

219. . . . .

Кальвин Кулидж был типичным вермонтцем, а я люблю истории о вермонтцах. Вот одна из них. Человек проходит мимо дома вермонтского фермера. Хозяин сидит на крыльце в кресле-качалке и невозмутимо покачивается. Прохожий замечает: «Так и качаетесь всю жизнь?» На что хозяин дома отвечает: «Пока еще не всю».

220. . . . .

Вермонтцам (по крайней мере таким, какими мы знаем их по бесчисленным юмористическим историям) присуща одна характерная черта: если вермонтца спросить о чем-нибудь, он даст точный ответ, но нередко умолчит об информации, которая может относиться к делу и быть весьма существенной. Великолепной иллюстрацией этой особенности может служить анекдот об одном вермонтском фермере, который отправился на соседнюю ферму, чтобы спросить у ее владельца: «Лем, что ты давал своей лошади в прошлом году, когда у нее были колики?» Лем ответил: «Отруби с черной патокой». Фермер вернулся домой. Через неделю он снова пришел к соседу и сообщил: «Лем, я дал своей лошади отрубей с черной патокой, и она сдохла». Лем ответил: «Моя тоже».

221. . . . .

Из историй о вермонтцах мне особенно нравится рассказ о туристе, путешествовавшем по Вермонту. Однажды он оказался на развилке. У обочины одной дороги стоял указатель «К устью реки Белой». У обочины другой дороги тоже стоял указатель «К устью реки Белой». Турист задумчиво почесал в затылке и спросил у стоявшего неподалеку вермонтца: «Если обе дороги ведут к устью реки Белой, то не все ли равно, по какой дороге мне идти?» «Мне все равно», — ответил вермонтец.

Г. ТАК ЛИ ОЧЕВИДНО?

222. . . . .

Эту историю рассказывают о многих математиках. Некий профессор во время лекции, сформулировав теорему, сказал: «Доказательство очевидно». Студент поднял руку и спросил: «А почему оно очевидно?» Профессор немного подумал, потом вышел из аудитории и, вернувшись минут через двадцать, заявил: «Да, все верно, теорема очевидна», — после чего как ни в чем не бывало продолжил лекцию.

223. . . . .

В другой истории речь идет о профессоре, встретившем в коридоре студента. Студент спросил: «Профессор! Я не понял доказательство теоремы 2, которое вы привели на лекции. Не могли бы вы объяснить мне его еще раз?» Профессор оцепенел на несколько минут, а очнувшись, сказал: «...что и требовалось доказать». Студент переспросил: «Так как же все-таки доказать теорему?» Профессор снова впал в транс и, снова вернувшись на землю, сказал: «...что и требовалось доказать». «Да, но вы так и не сказали мне, как доказывается теорема». «Хорошо, я приведу вам другое доказательство», — пообещал профессор. Он снова оцепенел и, придя в себя, снова сообщил: «...что и требовалось доказать». Несчастный студент впал в отчаяние. «Послушайте, — заметил профессор, — я привел вам три доказательства теоремы, и ни одно из них вы не поняли. Боюсь, что больше я ничем не смогу вам помочь». С этими словами профессор удалился.

224. . . . .

Рассказывают, что один известный физик выступал с лекцией перед группой коллег. Закончив свое выступление, он сказал: «А теперь я отвечу на любые вопросы». Один из слушателей поднял руку и обратился к докладчику: «Я не понял, как вы доказали теорему В». Физик ответил: «Это не вопрос».

225. . . . .

В бытность мою аспирантом в Принстонском университете я вместе с товарищами составил довольно любопытный перечень толкований слова «очевидно» различными профессорами математического факультета. Не стану сейчас приводить полностью фамилии профессоров, ограничусь лишь первыми буквами.

Когда профессор А. называет какое-нибудь утверждение очевидным, то это означает, что, отправившись домой и поразмыслив в течение нескольких недель, вы поймете, почему оно правильно.

Когда профессор Л. называет какое-нибудь утверждение очевидным, то это означает, что, отправившись домой и посвятив размышлениям над смыслом сказанного весь остаток своих дней, вы, можете быть, когда-нибудь поймете, почему оно правильно.

Когда профессор Ч. называет какое-нибудь утверждение очевидным, то это означает, что уже две недели, как оно известно аудитории.

Когда профессор Ф. называет какое-нибудь утверждение очевидным, то это означает, что оно скорее всего неверно.

Д. ИСТОРИИ О РАССЕЯННЫХ ПРОФЕССОРАХ

226. . . . .

Однажды студент повстречал в коридоре профессора и, поздоровавшись, спросил: «Вы уже позавтракали?» Профессор на миг задумался, а потом сказал: «Если вы скажете, в каком направлении я шел, когда мы встретились, то я смогу ответить на ваш вопрос».

227. . . . .

Следующую историю мне рассказали о математике Давиде Гильберте. Но когда я передал ее одному физику, тот сообщил, что слышал то же самое об Ампере!

Я буду придерживаться той версии, которую рассказали мне. Однажды Гильберт и его супруга устроили званый вечер. После прихода одного из гостей мадам Гильберт отвела мужа в сторону и сказала ему: «Давид, пойди и смени галстук». Гильберт ушел. Прошел час, а он все не появлялся. Встревоженная хозяйка дома отправилась на поиски супруга и, заглянув в спальню, обнаружила Гильберта в постели. Тот крепко спал. Проснувшись, он вспомнил, что сняв галстук, автоматически стал раздеваться дальше и, надев пижаму, лег в кровать.

228. . . . .

Из всех историй о рассеянных профессорах мне больше всего нравится история, которую рассказывают о Норберте Винере. Не знаю, насколько она правдива (хотя и вполне правдоподобна, так как в последние годы жизни Винер почти полностью потерял зрение), но, как бы там ни было, рассказывают следующее.

Однажды чета Винеров должна была переехать из одного района Кембриджа в другой. Миссис Винер, зная о рассеянности своего мужа, решила приучить его заранее к мысли о переезде. За тридцать дней до переезда она сказала мужу, когда тот собирался утром на лекцию: «Норберт, через тридцать дней мы переедем отсюда, и домой ты будешь возвращаться тогда на автобусе Б, а не А, как сейчас». На следующее утро миссис Винер сказала: «Норберт через двадцать девять дней мы переедем отсюда, и домой ты будешь возвращаться на автобусе Б, а не А, как сейчас». Винер послушно ответил: «Хорошо, дорогая». Так продолжалось вплоть до самого дня отъезда. Утром в день отъезда миссис Винер сказала: «Норберт, сегодня мы переезжаем отсюда, и домой ты будешь возвращаться на автобусе Б, а не А». Винер, как всегда, согласился: «Хорошо, дорогая». После лекции он, конечно, сел в автобус А и, доехав до своей бывшей квартиры, не обнаружил никого дома. «Ах, да! Ведь мы же сегодня переехали!» — вспомнил он, вернулся в Гарвард, сел в автобус Б и сошел на той остановке, поблизости от которой, как ему казалось, должна была находиться его новая квартира. К сожалению, Винер никак не мог вспомнить свой новый адрес. Пока он бродил по улицам, стемнело. Увидев в сумерках девочку, Винер подошел к ней и спросил: «Прошу прощения, не знаешь ли ты, где здесь живут Винеры?» Девочка ответила: «Ну, конечно, знаю, папочка. Пойдем, я провожу тебя домой!»

Е. МУЗЫКАНТЫ

229. . . . .

Композитор Роберт Шуман в начале одного из своих сочинений написал указание для исполнителей: «Быстро, как только возможно», а через несколько тактов — «Еще быстрее».

230. . . . .

Рассказывают, что Рихард Вагнер, прогуливаясь по улицам Берлина, встретил шарманщика, который, вертя ручку своей шарманки, исполнял увертюру к «Тангейзеру». Вагнер остановился и заметил: «Вы исполняете чуть быстрее, чем нужно». Шарманщик сразу узнал Вагнера и, сняв шляпу, раскланялся: «Благодарю вас, герр Вагнер! Спасибо за замечание!»

На следующий день Вагнер снова отправился на ту же улицу и нашел шарманщика на том же месте. На этот раз увертюра звучала в правильном темпе, а над головой шарманщика висел плакат: «Ученик Рихарда Вагнера».

231. . . . .

Рассказывают, что четыре музыканта из Бостонского филармонического оркестра вздумали однажды покататься на лодке. Один из них свалился за борт с криком: «Помогите! Я не умею плавать!» Его более ловкий коллега крикнул в ответ: «Тогда хотя бы сделай вид, что плаваешь!»

232. Брамс и любительский квартет. . . . . . .

Рассказывают, что у композитора Иоганнеса Брамса было четверо друзей, которые любили исполнять квартеты. Музыканты они были более чем посредственные, но люди очень милые, и Брамсу доставляло удовольствие общение с ними. Однажды они решили устроить Брамсу сюрприз и полгода усердно разучивали его последний квартет. Как-то раз они собрались все вместе, и, когда пришел Брамс, исполнитель партии скрипки сказал: «Иоганнес, мы приготовили для вас сюрприз. Пройдите, пожалуйста, в соседнюю комнату». Брамс последовал за ними в соседнюю комнату, музыканты взяли инструменты и заиграли. Несчастный Брамс с трудом выдержал несколько тактов, потом поднялся и с вежливой, хотя и несколько вымученной улыбкой, быстро направился к выходу. Исполнитель партии первой скрипки бросился вслед за ним с вопросом: «Иоганнес, понравилось ли вам наше исполнение? Выдержали ли мы ваш темп?» Брамс ответил: «Темп все выдержали прекрасно. Особенно вы».

Ж. ЭЛЕКТРОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

233. . . . .

Эксперименты по машинному переводу проводились неоднократно. Обычно для этого брали какую-нибудь фразу (желательно идиому), и одна машина осуществляла перевод с русского на английский, а другая выполняла обратный перевод с английского на русский. Цель эксперимента заключалась в том, чтобы установить, насколько сильные искажения могут возникнуть в процессе перевода.

Однажды для прямого перевода была выбрана фраза: «Дух силен, а плоть слаба». Вторая машина неверно «поняла» английское слово spirit, в результате обратный перевод гласил: «Спирт крепок, а мясо протухло».

234. . . . .

В другой раз для контрольного перевода была выбрана фраза: «С глаз долой, из сердца вон». После двукратного перевода она превратилась в следующую: «Бессердечный слепец».

235. . . . .

Этот анекдот — о коммивояжере фирмы ИБМ, который пытался продать компьютер, «знавший все на свете». Коммивояжер, всячески расхвалив достоинства своей ЭВМ, предложил покупателю: «Убедитесь сами. Спросите машину о чем угодно». «Хорошо», — согласился покупатель и ввел в машину вопрос: «Где мой отец?» Машина после минутной паузы напечатала ответ: «Ваш отец сейчас удит рыбу в Канаде». Покупатель радостно захохотал: «Вот так всеведущая машина! Да она просто никуда не годится! Моего отца давно нет в живых». Коммивояжер не сдавался. «Вы сформулируйте свой вопрос поточнее, — попросил он покупателя. — Позвольте, я сделаю это за вас». И коммивояжер ввел в машину следующий вопрос: «Где муж матери человека, стоящего перед тобой?» После небольшой паузы машина напечатала ответ: «Муж матери этого человека скончался несколько лет назад, а отец этого человека сейчас удит рыбу в Канаде».

236. . . . .

Когда первый в мире самолет с полностью автоматизированным управлением поднялся в воздух, находившиеся на его борту пассажиры почувствовали себя не совсем уютно. Внезапно из репродуктора раздался успокаивающий голос ЭВМ, управлявшей полетом: «Леди и джентльмены! Вы находитесь на борту первого в мире полностью автоматизированного самолета. Его ведут не пилоты, которым, как и всем людям, свойственно ошибаться, а совершенные автоматы, не знающие, что такое ошибка. Они позаботятся о ваших удобствах и безопасности. Вам не о чем беспокоиться, беспокоиться, беспокоиться, беспокоиться ...»

237. Вежливый компьютер. . . . .

Из всех историй об ЭВМ мне больше всего нравится история об одном компьютере, имевшем отношение к запуску космического корабля на Луну. В компьютер ввели два вопроса: 1) достигнет ли корабль Луны? 2) вернется ли корабль на Землю? — и после небольшой паузы получили ответ: «Да». Однако понять, что, собственно, означает это «да» (следует ли его считать ответом на первый вопрос, на второй вопрос или на конъюнкцию первого и второго вопросов), было невозможно. Поэтому в компьютер ввели третий вопрос: «Что да?» Компьютер, помедлив, ответил вежливо: «Да, сэр».

14. Как доказать что угодно

Существует, как мне кажется, довольно точное определение пьяного математика: пьяным называется математик, утверждающий, будто он может доказать что угодно!

В платоновском диалоге «Евтидем» Сократ, расхваливая непостижимое умение братьев-софистов Евтидема и Дионисидора вести спор, говорит: «Столь велико их искусство, что они могут опровергнуть любое утверждение, будь оно истинно или ложно». Далее Сократ описывает в диалоге, как Дионисидор доказывает одному из собеседников по имени Ктессип, что отец Ктессипа — пес.

Дионисидор. Скажи, есть ли у тебя пес?

Ктессип. Да, и, должен признаться, препаршивый.

Дионисидор. А нет ли у него щенков?

Ктессип. Как не быть! И все они похожи на него.

Дионисидор. И твой пес — их отец?

Ктессип. Да, я видел своими глазами, как он покрыл мать щенков.

Дионисидор. И этот пес твой?

Ктессип. Вне всякого сомнения.

Дионисидор. Итак, он отец и он твой. Следовательно, он твой отец, а щенки доводятся тебе братьями.

Вдохновленный примером великих софистов я докажу вам в этой главе много странного и удивительного.

А. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВСЯКОЙ ВСЯЧИНЫ

238. Доказательство того, что либо Траляля, либо Труляля существует. . . . . . .

Из этого доказательства не следует, что Траляля и Труляля существуют оба. Я докажу лишь, что по крайней мере один из них существует. Кто именно из двух братцев существует, останется для нас неизвестным.

Представьте себе, что перед нами лист бумаги с тремя утверждениями:

1) Траляля не существует.

2) Труляля не существует.

3) По крайней мере одно из утверждений на этом листе ложно.

Рассмотрим утверждение (3). Если оно ложно, то не верно, что по крайней мере одно из трех утверждений ложно. Значит, все три утверждения истинны. В частности, истинно утверждение (3), и мы пришли бы к противоречию. Следовательно, утверждение (3) не может быть ложно. Значит, оно должно быть истинно. Отсюда мы заключаем, что по крайней мере одно из трех утверждений в действительности ложно. Но утверждение (3) не может быть ложным. Следовательно, ложно либо утверждение (1), либо утверждение (2). Если ложно утверждение (1), то существует Траляля. Если ложно утверждение (2), то существует Труляля. Следовательно, либо Траляля, либо Труляля существует.

Однажды я выступал с лекцией о своих логических задачах-головоломках в студенческом математическом клубе. Собравшимся меня представил логик Мелвин

Фиттинг (мой бывший студент, который хорошо знал меня). Его краткая речь великолепно отразила дух этой книги. Он сказал: «Я имею честь представить вам профессора Смаллиана, который докажет вам, что либо он не существует, либо вы не существуете, но кто именно не существует, вам не известно».

239. Доказательство того, что Трулюлю существует. . . . .

Представьте, что перед нами лист бумаги с двумя утверждениями:

1) Трулюлю существует.

2) Оба утверждения на этом листе ложны.

Рассмотрим сначала утверждение (1). Если бы оно было истинно, то оба утверждения были бы ложны. В частности, было бы ложно утверждение (2), и мы пришли бы к противоречию. Следовательно, утверждение (2) ложно. Значит, не верно, что оба утверждения ложны, поэтому по крайней мере одно из них истинно. Так как утверждение (2) не истинно, то истинно должно быть утверждение (1). Следовательно, Трулюлю существует.

240. Существует ли Дед Мороз? . . . .

Должен сказать, что существование Деда Мороза многие подвергают сомнению. Несмотря на скептицизм, столь распространенный в наше время, я приведу три доказательства, не оставляющих ни малейшего сомнения в том, что Дед Мороз существует и должен существовать. Все три доказательства являются вариантами метода, заимствованного мною у Дж. Баркли Россера. Этот метод позволяет доказать что угодно.

Первое доказательство. Изложим это доказательство в форме диалога.

Первый логик. Если не ошибаюсь, Дед Мороз существует.

Второй логик. Разумеется, Дед Мороз существует, если вы не ошибаетесь.

Первый логик. Следовательно, мое утверждение истинно.

Второй логик. Разумеется!

Первый логик. Итак, я не ошибся, а вы согласились с тем, что если я не ошибаюсь, то Дед Мороз существует. Следовательно, Дед Мороз существует.

Второе доказательство. Приведенное выше доказательство представляет собой не что иное, как беллетризованный вариант следующего доказательства, предложенного Дж. Баркли Россером:

Если это утверждение истинно,
то Дед Мороз существует.

В основе этого доказательства лежит уже знакомая нам идея. С ней мы встречались, когда доказывали, что если обитатель острова рыцарей и лжецов высказывает утверждение «если и рыцарь, то то-то и то-то», то он должен быть рыцарем, а «то-то и то-то» должно быть истинно.

Если наше утверждение истинно, то Дед Мороз заведомо существует (потому что если это утверждение истинно, то должно быть верно, что если это утверждение истинно, то Дед Мороз существует, из чего следует, что Дед Мороз существует). Следовательно, то, о чем говорится в утверждении, верно, поэтому утверждение истинно. Значит, утверждение истинно, а если оно истинно, то Дед Мороз существует. Следовательно, Дед Мороз существует.

Вопрос. Предположим, что обитатель острова рыцарей и лжецов заявляет: «Если я рыцарь, то Дед Мороз существует?» Доказывало бы это, что Дед Мороз существует?

Ответ. Несомненно, доказывало бы. Однако поскольку дед Мороз не существует, то ни лжец, ни рыцарь не могли бы высказать подобное утверждение.

Третье доказательство.

Это утверждение ложно, и
Дед Мороз не существует.

Детали доказательства я предоставляю читателям.

Необходимые пояснения. Что в этих доказательствах «не так»? Ошибка в них та же, что и в рассуждениях претендента на руку Порции N-й: часть утверждений лишена смысла (об этом мы более подробно говорили в гл. 15), и их нельзя считать ни истинными, ни ложными.

Следующее доказательство, к рассмотрению которого мы сейчас переходим, основано на совершенно ином принципе.

241. Доказательство того, что единорог существует. . . . .

Я хочу доказать вам, что единорог существует. Для этого, очевидно, достаточно доказать более сильное (как нам кажется) утверждение о том, что существует существующий единорог. (Под существующим единорогом я понимаю единорога, который существует.) Ясно, что если существует существующий единорог, то какой-нибудь единорог тем более должен существовать. Итак, я должен доказать, что существующий единорог существует. Возможны два и только два случая:

1) *Существующий единорог существует.*

2) *Существующий единорог не существует.*

Второй случай мы исключаем из рассмотрения как противоречивый: как может не существовать существующий единорог? Существующий единорог непременно должен существовать точно так же, как синий единорог должен быть синим.

Необходимые пояснения. В чем ошибка этого доказательства? Оно представляет собой не что иное, как самую суть знаменитого онтологического доказательства существования бога, предложенного Декартом. Декарт определил бога как существо, обладающее всеми мыслимыми свойствами. Значит, по определению, бог должен обладать свойством существовать. Следовательно, бог существует.

Иммануил Кант объявил доказательство Декарта недействительным на том основании, что существование не есть свойство. Я считаю, что в доказательстве Декарта имеется гораздо более серьезная ошибка. Не вдаваясь в обсуждение вопроса о том, можно ли считать существование свойством, я хочу лишь заметить, что даже если существование — свойство, то доказательство Декарта остается неверным.

Рассмотрим сначала мое доказательство (звучит гордо, не так ли?) существования единорога. Насколько я могу судить, ошибка в приведенных мною рассуждениях состоит в следующем. Когда я привожу определение существующего единорога («под существующим единорогом я, разумеется, понимаю единорога, который существует»), то имею в виду не какого-то вполне определенного существующего единорога, а некоторого существующего единорога, или, если угодно, существующего единорога вообще. Это подразумеваемое слово «некоторый» допускает двойственное толкование: иногда оно может означать «любой, каждый, всякий», иногда же означает «по крайней мере один». Например, если я высказываю утверждение «у совы большие глаза», то оно означает, что у сов большие глаза, что у всех сов большие глаза или что у каждой совы большие глаза. Но если я высказываю утверждение «в этом доме сова», то оно отнюдь не означает, что в этом доме собрались все совы. Я имею в виду лишь, что в этом доме находится по крайней мере одна сова. Именно поэтому, когда я говорю: «Существующий единорог существует», то не ясно, что именно имеется в виду: что все существующие единороги существуют или что по крайней мере один существующий единорог существует. Если я имею в виду первое, то высказанное мною утверждение истинно: все существующие единороги, разумеется, существуют. Как бы мог уже существующий единорог не существовать? Но это не означает, что высказанное мною утверждение истинно во втором смысле, то есть что по крайней мере один единорог непременно должен существовать.

Аналогичное замечание можно сделать и по поводу доказательства Декарта. Из него по сути дела следует, что все боги существуют, то есть всякий X, удовлетворяющий определению бога по Декарту, должен обладать свойством существования. Но это отнюдь не означает, что по крайней мере один бог непременно существует.

242. Доказательство Эйлера. . . . .

О поездке Дидро в Россию по приглашению Екатерины II рассказывают следующий анекдот. Дидро был атеистом и не скрывал своих убеждений. Императрица находила его высказывания забавными, но один из ее вельмож счел, что они могут вызвать нежелательное брожение умов, и посоветовал пресечь вольнодумные речи Дидро. Против энциклопедиста был составлен небольшой заговор, к участию в котором был приглашен знаменитый математик Эйлер, человек глубоко религиозный. Эйлер объявил, что ему удалось найти доказательство существования бога, которое он охотно изложит Дидро в присутствии всего императорского двора. Дидро согласился на диспут. Эйлер, пользуясь тем, что Дидро совершенно не знал математика, встал и, глядя на своего оппонента, замогильным голосом произнес: «A в квадрате минус B в квадрате равно A минус B, умноженному на A, плюс B. Следовательно, бог существует. Вы согласны?» Раздался общий смех, и Дидро совершенно растерялся. Тут же он испросил у императрицы разрешение вернуться на родину и отбыл во Францию.

243. Доказательство того, что вы либо непоследовательны, либо самонадеянны.

Это доказательство я придумал лет тридцать назад и рассказывал его многим студентам и коллегам-математикам. Несколько же лет назад кто-то сообщил мне, что видел то же доказательство в каком-то философском журнале, но не может вспомнить автора. Все же я хочу познакомить читателя с этим доказательством, кому бы оно ни принадлежало.

Человеческий мозг — машина конечная, поэтому вы можете верить в истинность лишь конечного числа утверждений. Обозначим их $p1$, $p2$, ..., pn, где n — число утверждений, в истинность которых вы верите. Итак, вы верите в то, что каждое из утверждений $p1$, $p2$, ..., pn истинно. Если вы не слишком самонадеянны, то знаете, что не все, во что вы верите, истинно. Значит, если вы не самонадеянны, то знаете, что по крайней мере одно из утверждений $p1$, $p2$, ..., pn ложно. Вы же верите в истинность каждого утверждения. Следовательно, вы непоследовательны.

Примечание. Где ошибка в этих рассуждениях? Я считаю, что никакой ошибки здесь нет. По моему глубокому убеждению, разумно скромный человек должен быть непоследовательным.

Б. НОВЫЕ ДУРАЦКИЕ ШТУЧКИ

244. Расселл и папа римский. . . . .

Один философ испытал сильнейшее потрясение, узнав от Бертрана Расселла, что из ложного утверждения следует любое утверждение. Он спросил: «Вы всерьез считаете, что из утверждения «два плюс два — четыре» следует, что вы папа римский?» Расселл ответил утвердительно. «И вы можете доказать это?» — продолжал сомневаться философ. «Конечно!» — последовал уверенный ответ, и Расселл тотчас же предложил такое доказательство.

1) Предположим, что $2+2=5$.
2) Вычтем из обеих частей по 2: $2=3$.
3) Переставим правую и левую части: $3=2$.
4) Вычтем из обеих частей по 1: $2=1$.

Папа римский и я — нас двое. Так как $2=1$, то папа римский и я — одно лицо. Следовательно, я — папа римский.

245. Что лучше? . . . .

Что лучше: вечное блаженство или бутерброд с ветчиной? На первый взгляд кажется, что вечное блаженство лучше, но в действительности это не так! Судите сами. Что лучше вечного блаженства? Ничто. А бутербод с ветчиной лучше, чем ничего. Следовательно, бутерброд с ветчиной лучше, чем вечное блаженство.

246. Какие часы лучше? . . . .

Эту головоломку придумал Льюис Кэрролл. Какие часы лучше: те, которые вообще не идут, или те, которые отстают на одну минуту в сутки? По мнению Льюиса Кэрролла, часы, которые вообще не идут, лучше: они показывают точное время дважды в сутки, в то время как часы, которые отстают на одну минуту в сутки, показывают точное время лишь раз в два года. «Но что толку от того, что стоящие часы показывают точное время дважды в сутки, — возразите вы, — если нельзя сказать, когда это происходит?»

Почему нельзя? Представьте себе, что часы остановились ровно в восемь часов (утра или вечера — неважно). Разве не ясно, что в восемь часов утра и в восемь часов вечера они будут показывать точное время? «А как узнать, — спросите вы, — что наступило восемь часов?» Нет ничего проще! Не сводите глаз с часов, *и в тот момент, когда они покажут точное время,* наступит восемь часов (чего именно — утра или вечера — не так уж важно, так как отличить утро от вечера сумеет всякий).

247. Доказательство того, что существует лошадь с тринадцатью ногами. . . . .

Это доказательство не оригинально, оно частично восходит к математическому фольклору.

Требуется доказать, что существует по крайней мере одна лошадь, у которой тринадцать ног. Выкрасим всех лошадей в мире либо в синий, либо в красный цвет по следующей схеме. Прежде чем красить лошадь, сосчитаем, сколько у нее ног. Если у лошади ровно тринадцать ног, то выкрасим ее в синий цвет. Если же у лошади число ног окажется либо меньше, либо больше тринадцати, то выкрасим ее в красный цвет. Предположим, что мы выкрасили всех лошадей в мире. У синих лошадей по тринадцати ног, у красных число ног отлично от тринадцати. Выберем наугад какую-нибудь лошадь. Если она окажется синего цвета, то наше утверждение доказано. Если же она будет красного цвета, то выберем наугад вторую лошадь. Предположим, что вторая лошадь окажется синего цвета. Тогда наше утверждение опять-таки доказано. А что если вторая лошадь красного цвета? Тогда это будет лошадь другого цвета, и мы приходим к противоречию: откуда взяться другому цвету, если каждую лошадь в мире мы выкрасили только в один цвет?

248. . . . .

История с тринадцатиногой лошадью напомнила мне одну головоломку, придуманную Авраамом Линкольном. Если собачью ногу считать хвостом, то сколько ног будет у собаки? Ответ самого Авраама Линкольна гласил: «Четыре. Чем бы и как вы ни пересчитывали ноги собаки, даже собачьим хвостом, их все равно четыре».

249. Мой самый любимый метод доказательства. . . . .

Я хочу предложить вашему вниманию самую лучшую из известных мне «дурацких штучек» — абсолютно безотказный метод, позволяющий доказывать что угодно. Единственный недостаток метода состоит в том, что доступен он только фокусникам-престидижитаторам.

Продемонстрирую его вам на примере. Предположим, что мне необходимо доказать кому-то, будто я граф Дракула. Я говорю: «Из всей логики вам необходимо лишь знать, что если заданы любые два утверждения p, q и p истинно, то по крайней мере одно из двух утверждений p, q истинно». Против этого вряд ли кто-нибудь станет возражать. «Прекрасно, — говорю я, доставая из кармана колоду карт, — как вы видите, эта карта красной масти». С этими словами я кладу карту красной масти вверх рубашкой на левую руку своей «жертвы» и прошу накрыть карту сверху правой рукой. «Пусть p — утверждение о том, что вы держите карту красной масти, а q — утверждение о том, что я граф Дракула, — продолжаю я. — Утверждение p истинно. Согласны ли вы с тем, что либо p, либо q истинно?» Моя «жертва» соглашается. «Но утверждение p, как вы можете убедиться собственными глазами, ложно. Откройте карту!» — приказываю я. «Жертва» послушно открывает карту: к его изумлению, у него в руке оказывается карта черной масти! «Следовательно, — завершаю я доказательство, — утверждение q истинно. Значит, я граф Дракула!»

В. НЕСКОЛЬКО ЛОГИЧЕСКИХ КУРЬЕЗОВ

В двух предыдущих разделах мы рассмотрели несколько неверных рассуждений, которые на первый взгляд казались верными. Теперь нас ожидает нечто прямо противоположное: мы познакомимся с кое-какими принципами, которые на первый взгляд противоречат здравому смыслу, но тем не менее оказываются верными.

250. Принцип пьяницы. . . . .

Существует один принцип, играющий важную роль в современной логике. Некоторые из моих аспирантов дали ему выразительное название «принцип пьяницы». Связано оно, должно быть, с шуточной историей, которую я всегда рассказываю на своих лекциях перед тем, как приступить к его изложению.

Человек сидит у стойки в баре. Внезапно он ударяет кулаком по стойке и приказывает бармену: «Налей-ка мне и налей всем. Когда пью я, пьют все. Такой уж я человек!» Все выпивают, настроение у посетителей бара повышается. Через какое-то время человек, сидящий у стойки, снова ударяет кулаком по стойке и заплетающимся языком отдает бармену распоряжение: «Налей мне еще и налей всем еще по одной. Когда я пью еще одну, все пьют еще по одной! Такой уж я человек!» Все выпивают еще по одной, и настроение в баре повышается еще больше. Затем человек, сидящий у стойки, кладет на нее деньги и говорит: «А когда я плачу, платят все. Такой уж я человек!»

На этом анекдот о пьянице завершается. Проблема состоит в следующем: существует ли в действительности такой человек, что если он пьет, то пьют все? Ответ на этот вопрос удивит многих из вас.

Более драматический вариант возник в разговоре, который состоялся у меня с философом Джоном Бэконом. Существует ли на свете такая женщина, что если она утратит способность к деторождению, то все человечество будет обречено на вымирание?

Вариант проблемы, двойственный принципу пьяницы: существует ли по крайней мере один человек, такой, что если кто-нибудь пьет, то пьет и он?

Решение. Да, существует такой человек, что если он пьет, то пьют все. Это следует в конечном счете из странного принципа, согласно которому из ложного утверждения следует любое утверждение.

Взглянем на проблему со следующей точки зрения. Утверждение о том, что все пьют, либо истинно, либо ложно. Предположим, что оно истинно. Выберем кого-нибудь и назовем нашего избранника Джимом. Так как все пьют и Джим пьет, то верно, что если Джим пьет, то все пьют. Следовательно, существует по крайней мере один такой человек (а именно Джим), что если пьет он, то все пьют.

Предположим теперь, что наше утверждение ложно, то есть не верно, что все пьют. Что тогда? В этом случае существует по крайней мере один человек (назовем его Джимом), который не пьет. Поскольку не верно, что Джим пьет, то верно, что *если* Джим пьет, то пьют все. Следовательно, и в этом случае существует такой человек (а именно Джим), что если он пьет, то пьют все.

Подведем итог. Назовем загадочной фигурой всякого, кто обладает странным свойством: если он пьет, то пьют все. Суть дела заключается в том, что если пьют все, то каждый может служить загадочной фигурой. Если же пьют не все, то загадочной фигурой может служить любой непьющий.

Перейдем теперь к более драматическому варианту принципа пьяницы. Все рассуждения по существу остаются прежними, и мы заключаем следующее. Существует по крайней мере одна такая женщина (а именно любая женщина, если все женщины становятся бесплодными, и любая женщина, которая не становится бесплодной, если не все женщины утрачивают способность к деторождению), что если она утратит способность к деторождению, то и все женщины утратят способность к деторождению.

Перейдем теперь к «двойственному» принципу, согласно которому существует такой человек, что если кто-нибудь вообще пьет, то он пьет. Иначе говоря, либо существует по крайней мере один человек, который пьет, либо не существует. Если ни одного пьющего не существует, то выберем любого и назовем его Джимом. Поскольку не верно, что кто-нибудь пьет, то верно, что *если* кто-нибудь пьет, то Джим пьет. С другой стороны, если существует кто-нибудь пьющий, то возьмем любого пьющего и назовем его Джимом. Тогда верно, что если кто-нибудь пьет, и верно, что Джим пьет. Следовательно, верно, что если кто-нибудь пьет, то Джим пьет.

Эпилог

Когда я рассказал о принципе пьяницы своим студентам Линде Ветцель и Джозефу Беванер, они пришли в восторг. Вскоре после этого они прислали мне поздравительную открытку со следующим воображаемым диалогом (который вполне мог произойти в кафетерии после обеда).

Логик. Я знаю одного парня. Когда он пьет, пьют все.

Студент. Я вас не совсем понял. Что вы имеете в виду, когда говорите, что пьют все? Все человечество?

Логик. Да, конечно.

Студент. Но это же немыслимо! Вы хотите сказать, что стоит ему пропустить стаканчик, как тотчас же все обитатели Земли до единого выпивают свою порцию?

Логик. Вы совершенно правы.

Студент. Но это означает, что в какой-то момент времени все обитатели Земли выпивали одновременно. Такого же просто никогда не было!

Логик. Вы не слишком внимательно слушали меня.

Студент. Я выслушал вас достаточно внимательно. Более того, я опроверг вашу логику.

Логик. Вы говорите чепуху. Логику нельзя опровергнуть.

Студент. Как же нельзя, когда я только что опроверг?

Логик. Не вы ли говорили мне, что вы не пьете?

Студент. Гм... Знаете, давайте лучше поговорим о чем-нибудь другом.

251. Правильно ли рассуждение?

Мне много раз приходилось встречать рассуждения, которые кажутся вполне разумными, но все же содержат какую-нибудь ошибку. Недавно я узнал об одном рассуждении, которое на первый взгляд кажется неправильным (своего рода шуткой), но в действительности оказывается правильным.

Замечу, кстати, что правильным принято называть такое рассуждение, в котором заключение с необходимостью следует из посылок (посылки же не обязательно должны быть истинными).

Вот это рассуждение *.

1) *Все боятся Дракулы.*

2) *Дракула боится только меня. Следовательно, я Дракула.*

Не правда ли, звучит как глупая шутка? Но в действительности за шутливой маской скрывается серьезное лицо: рассуждение вполне правильно. В самом деле, так как все боятся Дракулы, то Дракула боится Дракулы, но в то же время Дракула не боится никого, кроме меня. Следовательно, я должен быть Дракулой!

Перед вами рассуждение, которое выглядит как шутка, но оказывается не шуточным, а серьезным. В этом и заключается соль этой шутки!

15. От парадокса к истине

А. ПАРАДОКСЫ

252. Парадокс Протагора. . . . .

Один из самых древних парадоксов рассказывает об учителе греческого права Протагоре, взявшем в ученики бедного, но весьма способного юношу и согласившемся учить его бесплатно при условии, что когда тот закончит курс обучения и выиграет свой первый судебный процесс, то уплатит Протагору определенную сумму. Ученик принял условия Протагора, но, завершив свое образование, не стал выступать в суде. По прошествии некоторого времени Протагор подал на своего ученика в суд, требуя уплаты обещанной ему суммы. Вот какие показания дали Протагор и его ученик на суде.

---

* Мне сообщил его философ Ричард Картрайт.

Ученик. Если я выиграю этот процесс, то по определению я не должен буду платить Протагору ничего. Если же я проиграю этот процесс, то тем самым я не выиграю свой первый судебный процесс, а по уговору я должен платить Протагору лишь после того, как выиграю свой первый судебный процесс. Следовательно, выиграю я этот судебный процесс или проиграю, платить мне все равно не придется.

Протагор. Если мой бывший ученик проиграет этот судебный процесс, то по определению он должен будет уплатить мне соответствующую сумму (ведь именно ради уплаты причитающейся мне суммы я и возбудил процесс). Если же мой бывший ученик выиграет этот судебный процесс, то тем самым он выиграет свой первый судебный процесс и по уговору должен будет уплатить мне долг. Следовательно, выиграет он этот судебный процесс или проиграет, но платить ему придется все равно.

Кто прав: Протагор или его ученик?

Примечание. Не уверен, что знаю правильный ответ на вопрос задачи. Как и самая первая головоломка (о том, был ли я одурачен или не был), парадокс Протагора служит прототипом целой серии парадоксов. Лучшее из известных мне решений этого парадокса предложил один юрист, которому я изложил суть возникающей здесь проблемы. Он заявил следующее: «Суд должен вынести решение в пользу ученика, то есть ученик не должен будет платить Протагору, так как к моменту начала процесса ученик еще не выиграл свой первый судебный процесс. Когда же суд окончится, то ученик по уговору будет должен Протагору какую-то сумму денег. Поэтому Протагор должен вернуться в суд и возбудить против ученика второе дело. На этот раз суду придется вынести решение в пользу Протагора, так как к началу второго процесса ученик уже выиграет свой первый судебный процесс».

253. Парадокс лжеца. . . . .

Так называемый, «парадокс лжеца», или парадокс Эпименида, в действительности является родоначальником целого семейства парадоксов определенного типа, известных под названием парадоксов лжеца (звучит как тавтология, не так ли?). В своем первоначальном варианте парадокс повествует о некоем критянине по имени Эпименид, высказавшем утверждение «все критяне лжецы».

Никакого парадокса здесь еще нет. Во всяком случае, утверждение Эпименида парадоксально ничуть не больше, чем утверждение о том, что некий обитатель острова рыцарей и лжецов высказывает утверждение «все жители этого острова лжецы». Из такого утверждения следует, что, во-первых, говорящий лжец и что, во-вторых, на острове существует по крайней мере один рыцарь. Аналогично из первоначального варианта парадокса Эпименида мы заключаем лишь, что Эпименид лжец и что по крайней мере один критянин говорит только правду. Никакого парадокса здесь, как вы видите, нет.

Вот если бы Эпименид был *единственным* критянином, то парадокс действительно возник бы. В этом случае единственный обитатель острова рыцарей и лжецов утверждал бы, что все жители острова лжецы (то есть в конечном счете утверждал бы, что сам он лжец, а это невозможно).

В улучшенном варианте парадокса лжеца говорится о человеке, высказывающем утверждение «я лгу». Лжет он или нет?

Следующий вариант улучшенного варианта мы будем называть в дальнейшем парадоксом лжеца. Рассмотрим утверждение:

Это утверждение ложно.

Истинно оно или ложно? Если оно ложно, то оно истинно. Если оно истинно, то оно ложно.

Решение парадокса лжеца мы обсудим чуть позже.

254. Парадокс Журдэна. . . . .

Следующий вариант парадокса лжеца был впервые предложен в 1913 г. английским математиком П. Э. Б. Журдэном. Иногда его называют «парадокс Журдэна с карточкой». Представьте себе карточку, на одной стороне которой написано:

(1) *Утверждение на другой стороне этой карточки истинно.*

Перевернув карточку на другую сторону, вы увидите надпись:

(2) *Утверждение на другой стороне этой карточки ложно.*

Парадокс заключается в следующем. Если первое утверждение истинно, то второе утверждение истинно (так как в первом утверждении говорится, что второе утверждение истинно). Следовательно, первое утверждение ложно (так как во втором утверждении говорится, что первое утверждение ложно). Если же первое утверждение ложно, то второе утверждение ложно. Следовательно, первое утверждение не ложно, а истинно. Таким образом, первое утверждение истинно в том и только в том случае, если оно ложно, а это невозможно.

255. Еще один вариант. . . . .

В другом варианте парадокса лжецов на карточке написаны следующие три утверждения:

(1) *Это утверждение содержит пять слов.*

(2) *Это утверждение содержит восемь слов.*

(3) *Ровно одно утверждение на этой карточке истинно.*

Утверждение (1) заведомо истинно, а утверждение (2) заведомо ложно. Проблема возникает в связи с утверждением (3). Если утверждение (3) истинно, то на карточке — два истинных утверждения, а именно утверждение (3) и утверждение (1), вопреки тому, о чем говорится в утверждении (3). Следовательно, утверждение (3) должно быть ложно. С другой стороны, если утверждение (3) ложно, то утверждение (1) — единственное истинное утверждение на карточке, а это означает, что утверждение (3) должно быть истинным! Итак, утверждение (3) истинно в том и только в том случае, если оно ложно.

Примечание. Где ошибка в рассуждениях во всех этих парадоксах? Вопрос этот весьма тонкий и довольно спорный. Некоторые (главным образом философы, а не математики) считают совершенно недопустимым любое утверждение, содержащее ссылку на себя. Подсчитав число входящих в него слов, вы убедитесь, что оно истинно.

Утверждение «это утверждение содержит шесть слов» ложно, тем не менее смысл его ясен, и значение истинности устанавливается без труда: в нем говорится, что число входящих в него слов равно шести, тогда как их только пять. Никаких сомнений относительно смысла утверждений в обоих рассмотренных нами примерах не возникает.

Рассмотрим теперь следующее утверждение:

Это утверждение истинно.

Оно не приводит ни к каким парадоксам. Никаких противоречий не возникает независимо от того, предположим ли мы, что оно истинно, или будем считать его ложным. Тем не менее это утверждение не имеет смысла по следующим причинам.

Всякий раз, когда возникает необходимость установить, что означает истинность какого-нибудь утверждения, мы начинаем с выяснения того, что означает само утверждение. Например, пусть X — утверждение «дважды два — четыре». Прежде чем я смогу понять, что означает истинность утверждения X, мне необходимо выяснить, что означает каждое из входящих в X слов и в чем заключается смысл самого утверждения X. В данном случае я знаю, что означает каждое слово, входящее в X, и мне ясен смысл утверждения X: в нем говорится, что дважды два равно четырем. Поскольку мне известно, что дважды два действительно равно четырем, то я знаю, что X должно быть истинно. Но я не мог бы знать, что X истинно, если бы не знал, что дважды два — четыре. Более того, я бы не мог знать, что означает истинность утверждения X, если бы не знал, что означает утверждение «дважды два — четыре». Приведенный мною пример отчетливо показывает, что истинность утверждения «X истинно» зависит от того, что означает утверждение X. Если же X устроено так, что его значение зависит от истинности утверждения «X истинно», то мы оказываемся в ловушке, ибо ходим по кругу.

Именно так и устроено внешне безобидное утверждение «это утверждение истинно». Прежде чем я смогу понять, что означает истинность этого утверждения, мне необходимо понять, что означает само утверждение. О чем в нем говорится? В нем сообщается лишь, что оно истинно, а я еще не знаю, что означает для данного утверждения быть истинным. Я не могу узнать, что означает истинность данного утверждения (не говоря уже о том, что мне не известно, истинно оно или ложно), пока не узнаю, что оно означает, а узнать, что оно означает, я не могу до тех пор, пока не узнаю, что означает его истинность. Таким образом, наше утверждение не содержит никакой информации. Такие утверждения принято называть не вполне обоснованными.

Парадокс лжеца (и все его варианты) основан на использовании необоснованных утверждений. (Необоснованными я называю для краткости не вполне обоснованные утверждения.) В задаче 253 («Парадокс лжеца») не обосновано утверждение «это утверждение ложно». В задаче 254 («Парадокс Журдэна») не обоснованы утверждения на обеих сторонах карточки. В задаче 255 («Еще один вариант») два утверждения вполне обоснованы, а третье не обосновано.

Заметим, кстати, что теперь мы можем сказать гораздо больше относительно того, в каком месте допустил ошибку в своих рассуждениях претендент на руку Порции N-й (см. гл. 5 о шкатулках Порции). Все ее предки по материнской линии использовали только вполне обоснованные утверждения, а Порция N-я, желая подшутить над своим пылким поклонником, искусно использовала необоснованные утверждения. Та же ошибка встречается и в ряде доказательствах, приведенных в начале предыдущей главы.

256. Что вы скажете? . . . .

Вернемся к нашим добрым старым друзьям Беллини и Челлини из истории о шкатулках Порции. Эти два замечательных мастера не только изготовляли шкатулки, но и гравировали на их крышках различные надписи. Челлини на своих шкатулках гравировал ложные утверждения, а Беллини украшал крышки шкатулок своей работы истинными утверждениями. Предположим, что, кроме Беллини и Челлини, в те далекие времена никто не гравировал надписей на крышках шкатулок (их сыновья занимались изготовлением шкатулок, но не умели гравировать).

Вам встретилась шкатулка, на крышке которой выгравировано:

Эту надпись
выгравировал Челлини

Чей это автограф? Если бы надпись оставил Челлини, то это означало бы, что он выгравировал истинное утверждение, и мы пришли бы к противоречию. Если бы надпись оставил Беллини, то это означало бы, что он выгравировал ложное утверждение, и мы опять пришли бы к противоречию. Кто же оставил надпись?

Вы не можете ответить на вопрос, сославшись на то, что утверждение «эту надпись выгравировал Челлини» не обосновано. Оно вполне обосновано. Оно сообщает нам некий исторический факт, а именно что эта надпись была выгравирована Челлини. Если надпись действительно была сделана рукой Челлини, то она истинна. Если ее сделал другой мастер, то она ложна. В чем здесь дело?

Трудность возникла из-за того, что я снабдил вас противоречивой информацией. Если бы вам действительно попалась в руки шкатулка с надписью «Эту надпись выгравировал Челлини» на крышке, то это означало бы, что либо Челлини в стародавние времена иногда гравировал не только ложные, но и истинные утверждения (вопреки тому, что я вам о нем говорил), либо по крайней мере, что некогда существовал какой-то другой мастер, гравировавший иногда на крышках шкатулок ложные утверждения (опять-таки вопреки тем сведениям, которые вы получили от меня). Следовательно, перед нами не подлинный парадокс, а своего рода жульническая проделка.

Кстати, вам все еще не удалось выяснить, как называется эта книга?

257. Утопить или повесить? . . . .

Эта головоломка известна довольно широко. Некто совершил преступление, караемое смертной казнью. На суде ему предоставляется последнее слово. Он должен произнести одно утверждение. Если оно окажется истинным, преступника утопят. Если же оно будет ложным, преступника повесят. Какое утверждение он должен высказать, чтобы привести палачей в полное замешательство?

258. Парадокс цирюльника. . . . .

Приведу еще один хорошо известный парадокс. В небольшом городке цирюльник бреет всех, кто не бреется сам, и не бреет никого из тех, кто бреется сам. Бреет ли цирюльник самого себя? Если цирюльник бреет самого себя, то тем самым он нарушает правило, так как бреет одного из тех, кто бреется сам. Если же цирюльник не бреет самого себя, то он опять-таки нарушает правило, так как не бреет одного из тех, кто не бреется сам. Что делать цирюльнику?

259. Что вы на это скажете? . . . .

Один из островов рыцарей и лжецов малонаселен: на нем живут только два туземца A и B. Они высказали следующие утверждения:

A: B — лжец.

B: A — рыцарь.

Кто такой A: рыцарь или лжец? А что можно сказать о B?

Решения задач 257, 258, 259. . . . .

257. Преступник должен сказать: «Я буду повешен».

258. Ничего: существование такого цирюльника логически невозможно.

259. В ответ на вопросы задачи вам следует заявить, что автор опять лжет! Описанная мною ситуация невозможна. В действительности эта задача представляет собой не что иное, как парадокс Журдэна в слегка «загримированном» виде (см. задачу 254).

Если бы A был рыцарем, то B в действительности был бы рыцарем. Следовательно, A в действительности не рыцарь. Если бы A был лжецом, то B в действительности был бы не лжецом, а рыцарем. Значит, его утверждение было бы истинным, и A был бы рыцарем. Следовательно, A не может быть ни рыцарем, ни лжецом, так как и в том и в другом случае мы приходим к противоречию.

Б. ОТ ПАРАДОКСА К ИСТИНЕ

Кто-то определил парадокс как истину, поставленную с ног на голову. Действительно, во многих парадоксах содержатся идеи, которые после незначительной модификации приводят к важным открытиям. Следующие три задачи могут служить убедительным подтверждением этого принципа.

260. Где подвох в этой истории? . . . .

Однажды инспектор Крэг посетил некую общину и побеседовал с одним из ее членов — социологом Макснурдом, который сообщил следующее:

— Члены общины организовали несколько клубов. Каждый член общины может состоять членом более одного клуба. Каждый клуб получает название в честь одного из членов общины. Никакие два клуба не названы в честь одного и того же члена общины, и имя каждого члена общины носит какой-то клуб. Член общины не обязательно должен быть членом клуба, носящего его имя. Всякого, кто состоит членом клуба, носящего его имя, мы называем *номинабельным*. Всякого, кто не состоит членом клуба, носящего его имя, мы называем *неноминабельным*. Самое удивительное в нашей общине — это то, что все неноминабельные ее члены входят в один клуб.

Инспектор Крэг на миг задумался и внезапно понял, что Макснурд не очень силен в логике: в его истории концы не сходятся с концами. Почему?

Решение. В действительности эта задача представляет собой не что иное, как парадокс цирюльника в новом обличье.

Предположим, что рассказанная Макснурдом история соответствовала бы истине. Клуб, объединяющий всех неноминабельных членов общины, назван в честь какого-то члена общины, например в честь Джека. Будем называть этот клуб для краткости просто клубом Джека. Сам Джек может быть либо номинабельным, либо неноминабельным. И в том и в другом случае мы приходим к противоречию.

Предположим, что Джек номинабелен. Тогда Джек состоит в клубе Джека. Но состоять членами клуба Джека могут только неноминабельные члены общины, и мы приходим к противоречию. С другой стороны, если Джек неноминабелен, то он состоит членом клуба неноминабельных членов общины. Значит, Джек состоит членом клуба Джека, объединяющего всех неноминабельных членов общины. Но тогда Джек должен быть номинабельным членом общины. Следовательно, мы и в этом случае приходим к противоречию.

261. Нет ли в общине тайного агента? . . . . .

Однажды инспектор Крэг посетил другую общину, где встретил своего старого друга социолога Макснаффа. Крэг знал Макснаффа со студенческой скамьи (оба учились в Оксфорде) как человека, безукоризненно владеющего логикой. Макснафф рассказал Крэгу о своей общине следующее:

— Как и в других общинах, мы организовали у себя клубы. Имя каждого члена общины носит ровно один клуб, и каждый клуб назван в честь какого-нибудь члена общины. Каждый член нашей общины, вступая в клуб, может либо открыто заявить об этом, либо сохранить свое членство в тайне. Всякого, кто не заявил во всеуслышанье о своем членстве в клубе, носящем его имя, мы называем *подозрительным*. Всякого, о ком известно, что он тайно состоит членом клуба, носящего его имя, мы называем *тайным агентом*. Наша община обладает одной прелюбопытнейшей особенностью: все подозрительные состоят членами одного клуба.

Инспектор Крэг после секундного размышления понял, что в отличие от предыдущей истории отчет профессора Макснаффа не содержит ни малейшего противоречия. Более того, выяснилось одно интересное обстоятельство: чисто логическим путем оказалось возможным определить, нет ли в общине тайных агентов.

Итак, нет ли в общине тайных агентов?

Решение. Клуб всех подозрительных назван в честь кого-то из членов общины, например в честь Джона. Будем называть этот клуб в дальнейшем клубом Джона.

Сам Джон либо состоит членом клуба Джона, либо не состоит. Предположим, что он не состоит. Тогда

Джон не может быть подозрительным (так как всякий подозрительный член общины состоит членом клуба Джона). Это означает, что Джон во всеуслышанье заявил о своем членстве в клубе Джона. Следовательно, если Джон не состоит членом клуба Джона, то Джон во всеуслышанье заявляет о своем членстве в клубе Джона, и мы приходим к противоречию. Значит, Джон должен состоять членом клуба Джона. А поскольку каждый член клуба Джона подозрителен, то Джон должен быть подозрительным. Значит, Джон не объявил во всеуслышанье о своем членстве в клубе Джона и в то же время состоит членом клуба Джона. Следовательно, Джон тайный агент или, попросту говоря, шпик!

Заметим, что если воспользоваться решением задачи 260, то эту задачу можно решить проще. Действительно, если бы в общине не было тайных агентов, то подозрительные ничем бы не отличались от неноминабельных, поэтому множество подозрительных обладало бы всеми свойствами множества неноминабельных членов общины. Значит, все *неноминабельные* члены общины состояли бы членами одного клуба. Но в задаче 260 мы доказали, что все неноминабельные члены общины не могут состоять членами одного клуба. Следовательно, предположение о том, что в общине нет тайных агентов, приводит к противоречию. Значит, в общине непременно должен быть тайный агент (хотя мы и не знаем, кто он).

На этих двух доказательствах отчетливо видно различие между так называемым «конструктивным» и «неконструктивным» доказательством. Второе доказательство неконструктивно: мы приходим к заключению, что в общине не может не быть тайных агентов, но из доказательства не следует, кто эти тайные агенты. В отличие от него первое доказательство конструктивно: оно позволяет установить, кто тайный агент (член общины по имени Джон), в честь которого назван клуб подозрительных.

262. Задача о Вселенной. . . . .

В одной Вселенной члены каждого множества обитателей состоят в своем особом клубе. Регистратор этой Вселенной хотел бы присвоить каждому клубу имя одного из обитателей так, чтобы никакие два клуба не были названы в честь одного и того же обитателя Вселенной, и у каждого обитателя был клуб, названный его именем.

Если бы число обитателей этой Вселенной было конечно, то регистратору не удалось бы осуществить свой грандиозный замысел, так как клубов было бы больше, чем обитателей Вселенной: например, если бы во всей Вселенной было бы только 5 обитателей, то число клубов достигало бы 32 (один клуб был бы пустым множеством). Если бы во всей Вселенной было бы 6 обитателей, то число клубов достигало бы 64, а во Вселенной с n обитателями число клубов составляло бы 2^n. Но в той Вселенной, о которой мы сейчас говорим, число обитателей было бесконечно, поэтому регистратор надеялся на благоприятный исход своей затеи. На протяжении миллиардов лет он день за днем упорно пытался осуществить свой замысел, но любая попытка неизменно оканчивалась неудачей. Чем это объясняется: недостаточно удачным выбором схемы или принципиальной неосуществимостью затеи?

Решение. Неудачи связаны с принципиальной неосуществимостью намерений регистратора. Этот замечательный математический факт был открыт математиком Георгом Кантором. Предположим, что регистратору удалось присвоить всем клубам имена обитателей Вселенной с соблюдением всех правил (никакие два клуба не названы именем одного и того же обитателя Вселенной, и у каждого обитателя есть клуб, названный его именем). Назовем обитателя Вселенной *неноминабельным*, если он не состоит членом клуба, названного в его честь. Все неноминабельные обитатели Вселенной образуют хорошо определенное множество, а мы знаем, что члены каждого множества обитателей Вселенной состоят в своем особом клубе. Следовательно, должен существовать клуб неноминабельных обитателей Вселенной, что невозможно по причинам, изложенным в задаче 260 (этот клуб должен быть назван в честь одного из обитателей Вселенной, который не может быть ни номинабельным, ни неноминабельным, так как и то и другое приводит к противоречию).

263. Задача об учтенных множествах. . . . . .

Перед вами та же задача в новом одеянии. Некоторые из вводимых здесь понятий понадобятся нам в следующей главе.

У одного математика хранится «Книга множеств». На каждой ее странице дается описание какого-нибудь множества чисел (под множеством чисел мы понимаем подмножество множества целых положительных чисел 1, 2, 3, ..., n, ...). Любое множество, описанное на какой-нибудь странице книги, называется *учтенным* множеством. Страницы книги перенумерованы по порядку целыми положительными числами.

Назовите множество, описания которого нет ни на одной странице «Книги множеств».

Решение. Пусть n — любое целое положительное число. Назовем *n экстраординарным числом*, если n принадлежит множеству, описанному на n-й странице, и *ординарным*, если не принадлежит множеству, описанному на n-й странице.

Множество ординарных чисел не может быть описано ни на одной странице «Книги множеств». Действительно, если бы оно было перечислено на k-й странице, то число k не могло бы быть ни экстраординарным, ни ординарным, так как и в том и в другом случае мы пришли бы к противоречию.

16. Открытие Гёделя

А. ГЁДЕЛЕВЫ ОСТРОВА

Задачи этого раздела представляют собой адаптированные варианты знаменитого принципа, открытого Куртом Гёделем, работу которого по математической логике мы рассмотрим в конце главы.

264. Остров G. . . . .

Население острова G составляют лишь рыцари, всегда говорящие только правду, и лжецы, которые всегда лгут. Кроме того, некоторых рыцарей называют «признанными рыцарями» (они проявили себя чем-то, подтвердив свое рыцарское звание), а некоторых лжецов (подтвердивших свою приверженность ко лжи) — «отъявленными лжецами». Обитатели острова G состоят членами различных клубов. Каждый островитянин может быть членом нескольких клубов. Любой островитянин X утверждает относительно любого клуба C, что он либо состоит членом клуба C, либо не состоит членом клуба C.

Известно, что выполняются следующие четыре условия:

E_1: Все признанные рыцари состоят членами одного клуба.

E_2: Все отъявленные лжецы состоят членами одного клуба.

C (*условие дополнительности*; *C* — от лат. complementum — дополнение). Все островитяне, не состоящие членами любого клуба C, состоят в одном клубе. (Этот клуб называется дополнением клуба C и обозначается C.)

G (*условие гёделевости*). Для любого клуба C существует по крайней мере один островитянин, который утверждает, что состоит членом клуба C. (Разумеется, его утверждение о членстве в клубе C может быть ложным, так как островитянин может оказаться лжецом.)

264а (по Гёделю). . . . .

1) Докажите, что на острове G существует по крайней мере один непризнанный рыцарь.

2) Докажите, что на острове существует по крайней мере один неотъявленный лжец.

264б (по Тарскому). . . . .

1) Состоят ли все лжецы острова членами одного клуба?

2) Состоят ли все рыцари острова членами одного клуба?

Решение задачи 264а. По условию E_1 все признанные рыцари острова (образующие множество E) состоят членами одного клуба. Следовательно, по условию C все островитяне, входящие в множество $\bar{E}$ непризнанных рыцарей, также состоят членами одного клуба. Но тогда по условию G существует по крайней мере один островитянин, который утверждает, что состоит членом клуба $\bar{E}$ (иначе говоря, он утверждает, что не принадлежит к множеству непризнанных рыцарей).

Лжец не мог бы утверждать, что он не признанный рыцарь (поскольку утверждение о том, что лжец — не признанный рыцарь, истинно). Следовательно, островитянин, высказавший это утверждение, должен быть рыцарем. Поскольку он рыцарь, то высказываемые им утверждения истинны, поэтому он не признанный рыцарь. Значит, островитянин, высказавший это утверждение — рыцарь, но не признанный рыцарь.

По условию E_2 все отъявленные лжецы состоят членами одного клуба. Следовательно (по условию G), существует по крайней мере один островитянин, утверждающий, что он отъявленный лжец (он утверждает, что состоит членом клуба отъявленных лжецов). Этот островитянин не может быть рыцарем (так как рыцарь не мог бы утверждать, что он лжец). Значит, он лжец. Следовательно, его утверждение ложно, поэтому он не отъявленный лжец. Значит, он лжец, но не отъявленный лжец.

Решение задачи 264б. Если бы все лжецы состояли членами одного клуба, то по крайней мере один островитянин утверждал бы, что он лжец. Но ни рыцарь, ни лжец не могли бы высказать такое утверждение. Следовательно, все лжецы не состоят в одном клубе.

Если бы все рыцари состояли членами одного клуба, то (по условию C) все лжецы также состояли бы членами одного клуба, что, как мы доказали, невозможно. Следовательно, все рыцари также не состоят членами одного клуба.

Примечания. 1. Задача 264б дает еще одно решение задачи 264а. Хотя оно и неконструктивно, но тем не менее несколько проще предыдущего, Если бы каждый рыцарь был признанным, то множество всех рыцарей совпадало бы с множеством признанных рыцарей, что невозможно, так как (по условию E_1) все признанные рыцари состоят в одном клубе, а все рыцари (как показано в решении задачи 264б) не состоят в одном клубе. Таким образом, предположение о том, что все рыцари признанные, приводит к противоречию. Следовательно, должен существовать по крайней мере один непризнанный рыцарь. Аналогично если бы все лжецы были отъявленными, то множество отъявленных лжецов совпадало бы с множеством всех лжецов, что невозможно, так как все отъявленные лжецы состоят членами одного клуба, в то время как все лжецы не состоят членами одного клуба.

В отличие от только что приведенного доказательства наше первое доказательство позволяет установить дополнительные подробности: всякий, кто утверждает, что он непризнанный рыцарь, должен быть непризнанным рыцарем, а всякий, кто утверждает, что он отъявленный лжец, должен быть неотъявленным лжецом.

2. Доказывая, что все лжецы не состоят членами одного клуба, мы использовали только условие G. Условия E_1, E_2 и C нам не понадобились. Значит, из одного лишь условия G следует, что все лжецы не состоят членами одного клуба. Более того, условие G *эквивалентно* утверждению, что все лжецы не состоят членами одного клуба. Действительно, будем считать известным, что все лжецы не состоят членами одного клуба. Тогда условие G можно вывести следующим образом.

Выберем любой клуб С. Так как все лжецы не состоят членами одного клуба, то С не множество всех лжецов. Следовательно, либо членом клуба С состоит какой-нибудь рыцарь, либо какой-нибудь лжец не состоит членом клуба С. Если какой-нибудь рыцарь состоит членом клуба С, то он заведомо утверждает, что состоит членом этого клуба (так как он всегда говорит только правду). Если бы какой-нибудь лжец не состоял членом клуба С, то он утверждал бы, что состоит членом этого клуба (так как он лжет). Следовательно, и в том и в другом случае *кто-нибудь* утверждает, что состоит членом клуба C.

265. Гёделевы острова в общем и целом. . . . .

Рассмотрим теперь любой остров, населенный рыцарями и лжецами, на котором имеются клубы. Предполагается, что, кроме рыцарей и лжецов, на острове нет других обитателей. Назовем остров *гёделевым*, если выполняется условие G, то есть если для любого клуба C найдется по крайней мере один островитянин, утверждающий, что состоит членом этого клуба.

Как-то раз инспектор Крэг посетил такой остров, населенный рыцарями и лжецами, состоящими членами клубов. Крэгу (человеку с необычайно широким кругом интересов, теоретические познания которого не уступают его практической сметке) захотелось узнать, находится ли он на гёделевом острове. Ему удалось собрать следующие сведения.

Каждый клуб носит имя одного из островитян, и у каждого островитянина есть клуб, названный его именем. Островитянин не обязательно состоит членом клуба, носящего его имя. Островитянина, который состоит членом клуба, названного в его честь, называют *номинабельным*. Островитянина, который не состоит членом клуба, названного его именем, называют *неноминабельным*. Об островитянине X говорят, что он *друг* островитянина Y, если X подтверждает номинабельность островитянина Y.

Крэг не знал, находится ли он на гёделевом острове до тех пор, пока не обнаружил, что культурная жизнь на острове удовлетворяет некоторому условию, которое мы назовем условием H.

H: Для любого клуба C существует другой клуб D, такой, что у каждого члена клуба D по крайней мере один друг состоит членом клуба C, а у каждого не члена клуба D по крайней мере один друг не состоит членом клуба C.

Из условия H Крэг вывел заключение относительно того, гёделев ли тот остров, на котором он находился.

К какому заключению пришел инспектор Крэг?

Решение. Остров гёделев. Выберем любой клуб С. Пусть D — клуб, заданный условием H. Клуб D носит имя какого-нибудь островитянина, например островитянина по имени Джон. Сам Джон либо состоит, либо не состоит членом клуба D.

Предположим, что Джон состоит членом клуба D. Тогда у него есть друг (назовем его Джек) в клубе С, который подтверждает, что Джон номинабелен. Поскольку Джон не состоит членом клуба D, то Джон действительно номинабелен. Значит, Джек рыцарь. Следовательно, Джек рыцарь и состоит членом клуба С, поэтому Джек утверждает, что состоит членом клуба С.

Предположим, что Джон не состоит членом клуба D. Тогда у Джона есть друг (назовем его Джим), не состоящий членом клуба С и подтверждающий, что Джон номинабелен. Поскольку Джон не состоит членом клуба D, то Джон в действительности неноминабелен. Значит, Джим лжец. Итак, Джим лжец и не состоит членом клуба С, поэтому Джим солгал бы и утверждал бы, что состоит членом клуба С. Следовательно, независимо от того, состоит или не состоит Джон членом клуба D, существует островитянин, утверждающий, что он состоит членом клуба С.

> *Примечание.* Объединяя решения задач 264 и 265, можно утверждать, что на любом острове, удовлетворяющем условиям E_1, E_2, C и H, заведомо найдется непризнанный рыцарь и неотъявленный лжец. Этот результат в действительности представляет собой «замаскированную» форму знаменитой теоремы Гёделя о неполноте, к которой мы еще вернемся в разделе В этой главы.

Если вы хотите предложить одному из ваших друзей действительно трудную задачу, задайте ему задачу 264 для острова, удовлетворяющего условиям E_1, E_2, C и H (об условии G пока умолчите). Выведет ли ваш приятель самостоятельно условие G?

Б. ДВАЖДЫ ГЁДЕЛЕВЫ ОСТРОВА

Задачи этого раздела представляют более специальный интерес, и ознакомление с ними можно отложить до прочтения раздела В.

Под *дважды гёделевыми* островами мы будем понимать острова рыцарей и лжецов, объединенные в клубы, удовлетворяющие условию *CG*.

CG: для любых двух клубов C_1, C_2 найдутся островитяне A, B, о которых известно следующее: A утверждает, что B состоит членом клуба C_1, а B утверждает, что A состоит членом клуба C_2.

Насколько мне известно, из условия *CG* не следует условие *G*, а из условия *G* не следует условие *CG*. Оба условия выглядят совершенно независимыми, поэтому (насколько мне известно) дважды гёделевы острова не обязательно должны быть гёделевыми островами.

Изучение дважды гёделевых островов — мой «конек». Задачи, связанные с ними, имеют такое же отношение к парадоксу Журдэна с двусторонней карточкой (см. задачу 254 в предыдущей главе), какое задачи о гёделевых островах имеют к парадоксу лжецов.

266. Дважды гёделев остров S. . . . .

Однажды мне посчастливилось открыть дважды гёделев остров S, для которого выполняются условия E_1, E_2 и *C* острова G.

а) Можно ли определить, найдется ли на острове S хоть один непризнанный рыцарь? Что можно сказать о неотъявленном лжеце?

б) Можно ли установить, состоят ли рыцари острова S членами одного клуба? А лжецы?

Решение. Начнем со второй части задачи. Если все рыцари острова состоят членами одного клуба, то (по условию *C*) все лжецы также состоят членами одного клуба, а если все лжецы острова S состоят членами одного клуба, то (в силу того же условия *C*) рыцари также состоят членами одного клуба. Следовательно, если представители одной из двух групп населения острова (либо рыцари, либо лжецы) состоят членами одного клуба, то представители каждой из двух групп состоят членами одного клуба. Итак, предположим, что все рыцари состоят членами одного клуба и что все лжецы состоят членами одного клуба. Тогда по условию CG должны найтись островитяне A, B, высказывающие следующие утверждения:

A: B — лжец.

B: A — рыцарь.

Как показано в решении задачи 259 в предыдущей главе, это невозможно. Следовательно, все рыцари не могут состоять членами одного клуба, и все лжецы не могут состоять членами одного клуба.

Что касается первой половины задачи, то ее можно решить двумя способами. Первый из них проще того способа, которым мы только что решили вторую часть задачи, зато второй способ более поучительный.

Первый способ. Так как все рыцари не состоят членами одного клуба, а все признанные рыцари состоят членами одного клуба, то множество всех рыцарей не совпадает с множеством всех признанных рыцарей. Следовательно, не все рыцари признанные. Аналогично не все лжецы отъявленные.

Второй способ. Так как все признанные рыцари состоят членами одного клуба, то все островитяне, не принадлежащие к числу признанных рыцарей, также состоят членами одного клуба. Если эти клубы выбрать в качестве клубов C_1, C_2, то (по условию CG) найдутся островитяне A, B, высказывающие следующие утверждения:

A: B — признанный рыцарь.

B: A — не признанный рыцарь.

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что по крайней мере один из островитян A, B должен быть признанным рыцарем (точнее говоря, требуется доказать, что если A — рыцарь, то он не признанный рыцарь, а если A — лжец, то B должен быть не признанным рыцарем. Установить, кто из островитян A, B не признанный рыцарь, мы не можем, хотя и знаем, что кто-то из них не признанный рыцарь. [С точно такой же ситуацией мы уже сталкивались в задаче 134 (о паре шкатулок, изготовленных Беллини и Челлини): одна из шкатулок заведомо должна быть работы Беллини, но установить, какую из двух шкатулок изготовил Беллини, невозможно.]

Аналогичным образом, так как все отъявленные лжецы состоят членами одного клуба, то все островитяне, не принадлежащие множеству отъявленных лжецов, также состоят членами одного клуба. Следовательно (по условию CG), непременно найдутся островитяне А, В, высказывающие следующие утверждения:

А: В — отъявленный лжец,

В: А — не отъявленный лжец.

Отсюда мы заключаем, что если В — лжец, то он не отъявленный лжец, а если В — рыцарь, то А — не отъявленный лжец (доказательство этого утверждения мы также предоставляем читателю). Итак, в любом случае либо А, либо В — не отъявленный лжец, но мы не знаем, кто именно. (По существу эта задача ничем не отличается от задачи 135 о двух шкатулках, изготовленных Беллини и Челлини.)

267. Остров S^1. . . . .

Однажды мне удалось открыть еще один дважды гёделев остров S^1, который показался мне еще более интересным, чем остров S. Для острова S^1 выполнены оба условия E_1, E_2, но не известно, выполняется ли условие C. (Напомним, что, согласно этому условию, все островитяне, не состоящие членами клуба C, состоят членами одного клуба.)

По-видимому, невозможно доказать, что на острове S^1 непременно есть не признанный рыцарь или что на том же острове есть не отъявленный лжец. Невозможно, по-видимому, доказать также, что все рыцари не состоят членами одного клуба или что все лжецы не состоят членами одного клуба. Но следующие утверждения доказать можно:

а) На острове S^1 найдется либо не признанный рыцарь, либо не отъявленный лжец.

б) Не может быть, чтобы все рыцари состояли членами одного клуба и все лжецы состояли членами одного клуба.

Решение. Докажем сначала утверждение (б). Предположим, что все рыцари состоят членами одного клуба и все лжецы состоят членами одного клуба. Тогда найдутся островитяне А, В, о которых известно следующее: А утверждает, что В — лжец, а В утверждает, что А — рыцарь. Но это, как мы уже знаем, невозможно (см. предыдущую задачу или задачу 259 в предыдущей главе). Итак, невозможно, чтобы все рыцари состояли членами одного клуба и все лжецы также состояли членами одного клуба. Значит, либо все рыцари не состоят членами одного клуба, либо все лжецы не состоят членами одного клуба. Если все рыцари не состоят членами одного клуба, то непременно найдется по крайней мере один не признанный рыцарь (поскольку все признанные рыцари состоят членами одного клуба). Если все лжецы не состоят членами одного клуба, то непременно найдется по крайней мере один не отъявленный лжец. Но какой именно случай представится на острове, мы не знаем. Итак, утверждение (а) доказано.

Альтернативное (и более интересное) доказательство того, что непременно найдется не признанный рыцарь или не отъявленный лжец, состоит в следующем.

Так как признанные рыцари состоят в одном клубе и отъявленные лжецы состоят в одном клубе, то найдутся островитяне А, В, высказывающие следующие утверждения:

А: В — отъявленный лжец.

В: А — признанный рыцарь.

Предположим, что А — рыцарь. Тогда его утверждение истинно. Значит, В — отъявленный лжец, поэтому его утверждение ложно. Следовательно, А — не признанный рыцарь. Значит, А — не признанный рыцарь. Если же А — лжец, то высказанное В утверждение ложно, поэтому В — лжец. Высказанное А утверждение также ложно, поэтому В — не отъявленный лжец. Следовательно, В — не отъявленный лжец.

Итак, либо А — не признанный рыцарь, либо В — не отъявленный лжец (но мы опять не знаем, какая из двух альтернатив истинна).

Эта задача очень напоминает одну из задач о парах шкатулок (задачу 136 из гл. 9), в которой одна из двух шкатулок (какая именно — неизвестно) изготовлена либо Беллини, либо Челлини (но кем именно — опять-таки неизвестно).

268. Несколько нерешенных задач. . . . . . .

Я придумал несколько задач о гёделевых и дважды гёделевых островах, но решить их так и не собрался. Думаю, что читателю будет приятно испробовать свои силы на работе, сулящей неожиданности и, быть может, даже открытия.

268а. . . . .

Я уже говорил о том, что, *насколько мне известно*, ни одно из условий G, CG не следует из другого. Удастся ли вам доказать (или опровергнуть, что я считаю маловероятным) мою гипотезу? Для этого вам необходимо «построить» остров, для которого выполняется условие G, но не выполняется условие CG, а также остров, для которого выполняется условие CG, но не выполняется условие G. Построить остров означает в данном случае указать, кем он населен, кто из его обитателей рыцари и кто лжецы, какие обитатели состоят и какие не состоят членами одного клуба. (Кто из рыцарей обладает правом называться признанным рыцарем и кого из лжецов следует называть отъявленными лжецами, для решения этой задачи значения не имеет.)

268б. . . . .

Можете ли вы доказать (или опровергнуть) мою гипотезу о том, что на острове S^1 не обязательно должны быть не признанные рыцари и не отъявленные лжецы (хотя непременно должны быть рыцари и лжецы)? Иначе говоря, можете ли вы построить остров, удовлетворяющий условиям E_1, E_2 и CG, на котором есть рыцари, но нет не признанных рыцарей? Можете ли вы построить остров, на котором есть лжецы, но нет не отъявленных лжецов? (На этот раз при построении островов необходимо указать не только, кто из его обитателей называется рыцарем или лжецом и состоит в том или ином клубе, но и указать, каких рыцарей следует считать признанными и каких лжецов — отъявленными.)

268в. . . . .

Предположим, что все острова, о которых говорится в предыдущих задачах, допускают построение (интуитивно я убежден в том, что построить эти острова можно, хотя и не могу этого доказать). Какова минимальная численность населения каждого острова? Можете ли вы доказать, что при меньшей численности населения какое-то из условий будет нарушено?

В. ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ

269. Полна ли эта система? . . . .

У одного логика хранится «Книга высказываний». Страницы книги перенумерованы последовательными натуральными числами, и на каждой странице записано ровно одно высказывание. Ни одно высказывание не занимает более одной страницы. Номер страницы, на которой записано высказывание X, назовем *номером* высказывания X.

Разумеется, каждое высказывание, внесенное в «Книгу высказываний», либо истинно, либо ложно. Некоторые из истинных высказываний настолько очевидны логику, у которого хранится книга, что он принял их за аксиомы своей логической системы. Помимо аксиом в эту систему входят правила вывода, позволяющие *доказывать* истинные высказывания, сводя их к ранее доказанным истинным высказываниям и аксиомам, и *опровергать* ложные высказывания. Логик совершенно уверен в своей *непротиворечивости* (то есть в том, что всякое высказывание, доказуемое в его системе, действительно истинно, а каждое высказывание, опровергаемое в его системе, действительно ложно), но сомневается в ее *полноте* (то есть в том, что в системе все истинные высказывания доказуемы, а все ложные опровержимы). Все ли истинные высказывания доказуемы в его системе? Все ли ложные высказывания опровержимы в его системе? На эти вопросы логик хотел бы получить ответ.

У нашего логика помимо «Книги высказываний» есть еще «Книга множеств». Ее страницы также перенумерованы последовательными натуральными числами, и на каждой странице приведено описание некоторого множества чисел. (Под числами мы понимаем здесь целые положительные, или натуральные, числа 1, 2, . . . , n, ...) Любое множество, внесенное в «Книгу множеств», мы будем называть *учтенным* множеством.

Если задано натуральное число n, то может случиться, что множество, записанное на n-й странице «Книги множеств», содержит число n. В этом случае мы будем называть n экстраординарным числом.

Кроме того, назовем число h *сопряженным* с числом n, если в высказывании, записанном на n-й странице «Книги высказываний», утверждается, что n — экстраординарное число.

Известно, что выполняются следующие четыре условия:

E_1: Множество номеров всех доказуемых высказываний — учтенное множество.

E_2: Множество номеров всех опровержимых высказываний — учтенное множество.

C: Для любого учтенного множества A множество $\bar{A}$, состоящее из всех чисел, которые не принадлежат множеству A, — учтенное множество.

H: Для любого учтенного множества A существует другое учтенное множество B, такое, что каждое число из B имеет сопряженное, принадлежащее A, и каждое число, не принадлежащее B, имеет сопряженное, не принадлежащее A.

Этих четырех условий достаточно, чтобы ответить на вопросы логика: «Каждое ли истинное высказывание доказуемо в его системе? Каждое ли ложное высказывание опровержимо в его системе?» Кроме того, можно определить, является ли множество номеров всех истинных высказываний учтенным множеством, а также является ли учтенным множеством множество номеров всех ложных высказываний.

Как это сделать?

Решение. Перед вами не что иное, как гёделев остров из раздела А, но в ином «одеянии». Номера истинных высказываний играют роль рыцарей, номерам ложных высказываний отведена роль лжецов, доказуемые высказывания соответствуют признанным рыцарям, опровержимые — отъявленным лжецам. Учтенные роли заменяют собой клубы. Понятие множества, записанного на странице с заданным номером, играет роль клуба, названного по имени одного из обитателей острова. Экстраординарные числа — это не что иное, как номинабельные члены общины, а сопряженные числа являются аналогами друзей.

Чтобы решить задачу, прежде всего необходимо доказать аналог условия G.

Условие G. Для любого учтенного множества A найдется высказывание, истинное в том и только в том случае, если его номер принадлежит A.

Чтобы доказать условие G, выберем любое учтенное множество A. Пусть B — множество, заданное условием H, n — номер страницы, на котором записано B в «Книге множеств». По условию H если число n принадлежит B, то у него имеется сопряженное число h, принадлежащее множеству A, а если n не принадлежит B, то у него есть сопряженное число h, не принадлежащее A. Мы утверждаем, что высказывание X на h-й странице и есть то самое высказывание, которое требуется найти.

Высказывание X утверждает, что n — экстраординарное число, то есть что n принадлежит множеству B (так как множество B занесено на n-ю страницу «Книги множеств»). Если X истинно, то число n действительно принадлежит множеству B. Следовательно, h принадлежит A. Итак, если X истинно, то его номер (число h) принадлежит множеству A. Предположим теперь, что X ложно. Тогда число n не принадлежит B. Следовательно, сопряженное число h не принадлежит A. Итак, X истинно в том и только в том случае, если его номер принадлежит множеству A.

После того как условие G доказано, ответить на вопросы логика уже не трудно. Дано, что множество номеров A всех доказуемых высказываний — учтенное множество. Следовательно, по условию C множество $\bar{A}$ всех чисел, не совпадающих с номерами доказуемых высказываний, также учтенное множество. Значит (по условию G), существует высказывание X, которое истинно в том и только в том случае, если его номер принадлежит множеству $\bar{A}$. Но если номер высказывания X принадлежит множеству $\bar{A}$, то он не принадлежит множеству A, то есть высказывание X недоказуемо (так как множество A состоит из номеров доказуемых высказываний). Итак, X истинно в том и только в том случае, если X недоказуемо. Это означает, что либо X истинно и недоказуемо, либо X ложно и доказуемо. По условиям задачи ни одно ложное высказывание недоказуемо в системе. Следовательно, X должно быть истинным и недоказуемым в системе.

Построим теперь ложное высказывание, которое неопровержимо в системе. Пусть A — множество всех опровержимых высказываний. Воспользовавшись условием G, мы получим высказывание Y, истинное в том и только в том случае, если его номер совпадает с номером какого-нибудь опровержимого высказывания, то есть Y истинно в том и только в том случае, если Y опровержимо. Это означает, что Y либо истинно и опровержимо, либо ложно и неопровержимо. Первая альтернатива отпадает, так как опровержимое высказывание не может быть истинным. Следовательно, Y должно быть ложным, но неопровержимым в системе.

Перейдем теперь к остальным вопросам логики. Если бы множество номеров всех ложных высказываний было учтенным множеством, то существовало бы высказывание Z, которое было бы истинным в том и только в том случае, если бы его номер совпадал с номером какого-нибудь ложного высказывания. Иначе говоря, Z было бы истинным в том и только в том случае, если Z ложно, что невозможно. (Z напоминало бы высказывание «это высказывание ложно».) Следовательно, множество номеров всех ложных высказываний — неучтенное множество. Из условия C следует, что множество номеров истинных высказываний также не является учтенным множеством.

270. Теорема Гёделя. . . . .

Предыдущая задача представляет собой не что иное, как упрощенный вариант знаменитой теоремы Гёделя о полноте.

В 1931 г. Курт Гёдель совершил поразительное открытие. Он установил, что математическую истину в некотором смысле нельзя формализовать полностью. Гёдель доказал, что в математической системе, принадлежащей широкому классу систем, всегда найдется утверждение, недоказуемое (то есть невыводимое из аксиом системы), несмотря на свою истинность! Следовательно, ни одной аксиоматической системы, сколь бы остроумно она ни была устроена, не достаточно для доказательства всех математических истин. Гёдель впервые доказал свою теорему для системы «*Principia Mathematica*» Уайтхеда и Расселла, но предложенное им доказательство, как я уже говорил, допускает перенос и на многие другие системы. Во всех этих системах существует вполне определенное множество выражений, называемых *предложениями*, которые подразделяются на *истинные* и *ложные*. Некоторые истинные предложения приняты за аксиомы системы. Точный перечень правил вывода позволяет доказывать (выводить из аксиом) одни предложения и опровергать другие. Помимо предложений система содержит *имена* различных множеств (целых и положительных) чисел. Любое множество чисел, наделенное в рассматриваемой системе именем, можно назвать *именуемым*, или *определимым*, множеством системы (в предыдущей задаче такие множества скрывались под псевдонимом «учтенные множества»). Весьма существенно, что все предложения можно перенумеровать, а все определимые множества перечислить по порядку. Это означает, что математическая система удовлетворяет условиям E_1, E_2, C и H нашей задачи. (Номер, присваиваемый каждому предложению, — в задаче мы называли его просто номером — в математической логике известен под названием *гёделевого номера* предложения.) Доказать, что система удовлетворяет условиям C и H, очень просто. Доказательство того, что система удовлетворяет условиям E_1 и E_2, в принципе несложно *, но довольно громоздко. Коль скоро доказано, что система удовлетворяет всем четырем условиям, они позволяют построить предложение, которое истинно, но недоказуемо (невыводимо) в данной системе.

Это предложение можно представлять себе как некоторое предложение X, содержащее утверждение о своей недоказуемости. Такое предложение действительно должно быть истинно, но недоказуемо (подобно тому как житель острова G, утверждавший, что он непризнанный рыцарь, действительно был рыцарем, но не был признанным рыцарем).

Возможно, вы спросите: но если известно, что предложение X (содержащее утверждение о своей недоказуемости) истинно, то почему бы не принять его за новую аксиому? Разумеется, мы можем пополнить

* Напомним условие H. Для любого числа n существует высказывание, утверждающее, что n — экстраординарное число. Это высказывание (как и всякое другое предложение) имеет гёделев номер. Обозначим его n^*. Оказывается, что для любого определимого множества A множество B всех чисел n, для которых n^* принадлежит A, также определимо. Поскольку гёделев номер n^* сопряжен с числом n, то тем самым условие H выполнено.

список аксиом системы еще одной аксиомой, но расширенная система также будет удовлетворять условиям E_1, E_2, C и H. Следовательно, в ней найдется другое предложение X^1, которое будет истинным, но недоказуемым в расширенной системе. Таким образом, хотя расширенная система позволяет доказать больше истинных предложений, чем старая, тем не менее и в ней доказать все истинные предложения невозможно.

Должен сказать, что мое изложение метода Гёделя отличается от первоначального доказательства теоремы, предложенного самим Гёделем. Основное отличие состоит в том, что я использую понятие *истинности*, отсутствующее у Гёделя. Действительно, в первоначальном виде теорема Гёделя не содержит утверждения о существовании в системе истинного, но недоказуемого (невыводимого) предложения. В ней говорится нечто иное: при некотором правдоподобном допущении относительно системы в ней непременно существует предложение (и Гёдель демонстрирует такое предложение), которое в рамках системы невозможно ни доказать, ни опровергнуть.

Понятие истинности было строго формализовано логиком Альфредом Тарским. Он доказал, что для математических систем, удовлетворяющих условиям теоремы Гёделя, множество гёделевых номеров истинных предложений неопределимо в системе. Иногда этот результат формулируют так: «Во всякой достаточно мощной системе истинность предложений системы неопределима в рамках самой системы».

271. Последнее слово. . . . .

Рассмотрим следующий парадокс:

Это предложение недоказуемо.

Парадокс состоит в следующем. Если это предложение ложно, то не верно, что оно недоказуемо. Следовательно, оно доказуемо, а это означает, что оно истинно. Итак, предположив, что это предложение ложно, мы пришли к противоречию. Значит, оно должно быть истинно.

А теперь будьте внимательны! Я доказал, что предложение, набранное курсивом, истинно. Но в истинном предложении говорится о том, что есть на самом деле. Значит, оно недоказуемо. Как же мне удалось доказать его?

Где ошибка в приведенных мною рассуждениях? Ошибка в том, что понятие *доказуемого* предложения не вполне определенно. Одна из основных задач важного раздела современной математики, известного под названием «математической логики», состоит в придании точного значения понятию *доказательства*. Вполне строгого универсального определения доказательства, применимого к любым математическим системам, пока не существует. В современной математической логике принято говорить *о доказуемости в рамках данной системы*. Предположим, что у нас имеется система (назовем ее системой S), в которой строго определено, что такое доказуемость в рамках системы S. Предположим также, что система S непротиворечива, то есть что всякое доказуемое в S предложение действительно истинно. Рассмотрим следующее предложение:

Это предложение недоказуемо в системе S.

Никакого парадокса теперь не возникает, хотя это предложение обладает одним довольно интересным свойством. Дело в том, что оно должно быть истинным, но недоказуемым в системе S. Оно представляет собой грубый аналог предложения X (содержащего утверждение о собственной недоказуемости не вообще, а в рамках системы S), построенного Гёделем в первоначальном варианте доказательства его знаменитой теоремы.

Несколько слов я хотел бы сказать о «дважды гёделевом» условии, которое мы анализировали в разделе Б. Дело в том, что полученный Гёделем результат справедлив не только для гёделевых систем (гёделевой я называю систему, в которой для любого определимого множества A найдется предложение, истинное в том и только в том случае, если его гёделев номер принадлежит A), но и для дважды гёделевых систем (дважды гёделевой я называю систему, в которой для любых определимых множеств A, B найдутся предложения X, Y, такие, что X истинно в том и только в том случае, если гёделев номер предложения Y принадлежит A, а Y истинно в том и только в том случае, если гёделев номер предложения X принадлежит B). Располагая дважды гёделевой системой, мы можем (используя условия E_1, E_2 и C) построить два предложения X, Y, такие, что X будет содержать утверждение о доказуемости предложения Y (при этом я понимаю, что X истинно в том и только в том случае, если Y доказуемо), а Y будет содержать утверждение о недоказуемости предложения X. Одно из предложений (какое именно — не известно) X и Y должно быть истинно, но недоказуемо. Можно поступить иначе и построить два предложения X, Y, такие, что X будет содержать утверждение об опровержимости предложения Y, а Y будет содержать утверждение о неопровержимости предложения X. По крайней мере одно из предложений X, Y (какое именно — не известно) должно быть ложно, но неопровержимо. Возможен и еще один вариант. Не используя даже условие C, можно построить два предложения X, Y, такие, что X будет содержать утверждение о доказуемости Y, а Y — о неопровержимости X. Одно из них (какое именно — не известно) должно быть либо истинно, но недоказуемо, либо ложно, но неопровержимо (но каким именно набором из этих двух будет обладать предложение — не известно).

И последнее, о чем я хочу сказать вам, пока не забыл. Как же называется эта книга? Эта книга так и называется — «Как же называется эта книга?»

Содержание

РЭЙМОНД М. СМАЛЛИАН

«КАК ЖЕ НАЗЫВАЕТСЯ ЭТА КНИГА?»

Старший научный редактор А. Г. Белевцева
Младший научный редактор М. А Харузина
Художник Л. М. Муратова
Художественный редактор Л. Е. Безрученков
Технический редактор В. П. Сизова
Корректор Н. Н. Яковлева

ИБ — 2383

Сдано в набор 08.01.81.
Подписано к печати 01.04.81.
Формат $84 \times 108^1/_{32}$.
Бумага типографская № 2.
Гарнитура литературная. Печать высокая.
Объем 3,75 бум. л. Усл. печ. л. 12,60. Усл. кр. отт. 12,80
Уч.-изд. л. 11,40. Изд. № 12/1006.
Тираж 50 000 экз. Зак. 954. Цена 60 коп.

«ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

Рэймонд М. Смаллиан

КАК ЖЕ НАЗЫВАЕТСЯ ЭТА КНИГА?

«Как же называется эта книга?» Рэймонда М. Смаллиана — самый оригинальный, глубокий и преисполненный юмора сборник из всех когда-либо написанных сборников задач по занимательной логике. В него входят более 200 новых головоломок, созданных необычайно изобретательным автором. Задачи перемежаются математическими шутками, анекдотами из повседневной жизни и неожиданными парадоксами. Завершает книгу замечательная серия беллетризованных задач, которые вводят читателя в самую суть теоремы Курта Гёделя о неполноте,— одного из замечательнейших результатов математической логики XX века.

Мартин Гарднер

60 коп.